

ОПД.Р.03 СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА
РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ АРОК
Методическое пособие

Содержание

Основные термины и определения.....	4
Теоретические сведения	5
Общий ход расчета	6
Бесшарнирная арка.....	6
Двухшарнирная арка.....	8
Пример расчета двухшарнирной арки с затяжкой.....	10
Расчет арки в среде MathCAD	15
Особенности расчета арок в программной системе“COMPASS”	20
Сравнение результатов расчета	22
Приложение №1	23
Приложение №2	25
Список литературы	26

Основные термины и определения

- Арка** – плоская распорная система, имеющая форму криволинейного стержня, обращенного выпуклостью в направлении, противоположном направлению действия основной нагрузки.
- Распор** – проекция опорной реакции арки на прямую, соединяющую точку со смежной опорной точкой.
- Затяжка** – стержень, шарнирно прикрепленный концами к арке и предназначенный для восприятия распора.
- Ключ арки** – место, в котором сечение, перпендикулярное к оси арки, является осью симметрии.
- Стрела подъема арки** – расстояние от наиболее удаленной точки оси арки (ключа) до линии, соединяющей центры опор.
- Пролет арки** – расстояние между опорными вертикалями.
- Ось арки** – средняя линия, проходящая через центры тяжести сечений арки.
- Равномерно распределенная нагрузка на единицу длины** – нагрузка постоянной интенсивности, измеряемая на единицу длины оси арки.
- Равномерно распределенная нагрузка на единицу проекции** – нагрузка постоянной интенсивности, измеряемая на единицу проекции оси арки на какую-либо ось координат.
- Продольная сила** – направленная по касательной к оси арки проекция главного вектора системы сил, заменяющего в данном поперечном сечении действие отброшенной части арки на ее оставшуюся часть. Положительное направление продольной силы совпадает с направлением нормали к сечению арки и соответствует растяжению.
- Поперечная сила** – направленная вдоль оси, перпендикулярной к оси арки составляющая главного вектора системы сил, заменяющего в данном поперечном сечении действие отброшенной части арки, на ее оставшуюся часть. Положительное направление поперечной силы совпадает с направлением нормали к сечению, повернутой по часовой стрелке на прямой угол.
- Изгибающий момент** – взятый относительно оси поперечного сечения арки момент системы сил, заменяющий в данном поперечном сечении действие отброшенной части арки на ее оставшуюся часть. Положительный изгибающий момент растягивает нижние волокна в арке.

Теоретические сведения

Статически неопределимые арки в отличие от статически определимых содержат лишние связи, усилия в которых не могут быть найдены с помощью уравнений статического равновесия.

В зависимости от количества лишних связей (степени статической неопределимости) различают следующие основные виды статически неопределимых арок: бесшарнирные (рис.1), одношарнирные и двухшарнирные (рис.2). Статически неопределимые арки, также как и статически определимые, могут быть с затяжками и без (рис.2).

Одношарнирная арка, характеризуется наличием одного, ключевого шарнира.

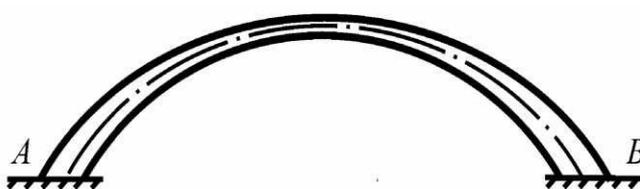


Рис.1 Бесшарнирная арка

Бесшарнирная арка – криволинейный стержень, защемленный двумя концами. Она трижды статически неопределима, так как в опорах возникают шесть реакций - две вертикальных, две горизонтальных и два момента, а уравнений равновесия для арки можно составить только три. Наибольшие внутренние усилия и напряжения в арках такого типа возникают вблизи опор. Поэтому бесшарнирные арки часто конструируют таким образом, чтобы жесткость на опорах была выше, чем в центре пролета (рис.1).

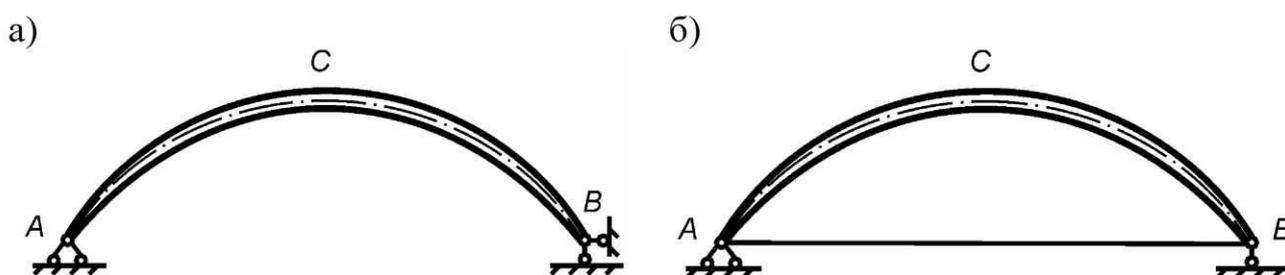


Рис.2 Двухшарнирная арка: а) без затяжки, б) с затяжкой.

Двухшарнирная арка представляет собой шарнирно опертый криволинейный стержень, причем обе его опоры являются неподвижными (рис.2). Такая арка является один раз статически неопределимой. Действительно, в ее опорах возникают четыре реакции – две вертикальных и две горизонтальных, а уравнений равновесия для арки можно составить только три.

Как показал опыт расчета, наибольшие внутренние усилия и напряжения возникают в середине пролета арок такого типа. Поэтому двухшарнирные арки

часто конструируют таким образом, чтобы жесткость в центре пролета была выше, чем на опорах.

Выполняются арки из различных материалов (металл, железобетон, дерево).

Ось арки может быть очерчена по дуге окружности, эллипса, параболы или гиперболы (приложение №1 табл.1).

Необходимо учесть, что поперечное сечение арки переменное по длине, все эпюры криволинейные и это влечет за собой неприменимость способа Верещагина и сложность непосредственного интегрирования формулы Мора-Максвелла. Поэтому при вычислении единичных и грузовых перемещений применяются приемы численного интегрирования. Кроме того, известно, что при расчете крутых “тонких” арок, т.е., если $\frac{1}{5} \cdot l \leq f$ и $d_c \leq \frac{1}{10} \cdot l$ (d_c – высота сечения арки в точке С, т.е. при вычислении перемещений можно пренебречь влиянием деформаций от изгибающих моментов, а при расчете арок с затяжкой – и деформации от продольного усилия в затяжке).

Общий ход расчета

Бесшарнирная арка

Расчет бесшарнирной арки, так же как и двухшарнирной арки, выполняется методом сил. Основная система образуется отбрасыванием трех связей на оси арки, т.е. за основную систему принимается симметричная система в виде двух отдельных криволинейных консолей (рис.3). Влияние отброшенных связей заменяется соответствующими лишними неизвестными X_1, X_2, X_3 .

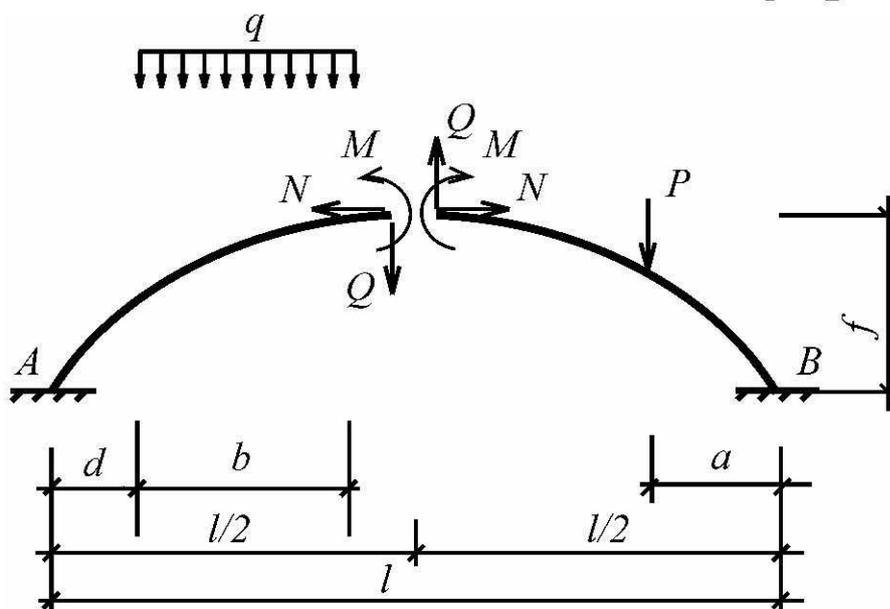


Рис.3 Основная система

Разрезав арку в замке в качестве первых неизвестных принимаем силы и моменты взаимодействия: X_1 (продольные силы), X_2 (моменты) и X_3 (поперечные силы).

Канонические уравнения для этих неизвестных запишем в следующем виде:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2p} = 0, \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} = 0 \end{cases}$$

Для вывода выражений перемещений δ используем эпюры моментов $\overline{M}_1, \overline{M}_2, \overline{M}_3$ в единичных состояниях $\overline{X}_1=1, \overline{X}_2=1, \overline{X}_3=1$ (рис.4).

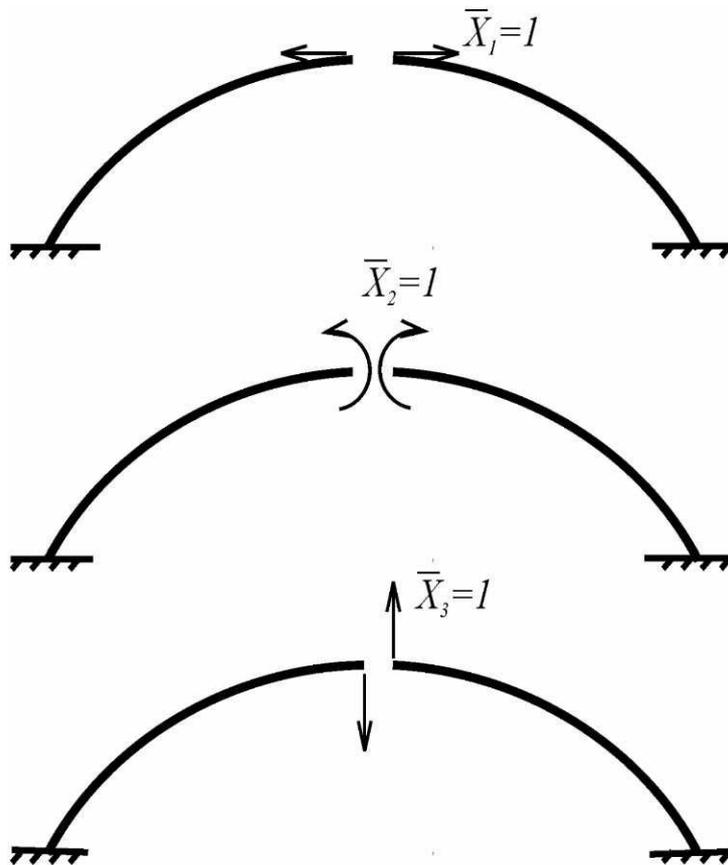


Рис.4 Вспомогательные состояния для арки

Соответственно, формулы системы разрешающих уравнений метода сил равны:

$$\delta_{11} = \int_L \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_1}{EI} dL, \text{ аналогично } \delta_{22}, \delta_{33}.$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int_L \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_2}{EI} dL, \text{ аналогично } \delta_{13} = \delta_{31} \text{ и } \delta_{23} = \delta_{32},$$

$$\Delta_{1p} = \int_L \frac{\overline{M}_1 M_p}{EI} dL, \quad \Delta_{2p} = \int_L \frac{\overline{M}_2 M_p}{EI} dL, \quad \Delta_{3p} = \int_L \frac{\overline{M}_3 M_p}{EI} dL$$

Коэффициенты $\delta_{12} = \delta_{21}$ и $\delta_{13} = \delta_{31}$ равны нулю, так как получаются путем перемножения по формулам Максвелла-Мора симметричной и обратно симметричной эпюр.

После того как получены значения X_1, X_2 и X_3 , находятся окончательные значения изгибающего момента в сечениях арки:

$$M = \overline{M}_1 X_1 + \overline{M}_2 X_2 + \overline{M}_3 X_3 + M_p$$

Реакции в опорах находятся из уравнений равновесия для левой и правой частей арки. После этого перерезывающие и продольные усилия в арке находятся точно также как в статически определимой арке.

Двухшарнирная арка

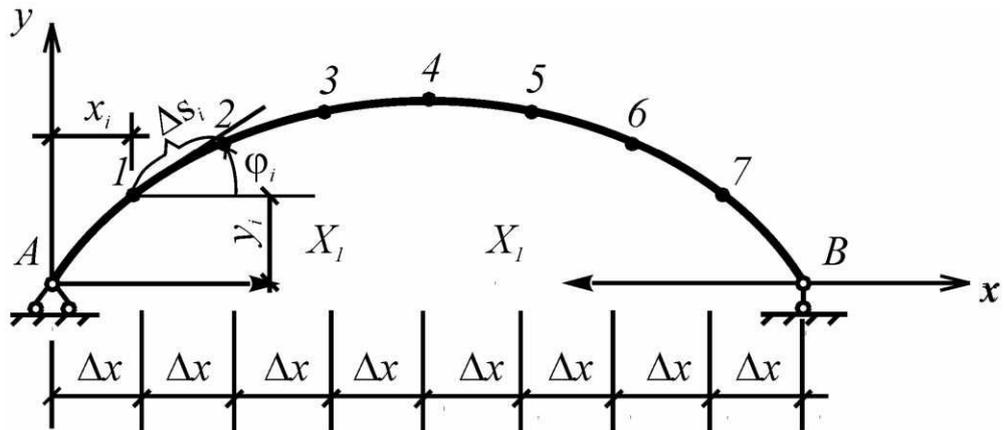


Рис.5 Основная система метода сил

Расчет двухшарнирной арки, как и других систем с криволинейными элементами, при заданном очертании оси производится по методу сил (рис.5).

Двухшарнирная арка имеет одну лишнюю связь. Основная система получена путем разреза затяжки и имеет вид криволинейной балки. За неизвестное X_1 принято усилие в затяжке $X_1 = H$.

Неизвестное X_1 определяется из канонического уравнения метода сил

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} = 0,$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}},$$

где δ_{11} – взаимное горизонтальное перемещение концов затяжки в месте разреза, вызванное силами $X_1 = 1$, Δ_{1p} – взаимное горизонтальное перемещение концов затяжки в месте разреза, от внешней нагрузки.

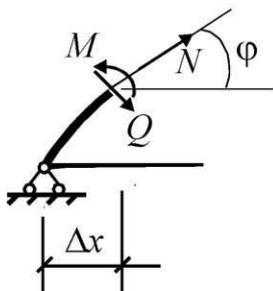


Рис. 6

От действия внешних нагрузок P, q на основную систему усилия возникают только в криволинейной балке, в перерезанной же затяжке усилий не возникает. Следова-

тельно, выражение для Δ_{1p} будет то же, что и для аналогичной двухшарнирной арки без затяжки. Для перемещения δ_{11} сравнительно с двухшарнирной аркой без затяжки добавляется влияние удлинения затяжки в состоянии $X_1 = 1$, т.е. удлинение $\frac{1 \cdot l}{E_3 A_3}$, где $E_3 A_3$ – жесткость затяжки на растяжение.

Выражения перемещений δ_{11} и Δ_{1p} можно вычислить различными способами. В случае арки **постоянной жесткости** и достаточно простой нагрузки может быть использовано аналитическое вычисление интегралов. В более сложных случаях – численное интегрирование, например при помощи математических пакетов типа MathCAD (рис.12).

Определение перемещений производится по формулам:

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1^2}{EI} ds + \sum \int \mu \frac{\bar{Q}_1^2}{GA} ds + \sum \int \frac{\bar{N}_1^2}{EA} ds;$$

$$\Delta_{1p} = \sum \int \frac{M_1 M_p}{EI} ds + \sum \int \mu \frac{Q_1 Q_p}{GA} ds + \sum \int \frac{N_1 N_p}{EA} ds.$$

Если рассматривается **крутая арка** ($\frac{f}{l} > \frac{1}{5}$), то при определении перемещений можно учитывать только деформации изгиба арки и деформацию растяжения затяжки (при вычислении δ_{11}). Для двухшарнирной арки с затяжкой перемещения равны:

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{M_1^2}{EI} ds + \sum \int \frac{N_1^2}{EA} ds = \sum \int \frac{M_1^2}{EI} ds + \frac{l}{E_3 A_3},$$

$$\Delta_{1p} = \sum \int \frac{M_1 M_p}{EI} ds.$$

Наибольшие сложности при выполнении расчета возникают при вычислении криволинейных интегралов. В случае арки **кругового очертания** длина бесконечно малого участка арки связана с бесконечно малым приращением угла α зависимостью

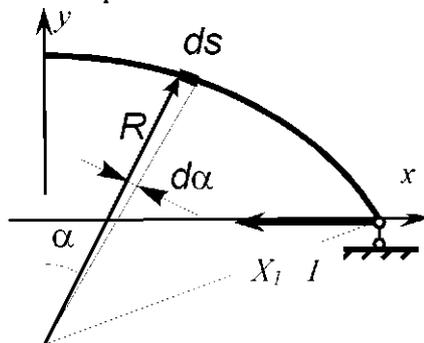


Рис. 7

$ds = R \cdot d\alpha$ (рис. 7).

Рассмотрим вспомогательное состояние основной системы. Легко убедиться, что вертикальные реакции в опорах арки будут отсутствовать, а изгибающий момент в сечениях арки (кругового очертания) определяется по формуле

$$M_1 = -1 \cdot y(x) = -R \cdot \cos \varphi$$

Следовательно, изгибающие моменты в основной системе от $X_1 = 1$ определяются из уравнения

$$M_1 = -1y = -y.$$

В основной системе изгибающие моменты от внешней нагрузки M_p равны моментам в простой двухопорной балке M^B того же пролета, что и арка, от нагрузки, действующей на арку.

Опорные реакции: $\sum M_B = 0$; $\sum M_A = 0$.

Точное интегрирование выражений перемещений δ_{11} и Δ_{1p} заменяется приближенным.

Для этого ось арки разбивается на несколько частей с равными величинами их проекций Δx .

Преобразуем перемещения:

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\overline{M_1}^2}{EI} ds + \frac{l}{E_3 A_3} = \sum_{i=1}^n \frac{(-y_i)^2}{EI_i} \Delta s_i + \frac{l}{E_3 A_3} = \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2 \cos \varphi_i}{EI_c} \cdot \frac{\Delta x}{\cos \varphi_i} + \frac{l}{E_3 A_3}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1p} &= \sum \int \frac{M_1 \cdot M_p}{EI} ds = \sum_{i=1}^n \frac{(-y_i) \cdot M_i^B}{EI_c} \Delta s_i = \sum_{i=1}^n \frac{(-y_i) \cdot M_i^B \cos \varphi_i}{EI_c} \cdot \frac{\Delta x}{\cos \varphi_i} = \\ &= -\frac{1}{EI_c} \sum_{i=1}^n y_i M_i^B \Delta x \end{aligned}$$

$$\text{или } EI_c \Delta_{1p} = -\sum_{i=1}^n y_i M_i^B \Delta x,$$

Изгибающий момент в заданной двухшарнирной арке определяем по формуле

$$M = M_p + \overline{M_1} x_1 = M_p - H \cdot y,$$

где $M_p = M^B$.

Затем выполняем кинематическую проверку проведенных вычислений (убедимся, что отсутствует взаимное сближение концов затяжки):

$$\sum \int \frac{M M_1}{EI} ds + \frac{x_1 l}{E_3 I_3}$$

Поперечные Q и продольные N силы определяются по формулам:

$$Q = Q^B \cos \varphi_i - H \sin \varphi_i,$$

$$N = -(Q^B \sin \varphi_i + H \cos \varphi_i),$$

где Q - значение поперечных сил от заданной нагрузки в двухопорной балке.

Пример расчета двухшарнирной арки с затяжкой

Для двухшарнирной арки с затяжкой (рис.8) требуется построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил (M , Q , N).

Ось арки очерчена по квадратичной параболе, уравнение которой показано в табл.№1 приложения №1.

Размеры: $l = 30$ м, $f = 7.5$ м, $a = 6$ м, $b = 8$ м, $d = 4$ м, $q = 1.8$ кН, $P = 4$ кН

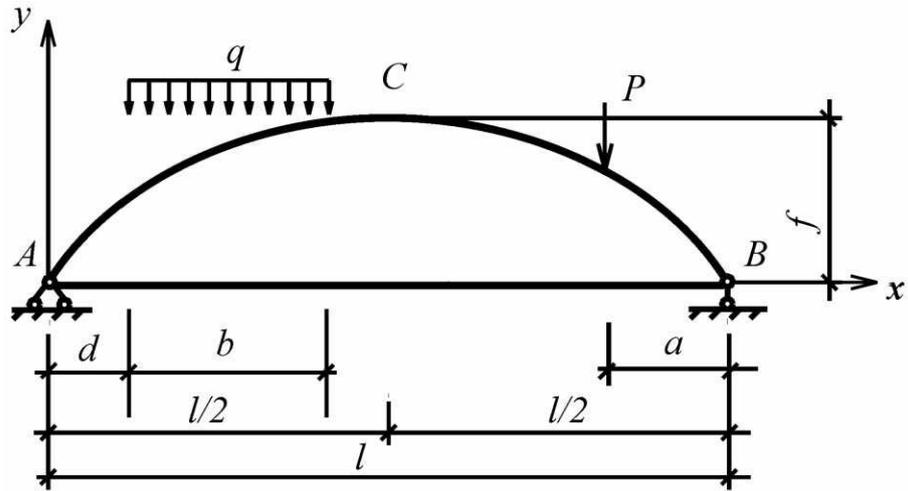


Рис. 8

Момент инерции поперечного сечения вдоль оси арки изменяется по закону $I = \frac{I_c}{\cos \varphi}$, где I_c – момент инерции в ключевом сечении арки (точка C), φ – угол, образованный касательной к кривой арки в рассматриваемом сечении с осью x .

Сечение затяжки постоянное. Задано отношение жесткости в точке C при изгибе арки (EI_c) к жесткости сечения затяжки при растяжении ($E_3 A_3$):

$$\frac{EI_c}{E_3 A_3} = 0.4 \text{ м}^2.$$

Эпюра изгибающих моментов в основной системе от $X_1 = 1$, построенная на горизонтальной проекции оси арки, показана на рис.9.

Находим опорные реакции:

$$\sum M_A = 0; \quad V_B l - P(l - a) - qb \left(\frac{b}{2} + d \right) = 0;$$

$$\sum M_B = 0; \quad V_A l - Pa - qb \left(l - d - \frac{b}{2} \right) = 0.$$

Эпюру $M^B = M_p$ (рис.8) строим по уравнениям:

$$M^B = V_A x \quad \text{при } 0 \leq x \leq 4$$

$$M^B = V_A x - \frac{q(x-d)^2}{2} \quad \text{при } 4 \leq x \leq 12$$

$$M^B = V_B(l-x) - P(l-x-a) \quad \text{при } 12 \leq x \leq 24$$

$$M^B = V_B(l-x) \quad \text{при } 24 \leq x \leq 30$$

При этом моменты считаются положительными, так как от нагрузки растянуты нижние волокна.

Для сравнения точности расчета ось арки разбивается на 10 и 30 частей с равными величинами их проекций Δx ($\Delta x = \frac{30}{10} = 3 \text{ м}$, $\Delta x = \frac{30}{30} = 1 \text{ м}$).

Все вычисления, выполненные по программе EXEL для 10 участков, показаны в таблице №1.

В графах 2 и 3 приведены значения координат сечений арки на границе участков, где ординаты y_i вычислены по формулам приложения 3 для квадратичной параболы, в графе 8 - значения изгибающих моментов от внешней нагрузки в основной системе M_p .

Преобразуем перемещения:

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{M_1^2}{EI} ds + \frac{l}{E_3 A_3} = \sum_{i=1}^n \frac{(-y_i)^2}{EI_i} \Delta s_i + \frac{l}{E_3 A_3} = \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2 \cos \varphi_i}{EI_c} \cdot \frac{\Delta x}{\cos \varphi_i} + \frac{l}{EI_c} \cdot 0.4 =$$

$$= \frac{1}{EI_c} (\sum_{i=1}^n y_i^2 \Delta x + 0.4l)$$

или $EI_c \delta_{11} = \sum_{i=1}^n y_i^2 \Delta x + 0.4l = \sum 1 + 0.4 \cdot l$.

$$\Delta_{1p} = \sum \int \frac{\overline{M}_1 M_p}{EI} ds = \sum_{i=1}^n \frac{(-y_i) M_i^B}{EI_i} \Delta s_i = \sum_{i=1}^n \frac{(-y_i) M_i^B \cos \varphi_i}{EI_c} \cdot \frac{\Delta x}{\cos \varphi_i} = - \frac{1}{EI_c} \sum_{i=1}^n y_i M_i^B \Delta x$$

или $EI_c \Delta_{1p} = - \sum_{i=1}^n y_i M_i^B \Delta x = - \sum 2$,

Сумма величин, входящих в графу 7, дает $\sum 1$ и $EI_c \delta_{11} = \sum 1 + 0.4l$.

Сумма величин, входящих в графу 9, дает $EI_c \Delta_{1p} = \sum 2$

Находим распор H , а также изгибающий момент M . Эпюры M , Q , N показаны на рис. 11.

Затем выполняем кинематическую проверку проведенных вычислений (убедимся, что отсутствует взаимное сближение концов затяжки):

$$\sum \int \frac{M \overline{M}_1}{EI} ds + \frac{x_1 l}{E_3 I_3} = \frac{1}{EI_c} (\sum_{i=1}^n M_i (-y_i) \cdot \Delta x + 0.4 \cdot l \cdot x_1) = \frac{1}{EI_c} (\sum 3 + 0.4 \cdot l \cdot x_1)$$

(погрешность $\frac{(\sum 3 + 0.4 \cdot l \cdot x_1) \cdot 100\%}{0.4 \cdot l \cdot x_1}$).

Определяем поперечные Q и продольные N силы по формулам:

$$Q = Q^B \cos \varphi_i - H \sin \varphi_i,$$

$$H = -(Q^B \sin \varphi_i + H \cos \varphi_i)$$

Значения $\sin \varphi_i$, и $\cos \varphi_i$, вычисляются по выражениям:

$$\cos \varphi_i = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \varphi_i}}, \quad \sin \varphi_i = \text{tg} \varphi_i \cdot \cos \varphi_i.$$

Таблица №1

Номер сечения	x, м	y, м	y'	sin	cos	y ² Δx	M ^B =M _p	M ^B yΔx	H _y	M	M _y Δx	Q ^B =Q _p	Q	N
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A(0)	0	0.00	1.04	0.6931	0.7208	0	0.00	0	0	0	0	11.36	0.999	-14.799
1	3	2.81	0.832	0.7687	0.6396	23.655	34.08	287.090	26.7792095	7.301	61.502	11.36	2.633	-14.597
1'	4	3.61	0.7627	0.7951	0.6064	38.995	45.44	491.479	34.3831825	11.057	39.864	11.36	3.249	-14.472
2	6	4.99	0.624	0.8484	0.5294	74.760	64.56	966.851	47.6074835	16.953	253.881	7.76	1.535	-12.199
3	9	6.55	0.416	0.9233	0.3841	128.786	79.74	1567.369	62.4848221	17.255	339.168	2.36	-1.484	-9.712
4	12	7.49	0.208	0.9790	0.2036	168.210	78.72	1768.366	71.4112252	7.309	164.184	-3.04	-4.918	-8.718
5	15	7.80	0	1.0000	0.0000	182.520	69.60	1628.640	74.3866929	-4.787	-112.009	-3.04	-3.040	-9.537
6	18	7.49	-0.208	0.9790	-0.2036	168.210	60.48	1358.623	71.4112252	-10.931	-245.559	-3.04	-1.034	-9.956
7	21	6.55	-0.416	0.9233	-0.3841	128.786	51.36	1009.532	62.4848221	-11.125	-218.670	-3.04	0.856	-9.973
8	24	4.99	-0.624	0.8484	-0.5294	74.760	42.24	632.586	47.6074835	-5.367	-80.383	-3.04	2.470	-9.700
8'	24	4.99	-0.624	0.8484	-0.5294	74.760	42.24	632.586	47.6074835	-5.367	-80.383	-7.04	-0.924	-11.818
9	27	2.81	-0.832	0.7687	-0.6396	23.655	21.12	177.915	26.7792095	-5.659	-47.673	-7.04	0.688	-11.834
B(10)	30	0.00	-1.04	0.6931	-0.7208	0	0.00	0	0	0	0	-7.04	1.995	-11.685

Σ1= 973.343

Σ2= 9396.972

Σ3= -114.441066073160

EI₀δ₁₁= 985.343

0.4*l*X₁= 114.441066073161

X₁=H= 9.537

Погрешность 0.00000000124%

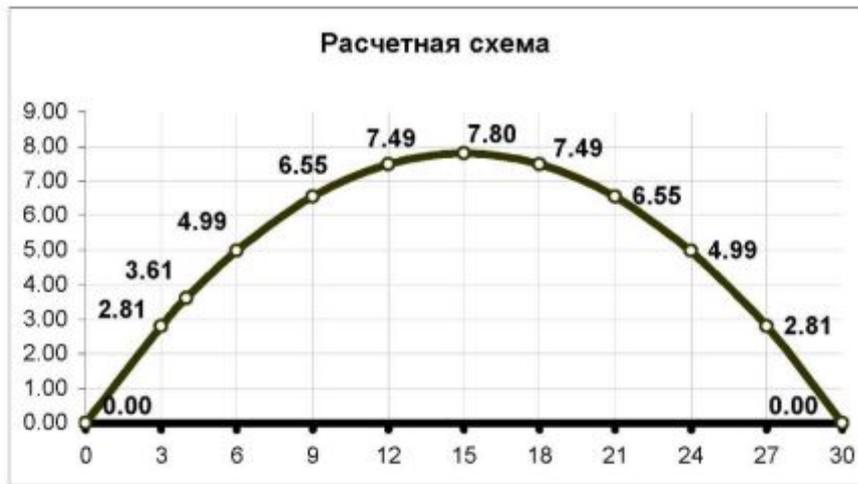
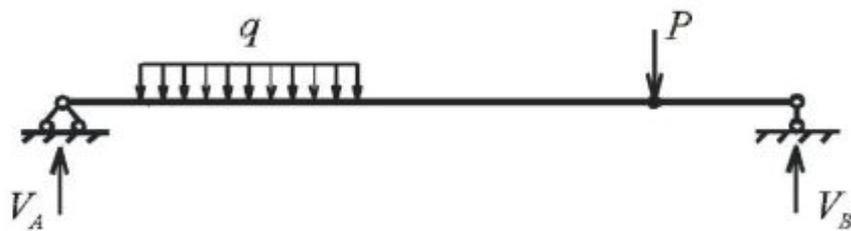


Рис.9 Расчетная схема

a)



б)



в)

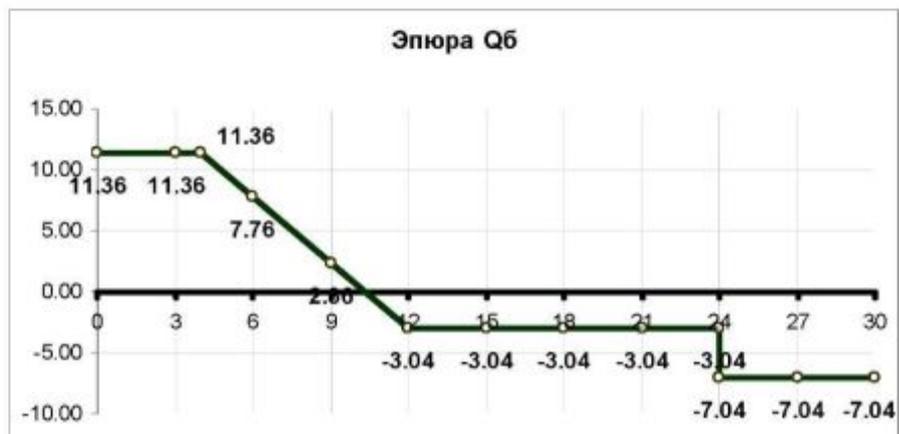
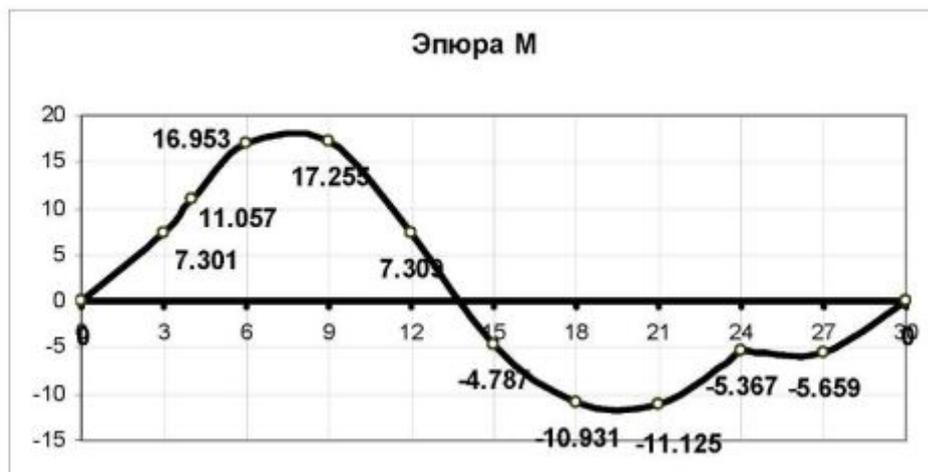
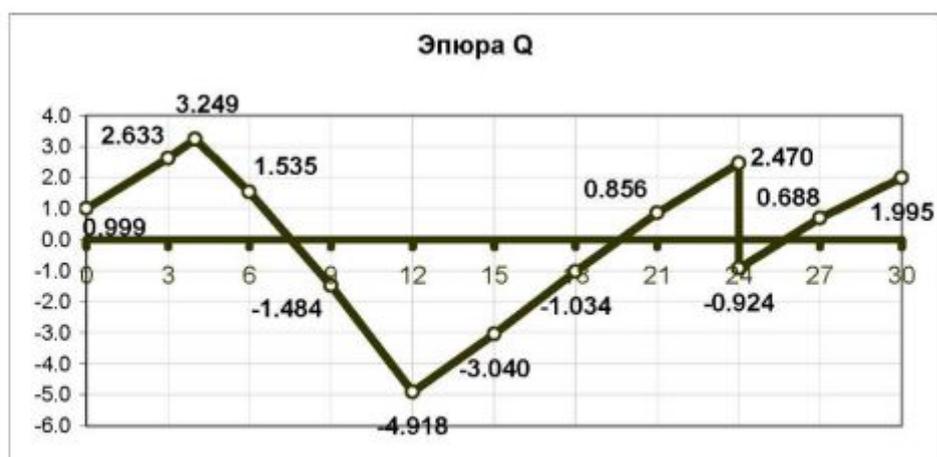


Рис.10

a)



б)



в)

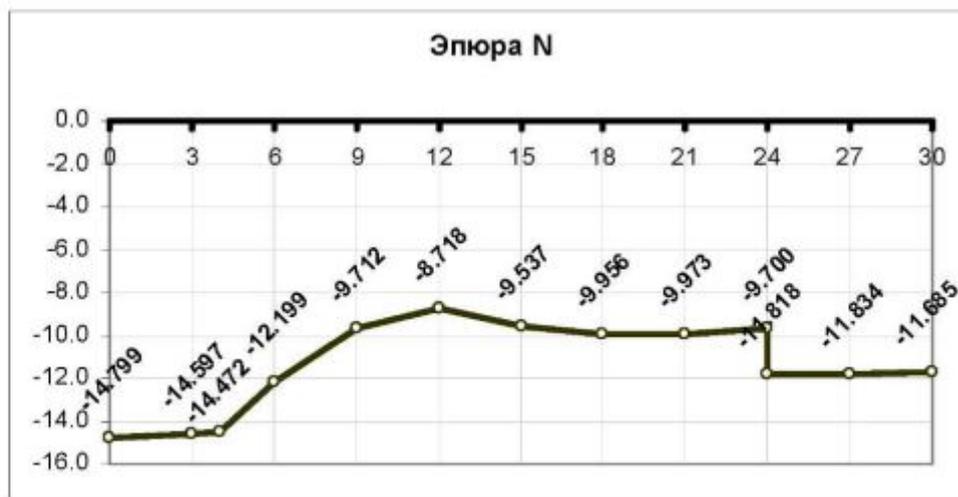


Рис.11

Расчет арки в среде MathCAD

Входные данные: $L := 30 \text{ m}$ $f := 7.5 \text{ m}$
 $b := 8 \text{ m}$ $a := 6 \text{ m}$ $d := 4 \text{ m}$
 $q := 1.8 \text{ kN/m}$ $P := 4 \text{ kN}$

$n := 10$

$$y(x) := \frac{4 \cdot f}{L^2} \cdot (L \cdot x - x^2) \quad \tan(x) := -4 \cdot f \cdot \frac{(-L + 2 \cdot x)}{L^2}$$

$$S\varphi(x) := \sin(\text{atan}(\tan(x))) \quad C\varphi(x) := \cos(\text{atan}(\tan(x)))$$

$$V_a := \frac{P \cdot a + q \cdot b \cdot \left(L - d - \frac{b}{2}\right)}{L} \quad V_a = 11.36 \text{ kN}$$

$$V_b := \frac{P \cdot (L - a) + q \cdot b \cdot \left(\frac{b}{2} + d\right)}{L} \quad V_b = 7.04 \text{ kN}$$

$$y_X(X) := \frac{4 \cdot f}{L^2} \cdot X(L - X)$$

$$\Delta_X := \frac{L}{n} \quad \Delta_X = 3$$

$$i := 0, 1, \dots, n \quad x_i := \Delta_X \cdot i \quad Y := y(x)$$

$$\text{Sin}\varphi := S\varphi(x) \quad \text{Cos}\varphi := C\varphi(x) \quad Y_{x_i} := y(x_i)$$

$$M_p(x) := \begin{cases} V_a \cdot x & \text{if } 0 \leq x \leq 4 \\ V_a \cdot x - \frac{q}{2} \cdot (x - d)^2 & \text{if } 4 \leq x \leq 12 \\ V_b \cdot (L - x) - P \cdot (L - x - a) & \text{if } 12 \leq x \leq 24 \\ V_b \cdot (L - x) & \text{if } 24 \leq x \leq 30 \end{cases} \quad Q_p(x) := \begin{cases} V_a & \text{if } 0 \leq x \leq 4 \\ V_a - q \cdot x + q \cdot d & \text{if } 4 \leq x \leq 12 \\ -V_b + P & \text{if } 12 \leq x \leq 24 \\ -V_b & \text{if } 24 \leq x \leq 30 \end{cases}$$

$$M_{p_i} := M_p(x_i)$$

$$\Delta_X \left[\sum_i (Y_i)^2 \right] = 899.9100 \quad \Delta_X \sum_i M_{p_i} \cdot Y_i = 9035.55 \quad \text{- приближенное интегрирование}$$

$$\int_0^L y(x)^2 dx = 900.0000 \quad \int_0^L M_p(x) y(x) dx = 9022.2000 \quad \text{- точное интегрирование}$$

$$\delta_{11} := \int_0^L y(x)^2 dx + 0.4L \quad \delta_{11} = 912$$

$$\Delta_P := - \int_0^L M_p(x) y(x) dx \quad X_1 := \frac{-\Delta_P}{\delta_{11}} \quad X_1 = 9.893$$

$$M(x) := M_p(x) - y(x) \cdot X_1 \quad \mu_i := M(x_i)$$

Рис.12 Расчет двухшарпирной арки с затяжкой в среде MathCAD

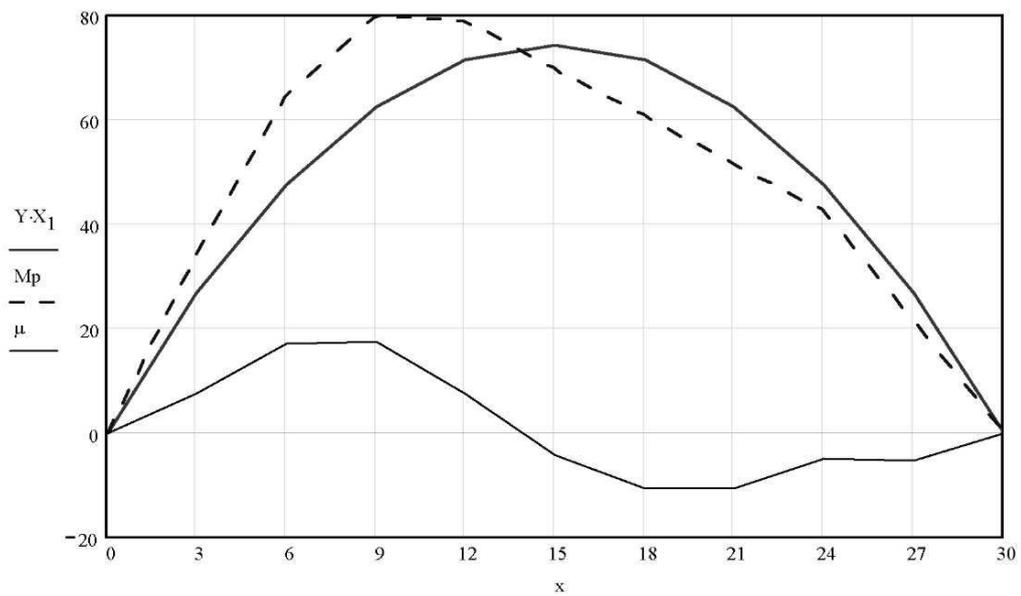
$x =$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \\ 9 \\ 12 \\ 15 \\ 18 \\ 21 \\ 24 \\ 27 \\ 30 \end{pmatrix}$	$Y =$	$\begin{pmatrix} 0.000 \\ 2.700 \\ 4.800 \\ 6.300 \\ 7.200 \\ 7.500 \\ 7.200 \\ 6.300 \\ 4.800 \\ 2.700 \\ 0.000 \end{pmatrix}$	$Y_x =$	$\begin{pmatrix} 0.000 \\ 2.700 \\ 4.800 \\ 6.300 \\ 7.200 \\ 7.500 \\ 7.200 \\ 6.300 \\ 4.800 \\ 2.700 \\ 0.000 \end{pmatrix}$	$\text{Sin}\varphi =$	$\begin{pmatrix} 0.707 \\ 0.625 \\ 0.514 \\ 0.371 \\ 0.196 \\ 0 \\ -0.196 \\ -0.371 \\ -0.514 \\ -0.625 \\ -0.707 \end{pmatrix}$	$\text{Cos}\varphi =$	$\begin{pmatrix} 0.707 \\ 0.781 \\ 0.857 \\ 0.928 \\ 0.981 \\ 1 \\ 0.981 \\ 0.928 \\ 0.857 \\ 0.781 \\ 0.707 \end{pmatrix}$
-------	--	-------	---	---------	---	-----------------------	--	-----------------------	---

$\frac{1}{\text{Cos}\varphi} =$	$\begin{pmatrix} 1.414 \\ 1.281 \\ 1.166 \\ 1.077 \\ 1.02 \\ 1 \\ 1.02 \\ 1.077 \\ 1.166 \\ 1.281 \\ 1.414 \end{pmatrix}$	$Y^2 =$	$\begin{pmatrix} 0.000 \\ 7.290 \\ 23.040 \\ 39.690 \\ 51.840 \\ 56.250 \\ 51.840 \\ 39.690 \\ 23.040 \\ 7.290 \\ 0.000 \end{pmatrix}$	$M_p =$	$\begin{pmatrix} 0.000 \\ 34.080 \\ 64.560 \\ 79.740 \\ 78.720 \\ 69.600 \\ 60.480 \\ 51.360 \\ 42.240 \\ 21.120 \\ 0.000 \end{pmatrix}$	$\mu =$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 7.37 \\ 17.07 \\ 17.42 \\ 7.49 \\ -4.6 \\ -10.75 \\ -10.96 \\ -5.25 \\ -5.59 \\ 0 \end{pmatrix}$
---------------------------------	---	---------	--	---------	--	---------	--

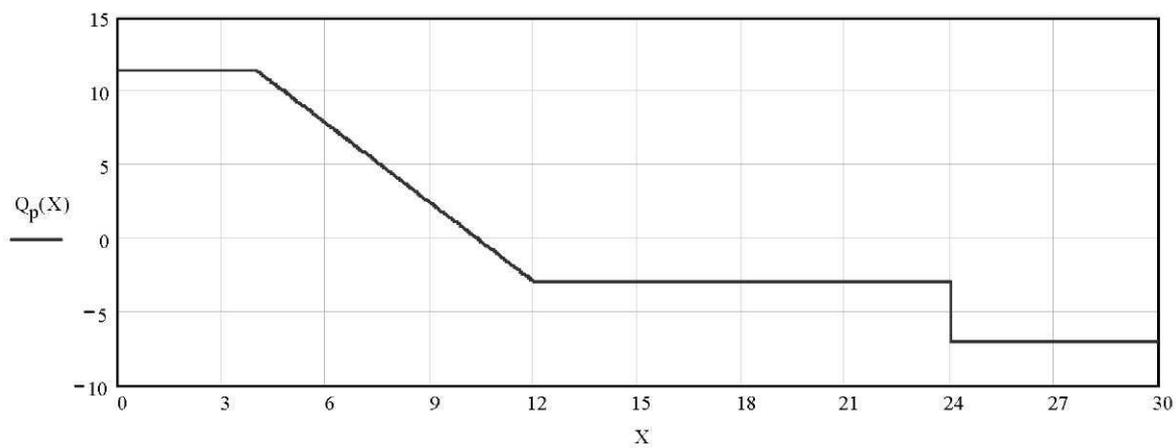
$$\int_0^L M(x) y(x) dx = 118.73$$

$$X_1 \cdot 0.4L = 118.713$$

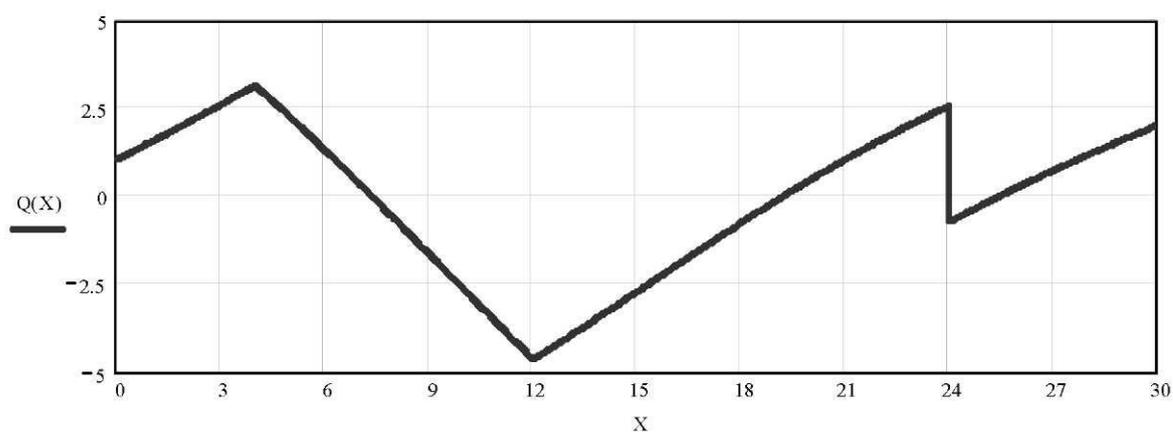
Кинематическая проверка $\text{Error} := \frac{X_1 \cdot 0.4L - \int_0^L M(x) \cdot y(x) dx}{\int_0^L M(x) y(x) dx} \cdot 100$ $\text{Error} = -0.01423$



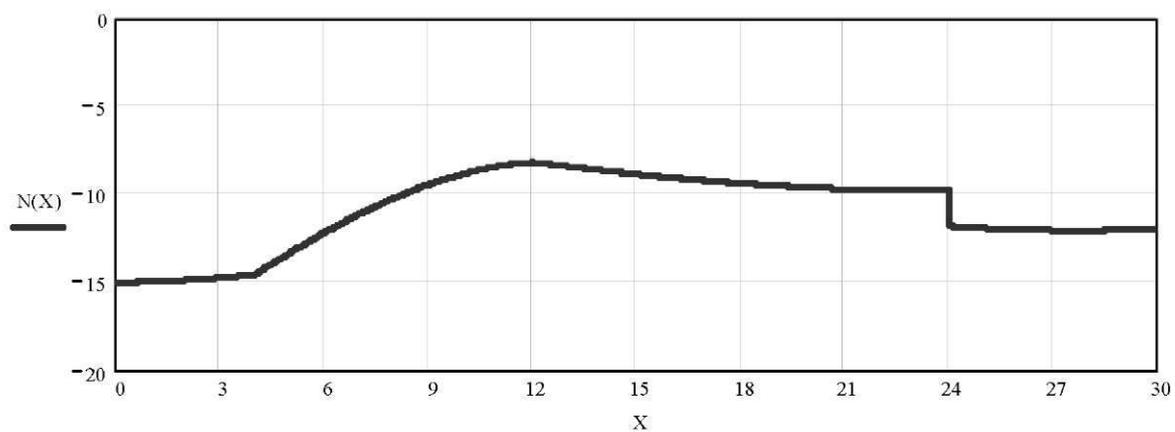
продолжение рис.12



$$Q(x) := Q_p(x) \cdot C\varphi(y(x)) - X_1 \cdot S\varphi(x)$$



$$N(x) := -X_1 \cdot C\varphi(y(x)) - Q_p(x) \cdot S\varphi(x)$$



продолжение рис.12

$$i := 0..2 \quad x_1 := \Delta_X \cdot i \quad x_2 := 4 - 0.000001$$

$$i := 3..11 \quad x_1 := \Delta_X \cdot (i - 1) \quad x_8 := 24 - 0.000001 \quad x_9 := 24 + 0.000001$$

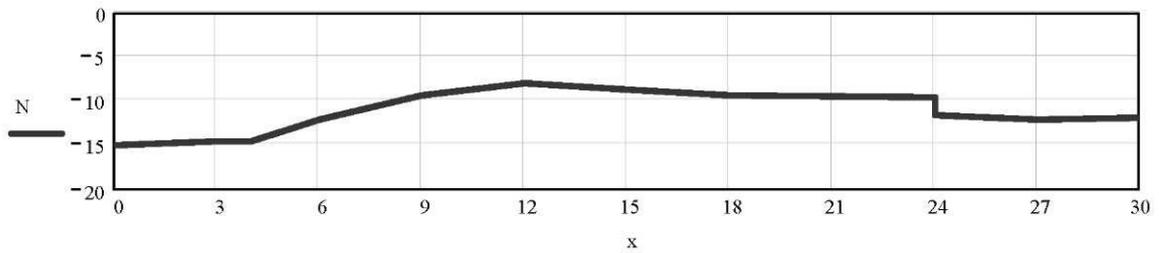
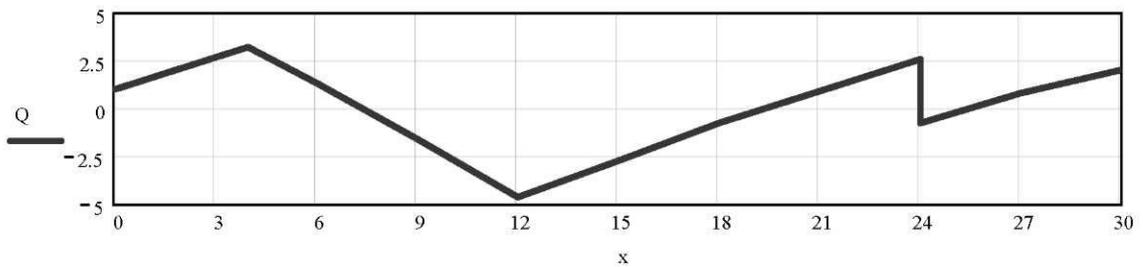
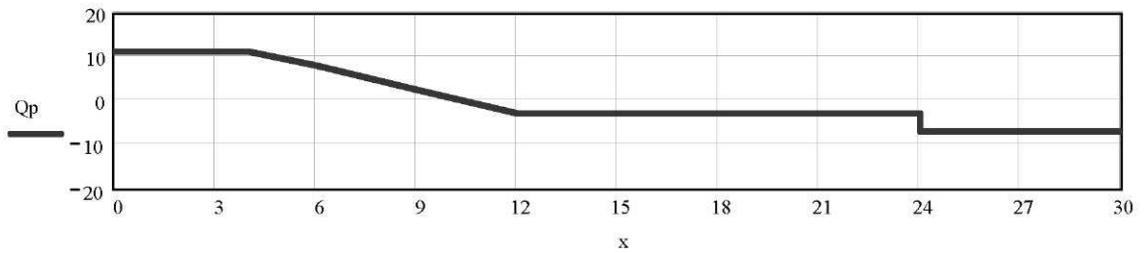
$$i := 0, 1..11$$

$$Q_{p_i} := Q_p(x_i)$$

$$Q_i := Q(x_i)$$

$$N_i := N(x_i)$$

$x =$	$Q_p =$	$Q =$	$N =$
$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 9 \\ 12 \\ 15 \\ 18 \\ 24 \\ 24 \\ 27 \\ 30 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 11.36 \\ 11.36 \\ 11.36 \\ 7.76 \\ 2.36 \\ -3.04 \\ -3.04 \\ -3.04 \\ -3.04 \\ -7.04 \\ -7.04 \\ -7.04 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.037 \\ 2.604 \\ 3.155 \\ 1.327 \\ -1.633 \\ -4.637 \\ -2.719 \\ -0.757 \\ 2.576 \\ -0.732 \\ 0.736 \\ 2.017 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -15.028 \\ -14.746 \\ -14.56 \\ -12.173 \\ -9.434 \\ -8.181 \\ -8.848 \\ -9.373 \\ -9.745 \\ -11.803 \\ -12.048 \\ -11.973 \end{pmatrix}$



продолжение рис. 12

Особенности расчета арок в программной системе “COMPASS”

Тип схемы - Плоская система с двумя линейными и одной угловой степенью свободы в узле.

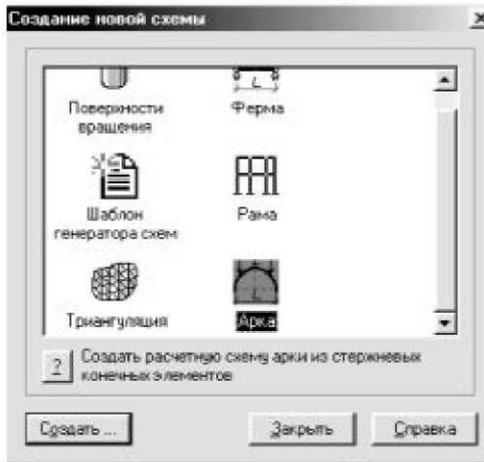


Рис.13 Диалоговое окно для вызова модуля генерации расчетной схемы

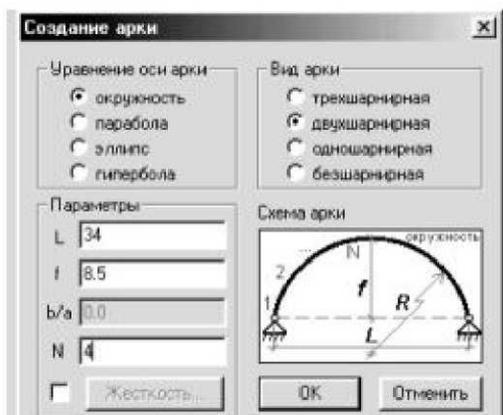


Рис.14 Диалоговое окно модуля для создания расчетной схемы арки

Для построения расчетной схемы можно воспользоваться модулем генерации расчетных схем. Выбрать команду меню “Схема/Создать...”. В появившемся диалоговом окне (рис.13), вызвать модуль генерации “Арка”. Далее появится диалоговое окно (рис.14), где необходимо выбрать и указать основные параметры арки (L – пролет, f -стрела подъема). Для эллипса и гиперболы дополнительно задают соотношения полуосей b/a .

Необходимо также задать:

- расчетные точки (в местах приложения силы P и q);
- дополнительный стержень (затяжку) с шарнирами в начале и конце стержня;
- нагрузки.

Для более точного расчета разбивка арки задается более мелкой.

Расчетная схема арки и результаты расчета приведены на рис.15 (а-г).

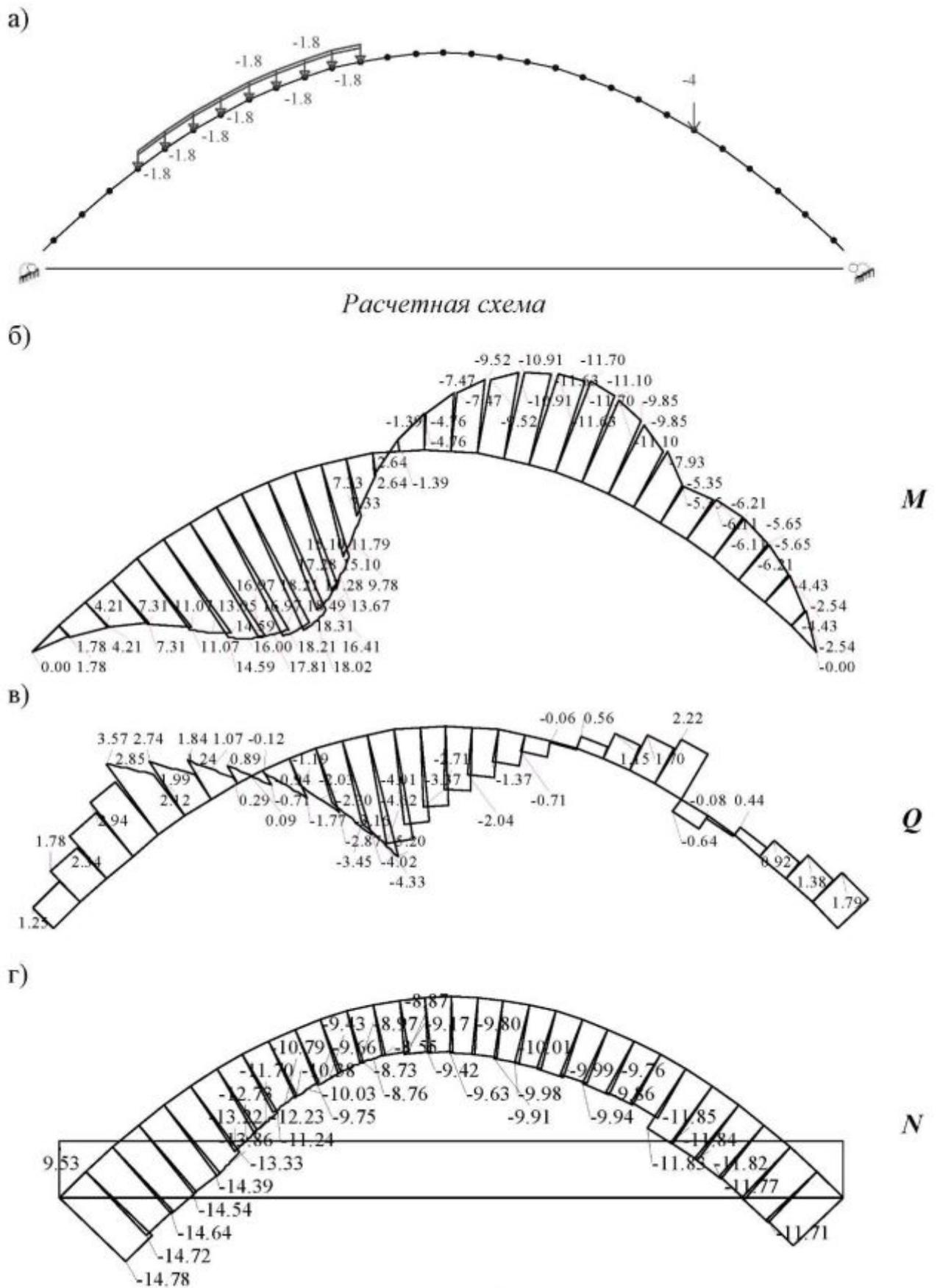


Рис.15

Сравнение результатов расчета

Рассмотрим сечения арки 1 (1') и 8 (8'). Сравнение результатов расчета с разбивкой оси арки на 10 и 30 частей сведено в таблице №2. Анализ выполнен по результатам расчета, полученным различными программными средствами (EXEL, COMPASS, MathCAD).

Таблица №2

Эпюра	N сечения	EXEL(10 частей)	COMPASS (30 частей)	MathCAD(10 частей)	Сравнение результатов (EXEL-MathCAD), %	Сравнение результатов (COMPASS-MathCAD), %
M	1	7,0301	7,31	7,37	4,61	0,81
	1'	11,057	11,07	11,145	0,79	0,67
	8	-5,367	-5,35	-5,245	2,27	1,96
	8'	-5,367	-5,35	-5,245	2,27	1,96
Q	1	2,633	2,94	2,604	1,10	11,43
	1'	3,249	3,57	3,155	2,89	11,62
	8	2,47	2,22	2,576	4,11	13,82
	8'	-0,924	-0,64	-0,732	20,78	12,57
N	1	-14,597	-14,54	-14,746	1,01	1,40
	1'	-14,472	-14,39	-11,56	20,12	19,67
	8	-9,7	-9,76	-9,745	0,46	0,15
	8'	-11,818	-11,83	-11,803	0,13	0,23

Приложение №1

Таблица №1

Уравнения оси арки

1. окружность	$y = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2} - x\right)^2} - R + f$ $R = \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f}$ $\sin \varphi = \frac{(l - 2x)}{2R}, \quad \cos \varphi = \frac{(y + R - f)}{R}$
2. гипербола	$y = -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 + \left(\frac{l}{2} - x\right)^2} + b + f$ $b = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{l^2}{8f} - \frac{f}{2}$ $y' = \operatorname{tg} \varphi = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{l - 2x}{2(b + f - y)}$ $\frac{b}{a} = 0.8 \text{ - отношение полуосей}$
3. квадратичная парабола	$y = \frac{4f}{l^2} x(l - x);$ $y' = \operatorname{tg} \varphi = \frac{4f}{l^2} (l - 2x).$
4. эллипс	$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - \left(\frac{l}{2} - x\right)^2} - b + f;$ $b = \frac{f}{2} + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{l^2}{8f},$ $y^2 = \operatorname{tg} \varphi = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{l - 2 \cdot x}{2 \cdot (y + b - f)}$ $\frac{b}{a} = 0.8 \text{ - отношение полуосей}$

Таблица геометрических характеристик и нагрузок

№ строки	$L, \text{ м}$	f/L	$a_1, \text{ м}$	$b_1, \text{ м}$	$b_2, \text{ м}$	$d_1, \text{ м}$	$q_1, \text{ кН/м}$	$q_2, \text{ кН/м}$	$P_1, \text{ кН}$
0	20	0.25	4	10	0	5	1.5	0	6
1	24	0.22	16	9	0	0	3	0	10
2	28	0.28	5	8	4	16	4	2	5
3	30	0.26	15	8	5	2	2	5	4
4	32	0.24	0	5	8	16	10	2	0
5	34	0.30	2	10	4	7	8	1.8	7
6	36	0.30	6	10	7	6	3	3	3
7	38	0.32	0	14	19	5	10	12	0
8	40	0.30	5	5	20	20	7	7	2
9	42	0.32	21	10	5	0	15	3	5

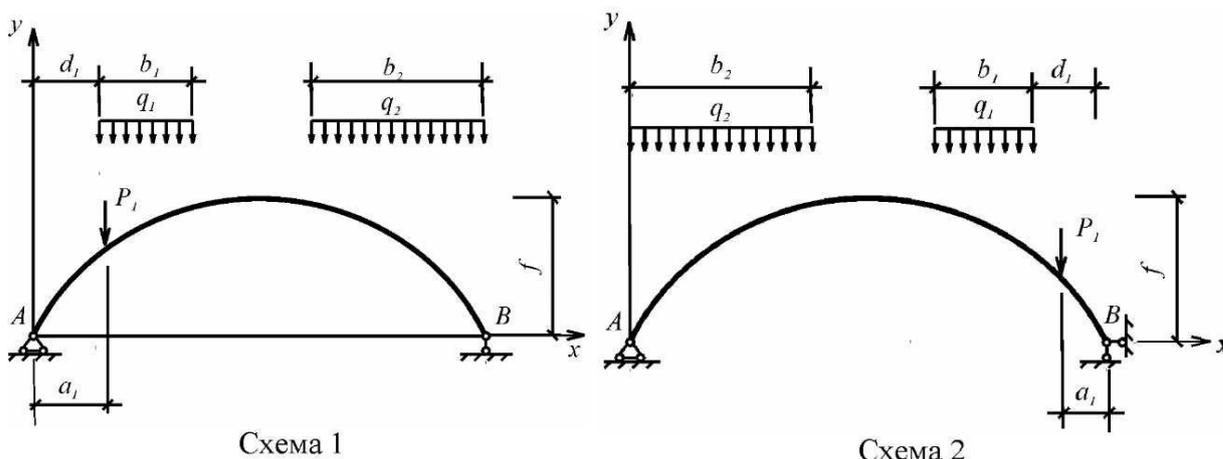
Приложение №2

Для двухшарнирной арки требуется:

1. Построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил от действующей нагрузки с помощью программных средств EXEL, MathCAD, COMPASS.

Рекомендуется:

1. Начало координат совместить с одной из опор.
2. Ординаты точек оси арки определять по уравнениям таблицы №1 Приложения 1
3. Принять, что момент инерции поперечного сечения вдоль оси арки изменяется по закону $I = \frac{I_c}{\cos \varphi}$, где I_c – момент инерции в ключевом сечении арки (точка C), φ – угол, образованный касательной к кривой арки в рассматриваемом сечении с осью x .
4. Для арок с затяжками отношение жесткостей $\frac{EI_c}{E_3 A_3} = 0.6 \text{ м}^2$.



Примечания:

В выданном студенту номере варианта первая цифра соответствует номеру схемы, вторая – номеру уравнения оси арки (табл. №1 приложения №1), третья – номеру строки в таблице геометрических характеристик и нагрузок (табл. №2 приложения №1).

Например, номер варианта 124, где 1 – схема №1 (арка с затяжкой), 2 – уравнение оси арки гипербола, 4 – строка 4 по таблице №2 приложения №1

№ строки	$L, \text{ м}$	f/L	$a_1, \text{ м}$	$b_1, \text{ м}$	$b_2, \text{ м}$	$d_1, \text{ м}$	$q_1, \text{ кН/м}$	$q_2, \text{ кН/м}$	$P_1, \text{ кН}$
4	32	0.24	0	5	8	16	10	2	0

Список литературы

1. Киселев В.А. Строительная механика. М., 1960
2. Безделев В.В., Буклемишев А.В. Программная система COMPASS. Руководство пользователя.– Иркутск: Изд-во Иркутск. гос. тех. ун-та, 2000 г. – 120 с., ил.
3. Строительная механика. Сборник рекомендуемых терминов, вып. 82. Изд-во “Наука”, 1969, стр. 1-48
4. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика: Учеб. для строит. спец. вузов – 8-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1986.- 607 с.: ил.
5. Снитко Н.К. Строительная механика: Учеб. для вузов – 3-е изд., перераб. – М.: Высш. шк., 1980.-431 с.: ил.