

ОПД.Р.03 СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА
РАСЧЕТ НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛОК
Учебное пособие

В учебном пособии изложен расчет методом сил статических неопределимых неразрезных балок. Используется как каноническая, так и матричная формы записи разрешающих уравнений. Матричная форма позволяет легко автоматизировать расчет с использованием ПЭВМ.

По всем разделам в пособии приведены подробно выполненные примеры расчета, что значительно облегчит освоение его содержания.

Пособие предназначено студентам технических вузов всех форм обучения, изучающих дисциплины прочностного цикла.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

1. Статическая неопределимость балок

1.1. Степень свободы твердого деформируемого тела. Кинематические связи

1.2. Статически определимые балки

1.3. Статически неопределимые балки .

2. Определение перемещений в стержневых системах по способу Мора

2.1. Вывод формулы Мора

2.2. Примеры определения перемещений

2.3. Техника вычисления интеграла Мора

2.3.1. Перемножение эюр $M_0(z)$ и $\bar{M}_1(z)$

2.3.2. Матричная форма интеграла Мора

3. Раскрытие статической неопределимости неразрезных балок

3.1. Метод сравнения деформаций

3.2. Канонические уравнения метода сил

3.3. Построение эюр изгибающих моментов, перерезывающих сил.

Определение опорных реакций

3.4. Контроль расчета

3.5. Определение прогибов и углов поворота сечений в пролете неразрезной балки

3.6. Примеры расчета неразрезных балок

4. Расчет неразрезных балок на смещение опор

5. Расчет неразрезных балок на упругоподатливых опорах

6. Построение объемлющих эюр изгибающих моментов M и перерезывающих сил Q

7. Расчет неразрезных балок на подвижную нагрузку

7.1. Алгоритм расчета

7.2. Примеры построения линий влияния усилий в неразрезных балках

7.3. Кинематический способ построения линий влияния

8. Упругопластический изгиб неразрезных балок. Метод предельного равновесия

8.1. Изгиб статически определимой балки за пределом упругости.

Пластический шарнир

8.2. Упругопластический изгиб статически неопределимой балки

8.3. Кинематический метод расчета

9. Расчет неразрезных балок на ПЭВМ

9.1. Матричный алгоритм метода сил

9.2. Расчет неразрезной балки на ПЭВМ по программе MS-3

10. Правила загрузки криволинейных линий влияния подвижной эксплуатационной нагрузкой

Приложение

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

ВВЕДЕНИЕ

В связи с развитием железнодорожного строительства во второй половине XIX столетия перед инженерами-мостостроителями встала задача по расчету неразрезных балок как наиболее экономичных по сравнению с однопролетными. Первые решения этой задачи были получены французскими инженерами Берто, Клапейроном, Брессом.

Неразрезные балки широко используются как несущий элемент в инженерных сооружениях различного назначения – промышленных, сельскохозяйственных, гражданских, входят в состав стержневого каркаса судов, вагонов, летательных аппаратов и других объектов.

Учебные программы технических вузов в курсах "Сопротивление материалов", "Строительная механика" включают разделы по расчету неразрезных балок. Предусмотрено выполнение курсовых работ и индивидуальных заданий по разделам курсов.

В настоящем учебном пособии изложены методы расчета неразрезных балок, изучаемых как в курсе "Сопротивление материалов", так и по более полной программе в курсе "Строительная механика". Изложение ведется на основе использования метода сил как в классической форме записи разрешающих уравнений, так и в матричной формулировке алгоритма, позволяющей автоматизировать расчет с использованием ЭВМ.

В первом разделе приведено описание расчетных схем неразрезной балки, вычисление степени ее статической неопределимости.

Раздел 2 посвящен определению перемещений, вызванных в упругой, линейно деформируемой системе внешним нагружением. Приводится формула Мора и ее использование в различных вариантах.

В разделе 3 изложены методы раскрытия статической неопределимости неразрезной балки при нагружении ее постоянной нагрузкой, построения эпюр внутренних усилий, определения прогибов.

В разделе 4 рассмотрен расчет балки на смещение опорных узлов.

Раздел 5 посвящен расчету балки с упругопроседающими опорами.

Правила построения объемлющих эпюр внутренних усилий при нагружении балки постоянной и временной нагрузкой даны в разделе 6.

В разделе 7 приведен расчет балки на подвижную нагрузку с построением линий влияния усилий.

Раздел 8 посвящен расчету неразрезных балок по предельному равновесию с учетом развития пластических деформаций в сечении.

В разделе 9 рассмотрен расчет балки в матричной форме с реализацией его на ПЭВМ.

В заключительном разделе 10 приведены правила загрузки криволинейных линий влияния подвижной эксплуатационной нагрузкой.

В приложениях даны таблицы эквивалентных нагрузок для расчета железнодорожных и автодорожных мостов.

Автор выражает благодарность С.А. Бобушеву за тщательно выполненную компьютерную верстку рукописи.

1. СТАТИЧЕСКАЯ НЕОПРЕДЕЛИМОСТЬ БАЛОК

1.1. Степень свободы твердого деформируемого тела. Кинематические связи

Степени свободы объекта (точки, жесткого диска, механизма и др.) определяются количеством независимых параметров, определяющих его положение на плоскости или в пространстве. Так, чтобы указать положение точки на плоскости, достаточно задать две ее координаты в принятой системе (рис. 1.1): $[x_A, y_A]$ или $[\rho, \varphi]$.

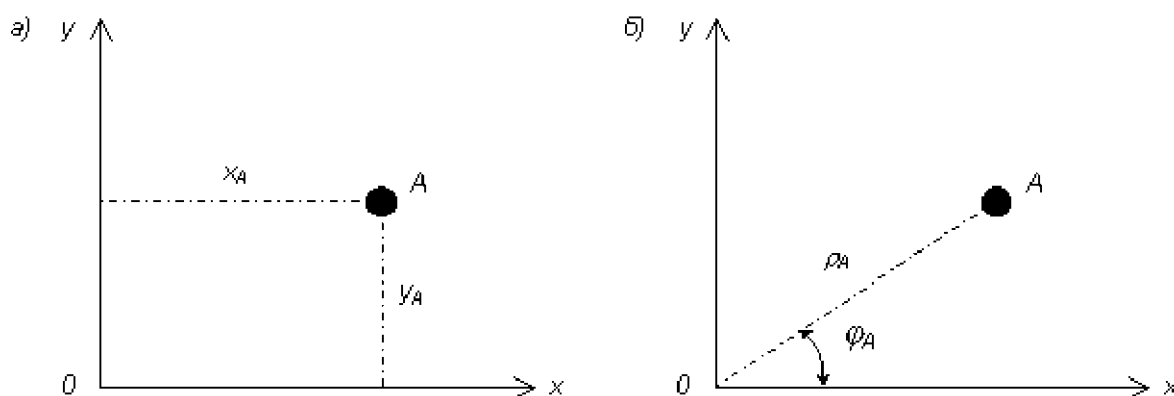


Рис. 1.1. Параметры, характеризующие положение точки на плоскости:
 $a - [x_A, y_A]$; $b - [\rho, \varphi]$

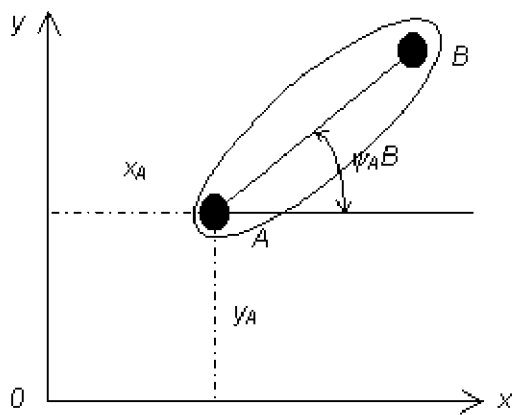


Рис. 1.2. Параметры, характеризующие положение тела на плоскости – x_A, y_A, ψ_{AB}

Для диска (например, твердое деформируемое тело) необходимо задавать три параметра для определения его положения на плоскости – координаты точки $A (x_A, y_A)$ и угол ψ_{AB} между прямой AB и осью X (рис. 1.2). Для пространства трех измерений число степеней свободы точки будет равно трем, а жесткого диска – шести.

Устройство, отнимающее у точки или диска одну степень свободы, называется кинематической связью.

Так, для того чтобы зафиксировать положение точки A на плоскости (сделать ее неподвижной), достаточно ввести две связи, ограничивающие ее перемещение по двум направлениям – жесткие стержни 1, 2 (рис. 1.3, а). Стержни, расположенные по одной линии, точку A от смещения не закрепляют (рис. 1.3, б).

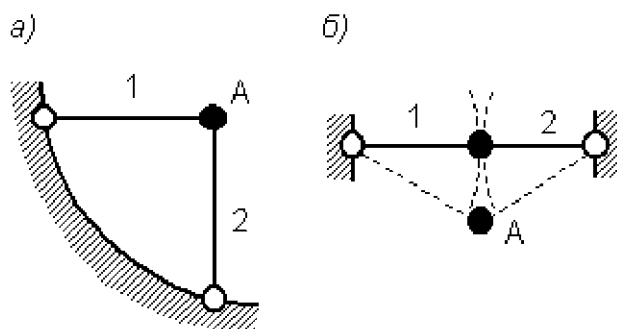


Рис. 1.3. Различное положение кинематических связей, закрепляющих точку на плоскости: а – геометрически неизменяемая схема; б – мгновенно изменяемая схема

Для жесткого закрепления на плоскости диска, имеющего три степени свободы, необходимы три кинематические связи, которые не должны быть параллельны между собой и не должны пересекаться при продолжении в одной точке (рис. 1.4).

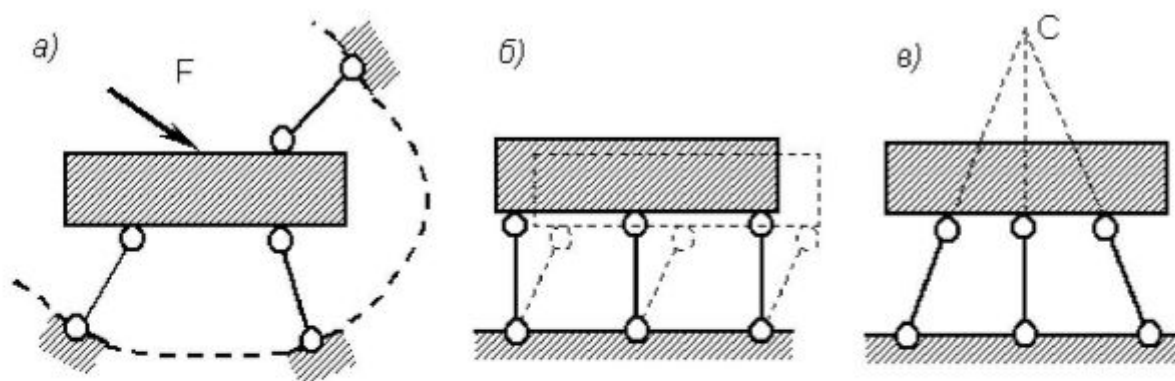


Рис. 1.4. Схемы расположения кинематических связей между диском и землей: а – геометрически неизменяемая; б – геометрически изменяемая; в – мгновенно изменяемая

Такие системы называются геометрически неизменяемыми. Они способны воспринимать внешние нагрузки. Перемещения узлов в геометрически неизменяемых системах являются следствием только упругой деформации как самого диска, так и связей между дисками. Эти перемещения бывают малыми и геометрическую структуру расчетной схемы не меняют.

Три необходимые кинематические связи балки с землей могут быть представлены конструктивно опорами различного типа (рис. 1.5): шарнирно-подвижной опорой А (одна кинематическая связь); шарнирно-неподвижной опорой В (две кинематических связи). Заделка (рис. 1.5, б) эквивалентна наличию трех кинематических связей. В опоре С ограничены линейные перемещения (горизонтальные и вертикальные) и угол поворота опорного сечения. По числу и направлению наложенных связей определяется количество и направление реактивных усилий со стороны опоры на балку.

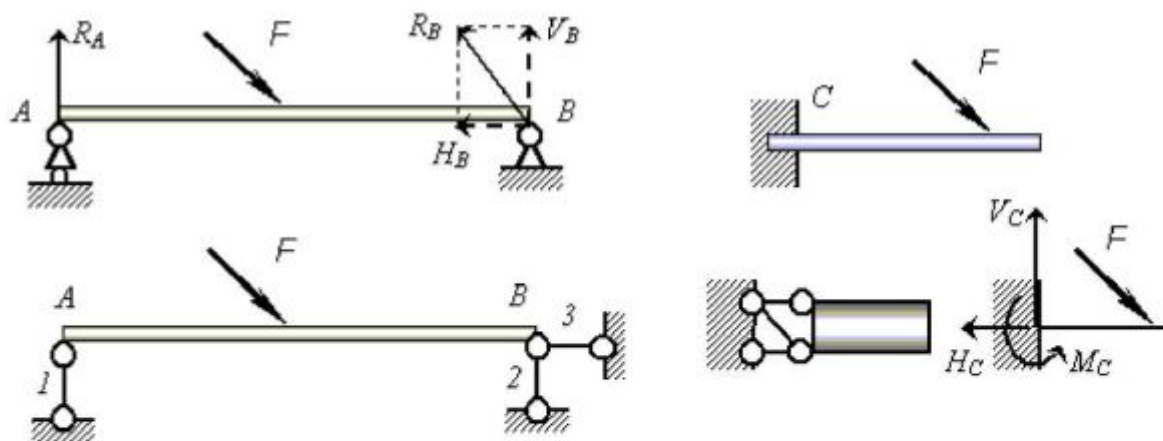


Рис. 1.5. Типы опор: А – шарнирно-подвижная опора (одна кинематическая связь); В – шарнирно-неподвижная опора (две кинематических связи); С – заделка (три кинематических связи)

1.2. Статически определимые балки

На рис. 1.5, 1.6 представлены простейшие балочные системы, имеющие необходимый минимум кинематических связей с землей.

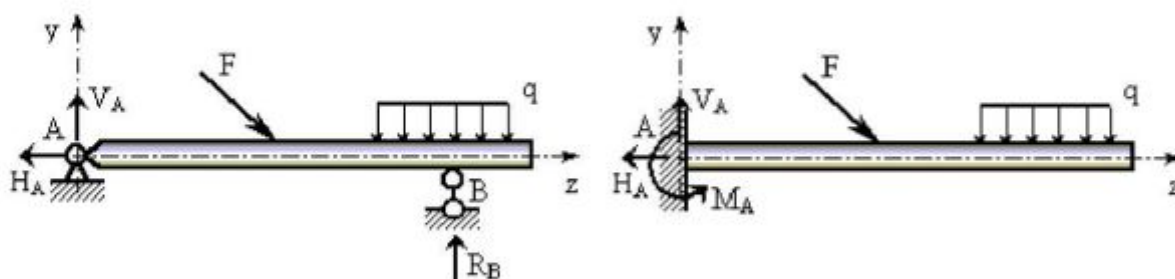


Рис. 1.6. Простейшие статически определимые балки

Для определения всех сил, действующих на балку, необходимо определять три неизвестные опорные реакции из условий равновесия тела, нагруженного заданными внешними силами и искомыми усилиями в связях. При плоской системе сил уравнения равновесия могут быть записаны в различной форме:

$$\left\{ \sum z = 0; \sum y = 0; \sum m_k = 0 \right. \quad (1.1)$$

Точка k – любая точка, лежащая в плоскости действия сил

$$\sum m_A = 0; \sum m_B = 0; \sum z = 0; \quad (1.2)$$

$$\sum m_A = 0; \sum m_B = 0; \sum m_C = 0 \quad (1.3)$$

При этом точки A, B, C не должны лежать на одной прямой.

Системы, для которых неизвестные реактивные усилия в опорных связях могут быть определены с использованием уравнений равновесия, называются статически определимыми.

Для балочных систем – это однопролетные схемы по вариантам, приведенным на рис. 1.5 или многопролетные балки с промежуточными шарнирами, такие, например, как приведенные на рис. 1.7.

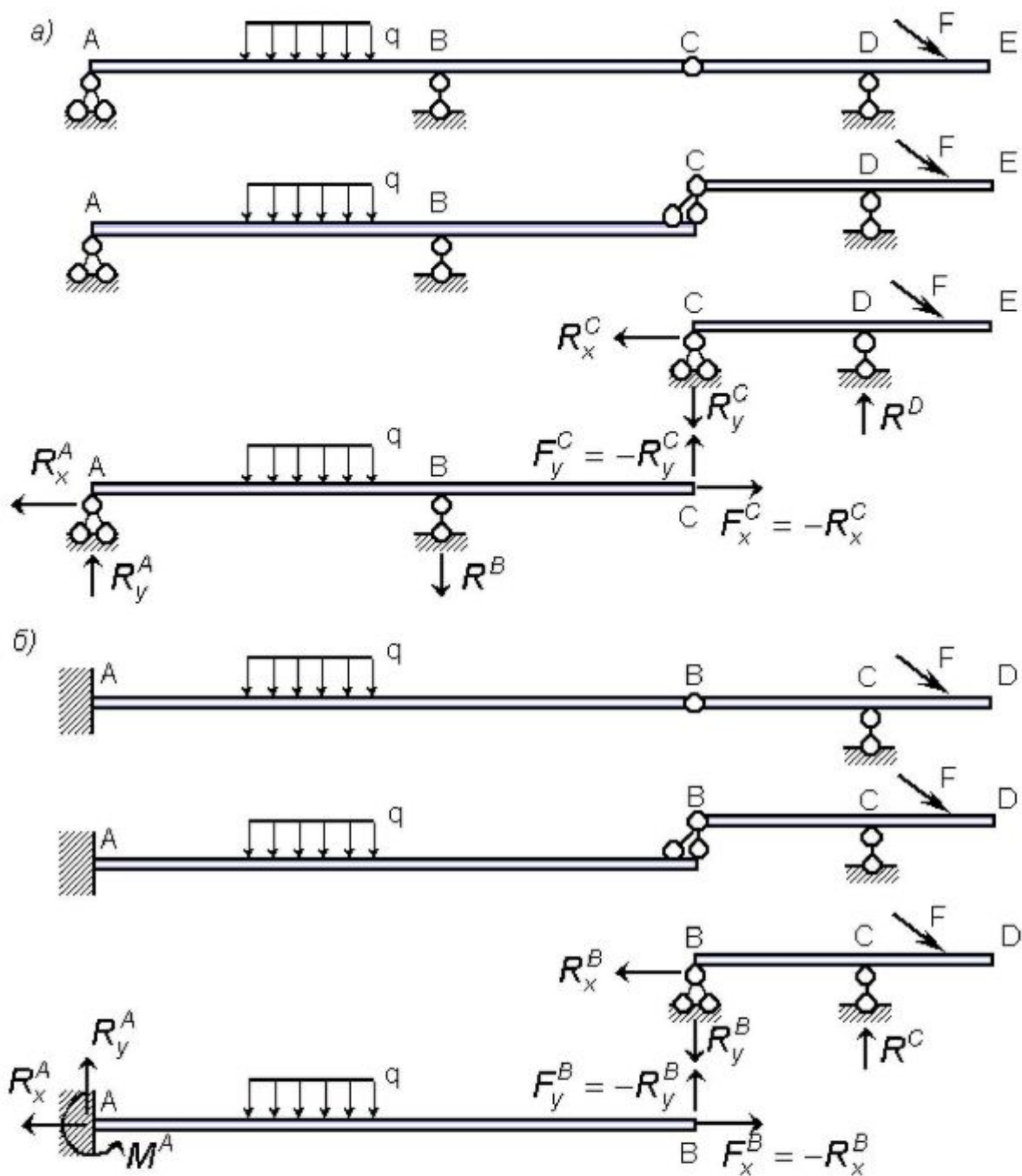


Рис. 1.7. Статически определимые многопролетные балки с промежуточными шарнирами: а – балка ABC – главная, CDE – второстепенная; б – балка AB – главная, BCD – второстепенная

После вычисления усилий в опорных связях и сил взаимодействия в шарнирах, соединяющих второстепенную балку с основной, могут быть определены внутренние усилия в любом сечении балок (изгибающий момент, перерезывающая сила, продольная сила) и выполнены прочностные расчеты.

1. Проверка прочности (жесткости) балок заданного поперечного сечения. В этом случае должны быть заданы расчетная схема балки, внешние нагрузки, размеры и форма поперечного сечения, прочностные

характеристики материала, из которого конструируется балка. Проверяется выполнение требуемых условий прочности и условий жесткости балки.

2. *Подбор сечений балки.* При заданной расчетной схеме балки, известных внешних нагрузках, прочностных характеристиках материала, из которого конструируется балка, форме ее поперечного сечения определяются размеры поперечного сечения, обеспечивающие ее надежную работу с соблюдением требуемых условий прочности и условий надежности.

3. *Определение грузоподъемности балки.* В этом случае задается расчетная схема балки, известны размеры и форма поперечного сечения, прочностные характеристики материала. Разнообразные внешние нагрузки должны быть связаны единым параметром, значение которого и должно быть определено из условий прочности или условий жесткости балки.

Отметим общие свойства статически определимых систем.

Для определения опорных реакций, изгибающих моментов, поперечных и продольных сил в сечениях статически определимых балок, а также рам, ферм, арок нет необходимости знать, из какого материала они выполнены, постоянные или переменные размеры поперечных сечений имеют вдоль оси. *Усилия в статически определимых системах зависят только от заданной расчетной схемы и заданного внешнего нагружения.*

Статически определимые конструкции характерны тем, что изменение их температурного режима в процессе эксплуатации не приводит к изменению напряженного состояния, так как температурные деформации в этом случае не стеснены конструктивно.

В статически определимых балках, а также рамах, фермах, арках не возникают изменения напряженного состояния из-за смещения опорных узлов, если эти смещения не приводят к существенному изменению геометрии расчетной схемы.

1.3. Статически неопределимые балки

Расчетная схема в виде диска из твердого деформируемого тела, у которого количество кинематических связей с землей превышает необходимый минимум (три связи) является статически неопределимой системой. Так, для балки с одной заделкой (три связи) любая дополнительная шарнирно-подвижная опора является избыточной сверх необходимого минимума “лишней” связью. Количество таких дополнительных опор определяет степень статической неопределимости расчетной схемы (рис. 1.8).

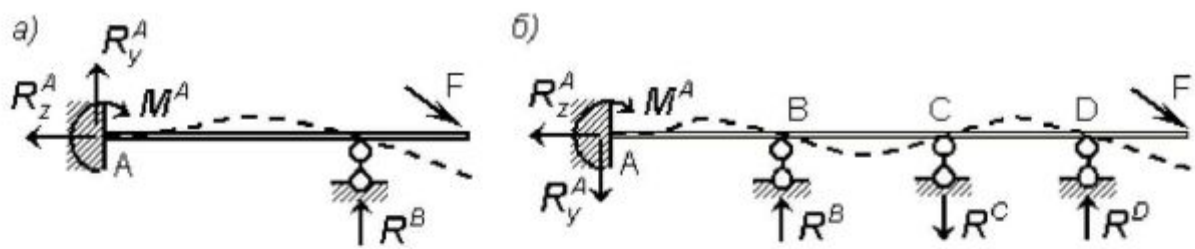


Рис. 1.8. Статически неопределимые балки: а – один раз; б – три раза

Для двухопорной балки с одной шарнирно-неподвижной опорой (две кинематических связи) и другой – шарнирно-подвижной (одна кинематическая связь) любая дополнительная шарнирно-подвижная опора обращает балку в неразрезную статически неопределимую расчетную схему (рис. 1.9, а). В более сложных системах степень статической неопределимости шарнирно опертой неразрезной балки определяется количеством промежуточных опор (рис. 1.9, б).

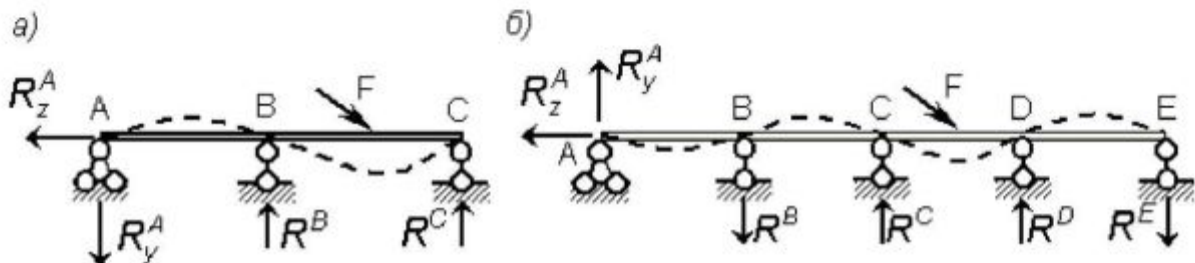


Рис. 1.9. Статически неопределимые неразрезные балки: а – один раз; б – три раза

По сложившейся терминологии в строительной механике *связи, избыточные сверх необходимого минимума, называются лишними связями.*

Количество этих “лишних” связей определяет степень статической неопределимости расчетной схемы. Введение таких дополнительных связей существенным образом изменяет условия работы неразрезной конструкции под нагрузкой за счет вовлечения в совместную работу всех пролетов балки при загрузении, например, только одного пролета.

Сравним, например, работу под нагрузкой двухпролетного балочного моста, выполненного в двух различных вариантах. В первом варианте пролетное строение выполнено в виде двух автономных однопролетных статически определимых балок (рис. 1.10, схема I), во втором варианте – пролетное строение выполнено как единая неразрезная двухпролетная балка (рис. 1.10, схема II).

Сравним характер изгиба балок пролетного строения при загрузении равномерно распределенной нагрузкой по всему пролету по обоим вариантам его расчетной схемы. В первом варианте каждый пролет работает

автономно. Поэтому прогибы и изгибающие моменты будут возникать только в загруженных пролетах (рис.1.10, схема I).

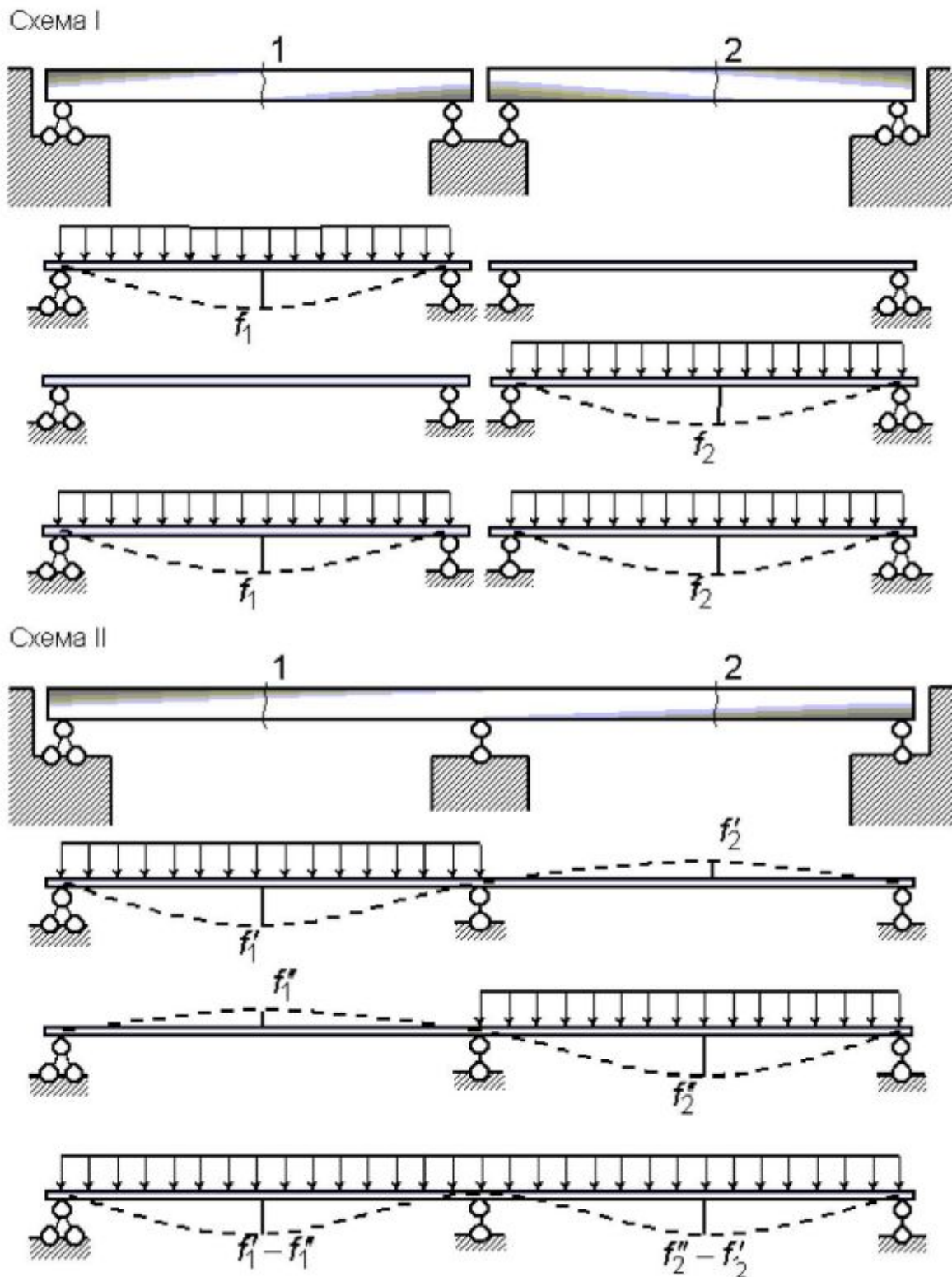


Рис. 1.10. Изгиб балок двухпролетного моста, выполненного по разным расчетным схемам: схема I – две однопролетные двухопорные статически определимые балки; схема II – двухпролетная неразрезная один раз статически неопределимая балка

Для второго варианта (рис. 1.10, схема II) – неразрезная двухпролетная балка – при загрузении только одного пролета работают на изгиб оба пролета. При этом от загрузения первого пролета прогибы в смежном незагруженном пролете направлены вверх. Поэтому при одновременном загрузении обоих пролетов суммарный прогиб неразрезной балки в каждом пролете будет меньше. Изогнутая ось неразрезной балки имеет точки перегиба на некотором расстоянии от средней опоры. В этих сечениях кривизна изогнутой оси балки, а следовательно, и изгибающий момент равны нулю. Эпюра изгибающих моментов меняет знак. В зоне, примыкающей к средней опоре, растянутые волокна в сечении балки – верхние, а в примыкающей к крайним опорам растянутые волокна в сечении балки – нижние.

Таким образом, работа на изгиб балки, выполненной по варианту двухпролетной неразрезной расчетной схемы, существенно отличается от изгиба балок, выполненных по разрезной схеме. Прогибы и изгибающие моменты в пролетном строении моста, выполненном по двухпролетной неразрезной статически неопределимой расчетной схеме, будут значительно меньше, по сравнению с вариантом по схеме I. Поэтому, избыточную кинематическую связь на средней опоре в схеме II лишней, в прямом смысле этого слова, не назовешь.

2. Определение перемещений в стержневых системах по способу Мора

2.1. Вывод формулы Мора

Определение перемещений в упругих системах, образованных из твердых деформируемых тел, имеет в прочностных расчетах большое значение: от решения задач по проверке жесткости балки до формирования разрешающих уравнений при расчете сложных статически неопределимых систем. Причиной возникающих перемещений в конструкции могут быть внешнее загрузение, изменение температурного режима элементов объекта, деформации основания. Во всех случаях это состояние конструкции будем именовать грузовым (или нулевым).

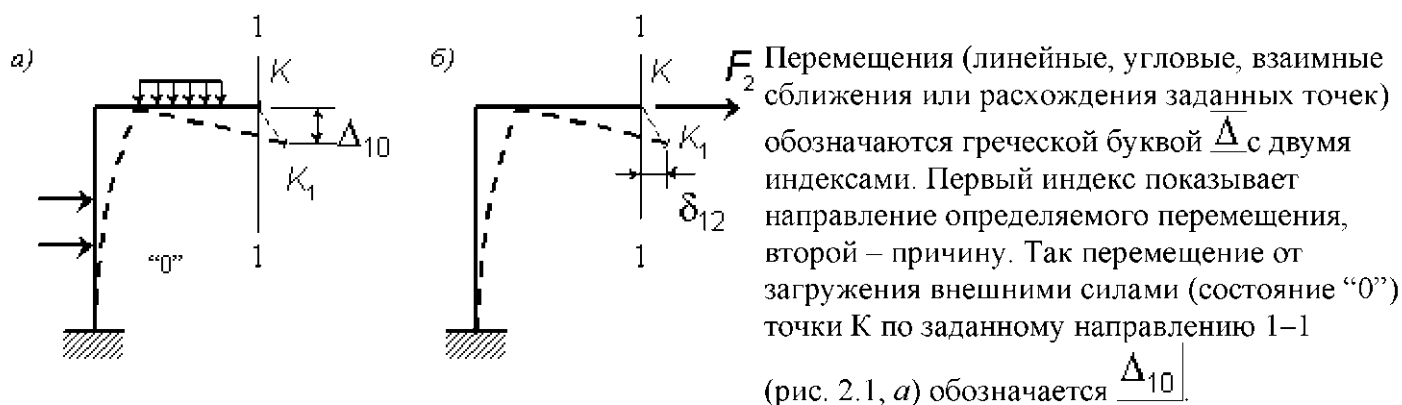
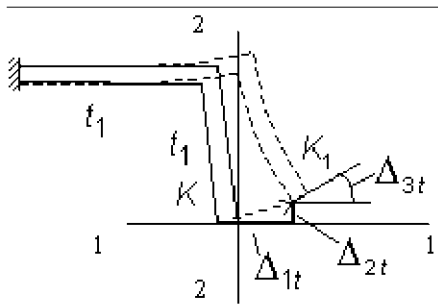


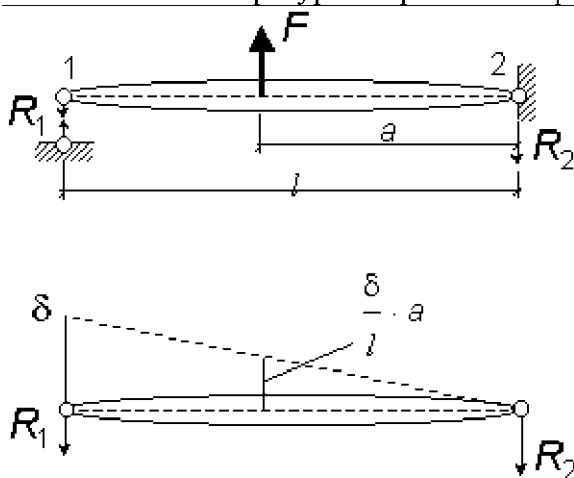
Рис. 2.1. Обозначения перемещений стержня

Перемещения от единичной силы $F_2=1$ (рис. 2.1, б) по направлению 1–1 обозначается δ_{12} .



Перемещения вызванные, например, изменением температурного режима (рис. 2.2) по направлению 1–1 обозначаются Δ_{1t} , по направлению 2–2 – Δ_{2t} .

Рис. 2.2. Перемещения сечения К при изменении температурного режима стержня



Для определения перемещений в стержневой системе от заданного нагружения используем принцип возможных перемещений для твердого деформируемого тела, находящегося в равновесии. Применительно к абсолютно твердому телу (рис. 2.3) по этому принципу следует утверждение: *работа всех сил, приложенных к телу на любых возможных (виртуальных, малых, допускаемых связями) перемещениях, равна нулю.*

Рис. 2.3. Возможные перемещения твердого тела

Сила $\overline{R_1}$ на этих перемещениях производит отрицательную работу $-\overline{R_1}\delta$, сила F – положительную работу

$$-R_1\delta + F\frac{\delta}{l}a = 0 \quad (2.1)$$

Из этого следует:

$$R_1 = F\frac{a}{l} \quad (2.2)$$

Такое же значение реактивного усилия R_1 получается и из уравнения равновесия тела:

$$\sum M_2 = 0, \quad R_1 l - F a = 0. \quad (2.3)$$

Для твердого деформируемого тела принцип возможных перемещений включает работу как внешних, так и внутренних сил (M, Q, N) в сечениях стержня на малых возможных перемещениях систем (рис. 2.4). Рассмотрим два состояния упругой системы: грузовое (рис. 2.4, а) и единичное вспомогательное (рис. 2.4, б).

В состоянии “0” система нагружена внешними нагрузками. Точка K , например, переместилась в положение K_1 . Требуется определить перемещение точки K по направлению 1–1 – Δ_{10} (рис. 2.4, а).

Второе состояние этой упругой системы назначается так: в точке K нагружают силой $F=1$, по заданному направлению 1–1 (рис. 2.4, б).

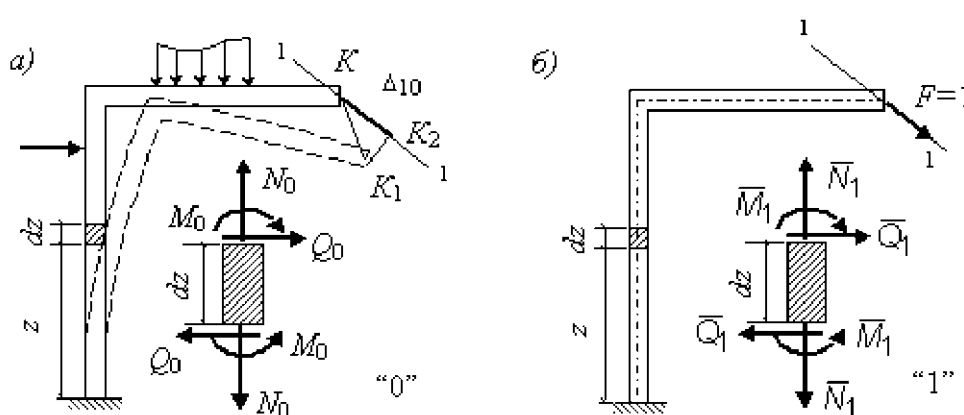


Рис. 2.4. К определению перемещений: а – грузовое состояние рамы (“0”); б – единичное нагружение рамы во вспомогательном состоянии для определения перемещения D_{10}

Используется принцип возможных перемещений для упругой деформируемой системы, по которому следует: возможная работа внешних и внутренних сил упругой системы, находящейся в равновесии на любых малых перемещениях, которые не искажают ее расчетную схему и не нарушают связей, равна нулю.

Запишем работу сил $F = 1, \bar{M}_1, \bar{Q}_1, \bar{N}_1$ (рис. 2.4, б) (единичное состояние) на перемещениях этой упругой стержневой конструкции, вызванных действием нагрузок, показанных, например, на рис. 2.4, а (грузовое или нулевое состояние).

$$1 \cdot \Delta_{10} + \sum W_{10} = 0 \quad (2.4)$$

Здесь

$$\sum W_{10} = \sum_{l_N} \int dW_{10}^{\bar{N}_1} + \sum_{l_M} \int dW_{10}^{\bar{M}_1} + \sum_{l_Q} \int dW_{10}^{\bar{Q}_1} \quad (2.5)$$

В уравнении dW_{10} – работа внутренних сил $\bar{N}_1, \bar{M}_1, \bar{Q}_1$ на перемещениях от сил N_0, M_0, Q_0 на участке стержня длиной dz .

Интегралы вычисляются на интервалах l_N, l_M, l_Q , границы которых определяются видом функций $\bar{N}_1, N_0; \bar{M}_1, M_0; \bar{Q}_1, Q_0$.

Вычислим возможную работу $dW_{10}^{\bar{N}_1}, dW_{10}^{\bar{M}_1}, dW_{10}^{\bar{Q}_1}$. При этом, так как силы $\bar{N}_1, \bar{M}_1, \bar{Q}_1$ являются внутренними, то их работа – отрицательна.

Для этого определим деформацию элемента длиной dz в нулевом состоянии от сил N_0, M_0, Q_0 (рис. 2.5):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_0}{EJ}; \quad \frac{dz}{\rho} = d\varphi; \quad d\varphi = \frac{M_0 dz}{EJ};$$

$$\gamma_0 = \frac{\tau_0}{G}; \quad \tau_0 = \frac{Q_0 S_x^{omc}}{J_x b_y} \quad (2.6)$$

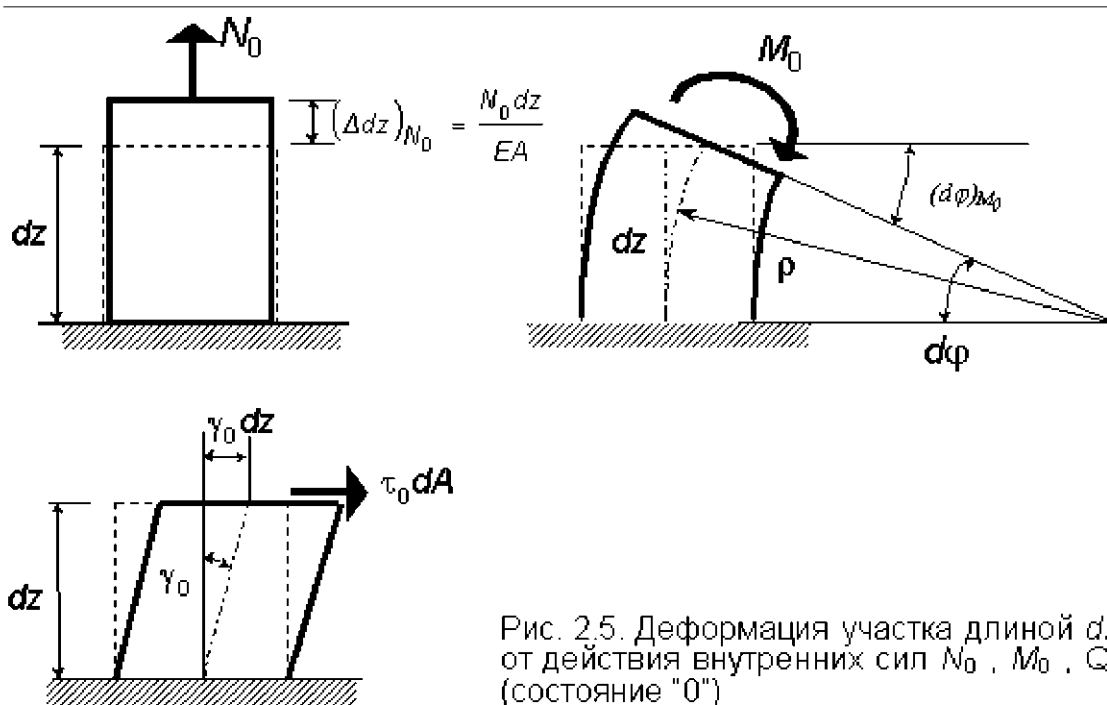


Рис. 2.5. Деформация участка длиной dz от действия внутренних сил N_0, M_0, Q_0 (состояние "0")

Возможная работа сил \bar{N}_1, \bar{M}_1 на перемещениях $(\Delta dz)_{N_0}, (\Delta \varphi)_{M_0}$ равна

$$\left| dW_{\bar{N}_1} = -\bar{N}_1 (\Delta dz)_{N_0} = -\bar{N}_1 \frac{N_0 dz}{EA} ; \right. \quad (2.7)$$

$$\left| dW_{\bar{M}_1} = -\bar{M}_1 d\varphi = -\bar{M}_1 \frac{M_0 dz}{EJ} . \right. \quad (2.8)$$

Касательные напряжения переменны по сечению [формула (2.6)], поэтому

$$\left| dW_{\bar{Q}_1} = -\int_A (y_0 dz) \bar{\tau}_1 dA = -dz \int_A \tau_0 \bar{\tau}_1 dA = -k \frac{\bar{Q}_1 Q_0 dz}{GA} . \right. \quad (2.9)$$

Здесь

$$\left| k = A \int_A \left(\frac{S_x^{omc}}{J_x b_y} \right)^2 dA \right. \quad (2.10)$$

Коэффициент k величина безразмерная и зависит только от формы поперечного сечения. Для прямоугольного сечения $k=1,2$.

Таким образом, для перемещения Δ_{10} из выражения (2.4) с учетом формул (2.5), (2.7), (2.8) и (2.9) получаем

$$\Delta_{10} = \sum \int_{l_i} \frac{N_0 \bar{N}_1 dz}{EA} + \sum \int_{l_k} \frac{M_0 \bar{M}_1 dz}{EJ} + \sum \int_{l_n} k \frac{Q_0 \bar{Q}_1 dz}{GA} . \quad (2.11)$$

Для шарнирно-стержневых систем при узловой нагрузке $\bar{M}_1, M_0, \bar{Q}_1, Q_0$ равны нулю; \bar{N}_1, N_0 постоянны в пределах элемента l_i и при постоянном значении жесткости на участке l_i , равном EA_i , выражение (2.11) приводится к виду

$$\Delta_{10} = \sum_1^n \int_{l_i} \frac{M_0 \bar{M}_1 dz}{EJ} , \quad (2.12)$$

где N_{0i} – усилие в i -м стержне от внешнего нагружения; \bar{N}_{1i} – усилие в i -м стержне от единичной силы, приложенной в узле по направлению определяемого перемещения.

Суммирование выполняется по всем стержням системы.

Для *изгибаемых рамно-балочных стержневых систем*, толщина элементов в которых не больше $l/10$, слагаемые в формуле для перемещений (2.11), учитывающие влияние продольных и поперечных сил, составляют не более 2% от их полного значения, поэтому их не учитывают в расчетах. Формула (2.11) в этом случае имеет вид:

$$\Delta_{10} = \sum_1^n \int_{l_i} \frac{M_0 \bar{M}_1 dz}{EJ} \quad (2.13)$$

2.2. Примеры определения перемещений

Пример 2.1. Определить перемещения конца консоли φ_B, y_B от нагрузки, распределенной по закону треугольника (рис. 2.6). На рисунке показаны грузовое и единичные вспомогательные состояния.

Так как $EJ_z = \text{const}$, то (2.13) можно записать в виде

$$\Delta_{10} = \frac{1}{EJ} \int_0^l M_0(z) \bar{M}_1(z) dz$$

$M_0(z)$ в рассматриваемом примере при $q_z = q \frac{z}{l}$

$$M_0(z) = -\frac{q_z z}{2} \frac{z}{3} = -q \frac{z^3}{6l}$$

Во вспомогательном состоянии для определения угла поворота сечения B прикладываем на конце консоли момент $m = 1$ (рис. 2.6, б), при этом $\bar{M}_1(z) = -1$. Для определения прогиба конца консоли в точке B прикладываем сосредоточенную силу $F = 1$ (рис. 2.6, в). Тогда искомые перемещения определяются как

$$\varphi_B = \frac{1}{EJ} \int_0^l M_0(z) \bar{M}_1(z) dz = \frac{1}{EJ} \int_0^l -q \frac{z^3}{6l} (-1) dz = \frac{q}{6l EJ} \int_0^l z^3 dz = \frac{q}{6l EJ} \frac{z^4}{4} \Big|_0^l = \frac{ql^3}{24EJ};$$

$$y_B = \frac{1}{EJ} \int_0^l M_0(z) \bar{M}_2(z) dz = \frac{1}{EJ} \int_0^l \left(-q \frac{z^3}{6l} \right) (-z) dz = \frac{q}{6l EJ} \int_0^l z^4 dz = \frac{q}{6l EJ} \frac{z^5}{5} \Big|_0^l = \frac{ql^4}{30EJ}.$$

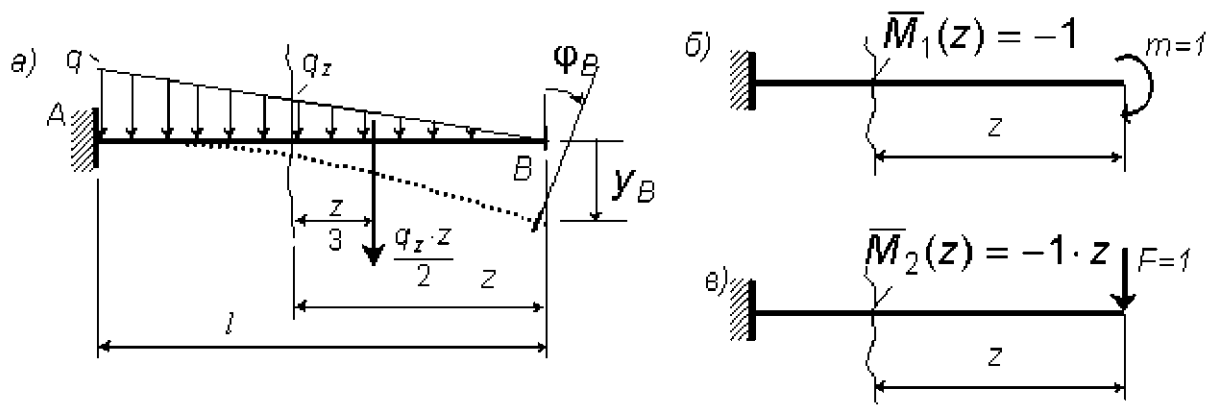


Рис. 2.6. Расчетная схема балки: а – грузовое состояние; б, в – вспомогательные состояния для определения угла поворота и прогиба точки В

Пример 2.2. Определить сближение точек 1 и 2 в заданной раме (рис. 2.7).

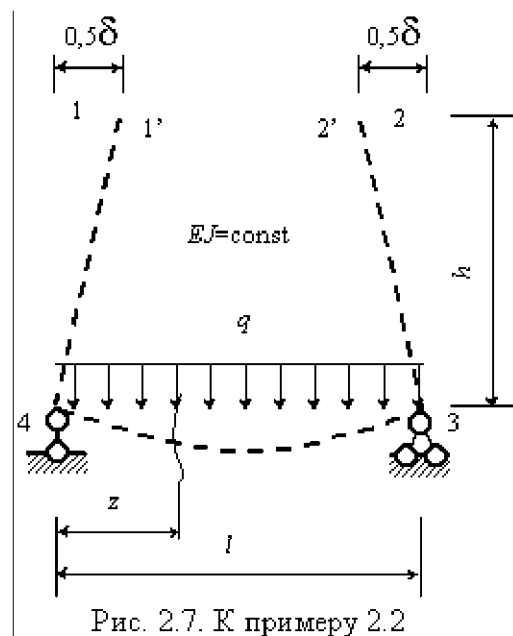


Рис. 2.7. К примеру 2.2

Вспомогательное состояние для определения сближения точек 1 и 2 выбираем, как показано на рис. 2.8.

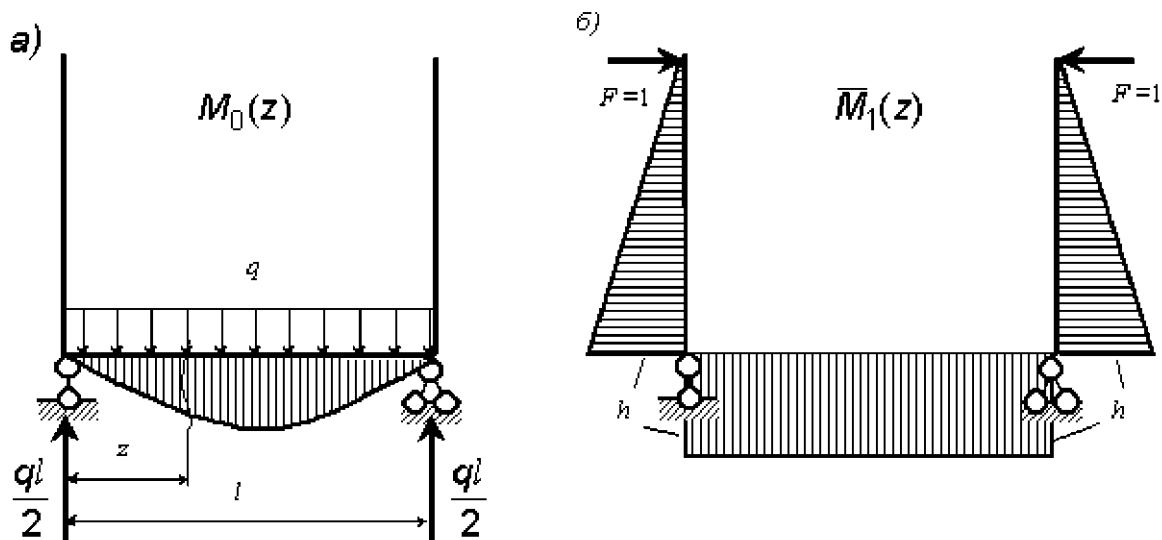


Рис. 2.8. К примеру 2.2: а – эпюра M_0 ; б – эпюра \bar{M}_1

Перемещение δ определяем по формуле (2.13).

Так как на участках 1–4 и 2–3 усилия от нагрузки q не возникают, то в формулу (2.13) подставляем выражения для $M_0(z)$ и $\bar{M}_1(z)$ только на участке 3–4

$$M_0(z) = \frac{ql}{2}z - \frac{qz^2}{2}; \quad \bar{M}_1(z) = 1 \cdot h.$$

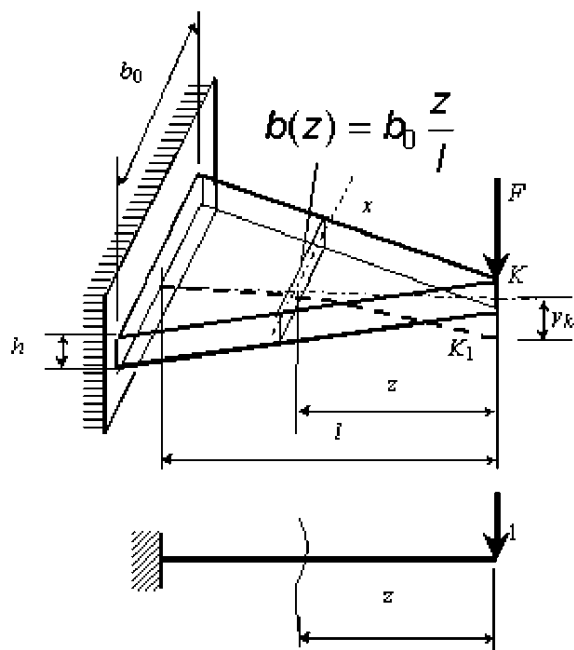
Тогда сближение точек 1 и 2 в заданной раме

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{EJ} \int_0^l \left(\frac{ql}{2}z - \frac{qz^2}{2} \right) h dz = \frac{1}{EJ} \left\{ \frac{ql}{2} h \int_0^l z dz - \frac{qh}{2} \int_0^l z^2 dz \right\} = \\ &= \frac{1}{EJ} \left[\frac{qlh}{2} \frac{z^2}{2} \Big|_0^l - \frac{qh}{2} \frac{z^3}{3} \Big|_0^l \right] = \frac{1}{EJ} \left(\frac{ql^3h}{4} - \frac{ql^3h}{6} \right) = \frac{ql^3h}{12EJ}. \end{aligned}$$

Пример 2.3. Определить прогиб консоли переменного поперечного сечения (рис. 2.9):

$$y_k = \int_0^l \frac{M_0(z) \bar{M}_1(z)}{EJ_x(z)} dz$$

Здесь



$$J_x(z) = \frac{b_z h^3}{12} = b_0 \frac{z h^3}{l \cdot 12} =$$

$$= \frac{b_0 h^3}{12} \frac{z}{l} = J_0 \frac{z}{l};$$

$$M_0(z) = -Fz;$$

$$\bar{M}_1(z) = -1 \cdot z.$$

Рис. 2.9. Брус переменного сечения

Тогда прогиб консоли определится как

$$y_K = \int_0^l \frac{-Fz(-z)}{EJ_x(z)} dz = \frac{1}{EJ_0} \int_0^l \frac{Fz^2 l}{z} dz =$$

$$= \frac{Fl}{EJ_0} \int_0^l z dz = \frac{Fl^3}{2EJ_0}.$$

2.3. Техника вычисления интеграла Мора

2.3.1. Перемножение эпюр $M_0(z)$, $\bar{M}_1(z)$

Если жесткость стержня на рассматриваемом участке длиной l постоянна, то в формуле Мора (2.13) жесткость выносится за знак интеграла

$$\Delta_{10} = \frac{1}{EJ} \int M_0(z) \bar{M}_1(z) dz \quad (2.14)$$

Если хотя бы одна из подынтегральных функций $M_0(z)$, $\bar{M}_1(z)$ — линейная, то вычисление интеграла Мора упрощается.

Разместим начало координат в т. О (рис. 2.10).

Тогда $M_1(z) = z \operatorname{tg} \alpha$. Интеграл в формуле (2.14) запишется так:

$$\int_a^b M_0(z) \operatorname{tg} \alpha z dz = \operatorname{tg} \alpha \int_a^b M_0(z) z dz \quad (2.15)$$

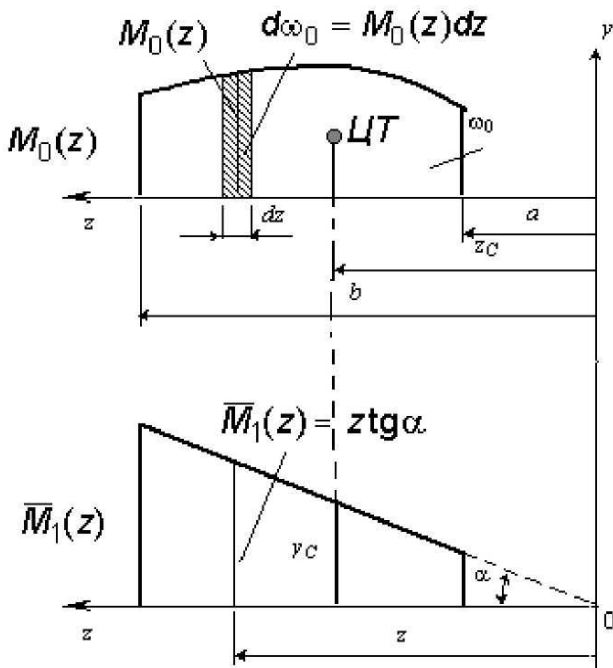


Рис. 2.10. Эпюры $M_0(z)$, $\bar{M}_1(z)$

$$\int_a^b M_0(z) \bar{M}_1(z) dz = \omega_0 y_c \quad (2.16)$$

Таким образом, интеграл Мора может быть вычислен перемножением площади криволинейной эпюры ω_0 на ординату линейной эпюры y_c , взятую под центром тяжести криволинейной эпюры.

Если обе эпюры $M_0(z)$ и $\bar{M}_1(z)$ линейны, то безразлично по какой из них определять площадь ω_0 , а по какой – ординату y_c .

Этот прием вычисления интеграла Мора называется перемножением эпюр по правилу Верещагина.

Знак произведения $\omega_0 y_c$ принимается положительным, если центр тяжести площади ω_0 , и ордината y_c расположены по одну сторону от оси Z . Если это условие не выполняется, значение интеграла получается отрицательным. В пособии принято ординаты на эпюрах $M_0(z)$ и $\bar{M}_i(z)$ располагать со стороны растянутого волокна изогнутого стержня.

В табл. 2.1 приведены значения площадей ω_0 для некоторых часто встречающихся эпюр $M_0(z)$ и положение центра тяжести этих эпюр по оси Z .

Таблица 2.1

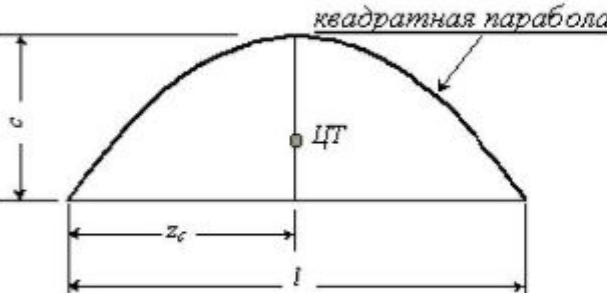
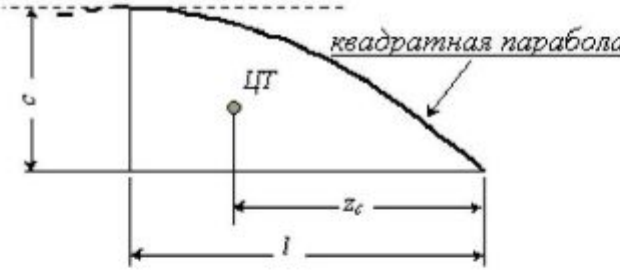

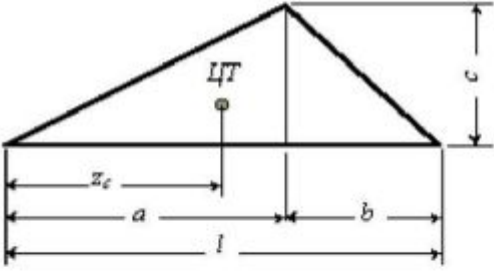
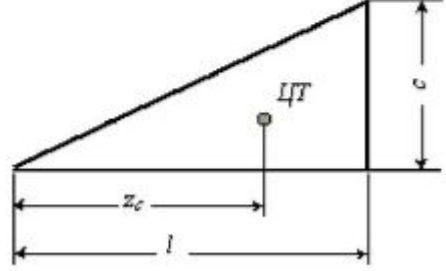
Площади и положение центров тяжести основных геометрических фигур

Обозначив $M_0(z) dz = d\omega_0$, получим $\operatorname{tg} \alpha \int_a^b d\omega_0 z$

Интеграл $\int_a^b d\omega_0 z$ – статический момент площади эпюры $M_0(z)$ относительно оси y . Тогда

$$\int_a^b M_0(z) \bar{M}_1(z) dz = \operatorname{tg} \alpha S_0$$

Так как $S_0 = \omega_0 z_c$, а $\operatorname{tg} \alpha \cdot z_c = y_c$, то

Вид эпюры $M(z)$	$\bar{\omega}_0$	\bar{z}_c
	$\frac{2}{3} cl$	$\frac{1}{2} l$
	$\frac{2}{3} lc$	$\frac{5}{8} l$
	$\frac{1}{3} lc$	$\frac{3}{4} l$
	$\frac{1}{2} cl$	$\frac{1}{3} (a+l)$
	$\frac{1}{2} cl$	$\frac{2}{3} l$

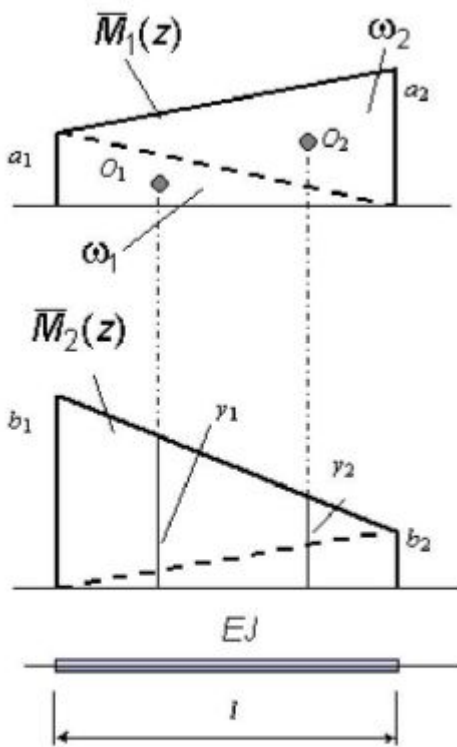


Рис. 2.11. Эпюры \bar{M}_1 , \bar{M}_2

Подставляя значения ω_1 , ω_2 , y_1 , y_2 из рис. 2.11

$$\omega_1 = \frac{a_1 l}{2}; \quad \omega_2 = \frac{a_2 l}{2};$$

$$y_1 = \frac{2}{3} b_1 + \frac{1}{3} b_2; \quad y_2 = \frac{1}{3} b_1 + \frac{2}{3} b_2,$$

получим

$$\begin{aligned} \int_0^l \bar{M}_1(z) \bar{M}_2(z) dz &= \frac{a_1 l}{2} \left(\frac{2}{3} b_1 + \frac{1}{3} b_2 \right) + \frac{a_2 l}{2} \left(\frac{1}{3} b_1 + \frac{2}{3} b_2 \right) = \\ &= \frac{l}{6} (2a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + 2a_2 b_2). \end{aligned}$$

Для стержня постоянной жесткости по длине перемещение Δ_{10} в этом случае определяется по формуле

$$\Delta_{10} = \frac{l}{6EJ} (2a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + 2a_2 b_2) \quad (2.17)$$

Если подынтегральные функции $\bar{M}_1(z)$, $\bar{M}_2(z)$ — линейны (рис. 2.11), то интеграл Мора

$$\int_l \bar{M}_1(z) \bar{M}_2(z) dz$$

можно выразить через величины конечных ординат a_1 , a_2 , b_1 , b_2 .

Разделив эпюры $\bar{M}_1(z)$ на два треугольника с катетами a_1 , a_2 и эпюру $\bar{M}_2(z)$ на два треугольника с катетами b_1 , b_2 (рис. 2.11), запишем

$$\int \bar{M}_1(z) \bar{M}_2(z) dz = \omega_1 y_1 + \omega_2 y_2$$

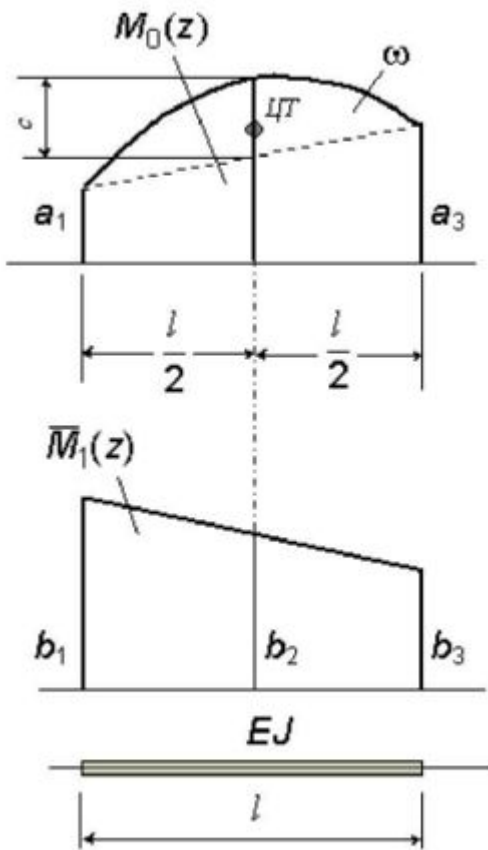


Рис. 2.12. Эпюры M_0 , \bar{M}_1

Рассмотрим вычисление интеграла Мора перемножением эпюр с использованием ординат $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ для варианта, когда одна из подынтегральных функций – $M_0(z)$ – нелинейна и представлена квадратной параболой, другая – $\bar{M}_1(z)$ – линейна в пределах перемножаемого участка (рис. 2.12).

Разделим эпюру $M_0(z)$ на две фигуры – трапецию с ординатами a_1 и a_3 по границам участка и параболу с ординатой c в середине участка l . Используя выражения (2.16) и (2.17), запишем

$$\int_l M_0(z) \bar{M}_1(z) dz = \omega b_2 + \frac{l}{6} \times (2a_1 b_1 + a_1 b_3 + a_3 b_1 + 2a_3 b_3).$$

Заменив $\omega = \frac{2}{3} c l$, где $c = a_2 - \frac{a_1 + a_3}{2}$, $b_2 = \frac{b_1 + b_3}{2}$,

запишем:

$$\int M_0(z) \bar{M}_1(z) dz = \frac{2}{3} \left(a_2 - \frac{a_1 + a_3}{2} \right) l \frac{b_1 + b_3}{2} + \frac{l}{6} (2a_1 b_1 + a_1 b_3 + a_3 b_1 + 2a_3 b_3).$$

После преобразований получим:

$$\int M_0(z) \bar{M}_1(z) dz = \frac{l}{6} (a_1 b_1 + 4a_2 b_2 + a_3 b_3)$$

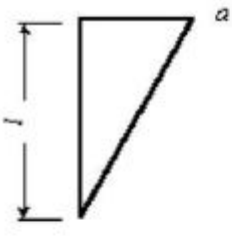
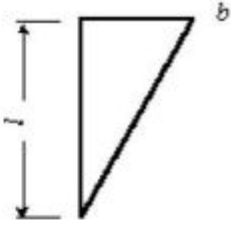
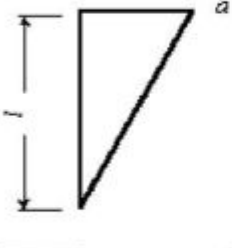
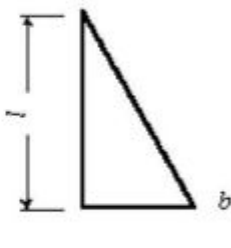
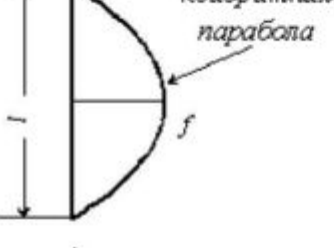
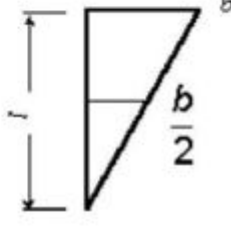


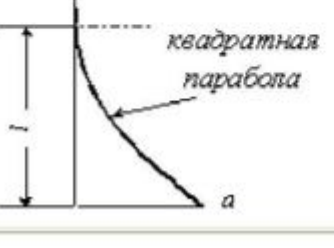
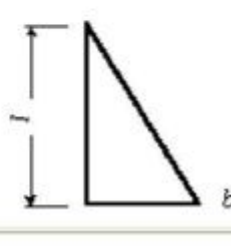
Перемещение Δ_{10} для изогнутого стержня постоянной жесткости EJ длиной l в этом случае может быть вычислено по формуле

$$\Delta_{10} = \frac{l}{6EJ} (a_1 b_1 + 4a_2 b_2 + a_3 b_3) \quad (2.18)$$

Знаки произведений в формуле (2.18) будут положительными, если ординаты в перемножаемых эпюрах однозначны – располагаются по одну сторону от оси стержня z . Если ординаты a_i, b_i располагаются по разные стороны от оси z , то знак произведений следует брать отрицательный.

Таблица 2.2

Значение интеграла Мора при различных видах подынтегральных функций

Эпюра $M_0(z)$ от заданной нагрузки	Эпюра от единичного воздействия $\bar{M}_1(z)$	Значение интеграла Мора $\frac{1}{EJ} \int_l M_0(z) \bar{M}_1(z) dz$
		$\frac{abl}{3EJ}$
		$\frac{abl}{6EJ}$
		$\frac{fbl}{3EJ}$
		$\frac{abl}{12EJ}$
		$\frac{abl}{4EJ}$

В табл. 2.2 приведены некоторые значения интеграла Мора, полученные перемножением эпюр $\overline{M}_0(z)$ и $\overline{M}_1(z)$ по правилу Верещагина

2.3.2. Матричная форма интеграла Мора

При реализации машинных алгоритмов по расчету сложных стержневых систем на ПЭВМ определение перемещений производится по формулам, отличным от приведенных в п. 2.3.1. Используется новая форма с применением матричных преобразований, легко поддающихся программированию.

Получим матричную запись интеграла Мора в формуле для определения перемещений в случае, когда перемножаемые эпюры представляются линейными функциями, жесткость в пределах участка постоянна (см. рис. 2.11).

Решение интеграла Мора для этого случая (2.17)

$$\delta_{12} = \int_l \frac{\overline{M}_1(z)\overline{M}_2(z)dz}{EJ} = \frac{l}{6EJ}(2a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + 2a_2b_2)$$

представим произведением трех матриц:

$$\delta = \mathbf{M}_1^T \mathbf{G} \mathbf{M}_2 \quad (2.19)$$

В формуле (2.19) \mathbf{M}_1 – матрица-столбец, элементами которой являются ординаты эпюры \overline{M}_1 по границам участка. При одном участке эта матрица имеет вид

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

Матрица \mathbf{M}_2 – матрица-столбец, элементами которой являются концевые ординаты эпюры \overline{M}_2 на участке (см. рис. 2.11):

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Матрица \mathbf{G} называется матрицей податливости и имеет для рассматриваемого варианта перемножения эпюр \overline{M}_1 , \overline{M}_2 в стержне длиной l квадратную форму размером 2×2 :

$$\mathbf{G} = \frac{l}{6EJ} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Для того чтобы убедиться в том, что матричное произведение (2.19) приводит к формуле (2.17), выполним указанные матричные операции.

\mathbf{M}_1^T – транспонированная матрица, получаемая перестановкой столбца матрицы \mathbf{M}_1 в строку:

$$\mathbf{M}_1^T = [a_1 \quad a_2].$$

Вычислим произведения матриц $\mathbf{M}_1^T \mathbf{G} = \mathbf{C}$:

$$[a_1 \quad a_2] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{l}{6EJ} = \frac{l}{6EJ} [2a_1 + a_2 \quad a_1 + 2a_2] = \mathbf{C}$$

Матрица \mathbf{C} для рассматриваемого примера представляется одной строкой с двумя элементами.

Умножая матрицу \mathbf{C} на матрицу \mathbf{M}_2 , получим

$$\frac{l}{6EJ} [2a_1 + a_2 \quad a_1 + 2a_2] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \frac{l}{6EJ} (2a_1 b_1 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + 2a_2 b_2)$$

формулу Мора (2.17) для определения δ_{12} при перемножении двух линейных эпюр $\overline{M}_1, \overline{M}_2$ в матричной форме:

$$\delta_{12} = \frac{1}{EJ} \int_l \overline{M}_1(z) \overline{M}_2(z) dz = \mathbf{M}_1^T \mathbf{G} \mathbf{M}_2 \quad (2.21)$$

Результат перемножения двух эпюр, одна из которых очерчена квадратной параболой, другая – линейная при постоянной жесткости стержня представим таким же матричным произведением:

$$\Delta_{10} = \mathbf{M}_1^T \mathbf{G} \mathbf{M}_0 \quad (2.22)$$

Здесь \mathbf{M}_1 – матрица-столбец из трех равноотстоящих ординат линейной эпюры $\overline{M}_1(z)$ b_1, b_2, b_3 (см. рис. 2.12):

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Матрица \mathbf{M}_0 – матрица-столбец, составленная из трех равноотстоящих ординат эпюры $M_0(z)$ (см. рис. 2.12):

$$\mathbf{M}_0 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}.$$

Матрица \mathbf{G} – матрица податливости для стержня постоянной жесткости имеет квадратную форму размером 3 x 3:

$$\mathbf{G} = \frac{l}{6EJ} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Покажем, что матричное произведение (2.22), вычисляемое с использованием приведенных выше матриц \mathbf{M}_1 , \mathbf{G} , \mathbf{M}_0 для стержня длиной l , приводит к формуле (2.18). Вычислим матрицу $\mathbf{C} = \mathbf{M}_1^T \mathbf{G}$:

$$\mathbf{C} = [b_1 \quad b_2 \quad b_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{l}{6EJ} = [b_1 \quad 4b_2 \quad b_3] \frac{l}{6EJ}.$$

Умножая матрицу-строку \mathbf{C} на матрицу-столбец \mathbf{M}_0 , получим

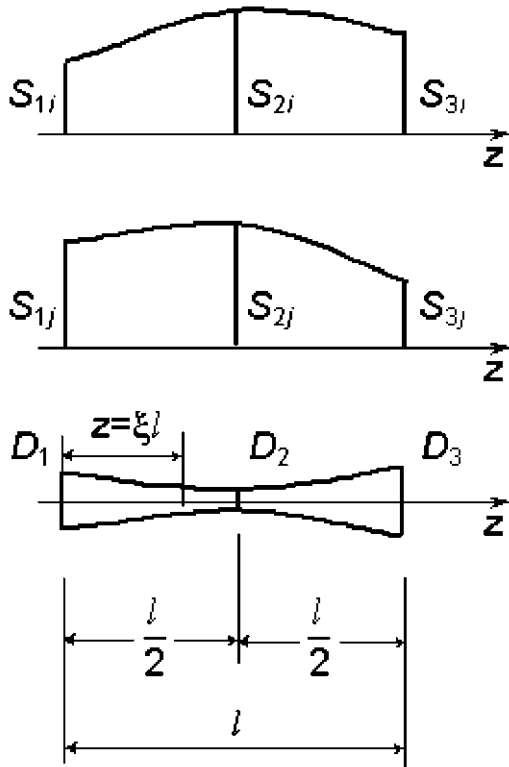
$$\frac{l}{6EJ} [b_1 \quad 4b_2 \quad b_3] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \frac{l}{6EJ} (a_1 b_1 + 4a_2 b_2 + a_3 b_3)$$

Этот результат совпадает со значением Δ_{10} , вычисленным по формуле (2.18).

Покажем особенности формирования матрицы податливости \mathbf{G} при расчете стержневых систем с криволинейными элементами переменной жесткости. В общем случае все три подынтегральные функции в формуле Мора могут быть криволинейными.

Обозначим усилия в сечениях стержня $S_i(\xi)$, $S_j(\xi)$, $S_0(\xi)$ ($M_{изг}$, $M_{кр}$, N), жесткость поперечного сечения – $D(\xi)$ (EJ_x , EA , $GJ\rho$). Тогда интеграл Мора запишется в виде

$$\Delta_{ij} = \sum_{k=1}^n \int \frac{S_i(\xi) S_j(\xi)}{D(\xi)} d\xi \quad (2.24)$$



Представим подынтегральные функции $S_i(\xi)$, $S_j(\xi)$, $D(\xi)$ в выражении (2.24) степенными полиномами на участке стержня длиной l (рис. 2.13)

$$S_i(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2, \quad (2.25)$$

$$S_j(\xi) = b_0 + b_1\xi + b_2\xi^2, \quad (2.26)$$

$$D(\xi) = c_0 + c_1\xi + c_2\xi^2, \quad (2.27)$$

где $\xi = \frac{z}{l}$.

Рис. 2.13. Функции $S_i(\xi)$, $S_j(\xi)$, $D(\xi)$

Коэффициенты a_1 , a_2 , a_3 , b_1 , b_2 , b_3 , c_1 , c_2 , c_3 определяются из условия прохождения функций $S_i(\xi)$, $S_j(\xi)$, $D(\xi)$ через фиксированные ординаты в трех равноотстоящих точках на участке. Например, для функции $S_i(\xi)$

$$\begin{aligned} a_0 &= S_{1i}, \\ a_1 &= 3S_{1i} + 4S_{2i} - S_{3i}, \\ a_2 &= 3S_{1i} - 4S_{2i} + 2S_{3i}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Аналогично определяются и коэффициенты b_k , c_k .

Интеграл (2.13) после подстановки функций $S_i(\xi)$, $S_j(\xi)$, $D(\xi)$ в пределах $\xi = 0 \div 1$ по формулам (2.25), (2.26), (2.27) имеет решение, которое можно представить в матричной форме:

$$\mathbf{S}_i^T \mathbf{G} \mathbf{S}_j = \int_0^1 \frac{S_i(\xi) S_j(\xi)}{D(\xi)} d\xi = \mathbf{S}_{1i} (\mathbf{S}_{1j} \psi_{11} + \mathbf{S}_{2j} \psi_{12} + \mathbf{S}_{3j} \psi_{13}) + \\ + \mathbf{S}_{2i} (\mathbf{S}_{1j} \psi_{21} + \mathbf{S}_{2j} \psi_{22} + \mathbf{S}_{3j} \psi_{23}) + \mathbf{S}_{3i} (\mathbf{S}_{1j} \psi_{31} + \mathbf{S}_{2j} \psi_{32} + \mathbf{S}_{3j} \psi_{33}),$$

где $\mathbf{S}_i, \mathbf{S}_j$ – матрицы-столбцы из трех равноотстоящих ординат эпюр S_i, S_j на участке. Матрица податливости \mathbf{G} – квадратная размером 3 x 3:

$$\mathbf{G} = \frac{l}{D_2} \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \psi_{23} \\ \psi_{31} & \psi_{32} & \psi_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

Матрица \mathbf{G} симметрична относительно главной диагонали, элементы ее определяются по формулам:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{11} = \varphi_0 - 6\varphi_1 + 13\varphi_2 - 12\varphi_3 + 4\varphi_4, \\ \psi_{12} = \psi_{21} = 4\varphi_1 - 16\varphi_2 + 20\varphi_3 - 8\varphi_4, \\ \psi_{13} = \psi_{31} = -\varphi_1 + 5\varphi_2 - 8\varphi_3 + 4\varphi_4, \\ \psi_{22} = 6\varphi_2 - 32\varphi_3 + 16\varphi_4, \\ \psi_{23} = \psi_{32} = -4\varphi_2 + 12\varphi_3 - 8\varphi_4, \\ \psi_{33} = \varphi_2 - 4\varphi_3 + 4\varphi_4. \end{array} \right. \quad (2.31)$$

$$\varphi_k = \int_0^1 \frac{\xi^k}{D(\xi)} d\xi$$

В выражениях (2.31)
(2.32)

$$D(\xi) = \frac{1}{D_2} \left[\alpha_1 + (4 - 3\alpha_1 - \alpha_3) \xi + (-4 + 2\alpha_1 + 2\alpha_3) \xi^2 \right] \quad \text{при} \quad \alpha_1 = \frac{D_1}{D_2}, \\ \alpha_3 = \frac{D_3}{D_2} \quad (\text{см. рис. 2.13}).$$

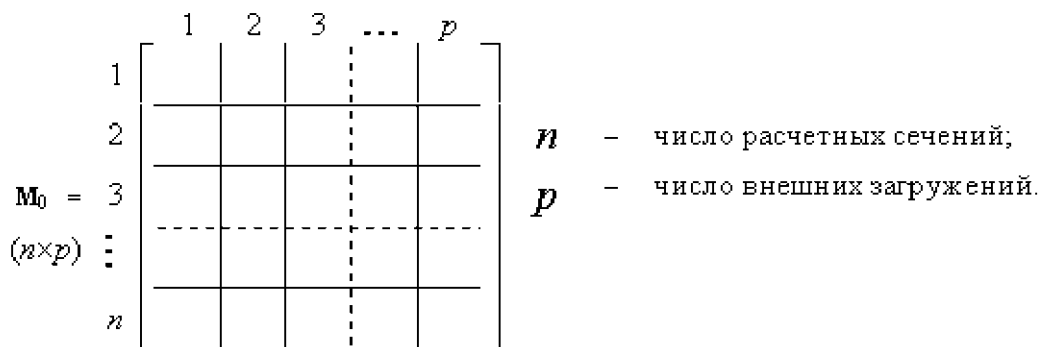
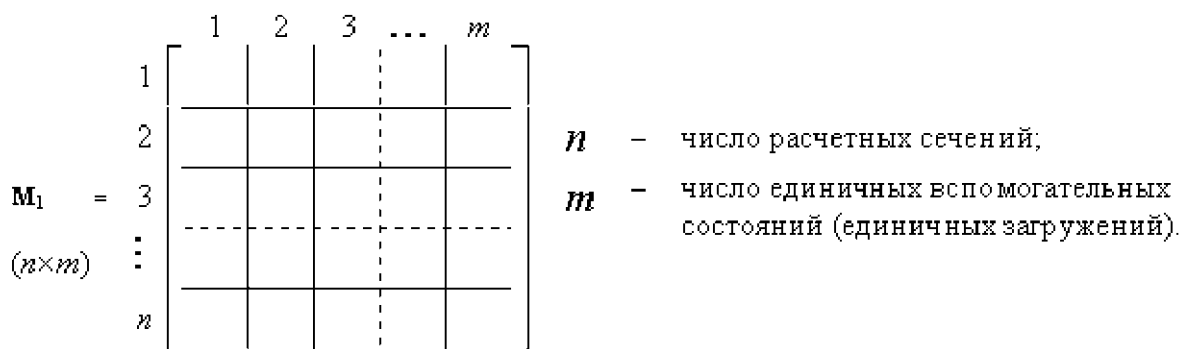
Для случая, если в выражении (2.31) какая-либо функция линейна, формирование матрицы податливости упрощается.

Значения элементов Ψ_{ij} матрицы податливости (2.30) при различных сочетаниях α_1, α_2 в диапазоне от 0,05 до 2 с интервалом 0,05 приведены в работе [16].

При вычислении перемещений в стержневой системе от изгибных деформаций должны быть просуммированы результаты перемножения эпюр по всем участкам. В матричной форме это выполняется операцией $\mathbf{M}_1^T \mathbf{G} \mathbf{M}_0$ с полными матрицами $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_0, \mathbf{G}$. Полные матрицы формируются из соответствующих матриц для каждого участка.

Если расчетная схема состоит из нескольких стержней и имеет n участков на эпюрах $\overline{M}_1, \dots, \overline{M}_m$ и M_{10}, \dots, R_1 , соответствующих приведенным на рис. 2.11, 2.12, а жесткости каждого участка постоянны, то при определении m различных перемещений от p загрузений матрицы $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_0, \mathbf{G}$ формируются из блоков (2.20), (2.23) (рис. 2.14).

Порядок матрицы $\mathbf{C} = \mathbf{M}_1^T \mathbf{G}$ и искомой матрицы $\Delta = \mathbf{C} \mathbf{M}_0$ показан на рис. 2.15.



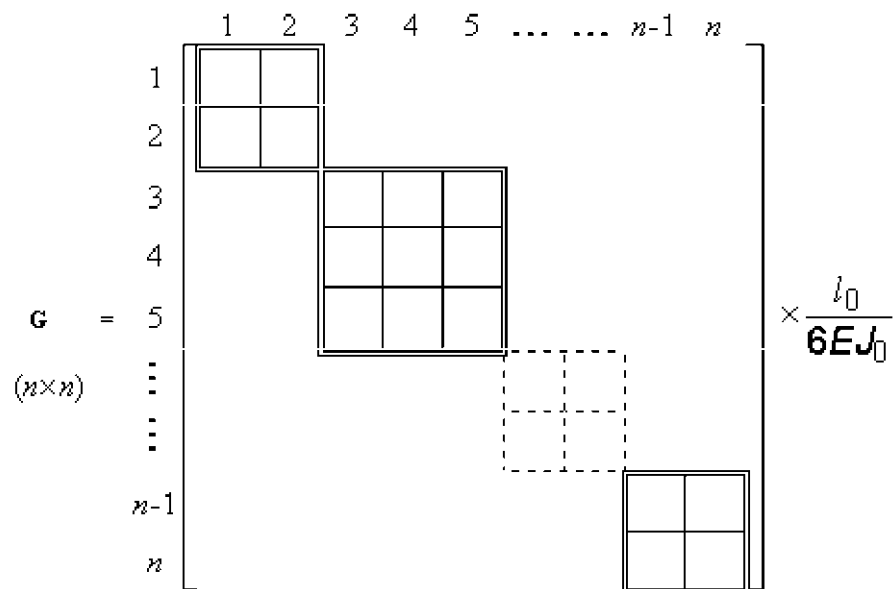


Рис. 2.14. Структура исходных матриц $\underline{\mathbf{M}}_1$, $\underline{\mathbf{M}}_0$, $\overline{\mathbf{G}}$

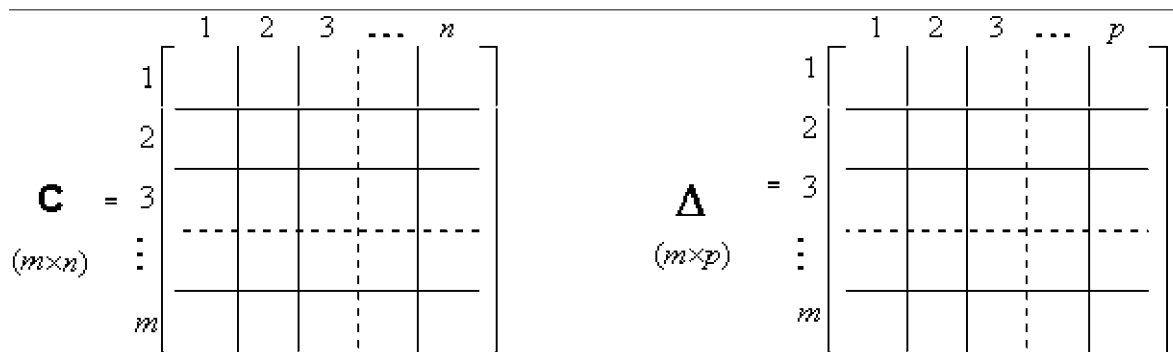


Рис. 2.15. Порядок матрицы \mathbf{C} и матрицы перемещений Δ

Пример 2.4. Требуется определить вектор перемещений узла С рамы (рис. 2.16) по матричной формуле

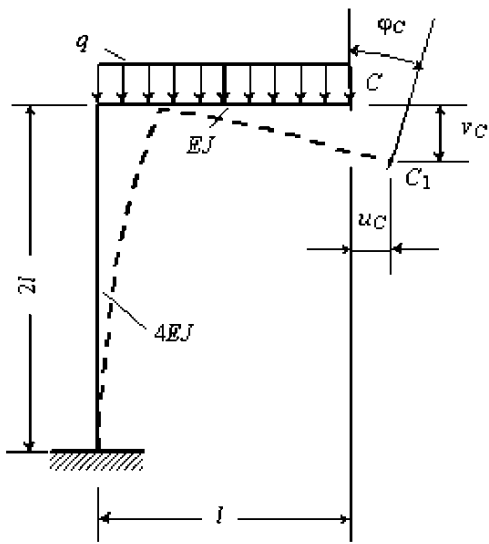


Рис. 2.16. К примеру 2.4

$$\bar{\Delta} = \mathbf{M}_1^T \mathbf{G} \mathbf{M}_0 = \begin{bmatrix} v_C \\ u_C \\ \varphi_C \end{bmatrix}$$

Решение.

1. Покажем вспомогательные состояния рамы, нагружая ее единичными силами по направлению определяемых перемещений, и строим эпюры \bar{M}_1 , \bar{M}_2 , \bar{M}_3 от этих загрузений (рис. 2.17, а, б, в), эпюру M_0 от заданной нагрузки (рис. 2.17, г).

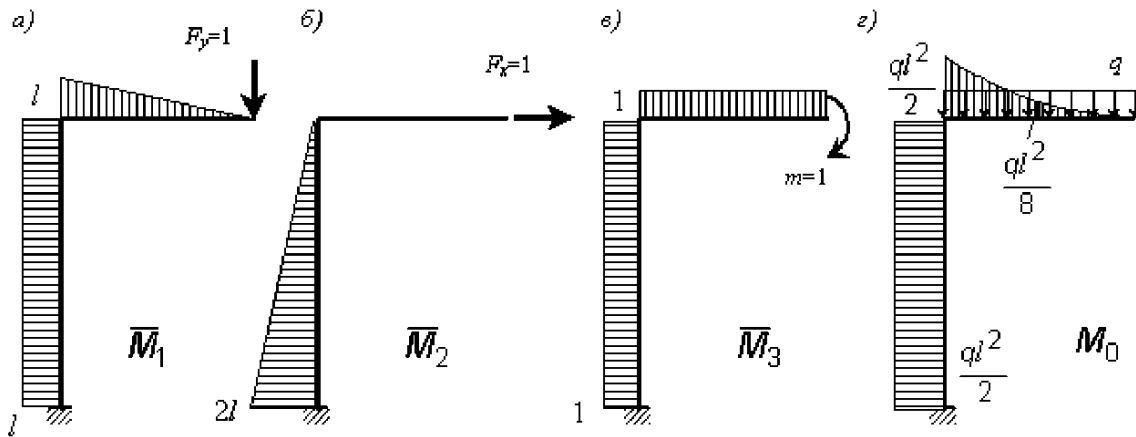


Рис. 2.17. Эпюры моментов к примеру 2.4: а, б, в – вспомогательные; г – грузовая

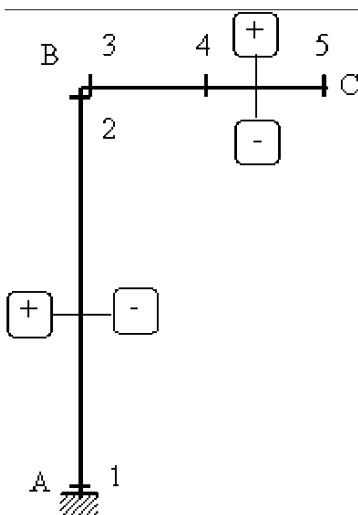


Рис. 2.18. Границы участков, принятые знаки

2. Назначим количество расчетных сечений исходя из вида эпюр f_1-f_1 , \bar{M}_2 , f_1'' , M_0 и заданных жесткостей стержней рамы.

Для решаемой задачи необходимо принять 5 сечений (рис. 2.18). Объединять сечения 2 и 3 в одно сечение нельзя, потому что жесткости стержней, сходящихся в узле В, различны.

Необходимо условиться с определением знака ординат. В данной задаче эпюры моментов расположены с внешней стороны контура рамы, эти ординаты и принимаем положительными.

3. Формируем матрицы столбцов M_1, M_0

$$M_1 = \begin{bmatrix} l & 2l & 1 \\ l & 0 & 1 \\ l & 0 & 1 \\ 0,5l & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad M_0 = \begin{bmatrix} 0,5ql^2 \\ 0,5ql^2 \\ 0,5ql^2 \\ 0,125ql^2 \\ 0 \end{bmatrix} = ql^2 \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \\ 0,125 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Формируем матрицу податливости G для каждого участка.

На участке 1–2 все эюры линейны, поэтому матрица податливости этого участка квадратная 2×2 записывается по формуле (2.20):

$$G_{12} = \frac{l_{12}}{6EJ_{12}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{2l}{24EJ} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{l}{12EJ} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

На участке BC с криволинейной эюрой M_0 матрица податливости будет иметь размеры 3×3 по формуле (2.23):

$$G_{345} = \frac{l_{345}}{6EJ_{345}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{l}{6EJ} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

При объединении автономных блоков матрицы податливости для каждого участка в общую матрицу податливости для всей рамы необходимо сделать единый множитель перед всеми блоками. Для этого G_{12} преобразуем так:

$$G_{12} = \frac{l}{2 \cdot 6EJ} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{l}{6EJ} \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Полная матрица податливости при определении вектора перемещений узла C для заданной рамы

$$G = \frac{l}{6EJ} \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & & & \\ 0,5 & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 4 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Выполняем матричные операции алгоритма $\Delta = \mathbf{M}_1^T \mathbf{G} \mathbf{M}_0$, перемножая вначале первые две матрицы. Полученное произведение матриц обозначим матрицей $\mathbf{C} = \mathbf{M}_1^T \mathbf{G}$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0,5 & 0 \\ 2l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & & & \\ 0,5 & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 4 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \frac{l}{6EJ} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0,5 & 1 \cdot 0,5 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 & 0,5 \cdot 4 & 0 \\ 2l \cdot 1 & 2l \cdot 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 + 0,5 & 0,5 + 1 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \frac{l}{6EJ} = \begin{bmatrix} 1,5l & 1,5l & l & 2l & 0 \\ 2l & l & 0 & 0 & 0 \\ 1,5 & 1,5 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \frac{l}{6EJ}$$

Произведение матриц $\mathbf{C} \mathbf{M}_0$ дает искомый вектор перемещений:

$$\Delta = \frac{l}{6EJ} \begin{bmatrix} 1,5l & 1,5l & l & 2l & 0 \\ 2l & l & 0 & 0 & 0 \\ 1,5 & 1,5 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \\ 0,125 \\ 0 \end{bmatrix} ql^2 = \frac{ql^3}{6EJ} \begin{bmatrix} 2,25l \\ 1,5l \\ 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2,25ql^4}{6EJ} \\ \frac{ql^4}{4EJ} \\ \frac{25ql^3}{6EJ} \end{bmatrix}$$

Матричный алгоритм вычисления перемещений рационален при его реализации на ПЭВМ, поскольку при этом используются стандартные программы матричных операций, к тому же блок матрицы перемещений $\Delta = \mathbf{S}_1^T \mathbf{G} \mathbf{S}_0$ входит в единый автоматизированный матричный алгоритм расчета статически неопределимых систем на ПЭВМ:

$$\mathbf{S}_{\text{рас}} = [\mathbf{S}_0 - \mathbf{S}_1 (\mathbf{S}_1^T \mathbf{G} \mathbf{S}_1)^{-1} (\mathbf{S}_1^T \mathbf{G} \mathbf{S}_0)] \bar{\mathbf{F}}, \quad (2.33)$$

об использовании которого при расчете неразрезных балок см. разд. 9.

3. Раскрытие статической неопределимости неразрезных балок

3.1. Метод сравнения деформаций

Метод сравнения деформаций для раскрытия статической неопределимости при расчете неразрезных балок используется для

систем с одной лишней связью с такими схемами загрузки, для которых линейные или угловые перемещения в основной статически определимой системе могут быть определены по формулам, приведенным в справочниках, либо вычислены известными методами без сложных преобразований.

В этом методе сначала дается возможность основной системе деформироваться под действием заданной внешней нагрузки, а затем подбирается такое усилие X_1 , которое бы вернуло точку приложения этого усилия обратно. Таким образом, подбирается величина неизвестной дополнительной реакции X_1 с тем условием, чтобы уравнивать деформации от заданной нагрузки и силы X_1 .

Покажем использование этого метода на приведенных ниже примерах.

Пример 3.1. Двухпролетная неразрезная балка загружена равномерно распределенной нагрузкой по всей длине (рис. 3.1, а).

Решение.

Заданная система с одной лишней связью. Примем за лишнюю связь среднюю опору. При таком варианте сохраняется симметрия основной системы, что облегчает решение (рис. 3.1, б).

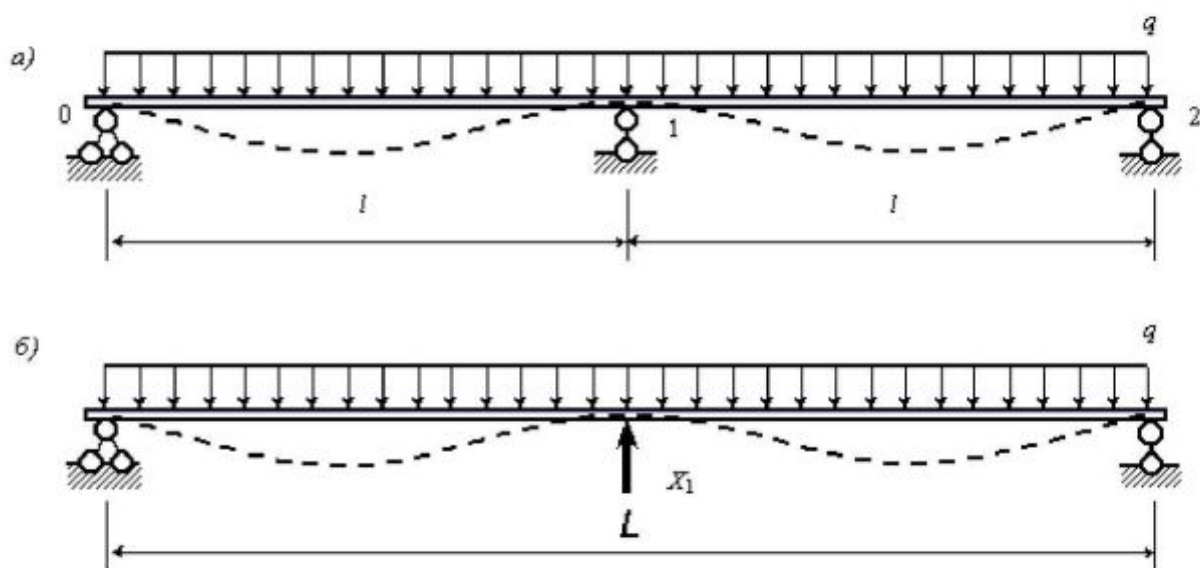


Рис. 3.1. Схемы: а – статически неопределимая балка; б – статически определимая основная система, эквивалентная заданной

Значение реакции X_1 должно быть таким, при котором суммарный прогиб на опоре 1 в основной статически определимой системе (рис. 3.1, б) будет равен нулю, так как в заданной системе в точке 1 – жесткая опора. Условие тождественности деформации заданной системы и системы основной запишется так:

$$y_{1(q)} + y_{1(X_1)} = 0 \quad (3.1)$$

Эпюры прогибов от нагрузки q и силы X_1 показаны на рис. 3.2.

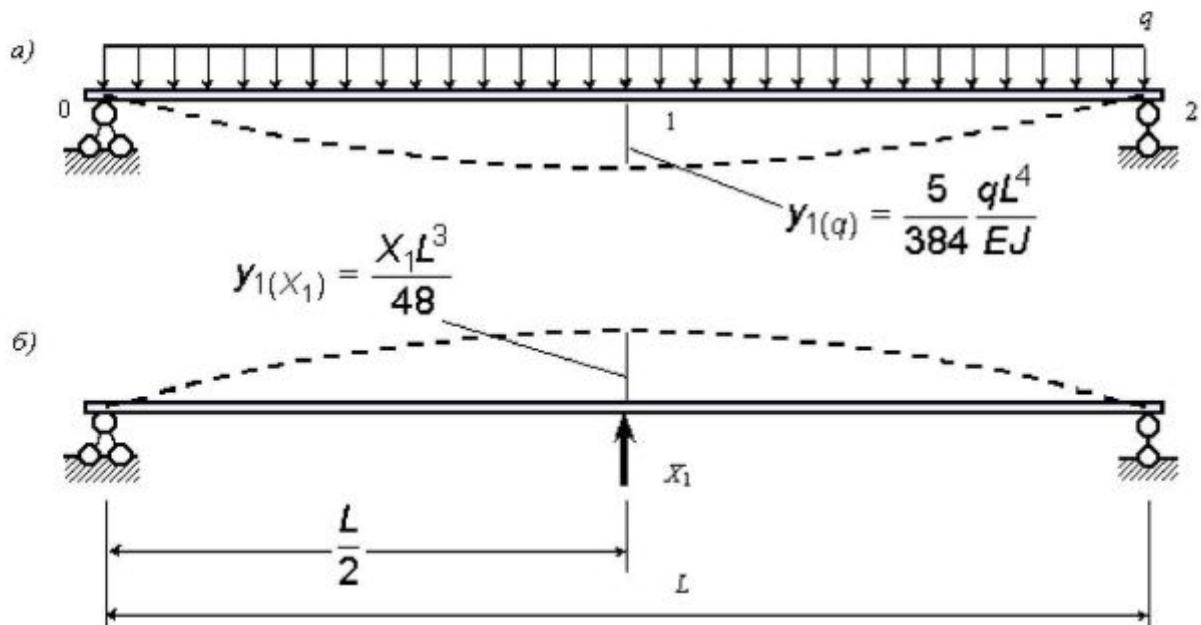


Рис. 3.2. Эпюры прогибов в основной статически определимой системе: а – от внешней нагрузки; б – от лишней неизвестной X_1

Значения прогибов $y_{1(q)}$ и $y_{1(X_1)}$ в середине пролета балки пролетом L указаны на рис. 3.2. Подставляя их в уравнение (3.1), получим

$$\frac{5}{384EJ}qL^4 - X_1\frac{L^3}{48EJ} = 0, \quad (3.2)$$

откуда $X_1 = \frac{5}{8}qL$.

Эпюры изгибающих моментов и перерезывающих сил в балке получим сложением их от загрузения основной системы нагрузкой q и силой

$$X_1 = \frac{5}{8}qL \quad (\text{рис. 3.3}).$$

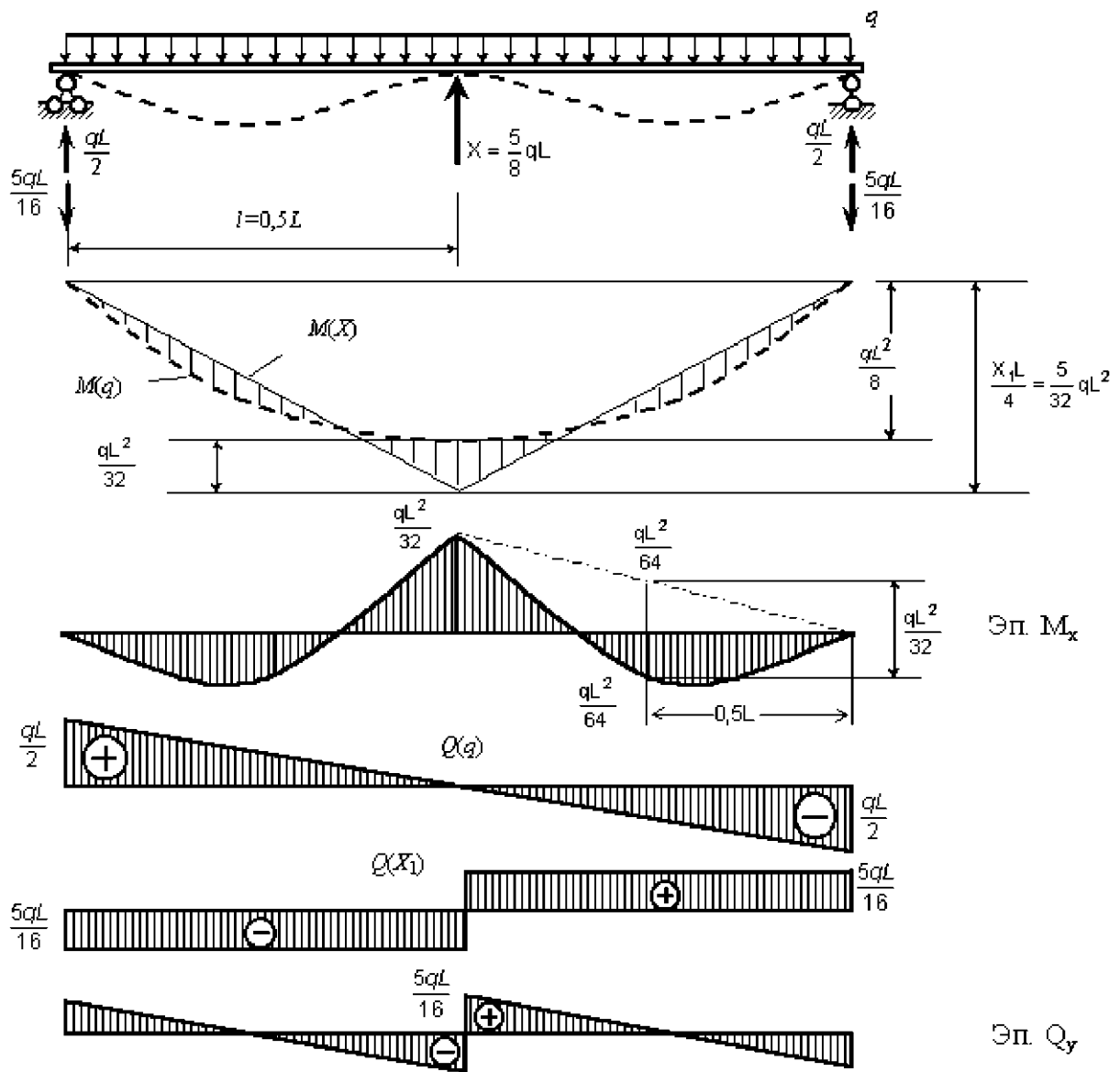


Рис. 3.3. Эпюры M_x и Q_y

Изгибающие моменты и перерезывающие силы в любом сечении заданной балки после раскрытия статической неопределенности могут быть определены так, как это делается в статически определимой системе.

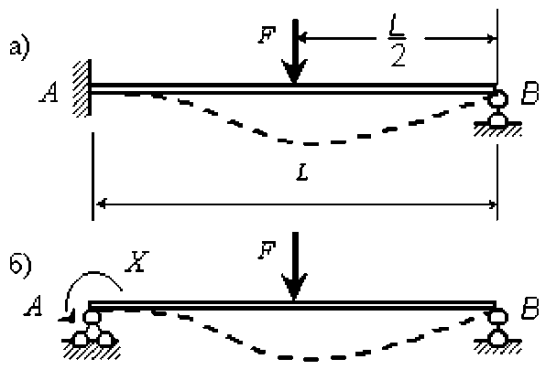


Рис. 3.4. К примеру 3.2: а – один раз статически неопределимая балка; б – основная статически определимая система

Пример 3.2. Требуется раскрыть статическую неопределимость балки, приведенной на рис. 3.4, а.

Решение.

Задача один раз статически неопределима. Возможный вариант основной статически определимой системы приведен на рис. 3.4, б.

Разрешающее уравнение будет выражать отсутствие угла поворота опорного сечения в защемлении:

$$\varphi_{A(F)} + \varphi_{A(X)} = 0. \quad (3.3)$$

Значения $\varphi_{A(F)}$ и $\varphi_{A(X)}$ определим, используя метод начальных параметров.

Принимая начало координат на опоре А, запишем для рассматриваемой балки уравнение изогнутой оси $y(z)$:

$$EJy(z) = EJy_0 + EJ\varphi_0 z + \sum \frac{m_i(z - a_i)^2}{2} + \sum \frac{F_i(z - b_i)^3}{6} \quad (3.4)$$

В этом уравнении m_i , F_i – силовые факторы; a_i , b_i – расстояния от начала координат до соответствующих силовых факторов.

В рассматриваемом примере $EJy_0 = 0$, $EJ\varphi_0 = EJ\varphi_A$.

Значение $EJ\varphi_A$ определим, используя граничное условие на опоре В при $z = L$

$$EJy_B = 0.$$

Рассмотрим последовательно схему нагружения балки по рис. 3.5, а и по рис. 3.5, б.

Если балка нагружена силой F , то уравнение (3.4) при $z = L$ (точка В) примет вид

$$0 = EJ\varphi_A L + \frac{F}{2} \cdot \frac{L^3}{6} - F \frac{(L - 0,5L)^3}{6},$$

откуда $EJ\varphi_A = -\frac{FL^2}{12} + \frac{FL^2}{48} = -\frac{FL^2}{16}$, следовательно $EJ\varphi_{A(F)} = -\frac{FL^2}{16}$.

При нагружении балки опорным моментом X на опоре A уравнение (3.4) при $z = L$ примет вид:

$$0 = EJ\varphi_A L + \frac{XL^2}{2} - \frac{XL^3}{6},$$

откуда $EJ\varphi_A = \frac{XL}{2} - \frac{XL}{6} = \frac{XL}{3}$, следовательно,

$$EJ\varphi_{A(X)} = \frac{XL}{3}.$$

Подставляя полученные значения углов поворота $\varphi_{A(F)}$, $\varphi_{A(X)}$ в уравнение (3.3) получим

$$-\frac{5FL^2}{16EJ} + \frac{XL}{3EJ} = 0 \quad \left| \quad X = \frac{3}{16}FL \right.$$

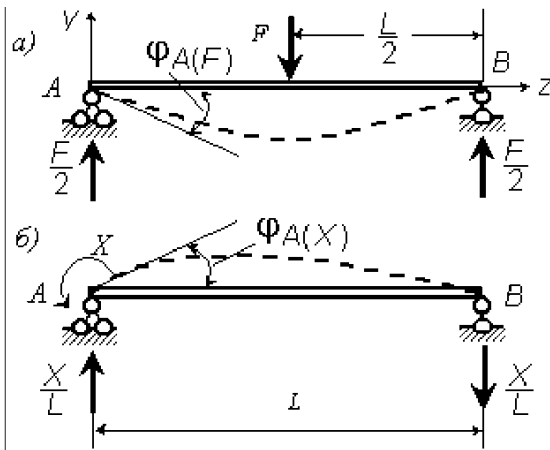


Рис.3.5. Загружение основной системы: а – внешней нагрузкой; б – неизвестным значением опорного момента X

Построение эпюр M_x , Q_y для заданной балки показано на рис. 3.6 и дополнительных пояснений не требует.

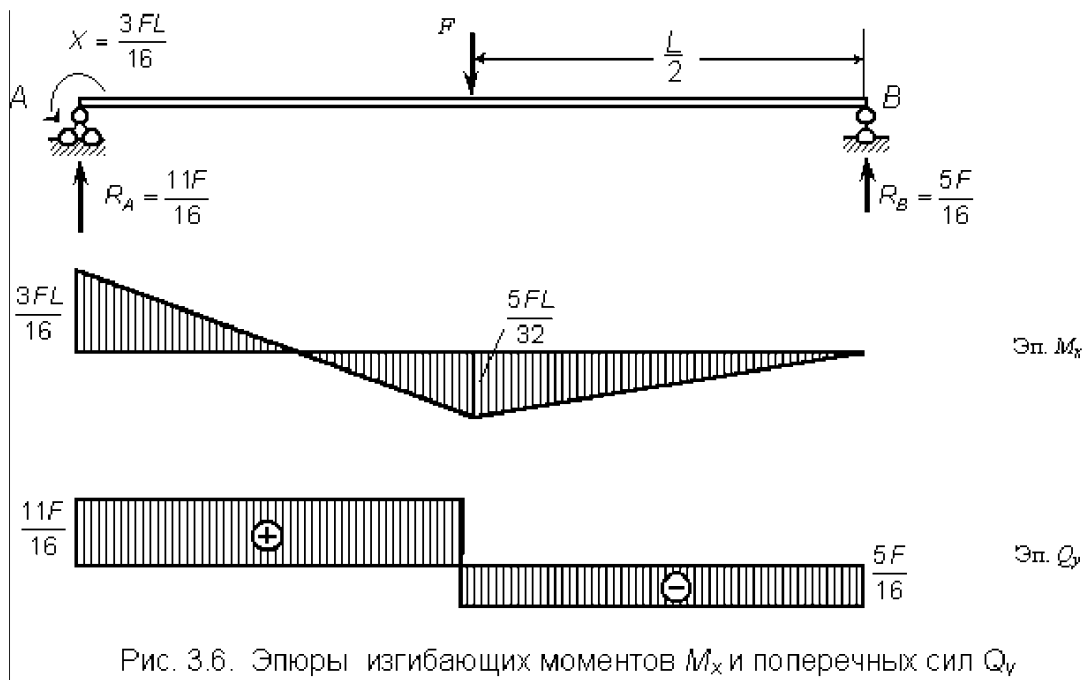


Рис. 3.6. Эпюры изгибающих моментов M_x и поперечных сил Q_y

3.2. Канонические уравнения метода сил

Раскрытие статической неопределимости в неразрезных балках методом сравнения деформаций, как показано в подразд. 3.1, практически целесообразно только в системах с одной лишней связью, при простых нагружениях. Для балок с большим числом неизвестных, а также для расчета статически неопределимых рам при формировании разрешающих уравнений

используется, по физической сути, тот же метод сравнения деформаций, однако перемещения в статически определимой основной системе определяются по формуле Мора с использованием приемов изложенных в разд. 2.

Рассмотрим конкретный пример формирования разрешающих уравнений для раскрытия статической неопределимости трехпролетной балки, изображенной на рис. 3.7, а. Вариант основной статически определимой системы получен исключением опорных связей на опорах 1, 2 и заменой реактивных усилий в этих связях неизвестными силами X_1 и X_2 (рис. 3.7, б). Условия эквивалентности изгиба заданной статически неопределимой системы и основной статически определимой балки будут соблюдаться тогда, когда от совместного действия заданной внешней нагрузки и неизвестных сил X_1 , X_2 прогибы основной системы в точках 1 и 2 будут равны нулю (рис. 3.7, б).

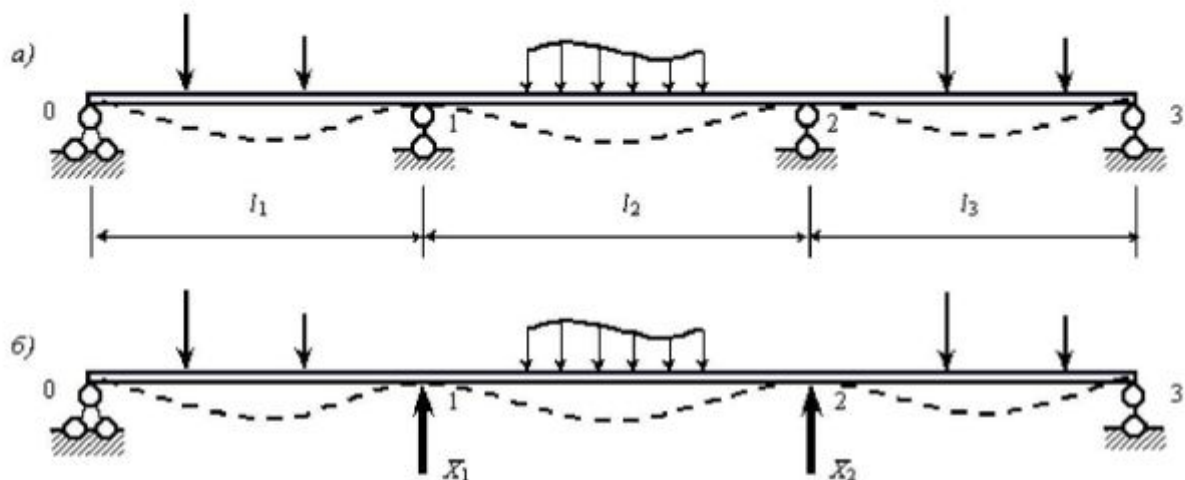


Рис. 3.7. Пример трехпролетной балки: а – статически неопределимая балка; б – статически определимая основная система, эквивалентная заданной

Запишем эти условия, используя принцип сложения действия сил и принятую форму обозначения перемещений с двумя индексами, первый из которых показывает направление перемещения, второй – причину. Рассмотрим деформацию основной системы отдельно от внешних нагрузок (грузовое состояние – “0”) и от загрузки основной системы неизвестными значениями силы X_1 (состояние “1”) и силы X_2 (состояние “2”) (рис. 3.8).

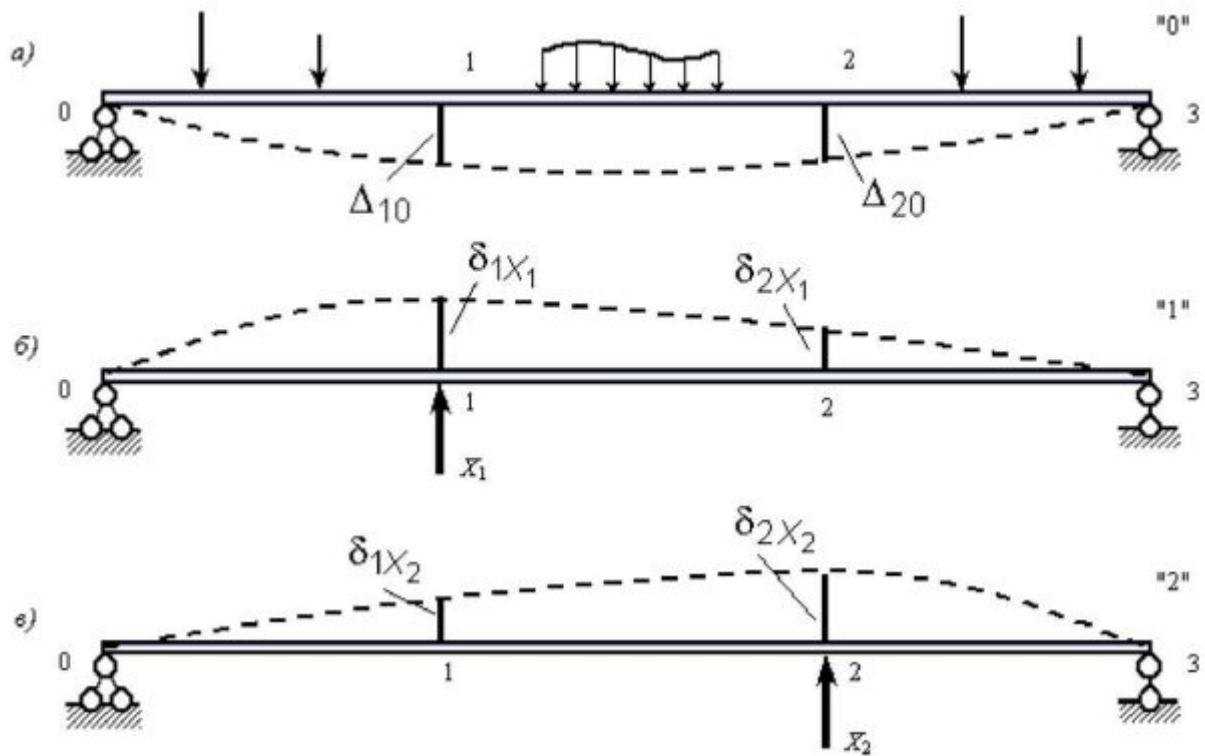


Рис. 3.8. К расчету трехпролетной балки: а – изгиб основной статически определимой системы балки от внешней нагрузки; б, в – изгиб основной системы балки от сил X_1, X_2

В заданной расчетной схеме балки в опорных точках 1, 2 прогибы равны нулю.

В принятых обозначениях это условие запишется так:

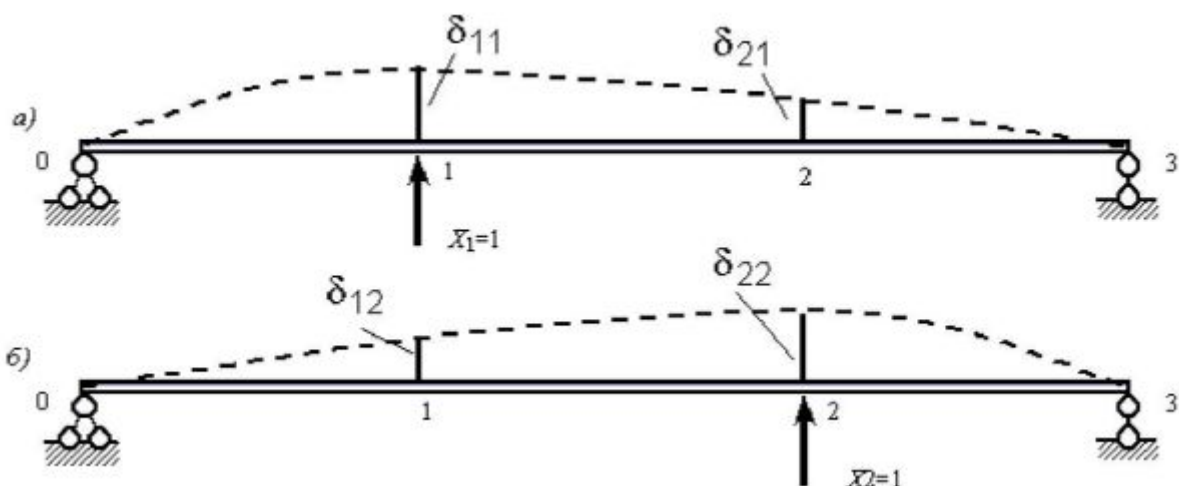
$$\begin{aligned} \Delta_{10} + \Delta_{1X_1} + \Delta_{1X_2} &= 0, \\ \Delta_{20} + \Delta_{2X_1} + \Delta_{2X_2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Физический смысл каждого слагаемого в уравнениях (3.5) ясен из рис. 3.8.

Поскольку для вычисления перемещений Δ_{10}, Δ_{20} по способу Мора в точках 1, 2 прикладываются единичные силы (рис. 3.9), то значения $\Delta_{1X_1}, \Delta_{1X_2}, \Delta_{2X_1}, \Delta_{2X_2}$ можно записать так:

$$\Delta_{1X_1} = \delta_{11}X_1; \Delta_{1X_2} = \delta_{12}X_2; \Delta_{2X_1} = \delta_{21}X_1; \Delta_{2X_2} = \delta_{22}X_2. \quad (3.6)$$

Здесь δ_{11} – перемещение по направлению X_1 от силы $X_1 = 1$; δ_{12} – перемещение по направлению X_1 от силы $X_2 = 1$; δ_{21} – перемещение по направлению X_2 от силы $X_1 = 1$; δ_{22} – перемещение по направлению X_2 от силы $X_2 = 1$.



Уравнения (3.5) после подстановки выражений (3.6) примут вид

$$\begin{aligned} \Delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 &= 0, \\ \Delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Это *канонические уравнения метода сил*. Канонические уравнения метода сил имеют кинематический смысл, так как в каждом из них суммируются перемещения.

Канонические уравнения метода сил отрицают перемещения в основной системе по направлению лишних неизвестных от совместного действия внешней нагрузки и неизвестных сил в отброшенных связях. Этим и отождествляется работа заданной статически неопределимой расчетной схемы балки и ее статически определимой основной системы.

Этот метод раскрытия статической неопределимости называется *методом сил*, потому что искомые неизвестные есть усилия в отброшенных связях. Искомыми усилиями могут быть и моменты, и перерезывающие силы, и продольные силы в исключаемых связях. Это определяется типом отброшенных связей в основной системе.

Коэффициенты в системе канонических уравнений определяются по формуле Мора (2.11) с использованием описанных в разд. 2 приемов "перемножения эпюр" по правилу Верещагина. При этом следует иметь в виду, что всегда сохраняется равенство $\delta_{ij} = \delta_{ji}$.

После раскрытия статической неопределимости последующие операции в расчете балки с определением изгибающих моментов во всех сечениях, перерезывающих сил, прогибов выполняются как в статически определимой системе, нагруженной внешними силами и найденными в результате решения системы канонических уравнений значениями лишних неизвестных. При этом используются значения найденных усилий в сечениях основной

системы от единичных значений лишних неизвестных и внешней нагрузки. Это будет показано ниже. Однако предварительно обсудим подробнее одну из важных операций во всем алгоритме расчета неразрезных балок – это выбор рациональной основной статически определимой системы из различных возможных для заданной статически неопределимой расчетной схемы.

На рис. 3.10 и 3.11 показаны два варианта основной системы для шестипролетной неразрезной балки с пятью лишними связями. В первом варианте (рис. 3.10) балка преобразована в однопролетную. Все лишние опорные связи заменены неизвестными силами.

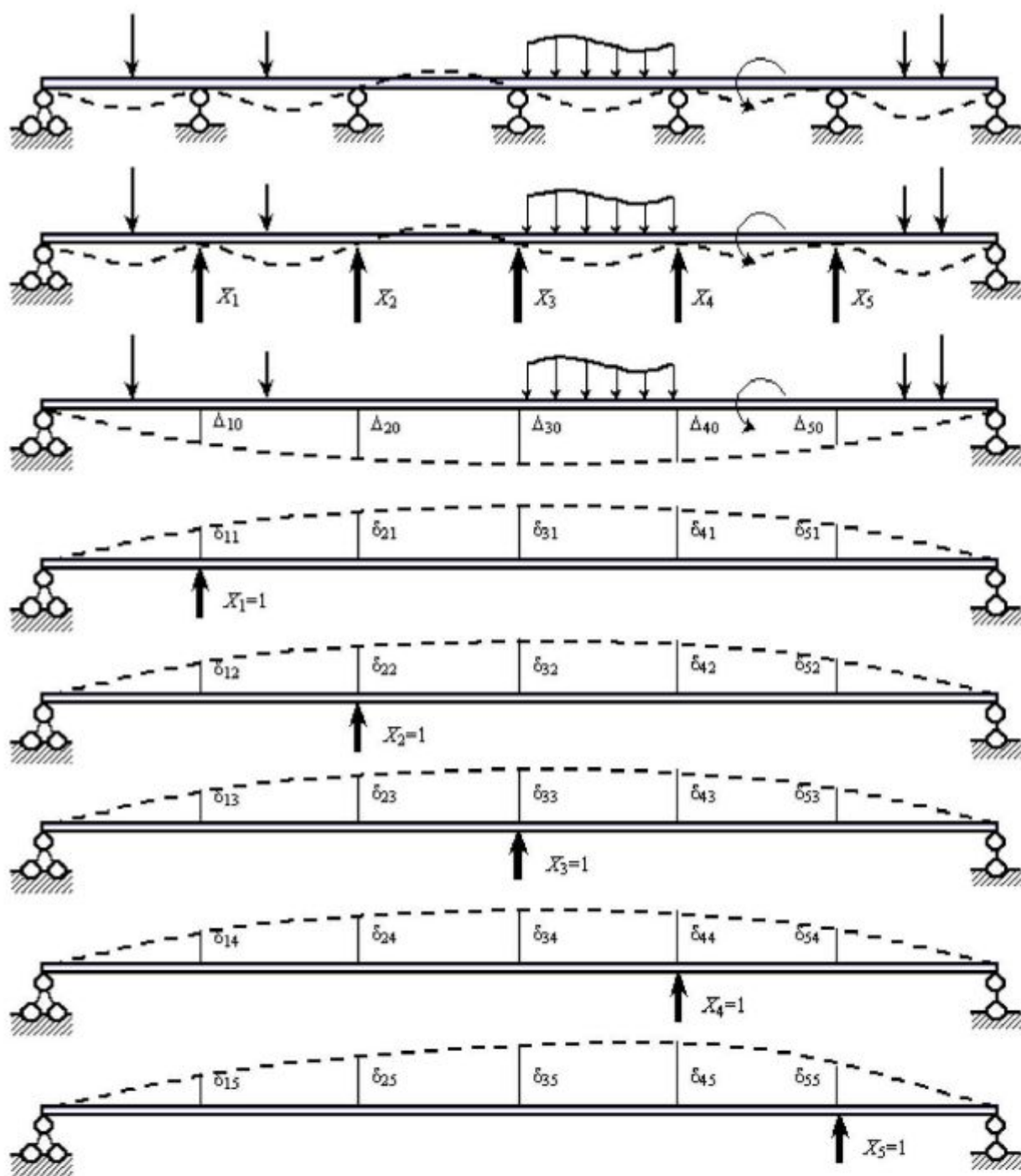
Как видно из рис. 3.10, коэффициенты перед неизвестными δ_{ij} есть прогибы над опорными точками от нагружения основной системы силами $X_i = 1$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$). Система из пяти канонических уравнений (3.8) будет полной.

Во втором варианте неразрезная балка преобразована в статически определимую систему однопролетных балок введением шарниров над опорными сечениями и заменой усилий в исключенных связях моментами X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 (рис. 3.11).

Коэффициенты канонических уравнений в этом варианте есть взаимные углы поворота двух смежных сечений над опорными точками, т.е. углы раскрытия шва φ_n над опорными сечениями в расчлененной балке (рис. 3.11, 3.12), какой является основная статически определимая система. По рис. 3.11 видно, что в этом варианте основной системы угол раскрытия шва над первой опорой зависит от неизвестных X_1 и X_2 , на пятой опоре – от X_4, X_5 , на второй опоре – от X_1, X_2 и X_3 , на любой n -й опоре от неизвестных опорных моментов X_{n-1}, X_n, X_{n+1} . Угол раскрытия шва от внешней нагрузки над любой n -й опорой Δ_{n0} определяется заданной внешней нагрузкой на пролетах, примыкающих к n -й опоре.

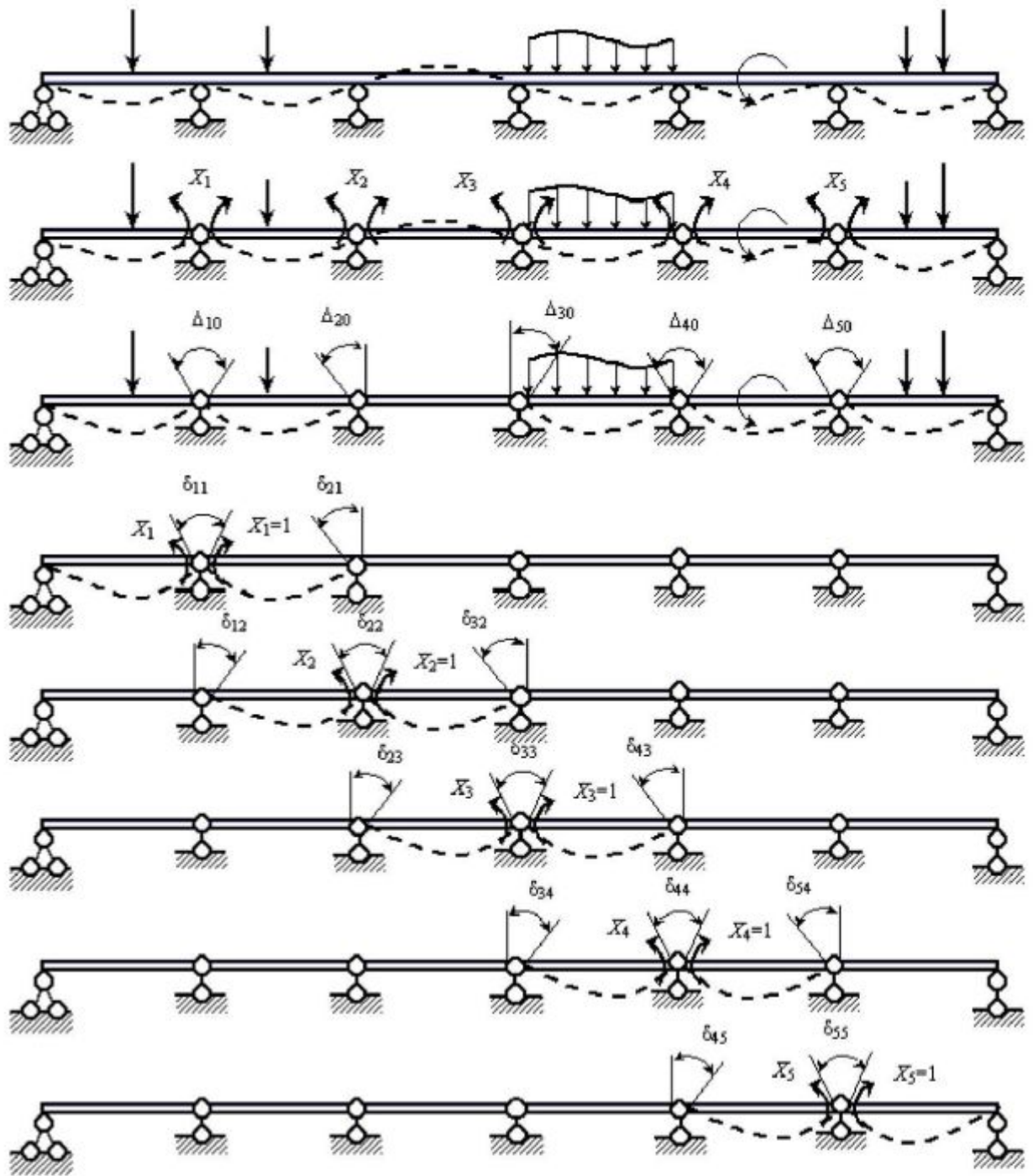
Система канонических уравнений в этом варианте состоит из трехчленных уравнений (3.9) (первое и пятое – двухчленные), решение которых значительно проще решения системы полных пяти уравнений с пятью неизвестными (3.8) по первому варианту.

Кроме этого, вычисление всех коэффициентов при использовании основной системы по первому варианту значительно сложнее, так как все единичные эпюры $\bar{M}_n(z)$ и распространяются на всю длину балки L , равную сумме пролетов l_j . Такая основная система при раскрытии статической неопределимости неразрезной балки была первой в истории развития теории расчета неразрезных балок, однако, как не рациональная, в настоящее время не используется.



$$\begin{aligned}
 \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{14}X_4 + \delta_{15}X_5 + \Delta_{10} &= 0, \\
 \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{24}X_4 + \delta_{25}X_5 + \Delta_{20} &= 0, \\
 \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 + \delta_{35}X_5 + \Delta_{30} &= 0, \\
 \delta_{41}X_1 + \delta_{42}X_2 + \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 + \delta_{45}X_5 + \Delta_{40} &= 0, \\
 \delta_{51}X_1 + \delta_{52}X_2 + \delta_{53}X_3 + \delta_{54}X_4 + \delta_{55}X_5 + \Delta_{50} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.8}$$

Рис. 3.10. Канонические уравнения для первого варианта основной системы



$$\begin{aligned}
 \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 &+ \Delta_{10} = 0, \\
 \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 &+ \Delta_{20} = 0, \\
 \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 &+ \Delta_{30} = 0, \\
 \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 + \delta_{45}X_5 + \Delta_{40} &= 0, \\
 \delta_{54}X_4 + \delta_{55}X_5 + \Delta_{50} &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Рис. 3.11. Канонические уравнения для второго варианта основной системы

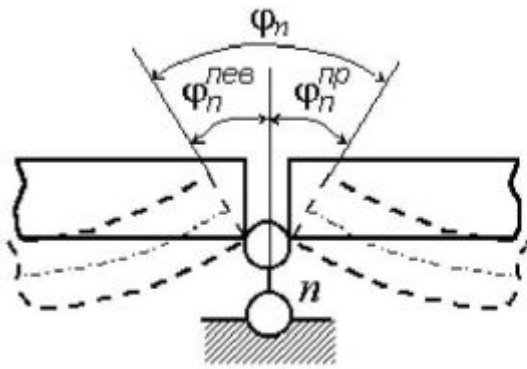


Рис. 3.12. К определению коэффициентов канонических уравнений

Трехчленное каноническое уравнение, из входящих в систему (3.9), для раскрытия статической неопределенности неразрезной балки является рекуррентным и называется уравнением трех моментов.

Получим его в общем виде для фрагмента неразрезной балки с пролетами l_n, l_{n+1} , примыкающими к n -й опоре (рис. 3.13, а).

Эпюра изгибающих моментов в основной системе (рис. 3.13, б) от заданных нагрузок M_0 приведена на рис. 3.13, в; эпюры $\bar{M}_{n-1}, \bar{M}_n, \bar{M}_{n+1}$ от единичных значений лишних неизвестных $X_{n-1}=1, X_n=1, X_{n+1}=1$ – на рис. 3.13, г, д, е.

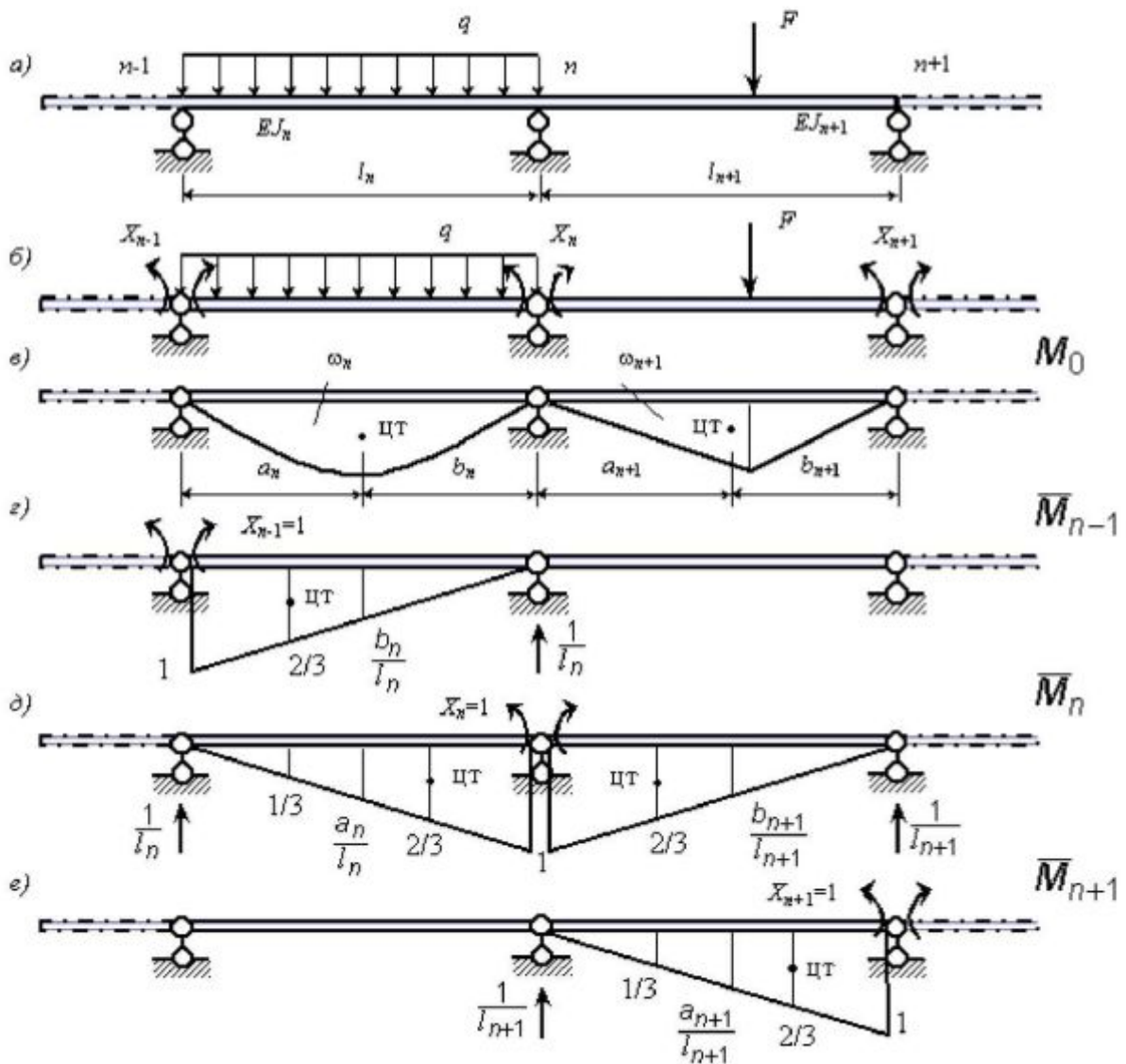


Рис. 3.13. К составлению канонического уравнения: а – фрагмент неразрезной балки; б – основная система; в – эпюра моментов от внешней нагрузки; г, д, е – эпюры моментов от единичных неизвестных

Каноническое уравнение для n -й опоры имеет вид:

$$\delta_{n,n-1}X_{n-1} + \delta_{n,n}X_n + \delta_{n,n+1}X_{n+1} = -\Delta_{n0}. \quad (3.10)$$

Определим коэффициенты $\delta_{n,n-1}$, $\delta_{n,n}$, $\delta_{n,n+1}$, Δ_{n0} , используя интеграл Мора и правило Верещагина для перемножения эпюр изгибающих моментов.

Единичные коэффициенты уравнения (3.10):

$$\delta_{n,n-1} = \sum_{l_n} \int \frac{\bar{M}_n(z)\bar{M}_{n-1}(z)dz}{EJ} = \frac{1 \cdot l_n}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{EJ_n} = \frac{l_n}{6EJ_n}, \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \delta_{n,n} &= \sum_{l_n, l_{n+1}} \int \frac{\bar{M}_n(z)\bar{M}_n(z)dz}{EJ} = \\ &= \frac{1 \cdot l_n}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{EJ_n} + \frac{1 \cdot l_{n+1}}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{EJ_{n+1}} = \frac{l_n}{3EJ_n} + \frac{l_{n+1}}{3EJ_{n+1}}, \end{aligned}$$

$$\delta_{n,n+1} = \sum_{l_{n+1}} \int \frac{\bar{M}_n(z)\bar{M}_{n+1}(z)dz}{EJ} = \frac{1 \cdot l_{n+1}}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{EJ_{n+1}} = \frac{l_{n+1}}{6EJ_{n+1}}. \quad (3.13)$$

Грузовой коэффициент Δ_{n0} – свободный член уравнения (3.10):

$$\Delta_{n0} = \sum_{l_n, l_{n+1}} \int \frac{M_0(z)\bar{M}_n(z)dz}{EJ} = \frac{\omega_n a_n}{l_n EJ_n} + \frac{\omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1} EJ_{n+1}}. \quad (3.14)$$

Обозначения величин в этих выражениях показаны на рис. 3.13. Уравнение (3.10) с учетом полученных значений коэффициентов по выражениям (3.11)–(3.14) будет иметь вид:

$$X_{n-1}\bar{l}_n + 2X_n(\bar{l}_n + \bar{l}_{n+1}) + X_{n+1}\bar{l}_{n+1} = -6 \left(\frac{\omega_n a_n}{l_n} \cdot \frac{J_0}{J_n} + \frac{\omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}} \cdot \frac{J_0}{J_{n+1}} \right). \quad (3.15)$$

$$\text{Здесь } \bar{l}_n = l_n \frac{J_0}{J_n}; \quad \bar{l}_{n+1} = l_{n+1} \frac{J_0}{J_{n+1}}.$$

Значение J_0 может быть принято равным моменту инерции сечения балки в любом пролете.

Если сечения балки во всех пролетах одинаковы ($J_0 = J_n = J_{n+1} = \text{const}$), то $\bar{l}_n = l_n$, $\bar{l}_{n+1} = l_{n+1}$ и уравнение трех моментов принимает вид:

$$M_{n-1}l_n + M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -6 \left(\frac{\omega_n a_n}{l_n} + \frac{\omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}} \right) \quad (3.16)$$

Если неразрезная балка оканчивается шарнирными опорами (рис. 3.14), то первое и последнее уравнения в системе (3.9) будут двухчленными, так как $M_0 = 0$, $M_5 = 0$.

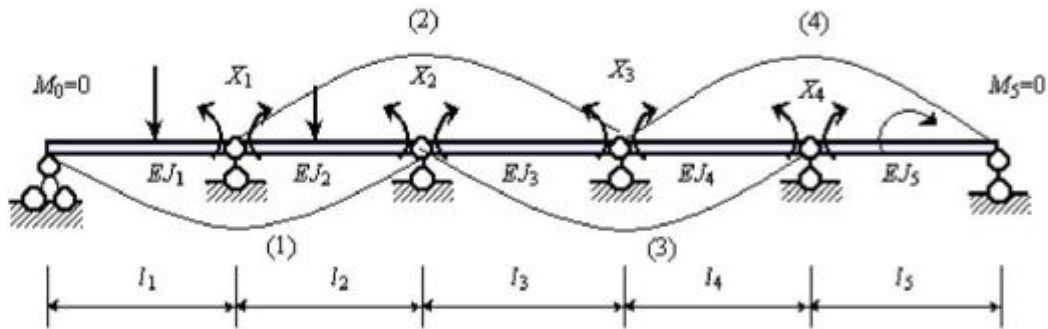
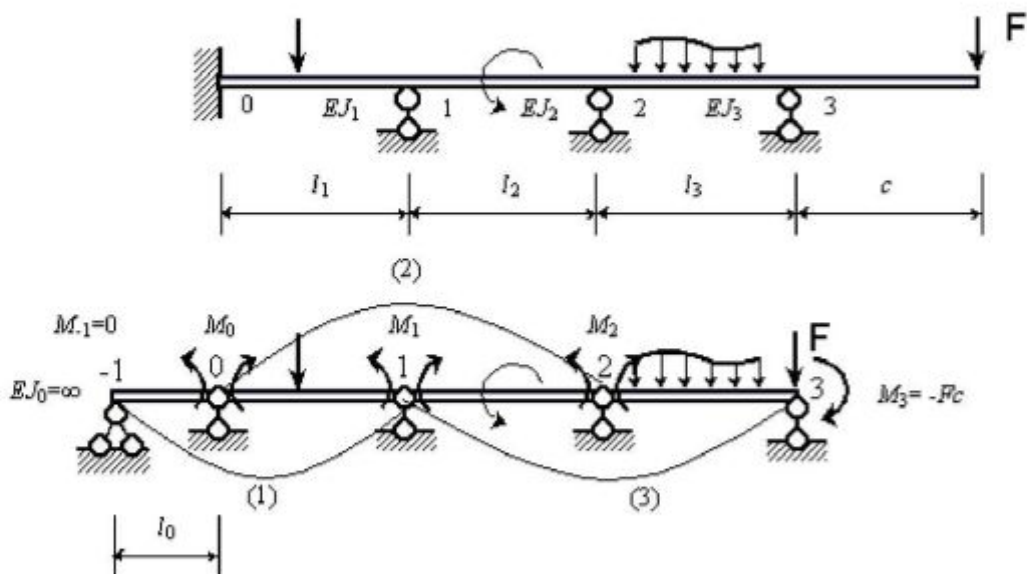


Рис. 3.14. Схема формирования четырех уравнений трех моментов для балки с шарнирными крайними опорами

При наличии загруженных консолей в неразрезной балке изгибающий момент в опорных сечениях от нагрузки может быть вычислен и включается в уравнение (3.15), (3.16) в левую или правую часть.

Если неразрезная балка на крайних опорах имеет жестко защемленную опору, то в основной статически определимой системе жестко защемленная опора заменяется дополнительным пролетом с бесконечной изгибной жесткостью $EJ = \infty$ или $\bar{l}_0 = l_0 / \infty = 0$ (рис. 3.15).



3.3. Построение эпюр изгибающих моментов, перерезывающих сил. Определение опорных реакций

После раскрытия статической неопределимости изгибающие моменты в любом сечении балки могут быть вычислены сложением ординат из эпюры $M_0(z)$ в основной статически определимой системе и из единичных эпюр \bar{M}_i , умноженных на найденные значения X_i :

$$M_{расч}^{(z)} = M_0(z) + \sum_{i=1}^n X_i \bar{M}_i(z) \quad (3.17)$$

Таким образом, расчетную эпюру изгибающих моментов для n -го пролета неразрезной балки получаем сложением эпюры опорных моментов с эпюрами изгибающих моментов $M_0(z)$ в однопролетных балочных системах основной статически определимой системы (рис. 3.16):

$$M(z) = M_z^{бал} + M_{n-1} \frac{l_n - z}{l_n} + M_n \frac{z}{l_n} \quad (3.18)$$

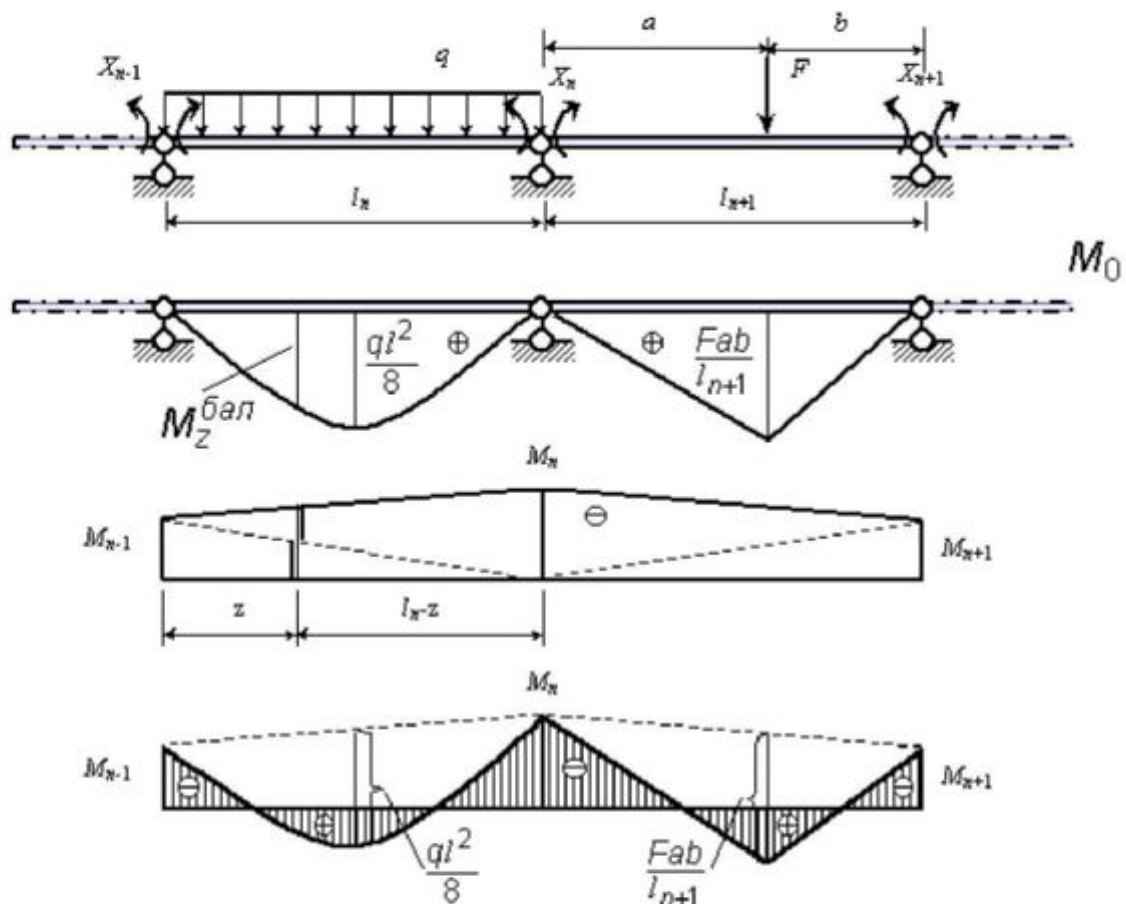


Рис.3.16. Построение расчетной эпюры изгибающих моментов

Перерезывающие силы в сечениях неразрезной балки могут быть определены сложением перерезывающих сил от внешней нагрузки в основной системе $Q_0(z)$ с перерезывающими силами от действия опорных

моментов (рис. 3.17). Продифференцировав (3.14) по переменной z , получим для пролета l_n :

$$Q_z = \frac{dM(z)}{dz} = Q_z^{\text{бан}} + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n} \quad (3.19)$$

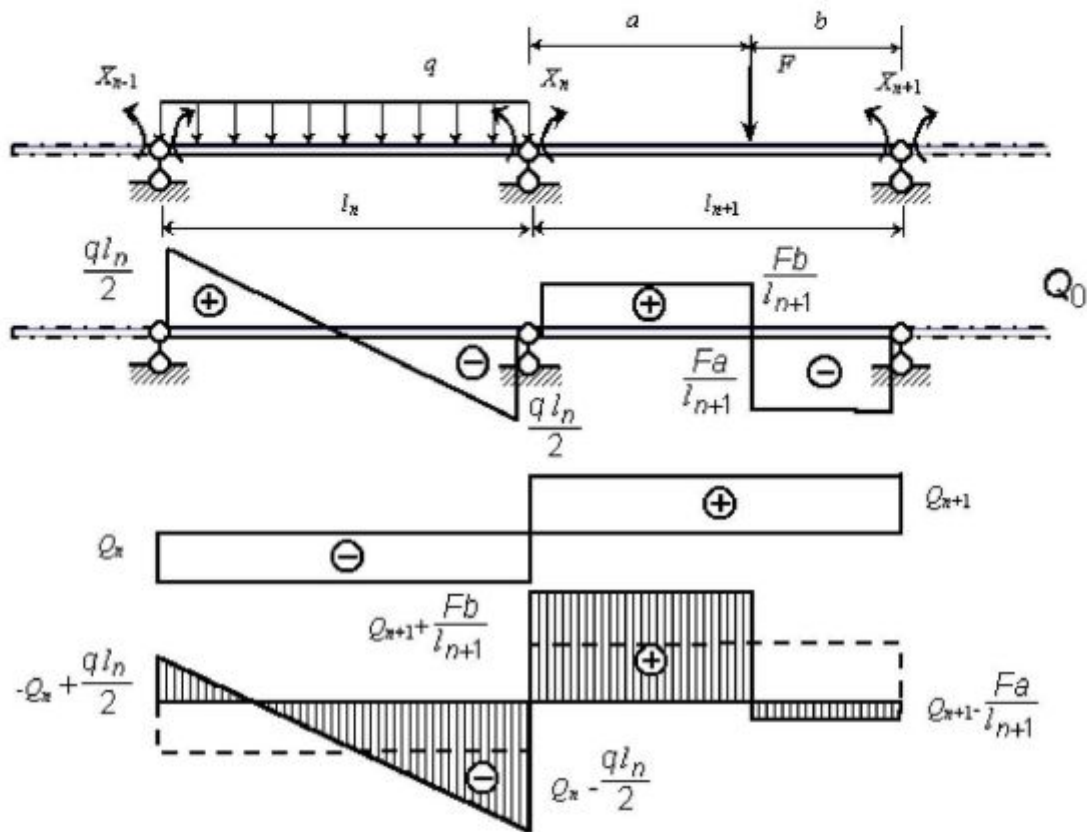


Рис. 3.17. Построение расчетной эпюры перерезывающих сил

Реакцию на n -й опоре в неразрезной балке получим, используя выражение (3.19):

$$R_n = Q_n^{\text{прав}} - Q_n^{\text{лев}} = R_n^{\text{б}} + \frac{M_{n-1}}{l_n} - M_n \left(\frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_{n+1}} \right) + \frac{M_{n+1}}{l_{n+1}} \quad (3.20)$$

Из эпюры Q (рис. 3.17) реакция R_n на опоре может быть определена как разность ординат $Q_n^{\text{лев}}$ и $Q_n^{\text{прав}}$ (разрыв на эпюре Q над опорным сечением).

3.4. Контроль расчета

Для контроля правильности полученной эпюры $M_{\text{расч}}$ необходимо выполнить для нее деформационную проверку. Смысл ее в следующем. Назначается вспомогательное состояние от единичного лишнего неизвестного в статически определимой основной системе, отличной от той,

которая использовалась при расчете, строится эпюра, например, \bar{M}_1 . Вычисляется интеграл Мора

$$\left| \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_{расч} dz}{EJ} \right|$$

Результат должен получиться равным нулю. В этом нетрудно убедиться, если раскрыть подынтегральное выражение (3.17) для $M_{расч}$:

$$\begin{aligned} & \sum \int \frac{\bar{M}_1 (M_0 + \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_n X_n) dz}{EJ} = \\ & = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_0 dz}{EJ} + X_1 \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1 dz}{EJ} + X_2 \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2 dz}{EJ} + \dots + \\ & + X_n \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_n dz}{EJ} = \Delta_{10} + X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \dots + X_n \delta_{1n} = 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Получаем каноническое уравнение, смысл которого заключается в том, что оно отрицает перемещение в заданной схеме по направлению исключенной связи.

Проверок надо сделать столько, сколько раз балка статически неопределима. Все эти контрольные операции можно объединить в одну, используя в подынтегральном выражении вместо \bar{M}_1 суммарную единичную эпюру

$$\bar{M}_s = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n = \sum_{i=1}^n \bar{M}_i$$

Должны также выполняться и статические уравнения равновесия как всей балки, так и любой ее отсеченной части, нагруженной внешней нагрузкой и усилиями в сечениях, взятых из эпюр $M_{расч}$, $Q_{расч}$ по местам разреза.

3.5. Определение прогибов и углов поворота сечений в пролете неразрезной балки

Для определения прогиба или угла поворота любого сечения неразрезной балки между опорами воспользуемся формулой Мора (2.13).

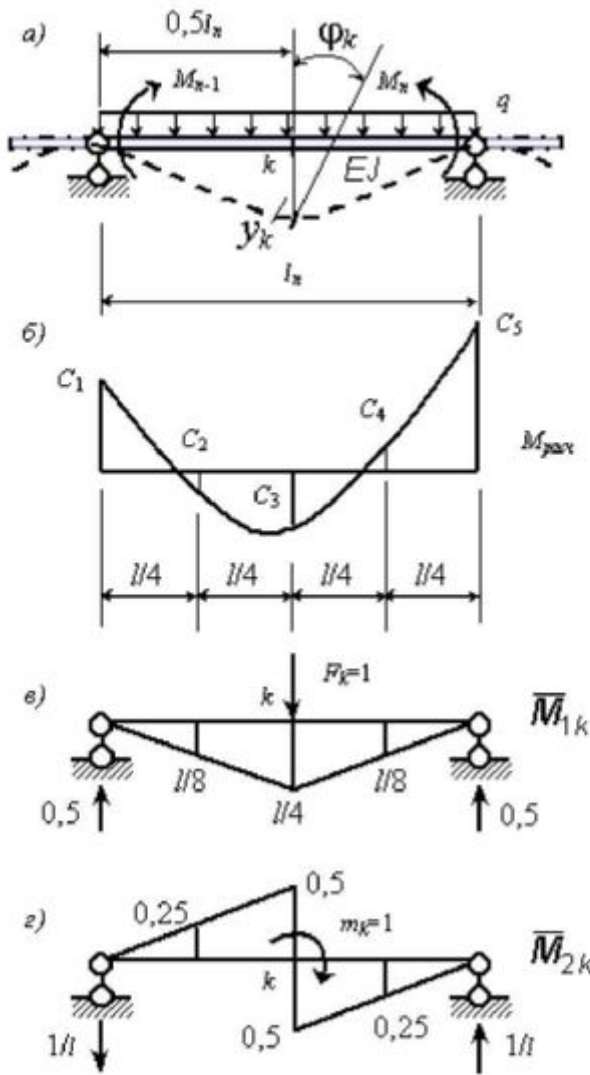


Рис. 3.18. Определение перемещений: а – упругая линия балки; б – расчетная эпюра; в, г – вспомогательные единичные состояния для определения прогиба и угла поворота

Так прогиб в точке k

$$y_k = \sum \int \frac{M_{расч} \bar{M}_{1k} dz}{EJ}, \quad (3.22)$$

угол поворота

$$\varphi_k = \sum \int \frac{M_{расч} \bar{M}_{2k} dz}{EJ}. \quad (3.23)$$

Здесь \bar{M}_{1k} – изгибающие моменты в двухпропной балке пролетом l_n от единичной силы F_k , приложенной в точке k ; \bar{M}_{2k} – изгибающие моменты в сечениях балки от $m_k = 1$, приложенного в точке k .

Количество участков, на которые необходимо разделить пролет балки при вычислении интегралов (3.22) и (3.23), зависит от вида эпюры $M_{расч}$ и положения точки k .

В приведенном примере на рис. 3.18 пролет необходимо делить на два участка и пользоваться формулой (2.18) на каждом участке балки длиной $0,5 l_n$.

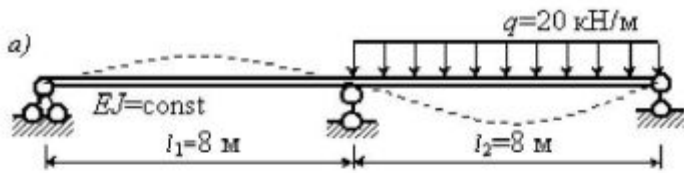
3.6. Примеры расчета неразрезных балок

[Пример 3.3.](#)

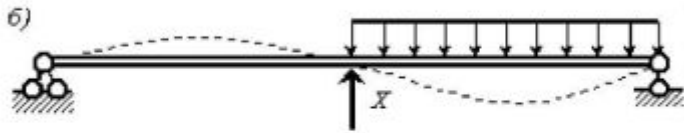
[Пример 3.4.](#)

[Пример 3.5.](#)

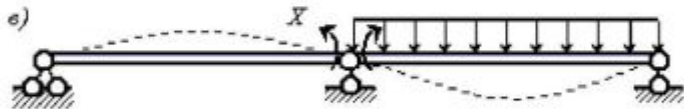
Пример 3.3. Требуется раскрыть статическую неопределимость двухпролетной балки (рис. 3.19, а), построить эпюры $M_{изг}$, Q_y , подобрать сечения балки из прокатных двутавров, определить прогиб в среднем сечении загруженного пролета. Допускаемое напряжение для стали $[\sigma] = 160$ МПа, нагрузка $q = 20$ кН/м, пролеты $l_1 = l_2 = 8$ м.



Решение.

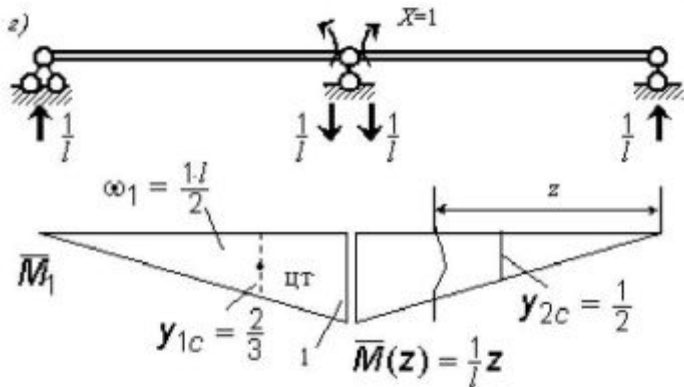


1. Выявление степени статической неопределимости. Заданная схема имеет одну избыточную связь сверх необходимого минимума для обеспечения геометрической неизменяемости схемы. Каноническое уравнение для один раз статически неопределимой балки имеет вид:

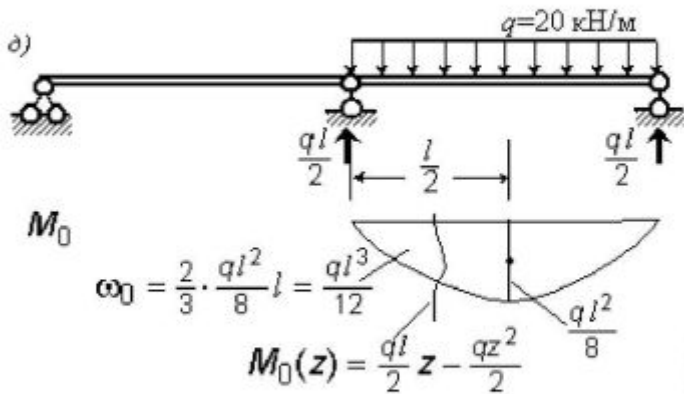


$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{10} = 0 \quad (3.24)$$

2. Определение коэффициентов δ_{11} , Δ_{10} выполняем по формулам (3.11) и (3.14) (используем вариант основной системы по рис. 3.19, в):



$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1 dz}{EJ} = \\ &= \omega_1 y_{1c} \frac{2}{EJ} = \\ &= \frac{1 \cdot l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{EJ} \cdot 2 = \frac{2l}{3EJ}, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \Delta_{10} &= \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_0 dz}{EJ} = \\ &= \omega_0 y_{2c} \frac{1}{EJ} = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{EJ} = \\ &= \frac{ql^3}{24EJ}. \end{aligned}$$

3. Из канонического уравнения (3.24) определим значение лишнего неизвестного:

$$X_1 = - \frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}} = - \frac{ql^3}{24EJ} \cdot \frac{3EJ}{2l} = - \frac{ql^2}{16} \quad (3.25)$$

Рис. 3.19. К примеру 3.3: а – заданная расчетная схема балки; б, в – варианты основной статически определимой системы; г – единичная эпюра изгибающих моментов; д – грузовая эпюра изгибающих моментов

4. Ординаты эюр $M_{расч}$, $Q_{расч}$ получаем, рассматривая совместное действие на основную систему внешнего нагружения и найденного значения лишнего неизвестного X (рис. 3.20),

$$\underline{M_{расч} = M_0 + \bar{M}_1 X} \quad (3.26)$$

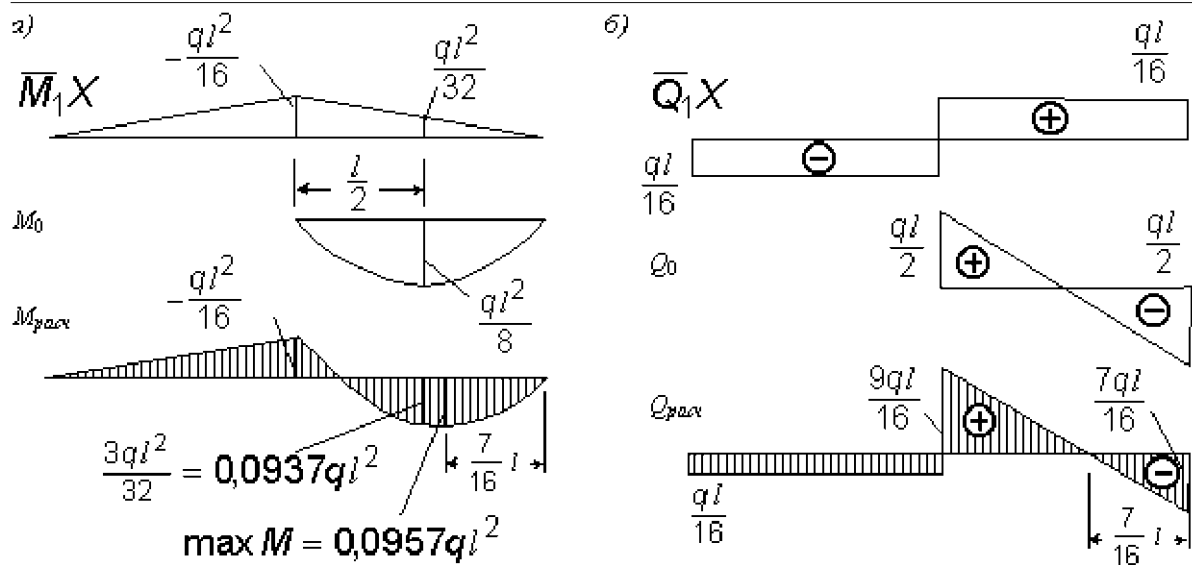
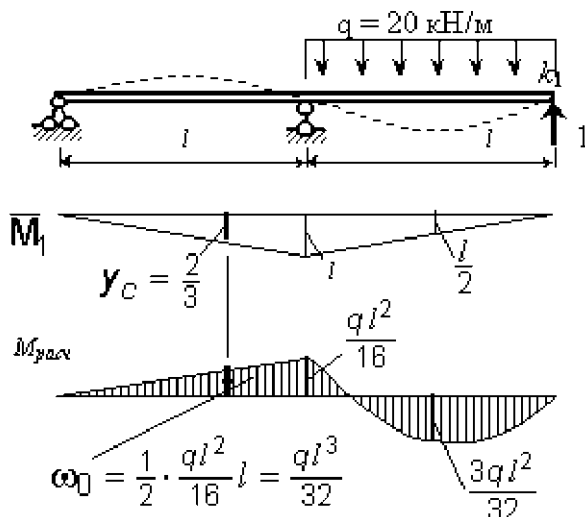


Рис. 3.20. Построение расчетных эюр: а – изгибающих моментов; б – поперечных сил

5. Деформационную проверку эюры $M_{расч}$ выполним, проверяя равенство нулю прогиба в точке k_1 $y_{k_1} = 0$ (рис. 3.21):



$$y_{k_1} = \sum \int \frac{M_{расч} \bar{M}_{k_1}}{EJ} dz = 0;$$

$$\begin{aligned} EJy_{k_1} &= \omega_0 y_c + \\ &+ \frac{l}{6} \left[-\frac{ql^2}{16} l + 4 \cdot \frac{3}{32} ql^2 \frac{l}{2} \right] = \\ &= -\frac{ql^3}{32} \cdot \frac{2}{3} l - \frac{ql^4}{96} + \frac{3}{96} ql^4 = \\ &= \left(-\frac{2}{96} - \frac{1}{96} + \frac{3}{96} \right) ql^4 = 0. \end{aligned}$$

Рис. 3.21. Деформационная проверка

6. Подбор сечения балки из условия прочности. Определим требуемый номер прокатного двутавра

$$(W_x)_{\text{тр}} \geq \frac{\max |M|}{[\sigma]} \quad (3.27)$$

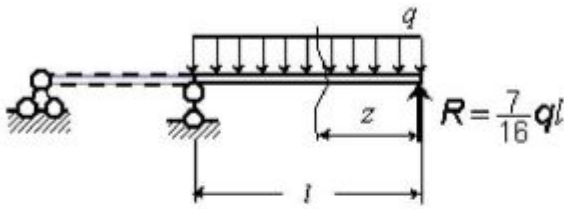


Рис. 3.22. Определение сечения с M_{\max}

Сечение балки во втором пролете с $\max M$ определим из

условия $\frac{dM_z}{dz} = Q_y = 0$ (см. рис. 3.20):

$$-\frac{7}{16}ql + qz_0 = 0; \quad z_0 = \frac{7}{16}l$$

Величина максимального момента при $z_0 = \frac{7}{16}l$:

$$\max M = \frac{7}{16}ql \cdot \frac{7}{16}l - \frac{7}{16}ql \cdot \frac{7}{16}l = 0,09570ql^2 = 0,0957 \cdot 20 \frac{\text{кН}}{\text{м}} \cdot (8\text{м})^2 = 122,5 \text{ кНм}$$

$$(W_x)_{\text{тр}} \geq \left\{ \left[\frac{122,5 \cdot 10^3 \text{ Нм}}{160 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2} \right] \cdot 10^6 \right\} \text{ см}^3 = 766 \text{ см}^3$$

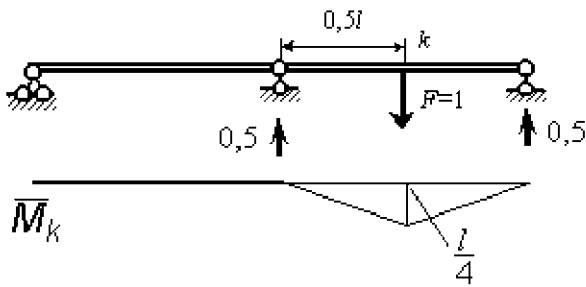
Из ГОСТ 8239-89: I №36 $W_x = 743 \text{ см}^3$; I №40 $W_x = 953 \text{ см}^3$.

Проверим максимальные напряжения в сечении двутавровой балки из I №36

$$\max \sigma = \frac{\max M}{W} = \left(\frac{122 \cdot 10^3 \text{ Нм}}{743 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3} \right) \cdot 10^{-6} \text{ МПа} = 165 \text{ МПа} > 160 \text{ МПа}$$

Перенапряжение составляет $\frac{5}{160} \cdot 100\% \approx 3\%$, что допустимо. Таким образом, сечение балки принимаем из I №36 с $J_x = 13380 \text{ см}^4$.

7. *Определение прогиба в середине загруженного пролета балки.* В статически определимой основной системе в точке k по направлению определяемого прогиба



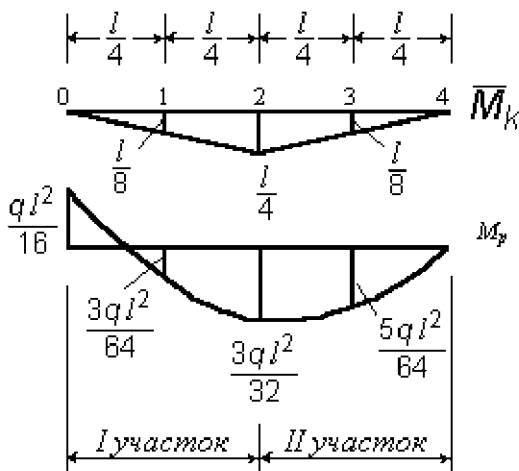
прикладываем силу $F_k=1$ и строим эпюру \overline{M}_k (рис. 3.23).

Прогиб в точке k получим, используя формулу (2.20):

$$y_k = \sum \int \frac{M_{расч} \overline{M}_k dz}{EJ}$$

Рис. 3.23. Вспомогательная эпюра \overline{M}_k

Для перемножения эпюр $M_{расч}$ и \overline{M}_k вычислим ординаты на эпюре $M_{расч}$ при $z = \frac{l}{4}, \frac{3l}{4}$ через правые силы (см. рис. 3.22).



В сечении 3 ($z = \frac{l}{4}$)

$$M_3 = \frac{7}{16} ql \cdot \frac{l}{4} - q \frac{l}{4} \left(\frac{l}{8} \right) = \frac{5}{64} ql^2$$

В сечении 1 ($z = \frac{3l}{4}$)

$$M_1 = \frac{7}{16} ql \cdot \frac{3l}{4} - q \cdot \frac{3l}{4} \cdot \frac{3l}{8} = \frac{3}{64} ql^2$$

Рис. 3.24. К определению перемещения y_k

Перемножение выполняем по участкам I и II (рис. 3.24) и результаты суммируем

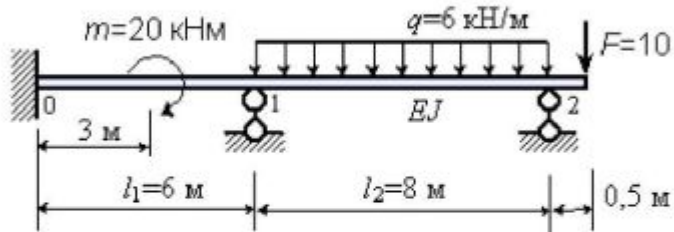
$$y_k = \frac{l}{2 \cdot 6} \left[4 \frac{l}{8} \cdot \frac{3}{64} ql^2 + \frac{l}{4} \cdot \frac{3}{32} ql^2 \right] + \frac{l}{2 \cdot 6} \left[\frac{l}{4} \cdot \frac{3}{32} ql^2 + 4 \frac{l}{8} \cdot \frac{5}{64} ql^2 \right] = \frac{7}{768} \frac{ql^4}{EJ} \quad (3.28)$$

При $q = 20 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$, $l = 8 \text{ м}$, $E = 2 \cdot 10^{11} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$, $J_x = 13380 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ получим

$$y_k = \frac{7}{768} \cdot \frac{20 \text{ кН/м} \cdot 8^4 \text{ м}^4}{2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2 \cdot 13380 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4} = 0,028 \text{ м} = 2,8 \text{ см}$$

При пролете балки $l=8$ м прогиб составляет $\frac{0,028}{8} = 0,0035l = \frac{1}{286}l$.

Пример 3.4. Раскрыть статическую неопределенность неразрезной балки (рис. 3.25),



построить эпюру изгибающих моментов, перерезывающих сил, определить реактивные усилия в опорах, подобрать сечение балки из прокатного двутавра, при $[\sigma] = 160$ МПа, определить прогиб балки в середине второго пролета. Изгибная жесткость во всех пролетах балки одинакова.

Рис. 3.25. Расчетная схема балки к примеру 3.4

Решение.

Степень статической неопределенности балки равна двум, так как имеет две избыточные связи (по одной в опоре 1 и 2) при обеспечивающей геометрическую неизменяемость необходимом минимуме равном трем связям в жестко защемленной опоре.

Для раскрытия статической неопределенности воспользуемся уравнениями трех моментов (3.16). Преобразуем балку в статически определимую с шарнирными опорами. За лишние неизвестные принимаем моменты над опорными сечениями.

От нагрузки на правой консоли изгибающий момент на крайней правой опоре $M_2 = -F \cdot 0,5 = -5$ кНм.

Жесткую заделку заменим пролетом $l_0=0$ (рис. 3.26).

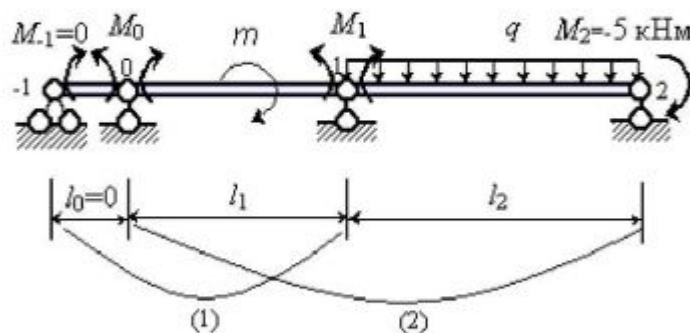


Рис. 3.26. Основная система

Эпюры изгибающих моментов от внешней нагрузки в основной системе (балочные эпюры M) приведены на рис. 3.27.

Момент M_2 на крайней правой опоре будем учитывать в левой части уравнений трех моментов как известную величину, равную $M_2 = -5$ кНм.

Площади эпюр M_0 и положение центров тяжести площадей $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ показаны на рис. 3.27.

Запишем уравнения трех моментов (3.16) для пролетов

l_0, l_1 (опорные точки -1, 0, 1) и пролетов

l_1, l_2 (опорные точки 0, 1, 2):

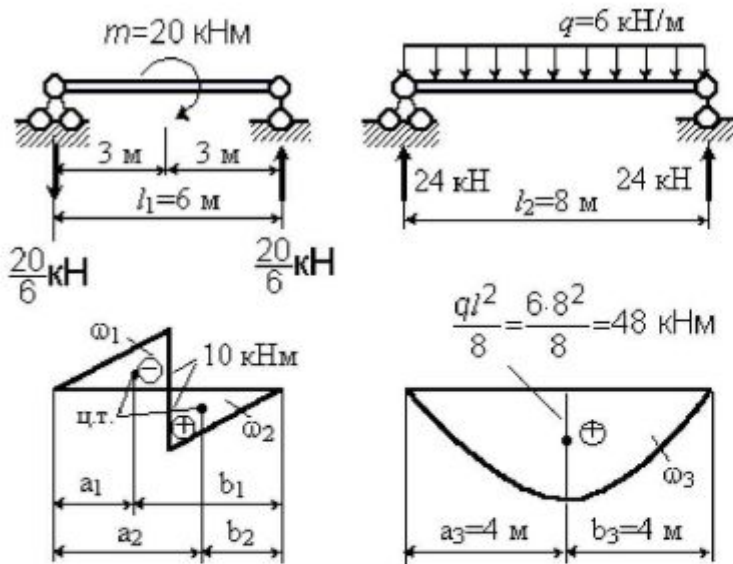


Рис. 3.27. Грузовая эпюра к примеру 3.4:
 $a_1 = b_2 = 2$ м; $a_2 = b_1 = 4$ м; $\omega_1 = -15$ кНм²;
 $\omega_2 = 15$ кНм²; $\omega_3 = (2/3) 48 \cdot 8 = 256$ кНм²

$$M_0 l_0 + 2M_1(l_0 + l_1) + M_2 l_1 = -6 \cdot \left(-\frac{\omega_1 b_1}{l_1} + \frac{\omega_2 b_2}{l_1} \right);$$

$$M_0 l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 = -6 \cdot \left(-\frac{\omega_1 a_1}{l_1} + \frac{\omega_2 a_2}{l_1} \right) + \left(\frac{\omega_3 b_3}{l_2} \right). \quad (3.29)$$

Учитывая, что $M_1 = 0$, $l_0 = 0$, $M_2 = -5$ кНм, и подставляя в правые части уравнений значения a_i , b_i , ω_i , показанные на рис. 3.26, получим:

$$\begin{cases} 12M_0 + 6M_1 = -6 \left(\frac{-15 \cdot 4}{6} + \frac{15 \cdot 2}{6} \right); \\ 6M_0 + 28M_1 - 5 \cdot 8 = -6 \left(\frac{-15 \cdot 2}{6} + \frac{15 \cdot 4}{6} + \frac{256 \cdot 4}{8} \right). \end{cases}$$

После преобразований имеем:

$$\begin{cases} 2M_0 + M_1 = 5; \\ M_0 + 4,67M_1 = -126,33. \end{cases} \quad (3.30)$$

Корни уравнений (3.30) $\underline{M_0} = 17,97$ кНм, $\underline{M_1} = -30,91$ кНм.

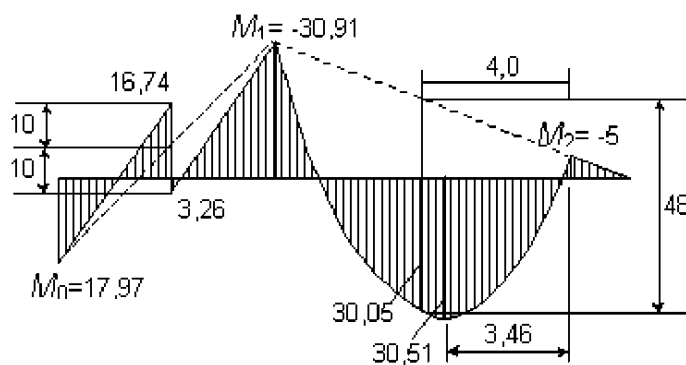


Рис. 3.28. Расчетная эпюра изгибающих моментов $M_{расч}$, кНм

Эпюру изгибающих моментов в заданной балке получим сложением эпюры опорных моментов и балочных эпюр M_0 от внешней нагрузки в пролетах (рис. 3.28).

Контроль эпюры $M_{расч}$. Деформационную проверку выполним, определяя сумму прогибов на опорах 1, 2 заданной балки

$$y_1 + y_2 = \sum \frac{M_{расч} \cdot (\bar{M}_1 + \bar{M}_2) \cdot dz}{EJ} = 0 \quad (3.31)$$

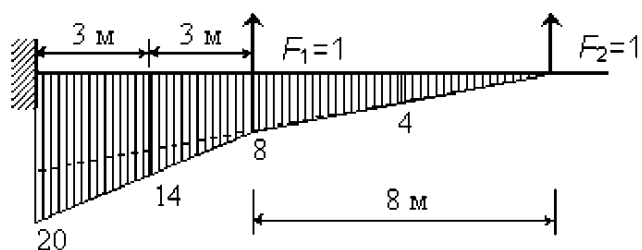


Рис. 3.29. Вспомогательная эпюра \bar{M}_s

Здесь \bar{M}_1 , \bar{M}_2 – единичные эпюры в основной статически определимой системе от $F_1=1$ (для определения прогиба в точке 1) и $F_2=1$ (для определения прогиба в точке 2) (рис. 3.29).

Интеграл (3.31) представим в виде

$$EJ(y_1 + y_2) = \sum \int M_{расч} \bar{M}_s dz = 0 \quad (3.32)$$

где \bar{M}_s – суммарная единичная эпюра сил $F_1=1$ и $F_2=1$ (рис. 3.29).

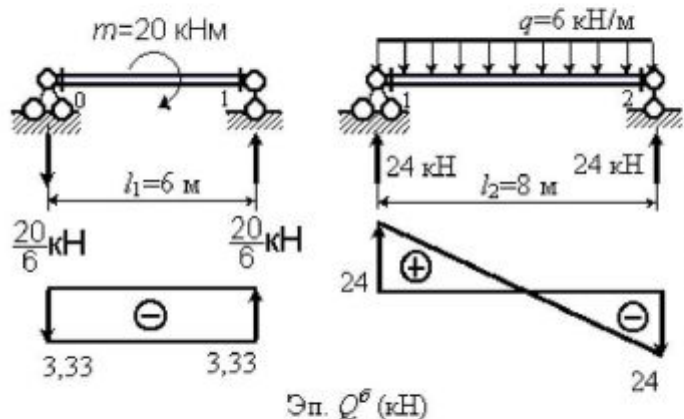
Для перемножения эпюр $M_{расч}$ и \bar{M}_s , учитывая их вид, принимаем 3 участка длиной соответственно 3, 3, 8 м и используем для вычисления интеграла на первом и втором участках формулу (2.17), на третьем участке – (2.20)

$$\begin{aligned} \sum \int_{l_j} M_{расч} \bar{M}_s dz &= \frac{3}{6} [2 \cdot 17,97 \cdot 20 - 2 \cdot 16,74 \cdot 14 - 20 \cdot 16,74 + 17,97 \cdot 14] + \\ &+ \frac{3}{6} [2 \cdot 3,26 \cdot 14 - 2 \cdot 30,91 \cdot 8 + 3,26 \cdot 8 - 30,91 \cdot 14] + \frac{8}{6} [-30,91 \cdot 8 + 4 \cdot 30,05 \cdot 4] = \\ &= 83,43 - 404,97 + 31,136 = 394,79 - 404,97 = 10,18. \end{aligned}$$

Невязка составляет $\frac{10,18}{404,97} \cdot 100\% = 2,5\%$, что допустимо.

Построение эпюры перерезывающих сил. Перерезывающую силу в сечениях неразрезной балки вычислим по формуле (3.19):

$$Q(z) = Q_0^{\sigma} + \frac{M_{\text{прав}} - M_{\text{лев}}}{l}$$



Эпюры Q^{σ} от внешней нагрузки в однопролетных балках в первом и втором пролетах показаны на рис. 3.30. Построение их особых пояснений не требует.

С учетом опорных моментов перерезывающие силы в сечениях около опор получим:

Рис. 3.30. Эпюры Q^{σ} на первом и втором пролетах

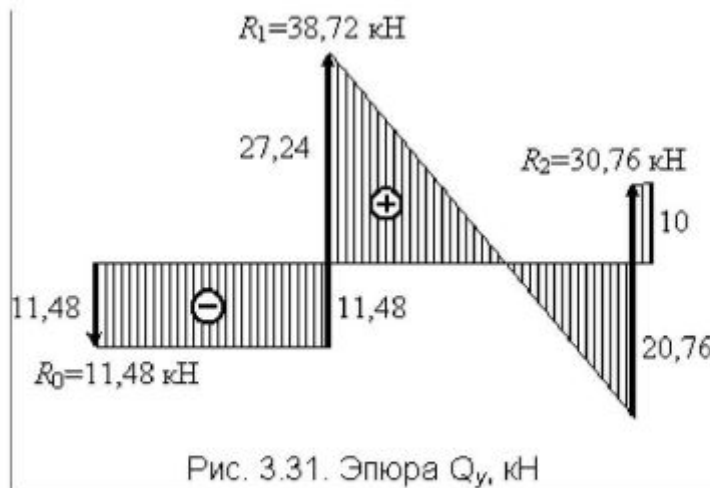
$$Q_{01} = -3,33 + \frac{-30,91 - 17,97}{6} = -11,48 \text{ кН}$$

$$Q_{10} = -3,33 + \frac{-30,91 - 17,97}{6} = -11,48 \text{ кН}$$

$$Q_{12} = 24 + \frac{-5 - (-30,91)}{8} = 27,24 \text{ кН}$$

$$Q_{21} = -24 + \frac{-5 - (-30,91)}{8} = -20,76 \text{ кН}$$

В сечениях на правой консоли $Q = -\sum Y_{\text{прав}} = 10 \text{ кН}$



По полученным значениям построена эпюра Q_y (рис. 3.31).

Опорные реакции R_0, R_1, R_2 получим как разность перерезывающих сил в сечениях, расположенных бесконечно близко слева и справа от рассматриваемой опоры

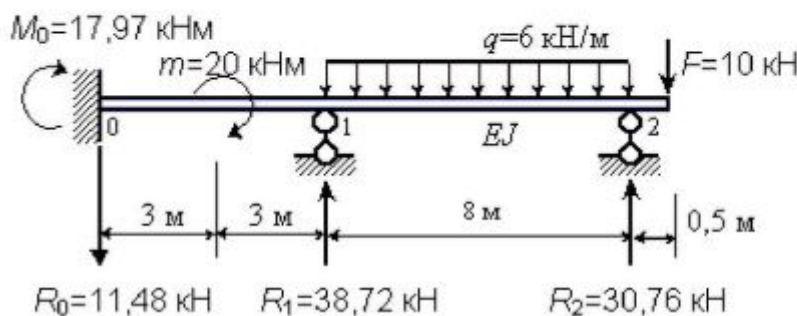
$$R_n = Q_n^{\text{прав}} - Q_n^{\text{лев}}$$

Рис. 3.31. Эпюра $Q_y, \text{кН}$

$$R_0 = -11,48 \text{ кН};$$

$$R_1 = 27,24 - (-11,48) = 38,72 \text{ кН};$$

$$R_2 = 10 - (-20,76) = 30,76 \text{ кН}$$



На рис. 3.32 показаны все активные и реактивные силы, действующие на балку.

Проверим условие равновесия балки

$$\left(\sum m_0 = 0 \right):$$

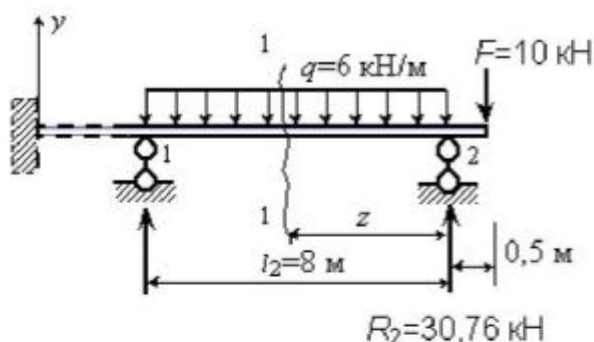
Рис. 3.32. Балка, нагруженная активными и реактивными усилиями

$$\sum m_0 = 10 \cdot 14,5 - 30,76 \cdot 14 + 48 \cdot 10 - 38,72 \cdot 6 + 20 + 17,97 = -662,96 + 662,97 \approx 0$$

Подбор сечения балки из прокатного двутавра по условию прочности. Требуемый момент сопротивления сечения балки из условия прочности определяется по формуле (3.27).

Для определения значения максимального изгибающего момента во втором пролете найдем положение сечения с экстремальным значением функции $M(z)$ из условия

$$\frac{dM(z)}{dz} = Q_y(z) = 0 \tag{3.33}$$



На рассматриваемом участке (рис. 3.33) перерезывающая сила Q_y в сечении 1-1 и условие (3.33) запишется так:

$$Q_y(z) = - \sum_{\text{прав}} y = 10 - 30,76 + 6z = 0$$

из которого получим $z = 3,46$ м.

Рис. 3.33. К определению значения максимального изгибающего момента

Изгибающий момент в сечении 1-1

$$M_{(z)}^{1-1} = \sum_{\text{прав}} m = -10(0,5 + z) + 30,76z - \frac{6z^2}{2} \quad (3.34)$$

при $z=3,46$ м $\max M(z) = -10 \cdot 3,49 + 30,76 \cdot 3,46 - \frac{6 \cdot (3,46)^2}{2} = 30,51$ кНм.

Требуемый момент сопротивления поперечного сечения балки при $[\sigma] = 160$ МПа

$$W_x \geq \frac{30,51 \cdot 10^3 \text{ Нм}}{160 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2} \cdot 10^6 = 190,7 \text{ см}^3$$

Из сортамента прокатных балок (ГОСТ 8239-89) подбираем сечение балки с моментом сопротивления W_x , близким к требуемому, – I №22 с $W_x = 232$ см³, $J_x = 2550$ см⁴.

Определение прогиба балки в середине второго пролета выполним по формуле Мора (2.13), используя для вычисления интеграла выражение (2.20). По виду эпюр $M_{\text{расч}}(z)$, $\overline{M}_k(z)$ (рис. 3.34) пролет необходимо разделить на два участка длиной по 4 м.

Определим ординаты эпюры $M_{\text{расч}}(z)$ при $z = 2$ м, 6 м, используя выражение (3.34):

при $z = 2$ м $M_{\text{расч}} = -10(2 + 0,5) + 30,76 \cdot 2 - \frac{6 \cdot 2^2}{2} = 24,52$ кНм;

при $z = 6$ м $M_{расч} = -10(6 + 0,5) + 30,76 \cdot 6 - \frac{6 \cdot 6^2}{2} = 10,6$ кНм

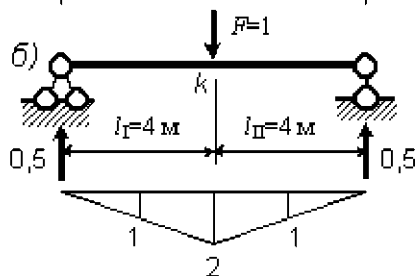
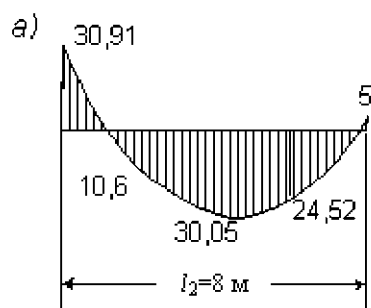


Рис. 3.34. К определению перемещения точки k : а – $M_{расч}$, кНм; б – \bar{M}_k , м

$$EJy_k = \frac{4}{6}[-30,91 \cdot 0 + 4 \cdot 10,6 \cdot 1 + 30,05 \cdot 2] +$$

$$+ \frac{4}{6}[30,05 \cdot 2 + 4 \cdot 24,52 \cdot 1 + 5 \cdot 0] = 173,79 \text{ кНм}^3;$$

$$y_k = \frac{173,79 \cdot 10^3 \text{ Нм}^3}{2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2 \cdot 2550 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4} = 0,034 \text{ м}.$$

Вычисленное значение прогиба составляет от пролета $l=8$ м

$$\frac{y_k}{l} = \frac{0,034}{8} = \frac{1}{235}$$

и может быть сравнено с допускаемым по условию жесткости

$$\frac{f}{l} \leq \left[\frac{f}{l} \right] \quad (3.35)$$

Допускаемая величина максимального прогиба $\left[\frac{f}{l} \right]$ определяется нормами проектирования в зависимости от назначения сооружения.

При построении упругой линии балки (изогнутой оси) используем граничные условия на опорах ($y_0=0$, $\varphi_0=0$, $y_1=0$, $y_2=0$), вычисленный прогиб в сечении k и вид эпюры $M_{расч}(z)$.

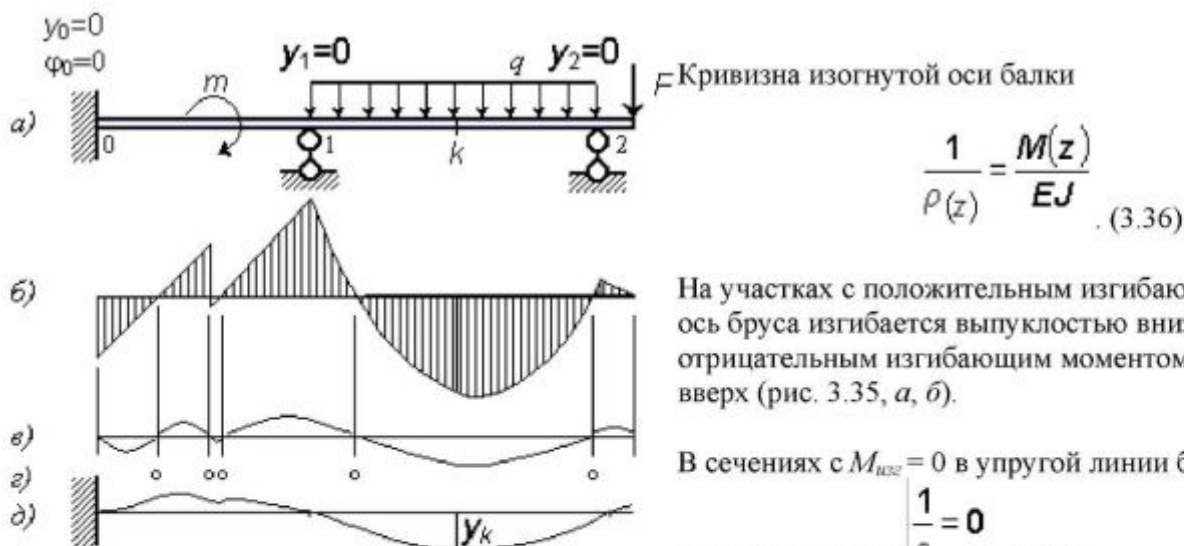


Рис. 3.35. Схема упругой линии балки: а – расчетная схема; б – эпюра $M_{расч}$; в – вид изогнутой оси балки по участкам; г – точки перегиба; д – упругая линия балки

На участках с положительным изгибающим моментом ось бруса изгибается выпуклостью вниз, с отрицательным изгибающим моментом – выпуклостью вверх (рис. 3.35, а, б).

В сечениях с $M_{изг} = 0$ в упругой линии балки – точки

перегиба, так как $\frac{1}{\rho} = 0$, $\rho = \infty$.

Схема упругой линии балки показана на рис. 3.35, д.

Пример 3.5. Для заданной статически неопределимой балки при выполнении индивидуальной расчетно-графической работы требуется:

- 1) раскрыть статическую неопределимость, построить эпюры M , Q , определить опорные реакции;
- 2) по максимальному значению изгибающего момента подобрать сечение балки из прокатного двутавра при $[\sigma] = 160$ МПа;
- 3) определить прогиб балки в середине второго пролета;
- 4) изобразить вид упругой линии балки.

При раскрытии статической неопределимости привести не менее двух вариантов основной системы.

На каждом варианте должны быть показаны упругие линии балки в грузовом и вспомогательных (единичных) состояниях с обозначением на схемах коэффициентов канонических уравнений и свободных членов.

Должны быть выполнены: деформационная проверка расчетной эпюры изгибающих моментов в балке, статическая проверка равновесия балки в целом или любого ее фрагмента.

В пояснительной записке должны быть приведены все вычисления, а также необходимые схемы их поясняющие, выполненные с соблюдением масштаба.

После алгебраического выражения для определения любого параметра должна следовать подстановка численного значения входящих в это выражение величин с обязательным указанием единиц измерений конечных результатов.

Расчетная схема и основные результаты расчета (эпюры $M_{расч}$, $Q_{расч}$, схема упругой линии) должны быть вычерчены на отдельном листе ватмана формата А4 с соблюдением масштаба и требований государственных стандартов на выполнение графических работ.

Заданная расчетная схема балки приведена на рис. 3.36, жесткость балки во всех пролетах одинакова.

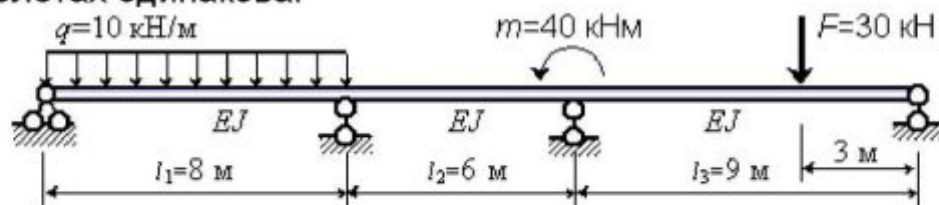


Рис. 3.36. Расчетная схема балки к примеру 3.5

Решение.

Определение количества лишних связей в расчетной схеме балки.

Поскольку балка представляет единое твердое деформируемое тело, связанное с землей кинематическими связями в виде опорных стержней, то минимально необходимое количество связей (не параллельных между собой и не пересекающихся в одной точке) для образования геометрически неизменяемой системы должно быть равно трем. В заданной схеме таких связей пять. Следовательно, система два раза статически неопределима, она имеет две лишние связи.

Некоторые возможные варианты основной системы приведены на рис. 3.37. Наиболее рациональной основной системой является вторая.

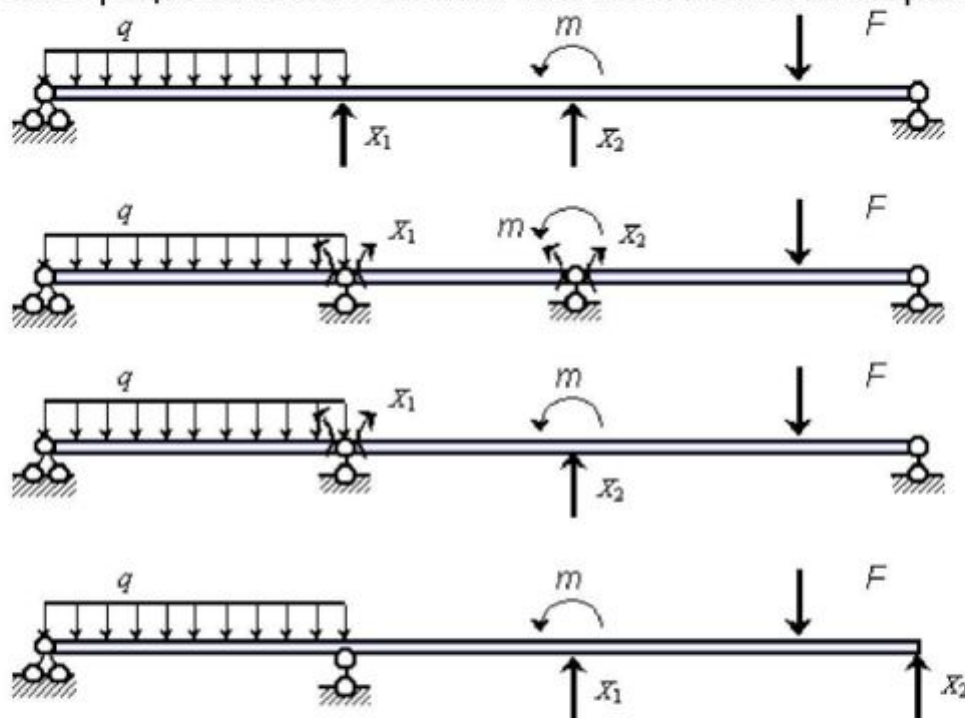


Рис. 3.37. Варианты основной статически определимой системы

Канонические уравнения для раскрытия статической неопределимости в системе с двумя лишними связями имеют вид (3.7):

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{10} = 0,$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{20} = 0.$$

Коэффициенты в этих уравнениях определим по формуле Мора путем перемножения эпюр:

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1 dz}{EJ}; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2 dz}{EJ}; \quad \delta_{22} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_2 dz}{EJ},$$

$$\Delta_{10} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_0 dz}{EJ}; \quad \Delta_{20} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 M_0 dz}{EJ}.$$

Построение эпюр изгибающих моментов в единичных и грузовом состояниях основной системы балки \bar{M}_1 , \bar{M}_2 , M_0 с использованием второго варианта основной системы.

Загрузим основную систему моментом $X_1=1$, при этом на изгиб работают только пролеты, примыкающие к опоре 1 (рис. 3.38).

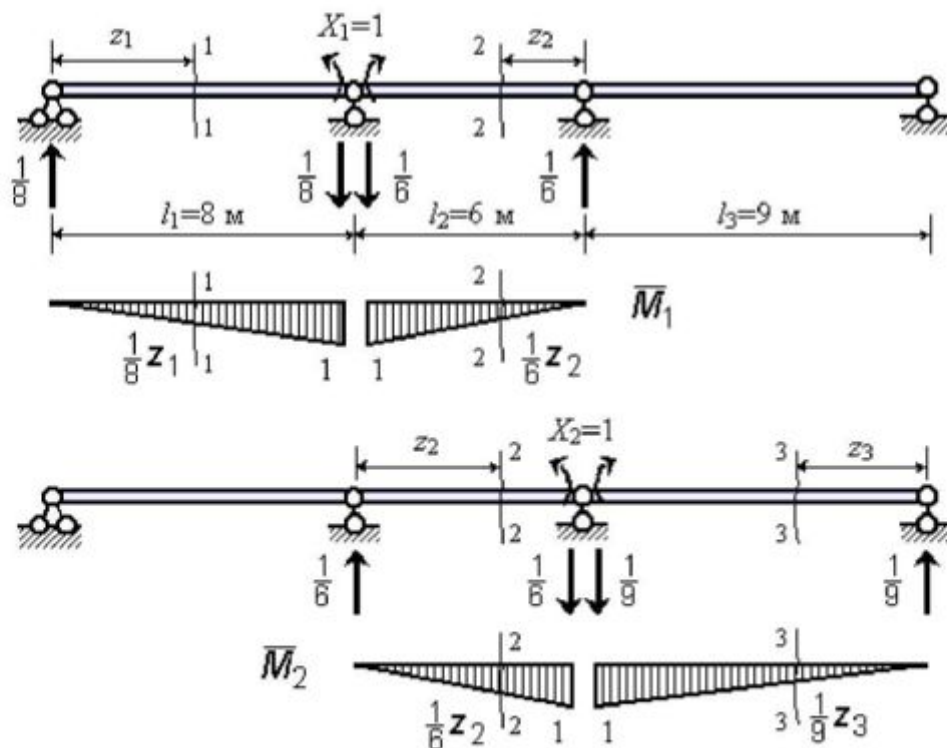


Рис. 3.38. Эпюры \bar{M}_1 , \bar{M}_2

Опорные реакции от загрузки первого пролета моментом $X_1=1$ из условия равновесия ($\sum m_1 = 0$, $\sum m_0 = 0$) получаются равными $\frac{1}{l_1} = \frac{1}{8}$; от момента $X_1=1$, приложенного к левой опоре второго пролета $l_2=6$ м, $|R_1| = |R_2| = \frac{1}{l_2} = \frac{1}{6}$. Направлены они в разные стороны на левой и правой опорах ($\sum y = 0$) и образуют пару сил с моментом, равным единице, противоположного направления внешнему моменту $X_1=1$. Изгибающий

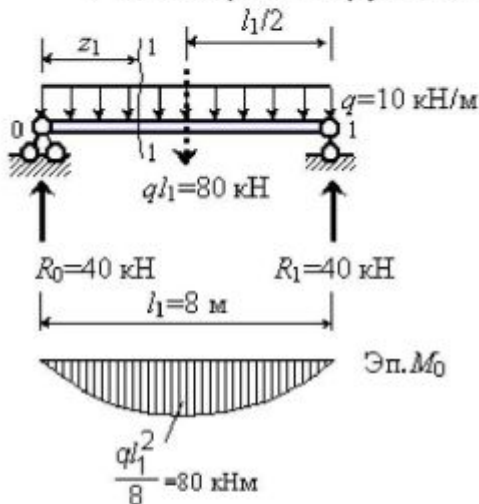
момент в сечении 1–1 левого пролета балки равен $\bar{M}_1(z) = \frac{1}{l_1} z_1 = \frac{1}{8} z_1$, в

сечении 2–2 второго пролета балки – $\bar{M}_1(z) = \frac{1}{l_2} z_2 = \frac{1}{6} z_2$.

Аналогичным образом строится эпюра \bar{M}_2 от нагружения основной системы моментом $X_2 = 1$. Полученные эпюры \bar{M}_1 , \bar{M}_2 приведены на рис. 3.38.

Эпюры M_0 от внешней нагрузки в принятом варианте основной системы. Каждый пролет работает на изгиб только от той нагрузки, которая приложена в пределах рассматриваемого пролета.

Рассмотрим нагружение первого пролета.



Опорные реакции из условия симметричного расположения опор от общей равнодействующей $q'l_1 = 80 \text{ кН}$ равны каждая $R_0 = R_1 = q'l_1/2 = 40 \text{ кН}$. Изгибающий момент в произвольном сечении 1-1 ($0 \leq z_1 \leq 8 \text{ м}$)

$$M_{1-1}(z) = \frac{q'l_1}{2} z_1 - \frac{qz_1^2}{2} = 40z_1 - 5z_1^2$$

Рис. 3.39. Загружение первого пролета

При	$z_1 = 0$	$M_{1-1} = 0;$
	$z_1 = l_1/2$	$M_{1-1} = \frac{q'l_1^2}{8} = 80 \text{ кНм};$
	$z_1 = l_1$	$M_{1-1} = 0$

Эпюра приведена на рис. 3.39.

Построение эпюры изгибающих моментов от нагружения второго пролета:

$$R_1 = \frac{\sum m_2}{l_2} = \frac{40}{6} = 6,67 \text{ кН};$$

$$R_2 = -R_1 = -6,67 \text{ кН}.$$

Изгибающий момент в сечении 2-2 ($0 \leq z_2 \leq 6 \text{ м}$)

$$M_{2-2} = \sum m^{лев} = R_1 z_2 = \frac{40}{6} z_2$$

При $z_2 = 0$ $M_{2-2} = 0;$

$z_2 = l_2$ $M_{2-2} = 40 \text{ кНм}.$

Эпюра M_0 при нагружении второго пролета показана на рис. 3.40.

Загружение третьего пролета:

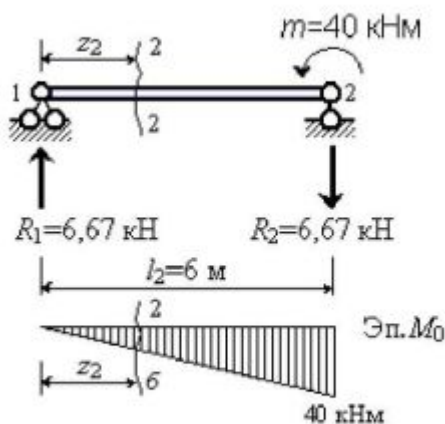
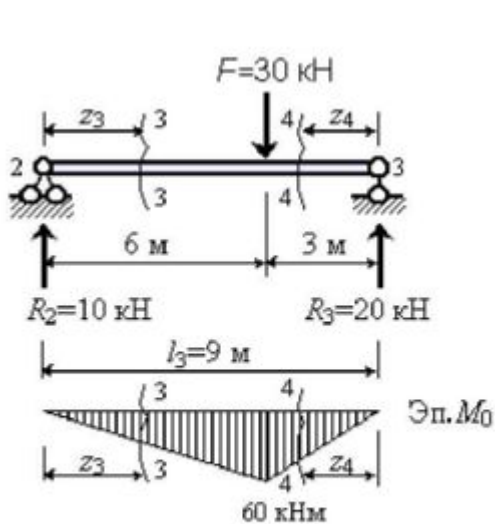


Рис. 3.40. Загружение второго пролета



$$R_2 = \frac{\sum m_3}{l_3} = \frac{30 \cdot 3}{9} = 10 \text{ кН}$$

$$R_3 = \frac{\sum m_2}{l_3} = \frac{30 \cdot 6}{9} = 20 \text{ кН}$$

Контроль определения реакций:

$$\sum y = 0, 10 - 30 + 20 = 0.$$

Рис. 3.41. Загружение третьего пролета

Изгибающий момент в произвольном сечении 3–3 на первом участке балки ($0 \leq z_3 \leq 6 \text{ м}$)

$$M_{3-3} = \sum m_{3-3}^{\text{лев}} = R_2 z_3 = 10 z_3$$

При $z_3 = 0$ $M_{3-3} = 0$, при $z_3 = 6 \text{ м}$ $M_{3-3} = 10 \times 6 = 60 \text{ кНм}$.

На втором участке балки (сечение 4–4) ($0 \leq z_4 \leq 3 \text{ м}$)

$$M_{4-4} = \sum m_{4-4}^{\text{прав}} = R_3 z_4 = 20 z_4$$

При $z_4 = 0$ $M_{4-4} = 0$, при $z_4 = 3 \text{ м}$ $M_{4-4} = 60 \text{ кНм}$. Эпюра $M_0(z)$ на третьем пролете приведена на рис. 3.41.

Примечание 1. При построении эпюр M_0 в основной системе внешний момент $m=40 \text{ кНм}$, приложенный к опоре 2, можно считать приложенным к правой опоре второго пролета, как это сделано в нашем расчете, или к левой опоре третьего пролета, или разделить его в любых долях на оба пролета (рис. 3.42).

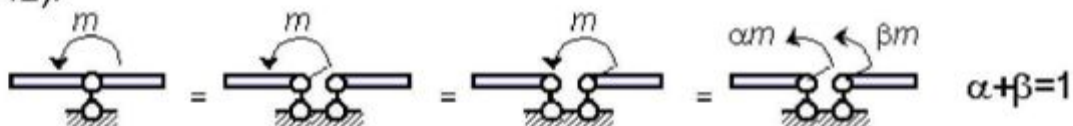


Рис. 3.42. Варианты приложения сосредоточенного опорного момента

В расчетных эпюрах M , Q для статически неопределимой балки при любых вариантах представления внешнего опорного момента, показанных на рис. 3.42, будет одинаковый конечный результат. Предпочтительнее, конечно, варианты без дробления величины m .

Примечание 2. Если на балке в одном пролете несколько различных нагрузок, то предпочтительнее может оказаться вариант построения эпюр M_0 в этом пролете от каждой нагрузки отдельно, это может упростить последующую операцию вычисления грузовых коэффициентов канонических уравнений.

Принятый вариант основной системы, грузовые и единичные эпюры для заданной балки приведены на рис. 3.43.

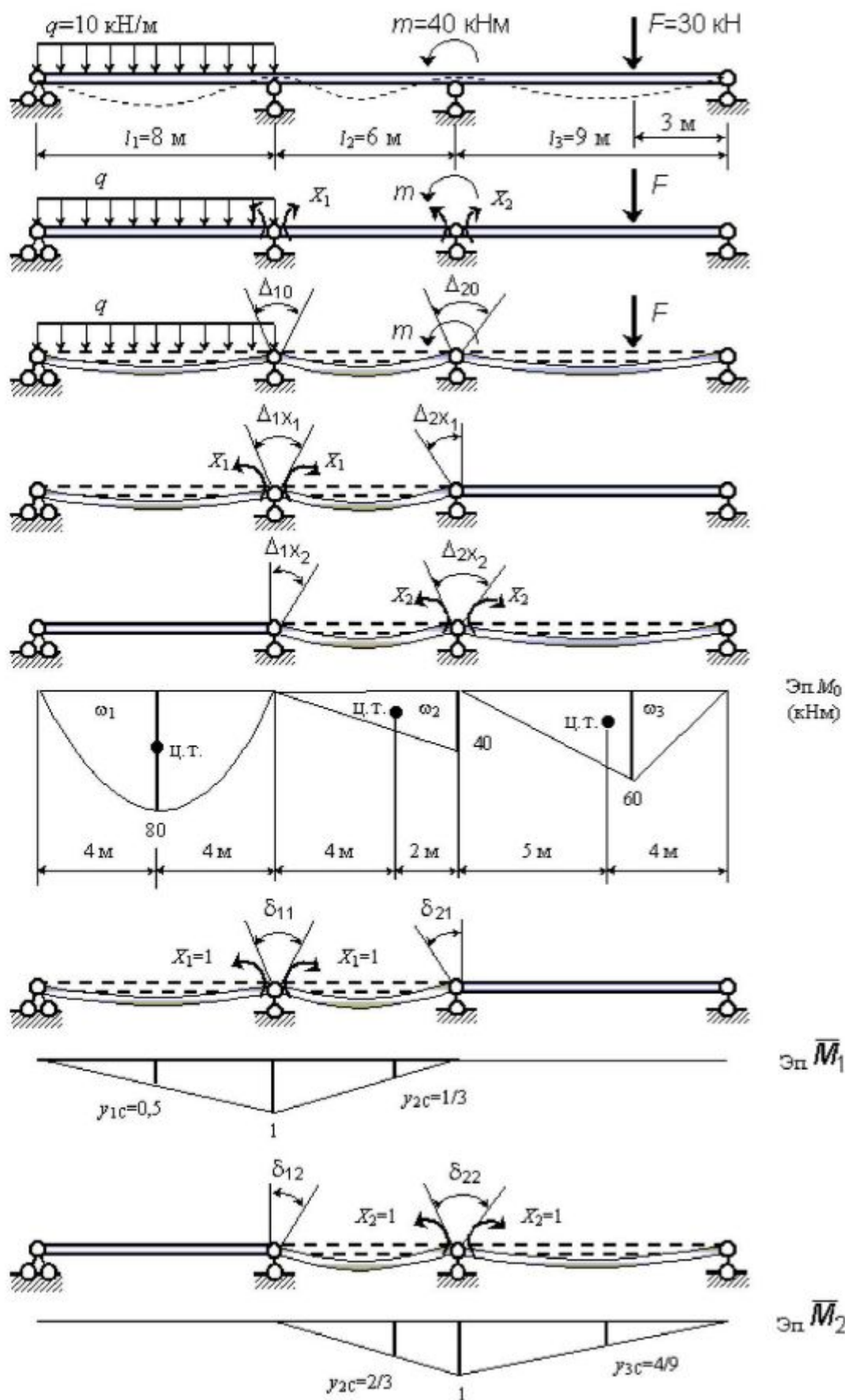
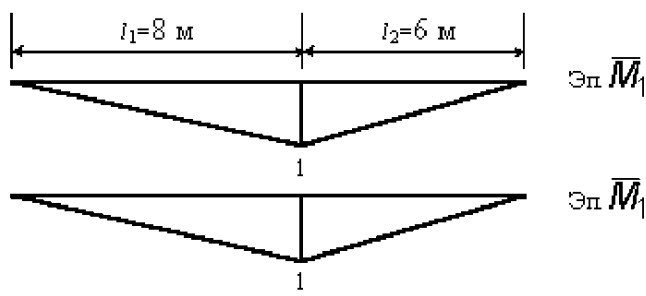
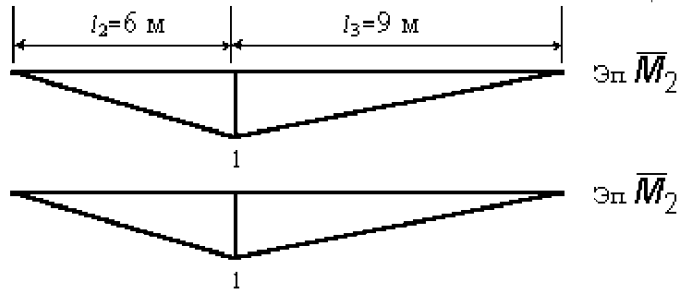


Рис. 3.43. Основная система, грузовая и единичные эпюры к примеру 3.5
 Определение коэффициентов канонических уравнений (рис. 3.44–3.47):



$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \sum \int \frac{\bar{M}_1(z)\bar{M}_1(z)dz}{EJ} = \\ &= \frac{l_1}{6EJ}[2 \cdot 1 \cdot 1] + \frac{l_2}{6EJ}[2 \cdot 1 \cdot 1] = \\ &= \left(\frac{l_1}{3} + \frac{l_2}{3}\right) \frac{1}{EJ} = \left(\frac{8}{3} + \frac{6}{3}\right) \frac{1}{EJ} = \\ &= \frac{14}{3} \cdot \frac{1}{EJ} = \frac{4,67}{EJ}; \end{aligned}$$

Рис. 3.44. К определению коэффициента δ_{11}



$$\begin{aligned} \delta_{22} &= \sum \int \frac{\bar{M}_2(z)\bar{M}_2(z)dz}{EJ} = \\ &= \frac{1}{EJ} \left(\frac{l_2}{3} + \frac{l_3}{3}\right) = \\ &= \frac{1}{EJ} \left(\frac{6}{3} + \frac{9}{3}\right) = \frac{5}{EJ}; \end{aligned}$$

Рис. 3.45. К определению коэффициента δ_{22}

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int \frac{\bar{M}_1(z)\bar{M}_2(z)dz}{EJ} = \frac{1}{EJ} \left[\frac{l_2}{6} (1 \cdot 1) \right] = \frac{l_2}{6EJ} = \frac{6}{6EJ} = \frac{1}{EJ};$$

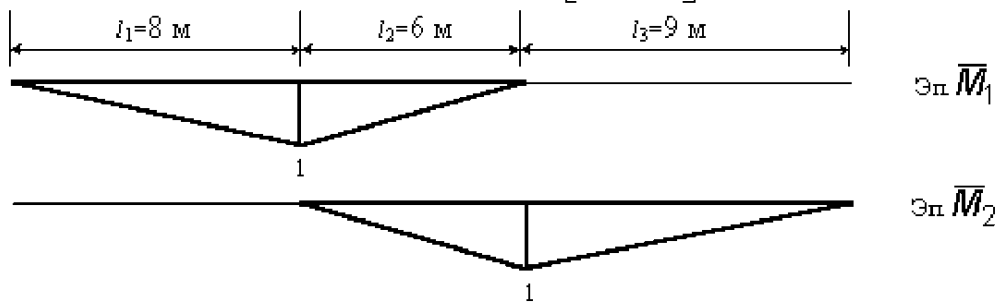


Рис. 3.46. К определению коэффициентов δ_{12} и δ_{21}

$$\begin{aligned} \Delta_{10} &= \sum \int \frac{\bar{M}_1(z)M_0(z)dz}{EJ} = \frac{l_1}{6EJ} (4 \cdot 0,5 \cdot 80) + \frac{l_2}{6EJ} (1 \cdot 40) = \\ &= \frac{1}{6EJ} [8 \cdot 160 + 6 \cdot 40] = \frac{253,33}{EJ}; \end{aligned}$$

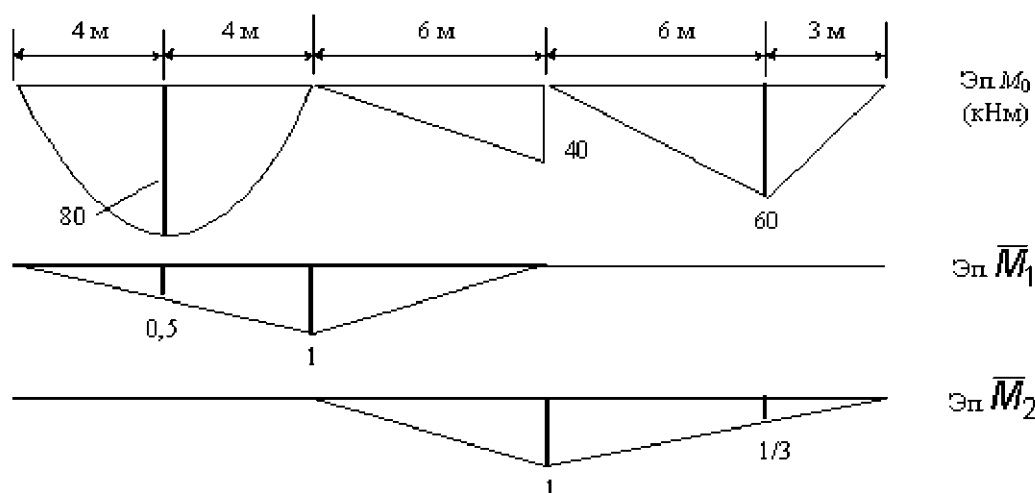


Рис. 3.47. К определению грузовых коэффициентов Δ_{10} и Δ_{20}

Третий пролет делим на два участка $l = 6$ м и $l = 3$ м

$$\Delta_{20} = \sum \int \frac{M_0(z) \bar{M}_2(z) dz}{EJ} = \frac{6}{6EJ} (2 \cdot 1 \cdot 40) + \frac{6}{6EJ} (2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 60 + 1 \cdot 60) + \frac{3}{6EJ} (2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 60) = \frac{200}{EJ}.$$

Коэффициенты канонических уравнений можно вычислить перемножением эпюр по правилу Верещагина, используя формулу (2.16). Покажем это на примере вычисления грузовых коэффициентов

Δ_{10} , Δ_{20} (рис. 3.48):

$$\Delta_{10} = \frac{1}{EJ} \sum \omega_i y_{ic} = \frac{1}{EJ} \left(426,67 \cdot \frac{1}{2} + 120 \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{253,33}{EJ};$$

$$\omega_1 = \frac{2}{3} \cdot 80 \cdot 8 = 426,67 \text{ кНм}^2; \quad y_{1c} = 0,5; \quad \omega_2 = \frac{40 \cdot 4}{2} = 120 \text{ кНм}^2; \quad y_{2c} = 1/3$$

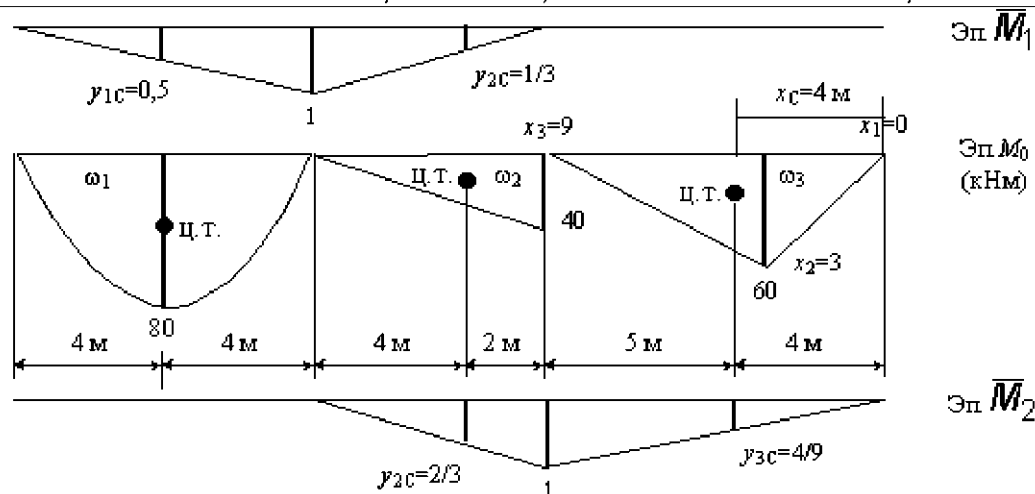


Рис. 3.48. К вычислению грузовых коэффициентов с использованием правила Верещагина

Координаты центра тяжести треугольной эпюры M_0 в пролете l_3 (рис. 3.48)

$$x_c = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{0 + 3 + 9}{3} = 4 \text{ м}; y_{3c} = \frac{1}{9} \cdot 4 = \frac{4}{9} \text{ (из эпюры } \bar{M}_2 \text{)}.$$

Площадь грузовой эпюры в третьем пролете $\omega_3 = \frac{60 \cdot 9}{2} = 270 \text{ кНм}^2$.

Тогда

$$\Delta_{20} = \frac{1}{EJ} \sum \omega \cdot y_{ic} = \frac{1}{EJ} \left(120 \cdot \frac{2}{3} + 270 \cdot \frac{4}{9} \right) = \frac{200}{EJ}.$$

Этот прием определения коэффициентов Δ_{10} , Δ_{20} рекомендуется использовать для контроля вычислений.

Решение системы канонических уравнений.

Канонические уравнения для рассматриваемого примера имеют вид

$$\left. \begin{aligned} 4,67 X_1 + X_2 &= -253,33; \\ X_1 + 5 X_2 &= -200. \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

Решение системы уравнений дает корни: $X_1 = -47,72 \text{ кНм}$; $X_2 = -30,46 \text{ кНм}$.

Построение эпюры изгибающих моментов $M_{расч}$. Расчетную эпюру изгибающих моментов в заданной неразрезной балке получим, суммируя эпюры от найденных значений неизвестных X_1 , X_2 ($\bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2$ – эпюра опорных моментов) с эпюрой M_0 от внешних нагрузок (балочные эпюры от внешней нагрузки в каждом пролете).

Эпюры $\bar{M}_1 X_1$, $\bar{M}_2 X_2$, M_0 и $M_{расч}$ приведены на рис. 3.49, а–г.

Контроль эпюры $M_{расч}$ – деформационная проверка.

Для деформационной проверки вычисляем сумму прогибов заданной балки на опорах 1, 2. Она должна быть равна нулю. Единичное вспомогательное групповое состояние приведено на рис. 3.49, д:

$$y_1 + y_2 = \sum \int \frac{M_{расч} (\bar{M}_{k1} + \bar{M}_{k2}) dz}{EJ} = 0 \quad (3.38)$$

Здесь \bar{M}_{k1} , \bar{M}_{k2} – эпюры от единичных сил $F_1=1$, $F_2=1$ в основной статически определимой системе ($\bar{M}_S = \bar{M}_{k1} + \bar{M}_{k2}$) (рис. 3.49, д).

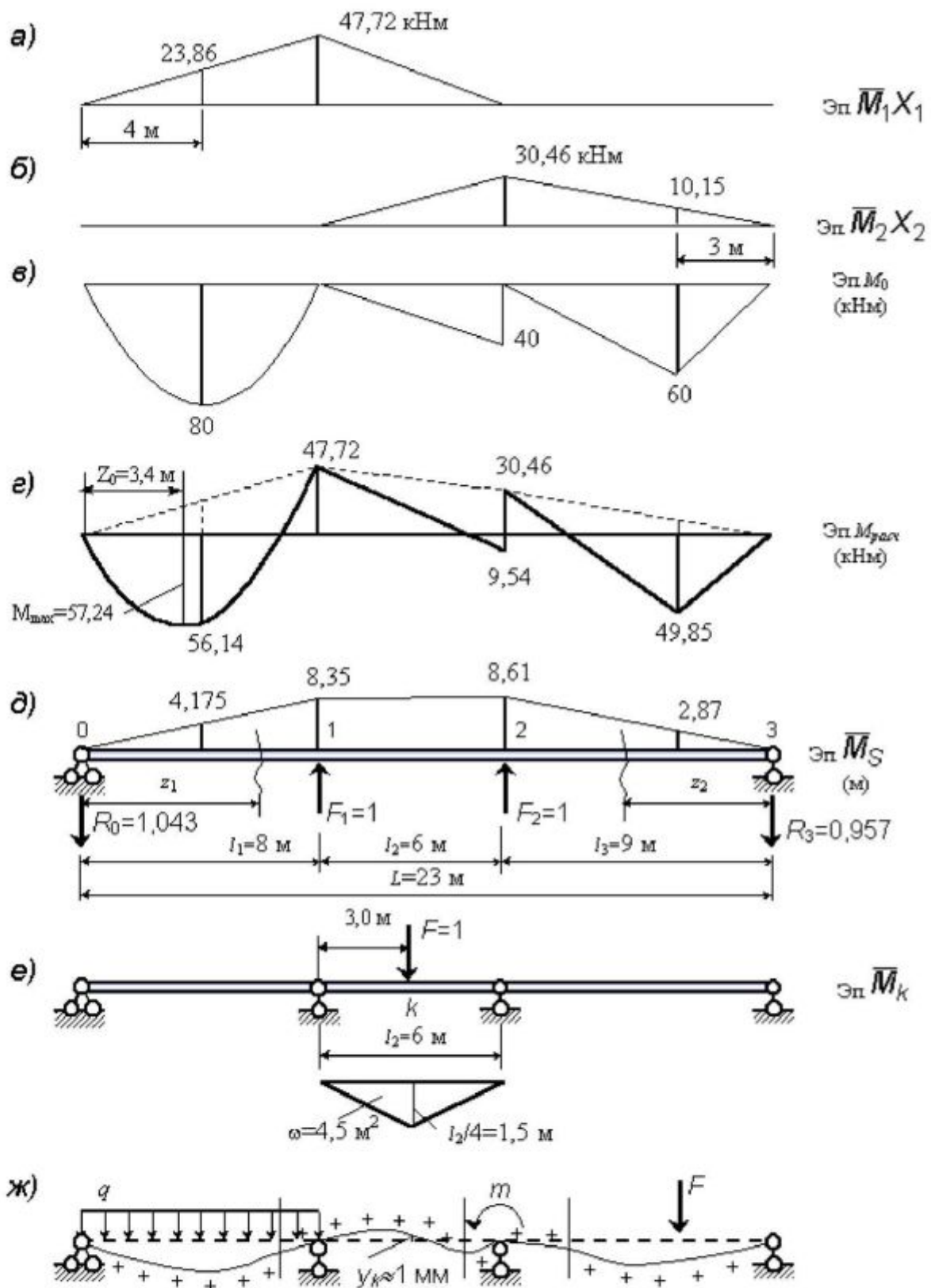


Рис. 3.49. Построение расчетной эпюры изгибающих моментов и вид изогнутой оси балки: а, б – исправленные единичные эпюры; в – грузовая эпюра; г – расчетная эпюра $M_{расч}$; д – единичное вспомогательное групповое состояние для деформационной проверки; е – единичное вспомогательное состояние для определения прогиба y_k ; ж – вид изогнутой оси балки

Построение эпюры \overline{M}_S :

$$R_0 = \frac{\sum m_3}{L} = \frac{1 \cdot 15 + 1 \cdot 9}{23} = 1,043; R_3 = \frac{\sum m_0}{L} = \frac{1 \cdot 14 + 1 \cdot 8}{23} = 0,957;$$

$$M_{1-1} = 1,043z_1 \quad (0 \leq z_1 \leq 8 \text{ м}); \quad \text{при } z_1=8 \text{ м} \quad M_{1-1} = 1,043 \cdot 8 = 8,35 \text{ м}$$

$$M_{2-2} = 0,957z_2 \quad (0 \leq z_2 \leq 9 \text{ м}); \quad \text{при } z_2=9 \text{ м} \quad M_{2-2} = 0,957 \cdot 9 = 8,61 \text{ м}$$

Перемножение эпюр $M_{расч}$ на \overline{M}_S :

$$\begin{aligned} EJ(y_1 + y_2) &= \sum_1^n \int_{l_i} M_{расч} \overline{M}_S dz = \frac{8}{6} (-4 \cdot 4,175 \cdot 56,14 + 8,35 \cdot 47,72) + \\ &+ \frac{6}{6} (8,35 \cdot 47,72 \cdot 2 - 2 \cdot 8,61 \cdot 9,54 + 47,72 \cdot 8,61 - 8,35 \cdot 9,64) + \\ &+ \frac{6}{6} \cdot (2 \cdot 8,61 \cdot 30,46 - 2 \cdot 2,87 \cdot 49,85 - 8,61 \cdot 49,85 + 2,87 \cdot 30,46) + \\ &+ \frac{3}{6} \cdot (-2 \cdot 2,87 \cdot 49,85) = -964,9 + 963,9 \approx 0. \end{aligned}$$

Невязка $\varepsilon = -1$ или $\frac{1}{964,9} \cdot 100\% = 0,1\%$, что допустимо.

Построение эпюры $Q_{расч}$ выполним по алгоритму

$$Q_{расч} = Q_0 + \overline{Q}_1 X_1 + \overline{Q}_2 X_2 \quad (3.39)$$

Здесь Q_0 – эпюра перерезывающих сил в основной статически определимой системе от внешней нагрузки в каждом пролете; \overline{Q}_1 , \overline{Q}_2 – эпюры перерезывающих сил в основной статически определимой системе от загрузения $X_1=1$, $X_2=1$ соответственно.

Построение этих эпюр в однопролетных шарнирно-опертых балках пояснения не требует. Эпюры $\overline{Q}_1 X_1$, $\overline{Q}_2 X_2$, Q_0 приведены на рис. 3.50, а–в. На рис. 3.50, г показана полученная эпюра $Q_{расч}$. Опорные реакции на каждой опоре определены из условия равновесия сил ($\sum y = 0$) в опорном узле (рис. 3.51). Их значения показаны на рис. 3.52.

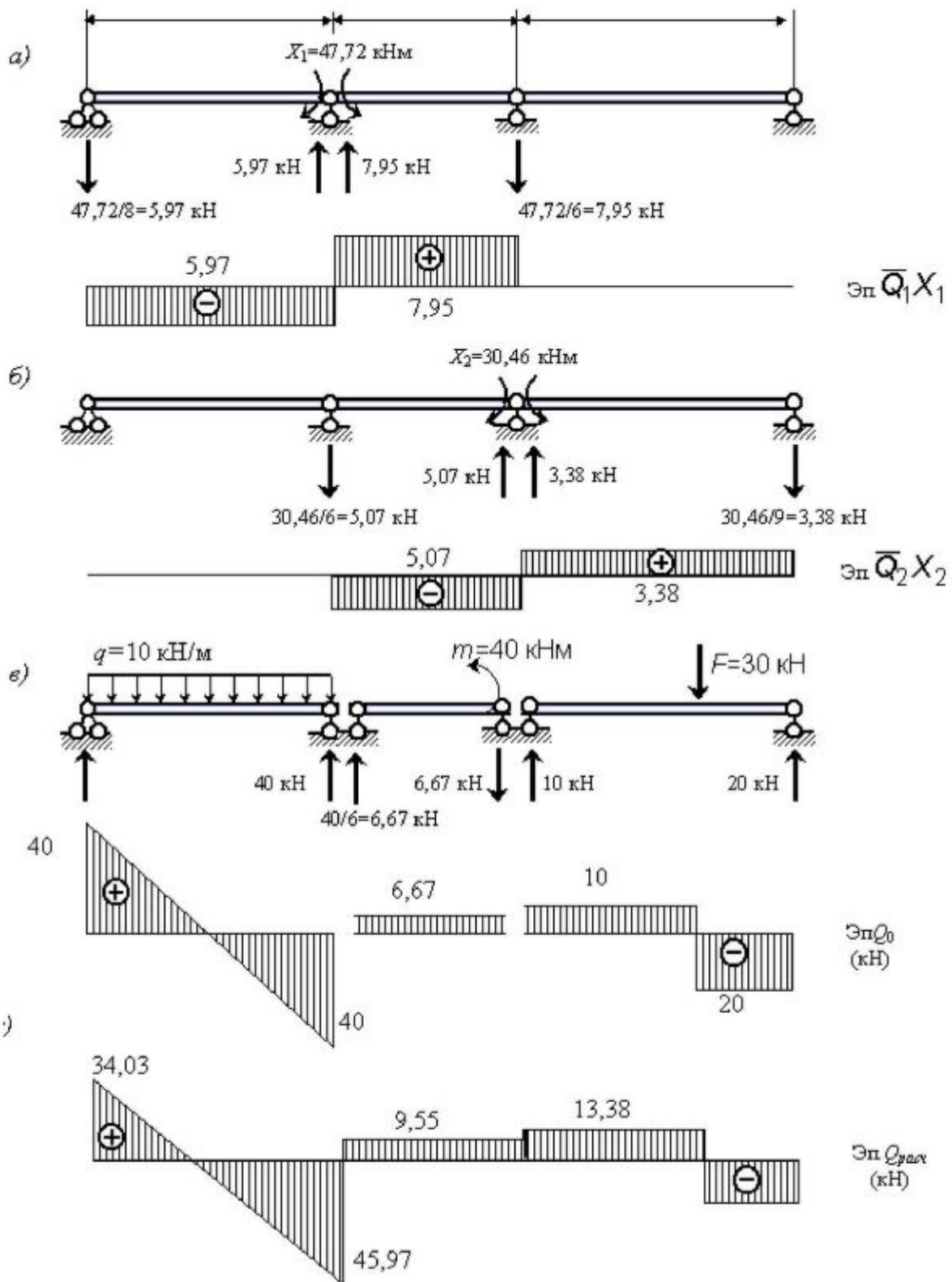


Рис. 3.50. Построение расчетной эпюры поперечных сил и определение опорных реакций: а, б – исправленные единичные эпюры; в – грузовая эпюра; г – расчетная эпюра перерезывающих сил

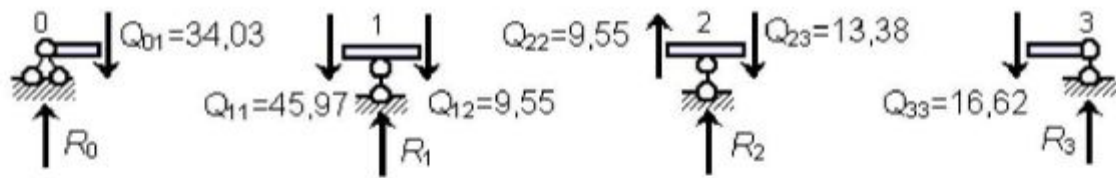


Рис. 3.51. К определению опорных реакций (значения Q_{ij} указаны в кН)

Статическая проверка равновесия балки (рис. 3.52), нагруженной внешними силами и найденными значениями реактивных усилий:

$$\sum y = 34,03 + 55,52 + 3,83 + 16,62 - 10,8 - 30 = 110 - 110 = 0;$$

$$\sum m_0 = 80 \cdot 4 - 55,52 \cdot 8 - 40 - 3,83 \cdot 14 + 30 \cdot 20 - 16,62 \cdot 23 = 920 - 920 = 0.$$

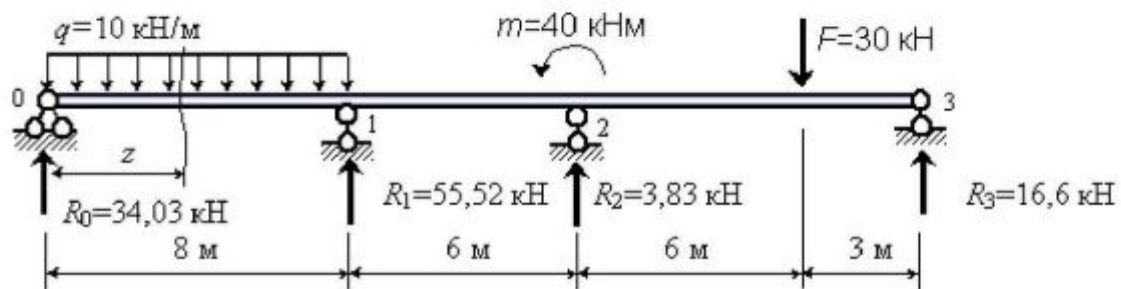


Рис. 3.52. К проверке равновесия балки

Подбор сечения балки выполняем из условия прочности

$$(W_x)_{\text{тр}} \geq \frac{\max |M|}{[\sigma]}, \quad \max |M| \text{ из эпюры } M_{\text{расч}} \text{ будет в первом пролете в том сечении, для которого } \frac{dM(z)}{dz} = 0, \quad \text{где } M(z) = 34,03z - 10 \frac{z^2}{2}.$$

Определим значение z_0 из этого условия (рис. 3.52):

$$\frac{dM}{dz} = 34,03 - 10z = 0; \quad \left| z_0 = \frac{34,03}{10} = 3,40 \text{ м} \right|$$

Изгибающий момент в сечении при $z=3,40$ м

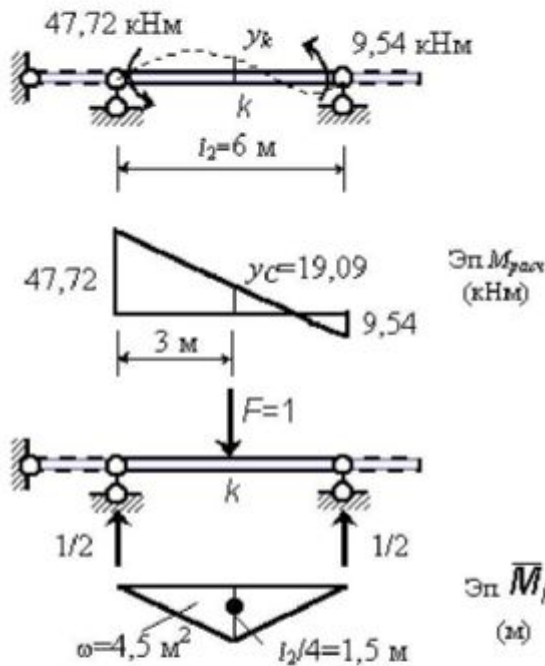
$$\max M = 34,03z - \frac{10z^2}{2} = 34,03z - 5z^2 = 34,03 \cdot 3,04 - 5(3,04)^2 = 57,24 \text{ кНм};$$

$$(W_x)_{\text{тр}} \geq \frac{57,24 \cdot 10^3 \text{ Нм}}{160 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2} = 3,57 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 = 357 \text{ см}^3$$

Из сортамента прокатной стали (ГОСТ 8239-89) принимаем I №27 с $W_x = 371 \text{ см}^3$, $J_x = 5010 \text{ см}^4$.

Определение прогиба балки в среднем сечении второго пролета выполним, используя метод Мора

$$y_k = \sum \int \frac{M_{расч}(z) \bar{M}_k(z) dz}{EJ_x}$$



Поскольку $EJ = const$, а одна из подынтегральных функций на всей длине пролета линейна (эпюра $M_{расч}(z)$), то интеграл Мора вычислим перемножением эпюр по правилу Верещагина:

$$y_k = - \frac{\omega y_c}{EJ_x} = - \frac{4,5 \text{ м}^2 \cdot 19,09 \text{ кНм}}{EJ_x} = - \frac{85,91 \text{ кНм}^3}{EJ_x}$$

Модуль упругости для материала балки равен $E = \frac{2 \cdot 10^{11} \text{ Па}}$, момент инерции сечения (I №27) $J_x = 5010 \text{ см}^4$. С учетом этих значений

Рис. 3.53. К определению перемещения сечения k

$$y_k = - \frac{85,91 \cdot 10^3 \text{ Нм}^3}{2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2 \cdot 5010 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4} = -0,857 \cdot 10^{-2} \text{ м} \approx -1 \text{ мм.}$$

Знак минус означает то, что прогиб y_k направлен в сторону, противоположную направлению единичной силы F_k , т.е. вверх (см. рис. 3.53).

Схему изогнутой оси балки изображаем, учитывая условия на опорах, вычисленный прогиб, вид эпюры изгибающих моментов. Поскольку изгибающие моменты на эпюре откладываем со стороны растянутых волокон, то выпуклость изогнутой оси направлена в сторону ординат эпюры M . Сечения, в которых $M=0$, совпадают с точками перегиба упругой линии (рис. 3.54).

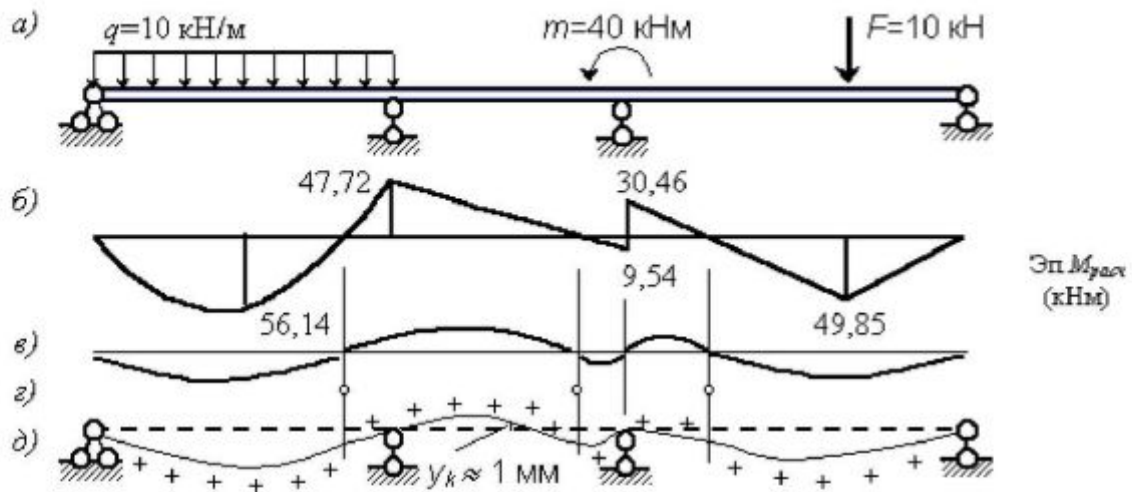


Рис. 3.54. Схема упругой линии балки: а – расчетная схема; б – эпюра $M_{расч}$; в – вид изогнутой оси балки по участкам; г – точки перегиба; д – упругая линия балки

4. Расчет неразрезных балок на смещение опор

В статически неопределимых системах возникает напряженное состояние при смещении опорных закреплений. Такие смещения могут быть вызваны деформацией основания опоры (просадка, пучение), податливостью опорных связей под нагрузкой, отступлением от проектного уровня расположения опор при монтаже конструкции.

Для оценки влияния смещения опор на напряженное состояние неразрезной балки необходимо определить изгибающие моменты, поперечные силы в сечениях, опорные реакции. Это требует раскрытия статической неопределимости расчетной схемы.

Рассмотрим балку, получившую известное перемещение опор $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ (рис. 4.1). При выборе основной статически определимой системы за неизвестные приняты опорные моменты X_1, X_2, X_3 .

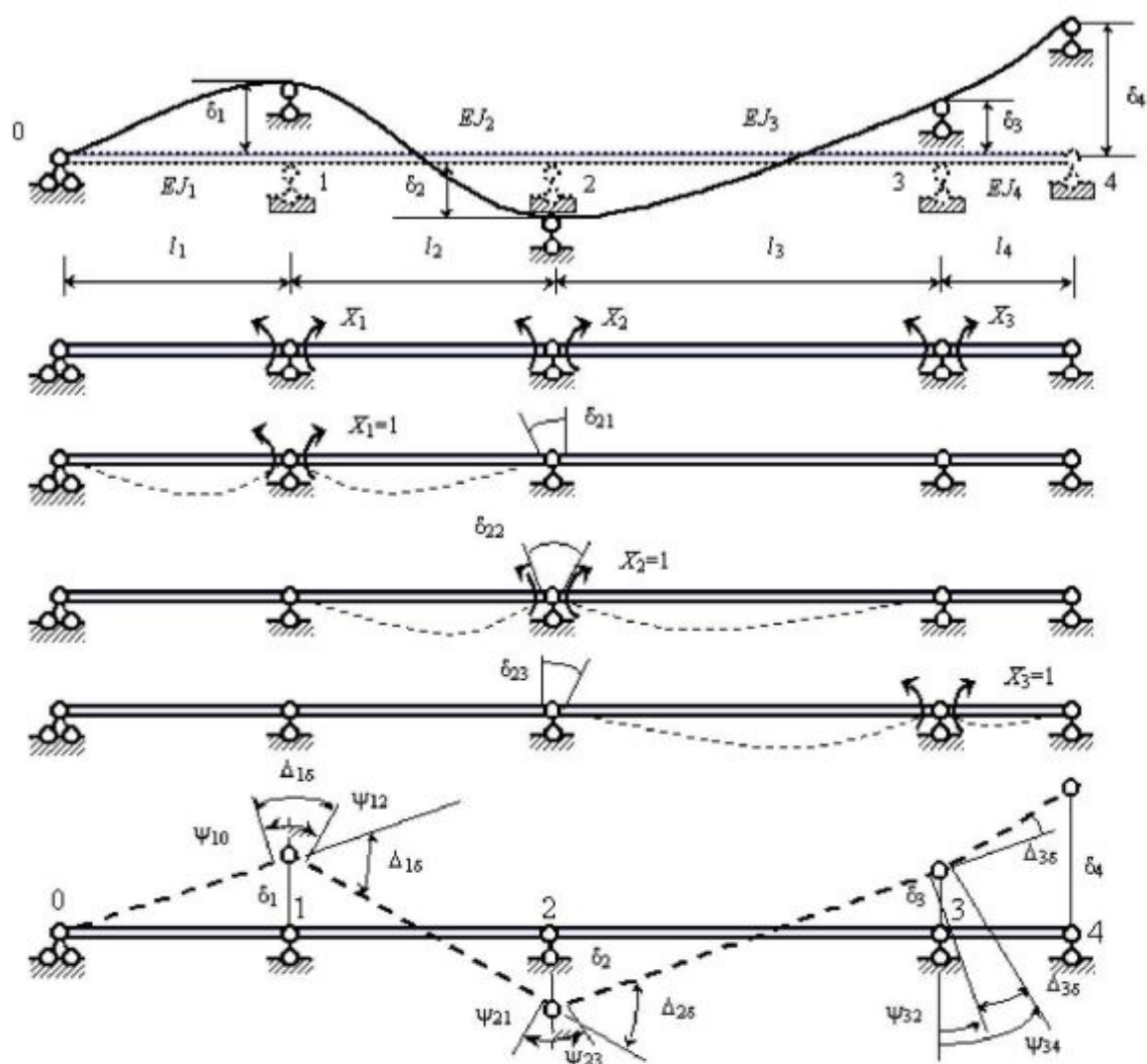


Рис. 4.1. К определению грузовых коэффициентов при расчете балки на смещение опор

Так, канонические уравнения, отрицающие перелом изогнутой оси балки на опорах 1, 2 и 3, запишутся в виде:

$$\begin{cases}
 \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 + \Delta_{16} = 0; \\
 \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 + \Delta_{26} = 0; \\
 \delta_{31} X_1 + \delta_{32} X_2 + \delta_{33} X_3 + \Delta_{36} = 0.
 \end{cases}
 \quad (4.1)$$

Единичные коэффициенты δ_{ij} при неизвестных определяются перемножением соответствующих единичных эпюр изгибающих моментов $\overline{M}_1, \overline{M}_2, \overline{M}_3$, как показано в разд. 3.

Значения свободных членов $\Delta_{16}, \Delta_{26}, \Delta_{36}$ в уравнениях (4.1) определяются как углы перелома шарнирно-стержневой системы двухопорных балок, вызванных заданным смещением опор (см. рис.4.1):

$$\begin{aligned}
 \Delta_{1\delta} &= \psi_{10} + \psi_{12} = \frac{\delta_1}{l_1} + \frac{\delta_1 + \delta_2}{l_2}; \\
 \Delta_{2\delta} &= -[\psi_{21} + \psi_{23}] = -\left[\frac{\delta_1 + \delta_2}{l_2} + \frac{\delta_2 + \delta_3}{l_3} \right]; \\
 \Delta_{3\delta} &= -[\psi_{34} - \psi_{32}] = -\left[\frac{\delta_4 - \delta_3}{l_4} - \frac{\delta_2 + \delta_3}{l_3} \right].
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

Пример 4.1. В балке, приведенной на рис. 4.2, в результате пучинных явлений в грунте у опоры С произошло ее смещение на величину $\delta_C = 0,001l$. Требуется определить значения изгибающих моментов, перерезывающих сил, вызванных этим явлением.

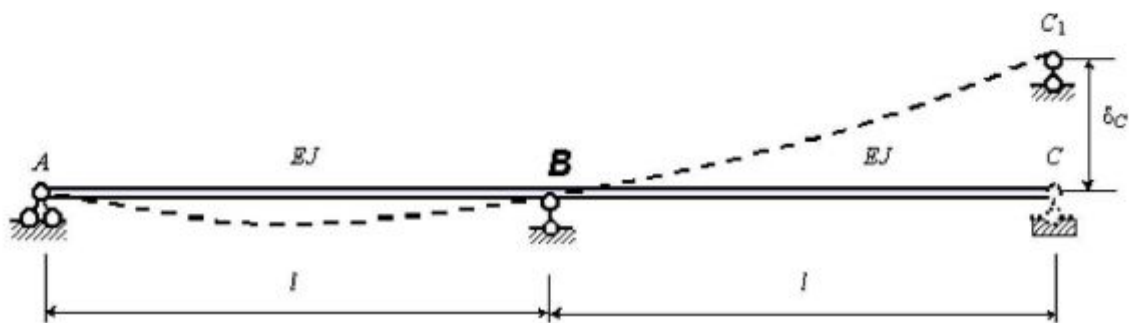


Рис.4.2. Расчетная схема балки

Решение. Рассмотрим два варианта составления разрешающего уравнения для раскрытия статической неопределенности балки.

В первом варианте за неизвестное X_1 примем усилие на опоре С (рис. 4.3).

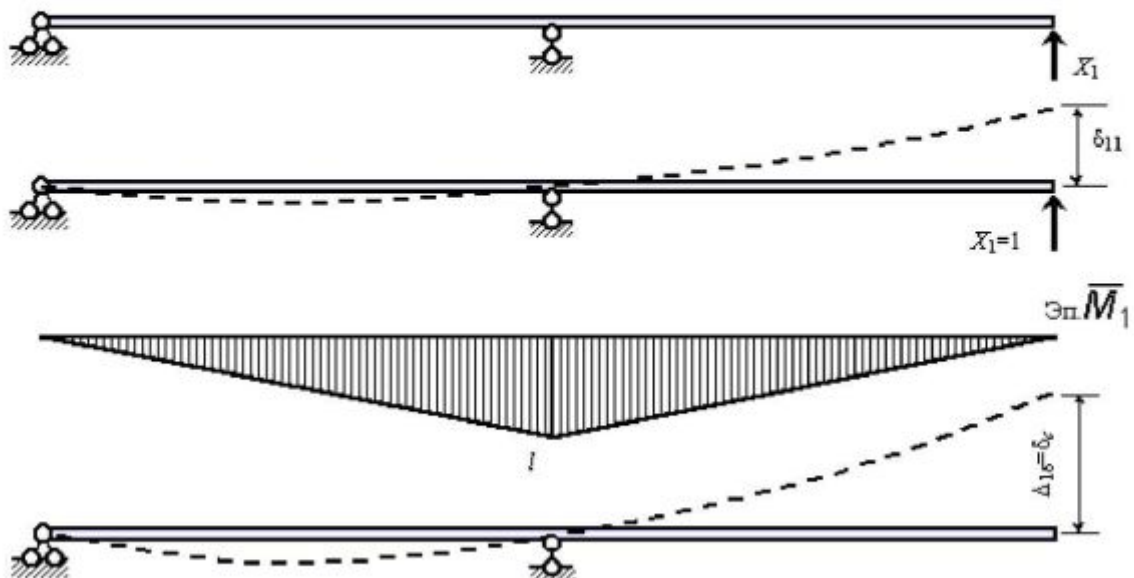


Рис. 4.3. К определению коэффициентов разрешающего уравнения

Уравнение для определения X_1 запишется так

$$|\Delta_{1X_1} = \Delta_{1\delta_c},$$

где $\Delta_{1X_1} = \delta_{11}X_1$.

Коэффициент δ_{11} определяется перемножением $|\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1|$:

$$\delta_{11} = \sum \int_l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1 dz}{EJ} = \frac{l \cdot l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{EJ} \cdot 2 = \frac{2l^3}{3EJ}.$$

Тогда

$$X_1 = \frac{\Delta_{1\delta_c}}{\delta_{11}} = \frac{l}{1000} \cdot \frac{3EJ}{2l^3} = 0,0015 \frac{EJ}{l^2}.$$

Эпюры $M_{расч}$, $Q_{расч}$ и реакции опор показаны на рис. 4.4.

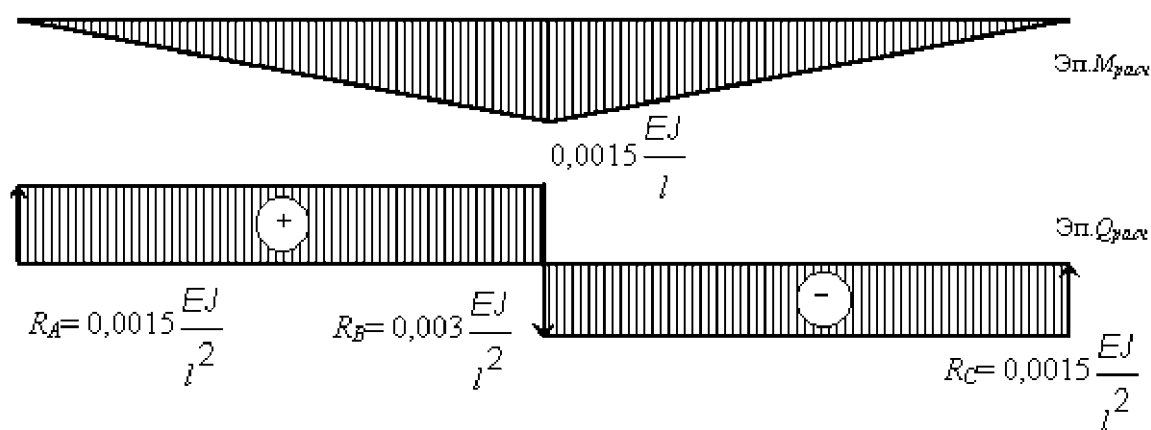


Рис. 4.4. Расчетные эпюры $M_{расч}$ и $Q_{расч}$

При втором варианте основной системы (рис. 4.5) каноническое уравнение метода сил, отрицающее перелом упругой линии балки на опоре B , запишется так:

$$|\delta_{11}X_1 + \Delta_{1\delta_c} = 0|,$$

где

$$\delta_{11} = \sum \int_l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1 dz}{EJ} = \frac{1 \cdot l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{EJ} \cdot 2 = \frac{2l}{3EJ};$$

$$\Delta_{1\delta_c} = -\frac{\delta_c}{l} = -\frac{1}{1000};$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1\delta_c}}{\delta_{11}} = -\frac{-1 \cdot 3EJ}{1000 \cdot 2l} = 0,0015 \frac{EJ}{l}.$$

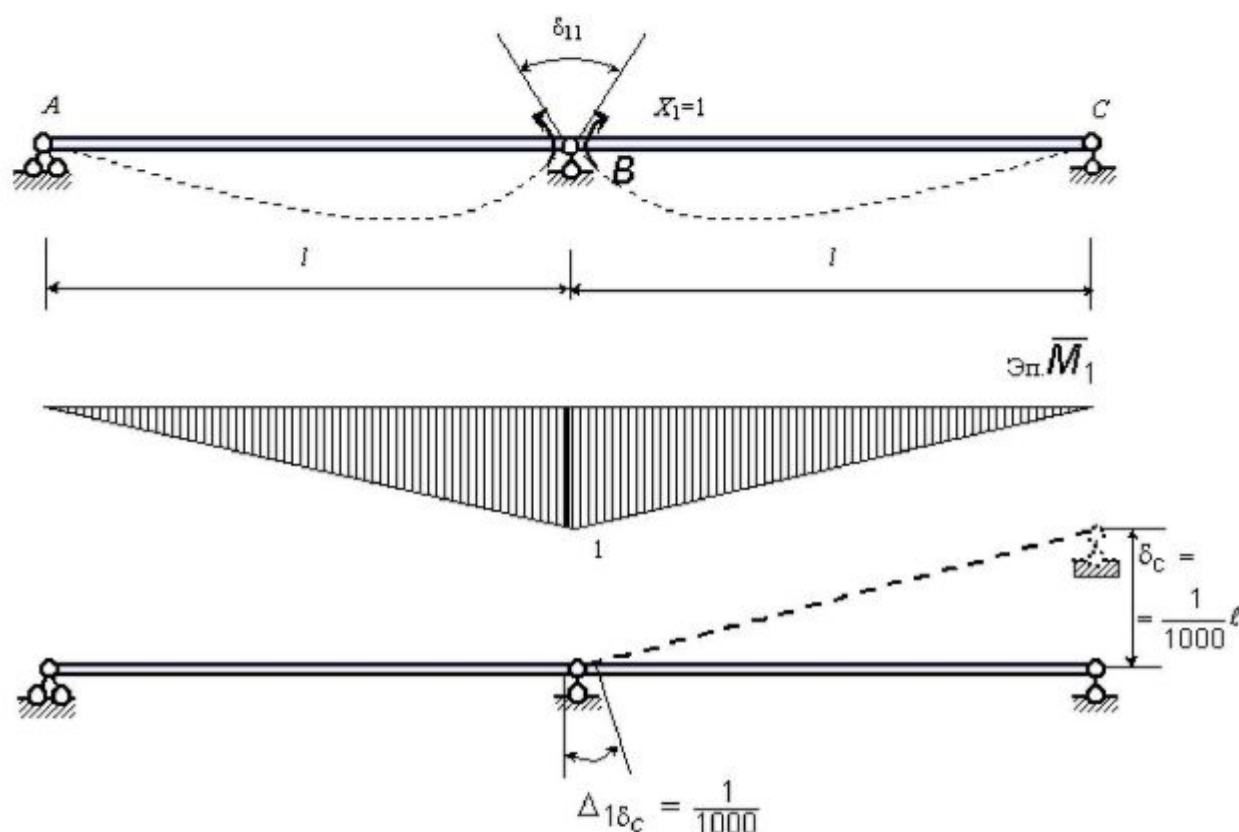


Рис. 4.5. К определению коэффициентов канонического уравнения

Это значение соответствует изгибающему моменту M_B , полученному в первом варианте расчета.

Следует обратить внимание на то, что усилия в сечениях неразрезной балки при смещении опор зависят не только от соотношения жесткостей балки в пролетах, но и от абсолютного значения изгибной жесткости EJ .

5. Расчет неразрезных балок на упругоподатливых опорах

Неразрезная балка как конструктивный элемент сооружения может иметь податливые опоры. Такими опорами могут быть места опирания неразрезной продольной балки на поперечные в проезжей части моста, неразрезного ригеля на стойки в рамном каркасе промышленного здания, рельса железнодорожного пути на шпалы, имеющие податливое основание.

Примером неразрезной балки на податливых опорах является также неразрезная несущая конструкция пролетного строения наплавного моста с опорами на понтонах. В конструкциях встречаются податливые опоры не только с линейным перемещением по направлению оси опоры (рис. 5.1, а), но и с упругоподатливым защемлением (рис. 5.1, б), а также одновременно с линейной и упругой угловой податливостью (рис. 5.1, в).

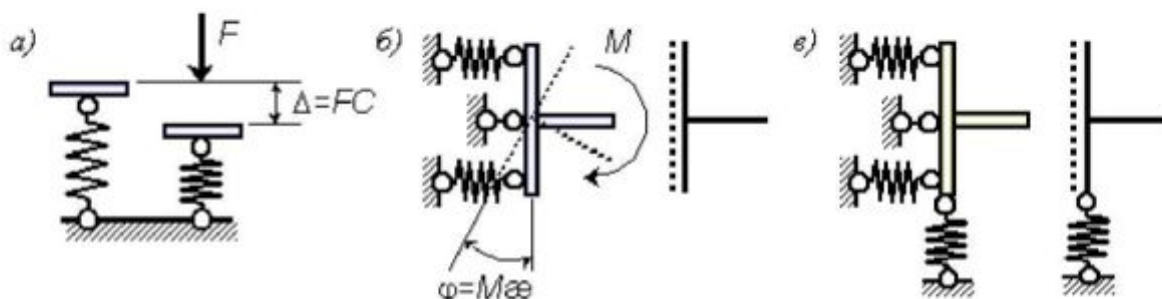


Рис. 5.1. Податливые опоры: а – с линейной податливостью; б – упругоподатливое защемление; в – опора с линейной и угловой упругой податливостью

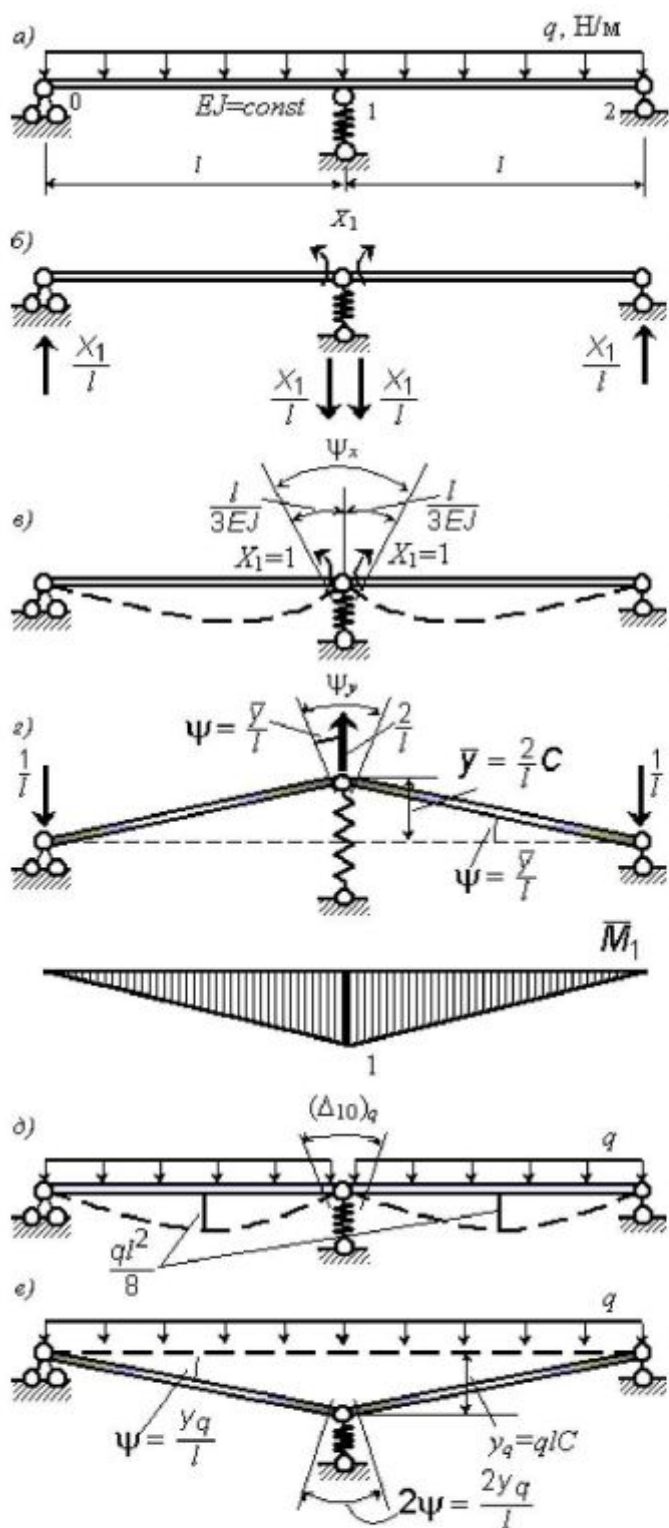
Осадка упругоподатливой опоры принимается пропорциональной давлению на опору. Коэффициент C называется податливостью и определяется как величина осадки опоры от единичной силы.

При упругом защемлении угол поворота опорного сечения принимается пропорциональным изгибающему моменту. Податливость при повороте сечения α равна углу поворота опорного сечения от единичного момента. Величина, обратная податливости $K=1/C$, называется жесткостью и определяется как величина усилия, необходимая для создания единичного перемещения.

Перемещение опорного узла третьего типа (рис. 5.1, в) определяется линейной и угловой податливостью опоры.

Рассмотрим пример расчета двухпролетной неразрезной балки, нагруженной по всей длине равномерно распределенной нагрузкой q , Н/м, со средней опорой на упругом основании с податливостью C , м/Н, (рис. 5.2, а).

Основная система приведена на рис. 5.2, б.



Значение лишнего неизвестного определяется из канонического уравнения

$$X_1 = - \frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}}$$

Величины δ_{11} , Δ_{10} определим, учитывая деформацию изгиба балки и осадку упругоподатливой опоры.

Единичный коэффициент δ_{11} есть сумма взаимных углов поворота ψ_x и ψ_y смежных сечений балки над опорой 1 от изгиба балки (рис. 5.2, в) и от перемещения \bar{y} упругоподатливой опоры в основной системе, нагруженной моментом $X_1 = 1$ (рис. 5.2, з):

$$\delta_{11} = \psi_x + \psi_y$$

Здесь

$$\begin{aligned} \psi_x &= \sum \int \frac{\bar{M}_1(z)\bar{M}_1(z)dz}{EJ} = \\ &= \frac{1 \cdot l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \frac{1}{EJ} = \frac{2l}{3EJ}; \end{aligned}$$

$$\psi_y = \frac{2\bar{y}}{l} = \frac{2 \cdot 2C}{l^2} = \frac{4C}{l^2}$$

Полное значение δ_{11}

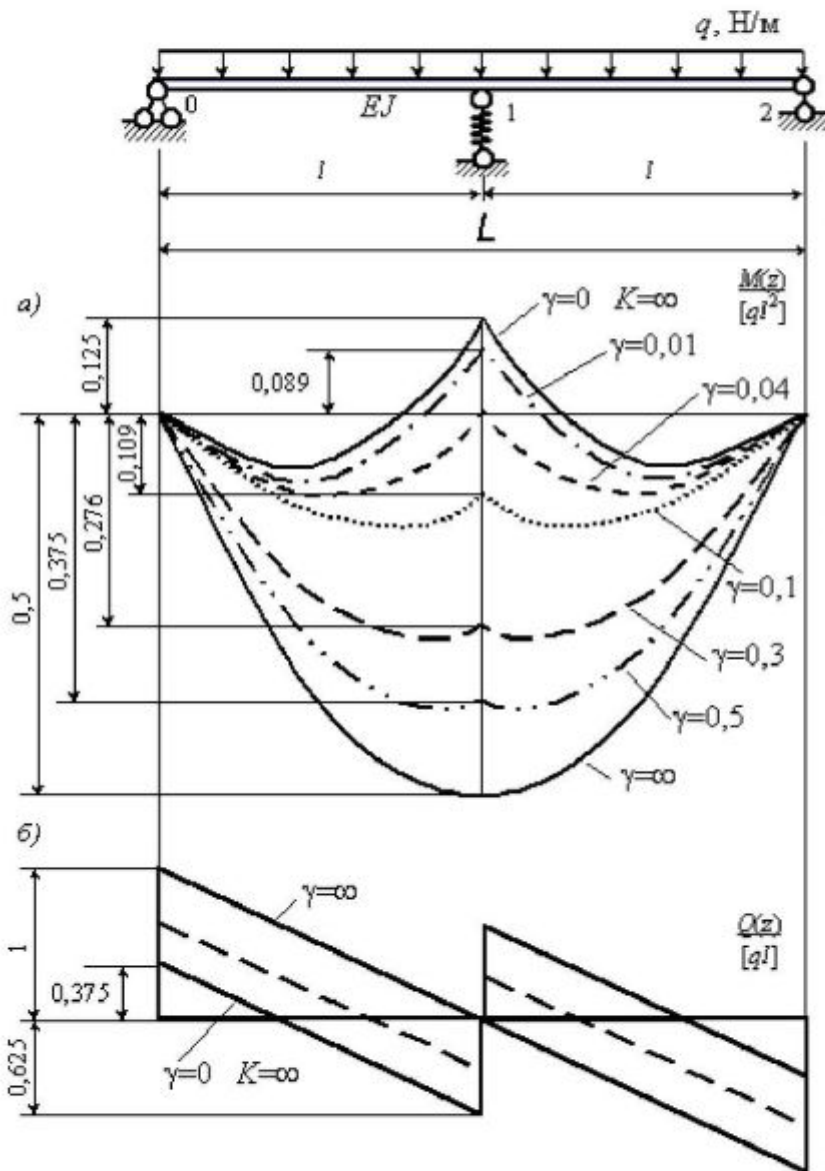
$$\delta_{11} = \frac{2l}{3EJ} + \frac{4C}{l^2}$$

Рис. 5.2. К расчету неразрезной балки с упруго податливой средней опорой: а – расчетная схема; б – основная система; в, г – определение единичного коэффициента; д, е – определение грузового коэффициента

Грузовой коэффициент Δ_{10} в каноническом уравнении определяем как сумму взаимных углов поворота смежных сечений над опорой 1 при загрузке основной системы внешней нагрузкой (рис. 5.2, д, е)

$$\Delta_{10} = (\Delta_{10})_{\text{узл}} + (\Delta_{10})_{\text{осада}} = 2 \int_0^l \frac{M_0(z) \bar{M}_1(z) dz}{EJ} - \frac{2y_q}{l} =$$

$$= 2 \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot l \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{EJ} \right) - \frac{2 \cdot ql \cdot C}{l} = \frac{ql^3}{12EJ} - 2qC.$$



Значение лишнего неизвестного в каноническом уравнении, учитывая полученные выражения для δ_{11} и Δ_{10} , будут определяться по формуле

$$X_1 = - \frac{\frac{ql^3}{12EJ} - 2qC}{\frac{2}{3} \frac{l}{EJ} + \frac{4C}{l^2}}$$

После упрощений получим

$$X_1 = \frac{\frac{ql^2}{8} \left(\frac{24EJC}{l^3} - 1 \right)}{1 + \frac{6EJC}{l^3}}$$

Обозначив безразмерный коэффициент

$$\frac{EJC}{l^3} = \gamma, \text{ запишем выражение } X_1$$

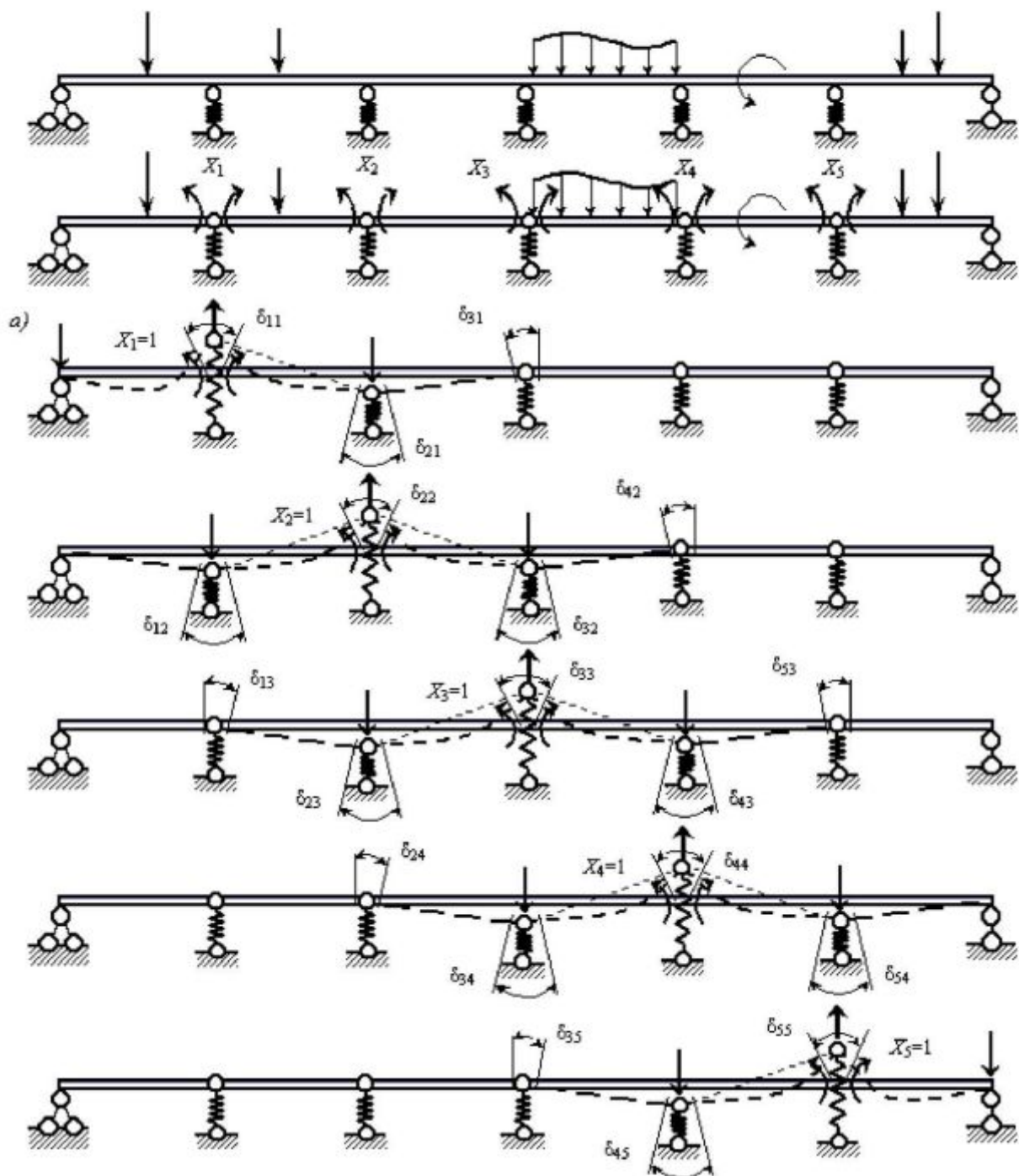
$$X_1 = \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{24\gamma - 1}{1 + 6\gamma}$$

Рис. 5.3. Эпюры внутренних усилий при различных значениях γ : а – $M(z)$; б – $Q(z)$

Эпюры M, Q при различных значениях параметра γ в рассматриваемом примере показаны на рис. 5.3.

При раскрытии статической неопределимости многопролетной неразрезной балки на упругоподатливых опорах за лишние неизвестные следует принимать опорные моменты. Таким приемом удастся сократить

количество неизвестных в одном уравнении при любой степени статической неопределимости до пяти (рис. 5.4).



6)

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 &+ \Delta_{10} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{24}X_4 &+ \Delta_{20} = 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 + \delta_{35}X_5 + \Delta_{30} &= 0 \\ \delta_{42}X_2 + \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 + \delta_{45}X_5 + \Delta_{40} &= 0 \\ \delta_{53}X_3 + \delta_{54}X_4 + \delta_{55}X_5 + \Delta_{50} &= 0 \end{aligned}$$

Рис. 5.4. Канонические уравнения: а – вспомогательные единичные состояния основной системы; б – система канонических уравнений

Уравнение по количеству связанных общей зависимостью неизвестных называется уравнением пяти моментов.

Приведем вычисление коэффициентов в 3-м полном уравнении пяти моментов, обозначив его n -м. Покажем перемещения на n -й опоре от действия моментов $X_{n-2}, X_{n-1}, X_n, X_{n+1}, X_{n+2}$ последовательно (рис. 5.5).

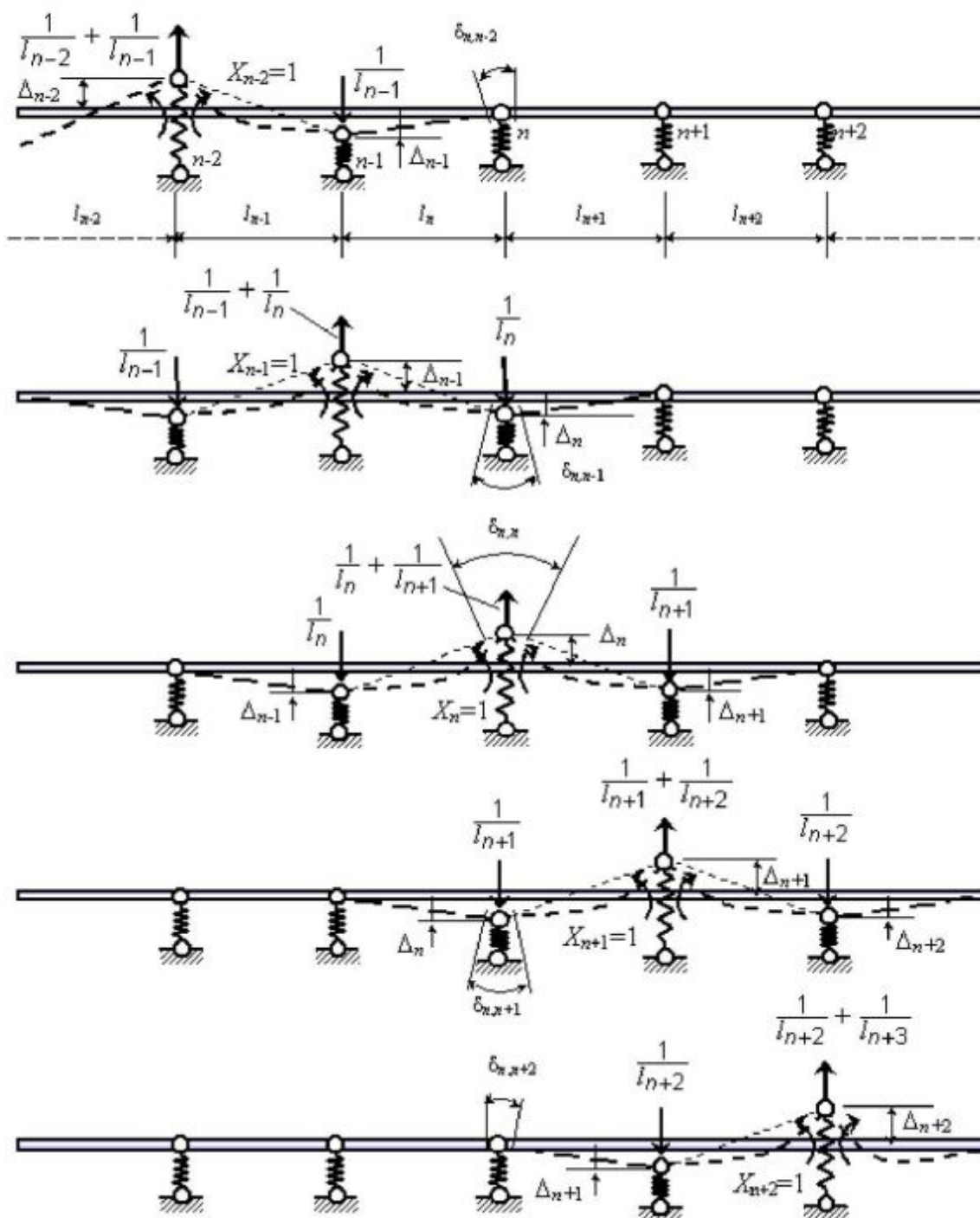


Рис. 5.5. Пример определения коэффициентов n -го уравнения

Коэффициент $\delta_{n,n-2}$ равен углу поворота стержня l_n вследствие осадки ($n-1$)-й опоры от силы $\left(\frac{1}{l_{n-1}}\right)$ во вспомогательном состоянии ($n-2$) (рис. 5.5):

$$\delta_{n,n-2} = \frac{1}{l_{n-1}} C_{n-1} \frac{1}{l_n} = \frac{C_{n-1}}{l_{n-1} l_n} \quad (5.3)$$

Значение коэффициента $\delta_{n,n-1}$ равно взаимному углу поворота сечений на n -й опоре в единичном вспомогательном состоянии ($n-1$) (рис. 5.5).

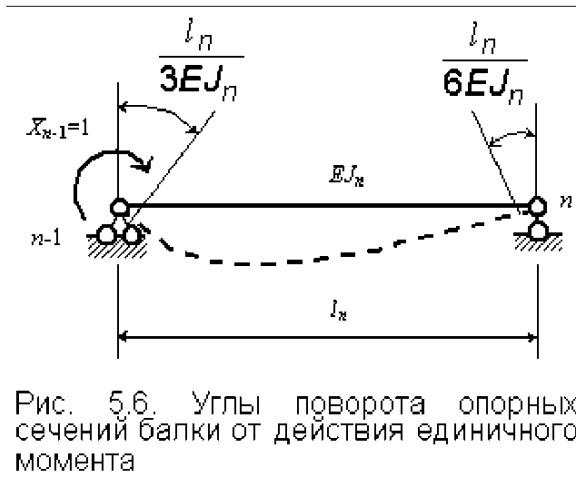


Рис. 5.6. Углы поворота опорных сечений балки от действия единичного момента

Этот угол поворота определяется величинами линейных перемещений упругой опоры ($n-1$) от силы $\left(\frac{1}{l_{n-1}} + \frac{1}{l_n}\right)$ и линейного перемещения упругой n -й опоры от силы $\left(\frac{1}{l_n}\right)$, а также углом поворота правого опорного сечения балки в пролете l_n при ее изгибе моментом $X_{n-1}=1$ (рис. 5.6).

Учитывая знаки углов поворота на n -й опоре, получим

$$\begin{aligned} \delta_{n,n-1} &= - \left[\left(\frac{1}{l_{n-1}} + \frac{1}{l_n} \right) \cdot C_{n-1} + \frac{1}{l_n} \cdot C_n \right] \frac{1}{l_n} - \frac{1}{l_n} \cdot C_n \frac{1}{l_{n+1}} + \frac{l_n}{6EJ_{n-1}} = \\ &= - \frac{C_{n-1}}{l_n} \left(\frac{1}{l_{n-1}} + \frac{1}{l_n} \right) - \frac{C_n}{l_n} \left(\frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_{n+1}} \right) + \frac{l_n}{6EJ_{n-1}}. \end{aligned}$$

Продолжая аналогичные рассуждения, при загрузении балки моментами

$X_n = 1, X_{n+1} = 1, X_{n+2} = 1$ запишем значения коэффициентов $\delta_{n,n}, \delta_{n,n+1}, \delta_{n,n+2}$

$$\begin{aligned} \delta_{n,n} &= - \left[\frac{1}{l_n} C_{n-1} + \left(\frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_{n+1}} \right) C_n \right] \frac{1}{l_n} + \frac{l_n}{3EJ_n} + \left[\left(\frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_{n+1}} \right) C_n + \frac{1}{l_{n+1}} C_{n+1} \right] \frac{1}{l_{n+3}} + \\ &+ \frac{l_{n+1}}{6EJ_{n+1}} = - \frac{C_{n-1}}{l_n^2} + C_n \left(\frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_{n+1}} \right)^2 + \frac{C_{n+1}}{l_{n+1}^2} + \frac{l_n}{3EJ_n} + \frac{l_{n+1}}{6EJ_{n+1}}; \end{aligned}$$

$$\delta_{n,n+1} = - \left[\frac{1}{l_{n+1}} C_n + \left(\frac{1}{l_{n+1}} + \frac{1}{l_{n+2}} \right) C_{n+1} \right] \frac{1}{l_{n+1}} + \frac{l_n}{6EJ_{n+1}} =$$

$$= - \frac{C_n}{l_{n+1}^2} + C_{n+1} \left(\frac{1}{l_{n+1}^2} + \frac{1}{l_{n+1}l_{n+2}} \right) + \frac{l_n}{6EJ_{n+1}};$$

$$\delta_{n,n+2} = \frac{1}{l_{n+1}} C_{n+1} \frac{1}{l_{n+2}} = \frac{C_{n+1}}{l_{n+1}l_{n+2}}.$$

Определим свободный член Δ_{n0} в n -м уравнении (рис. 5.7):

$$y_{n-1} = (R_{n-1}^{np} + R_n^{nes}) C_{n-1}, \quad y_n = (R_n^{np} + R_{n+1}^{nes}) C_n, \quad y_{n+1} = (R_{n+1}^{np} + R_{n+2}^{nes}) C_{n+1},$$

$$\Delta_{n0} = \psi_{n,y} + \psi_{n0} = - \frac{y_n - y_{n-1}}{l_n} - \frac{y_n - y_{n+1}}{l_{n+1}} + \sum \int_{l_n} \frac{M_0 \bar{M}_n dz}{EJ_n} + \sum \int_{l_{n+1}} \frac{M_0 \bar{M}_n dz}{EJ_{n+1}}$$

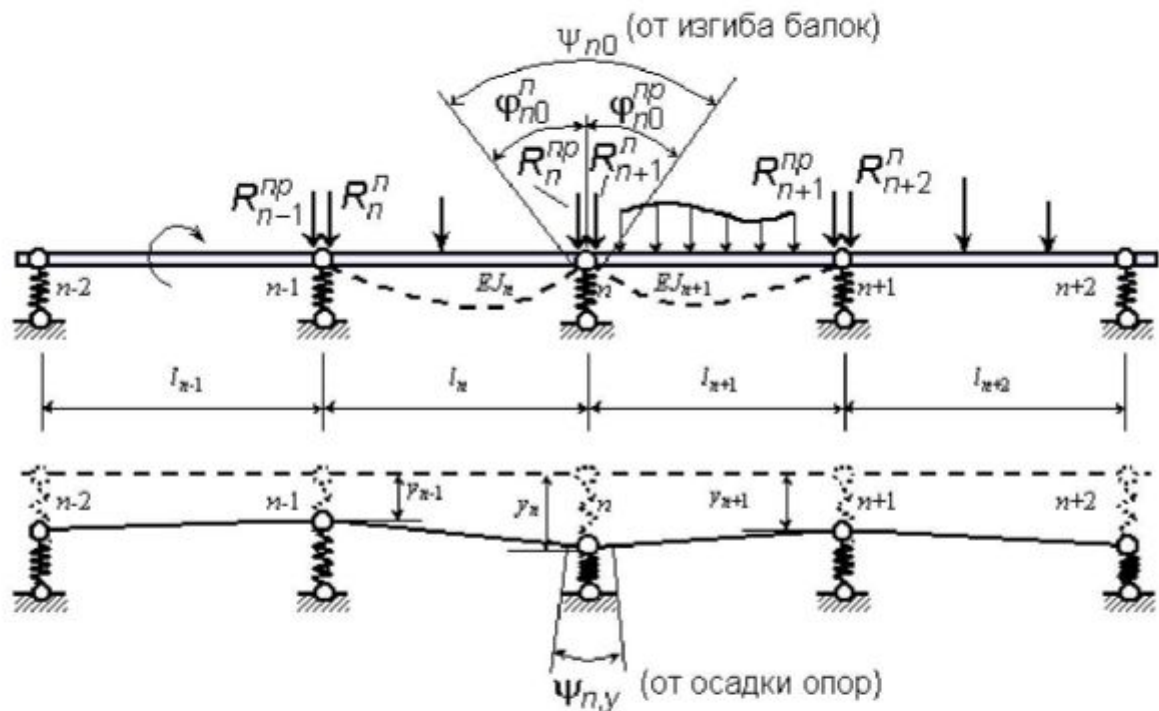


Рис. 5.7. Пример определения грузового коэффициента n -го уравнения

В приведенных формулах индекс u линейного смещения опоры соответствует номеру опоры, y опорной реакции – номеру пролета.

Пример 5.1. Построить эпюру M для неразрезной пятипролетной балки с равными пролетами при постоянном поперечном сечении на упругоподатливых промежуточных опорах с коэффициентом податливости

упругого основания C , м/Н. Балка нагружена равномерно распределенной нагрузкой q , Н/м по всей длине (рис. 5.8).

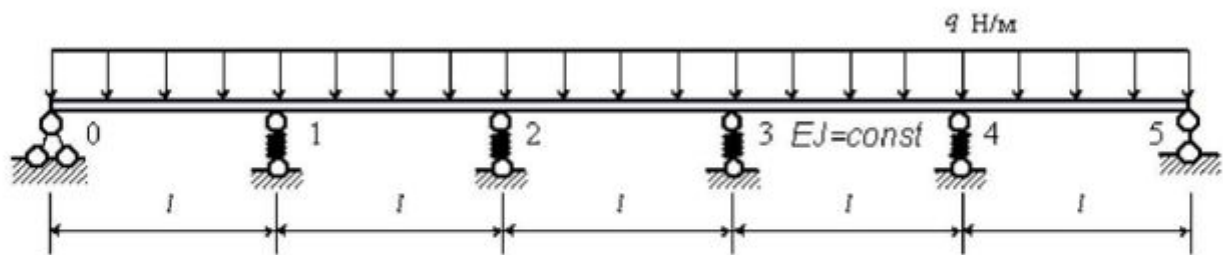


Рис. 5.8. Заданная схема к примеру 5.1

Для раскрытия статической неопределенности, используя симметрию балки, принимаем групповые неизвестные (рис. 5.9).

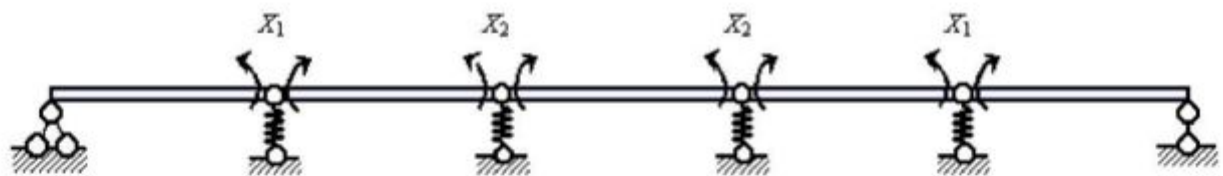


Рис. 5.9. Основная система

Деформации основной системы при перемещении опор и изгибе балок во вспомогательных состояниях (1), (2) от нагружения основной системы единичными значениями лишних неизвестных показаны на рис. 5.10.

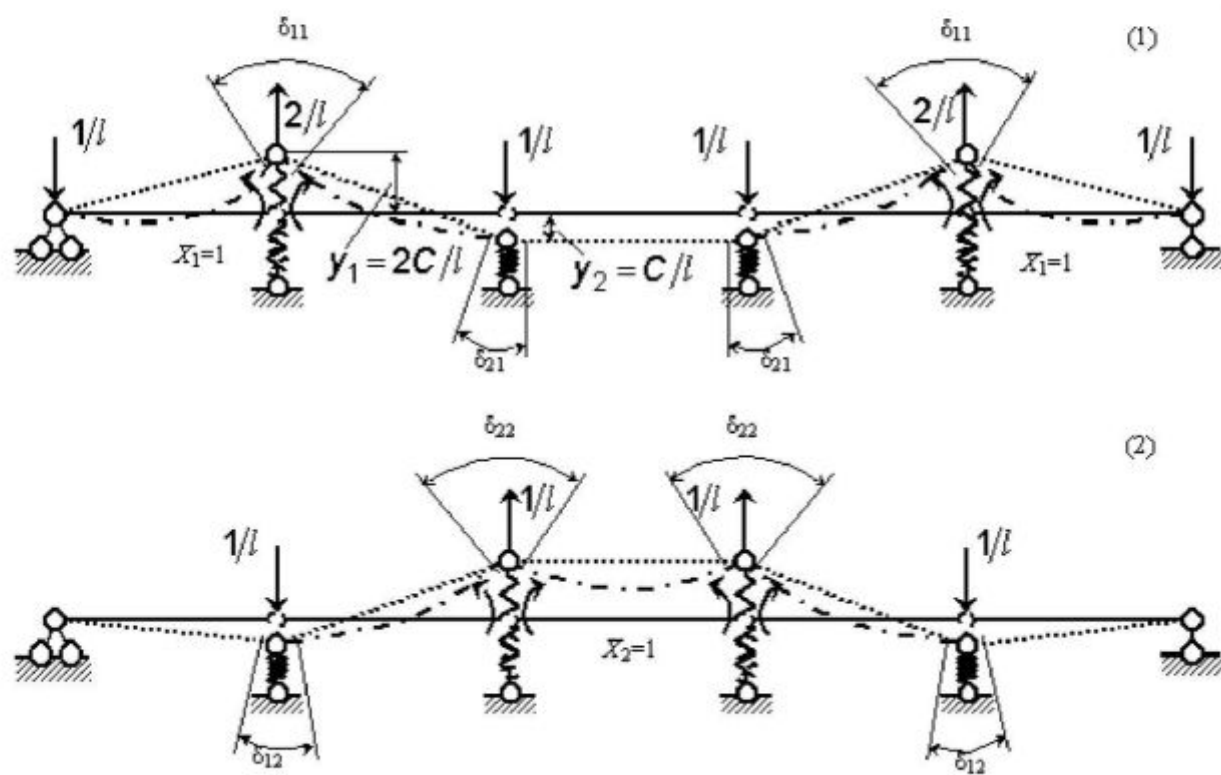


Рис. 5.10. К определению единичных коэффициентов

На рис. 5.11 показаны деформации основной системы от внешней нагрузки.

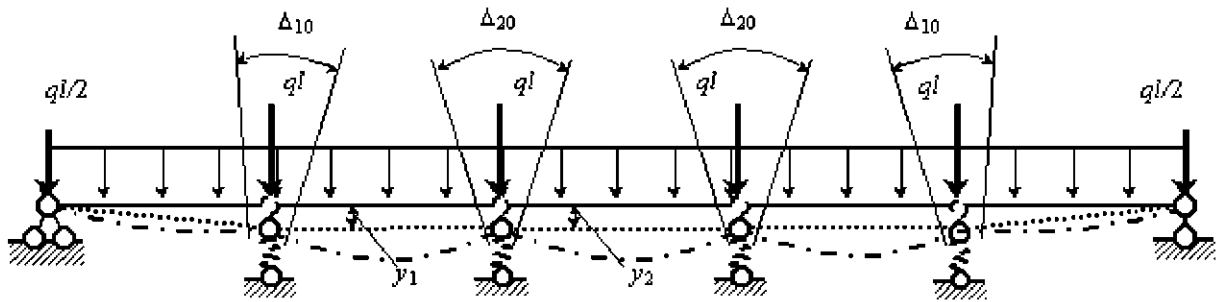
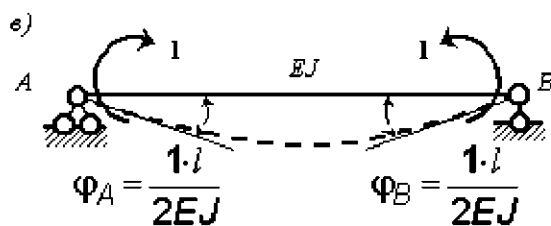
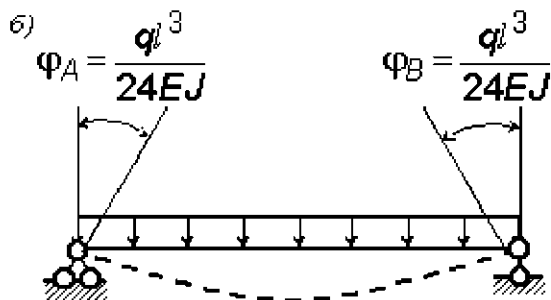
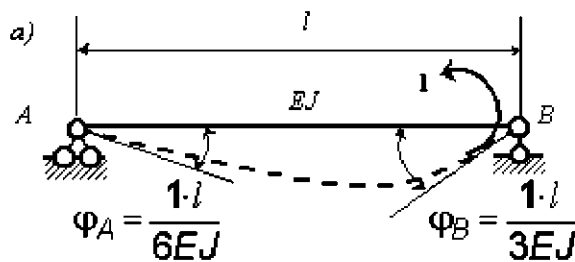


Рис. 5.11. К определению грузовых коэффициентов



Считая, что вертикальные перемещения опорных точек пропорциональны давлению на опору и ее податливости $y_i = F_i C$, и принимая углы поворота концевых сечений двухопорной балки при загрузении опорным моментом и равномерной нагрузкой по рис. 5.12, запишем значения единичных коэффициентов канонических уравнений:

$$\delta_{11} = \frac{5C}{l^2} + \frac{2}{3} \frac{l}{EJ};$$

$$\delta_{21} = \delta_{12} = -\frac{3C}{l^2} + \frac{l}{6EJ};$$

$$\delta_{22} = \frac{2C}{l^2} + \frac{5}{6} \frac{l}{EJ}.$$

Свободные члены:

$$\Delta_{10} = -\frac{qlC}{l} + 2 \frac{ql^3}{24EJ} = -qC + \frac{ql^3}{12EJ};$$

$$\Delta_{20} = 2 \frac{ql^3}{24EJ} = \frac{ql^3}{12EJ}.$$

Рис. 5.12. Углы поворота опорных сечений балки от действия: а — единичного момента; б — равномерно распределенной нагрузки; в — одновременного действия единичных моментов

С учетом полученных значений δ_{11} , δ_{12} , δ_{21} , δ_{22} , Δ_{10} , Δ_{20} канонические уравнения примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{5C}{l^2} + \frac{2l}{3EJ}\right)X_1 + \left(-\frac{3C}{l^2} + \frac{l}{6EJ}\right)X_2 &= -\left(\frac{ql^3}{12EJ} - qC\right); \\ \left(\frac{3C}{l^2} + \frac{l}{6EJ}\right)X_1 + \left(\frac{2C}{l^2} + \frac{5l}{6EJ}\right)X_2 &= -\frac{ql^3}{12EJ}. \end{aligned} \right\}$$

Умножив все члены каждого уравнения на $\frac{12EJ}{l}$ и заменив $\frac{EJC}{l^3} = \bar{\gamma}$, получим

$$\left. \begin{aligned} (8 + 60\bar{\gamma})X_1 + (2 - 36\bar{\gamma})X_2 &= -(1 - 12\bar{\gamma})ql^2; \\ (2 - 36\bar{\gamma})X_1 + (10 + 24\bar{\gamma})X_2 &= -ql^2. \end{aligned} \right\}$$

Корни этих уравнений определим при разных значениях $\bar{\gamma}$:

- $\bar{\gamma} = 0$, при этом все опоры рассматриваемой неразрезной балки опираются на жесткое основание. Опорные моменты X_1, X_2 из решения уравнений получим $X_1 = -0,1053ql^2, X_2 = -0,0789ql^2$;
- $\bar{\gamma} = \infty, X_1 = 2ql^2, X_2 = 3ql^2$, что соответствует изгибающим моментам в двухопорной балке пролетом $L = 5l$ без промежуточных опор.

На рис. 5.13 приведены эпюры $M_{изг}$ в балке при значениях $\bar{\gamma} = 0; 1; 3; 10; \infty$, наглядно иллюстрирующие влияние податливости основания промежуточных опор на изгибающие моменты в ее сечениях.

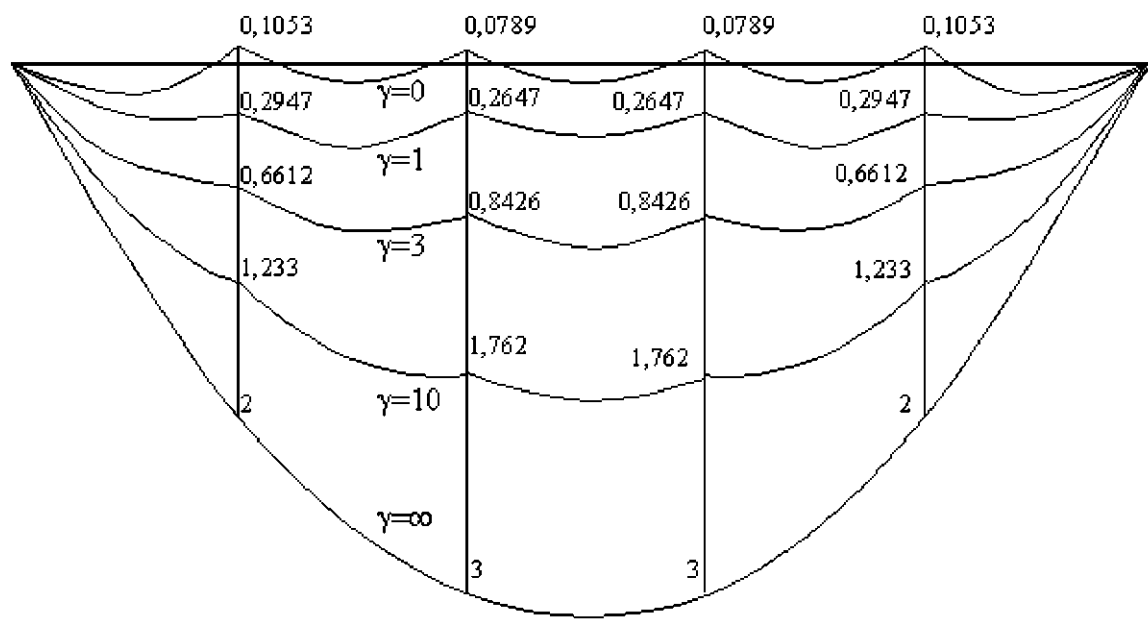


Рис. 5.13. Эпюры изгибающих моментов при различных значениях γ (ординаты эпюр имеют множитель ql^2)

6. Построение объемлющих эпюр изгибающих моментов M и перерезывающих сил Q

Если неразрезная балка, кроме постоянной нагрузки, загружается временной нагрузкой по различным пролетам, которая может присутствовать при различных возможных сочетаниях или сниматься с того или иного пролета, то необходимо определить такие схемы загрузки, при которых в сечениях балки возникают наибольший и наименьший изгибающий момент, наибольшая и наименьшая перерезывающая сила, и вычислить их значения.

Рассмотрим четырехпролетную неразрезную балку, нагруженную постоянной (рис. 6.1, а) и временной нагрузкой по схеме, приведенной на рис. 6.1, б.

Временная нагрузка на каждом пролете занимает одно определенное положение в пределах пролета, но может быть снята с него или оставлена.

Эпюра изгибающих моментов от постоянной нагрузки приведена на рис. 6.1, в. На рис. 6.1, г, д, е, ж приведены эпюры изгибающих моментов от последовательного нагружения каждого отдельного пролета временной нагрузкой.

Поскольку для построения эпюр изгибающих моментов необходимо несколько раз раскрывать статическую неопределимость балки, то рациональнее пользоваться для решения этой задачи матричным алгоритмом метода сил или метода перемещений. При этом формирование единичной и грузовой матриц предпочтительнее с использованием метода перемещений, так как при этом элементы матриц могут быть взяты из таблиц реакций статически неопределимой однопролетной балки с различными граничными условиями при разнообразных нагружениях.

Для вычисления ординат объемлющей эпюры изгибающих моментов M_{\max} необходимо сложить момент в сечении балки от постоянной нагрузки с положительными значениями моментов в этом сечении от временной нагрузки. При определении M_{\min} к ординатам эпюры моментов от постоянной нагрузки в рассматриваемом сечении прибавляются только отрицательные значения моментов от временной нагрузки в этом сечении:

$$M_{\max}^k = M_{\text{пост}}^k + \sum (+M_{\text{врем}}^k);$$

$$M_{\min}^k = M_{\text{пост}}^k + \sum (-M_{\text{врем}}^k).$$

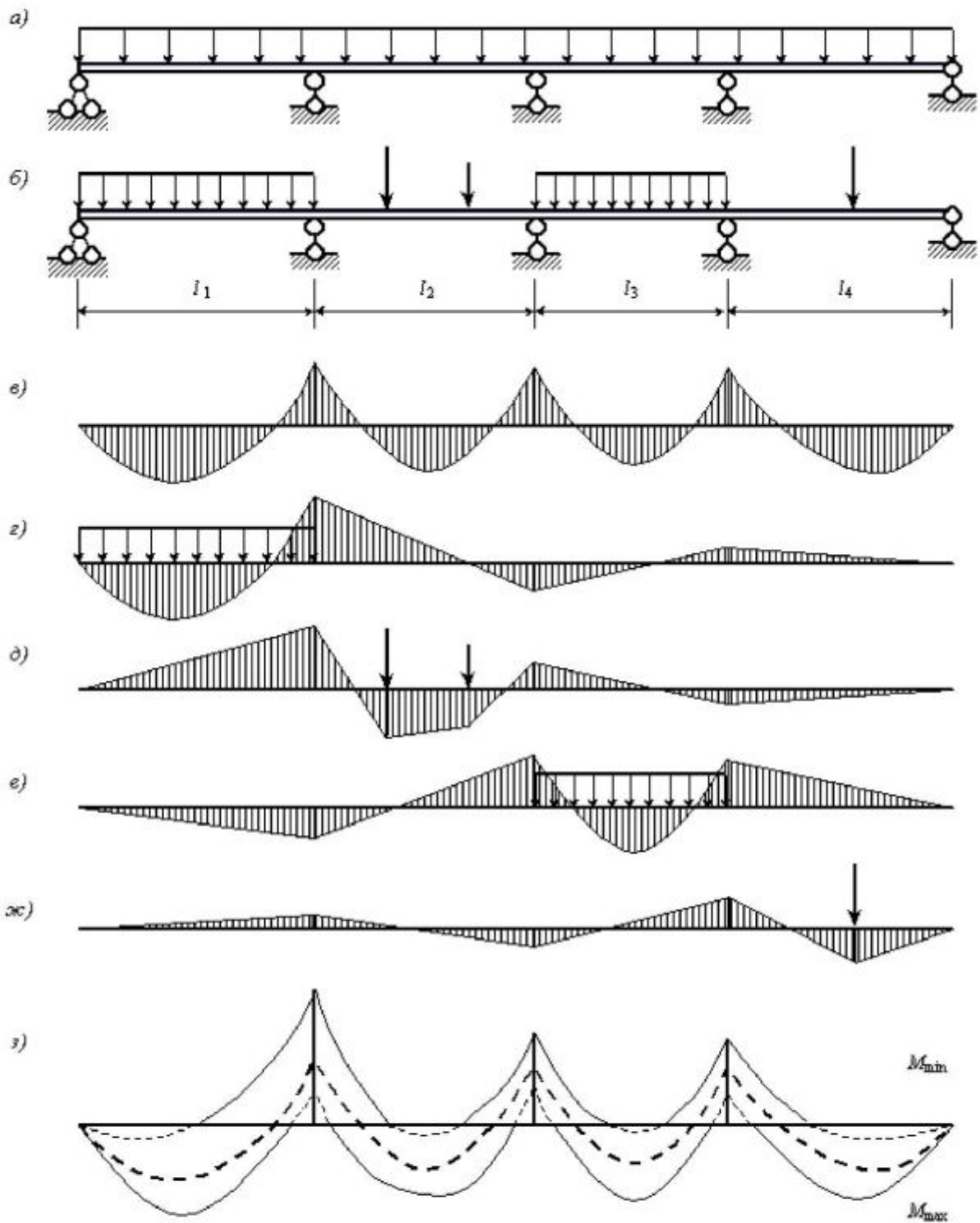


Рис. 6.1. Построение объемлющей эпюры: а – схема балки с постоянной нагрузкой; б – временные нагрузки; в – эпюра изгибающих моментов от постоянной нагрузки; г, д, е, ж – эпюры изгибающих моментов от загрузки пролетов временными нагрузками; з – объемлющая эпюра

Выполнив эти операции для нескольких сечений в каждом пролете балки (например, с интервалом $0,25l$), получим объемлющую эпюру изгибающих моментов для M_{max} , M_{min} (рис. 6.1, з). Эти эпюры используются при определении нормальных напряжений, подборе сечения балки. В

железобетонных конструкциях объемлющая эпюра моментов позволяет определить необходимое сечение рабочей арматуры и зоны ее расположения для восприятия растягивающих напряжений в сечениях балки.

Построение объемлющей эпюры перерезывающих сил в неразрезной балке выполняется в такой же последовательности, как и объемлющей эпюры изгибающих моментов:

$$Q_{\max}^k = Q_{\text{пост}}^k + \sum(+Q_{\text{врем}}^k);$$

$$Q_{\min}^k = Q_{\text{пост}}^k + \sum(-Q_{\text{врем}}^k).$$

На рис. 6.2 показано построение объемлющей эпюры Q в пределах второго и третьего пролетов неразрезной балки, изображенной на рис. 6.1, а, от показанных там постоянной и временных нагрузок. Поскольку эпюры Q при всех приведенных загрузениях являются линейными, то достаточно определить ординаты объемлющей эпюры Q только в опорных сечениях и в местах приложения сосредоточенных сил. Так, для второго пролета к эпюре Q от постоянной нагрузки прибавляем постоянные в пределах всего второго пролета эпюры $Q_{\text{врем}}$ с положительными ординатами C_1, C_4 и вычитаем отрицательные по всему пролету значения $Q_{\text{врем}}$ (C_3), а затем к полученному результату добавляем два положительных участка с ординатами C_2^I и C_2^{II} эпюры $Q_{\text{врем}}$ от загрузки временной нагрузкой второго пролета. Отрицательный участок этой эпюры C_2^{III} добавляем к полученному отрицательному значению перерезывающей силы на участке, примыкающем слева ко второй опоре.

Построение объемлющей эпюры Q в пределах третьего пролета выполняем по этой же схеме. Результат приведен на рис. 6.2.

Объемлющие эпюры перерезывающих сил используются для вычисления касательных и главных напряжений в сечениях, для подбора сечения поперечной арматуры в железобетонных балках в зонах, примыкающих к опорам.

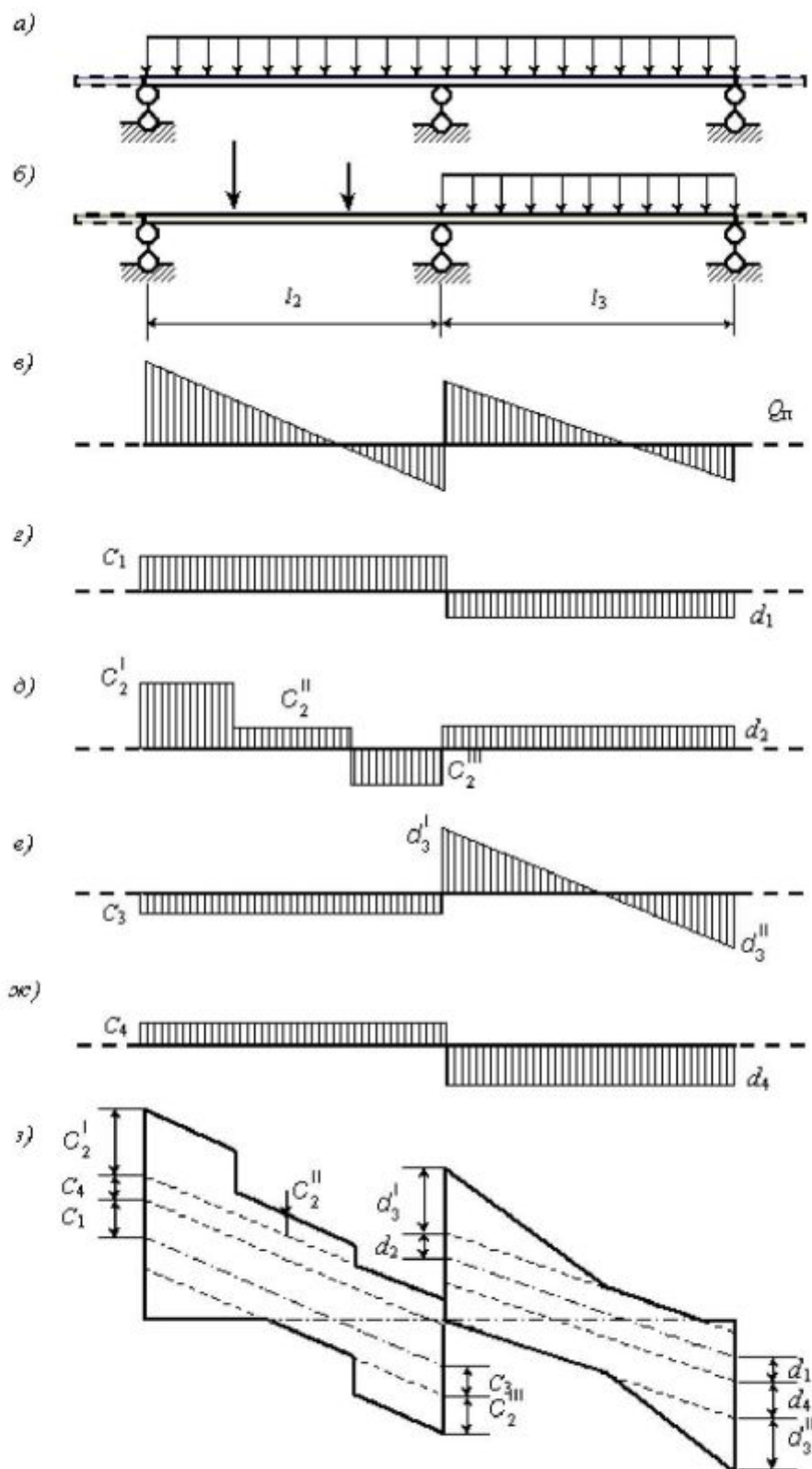


Рис. 6.2. Построение объемлющей эпюры Q : а, б – загрузка пролетов постоянной и временной нагрузками; в – эпюра Q от постоянной нагрузки; г, д, е, ж – эпюра Q от заграждения временной нагрузкой первого, второго, третьего и четвертого пролетов; з – объемлющая эпюра Q

7. Расчет неразрезных балок на подвижную нагрузку

7.1. Алгоритм расчета

Неразрезные балочные конструкции мостов, перекрытий промышленных зданий и других сооружений подвергаются воздействию различных подвижных нагрузок. При оценке влияния подвижной нагрузки на несущую конструкцию необходимо определить такое положение нагрузки на сооружении, при котором возникает экстремальное усилие в рассматриваемом сечении, и вычислить значение максимального усилия, соответствующего этому загрузению.

Эти задачи решаются с использованием линий влияния исследуемых параметров напряженно-деформированного состояния в сечениях балки. Любое усилие в сечениях неразрезной балки может быть вычислено после раскрытия статической неопределенности ее расчетной схемы.

Для n раз статически неопределимой балки необходимо для построения линий влияния лишних неизвестных раскрыть статическую неопределенность при последовательном загрузении единичной подвижной силой всех пролетов. При этом положение единичной силы рассматривается на границах участков, на которые предварительно разделяют каждый пролет балки. В этом случае желательно пользоваться матричной формой записи разрешающих уравнений и вычислять ординаты линий влияния определяемых усилий при последовательном расположении единичной подвижной силы в каждой точке по пути ее движения. Разбивку балки необходимо делать на участки равной длины в пределах каждого пролета.

Матрицу влияния лишних неизвестных получим решением уравнения

$$\delta_1 X + \delta_0 = 0, \quad (7.1)$$

где δ_0 – прямоугольная матрица грузовых коэффициентов, число строк которой равно степени статической неопределенности балки n , число столбцов – количеству фиксированных позиций подвижного груза при движении по всей балке, равному числу сечений k ; δ_1 – симметричная квадратная матрица единичных коэффициентов, размером $n \times n$. Элементы матриц перемещений δ_1 , δ_0 определяются, как показано в подразд. 2.3.

Матрица влияния лишних неизвестных L_X размером $n \times k$ определяется по выражению

$$L_X = \delta_1^{-1} \delta_0. \quad (7.2)$$

Матрицу влияния усилий L_S получим, выполняя операции по алгоритму

$$|L_S = L_{S_0} + \delta_1 L_X| \quad (7.3)$$

где L_{S_0} – матрица влияния усилий в статически определимой основной системе.

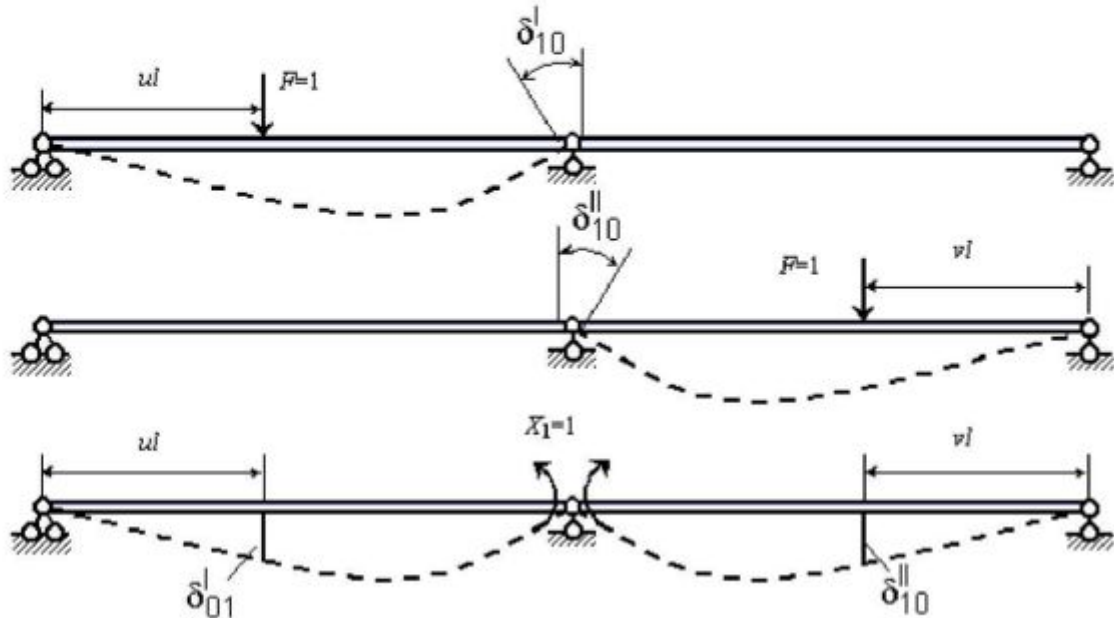


Рис. 7.1. Применение теоремы о взаимности перемещений к определению грузовых коэффициентов

Элементы матрицы грузовых коэффициентов при расчете неразрезной балки проще определять как ординаты эпюры прогибов в двухопорной балке, нагруженной опорным моментом $X_i = 1$ (рис. 7.1). Это следует из теоремы о взаимности перемещений $\delta_{01} = \delta_{10}$.

7.2. Примеры построения линий влияния усилий в неразрезных балках.

[Пример 7.1.](#)

[Пример 7.2.](#)

Пример 7.1. Требуется для один раз статически неопределимой двухпролетной балки построить линии влияния $M_2, M_7, Q_2, Q_7, R_A, R_B$ (рис. 7.2).

Решение.

Каноническое уравнение для раскрытия статической неопределимости имеет вид

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{10} = 0,$$

из которого

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}$$

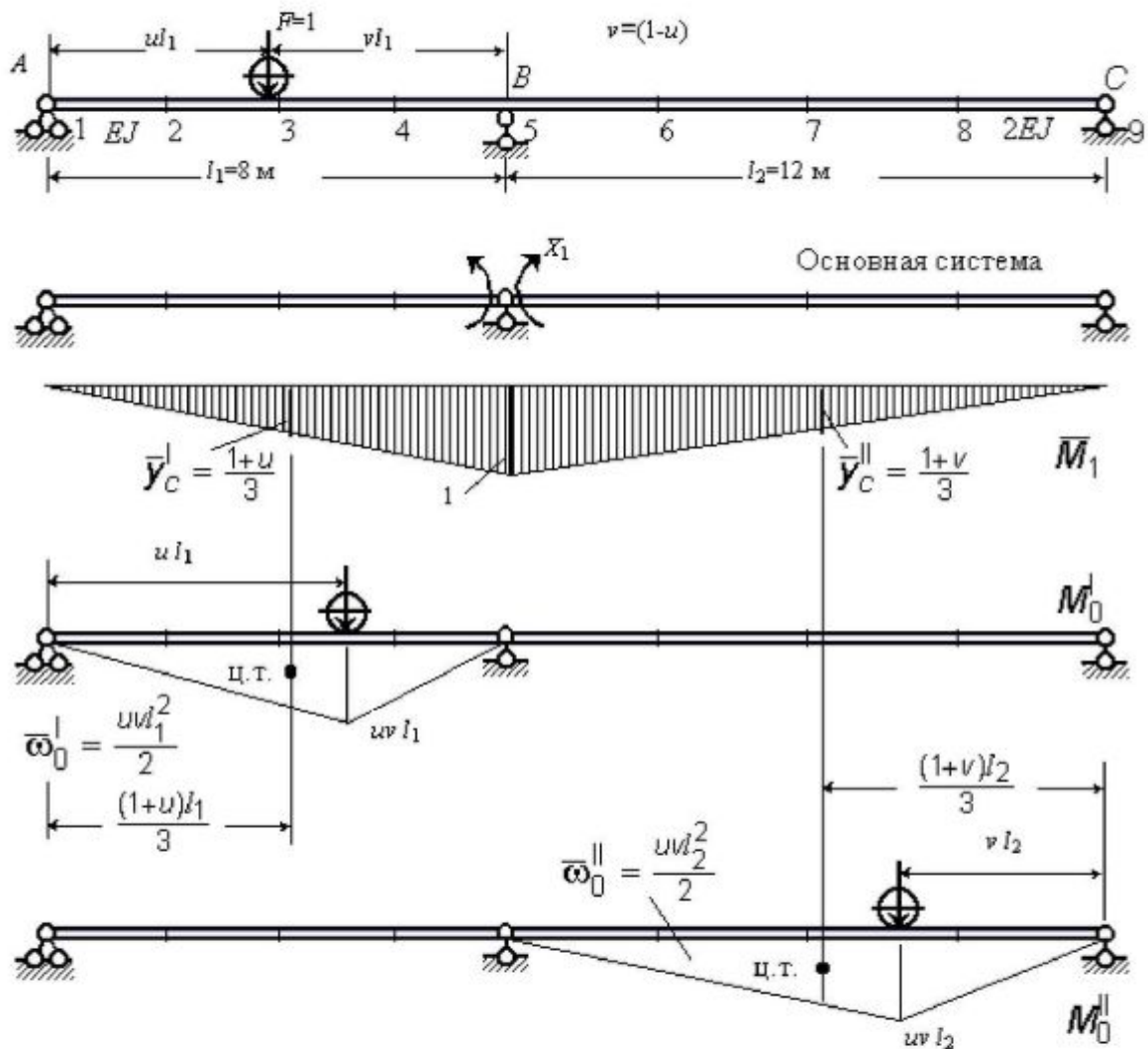


Рис. 7.2. К построению линии влияния X_1

Единичный коэффициент δ_{11} вычисляем перемножением эпюры $\bar{M}_1(z)$ на $\bar{M}_1(z)$ по правилу Верещагина (рис. 7.3)

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1(z) \bar{M}_1(z) dz}{EJ} = \frac{\bar{\omega}_1 \bar{y}_c^I}{EJ_1} + \frac{\bar{\omega}_2 \bar{y}_c^{II}}{EJ_2} = \frac{8}{3EJ} + \frac{12}{3 \cdot 2EJ} = \frac{4,667}{EJ}$$

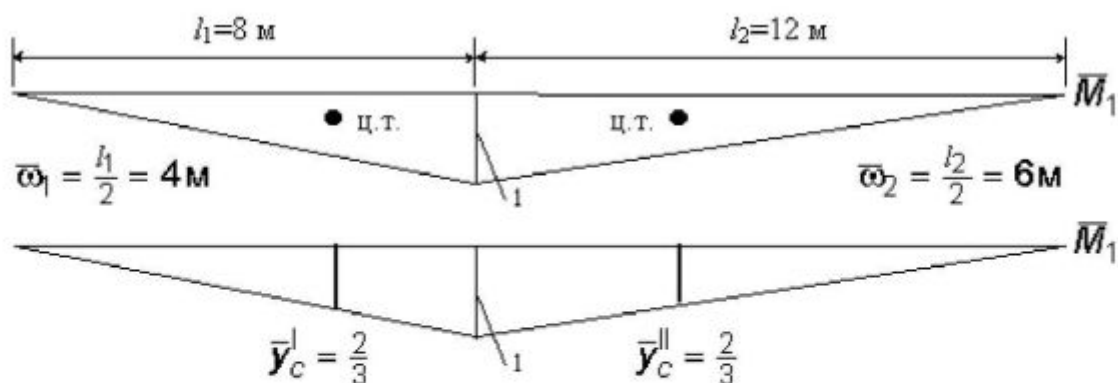


Рис. 7.3. К определению коэффициента δ_{11}

Грузовой коэффициент δ_{10} определяем перемножением эюр \bar{M}_1 и M_0 при положении подвижного груза на первом и втором пролетах балки (см. рис. 7.2). Если груз $F = 1$ находится на первом пролете, то при $l_1=8$ м $EJ_1=EJ$

$$\delta_{10}^I = \sum \int \frac{M_0^I \bar{M}_1 dz}{EJ_1} = \omega_0^I y_c^I \frac{1}{EJ_1} = \frac{uvl_1^2}{2} \cdot \frac{1+u}{3} \cdot \frac{1}{EJ} = \frac{32uv(1+u)}{3EJ} \quad (7.4)$$

При положении единичного груза на втором пролете ($l_2=12$ м, $EJ_2=2EJ$)

$$\delta_{10}^{II} = \sum \int \frac{M_0^{II} \bar{M}_1 dz}{EJ_2} = \omega_0^{II} y_c^{II} \frac{1}{EJ_2} = \frac{uvl_2^2}{2} \cdot \frac{1+v}{3} \cdot \frac{1}{2EJ} = \frac{12uv(1+v)}{EJ} \quad (7.5)$$

Вычисление грузовых коэффициентов при различных положениях подвижного груза приведено в табл. 7.1. Там же определены ординаты линии влияния X_1 (изгибающего момента в сечении 5 над промежуточной опорой).

Линия влияния X_1 приведена на рис.7.4.

Таблица 7.1

Вычисление ординат линии влияния опорного момента в сечении 5

Позиция груза	Сечение	u	v	$\frac{uv(1+u)}{6}$	$\frac{uv(1+v)}{6}$	$EJ \delta_{10}$	$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}$
Груз на 1-м пролете	1	0	1	0	0	0	0
	2	0,25	0,75	0,0391	—	2,5	-0,537
	3	0,5	0,5	0,0625	—	4	-0,857
	4	0,75	0,25	0,0547	—	3,5	-0,75
	5	1	0	0	0	0	0

Груз на 2-м пролете	6	0,25	0,75	–	0,0547	3,938	-0,844
	7	0,5	0,5	–	0,0625	4,5	-0,964
	8	0,75	0,25	–	0,0391	2,812	-0,602
	9	1	0	0	0	0	0

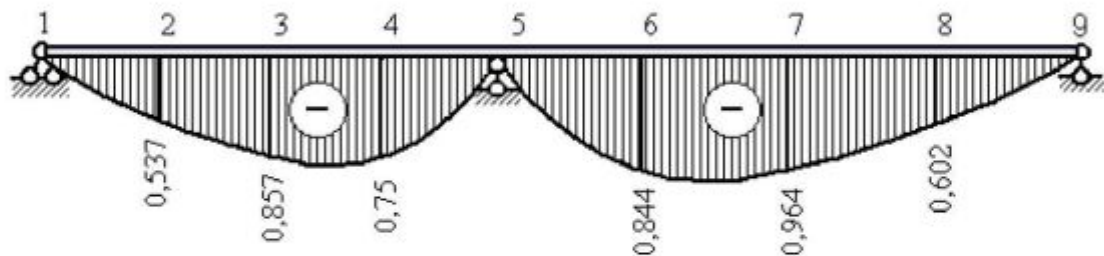


Рис. 7.4. Линия влияния X_1

Для построения линий влияния M_2 , M_7 воспользуемся уравнением

$$\text{л.вл. } M_k = \text{л.вл. } M_k^0 + \overline{M}_k \text{ л.вл. } X_1, \quad (7.6)$$

Здесь \overline{M}_k – величина изгибающего момента в сечении k от $X_1=1$.

Так, для сечения 2 л.вл. $M_2 = \text{л.вл. } M_2^0 + 0,25 \text{ л.вл. } X_1$, для сечения 7 л.вл. $M_7 = \text{л.вл. } M_7^0 + 0,5 \text{ л.вл. } X_1$ (рис. 7.5).

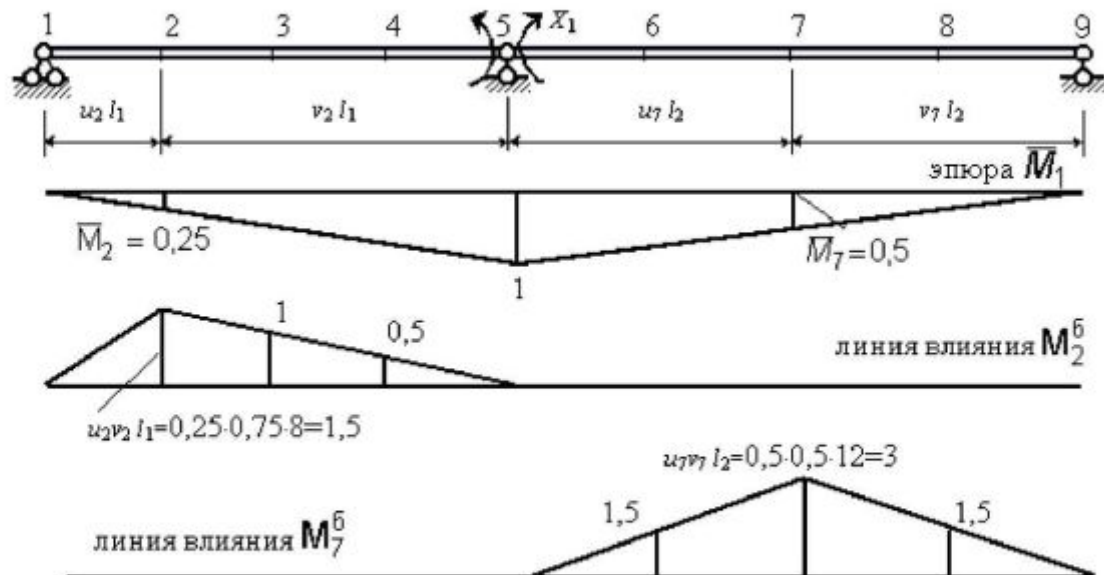


Рис. 7.5. К построению линий влияния изгибающих моментов M_2 и M_7

Вычисление координат линии влияния M_2 и M_7 приведено в табл. 7.2. На рис. 7.6 изображены полученные линии влияния M_2 , M_7 .

Вычисление ординат линий влияния моментов в сечениях 2, 7

Позиция груза	Сечение	сеч.2 $\bar{M}_2 = 0,25$			сеч.7 $\bar{M}_7 = 0,5$		
		л.вл. M_2^0	0,25 л.вл. X_1	л.вл. M_2	л.вл. M_7^0	0,5 л.вл. X_1	л.вл. M_7
Груз на 1-м пролете	1	0	0	0	0	0	0
	2	1,5	-0,134	1,366	0	-0,268	-0,268
	3	1,0	-0,214	0,786	0	-0,428	-0,428
	4	0,5	-0,187	0,313	0	-0,375	-0,375
	5	0	0	0	0	0	0
Груз на 2-м пролете	6	0	-0,211	-0,211	1,5	-0,422	1,078
	7	0	-0,241	-0,241	3,0	-0,482	2,518
	8	0	-0,150	-0,150	1,5	-0,300	1,200
	9	0	0	0	0	0	0

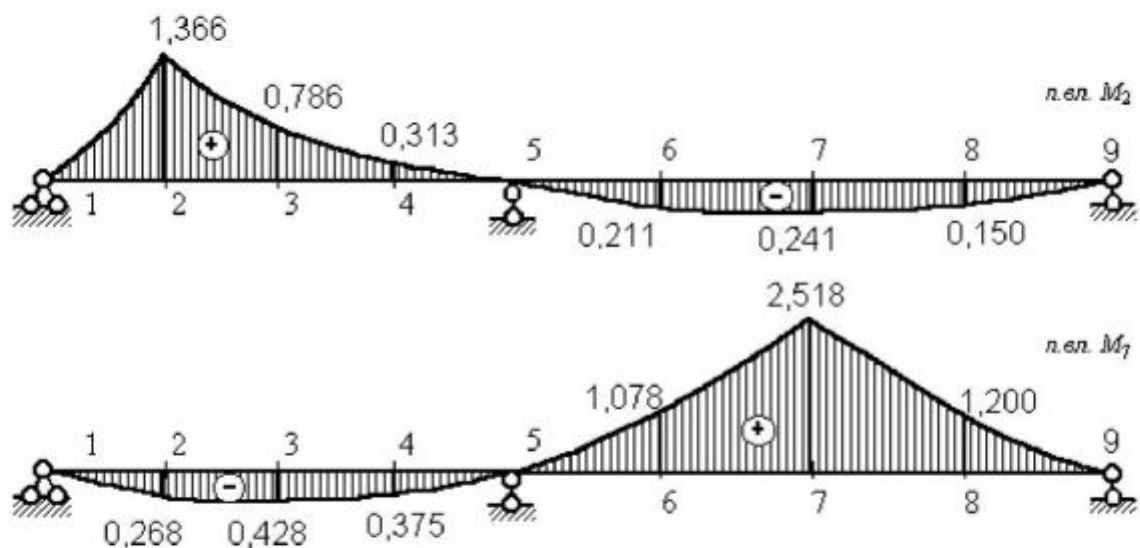


Рис. 7.6. Линии влияния M_2 и M_7

Построение линии влияния Q_k . Ординаты линии влияния перерезывающей силы в любом сечении один раз статически неопределимой балки вычисляются по формуле

$$\text{л.вл. } Q_k = \text{л.вл. } Q_k^0 + \bar{Q}_k \text{ л.вл. } X_1, \quad (7.7)$$

Здесь \bar{Q}_k – значение перерезывающей силы в сечении k основной системы от $X_1=1$; л.вл. Q_k^b – линия влияния перерезывающей силы для сечения k в основной системе (например, для сечения 2, 7 – рис. 7.7).

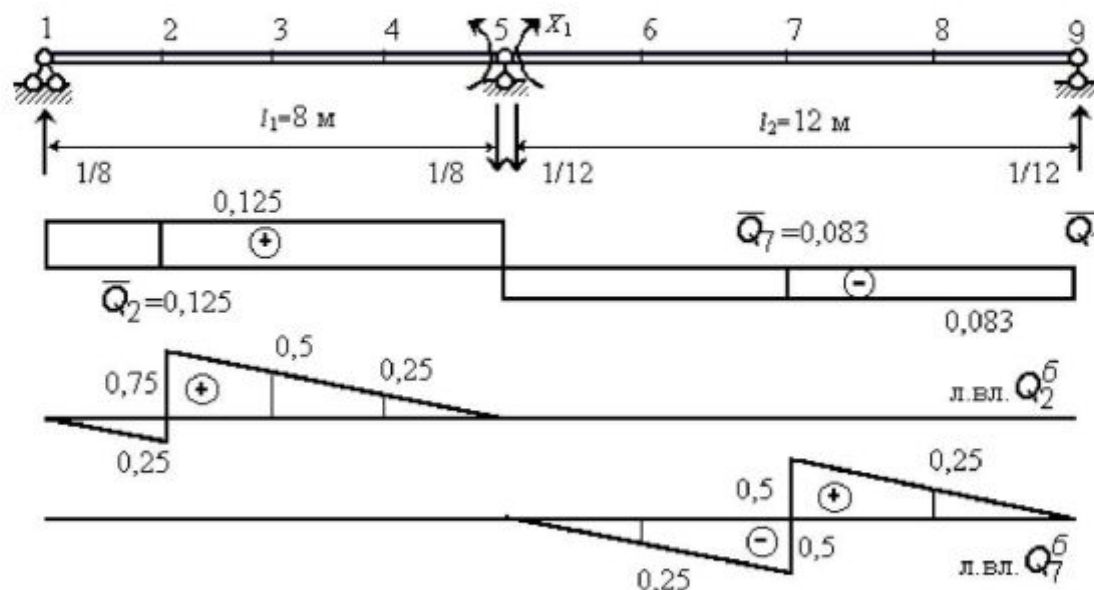


Рис. 7.7. Эпюра \bar{Q}_1 и линии влияния Q_2^b, Q_7^b

Вычисления ординат линий влияния Q_2 и Q_7 приведены в табл. 7.3. Полученные линии влияния показаны на рис. 7.8.

Таблица 7.3

Вычисление ординат линий влияния перерезывающих сил в сечениях 2, 7

Позиция груза	Сечение	сеч.2 $\bar{Q}_2 = 0,125$			сеч.7 $\bar{Q}_7 = -0,083$		
		л.вл. Q_2^b	0,125 л.вл. X_1	л.вл. Q_2	л.вл. Q_7^b	-0,083 л.вл. X_1	л.вл. Q_7
Груз на 1-м пролете	1	0	0	0	0	0	0
	2	$\frac{-0,25}{0,75}$	-0,067	$\frac{-0,317}{0,683}$	0	0,045	0,045
	3	0,5	-0,109	0,391	0	0,071	0,071
	4	0,25	-0,094	0,156	0	0,062	0,062
Груз на 2-м пролете	5	0	0	0	0	0	0
	6	0	-0,106	-0,106	-0,25	0,07	-0,18
	7	0	-0,120	-0,120	$\frac{-0,5}{0,5}$	0,08	$\frac{-0,42}{0,58}$

	8	0	-0,075	-0,075	0,25	0,05	0,3
	9	0	0	0	0	0	0

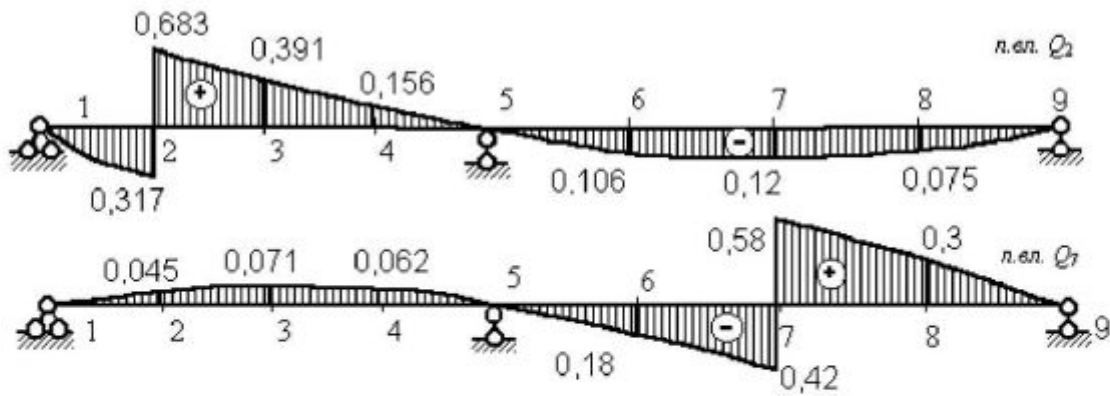


Рис. 7.8. Линии влияния Q_2 и Q_7

Построение линий влияния опорных реакций R_1, R_5 . Ординаты линий влияния опорных реакций для статически неопределимой балки вычисляются по уравнению

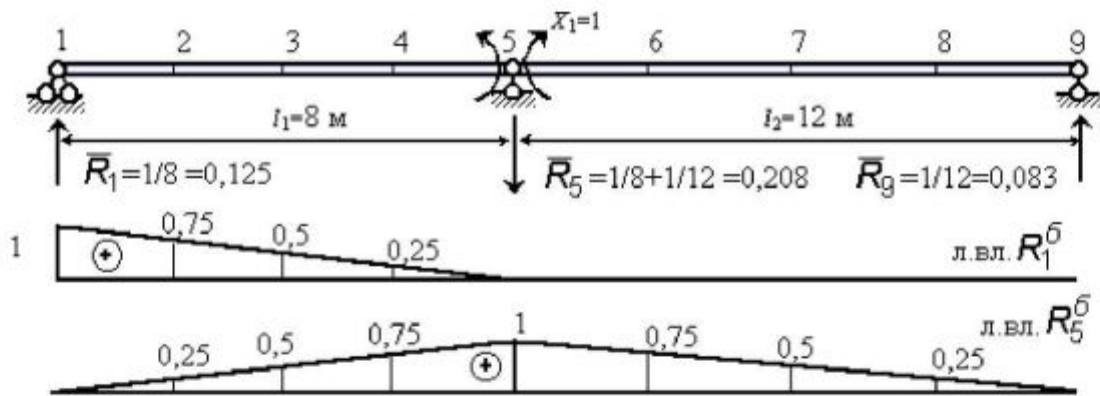


Рис. 7.9. Значения \bar{R}_i и линии влияния R_1^0, R_5^0

Вычисление ординат линий влияния R_1, R_5 для рассматриваемого примера приведены в табл. 7.4. Полученные линии влияния R_1, R_5 показаны на рис. 7.10.

Таблица 7.4

Вычисление ординат линий влияния реакций опор 1, 5

Позиция груза	Сечение	л.вл. R_1^0	0,125 л.вл. X_1	л.вл. R_1	л.вл. R_5^0	-0,208 л.вл. X_1	л.вл. R_5
Груз на	1	1	0	1	0	0	0

пролете	2	0,75	-0,067	0,683	0,25	0,112	0,362
	3	0,5	-0,109	0,391	0,5	0,177	0,577
	4	0,25	-0,094	0,156	0,75	0,156	0,906
	5	0	0	0	1	0	1
Груз на 2-м пролете	6	0	-0,106	-0,106	0,75	0,176	0,926
	7	0	-0,120	-0,120	0,5	0,2	0,7
	8	0	-0,075	-0,075	0,25	0,081	0,331
	9	0	0	0	0	0	0

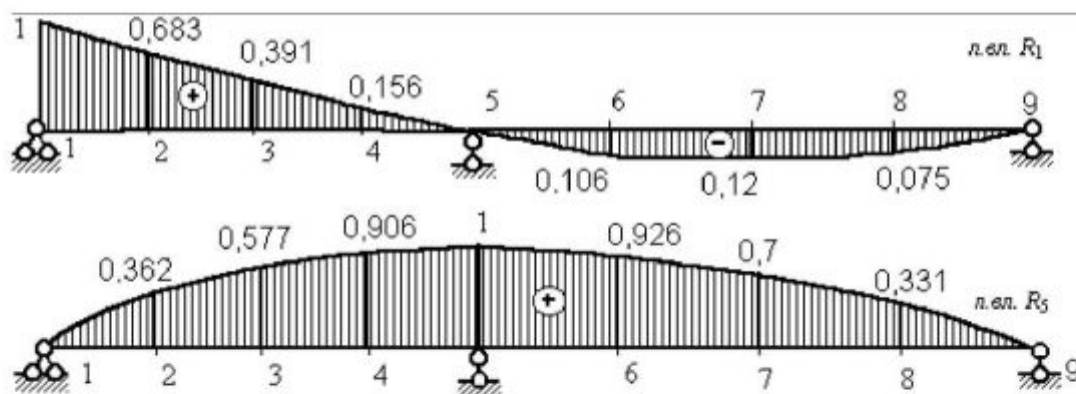


Рис. 7.10. Линии влияния R_1 и R_5

Пример 7.2. Для трехпролетной неразрезной балки (рис. 7.11, а) построить линии влияния опорных моментов в сечениях 5, 9, изгибающего момента, перерезывающей силы в сечении 10, опорной реакции R_9 .

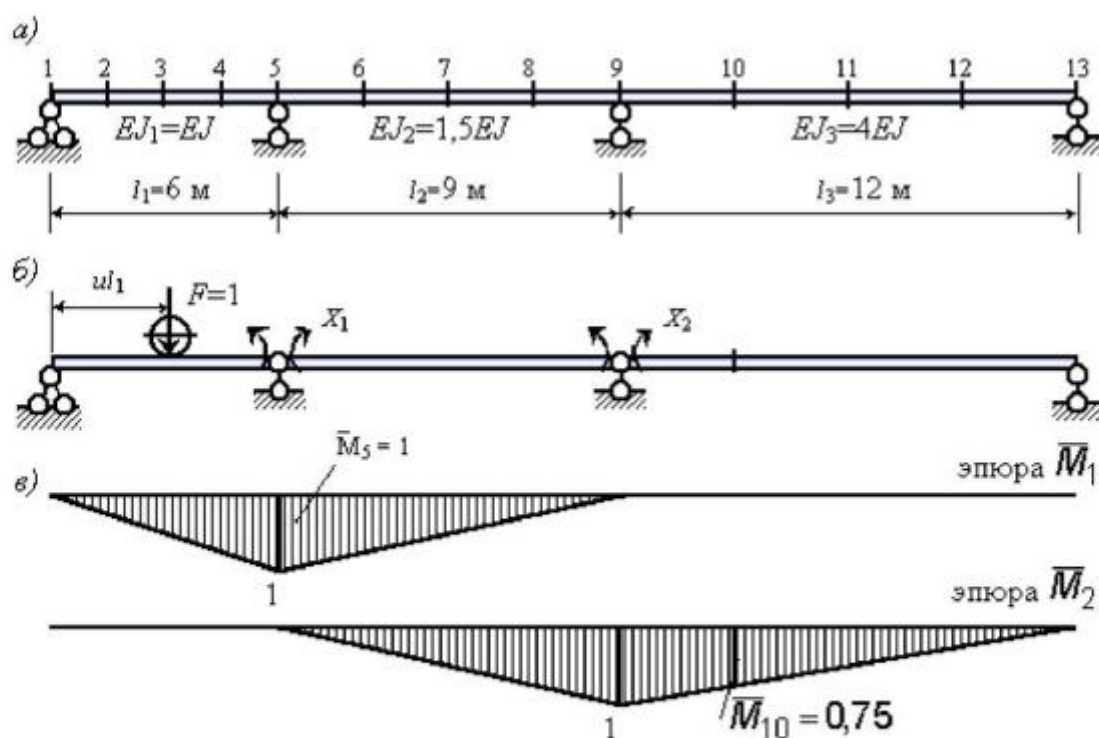


Рис. 7.11. Расчетная схема балки к примеру 7.2: а – заданная схема; б – основная система и единичная нагрузка; в – эпюры изгибающих моментов от единичных значений лишних неизвестных $X_1 = 1$; $X_2 = 1$

Решение.

Канонические уравнения для раскрытия два раза статически неопределимой балки запишем так:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = -\delta_{10}; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = -\delta_{20}. \end{cases} \quad (7.9)$$

Матрица единичных коэффициентов при принятом варианте основной системы в рассматриваемом примере будет иметь следующий вид

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l_1}{3EJ_1} + \frac{l_2}{3EJ_2} & \frac{l_2}{6EJ_2} \\ \frac{l_2}{6EJ_2} & \frac{l_2}{3EJ_2} + \frac{l_3}{3EJ_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{3} + \frac{9}{3 \cdot 1.5} & \frac{9}{6 \cdot 1.5} \\ \frac{9}{6 \cdot 1.5} & \frac{9}{3 \cdot 1.5} + \frac{12}{3 \cdot 4} \end{bmatrix} \frac{1}{EJ}$$

или

$$\delta = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{EJ}$$

Грузовые коэффициенты в системе (7.9) определим при положении единичной подвижной силы в сечениях 2, 3, 4 первого пролета δ'_{10} , сечениях 6, 7, 8 второго пролета δ''_{10} , δ''_{20} и в сечениях 10, 11, 12 третьего пролета δ'''_{20} (рис. 7.12).

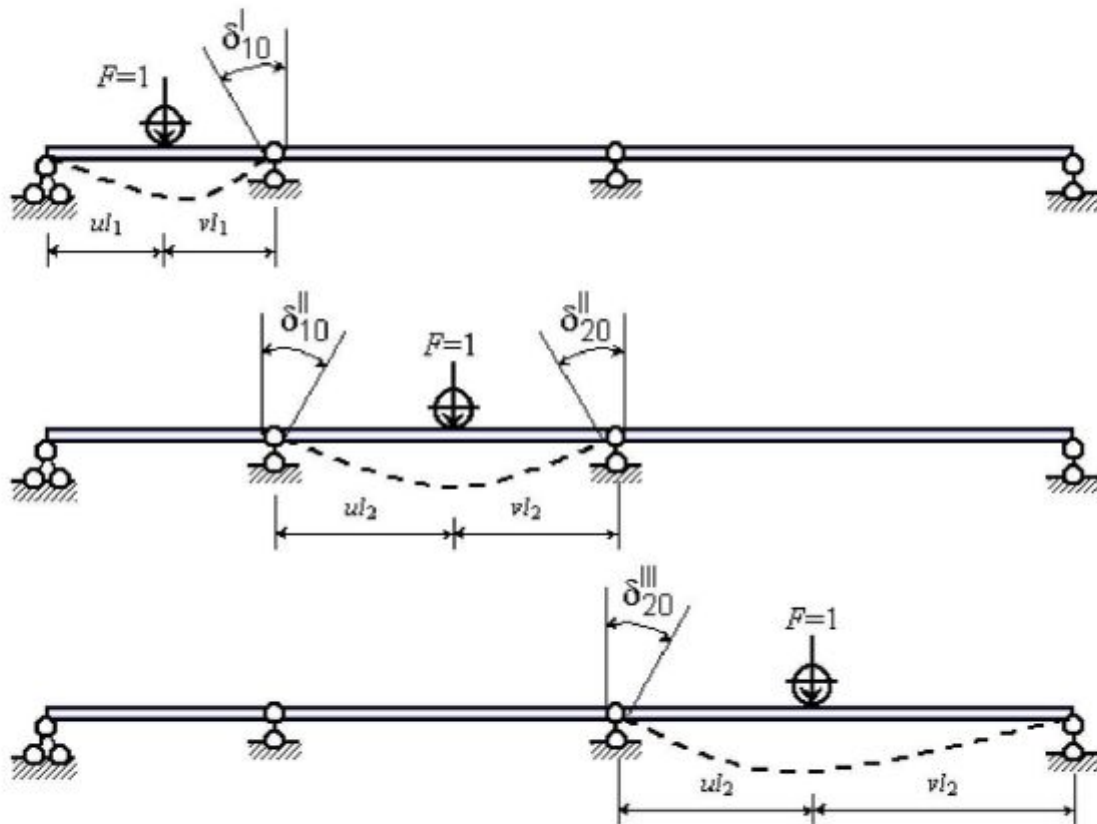


Рис. 7.12. К определению грузовых коэффициентов

Эти коэффициенты определим, используя равенства $\delta_{i0} = \delta_{0i}$, как ординаты эпюр прогибов от загрузки балки опорными моментами $X_1=1$ (δ_{01}), $X_2=1$ (δ_{02}) по формулам (7.4), (7.5) с учетом множителя l_i^2/EJ_i . Так, ординаты эпюры прогибов, приведенные в табл. 7.1, умножаются при определении прогибов в первом пролете на величину $l_1^2/EJ_1 = 36/EJ$, во втором пролете – $l_2^2/EJ_2 = 81/1,5EJ = 54/EJ$; в третьем пролете – $l_3^2/EJ_3 = 144/4EJ = 36/EJ$. Полученные значения прогибов от загрузки основной системы моментом $X_1=1$ и $X_2=1$ показаны на рис. 7.13. Матрица грузовых коэффициентов имеет вид:

$$\delta_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1,41 & 2,25 & 1,97 & 0 & 2,95 & 3,37 & 2,10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,10 & 3,37 & 2,95 & 0 & 1,97 & 2,25 & 1,41 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{EJ}$$

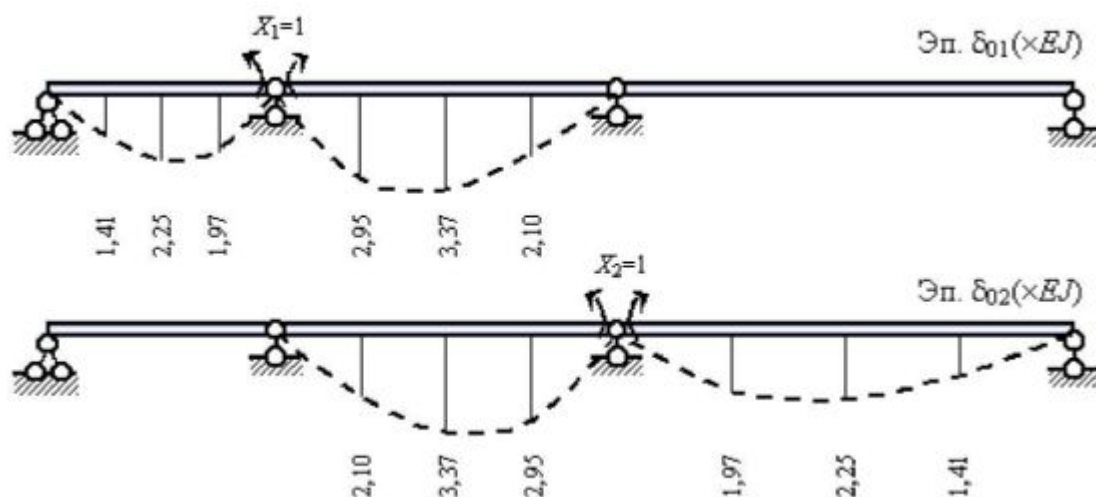


Рис. 7.13. Эпюры прогибов от нагружения основной системы единичными значениями лишних неизвестных

Решение системы уравнений выполним в матричной форме

$$\underline{X} = -\underline{\delta}^{-1}\underline{\delta}_0 \quad (7.10)$$

Обратная матрица для прямой матрицы второго порядка определяется так:

$$\underline{\delta}^{-1} = \begin{bmatrix} \delta_{22} & -\delta_{12} \\ -\delta_{21} & \delta_{11} \end{bmatrix} \frac{1}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21}} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \frac{EJ}{4 \cdot 3 - 1 \cdot 1} = \begin{bmatrix} 0,272 & -0,191 \\ -0,191 & 0,363 \end{bmatrix} EJ$$

Находим матрицу лишних неизвестных \underline{X} по равенству (7.10):

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} 0,272 & -0,091 \\ -0,091 & 0,363 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1,41 & 2,25 & 1,97 & 0 & 2,95 & 3,37 & 2,10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,10 & 3,37 & 2,95 & 0 & 1,97 & 2,25 & 1,41 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -0,385 & -0,614 & -0,537 & 0 & -0,614 & -0,613 & -0,305 & 0 & 0,179 & 0,205 & 0,128 & 0 \\ 0 & 0,128 & 0,205 & 0,179 & 0 & -0,495 & -0,919 & -0,882 & 0 & -0,716 & -0,818 & -0,513 & 0 \end{bmatrix}$$

В первой строке матрицы \underline{X} – ординаты линии влияния $X_1=M_5$, во второй – ординаты линии влияния $X_2=M_9$. Полученные линии влияния изображены на рис. 7.14.

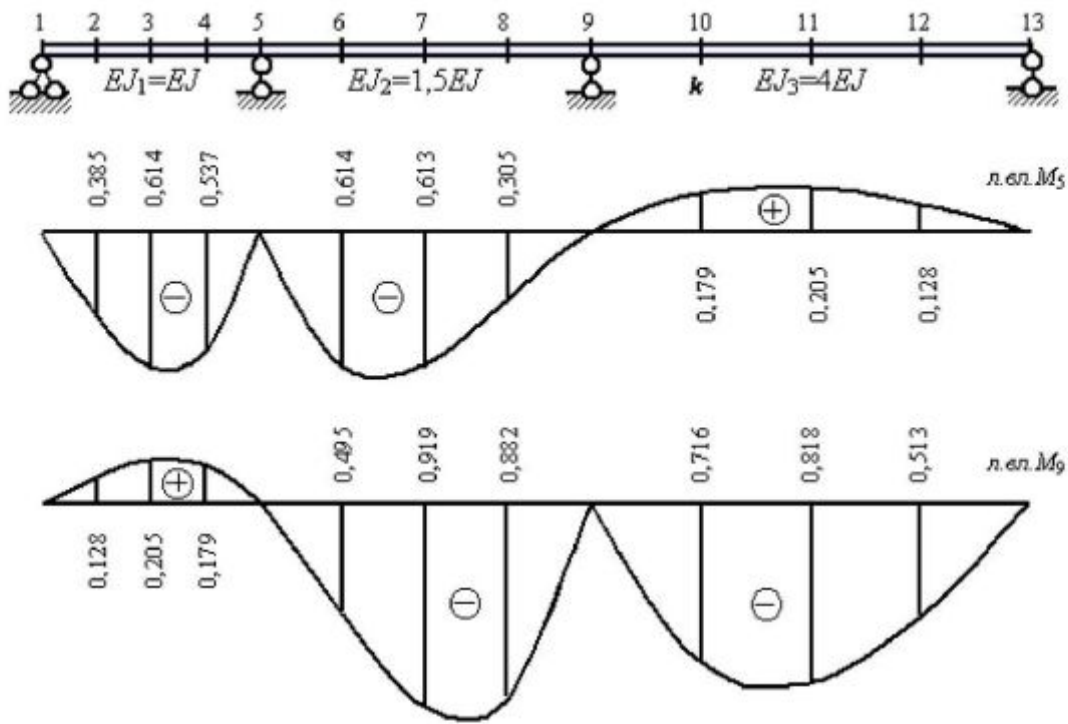


Рис. 7.14. Линии влияния опорных изгибающих моментов M_5 и M_9

Ординаты линии влияния изгибающего момента в любом сечении неразрезной балки вычислим, используя выражение (7.6). Для сечения 10 это выражение принимает вид

$$\text{л.вл. } M_{10} = \text{л.вл. } M_{10}^{\text{б}} + 0,75 \text{ л.вл. } X_2.$$

Порядок построения и полученная линия влияния изгибающего момента в сечении 10 приведены на рис. 7.15.

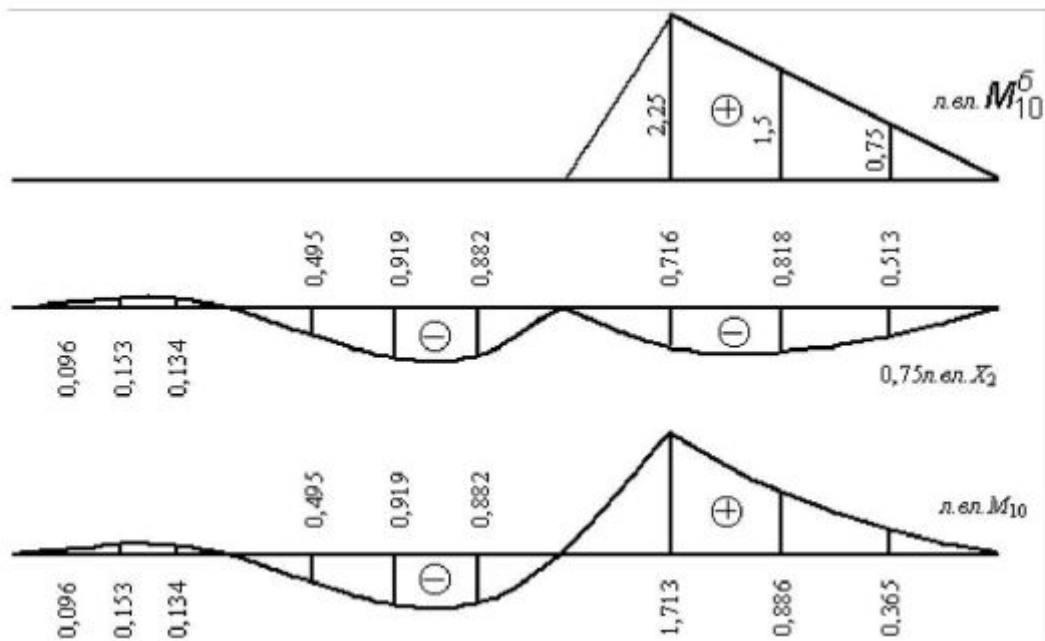


Рис. 7.15. Линия влияния изгибающего момента M_{10}

Линию влияния Q_{10} (рис. 7.16) получим, используя уравнение (7.7):

$$л.вл. Q_{10} = л.вл. Q_{10}^б - \frac{л.вл. X_2}{l_3} = л.вл. Q_{10}^б - 0,0833 л.вл. M_9$$

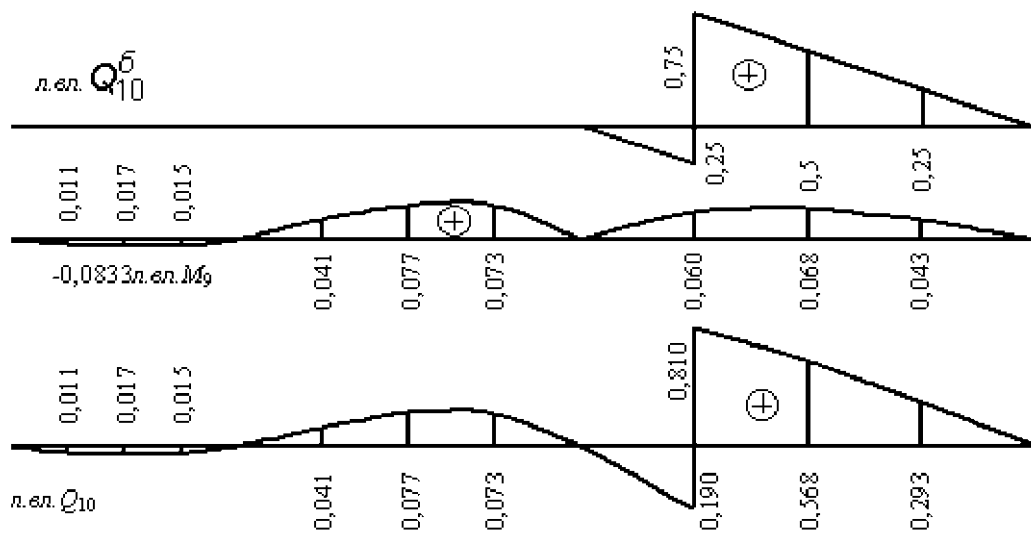


Рис. 7.16. Линии влияния перерезывающей силы Q_{10}

Ординаты линии влияния опорной реакции R_9 (рис. 7.17) вычислим, используя уравнение (7.8):

$$л.вл. R_9 = л.вл. R_9^б + \frac{л.вл. X_1}{l_2} - л.вл. X_2 \left(\frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} \right),$$

$$\frac{1}{l_2} = \frac{1}{9} = 0,1111; \quad \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} = \frac{1}{9} + \frac{1}{12} = 0,1944.$$

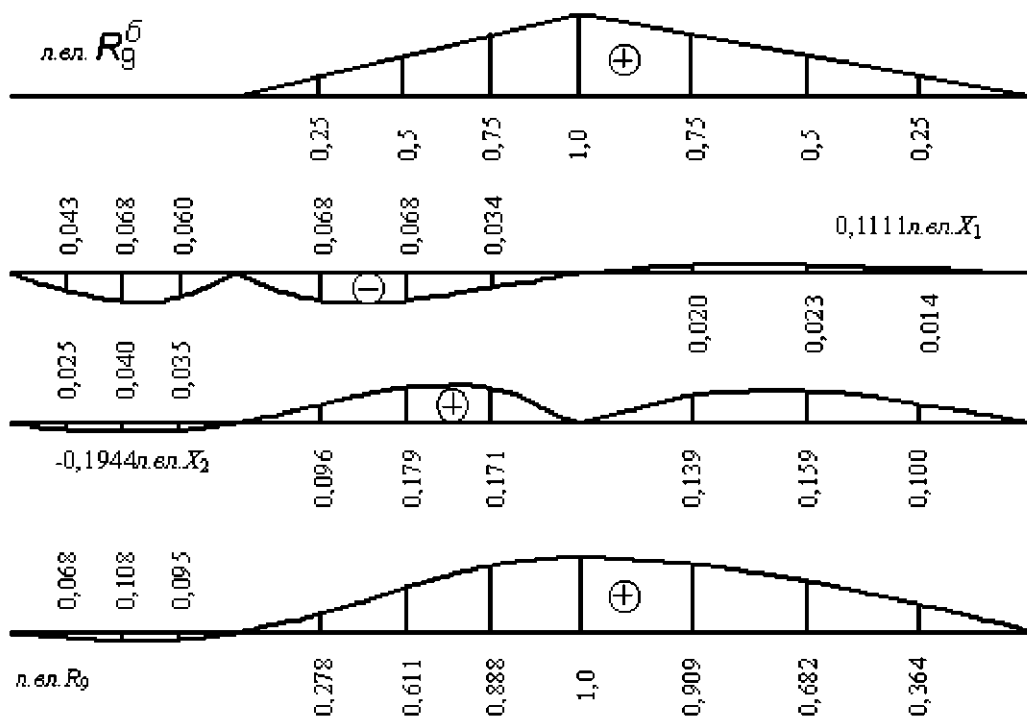


Рис. 7.17. Линии влияния опорной реакции R_9

7.3. Кинематический способ построения линий влияния

Кинематический способ построения линий влияния усилий основан на принципе возможных перемещений Лагранжа: для системы, находящейся в равновесии, сумма работ всех действующих на систему сил на возможных малых перемещениях равна нулю.

Для построения линии влияния какого-либо усилия (опорной реакции, перерезывающей силы, изгибающего момента в заданном сечении балки) необходимо удалить ту связь, усилие в которой определяем от единичной подвижной силы, и заменить удаленную связь искомым усилием. По направлению искомого усилия задается бесконечно малое обобщенное перемещение системе с исключенной связью. На основании принципа возможных перемещений составляется условие равновесия, из которого и определяется неизвестное усилие.

Так, для построения линии влияния опорной реакции, например, на опоре 2 (рис. 7.18), исключаем опорную связь и заменяем ее искомой реакцией.

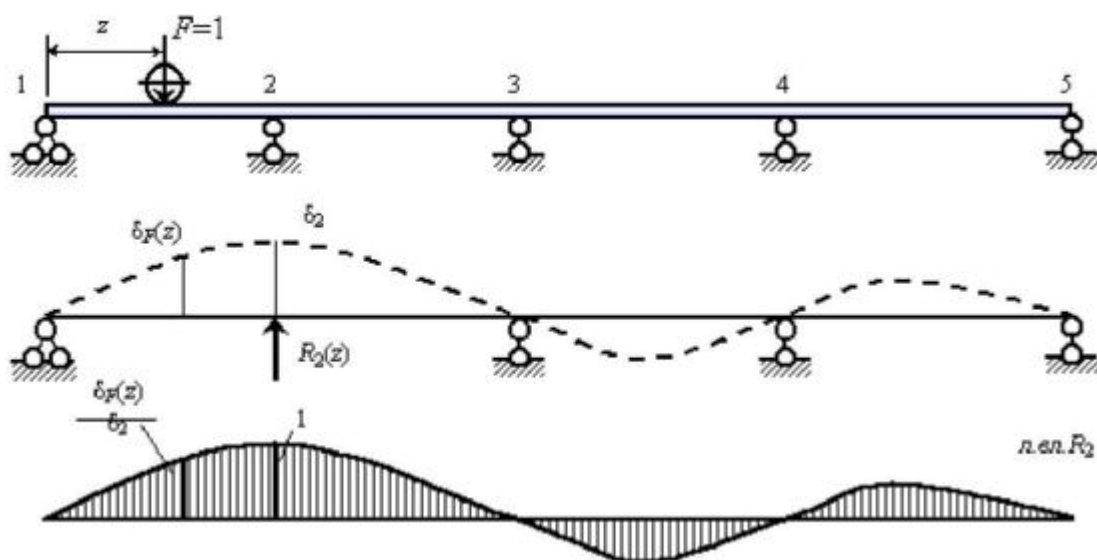


Рис. 7.18. Построение линии влияния опорной реакции R_2

Задаем балке бесконечно малое линейное перемещение δ_2 . Записываем условие равновесия по принципу Лагранжа:

$$-F \delta_F(z) + R_2(z) \delta_2 = 0;$$

откуда

$$R_2(z) = \frac{F \delta_F(z)}{\delta_2}.$$

Так как сила $F=1$, то

$$R_2(z) = \frac{\delta_F(z)}{\delta_2}. \quad (7.10)$$

Поскольку при $z = l_1 \delta_F = \delta_2$, то при этой позиции подвижного груза $R_2 = 1$. Если $z = l_1 + l_2$, $z = l_1 + l_2 + l_3$ (подвижный груз находится на опорах 3, 4), то $\delta_F(z) = 0$. Следовательно, эпюра перемещений (рис. 7.18) является моделью линии влияния опорной реакции R_2 ; ординаты ее равны прогибам балки, поделенным на δ_2 .

Для определения перерезывающей силы в сечении k (рис. 7.19, а) необходимо построить эпюру прогибов от единичного смещения по направлению исключенной связи, как показано на рис. 7.19, б.

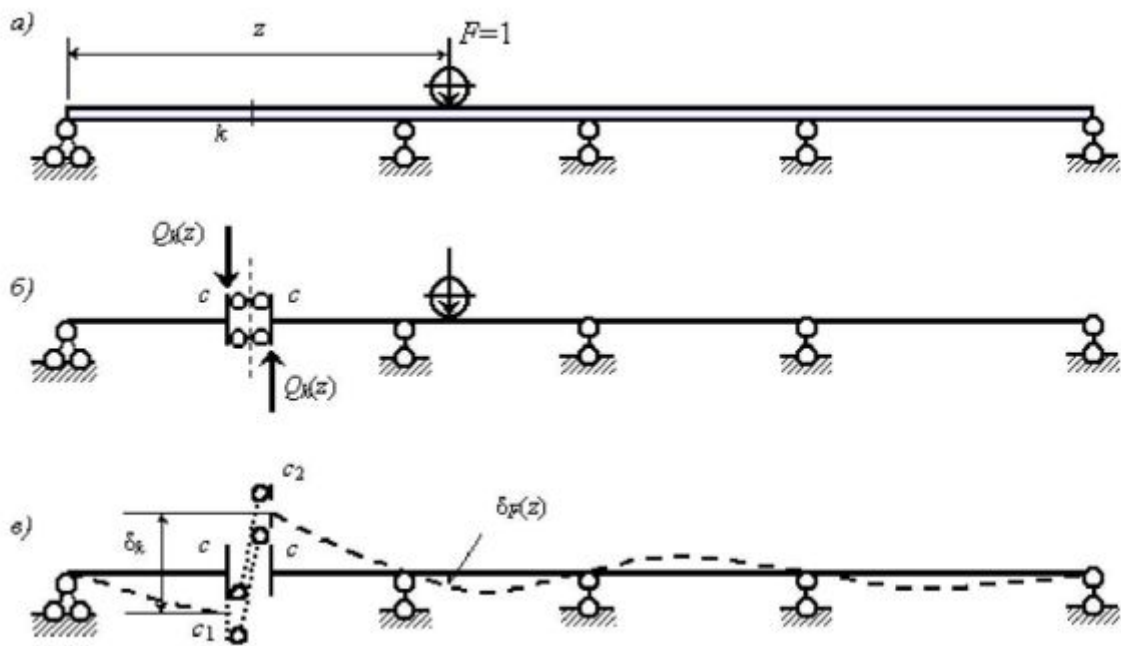


Рис. 7.19. Построение линии влияния перерезывающей силы Q_k : а – заданная схема; б – схема с исключенной связью; в – эпюра прогибов

Работа сил на возможных перемещениях для системы, находящейся в равновесии при показанном на схеме положении подвижного груза F :

$$1 \cdot \delta_F(z) + Q_k \delta_k = 0;$$

откуда

$$Q_k = - \frac{\delta_F(z)}{\delta_k}. \quad (7.11)$$

При определении изгибающего момента в сечении k_2 (рис. 7.20, а) удаляем моментную связь в этом сечении, для чего жесткую связь в сечении k_2 заменяем шарнирной (рис. 7.20, б), и задаем обобщенное перемещение (в данном случае угловое) – взаимный угол поворота $\delta_M = \alpha + \beta = 1$ (рис. 7.20, в).

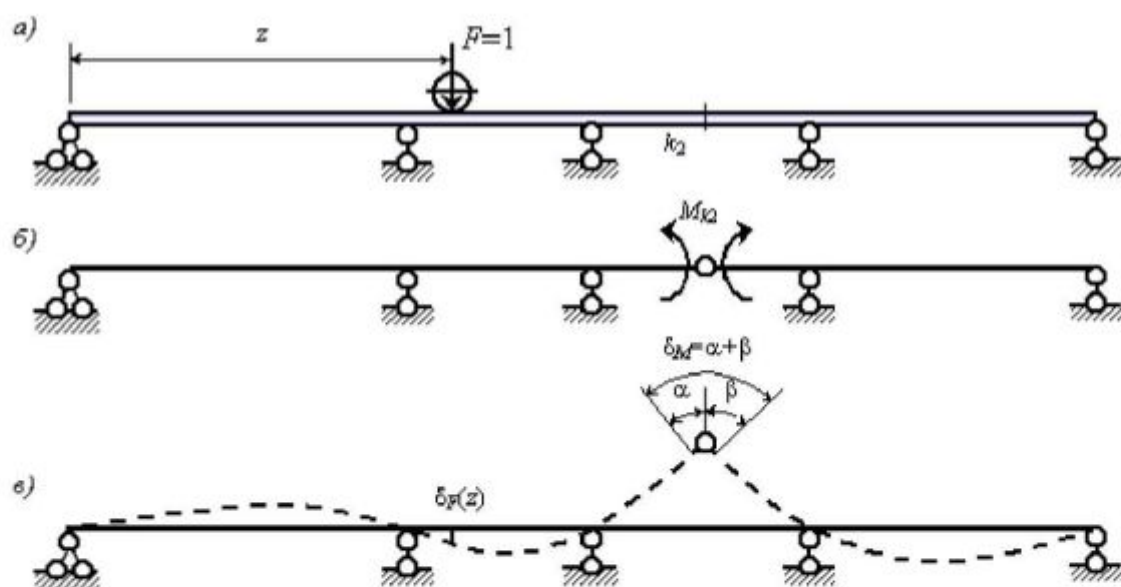


Рис. 7.20. Построение линии влияния изгибающего момента M_{k_2} : а – заданная схема; б – схема с исключенной связью; в – эпюра прогибов

Из условия равновесия балки по принципу возможных перемещений

$$M_{k_2} \delta_M + 1 \cdot \delta_F(z) = 0 \quad \text{определяем } M_{k_2} | :$$

$$M_{k_2} = - \frac{\delta_F(z)}{\delta_M} \quad (7.12)$$

Поскольку в выражениях (7.10), (7.11), (7.12) знаменатель является постоянной величиной, то эпюру прогибов от единичного обобщенного смещения по направлению искомого усилия следует считать линией влияния этого усилия.

Однако вычисление прогибов в статически неопределимой балке с несколькими лишними связями – сложная задача. Поэтому кинематический способ построения линий влияния используется для построения моделей линий влияния усилий.

Модели линий влияния позволяют решить важную задачу об опасном нагружении неразрезной балки временной нагрузкой при определении экстремальных усилий.

Так в балке, приведенной на рис. 7.18, наибольшее значение опорной реакции R_2 получается при нагружении первого, второго и четвертого пролетов. Наибольший положительный момент в сечении k_2 балки (рис. 7.20) получается при нагружении временной нагрузкой первого и третьего пролетов, наибольший отрицательный – при нагружении второго и четвертого пролетов.

8. Упругопластический изгиб неразрезных балок. Метод предельного равновесия

8.1. Изгиб статически определимой балки за пределом упругости. Пластический шарнир

При расчете конструкций с учетом пластических деформаций диаграмма σ - ε материала принимается идеализированная упругопластическая без упрочнения (рис. 8.1, б) (диаграмма Прандтля) или жесткопластическая (рис. 8.1, в).

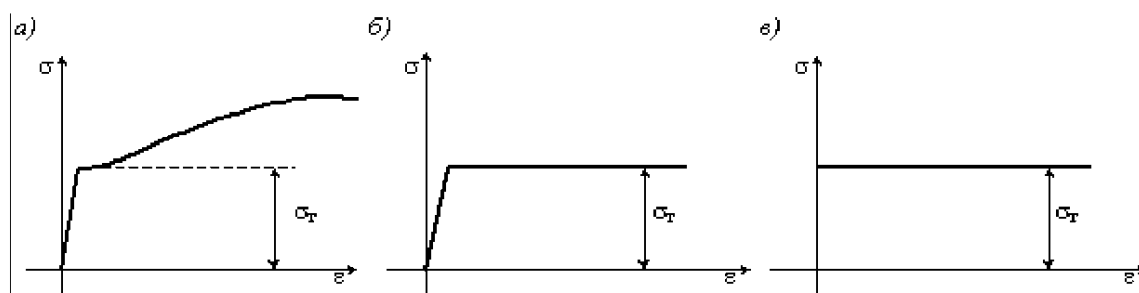


Рис. 8.1. Диаграмма σ - ε : а – для пластической стали с упрочнением; б – идеализированная диаграмма Прандтля упругопластического материала без упрочнения; в – диаграмма напряжений для жесткопластического тела

Нагружение принимается простым – внешние силы в процессе деформации конструкции своего направления не меняют и изменяются пропорционально одному параметру. Пластические деформации в наиболее нагруженном сечении принимаем соответствующими диаграмме Прандтля σ - ε (рис. 8.1, б).

Если пластические деформации охватывают все сечение конструкции, то это сечение принимается за пластический шарнир.

Рассмотрим однопролетную балку на шарнирных опорах, нагруженную силой F (рис. 8.2, а). Поперечное сечение балки имеет две оси симметрии.

В наиболее нагруженном сечении балки в месте приложения силы максимальные нормальные напряжения в самых удаленных от нейтральной оси величинах (фибровые напряжения) определяются так

$$\max \sigma = \frac{\max M}{W_x}; \quad \max M = \frac{Fl}{4}; \quad W_x = \frac{bh^2}{6}$$

При расчете по упругой стадии предельной нагрузкой считается такая, при которой фибровые напряжения в одном наиболее нагруженном сечении равны пределу текучести материала (эюра 2 на рис. 8.2, а). При увеличении силы F пластические деформации в этом сечении будут распространяться от

крайних волокон внутрь сечения (эпюры напряжений 3, 4 на рис. 8.2, а). В пластическую деформацию будут вовлекаться и соседние с самым напряженным сечения балки (рис. 8.2, б). Та нагрузка, при которой пластические деформации захватывают все сечение балки, считается предельной.

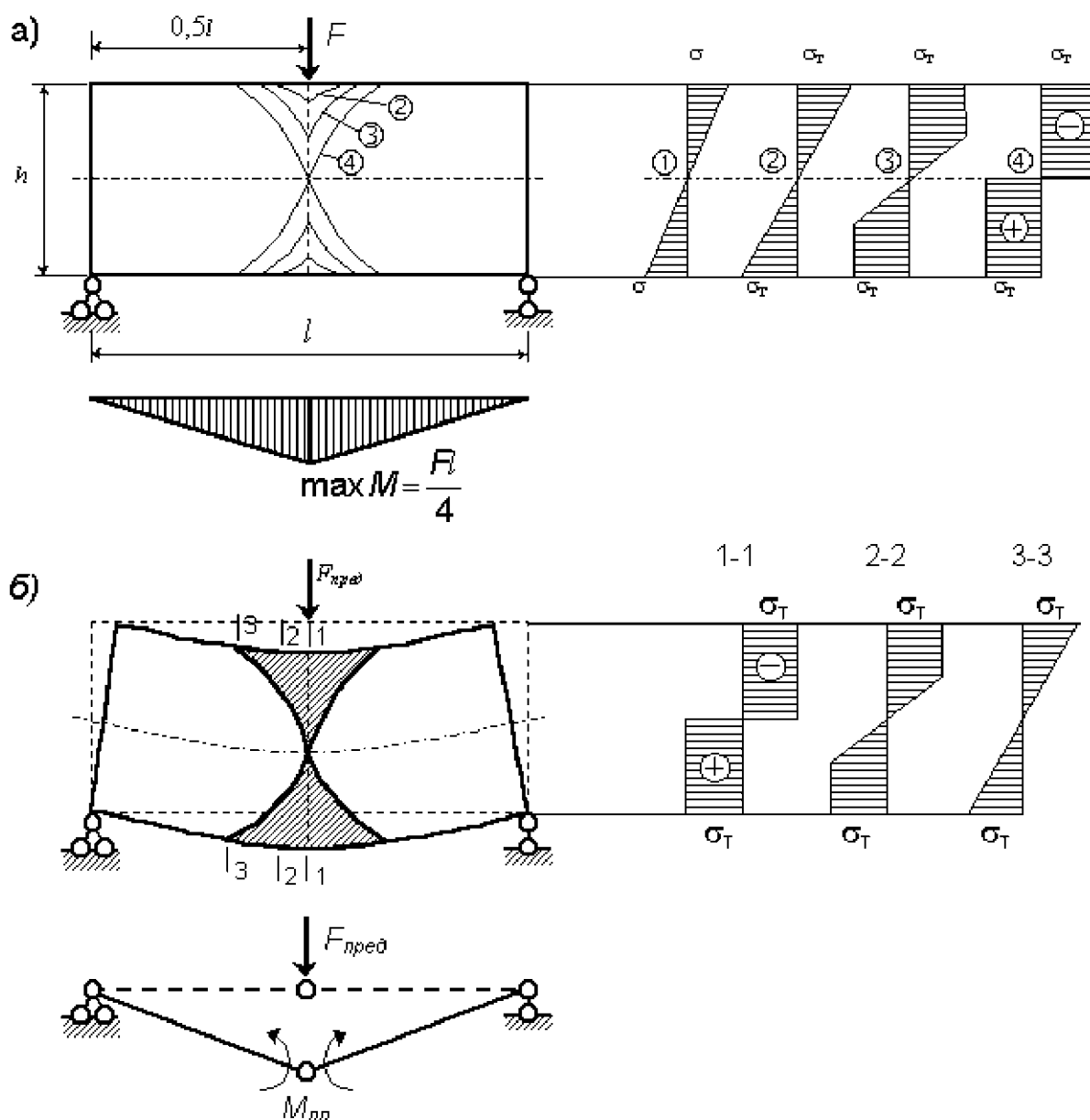


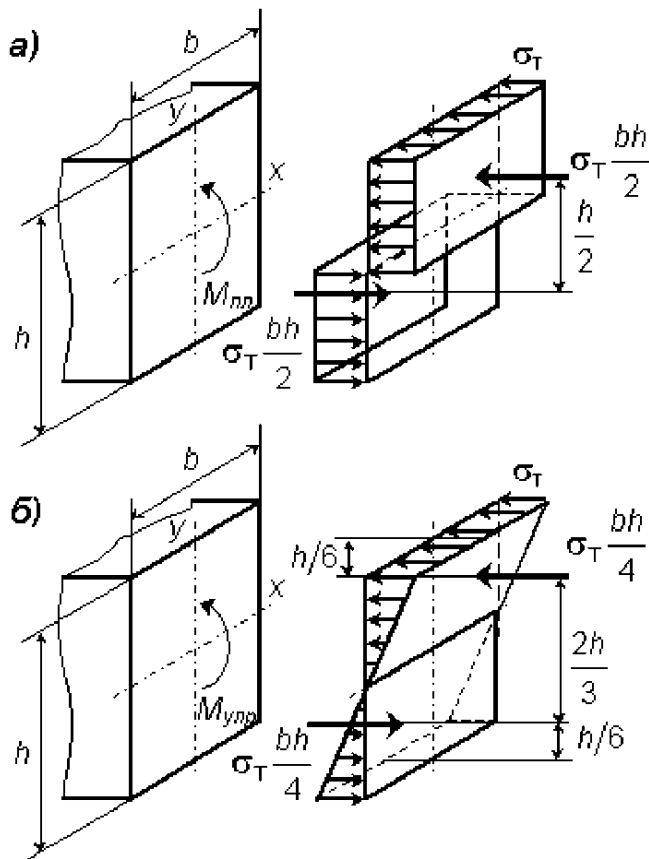
Рис. 8.2. Схема образования пластического шарнира: а – изменение распределения напряжений в сечении в середине балки с ростом нагрузки; б – распределение напряжений в различных сечениях в предельном состоянии

Балка превращается в механизм с шарнирами на опорах и пластическим шарниром в пролете. Способность воспринимать возрастающую внешнюю нагрузку исчерпана.

Пластический шарнир отличается от идеального шарнира тем, что в нем действует изгибающий момент постоянной величины $M_{пред}$, и он является односторонним, так как закрывается при разгрузке.

Балка находится в состоянии предельного равновесия между внешними нагрузками (сила $F_{пред}$) и внутренними силами ($M_{пред}$) в пластическом шарнире.

Для прямоугольного поперечного сечения $M_{пред}$ определим как момент пары внутренних сил (рис. 8.3).



При пластических деформациях по всей высоте сечения (рис. 8.3, а):

$$\begin{aligned} \max \sigma &= \sigma_T^{раст} = \sigma_T^{сж}; \\ M_{пред}^{пл} &= \sigma_T \frac{bh}{2} \cdot \frac{h}{2} = \sigma_T \frac{bh^2}{4} = \\ &= \sigma_T W_{пл}. \end{aligned}$$

Если $\max \sigma = \sigma_T$ только в крайних волокнах, а во всем сечении деформации упругие $\sigma_y < \sigma_T$ (рис. 8.3, б), то

$$\begin{aligned} M_{пред}^{упр} &= \sigma_T \frac{bh}{4} \cdot \frac{2h}{3} = \sigma_T \frac{bh^2}{6} = \\ &= \sigma_T W_x. \end{aligned}$$

Пластический момент сопротивления

$$W_{пл} = \frac{bh^2}{4} = 1,5W_x.$$

Рис. 8.3. Распределение напряжений: а – при образовании пластического шарнира; б – в упругой стадии работы

Таким образом, несущая способность прямоугольного поперечного сечения при расчете по пластической стадии с образованием пластического шарнира в 1,5 раза больше по сравнению с расчетом по упругой стадии. При этом предельным состоянием сечения считается такое, при котором максимальное напряжение только в удаленном волокне от нейтральной оси равно σ_T . Для поперечных сечений другой формы $W_{пл} = nW_x$. Для прокатных двутавров $n=1,15$? $1,17$, для круглого сечения $n=32 / 27$.

8.2. Упругопластический изгиб статически неопределимой балки

Если образование одного пластического шарнира в статически определимой балке приводит к предельному состоянию, предшествующему разрушению, то в неразрезной балке возникновение пластического шарнира только понижает степень статической неопределимости на единицу.

Для полного исчерпания несущей способности неразрезной балки необходима такая нагрузка, при которой количество образующихся пластических шарниров на единицу больше степени ее статической неопределимости. При расчете может быть поставлена задача подобрать сечение балки, нагруженной заданными силами, обеспечивающее требуемый запас прочности – это прямая задача проектирования. Если для балки заданного сечения при известной расчетной схеме определена допустимая нагрузка, то такая задача называется обратной задачей проектирования.

Решение этих задач возможно двумя методами – статическим и кинематическим.

В статическом методе выполняется поэтапный расчет неразрезной балки с определением на каждом этапе местоположения сечений, в которых образуется пластический шарнир. Первоначально выполняется расчет статически неопределимой балки по упругой стадии. Для сечения с наибольшим изгибающим моментом определяется параметр внешней нагрузки, который приводит к образованию пластического шарнира в этом сечении.

На втором этапе выполняется упругий расчет этой балки, степень статической неопределимости которой на единицу меньше первоначально заданной. Внешние нагрузки перед этим умножаются на параметр, полученный на первом этапе расчета. Выполнив расчет балки на втором этапе, определяем положение нового сечения с максимальным моментом, значение которого приравниваем $M_{пл}$. Затем определяем новый параметр нагрузки, на который умножаем взятую за исходную на втором этапе. При перерасчетах неизменными сохраняются значения $M_{пл}$ в пластических шарнирах на каждом этапе. Теперь балка имеет два пластических шарнира в своей расчетной схеме. Если их достаточно для возникновения геометрически изменяемой схемы, расчет на этом заканчиваем и определяем предельную нагрузку, при которой обеспечиваются условия предельного равновесия.

Зная величину предельного момента при заданных геометрических характеристиках поперечного сечения балки и используя их связь с внешней нагрузкой из эпюры $M_{пред}$, определим предельную нагрузку (обратная задача) или геометрические характеристики сечения, если нагрузка задана (прямая задача).

Приведем примеры решения задач статическим методом.

[Пример 8.1.](#)

[Пример 8.2.](#)

[Пример 8.3.](#)

Пример 8.1. Для двухпролетной балки постоянного сечения (рис. 8.4) определить грузоподъемность при заданном коэффициенте запаса k . Предел текучести материала при сжатии и растяжении одинаков.

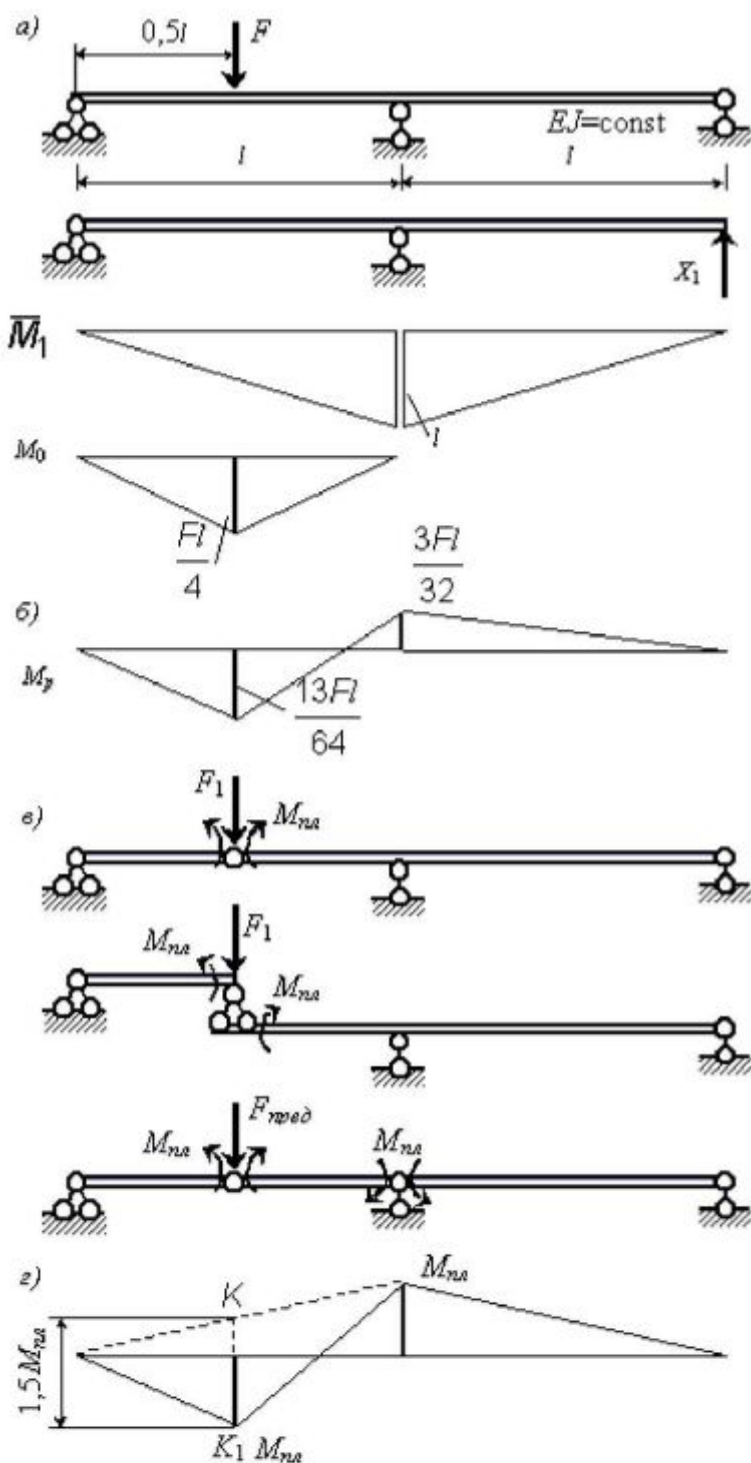


Рис. 8.4. К примеру 8.1: а – заданная расчетная схема балки; б – эпюра изгибающих моментов при упругой работе; в – изменение расчетной схемы при появлении пластического шарнира; г – эпюра моментов, соответствующая предельному состоянию

Образуется геометрически изменяемая система. Несущая способность балки исчерпана. Значение предельной силы определим, приравнявая ординату под силой $K-K_1$ (рис. 8.4, г) балочному моменту от силы $F_{пред}$

Решение.

1. Упругий расчет один раз статически неопределимой балки:

$$\delta_{11} = \frac{2l^3}{3EJ}; \Delta_{10} = \frac{Fl^3}{16EJ};$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{3}{32}F$$

Эпюра M_p приведена на рис. 8.4, б. При возрастании силы F первый пластический шарнир возникнет в сечении под силой с моментом:

$$M_{пл} = \sigma_T W_{пл}$$

Определим силу F_1 , соответствующую этому нагружению,

$$\frac{13}{64}F_1 l = \sigma_T W_{пл};$$

$$F_1 = \frac{64\sigma_T W_{пл}}{13l}$$

2. Для балки, изображенной на рис. 8.4, в, при возрастании силы F_1 момент на средней опоре будет возрастать до величины $M_{пл}$, при котором возникает второй пластический шарнир в сечении над опорой.

$$\frac{F_{\text{пред}} l}{4} = 1,5 M_{\text{пл}}$$

Отсюда

$$F_{\text{пред}} = \frac{6M_{\text{пл}}}{l} = \frac{6\sigma_{\text{T}}W_{\text{пл}}}{l}$$

Допускаемая сила

$$[F] = \frac{F_{\text{пред}}}{k} = \frac{6\sigma_{\text{T}}W_{\text{пл}}}{kl} = \frac{6[\sigma]W_{\text{пл}}}{l} = \frac{6n[\sigma]W_{\text{x}}}{l} \quad (8.1)$$

Здесь $[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{T}}}{k}$; n – коэффициент, зависящий от формы сечения.

Если нагрузка была задана, то подбор сечения выполним, определяя

$$(W_{\text{пл}})_{\text{тр}} \geq \frac{Fl}{6[\sigma]}$$

Так как $W_{\text{пл}} = nW_{\text{x}}$, то

$$(W_{\text{x}})_{\text{тр}} \geq \frac{Fl}{6n[\sigma]} \quad (8.2)$$

Сравним полученную грузоподъемность балки (8.1) с грузоподъемностью при упругом расчете по допускаемым напряжениям. Предельным состоянием балки в этом случае считается такое, при котором в сечении с максимальным моментом из эпюры M_{ρ} (рис. 8.4, б) в фибровых волокнах напряжения будут равны σ_{T}

$$\frac{13}{64} F_{\text{пред}}^{\text{упр}} l = \sigma_{\text{T}} W_{\text{x}} \quad (8.3)$$

Из (8.3) получаем

$$\frac{F_{\text{пред}}^{\text{упр}}}{k} = \frac{64\sigma_{\text{T}}W_{\text{x}}}{13l}; [F] = \frac{F_{\text{пред}}^{\text{упр}}}{k} = \frac{64[\sigma]W_{\text{x}}}{13l} \quad (8.4)$$

Сравнивая $[F]$, найденные по формулам (8.1) и (8.4), получим

$$\frac{[F]_{пл}}{[F]_{упр}} = \frac{13 \cdot 6n}{64} = 1,22n$$

Если сечение балки прямоугольное ($n=1,5$), то для балки в рассматриваемом примере

$$\frac{[F]_{пл}}{[F]_{упр}} = 1,22 \cdot 1,5 = 1,83.$$

При двутавровом сечении ($n=1,15$)

$$\frac{[F]_{пл}}{[F]_{упр}} = 1,22 \cdot 1,15 = 1,40.$$

Пример 8.2. Определить грузоподъемность балки (рис. 8.5, а). Балка имеет постоянное сечение. Пределы текучести материала при растяжении и сжатии равны. Внешняя нагрузка связана общим параметром F .

Решение.

1. Построение эпюры изгибающих моментов при расчете по упругой стадии. Для раскрытия статической неопределенности используем уравнение трех моментов

$$2M_1(l_1 + l_2) = -6 \left(\frac{\omega_1 a_1}{l_1} + \frac{\omega'_2 b_2^I}{l_2} + \frac{\omega''_2 b_2^{II}}{l_2} \right),$$

$$\text{где } \omega_1 = \frac{0,2Fl \cdot l}{2} = 0,1Fl^2; \quad \omega'_2 = \frac{0,33Fl \cdot 1,5l}{2} = 0,25Fl^2;$$

$$\omega''_2 = \frac{0,5Fl \cdot 1,5l}{2} = 0,375Fl^2;$$

$$2M_1(l + 1,5l) = -6 \left(\frac{0,1 \cdot 0,5}{1} + \frac{0,25 \cdot 0,833}{1,5} + \frac{0,375 \cdot 0,667}{1,5} \right) Fl^2;$$

$$M_1 = -0,426 Fl$$

Эпюра изгибающих моментов при расчете по упругой стадии приведена на рис. 8.5, б.

2. Определение предельного параметра нагрузки $F_{пред}^{упр}$ при расчете по упругой стадии. При этом $\max \sigma = \sigma_T$ в крайних волокнах самого нагруженного сечения с $\max M = 0,53Fl$:

$$\sigma_{\max} = \frac{\max M}{W_x} = \sigma_T; \quad \frac{0,53Fl}{W_x} = \sigma_T; \quad F_{пред} = \frac{W_x \sigma_T}{0,53} = 1,89 \frac{W_x \sigma_T}{l} \quad (8.5)$$

3. Параметр нагрузки (обозначим его F_0), при котором в сечении с максимальным моментом возникает пластический шарнир, определяется как

$$F_0 = nF_{пред} = 1,89 \frac{nW_x \sigma_T}{l} \quad (8.6)$$

После образования первого пластического шарнира расчетная схема балки примет вид, приведенный на рис. 8.5, в. При последующем возрастании нагрузки второй пластический момент будет образовываться в сечении над промежуточной опорой. Эпюра изгибающих моментов при этом будет иметь вид, показанный на рис. 8.5, г.

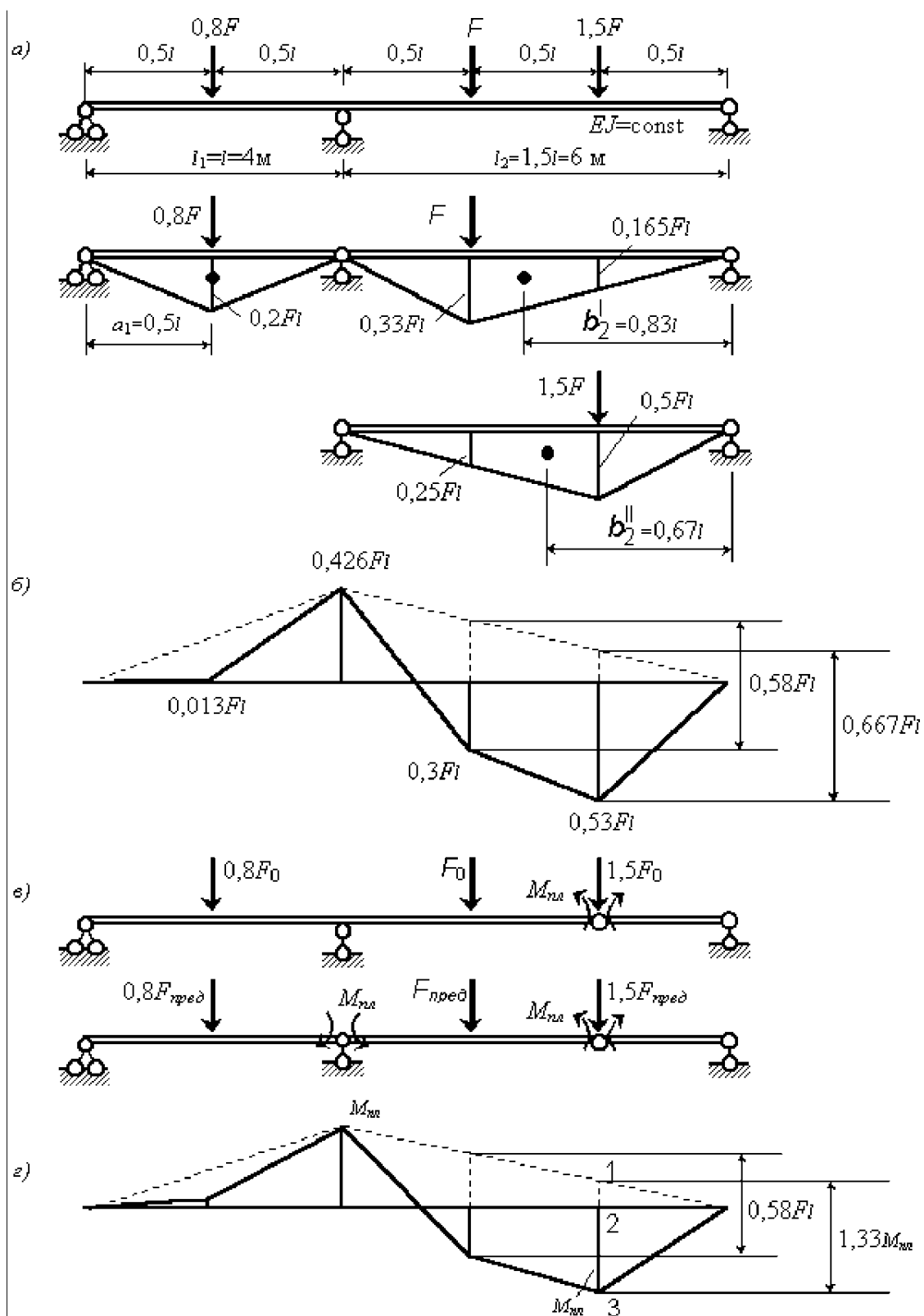


Рис. 8.5. К примеру 8.2: а – заданная расчетная схема балки; б – эпюра изгибающих моментов при упругой работе; в – изменение расчетной схемы при появлении пластического шарнира; г – эпюра изгибающих моментов в предельном состоянии

Сравнивая ординаты 1-3, получим

$$\frac{4}{3}M_{пл} = 0,667F_{пред}l \quad (8.6)$$

Из (8.6) определяем

$$F_{пред} = \frac{4M_{пл}}{3 \cdot 0,667l} = 2 \frac{M_{пл}}{l} = 2 \frac{W_{пл}\sigma_T}{l} = 2 \frac{nW_x\sigma_T}{l} \quad (8.7)$$

Сравниваем значение разрушающей силы $F_{пред}$ по (8.7) и F_0 по (8.6), соответствующей появлению первого пластического шарнира:

$$\frac{F_{пред}}{F_0} = \frac{2}{1,89} = 1,06$$

Следовательно, при образовании второго пластического шарнира в расчетной схеме по рис. 8.5, в, нагрузка в рассматриваемом примере возросла всего на 6%.

Допускаемая сила при расчете по методу предельного равновесия для рассматриваемой задачи получается делением $F_{пред}$ (8.7) на принятый коэффициент запаса:

$$[F] = \frac{F_{пред}}{k} = \frac{2nW_x\sigma_T}{kl} = \frac{2nW_x[\sigma]}{l} \quad (8.8)$$

Грузоподъемность балки при расчете по допускаемым напряжениям определяем из условия прочности:

$$\begin{aligned} \max \sigma = \frac{\max M}{W_x} \leq [\sigma]; & \quad \frac{0,53[F]l}{W_x} \leq [\sigma]; \\ [F]_{упр} \leq \frac{[\sigma] W_x}{0,53l} & \quad (8.9) \end{aligned}$$

Сравнивая результаты (8.8) и (8.9), для прямоугольного сечения балки получаем при $n=1,5$

$$\frac{[F]}{[F]_{упр}} = \frac{2nW_x[\sigma]}{W_x[\sigma]} 0,53 = 1,59$$

при $n=1,15$ для прокатной балки двутаврового сечения это отношение равно 1,22.

Следовательно, переход к расчету по методу предельного равновесия позволяет увеличить грузоподъемность балки в рассмотренном примере на 59% при прямоугольном сечении и на 22% при двутавровом сечении.

Приведенные примеры расчета балок статическим методом являются простыми, так как расчетные схемы один раз статически неопределимы. Для

более сложных задач трудоемкость решения значительно возрастает, так как требуется раскрытие статической неопределимости не только на первом этапе, но и на последующих. Поэтому статический метод расчета по предельному состоянию широкого практического применения не получил.

Кинематический метод расчета балок методом предельного равновесия не требует привлечения сложного математического аппарата для раскрытия статической неопределимости на каждом этапе расчета, а сразу исходит из анализа всех возможных схем разрушения конструкции при возникновении пластических шарниров, как это будет показано в подразд. 8.3.

8.3. Кинематический метод расчета

Кинематический метод расчета статически неопределимых систем по предельному равновесию основан на следующем принципе.

Для рассматриваемой статически неопределимой системы, находящейся под действием заданной нагрузки, существует множество возможных механизмов пластического разрушения. Истинной формой разрушения будет та, которая соответствует наименьшей величине предельной нагрузки.

Используя принцип возможных перемещений, составляют условия равновесия для кинематически возможного механизма разрушения. Возможная работа внешних нагрузок приравнивается к возможной работе внутренних сил, представленных предельными моментами в пластических шарнирах.

Возможными механизмами разрушения в многопролетных балках являются *балочные механизмы*, обусловленные появлением в промежуточном пролете трех пластических шарниров, а в крайних, оканчивающихся шарнирной опорой, – двух. Чаще всего сечениями, в которых возникают пластические шарниры, являются сечения в пролете, в которых балочные изгибающие моменты от нагрузки имеют наибольшее значение.

Проиллюстрируем решение задачи кинематическим методом на примерах (рис. 8.6, 8.7). Механизм один раз статически неопределимой балки (рис. 8.6) с образованием двух пластических шарниров показан на рис. 8.6, б.

Уравнение возможных работ внешних и внутренних сил в состоянии предельного равновесия запишется так:

$$\sum F_{\text{пред}} \Delta - \sum M_{\text{пред},j} \Theta_j = 0$$

или

$$F_{\Delta k} - M_{\text{пр}} \Theta = 0 \quad (8.10)$$

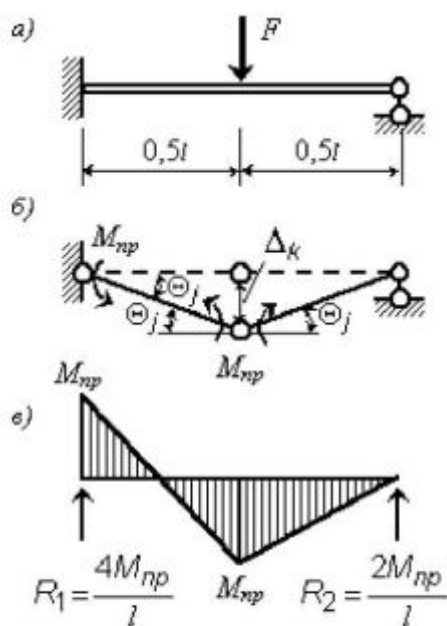


Рис. 8.6. Определение предельной нагрузки кинематическим методом: а – заданная схема балки; б – предельное состояние; в – эпюра изгибающих моментов

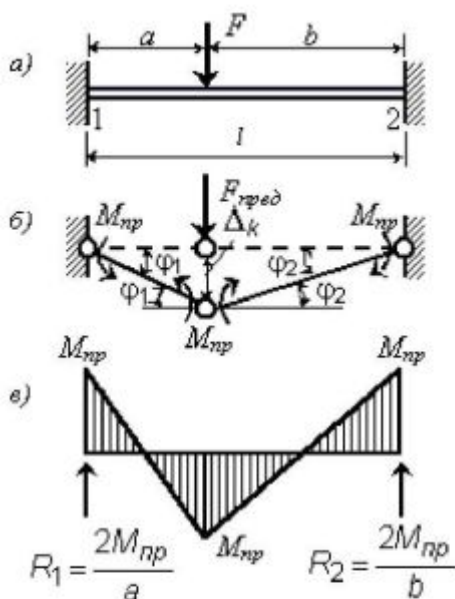


Рис. 8.7. Схема балки (а); предельное состояние (б); эпюра изгибающих моментов (в)

Зная, что в (8.12) $\left| \varphi_1 = \frac{\Delta_k}{a} \right|$, $\left| \varphi_2 = \frac{\Delta_k}{b} \right|$, получим

Выражая $M_1^{пр}$ и подставляя в (8.10),

получим

$$F_{пред} = \frac{6M_{пред}}{l} \quad (8.11)$$

Из (8.11) получим $\left| M_{пред} = \frac{F_{пред}l}{6} \right|$

Предельная эпюра моментов (рис. 8.6, в) является статически допустимой, так как удовлетворяет условию равновесия ($\Sigma y=0$):

$$\frac{4M_{пред}}{l} + \frac{2M_{пред}}{l} - F_{пред} = 0$$

$$\frac{6M_{пред}}{l} - \frac{6M_{пред}}{l} = 0$$

Рассмотрим однопролетную балку с жестко зашечленными опорами, нагруженную силой F (рис. 8.7, а).

Единственно возможный механизм предельного состояния балки с образованием трех пластических шарниров показан на рис. 8.7, б.

Уравнение возможных работ всех сил (внешних и внутренних) в состоянии предельного равновесия балки запишется так (работа внутренних сил отрицательна, так как они сопротивляются деформации):

$$F_{пред}\Delta_k - 2M_{пр}\varphi_1 - 2M_{пр}\varphi_2 = 0 \quad (8.12)$$

$$F_{пред} \Delta_k = 2 \Delta M_{пр} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad (8.13)$$

Из (8.13) получим

$$F_{пред} = 2 M_{пр} \frac{l}{ab}, \quad (8.14)$$

$$M_{пред} = \frac{F_{пред} ab}{2l} \quad (8.15)$$

Вертикальные реакции на опорах балки:

$$R_1 = \frac{2M_{пр}}{a} = \frac{F_{пред} b}{l}; \quad R_2 = \frac{2M_{пр}}{b} = \frac{F_{пред} a}{l}$$

Уравнение равновесия ($\sum y = 0$) в предельном состоянии балки удовлетворяется:

$$R_1 + R_2 - F_{пред} = \frac{F_{пред} b}{l} + \frac{F_{пред} a}{l} - F_{пред} = \frac{F_{пред}}{l} (a + b) - F_{пред} = 0$$

Вместо составления уравнения возможных работ на принятом механизме разрушения балки в предельном состоянии каждого пролета проще использовать прием, называемый *способом выравнивания изгибающих моментов*.

Поскольку предельные нагрузки для каждого пролета не зависят от величины соседних пролетов и их загрузений, то каждый пролет неразрезной балки можно рассматривать обособленно от других.

В каждом пролете необходимо определить несущую способность сечения, вычислив $M_{пред}^{раст} = \sigma_T^{раст} W_{пл}$, $M_{пред}^{сж} = \sigma_T^{сж} W_{пл}$, и нанести эти ограничительные линии на схему балки, затем вписать в эти контуры балочные эпюры моментов от заданных нагрузок, предполагая их предельными. Из соотношения ординат балочных эпюр и ординат несущей способности сечений над опорами может быть определен параметр предельной нагрузки балки.

Рассмотрим неразрезную балку, все поперечные сечения которой имеют одинаковую несущую способность на растяжение $M_{пред}^{раст}$, на сжатие $M_{пред}^{сж}$ (рис. 8.8, а).

Балочные эпюры от внешней нагрузки, принятой за предельную, вписаны в пространство, ограниченное параллельными линиями с ординатами $M_{пред}^{раст}$, $M_{пред}^{сж}$ (рис. 8.8, б), позволяють в каждом пролете из соотношения ординат опорных моментов и моментов в пролете определить предельные значения нагрузки. Если нагрузки во всех пролетах связаны одним общим параметром, то за предельное значение принимается его минимальное значение.

Если геометрические характеристики сечений в пролетах неразрезной балки будут различны, то различными получатся и значения предельных моментов над опорами сечений слева и справа от опоры.

В этом случае объемлющую эпюру несущих способностей сечений балки над опорными сечениями следует проводить через меньшую ординату $M_{пред}$.

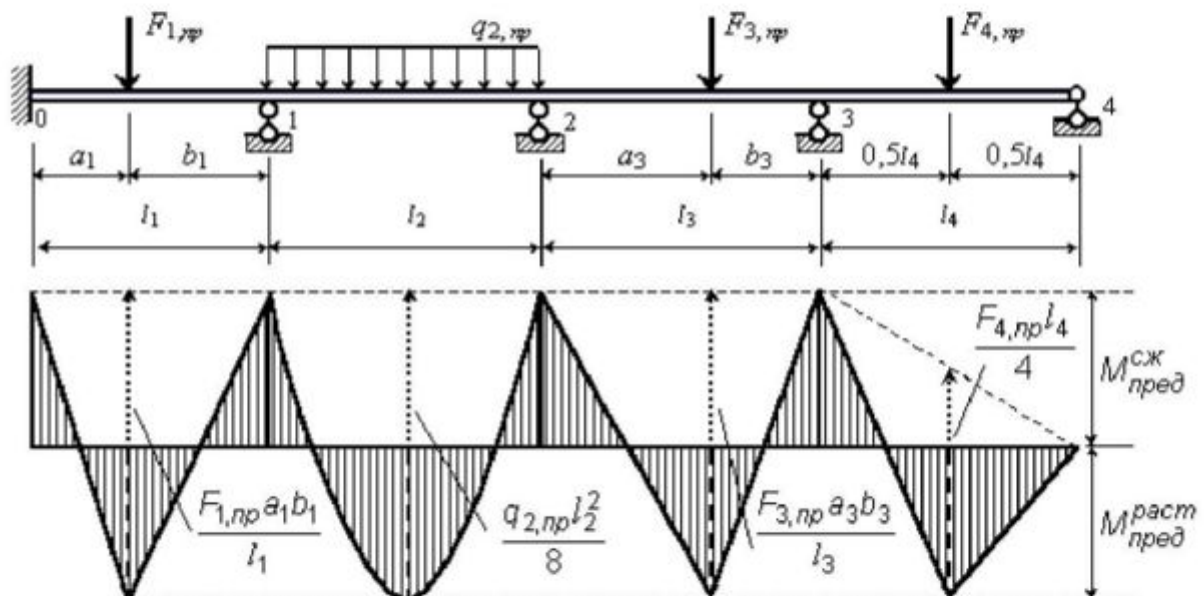


Рис. 8.8. Эпюра изгибающих моментов в предельном состоянии для неразрезной балки постоянного сечения во всех пролетах

Изложенную методику определения грузоподъемности по методу предельного равновесия проиллюстрируем на примере 8.3.

Пример 8.3. Требуется определить предельную нагрузку для трехпролетной неразрезной балки, приведенной на рис. 8.9, а. Балка имеет одинаковые поперечные сечения во всех пролетах из двух двутавров № 40. Пределы текучести материала при растяжении и сжатии одинаковы и равны 200 МПа.

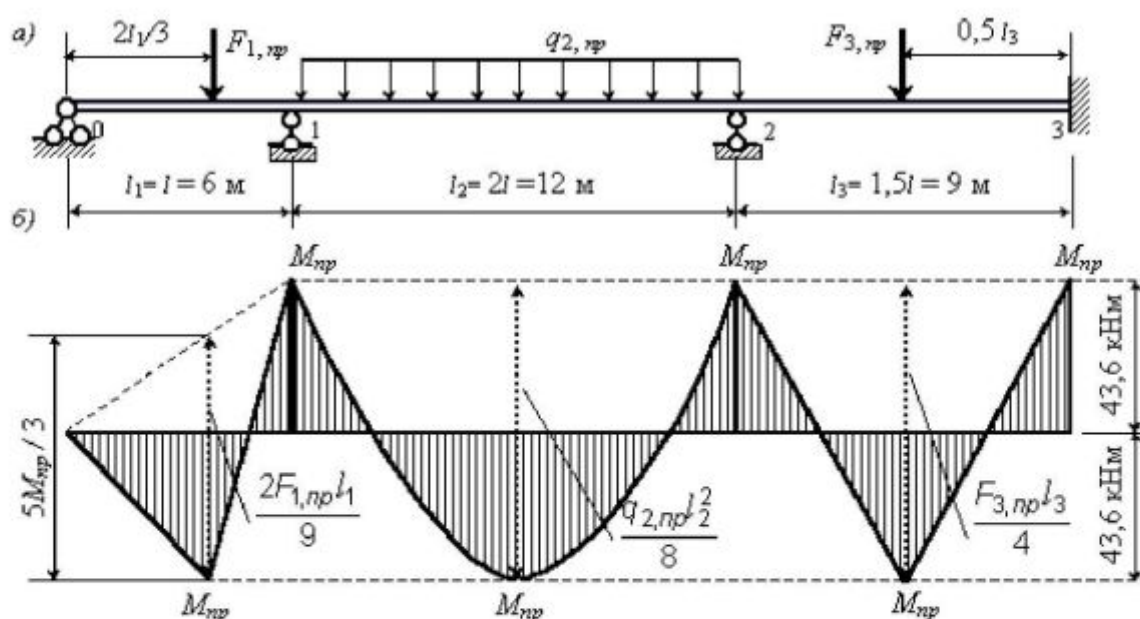


Рис. 8.9. К примеру 8.3: а – заданная схема балки; б – эпюра изгибающих моментов при предельном состоянии каждого пролета

Решение.

Задачу решим при двух вариантах загрузки. При первом варианте нагрузка автономна в каждом пролете, при втором – изменяется пропорционально одному общему параметру.

Определим предельный изгибающий момент, соответствующий возникновению пластического шарнира, для заданного сечения балки по формуле

$$M_{пр} = \sigma_T W_{пл} = 2S_x \sigma_T$$

Статический момент площади полусечения S_x для одного двутавра №40 равен 545 см^3 (ГОСТ 8239–89). Для полного сечения балки пластический момент сопротивления $W_{пл} = 545 \times 2 \times 2 = 2180 \text{ см}^3$. Предельный изгибающий момент $M_{пр}$ при этом получим равным

$$M_{пр} = 2180 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 \cdot 200 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 43600 \text{ Нм} = 43,6 \text{ кНм}$$

На рис. 8.9, б изображены эпюры $M_{пр}$, при которых каждый пролет заданной балки обращается в геометрически изменяемую систему с образованием двух пластических шарниров в первом пролете и по три пластических шарнира во втором и третьем пролетах. Ординаты балочных эпюр моментов для каждого пролета, выраженные через искомую предельную нагрузку, приведены там же. Используя рис. 8.9, б, запишем для каждого пролета связь предельной внешней нагрузки с несущей

способностью пролета и вычислим значение предельной нагрузки в каждом пролете.

В первом пролете $\frac{2}{9}F_{1,пр}l_1 = \frac{5}{3}M_{пр}$, откуда

$$F_{1,пр} = \frac{45M_{пр}}{6l_1} = \frac{45 \cdot 43,6}{6 \cdot 6} = 54,5 \text{ кН},$$

во втором пролете $\frac{q_{2,пр}l_2^2}{8} = 2M_{пр}$, тогда

$$q_{2,пр} = \frac{16M_{пр}}{l_2^2} = \frac{16 \cdot 43,6}{12^2} = 4,84 \text{ кН/м},$$

в третьем пролете $\frac{F_{3,пр}l_3}{4} = 2M_{пр}$, тогда

$$F_{3,пр} = \frac{8M_{пр}}{l_3} = \frac{8 \cdot 43,6}{9} = 38,75 \text{ кН}.$$

Наибольшая допускаемая нагрузка на балку в каждом пролете получается делением полученных значений предельных нагрузок на заданный коэффициент запаса.

Рассмотрим второй вариант решения этой задачи. Нагрузки по всем трем пролетам связаны единым параметром F , например, в таком соотношении:

$$\underline{F_1 = 2F}, \quad \underline{q_2 l_2 = 0,5F}, \quad \underline{F_3 = 1,5F}.$$

Эти соотношения сохраняются до исчерпания несущей способности балки. Требуется определить минимальное предельное значение параметра $F = (F_{пр})_{\min}$, при котором несущая способность балки будет исчерпана.

Используя связь между предельной внешней нагрузкой и несущей способностью балки в каждом пролете (см. рис. 8.9), определим $F_{пр}$, принимая заданные соотношения этого параметра и внешней нагрузки.

Так, при предельном состоянии балки в первом пролете $\frac{2}{9}F_{1,пр}l_1 = \frac{5}{3}M_{пр}$.
Отсюда получим

$$F_{пр} = \frac{45M_{пр}}{12l_1} = \frac{45 \cdot 43,6}{12 \cdot 6} = 27,25 \text{ кН.}$$

При предельном состоянии балки во втором пролете значение предельного параметра нагрузки

$$\frac{q_{2,пр} l_2^2}{8} = 2M_{пр}, \text{ имеем}$$

$$F_{пр} = \frac{16M_{пр}}{0,5l_2} = \frac{16 \cdot 43,6}{0,5 \cdot 12} = 116,2 \text{ кН.}$$

Для третьего пролета имеем соотношение $\frac{F_{3,пр} l_3}{4} = 2M_{пр}$. В результате подстановки $F_{3,пр} = 1,5F_{пр}$, $l_3 = 9\text{м}$ получим

$$F_{пр} = \frac{8M_{пр}}{1,5l_3} = \frac{8 \cdot 43,6}{1,5 \cdot 9} = 25,8 \text{ кН.}$$

Наименьшие значения параметра нагрузки $F_{пр}$ равно 25,8 кН. Это соответствует потере несущей способности третьего пролета балки. Допускаемое значение $F_{пр}$ получим делением найденного значения на заданный коэффициент запаса.

Рассмотрим решение прямой задачи проектирования многопролетной неразрезной балки методом предельного равновесия. В этом случае при заданной расчетной схеме и известной внешней нагрузке определяются размеры поперечного сечения балки. Форма сечения считается заданной. Нагрузка лежит в главной плоскости инерции сечения, являющейся осью симметрии. Пределы текучести при растяжении и сжатии известны. Рассмотрим вначале варианты расчета балки постоянного поперечного сечения по всей длине. Решение будем иллюстрировать на конкретном примере расчета балки, приведенной на рис. 8.10, а. Поперечное сечение балки требуется определить из прокатного двутавра (ГОСТ 8239-89) при пределе текучести на растяжение и сжатие, равном 200 МПа.

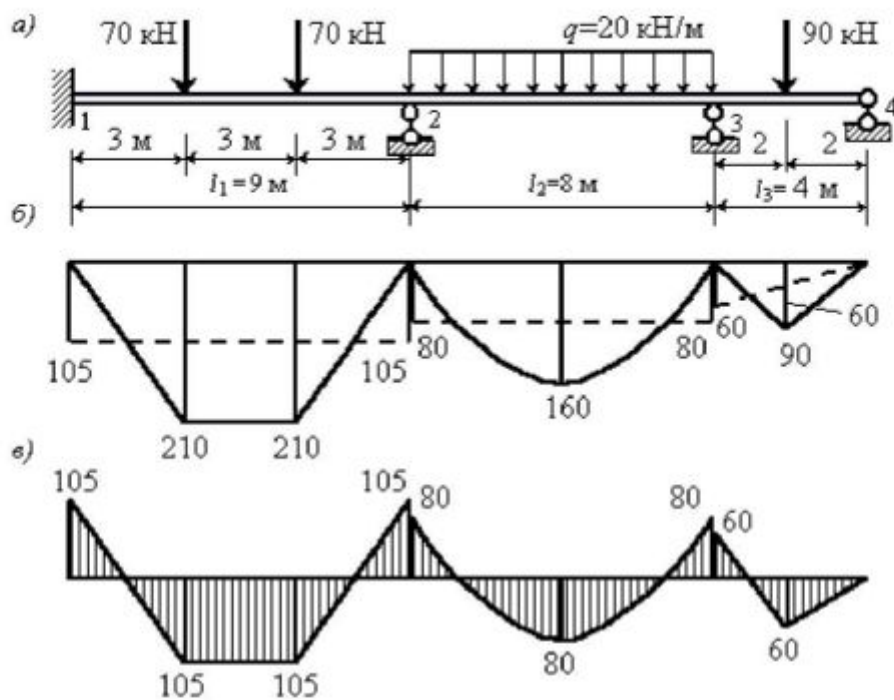


Рис. 8.10. Решение прямой задачи: а – заданная схема балки; б – балочные эпюры изгибающих моментов в каждом пролете; в – эпюры, полученные в результате выравнивания опорных моментов и моментов в пролетах

Считая заданную нагрузку предельной, после построения балочных эпюр изгибающих моментов в каждом пролете производим выравнивание опорных моментов и моментов в пролетах (рис. 8.10, б, в).

Как видно, в первом пролете возникает наибольший по абсолютному значению предельный изгибающий момент

$$M_{пр} = 105 \text{ кНм.}$$

Принимая коэффициент запаса $k=2$, требуемый пластический момент сопротивления сечения при этом получаем

$$[W_{пл}]_{пр} = \frac{M_{пр} k}{\sigma_T} = \frac{105 \cdot 10^3 \text{ Нм} \cdot 2}{200 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2} \cdot 10^6 = 1050 \text{ см}^3$$

Учитывая, что пластический момент сопротивления равен удвоенному статическому моменту S_x площади полусечения относительно горизонтальной оси симметрии двутавра, находим

$$S_x = 0,5W_{пл} = 0,5 \cdot 1050 = 525 \text{ см}^3$$

Требуемому значению S_x соответствует двутавр №40 с $S_x=545 \text{ см}^3$.

Предельное состояние балки в рассмотренном примере будет возникать в первом пролете с образованием пластических шарниров на опорах 1, 2 и в пролете. Второй и третий пролет балки при этом будет работать в упругой стадии.

Вариант решения прямой задачи проектирования при расчете многопролетной неразрезной балки методом предельного равновесия для случая, когда все пролеты теряют несущую способность одновременно, выполним на примере расчета четырехпролетной неразрезной балки, приведенной на рис. 8.11, а. Требуемый пластический момент сопротивления поперечного сечения балки в каждом пролете будет получаться различным.

Последовательность решения этой задачи следующая.

Первоначально строим эпюры балочных моментов в каждом пролете, рассматривая его как двухопорную балку на шарнирных опорах, и производим предварительные выравнивания опорного момента и момента в пролете в пределах каждого пролета (рис. 8.11, б).

При этом на всех промежуточных опорах будет получаться два разных значения предельного изгибающего момента со стороны левого и правого пролетов.

Поэтому на втором этапе расчета корректируем выравнивание предельных моментов, принимая над опорными сечениями один, меньший по абсолютному значению предельный момент (рис. 8.11, в). Полученная окончательно эпюра предельных моментов, с началом отсчета от выравнивающей линии на каждом пролете, приведена на рис. 8.11, г.

Для определения требуемого пластического момента сопротивления в каждом пролете запишем равенство возможных работ внешних и внутренних сил в состоянии предельного равновесия рассматриваемого пролета.

Для вычисления требуемого пластического момента сопротивления

принимаем в первом пролете значение $M_1^{пр}$, во втором – M_2 , в третьем – $M_3^{пр}$, в четвертом – M_4 .

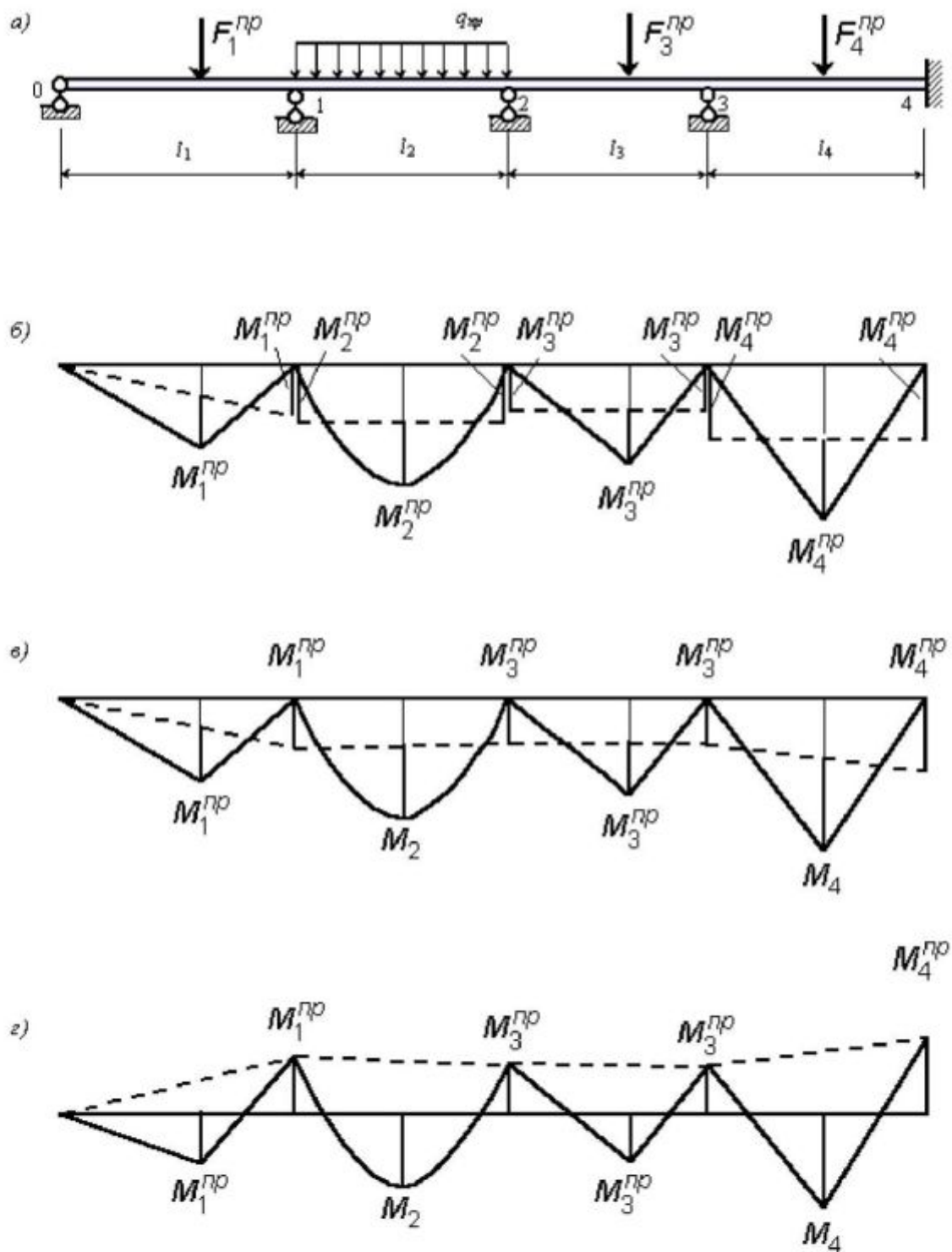


Рис. 8.11. Решение прямой задачи для балки с четырьмя пролетами: а – заданная схема балки; б – балочные эпюры изгибающих моментов в каждом пролете; в – эпюры, полученные в результате выравнивания опорных моментов; г – окончательная эпюра изгибающих моментов

9. Расчет неразрезных балок на ПЭВМ

9.1. Матричный алгоритм метода сил

При расчете статически неопределимых стержневых систем на ПЭВМ используется матричный алгоритм метода сил или метод конечных элементов.

Рассмотрим последовательность операций при расчете неразрезной балки с использованием матричного алгоритма Аргириса для построения эпюр изгибающих моментов от постоянной нагрузки, для получения матриц влияния изгибающих моментов, линий влияния перерезывающих сил в сечениях, линий влияния опорных реакций.

Матричный алгоритм для получения расчетных усилий в заданной статически неопределимой стержневой системе имеет вид

$$\mathbf{S}_{\text{рас}} = [\mathbf{S}_0 - \mathbf{S}_1(\mathbf{S}_1^T \mathbf{G} \mathbf{S}_1)^{-1}(\mathbf{S}_1^T \mathbf{G} \mathbf{S}_0)] \quad (9.1)$$

В этом алгоритме блоки $\mathbf{S}_1^T \mathbf{G} \mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_1^T \mathbf{G} \mathbf{S}_0$ определяют матрицы перемещений: от единичных сил по их направлению – матрица $\delta = \mathbf{S}_1^T \mathbf{G} \mathbf{S}_1$ и от внешней нагрузки по направлению единичных сил – матрица $\Delta = \mathbf{S}_1^T \mathbf{G} \mathbf{S}_0$. Формирование матриц усилий для основной статически определимой системы \mathbf{S}_1 , \mathbf{S}_0 , матрицы податливости \mathbf{G} , входящих в эти блоки, описано в подразд. 2.3.

Основная система принимается в виде однопролетных шарнирно опертых балок с неизвестными опорными моментами X_1, X_2, \dots, X_n .

Матрица $\delta = \mathbf{S}_1^T \mathbf{G} \mathbf{S}_1$ является квадратной, симметричной относительно главной диагонали, имеет ленточную структуру (см. рис. 3.14).

Решение системы уравнений по алгоритму (9.1) выполняется умножением обратной матрицы δ^{-1} на матрицу грузовых коэффициентов

$$\delta^{-1} \Delta = -X \quad (9.2)$$

Матрица значений лишних неизвестных имеет прямоугольную форму из n строк и p столбцов (p – число схем загрузки балки).

Последующие операции матричного алгоритма являются классическими для традиционного метода сил: умножение единичной матрицы усилий \mathbf{S}_1 на матрицу лишних неизвестных – это корректировка единичных эпюр усилий с учетом полученных значений лишних неизвестных.

Последней операцией в алгоритме (9.1) является сложение двух матриц – \mathbf{S}_0 и $\mathbf{S}_1\mathbf{X}$:

$$\mathbf{S}_{\text{рас}} = \mathbf{S}_0 - (-\mathbf{S}_1\mathbf{X}) = \mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_1\mathbf{X} \quad (9.3)$$

Если при расчете на p различных нагрузках необходимо получить значения усилий в сечениях при одновременном действии всех нагрузок, то матрица \mathbf{S}_0 будет иметь один столбец, элементами строк которого являются ординаты эпюры усилий от нагружения основной системы одновременно всеми нагрузками. Когда при расчете статически неопределимой системы на группу внешних нагрузок необходимо получить усилия от каждого отдельного нагружения (например, при построении объемлющих эпюр усилий), то матрица \mathbf{S}_0 будет представлена несколькими столбцами (по количеству схем нагружения). При этом, если внешние нагрузки в рассматриваемой схеме нагружения могут принимать различные числовые значения, то матрицу \mathbf{S}_0 следует формировать по столбцам от каждого нагружения в заданной схеме нагрузок при их единичных значениях. Расчетные усилия от численно заданных нагрузок получим по алгоритму (9.1) умножением результата на вектор \vec{F} :

$$\mathbf{S}_{\text{рас}} = [\mathbf{S}_0 - \mathbf{S}_1(\mathbf{S}_1^T\mathbf{G}\mathbf{S}_1)^{-1}(\mathbf{S}_1^T\mathbf{G}\mathbf{S}_0)] \vec{F} \quad (9.4)$$

В настоящее время на кафедре “Строительная механика” Дальневосточного государственного университета путей сообщения (ДВГУПС) алгоритм (9.1) реализован в программе MS-3 [5]. При расчете плоских и плоскопространственных стержневых систем на статическую нагрузку программа имеет следующие ограничения:

- 1) степень статической неопределимости расчетной схемы $\overline{n} \leq 15$;
- 2) число расчетных сечений (количество строк в матрицах \mathbf{S}_1 , \mathbf{S}_0) $m \leq 40$;
- 3) количество различных нагружений (число столбцов в матрице \mathbf{S}_0) $p \leq 15$;
- 4) количество определяемых параметров деформированного состояния рассчитываемой конструкции $s \leq 15$.

При вычислении перемещений упругой системы с использованием этой программы возможен учет не только изгибных деформаций, но и деформаций растяжения (сжатия), сдвига. При расчете плоскопространственных стержневых конструкций учитываются перемещения, вызванные изгибом и кручением стержней.

Все это можно сделать при формировании матрицы податливости G , вводимой в расчет по алгоритму (9.1). Если расчет выполняется с определением изгибающих моментов, поперечных и продольных сил, а перемещения вычисляются только от изгибных деформаций (балки, рамы), то в матрицу податливости (рис. 9.1) вводятся нулевые блоки G_N и G_Q .

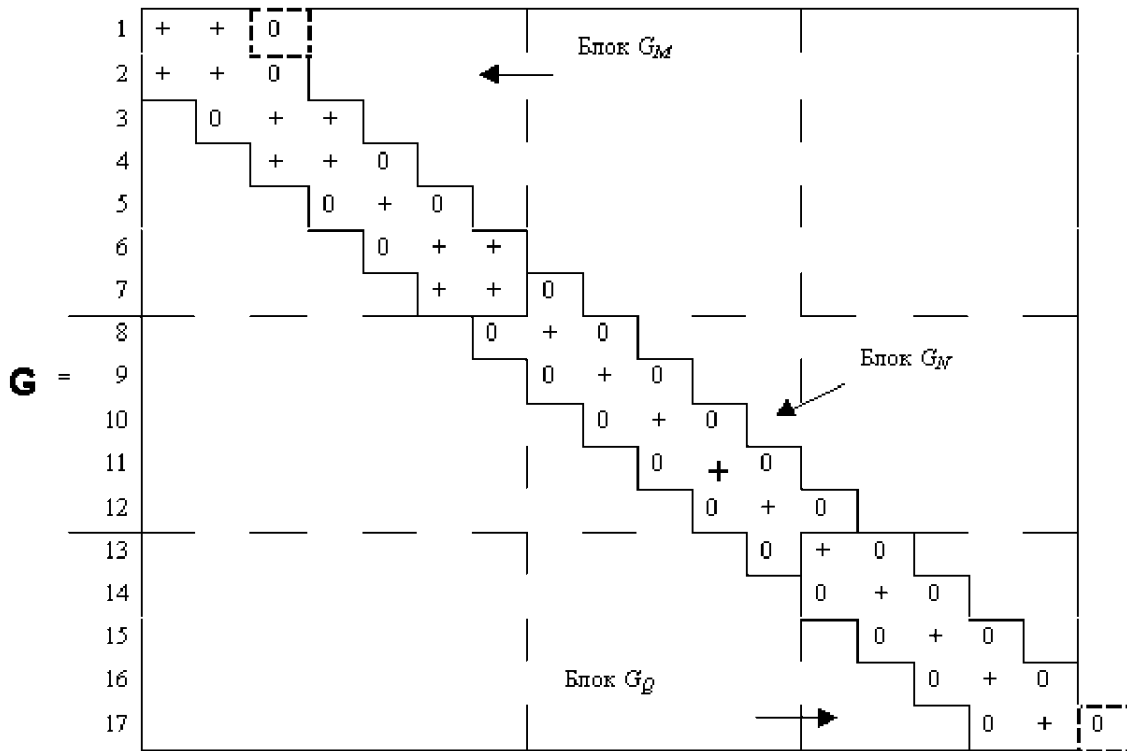


Рис. 9.1. Структура матрицы податливости

Программой *MS-3* предусмотрено введение в память машины только трех лент диагональной матрицы G , как показано на рис. 9.1. При этом необходимо первую и последнюю строки матрицы G дополнить нулевыми значениями (на рис. 9.1 эти элементы обведены пунктирной линией). В память машины матрица G вводится по строкам, при этом в каждой строке будет по три элемента.

Матрица S_1 формируется из n столбцов и m строк по ординатам единичных эпюр усилий в основной статически определимой системе. Матрица S_0 имеет p столбцов и m строк и формируется из ординат эпюры усилий от внешних нагрузок в основной статически определимой системе.

Программа *MS-3* работает в диалоговом режиме с возможностью корректировки исходной информации.

9.2. Расчет неразрезной балки на ПЭВМ по программе *MS-3*

Реализацию алгоритма (9.1) расчета неразрезной балки проиллюстрируем на примере построения матрицы влияния изгибающих моментов L_m для

трехпролетной балки, приведенной на рис. 9.2, а, линии влияния перерезывающей силы Q_7 , линий влияния опорной реакции R_9 .

Основная статически определимая система принимается в виде разрезных однопролетных балок, лишними неизвестными принимаются опорные моменты X_1, X_2 (рис. 9.2, б).

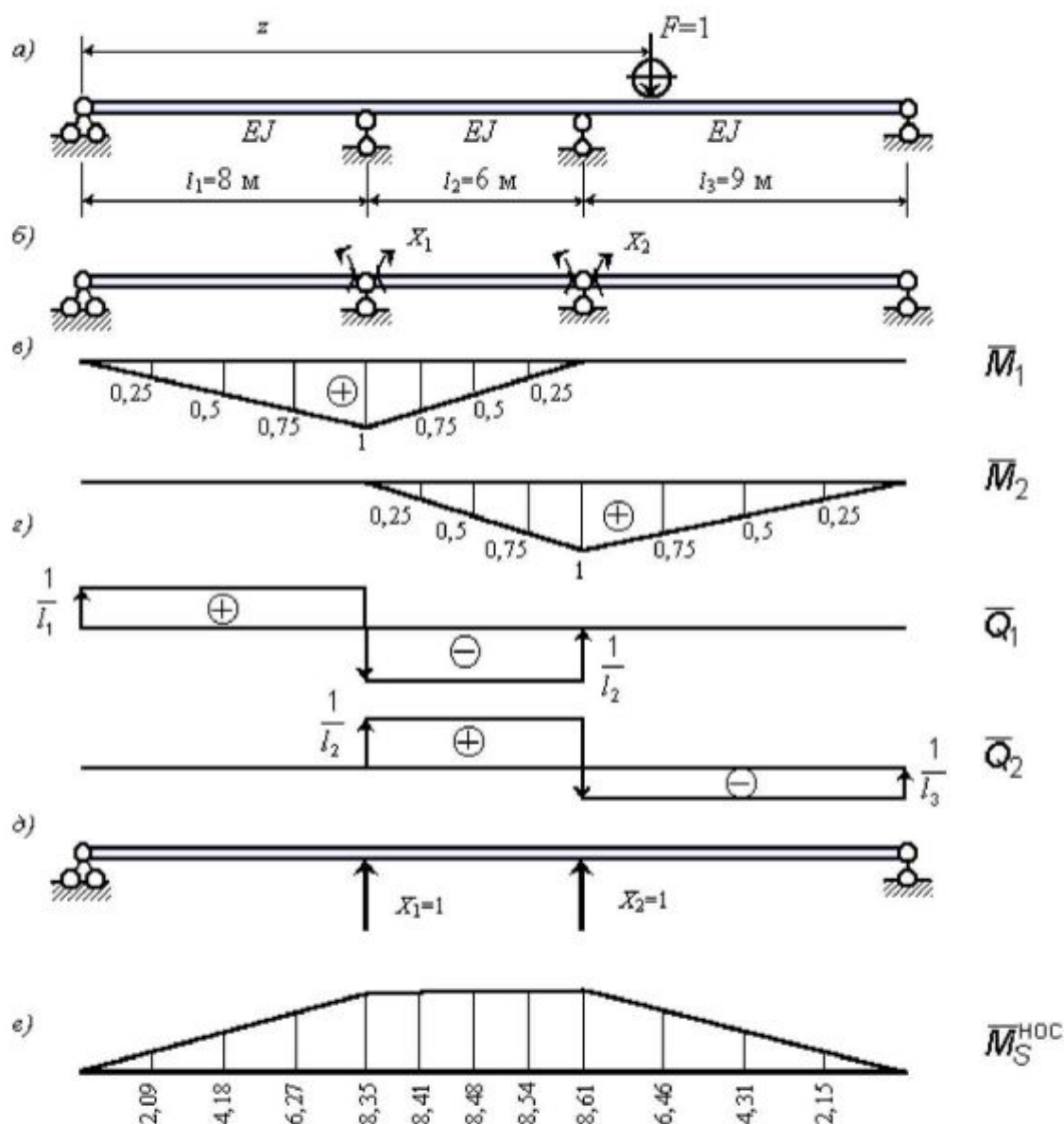


Рис. 9.2. Подготовка исходных данных для расчета трехпролетной неразрезной балки: а – расчетная схема; б – основная статически определимая система; в, г – эпюры изгибающих моментов и перерезывающих сил от $X_1=1$ и $X_2=1$; д – новая основная система для проведения контроля при расчете; е – суммарная единичная эпюра в новой основной системе

Перерезывающая сила от любого нагружения (рис. 9.2, г) в сечении 7 неразрезной балки определяется по выражению (3.19)

$$Q_7 = Q_7^0 - \frac{X_1}{l_2} + \frac{X_2}{l_2},$$

реакция на 9-й опоре в неразрезной балке – по формуле (3.20)

$$R_9 = R_9^0 + \frac{X_1}{l_2} - \left(\frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} \right) X_2.$$

Для линий влияния Q_7 в матрицу S_1 перед X_1 необходимо ввести коэффициент, равный $(-1/l_2) = -1/6 = -0,167$, перед X_2 – коэффициент $1/l_2 = 1/6 = 0,167$. Для линии влияния R_9 перед X_1 множитель равен $1/l_2 = 1/6 = 0,167$, перед X_2 – $(1/6 + 1/9) = 0,278$.

Используя приведенные на рис. 9.2, в, г эпюры, формируем матрицу S_1 (рис. 9.3).

	$X_1 = 1$	$X_2 = 1$
1	0	0
2	0,25	0
3	0,50	0
4	0,75	0
5	1	0
6	0,75	0,25
7	0,50	0,50
8	0,25	0,75
9	0	1
10	0	0,75
11	0	0,50
12	0	0,25
13	0	0
14	0,167	-0,278
15	-0,167	0,167
16	-0,167	0,167

Рассмотрим формирование матрицы податливости. При линейных эпюрах S_1, S_0 блоки матрицы податливости для первого пролета, где $\Delta l_1 = 2$ м, имеют вид:

$$\begin{aligned} G_{12} = G_{23} = G_{34} = G_{45} &= \frac{2}{6EJ} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{6EJ} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

для второго пролета при $\Delta l_2 = 1,5$ м

$$\begin{aligned} G_{56} = G_{67} = G_{78} = G_{89} &= \frac{15}{6EJ} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{6EJ} \begin{vmatrix} 3 & 1,5 \\ 1,5 & 3 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

Рис. 9.3. Матрица S_1

для третьего пролета при $\Delta l_3 = 2,25$ м

$$\mathbf{G}_{9,10} = \mathbf{G}_{10,11} = \mathbf{G}_{11,12} = \mathbf{G}_{12,13} = \frac{2,25}{6EJ} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6EJ} \begin{vmatrix} 4,5 & 2,25 \\ 2,25 & 4,5 \end{vmatrix}.$$

Общая матрица податливости \mathbf{G} для балки приведена на рис. 9.4.

В строках и столбцах 14, 15, 16 матрицы \mathbf{G} записываем нули, так как эти элементы матриц \mathbf{S}_1 , \mathbf{S}_0 на 14-й, 15-й, 16-й строках не должны участвовать в перемножении эпюр при вычислении перемещений.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	4	2	0													
2	2	8	2													
3		2	8	2												
4			2	8	2											
5				2	7	1,5										
6					1,5	6	1,5									
7						1,5	6	1,5								
8							1,5	6	1,5							
9								1,5	7,5	2,25						
10									2,25	9	2,25					
11										2,25	9	2,25				
12											2,25	9	2,25			
13												2,25	4,5	0		
14													0	0	0	
15														0	0	0
16															0	0

Рис. 9.4. Матрица податливости \mathbf{G} (общий множитель $\frac{1}{6EJ}$)

Оконтуренные три ленты элементов матрицы податливости \mathbf{G} показаны на рис. 9.4.

Рассмотрим формирование матрицы \mathbf{L}_0 . При построении матрицы влияния изгибающих моментов \mathbf{L}_m алгоритм (9.1) записывается так

$$\mathbf{L}_m = \mathbf{L}_0 - \mathbf{S}_1 (\mathbf{S}_1^T \mathbf{G} \mathbf{S}_1)^{-1} (\mathbf{S}_1^T \mathbf{G} \mathbf{L}_0). \quad (9.5)$$

Здесь \mathbf{L}_0 – элементы матрицы влияния изгибающих моментов для статически определимой основной системы (рис. 9.5).

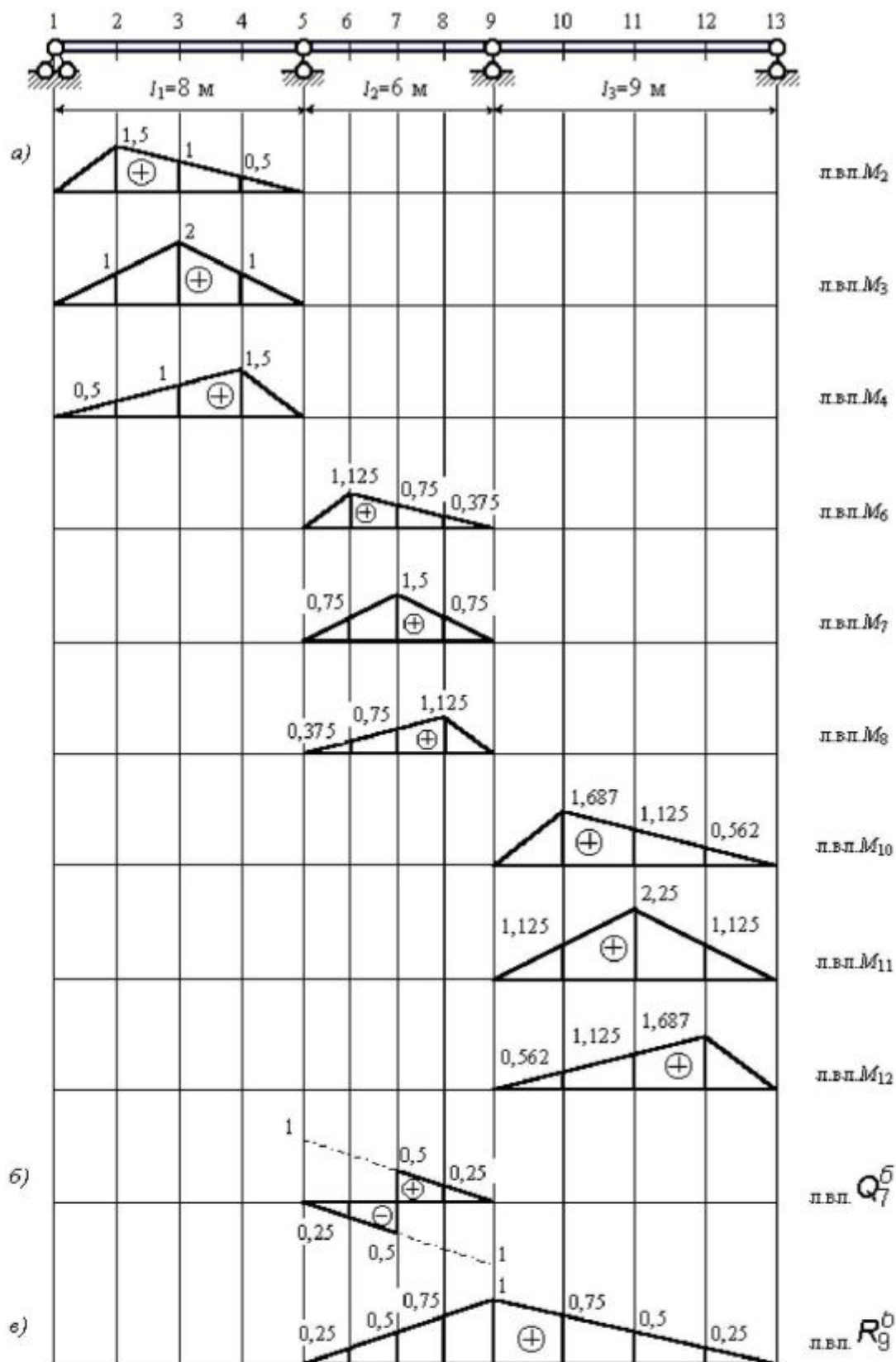


Рис. 9.5. Линии влияния в сечениях статически определимой основной системы: а – изгибающих моментов; б – перерезывающей силы в сечении 7; в – реакции в промежуточной опоре 9

Поскольку линия влияния перерезывающей силы в сечении 7 имеет разрыв (рис. 9.5, б), то ее ординаты в этом сечении в матрицу S_0 вводятся двумя строками.

Контроль правильности полученных результатов сводится к проверке равенства нулю суммарного прогиба в опорных точках 5 и 9 при использовании новой основной системы (см. рис. 9.2, д). Для этого в блок **C** (рис. 9.6) для определения параметров деформированного состояния балки вводится матрица-столбец, элементами которой являются ординаты эпюры \overline{M}_S^{HOC} от двух единичных сил F_5 и F_9 (см. рис. 9.2, е).

Позиция подвижного груза $P=1$

		2	3	4	6	7	8	10	11	12	
L_0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	1,5	1	0,5	0	0	0	0	0	0	2,09
	3	1	2	1	0	0	0	0	0	0	4,18
	4	0,5	1	1,5	0	0	0	0	0	0	6,27
	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8,35
	6	0	0	0	1,125	0,75	0,375	0	0	0	8,41
	7	0	0	0	0,75	1,5	0,75	0	0	0	8,48
	8	0	0	0	0,375	0,75	1,125	0	0	0	8,54
	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8,61
	10	0	0	0	0	0	0	1,687	1,125	0,562	6,46
	11	0	0	0	0	0	0	1,125	2,250	1,125	4,31
	12	0	0	0	0	0	0	0,562	1,125	1,687	2,15
	13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R_9	14	0	0	0	0,25	0,5	0,75	0,75	0,5	0,25	0
Q_7^{Π}	15	0	0	0	-0,25	-0,5	0,25	0	0	0	0
Q_7^{Π}	16	0	0	0	-0,25	0,5	0,25	0	0	0	0

$C=$

Рис. 9.6. Матрицы S_0 и **C**

Перед решением задачи по программе *MS-3* вводятся параметры:

- 1) степень статической неопределимости $n = 2$;
- 2) количество строк в матрицах S_1 , **G**, S_0 $m = 16$;
- 3) число загрузений (число столбцов в матрице S_0) $p = 9$;
- 4) количество определяемых параметров деформированного состояния заданной балки (сумма прогибов y_5+y_9) $c = 1$.

Вводятся матрицы S_1 , **G**, S_0 , **C** по строкам. Перед вводом матрицы податливости указывается значение общего множителя перед ней.

Исходные параметры и матрицы, промежуточные и окончательные результаты расчета можно просмотреть на дисплее, а при необходимости выдать на печать.

В табл. 9.1–9.4 приведена распечатка основных параметров задачи, исходных матриц S_1 , G , S_0 , C . Промежуточные результаты расчета – единичная матрица δ , матрица грузовых коэффициентов δ_0 , матрица лишних неизвестных при всех позициях единичного подвижного груза – показаны в табл. 9.5–9.7.

Окончательные результаты расчета – матрица влияния изгибающих моментов L_m , ординаты линии влияния R_9 , Q_7 – представлены в форме табл. 9.8. Там же приведена контрольная строка – сумма прогибов в точках 5 и 9 при каждой позиции подвижной единичной силы. На рис. 9.7, 9.8 полученные результаты представлены графически.

Машинная распечатка результатов

Параметры задачи $n=2, m=16, r=9, c=1, L_0/6EI_0=0.1667$

Таблица 9.1

Матрица единичных усилий S

	1	2
1	0,00	0,00
2	0,25	0,00
3	0,50	0,00
4	0,75	0,00
5	0,50	0,00
6	0,25	0,25
7	0,00	0,50
8	0,00	0,75
9	0,00	1,00
10	0,00	0,75
11	0,00	0,50
12	0,00	0,25
13	0,00	0,00
14	0,17	-0,28
15	-0,17	0,17
16	-0,17	0,17

Таблица 9.2

Матрица податливости G

	1	2	3
1	0,67	0,33	0,00
2	0,33	1,33	0,33
3	0,33	1,33	0,33
4	0,33	1,33	0,33
5	0,33	1,17	0,25
6	0,25	1,00	0,25
7	0,25	1,00	0,25
8	0,25	1,00	0,25
9	0,25	1,25	0,38
10	0,38	1,50	0,38
11	0,38	1,50	0,38
12	0,38	1,50	0,38
13	0,38	0,75	0,00
14	0,00	0,00	0,00
15	0,00	0,00	0,00
16	0,00	0,00	0,00

Таблица 9.3

Матрица грузовых усилий $S_p (L_0)$

	2	3	4	6	7	8	10	11	12
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2	1,50	1,00	0,50	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
3	1,00	2,00	1,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
4	0,50	1,00	1,50	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
6	0,00	0,00	0,00	1,13	0,75	0,38	0,00	0,00	0,00
7	0,00	0,00	0,00	0,75	1,50	0,75	0,00	0,00	0,00
8	0,00	0,00	0,00	0,38	0,75	1,13	0,00	0,00	0,00
9	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
10	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,69	1,13	0,56
11	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,13	2,25	1,13
12	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,56	1,13	1,69
13	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
R_g	0,00	0,00	0,00	0,25	0,50	0,75	0,75	0,50	0,25
$Q_{7,л}^b$	0,00	0,00	0,00	-0,25	-0,50	0,25	0,00	0,00	0,00
$Q_{7,лр}^b$	0,00	0,00	0,00	-0,25	0,50	0,25	0,00	0,00	0,00

Таблица 9.4

Матрица C

1	0,00
2	2,09
3	4,18
4	6,27
5	8,35
6	8,41
7	8,48
8	8,54
9	8,61
10	6,46
11	4,31
12	2,15
13	0,00
14	0,00
15	0,00
16	0,00

Таблица 9.5

Матрица единичных перемещений δ_{ij}

$$\delta = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{vmatrix} 4,67 & 1,00 \\ 1,00 & 5,00 \end{vmatrix} \end{matrix}$$

Таблица 9.6

Матрица грузовых перемещений δ_{0i}

Коэффициенты	Позиция подвижного груза $F = 1$								
	2	3	4	6	7	8	10	11	12
δ_{10}	2,50	4,00	3,50	1,97	2,25	1,41	0,00	0,00	0,00
δ_{20}	0,00	0,00	0,00	1,41	2,25	1,97	4,43	5,06	3,16

Таблица 9.7

Матрица лишних неизвестных X_1

Лишние	Позиция подвижного груза $F = 1$
--------	----------------------------------

	2	3	4	6	7	8	10	11	12
X_1	-0,56	-0,90	-0,78	-0,38	-0,40	-0,23	0,20	0,23	0,14
X_2	0,11	0,18	0,16	-0,21	-0,37	-0,35	-0,93	-1,06	-0,66

Таблица 9.8

Результаты расчета

Сече- ния	Позиция подвижного груза $F=1$								
	2	3	4	6	7	8	10	11	12
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2	1,36	0,78	0,30	-0,09	-0,10	-0,06	0,05	0,06	0,04
3	0,72	1,55	0,61	-0,19	-0,20	-0,11	0,10	0,11	0,07
4	0,08	0,33	0,91	-0,28	-0,30	-0,17	0,15	0,17	0,11
5	-0,56	-0,90	-0,78	-0,38	-0,40	-0,23	0,20	0,23	0,14
6	-0,39	-0,63	-0,55	0,79	0,36	0,12	-0,08	-0,09	-0,06
$L_{ж} =$ 7	-0,22	-0,36	-0,31	0,46	1,11	0,46	-0,36	-0,42	-0,26
8	-0,06	-0,09	-0,08	0,13	0,37	0,81	-0,64	-0,74	-0,46
9	0,11	0,18	0,16	-0,21	-0,37	-0,35	-0,93	-1,06	-0,66
10	0,08	0,13	0,12	-0,15	-0,28	-0,26	0,99	0,33	0,07
11	0,06	0,09	0,08	-0,10	-0,18	-0,17	0,66	1,72	0,79
12	0,03	0,04	0,04	-0,05	-0,09	-0,09	0,33	0,86	1,52
13	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
R_9	-0,12	-0,20	-0,17	0,24	0,54	0,81	0,94	0,83	0,46
лев. Q_7	0,11	0,18	0,16	-0,22	-0,49	0,23	-0,19	-0,21	-0,13
пр. Q_7	0,11	0,18	0,16	-0,22	0,51	0,23	-0,19	-0,21	-0,13
xx	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Примечание. xx – контрольная строка (суммарный прогиб на опорах 5, 9)

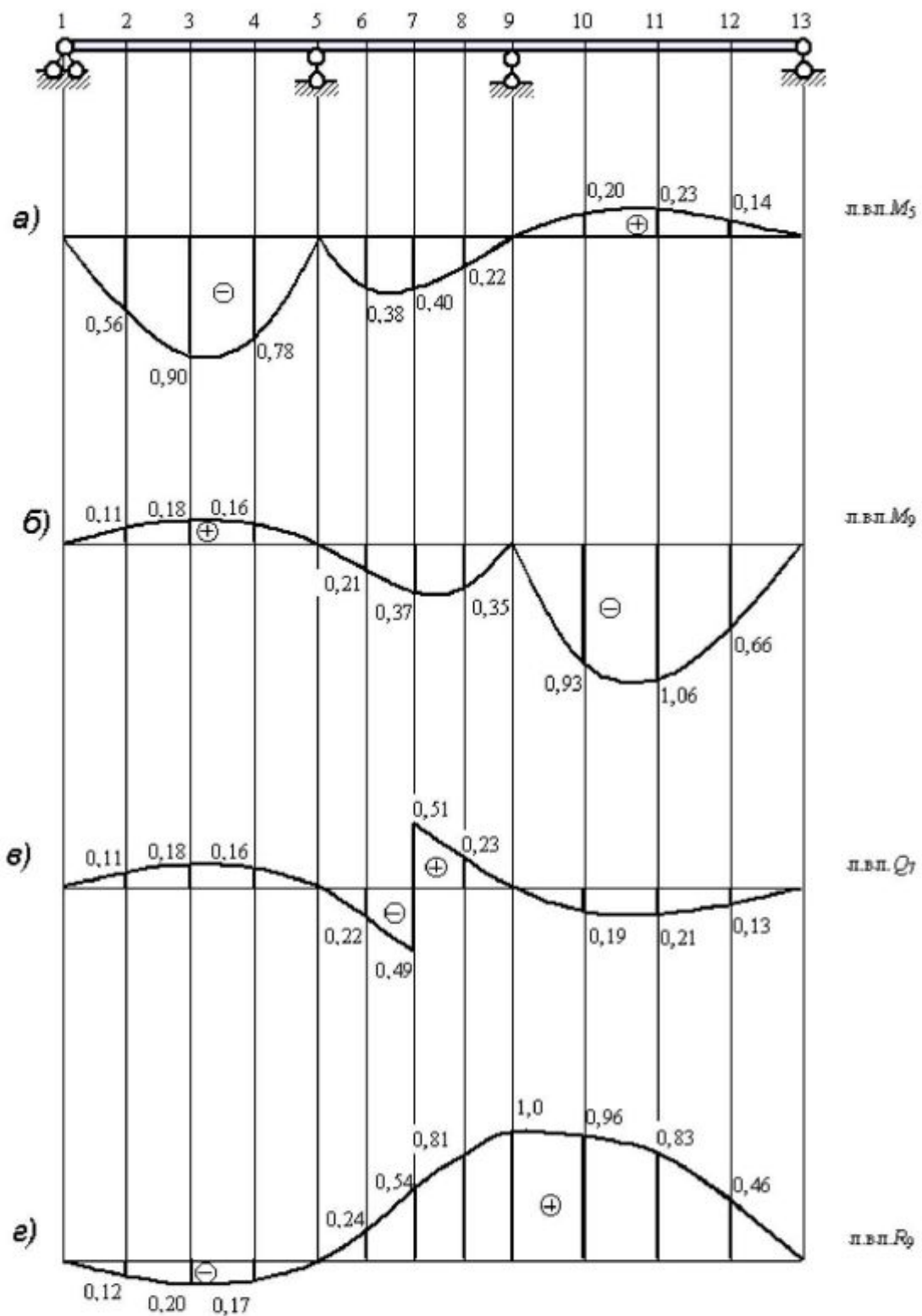


Рис. 9.7. Линии влияния искомых усилий в сечениях неразрезной балки: а – л.вл. M_5 (X_1); б – л.вл. M_9 (X_2); в – л.вл. Q_7 ; г – л.вл. R_9

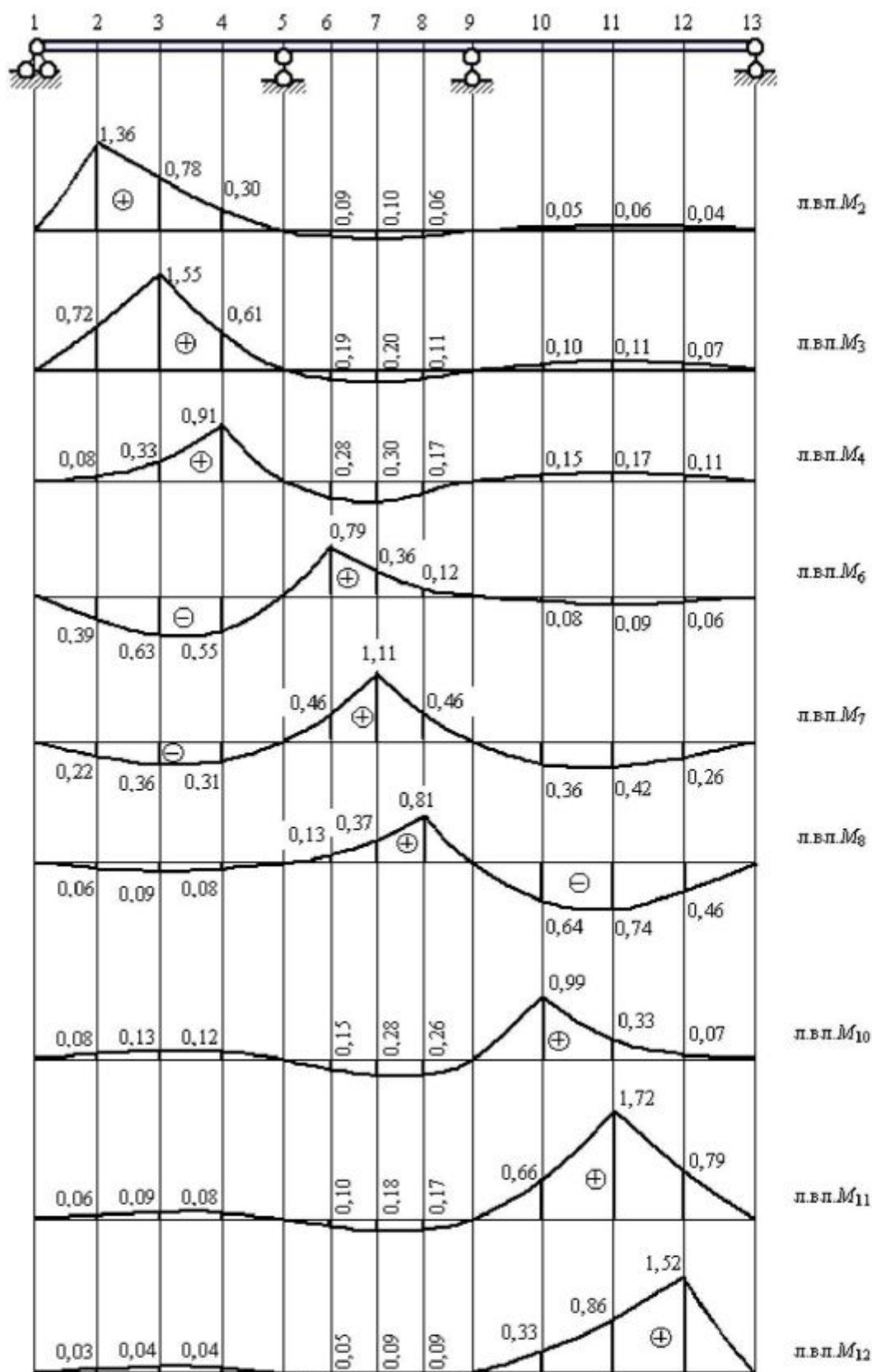


Рис. 9.8. Линии влияния изгибающих моментов в сечениях неразрезной балки

10. Правила загрузки криволинейных линий влияния подвижной эксплуатационной нагрузкой

При расчете пролетных строений мостов нормативная временная вертикальная нагрузка от железнодорожного подвижного состава, от одиночных тяжелых колесных и гусеничных единиц, колонн автомобилей принимается в виде объемлющих максимальных эквивалентных равномерно распределенных нагрузок, значения интенсивности которых приведены в таблицах [14, прил. 5, 6, 7].

Эквивалентная равномерно распределенная нагрузка при загрузении однозначного участка линии влияния треугольного вида определяется в зависимости от длины загрузки λ и относительного положения

максимальной ординаты линии влияния на загруженном участке – $\alpha = \frac{a}{\lambda}$ (a – проекция наименьшего расстояния от вершины до конца линии влияния).

Для криволинейных линий влияния (всегда в статически неопределимых системах) интенсивность эквивалентной нагрузки определяется по формуле

$$q_{кр} = q_{\Delta} \left[1 + \frac{e(\psi - 1)}{100} \right], \quad (10.1)$$

где q_{Δ} – эквивалентная нагрузка для треугольной линии влияния с λ и α , вычисленными для криволинейной линии влияния; e – коэффициент, зависящий от λ , α и для нагрузки СК (железнодорожный подвижной состав)

определяемый по графикам, приведенным на рис. 10.1; $\psi = \frac{\omega_{\Delta}}{\omega_{кр}}$ – коэффициент искаженности, равный отношению площади треугольной линии влияния ω_{Δ} к площади рассматриваемой линии влияния $\omega_{кр}$ при одинаковых длинах и максимальных ординатах.

Например, определим влияние коэффициента искаженности ψ на величину эквивалентной нагрузки при вычислении наибольшего отрицательного изгибающего момента в сечении 11 неразрезной балки, приведенной на рис. 9.7, от железнодорожного подвижного состава класса СК-14. Для этого следует рассмотреть загрузение пролета $l_3=9$ м. Фрагмент линии влияния M_{11} для этого пролета приведен на рис. 10.2.

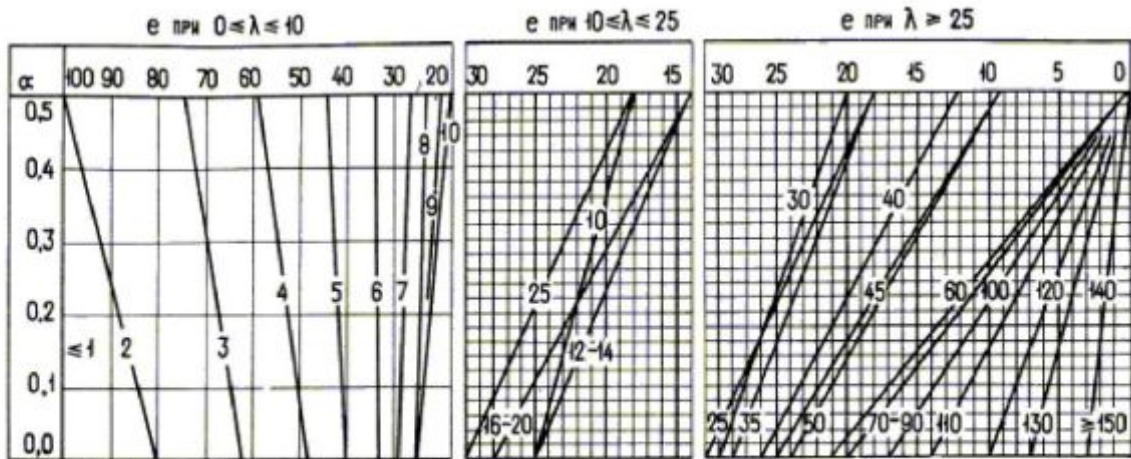


Рис. 10.1. Коэффициент e в зависимости от λ и α

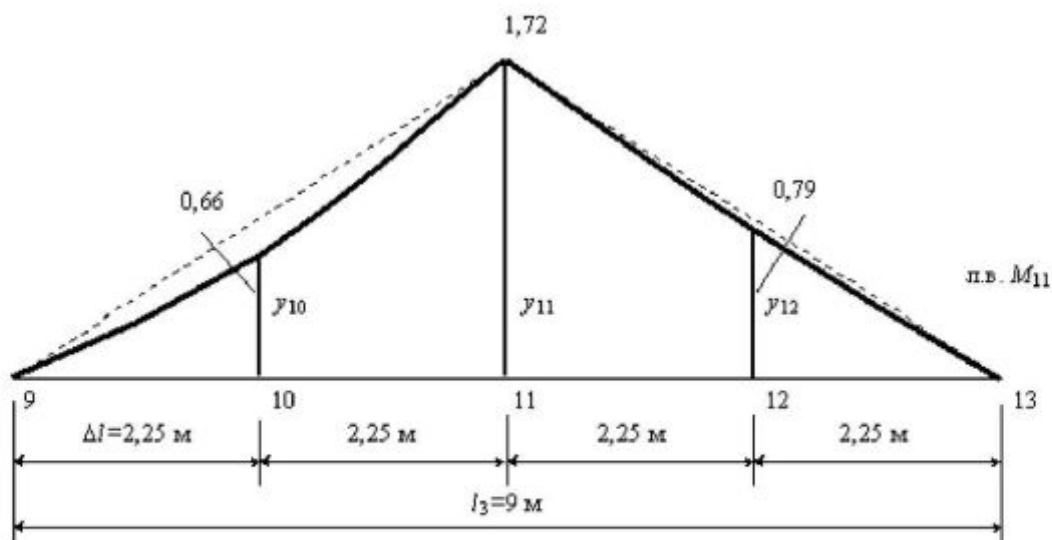


Рис. 10.2. К определению $q_{экв}$ для криволинейной линии влияния

Для треугольной линии влияния при $\lambda = 9\text{ м}$, $\alpha = 4,5/9 = 0,5$ эквивалентная нагрузка вычисляется по формуле (1) приложения

$$\begin{aligned}
 q_{\Delta} &= \left(9,807 + \frac{10,787}{e^{0,04\lambda}} + \frac{43,149}{\lambda^2} \right) \left(1 - \frac{\alpha}{4} \right) K = \\
 &= \left(9,807 + \frac{10,787}{e^{0,04 \cdot 9}} + \frac{43,149}{9^2} \right) \left(1 - \frac{0,5}{4} \right) 14 = 2189 \text{ кН/м}
 \end{aligned}$$

или с использование линейной интерполяции по табл. 1 приложения.

Определим значение коэффициента искаженности ψ . Площадь

криволинейной линии влияния вычислим по формуле Симпсона при $\Delta l = \frac{l_3}{4}$

$$\omega_{кр} = \frac{\Delta l}{3}(y_9 + 4y_{10} + 2y_{11} + 4y_{11} + y_{12}) = 6,93 \text{ м}^2.$$

Площадь треугольной линии влияния с теми же максимальной ординатой и основанием (см. рис. 10.2)

$$\omega_{\Delta} = \frac{1,72 \cdot 9}{2} = 7,74 \text{ м}^2.$$

Коэффициент искаженности линии влияния получим равным

$$\psi = \frac{\omega_{\Delta}}{\omega_{кр}} = \frac{7,74}{6,93} = 1,12.$$

При $\lambda = 9 \text{ м}$, $\alpha = 0,5$ (см. рис. 10.1) $e = 22\%$

$$q_{экв} = 218,9 \left[1 + \frac{22(1,12 - 1)}{100} \right] = 224,7 \text{ кН/м}.$$

Увеличение эквивалентной нагрузки при определении $\min M_{11}$ для рассматриваемого примера составило 2,6% по сравнению с $q_{экв}$ для линий влияния треугольного вида.

Если $\psi < 1,1$, то значение эквивалентной нагрузки $q_{экв}$ при криволинейной линии влияния следует принимать равным найденному q_{Δ} без корректировки.

При $\psi > 1,4$ расчетное усилие получается суммированием усилий от загрузки частей линии влияния.

Для одиночной тяжелой колесной или гусеничной нагрузки значения $q_{экв}$ при криволинейных линиях влияния в зависимости от коэффициента искаженности ψ приведены в табл. 3 приложения.

Приложение

Таблица 1

Нормативная временная вертикальная нагрузка СК от железнодорожного подвижного состава (при $K=1$)

Длина загружения λ , м	Интенсивность эквивалентной нагрузки $q_{\text{экв}}$, кН/м		Длина загружения λ , м	Интенсивность эквивалентной нагрузки $q_{\text{экв}}$, кН/м	
	$\alpha=0$	$\alpha=0,5$		$\alpha=0$	$\alpha=0,5$
1	49,03	49,03	25	13,85	12,12
1,5	39,15	34,25	30	13,10	11,46
2	30,55	26,73	35	12,50	10,94
3	24,16	21,14	40	12,01	10,51
4	21,69	18,99	45	11,61	10,16
5	20,37	17,82	50	11,29	9,875
6	19,50	17,06	60	10,80	9,807
7	18,84	16,48	70	10,47	9,807
8	18,32	16,02	80	10,26	9,807
9	17,87	15,63	90	10,10	9,807
10	17,47	15,28	100	10,00	9,807
12	16,78	14,68	110	9,944	9,807
14	16,19	14,16	120	9,895	9,807
16	15,66	13,71	130	9,865	9,807
18	15,19	13,30	140	9,846	9,807
20	14,76	12,92	150 и более	9,807	9,807

Примечания: 1. Эквивалентные нагрузки $q_{\text{экв}}$ при значениях параметров $1,5 \leq \lambda \leq 50$ м ($\alpha = 0$ и $\alpha = 0,5$) и $\lambda > 50$ м ($\alpha = 0$) получены по формуле

$$q_{\text{экв}} = \left(9,807 + \frac{10,787}{e^{0,04\lambda}} + \frac{43,149}{\lambda^2} \right) \left(1 - \frac{\alpha}{4} \right) K, \quad (1)$$

где $e=2,71828\dots$ – основание натурального логарифма.

2. Для промежуточных значений длин загружения λ и промежуточных положений вершин линий влияния $\alpha < 0,5$ величины нагрузки $q_{\text{экв}}$ следует определять по линейной интерполяции.

Таблица 2

Нормативная временная вертикальная нагрузка от одиночных тяжелых нагрузок НК-80 и НГ-60

Длина загрузки λ , м	Интенсивность эквивалентной нагрузки $q_{\text{экр}}, \text{кН/м}$			Длина загрузки λ , м	Интенсивность эквивалентной нагрузки $q_{\text{экр}}, \text{кН/м}$		
	НК-80		НГ-60		НК-80		НГ-60
	$\alpha=0,25;$ $\alpha=0,5$	$\alpha=0$			$\alpha=0,25;$ $\alpha=0,5$	$\alpha=0$	
4	176,5	215,7	117,7	20	69,04	71,4	51,5
5	163,2	200,8	117,7	22	63,55	65,5	47,4
6	156,9	183,1	114,4	24	58,84	60,5	43,9
7	147,3	166,6	108,1	26	54,82	56,2	40,9
8	137,3	152,0	101,1	28	51,19	52,5	38,2
9	127,9	139,5	94,4	30	48,15	49,1	36,0
10	119,2	128,7	88,3	32	45,31	46,3	33,9
11	111,5	119,3	82,7	36	40,70	41,4	30,4
12	104,6	111,1	77,7	40	36,87	37,5	27,6
13	98,46	104,0	73,1	50	29,91	30,2	22,4
14	92,87	97,7	69,0	60	25,11	25,4	18,8
15	87,87	92,1	65,4	70	21,67	21,9	16,2
16	83,36	87,1	62,1	80	19,02	19,2	14,2
18	75,51	78,4	56,3				

Примечания: 1. Эквивалентные нагрузки $q_{\text{экр}}$ при значениях параметров $0 \leq \alpha \leq 0,25$ получены по формуле

$$q_{\text{экр}} = \frac{1569}{\lambda^2} \left(\lambda - \frac{1,8}{1-\alpha} \right); \quad (2)$$

при значениях $0,25 < \alpha \leq 0,5$

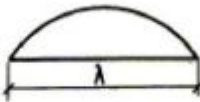





$$q_{\text{экр}} = \frac{1569}{\lambda^2} \left[\lambda - \frac{0,6}{1-\alpha} - \frac{0,3}{\alpha(1-\alpha)} \right], \quad (3)$$

где $e=2,71828\dots$ – основание натурального логарифма.

2. Для промежуточных значений длин загрузки λ и промежуточных положений вершин линий влияния $\alpha < 0,25$ величины нагрузки $q_{\text{экр}}$ следует определять по линейной интерполяции.

Таблица 3

Нормативная временная вертикальная нагрузка от одиночных тяжелых нагрузок НК-80 и НГ-60 для криволинейных линий влияния

Длина загрузки λ , м	Эквивалентные нагрузки, кН/м, для криволинейных линий влияния						
	НК-80	НГ-60	НК-80			НГ-60	
	$\psi=0,75 - 0,85$	$\psi=1,05 +$ $+ 1,25$	$\psi=1,30 +$ $+ 1,50$	$\psi=1,1 +$ $+ 1,2$	$\psi=1,05 +$ $+ 1,25$	$\psi=1,30 +$ $+ 1,50$	
							
4	159	118	182	190	225	118	118
5	158	118	170	175	210	118	118
6	157	114	162	171	191	116	117
7	145	108	153	165	177	111	113
8	130	102	144	158	163	105	109
9	121	93	135	150	151	99	105
10	112	86	127	140	140	94	100
12	97	73	110	127	123	83	90
14	85	65	101	114	109	76	77
16	75	56	92	104	97	69	76
18	67	50	83	95	87	62	72
20	61	45	76	88	81	57	68
22	56	42	70	81	74	53	59
24	51	38	66	76	69	49	56
26	47	35	62	71	64	46	54
28	44	32	58	67	60	43	49
30	41	30	54	64	56	41	47
32	38	28	52	60	53	38	44
36	34	25	46	54	47	34	40
40	31	24	42	49	43	31	36

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 1995. – 560 с.
2. Дарков А.В., Клейн Г.К., Кузнецов В.И. Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1976. – 600 с.
3. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 1989. – 624 с.
4. Киселев В.А. Строительная механика. – М.: Стройиздат, 1976. – 504 с.
5. Кособлик Ф.И. Программа **MS-3** для расчета стержневых статически неопределимых систем на ПЭВМ. – Хабаровск: ДВГАПС, 1996. – 28 с.
6. Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А. Основы строительной механики стержневых систем. – М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 1996. – 541 с.
7. Рабинович И.М. Курс строительной механики. Ч. II. – М.: Госстройиздат, 1954. – 544 с.

8. Рабинович И.М. Основы строительной механики стержневых систем. – М.: Госстройиздат, 1960. – 519 с.
9. Ржаницын А.Р. Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1982. – 400 с.
10. Рудых О.Л., Соколов Г.П., Пахомов В.Л. Введение в нелинейную строительную механику. – М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 1999. – 105 с.
11. Смирнов А.Ф. и др. Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 1975. – 480 с.
12. Соловьев В.Л. Расчет статически неопределимых стержневых систем на ЭЦВМ: Учебное пособие. –Хабаровск: ХаБииЖТ, 1974. – 105 с.
13. Строительная механика стержневых систем / А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Я. Лащенников и др. – М.: Стройиздат, 1981. – 512 с.
14. СНИП 2.05.03–84*. Мосты и трубы. – М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1988. – 200 с.
15. Филин А.П., Соколова А.С. Строительная механика корабля. Ч. I. – Л.: Речной транспорт, 1957. – 438 с.
16. Шестаков А.В. Формирование матрицы податливости при определении перемещений в элементах переменной жесткости при криволинейных эпюрах вспомогательных состояний. – Хабаровск: ХаБииЖТ, 1974. – 76 с.