

ОПД.Р.03 СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА РАСЧЕТ КОНСТРУКЦИЙ И СООРУЖЕНИЙ ПРИ ДИНАМИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Курс лекций

В предлагаемом курсе лекций отражаются вопросы, связанные с проблемами расчета сооружений на динамические воздействия различного вида. Описаны основные методы решения дифференциальных уравнений, характеризующих колебательные процессы. Рассматриваются свободные и вынужденные колебания систем с одной степенью свободы при действии гармонических и импульсных нагрузок. Ряд разделов посвящен изучению методик расчета активной и пассивной виброизоляции. Описываются основные типы приборов для экспериментального изучения динамических процессов. Приводится методика решения задач с несколькими степенями свободы при действии детерминированных динамических нагрузок на основе разложения по собственным формам колебаний.

Особое внимание уделено изучению частотного анализа. Рассмотрены основы теории случайных процессов и вопросы расчета на ветровые и сейсмические нагрузки.

Данная работа включает в себя материал, излагаемый автором магистрантам строительного профиля (специализация 550101 «Теория и проектирование зданий и сооружений») при чтении курса лекций «Конструирование, расчет и реконструкция сооружений при динамических воздействиях» (6-й курс, 11-й семестр). Лекция 10 написана проф. М.Д. Мосесовым, лекция 13 – автором при участии асп. Д.Д. Чернышева, лекция 14 – совместно с Р.А. Улицкой.

При изучении курса предполагается владение основами строительной механики в области статического расчета и знаниями математики в объеме вузовского курса. В процессе изучения курса предусматриваются практические занятия и выполнение курсовой работы по расчету и проектированию активной и пассивной виброизоляции и расчету рам на основе разложения решения по собственным формам.

Курс лекций может использоваться при изучении разделов строительной механики студентами строительных специальностей (290300 «Промышленное и гражданское строительство», 290301 «Городское строительство и хозяйство», 270200 «Транспортное строительство», 291300 «Механизация и автоматизация в строительстве») и рядом других. Этот курс предназначен также для использования проектировщиками, научными работниками, аспирантами и инженерами при повышении квалификации.

СОДЕРЖАНИЕ

Лекция 1 Общие понятия о динамическом анализе	8
1.1 Цель динамического анализа	8
1.2 Виды хорошо определенных нагрузок	9
1.3 Основные характеристики задач динамики	10
1.4 Методы дискретизации	11
1.4.1 Метод сосредоточенных масс	11
1.4.2 Обобщенные перемещения	12
1.4.3 Метод конечных элементов (МКЭ)	13
1.5 Общие методы вывода уравнений движения	14
1.6 Расчетные динамические модели	17
Лекция 2 Системы с 1-й степенью свободы	23
2.1 Цель динамического анализа	23
2.2 Примеры. Использование принципа Даламбера	26
2.3 Использование принципа Гамильтона	29
2.4 Двумерные задачи	32
Лекция 3 Реакция систем при динамических воздействиях общего вида	33
3.1 Решение однородного дифференциального уравнения	33
3.1.1 Общая методика решения однородного дифференциаль- ного уравнения с учетом затухания	33
3.1.2 Свободные колебания без учета затухания	34
3.1.3 Свободные колебания с учетом затухания	35
3.1.4 Пример. Определение параметров затухания	38
3.2 Общая методика решения неоднородного дифференциального уравнения	39
3.3 Иллюстрация решения неоднородного дифференциального уравнения. Интеграл Дюамеля. Коэффициент динамичности ..	40
Лекция 4 Реакция систем с одной степенью свободы при гармонических воздействиях	42
4.1 Недемпфированная система	43
4.2 Демпфированная система	44

4.3	Пример. Определение динамических характеристик сооружения	47
4.4	Резонансный режим	48
Лекция 5 Виброизоляция (виброзащита)		51
5.1	Вибрации и виброизоляция	51
5.2	Активная виброизоляция	52
5.3	Пассивная виброизоляция	53
5.4	Проектирование виброизоляции	56
5.5	Расчет характеристик пружинных демпферов	59
5.6	Примеры расчета виброизоляции	60
Лекция 6 Динамические гасители колебаний		64
6.1	Динамический гаситель без учета демпфирования	64
6.2	Динамический гаситель с учетом демпфирования	67
6.3	Пример расчета динамического гасителя для активной виброзащиты	70
6.4	Пример расчета динамического гасителя для пассивной виброзащиты	72
Лекция 7 Реакция системы с одной степенью свободы при импульсных и непериодических нагрузках		74
7.1	Мгновенный импульс	74
7.2	Сила, действующая за короткий отрезок времени	75
7.3	Внезапно приложенная нагрузка	76
7.4	Внезапно приложенная нагрузка при $t=0$ и удаленная при $t=\tau$	77
7.5	Периодическое повторное нагружение	79
7.6	Реакция при линейном возрастании возмущающей нагрузки	79
7.7	Реакция при линейном возрастании возмущающей нагрузки и затем постоянной	80
7.8	Линейно убывающая нагрузка (взрыв)	81
7.9	Реакция от синусоидальной импульсной нагрузки	83
7.10	Приближенный метод определения реакций при импульсной нагрузке. Спектры реакций	84

Лекция 8 Удар	86
8.1 Общие понятия об ударе	86
8.2 Удар абсолютно твердого тела об упругую невесомую перегородку	89
8.3 Примеры расчета конструкций при ударном воздействии ..	89
8.4 Неупругий удар (прилипающие)	91
8.5 Удар падающего тела по упругой балке с распределенной массой	92
Лекция 9 Реакция системы с одной степенью свободы при произвольных периодических нагрузках	94
9.1 Представление нагрузки в виде ряда Фурье	94
9.2 Реакция системы при нагрузках, представляемых рядами Фурье	95
9.3 Другая форма ряда Фурье	97
9.4 Экспоненциальная (комплексная) форма решения при воздействии в виде рядов Фурье. Передаточная функция	98
9.5 Частотный анализ систем	99
Лекция 10 Основы виброметрии	102
10.1 Теоретические основы устройства измерительных приборов	102
10.2 Конструкции измерительных приборов	105
10.3 Калибровка измерительной аппаратуры	109
10.4 Нагрузочные устройства	111
10.5 Проведение динамических испытаний	115
10.6 Регистрация показаний измерительных приборов	117
Лекция 11 Расчет линейных системы с большим количеством степеней свободы при динамических воздействиях	121
11.1 Формирование исходных уравнений	121
11.2 Использование метода конечных элементов для построения матриц жесткости, матриц инерционных коэффициентов, затухания	124
11.3 Анализ частот и форм собственных колебаний	128
11.4 Пример определения частот и форм собственных колебаний	132

11.5	Образование несвязанных уравнений колебаний и их решение	134
11.6	Нормирование векторов собственных форм колебаний	137
11.7	Пример решения задачи на основе разделения на несвязанные уравнения	138
Лекция 12 Случайные процессы и случайные воздействия		144
12.1	Фундаментальные соотношения теории вероятности	144
12.2	Случайные величины и распределения вероятностей	145
12.3	Характеристики случайной величины	150
12.4	Случайные функции и их характеристики	153
12.5	Стационарные случайные функции и случайные процессы	156
12.6	Распределение вероятности максимальных значений нормального стационарного случайного сигнала	164
Лекция 13 Основные положения расчета зданий и сооружений на ветровую нагрузку		165
13.1	Ветровые воздействия на сооружения	165
13.2	Случайные процессы и спектры пульсации компонент скорости ветра	168
13.3	Динамический расчет конструкций на ветровую нагрузку	171
13.4	Определение эквивалентной статической нагрузки при пульсации ветра	174
13.5	Расчет конструкций на ветровую нагрузку по СНиП с использованием ЭВМ	175
13.6	Полная динамическая реакция на действие ветра как сумма квазистатической и резонансной составляющих ...	179
Лекция 14 Основные направления в методике расчета сооружений и оборудования на сейсмостойкость		184
14.1	Основные характеристики землетрясений	184
14.2	Краткая история развития теории расчета	187
14.3	Представление сейсмического воздействия в виде случайного процесса	197
14.4	Влияние рассеяния энергии на колебания системы	204

Лекция 15 Расчетные модели и методы решения задач сейсмостойкости	212
15.1 Формирование исходных уравнений при сейсмическом воздействии	212
15.2 Расчетная модель сложной системы при использовании акселерограмм и спектров ускорений	214
15.3 Расчетная модель сложной системы при использовании акселерограмм и спектров ускорений	217
15.3.1 Уравнения колебаний в приращениях	218
15.3.2 Метод центральных разностей	219
15.3.3 Метод Рунге-Кутты	220
15.4 Частотный анализ при определении сейсмической реакции	222
Библиографический список	227

Лекция 1

Общие понятия о динамическом анализе

1.1 Цель динамического анализа

При анализе упругих систем удобно рассматривать отдельно статическую и динамическую компоненты и определять реакции от каждой компоненты также отдельно, а затем объединять их и определять общую реакцию.

Динамический – изменяющийся во времени. Динамическая нагрузка – нагрузка, величина которой, направление и место приложения изменяются во времени. Аналогично реакции системы (деформации, прогибы и напряжения) также изменятся во времени.

Используются два различных подхода для вычисления реакций систем при динамических нагрузках: 1) детерминированный; 2) недетерминированный.

Выбор метода для каждого случая зависит от способа определения нагрузки. Если изменение нагрузки во времени хорошо известно, даже если она является сильно осциллирующей и нерегулярной, то ее называют хорошо определенной (детерминированной) динамической.

Анализ реакции также рассматривается как детерминированный.

Если изменение нагрузки известно не полностью, но может быть определено в вероятностном смысле, то такая нагрузка – случайная динамическая. Недетерминированный анализ реакции сооружений является соответственно анализом при случайных динамических нагрузках.

Как правило, реакция сооружений при любой динамической нагрузке выражается в виде перемещений конструкций.

Детерминированный анализ позволяет определить изменения перемещений или ускорений во времени (1-й этап). Другие параметры детерминированной реакции сооружений (напряжения, деформации, внутренние усилия и т.п.) определяют на 2-м этапе.

Недетерминированный расчет приводит к вероятностному описанию перемещений при нагрузке, определенной статистически.

В этом случае изменение перемещений во времени не вычисляется. Другие параметры должны определяться из непосредственного не-детерминированного расчета, а не по результатам перемещений.

1.2 Виды хорошо определенных нагрузок

Периодическая. Любая периодическая нагрузка может быть представлена в виде суммы простых гармонических составляющих. В этом случае определение реакций сводится к одним и тем же методам. Возникает она, как правило, при воздействии двигателей на сооружение или машины.

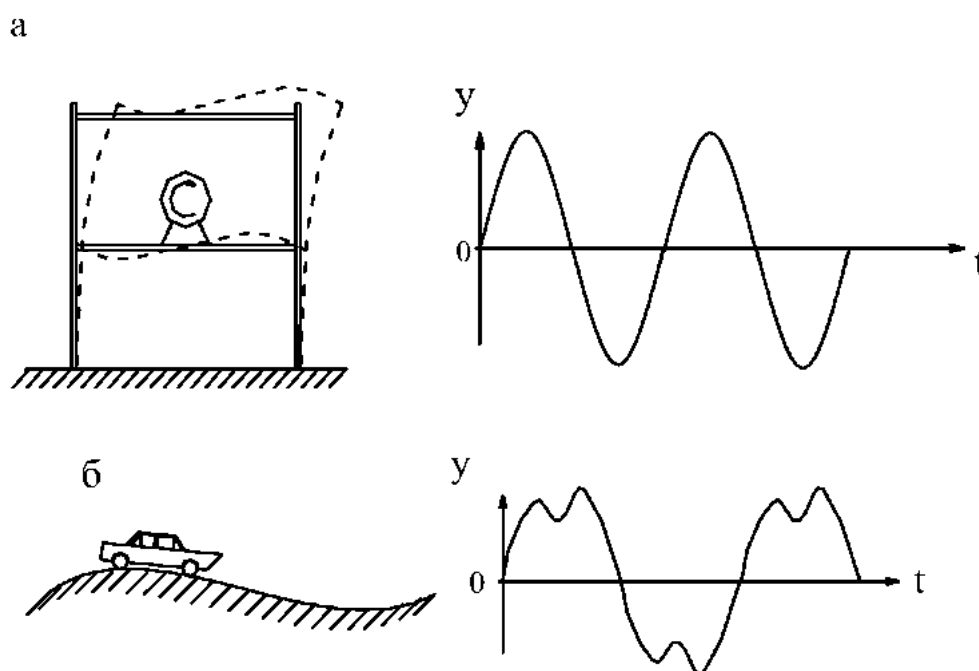


Рисунок 1.1 – Периодические нагрузки: а – простая гармоническая, б – сложная

Непериодическая, импульсная нагрузка. К таким нагрузкам относятся пульсационные ветровые, сейсмические, ударные, взрывные и ряд других. Следует отметить, что весьма часто при решении этих задач используются методики, основанные на приближенном приведении непериодических воздействий к периодическим.

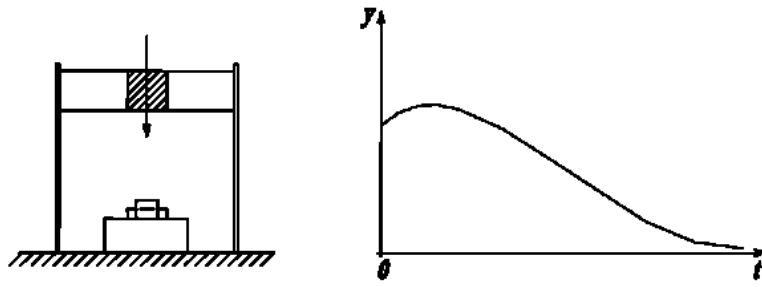


Рисунок 1.2 – Импульсная нагрузка

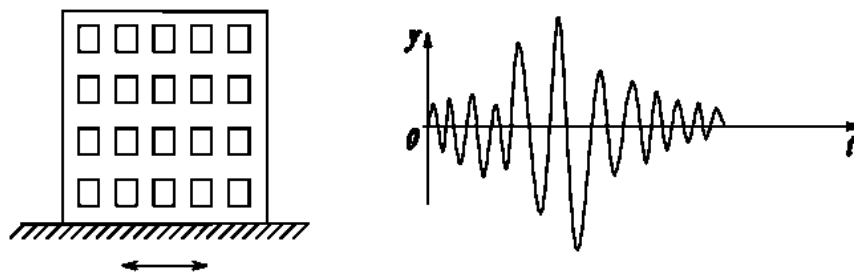


Рисунок 1.3 – Сейсмическая нагрузка

1.3 Основные характеристики задач динамики.

1. Нагрузка и реакция изменяются во времени и не имеют единственного решения как при статических воздействиях. Поэтому надо выбрать последовательность решений, соответствующую всем моментам времени, которые представляют интерес при определении реакции. Таким образом, динамический расчет более сложен и трудоемок, чем статический.

2. Если статические реакции зависят только от нагрузки (рисунок 1.4 а), то динамические еще и от сил инерции и ускорений, вызываемых ими (рисунок 1.4 б). Если силы инерции малы, то применяют метод статического расчета, даже если нагрузка и реакция изменяются во времени.

1.4 Методы дискретизации

1.4.1 Метод сосредоточенных масс

Расчет динамической системы существенно усложняется в связи с тем, что силы инерции зависят от перемещений конструкций, а они, в свою очередь, зависят от инерционных нагрузок. Поэтому решение можно получить на основе рассмотрения дифференциальных уравнений движения. Поскольку координаты вдоль пролета и время – независимые переменные, то дифференциальные уравнения записываются в общем виде как уравнения с частными производными.

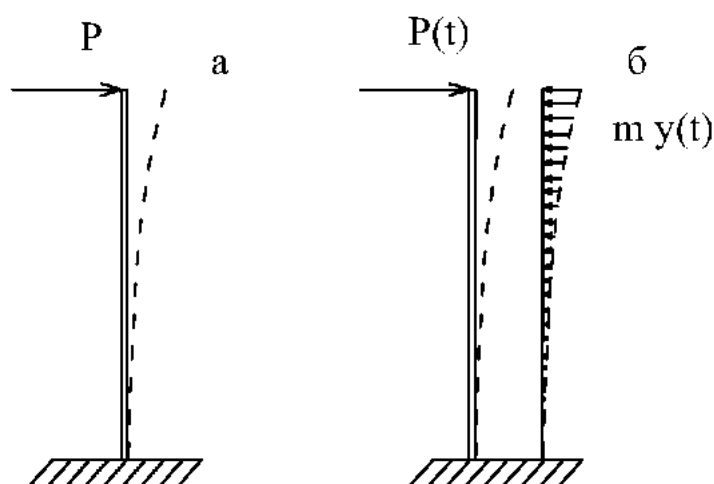


Рисунок 1.4 Пример статической (а) и динамической (б) нагрузок

Если масса балки сосредоточена в нескольких дискретных точках, то задача расчета упрощается, так как силы инерции определяются для точек сосредоточения масс. Перемещения и ускорения тоже определяются для этих точек.

Количество компонент перемещений, необходимое для описания инерционных сил, называется числом динамических степеней свободы рассчитываемой системы. Степень свободы зависит от способа моделирования массы, например:

точечная масса в трехмерном пространстве ($n=3$);

если масса не точечная, то учитываются моменты инерции ($n=6$);

3. для распределённой массы $p=\infty$.

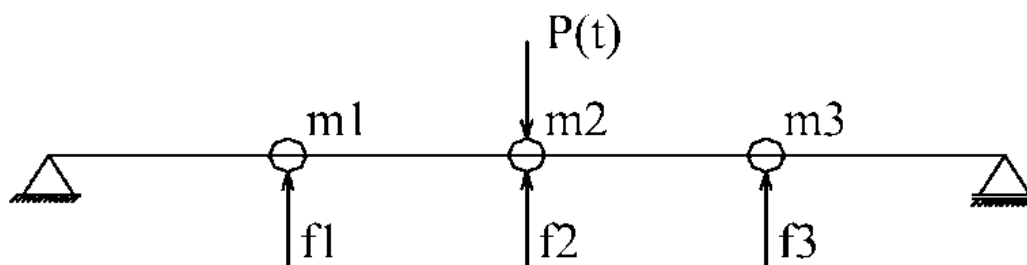


Рисунок 1.5 – Использование точечных масс

1.4.2 Обобщенные перемещения

Модель с сосредоточенными массами наиболее целесообразна при анализе систем, у которых большая часть полной массы сосредоточена в нескольких дискретных точках. Тогда само сооружение – невесомо.

Когда масса распределена, то может быть использован другой способ. Он основан на допущении, что форма изгиба равна сумме простых форм перемещений, количество которых можно рассматривать как степень свободы сооружения. Рассмотрим этот подход на примере балки на двух опорах, показанной на рисунке 1.6.

$$V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (1.1)$$

Система с тремя степенями свободы определяется тремя членами ряда (1.1). В общем случае любые формы $\psi_n(x)$, удовлетворяющие граничным условиям, могут быть приняты, если обеспечивают совместность перемещений. Тогда для любой одномерной системы

$$V(x) = \sum_n Z_n \psi_n(x) \quad (1.2)$$

где Z_n - амплитуды функций $\psi_n(x)$, т.е. обобщенные координаты.

Этот метод позволяет получать более высокую точность, но каждое слагаемое увеличивает объем вычислений.

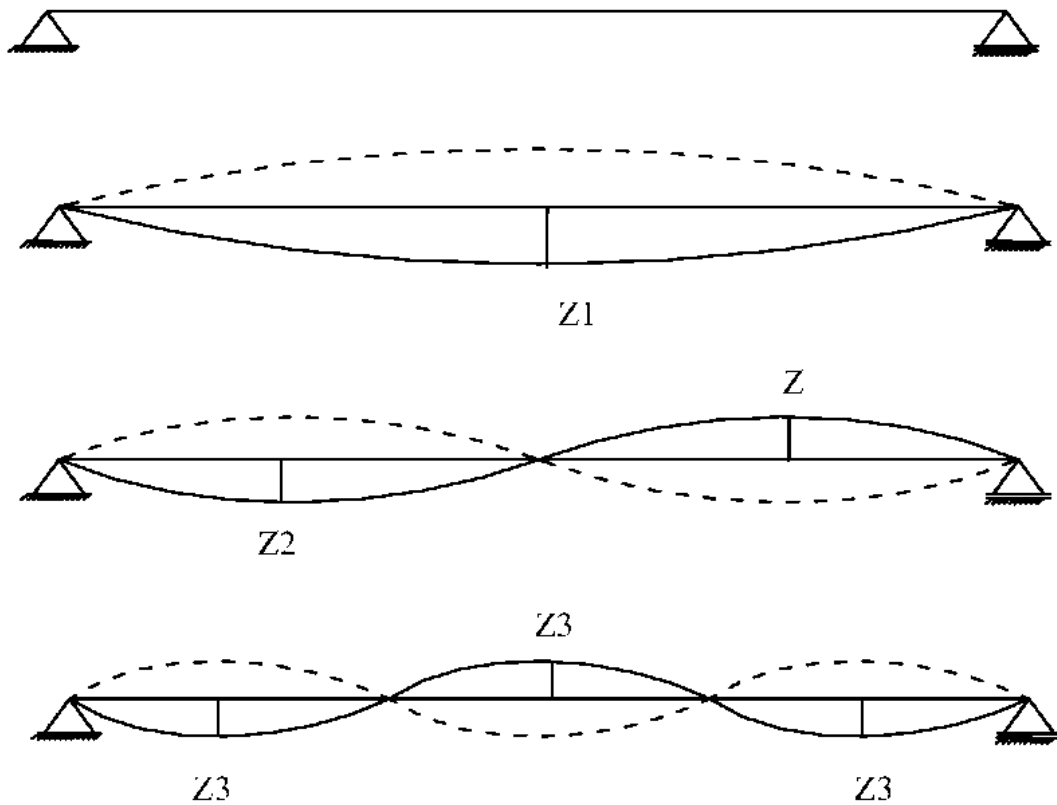


Рисунок 1.6 Обобщенные координаты в балке

1.4.3 Метод конечных элементов (МКЭ)

Метод конечных элементов объединяет как метод сосредоточенных масс, так и метод обобщенных координат. МКЭ эффективен при расчете на ЭВМ.

Модель на МКЭ применима в сооружениях различного типа, которые включают сопряжения балок, колонн, ферм, к системам плит и оболочек, а также к трехмерным телам.

В МКЭ перемещения узловых точек принимают в качестве обобщенных координат. Аналогично методу обобщенных координат

$$V(x) = \sum_n^{\infty} Z_n \psi_n(x).$$

Здесь $\psi_n(x)$ - интерполяционные функции перемещений типа (1.1). Они определяют форму деформаций между узловыми перемещениями.

Для одномерных элементов удобно принять формы в виде базисных функций, которые вызываются узловыми перемещениями (кубические полиномы Эрмита) (рисунок 1.7). Эти перемещения есть нечто иное, как обобщенные координаты.

Преимущество подхода:

1. Любое желаемое число обобщенных координат может быть использовано путем деления сооружения на соответствующее число КЭ.
2. Поскольку функции перемещений для КЭ могут быть одинаковыми, процесс вычислений упрощается.
3. Каждый элемент влияет только на соседние элементы, что также упрощает расчет.

В настоящее время МКЭ – наиболее эффективный численный метод выражения перемещений с помощью дискретной системы координат.

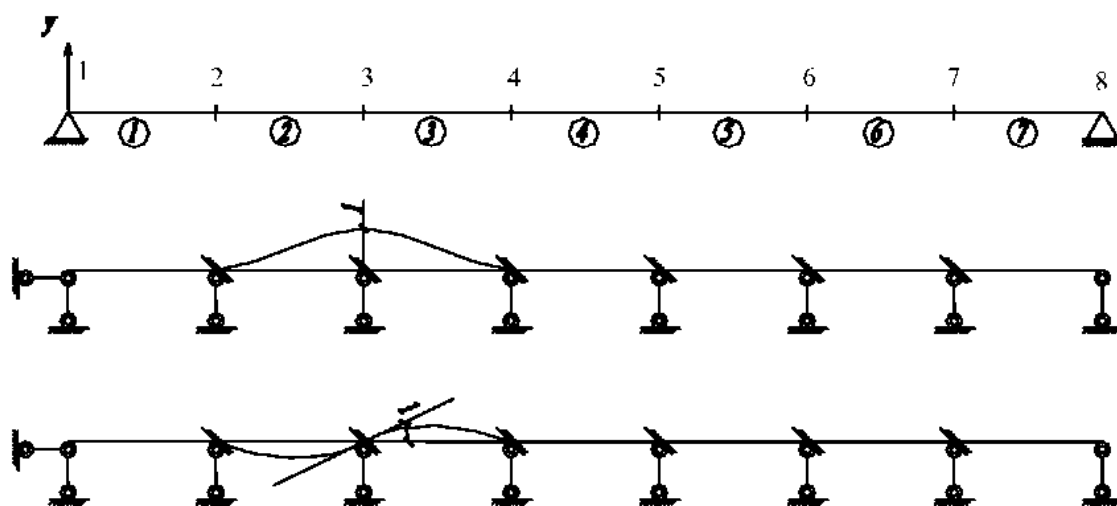


Рисунок 1.7 – Полиномы Эрмита в методе конечных элементов

1.5 Общие методы вывода уравнений движения

В большинстве случаев при решении задач динамического расчета приближенный анализ с учетом ограниченного числа степеней свободы дает приемлемую точность. Поэтому задача сводится к анализу временных функций комплекса перемещений.

Математические выражения, определяющие динамические перемещения, называются уравнениями движения сооружения. В ре-

зультате их решения можно определять функции перемещений $V_n = V_n(t)$.

Вывод уравнений движения динамической системы представляет собой самый важный, ответственный и трудный этап анализа.

Рассмотрим три различных метода.

1. Метод динамического равновесия (принцип Даламбера)

Уравнение движения любой динамической системы – это выражение 2-го закона Ньютона (скорость изменения импульса любой массы равна действующей силе).

$$\bar{P}(t) = \frac{d}{dt} \left(m \frac{d\bar{V}}{dt} \right), \quad (1.3)$$

где V – вектор координат массы, $\bar{P}(t)$ – вектор силы.

Для большинства задач масса $m = const$. Тогда

$$\bar{P}(t) = m \frac{d^2\bar{V}}{dt^2} = m\ddot{V}(t) \quad \text{или}$$

$$m\ddot{V}(t) - \bar{P}(t) = 0. \quad (1.4)$$

Здесь: $m\ddot{V}(t)$ – сила инерции, которая оказывает сопротивление ускорению массы; $\bar{P}(t)$ – включает силы сопротивления, силы затухания пропорциональные скоростям, а также независимые внешние нагрузки. Выражение (1.4) показывает, что все силы находятся в равновесии.

2. Метод возможных перемещений

Когда схема сооружения сложная и содержит ряд взаимосвязанных точек сосредоточения масс или тел конечных размеров, то непосредственный вывод условий равновесия затруднен. Переменные силы часто допускают выражения по степеням свободы, но записать условия равновесия сложно. В этих случаях используют принцип возможных (виртуальных) перемещений.

Формулировка: если система, находящаяся в состоянии равновесия, получает возможные перемещения, удовлетворяющие граничным условиям, то полная работа всех сил, включая силы инерции, диссипационные силы и внешнюю нагрузку, на этих перемещениях равна нулю (эквивалентно условию равновесия). Из этого условия получают дифференциальные уравнения. Преимущество данного подхода в том, что слагаемые работы сил на возможных перемещениях в отличие от самих сил – скалярные величины и могут складываться алгебраически. Силы же являются векторами и должны складываться по правилам векторного анализа, что затрудняет формирование уравнений равновесия.

3. Принцип Гамильтона

Принцип Гамильтона также не требует векторных уравнений равновесия. Он использует скалярные величины энергии в вариационной постановке и записывается в виде

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T-U)dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{н.с.} dt = 0, \quad (1.5)$$

где T – общая кинетическая энергия системы; U – потенциальная энергия, включая энергию деформаций и потенциал любых консервативных внешних сил; $W_{н.с.}$ – работа, произведенная неконсервативными силами, действующими на систему (затухание и другие произвольные внешние нагрузки); δ – вариация для определенного временного интервала.

Принцип Гамильтона отличается тем, что в него не включаются инерционные и упругие силы. Вместо них используются значения скалярных величин кинетической и потенциальной энергий.

Принцип Гамильтона можно использовать при решении задач статики сооружений. В этом случае $T=0$ и $\delta(U - W_{н.с.}) = 0$ (минимум потенциальной энергии деформаций).

Все три метода абсолютно равноценны и дают одинаковые уравнения. Выбор метода зависит от вида системы нагрузки и других факторов и определяется расчетчиком.

1.6. Расчетные динамические модели

Расчет сооружений на динамические нагрузки включает:

- 1) формирование физической модели (ФМ);
- 2) формирование расчетной динамической модели (РДМ);
- 3) разработку математических моделей и их аналитический или числовой анализ;
- 4) определение напряженно-деформированного состояния несущих конструкций.

Модель – это отражение реального, упрощение образа объекта. Существует много работ по теории моделей (особенно в сфере управления).

ФМ обычно специально не описывается в динамике сооружений, но включается в виде гипотез и предположений. Описание ФМ должно опираться на экспериментальные данные, наблюдения, гипотезы о мало изученных или не изученных связях между параметрами. Все математические зависимости в ФМ описываются без упрощений. Неполнота и неопределенность приводят к невозможности полного описания ФМ, что и происходит в динамике сооружений. Поэтому приходится вводить ряд упрощений, отбрасывать ряд связей, основываясь на опыте и интуиции.

Введение этих упрощений приводит к РДМ (упрощенным ФМ). Описание ФМ производится также в физически содержательных терминах, но с отбрасыванием параметров и факторов, которые в заданных условиях и границах мало влияют на ход процессов.

Однако не все гипотезы поддаются проверке, а без количественной оценки упрощений и рабочих гипотез нельзя говорить о достоверности. Например, отбрасывание малых параметров может влиять на расчеты по устойчивости.

Сложная динамическая система может в ряде случаев разделяться на подсистемы (элементы), которые стыкуются в определенной последовательности. Экспериментальные исследования простых подсистем (ПС) дешевле и дают более ценную информацию, так как при анализе всей системы на выходе имеется только интегральная информация. Из известных ПС или групп ПС с изученными связями можно конструировать сложные ДС. Чем грубее РМ, тем сложнее эксперимент. Правил для составления РМ нет!

Математическая модель (ММ) – система уравнений, неравенств, функциональных соотношений, начальных и граничных условий, устанавливающая количественное соотношение между параметрами системы. ММ – формальная система, состоящая из конечного собрания символов и строгих правил оперирования ими. Качество ММ зависит от качества ФМ и РДМ.

Расчету сооружения на динамические нагрузки предшествует расчет на статические нагрузки. Без статического расчета невозможно определить основные динамические параметры (собственные частоты и формы колебаний). Расчетная статическая модель должна быть согласована с РДМ, что обеспечивает корректность, точность и достоверность расчета.

В целом сооружение желательно рассматривать как пространственную систему с учетом работы всех элементов. От формирования РСМ и РДМ зависит качество расчета. Желательно иметь не одну, а несколько аппроксимирующих моделей, следуя от простой модели к усложненной и проверяя основные параметры системы.

Появление ЭВМ, необходимость учитывать такие сложные воздействия, как сейсмика, ураганы, морские волнения и воздействия от мощной техники предполагает усложнение и развитие РДМ, характеризующихся не только переходом к пространственной системе, но и к учету пластических деформаций и повреждений, учету пространственного действия нагрузок. В настоящее время развитие РМ идет по двум направлениям: а) аналитические решения; б) численные.

Упрощенные аналитические модели используются для анализа простых конструкций и позволяют произвести оценку напряженно-деформированного состояния. В то же время исследователями решен ряд сложных пространственных континуальных задач на основе аналитических методов. К сожалению, такие задачи решаются только весьма квалифицированными специалистами, так как в основе их лежит использование дифференциальных уравнений в частных производных и рассмотрение краевых задач. Поэтому в проектной практике широкое применение получил метод конечных элементов (МКЭ), в основе которого лежит дискретизация системы.

При дискретизации статические задачи описываются алгебраическими уравнениями, а динамические – обыкновенными дифференциальными уравнениями. Обыкновенные дифференциальные

уравнения допускают простые исследования во временной области и позволяют решать геометрически и физически нелинейные задачи. Уравнения в частных производных из-за математических сложностей используются в основном для решения линейных задач.

Метод суперэлементов (МСЭ) применяется из-за ограниченных возможностей ЭВМ при обработке матриц большого порядка. В этом случае большая система разбивается на несколько частей. На границах этих частей выделяются узлы, перемещения которых принимаются неизвестными. Количество таких узлов значительно меньше, чем в МКЭ. Для построения матрицы жесткости системы СЭ необходимо определить единичные реакции узлов СЭ. Эта проблема решается, как правило, на основе разбиения каждого СЭ на простейшие КЭ и расчета отдельного СЭ на основе МКЭ. Затем полученные в узлах СЭ единичные реакции суммируются и решается система уравнений СЭ. После определения перемещений от нагрузки в узлах СЭ происходит обратный процесс, когда для определения напряженно-деформированного состояния внутри СЭ выполняется повторно расчет на основе МКЭ, в котором полученные в узлах СЭ перемещения служат внешними возмущениями. В некоторых случаях «внутри» СЭ вместо МКЭ используют известные аналитические решения.

В настоящее время стал применяться метод граничных элементов, объединяющий идею дискретизации на границе области с аналитическими решениями внутри области. Однако развитие этого метода пока ограничено.

Правильное моделирование системы – ключ к решению задачи расчета сооружения [35]. Расчетные динамические модели разрабатываются в двух направлениях: а) РДМ нагрузок; б) РДМ сооружений.

В динамических задачах весьма часто величины нагрузок зависят от геометрической схемы, формы конструкции, параметров ее жесткости и массы. В то же время основная составляющая нагрузок зависит от характера воздействия на сооружение внешних сил.

Среди нагрузок следует выделить техногенные факторы, связанные с воздействием оборудования, и природные возмущения.

При действии промышленных вертикальных динамических нагрузок обычно рассчитываются отдельные части сооружения

(балки, плиты перекрытий, фундаменты и т. п.). Брать более сложные схемы для расчета, как правило, нецелесообразно.

Модель в виде консоли приемлема для башен, мачт, труб при упрощенной оценке динамических параметров. Однако в настоящее время наблюдается тенденция к более точному учету характера воздействия и работы всего сооружения за счет применения ЭВМ.

Для природных возмущений РДМ составить сложно и трудно. Отличительная особенность воздействий – нельзя ими управлять. Поэтому система всегда работает как пространственная. Возникают трещины, разрушения отдельных элементов. Часто применяется двойная концепция расчетов: 1) частые землетрясения – в упругой стадии; 2) редкие, сильные с учетом пластических деформаций и повреждений. Аналогичные подходы используются при анализе ветровых воздействий и взрывов.

Все чаще в настоящее время ставятся задачи физически, геометрически и кинематически нелинейные. Это особенно важно для высоких гибких сооружений, где влияют кинематические волновые с учетом кориолисова ускорения процессы. Рассматриваются сооружения при интенсивных динамических воздействиях как ДС с переменной структурой. Это большая стохастическая система (т.е. с учетом случайных факторов), при колебаниях которой в зависимости от вида повреждений возникают внутренние переходные режимы (свойства и структура РДМ все время меняются).

Обследования повреждений при сейсмике показывают, что физическая нелинейность присутствует всегда. Геометрическая и кинематическая нелинейности проявляются при расчете телебашен, буровых платформ при высоте $h=200$ м и т. п.

При анализе расчетной модели сооружений весьма важным представляется вид геометрической схемы и соответственно выбор одномерной, двумерной или трехмерной модели. Согласно СНиП II-7-81, СНиП II-6-74, расчет на сейсмические и ветровые воздействия производится по упругой стадии с использованием одномерной модели и однокомпонентного возмущения. Для ветровой нагрузки в ряде случаев это может быть оправдано (не для урагана). Однако сейсмика всегда сопровождается повреждениями, поэтому определённые по СНиП сейсмические силы являются весьма условными и не отвечают действительному характеру воздействия [32], [33], [22].

Задачи упруго-пластического расчета при сейсмике должны решаться в основном на базе отдельных двумерных или трехмерных РДМ с использованием условий пластичности или диаграммы σ – ϵ . Одномерные модели не позволяют решать задачи с учетом геометрических и кинематических нелинейных факторов.

Решение такого рода задач выполняется в несколько этапов.

Этап 1

При воздействии на сооружения на горизонтальных динамических нагрузках (сейсмика, ветер) вначале выполняется статический расчет для определения матриц податливости и (жесткости), который целесообразно выполнять по МКЭ. При расчете обычно пренебрегают массой колонн, панелей и сосредотачивают их массы вместе с массами перекрытия и оборудования. Прикладывают по очереди единичную силу по направлению каждой из степеней свободы масс, определяют перемещения по направлению движения масс и строят матрицу податливости:

$$C = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix},$$

затем, путем ее обращения, получают матрицу жесткости $K = C^{-1}$.

Этап 2

РДМ уточняется в направлении учета масс связей и распределения масс на перекрытиях. РДМ и РСМ на этом этапе должны быть состыкованы. Применение МКЭ позволяет учесть нелинейности (должны использоваться автоматизированные системы).

Введение в расчет трехмерных РДМ поднимает новые, ранее не исследованные вопросы динамики и сейсмостойкости [6], [8], [33]. В этом случае любое динамическое воздействие представляется трехкомпонентным вектором силы $\bar{F}(t)$ и трехкомпонентным вектором моментов пары сил $\bar{M}(t)$, а сейсмическое воздействие как $\ddot{\bar{X}}_o(t)$ – вектор ускорения ЦМ и вращательное ускорение $\ddot{\bar{a}}_o(t)$.

Векторами $\bar{F}(t)$, $\bar{M}(t)$ можно моделировать ветровое возмущение, волнение и промышленные нагрузки.

Следует учитывать, что силы природного характера – случайные. Набор статистических данных (спектры) с заданной вероятностью

стью дает их максимумы, спектральные составы и прочие характеристики. Даже направление этих векторов сложно предугадать, хотя при расчете можно определить такое направление, когда усилия \rightarrow max. Для промышленных нагрузок надо также управлять нагрузками и реакциями.

Необходимо также учитывать волновые процессы (по длинам или скоростям волн). Трубы и башни отреагируют на волны всех длин. Электростанции, элеваторы и другие протяженные здания фильтруют волны меньшей длины, чем само сооружение и реагируют на волны с длиной волны L , большей в 2 раза, чем размер сооружения. Чем больше L , тем меньше максимальное ускорение. В одномерной модели это практически не учитывается.

Ряд исследователей утверждает, что фильтрация возмущений может дать эффект такого же порядка, что и учет пластических деформаций. То же наблюдается при морском волнении (буровые платформы).

Большое значение для расчета имеет формулировка РДМ «основание – сооружение». Масса грунта может быть одного порядка с весом (массой) сооружения. Сооружение может вызывать вторичные волны в основании, которые могут усиливать или гасить колебания конструкции. Это очень сложная модель.

Трехмерные модели используются в теории сейсмостойкости для сравнения с натурными наблюдениями за колебаниями сооружений, оценки адекватности, выявления главных и второстепенных факторов.

Другое направление при использовании трехмерных моделей – выявление границ безопасной эксплуатации, нормирование процесса разрушений.

Трехмерная модель позволяет также найти неустойчивые процессы (нелинейные резонансы и резкая перестройка режимов, а также возникновение интенсивных колебаний по направлению других координат, которые были малы). Такие процессы опасны тем, что возникающие при неустойчивости колебания в несколько раз больше, чем вынужденные. Их невозможно предвидеть на основе линейной теории.

Лекция 2

Системы с 1-й степенью свободы

2.1 Вывод уравнений движений

В том случае, когда состояние системы определяется единственно возможным перемещением точечной массы, система имеет одну степень свободы. Вязкое сопротивление обеспечивается демпфером, а упругое сопротивление – пружиной.

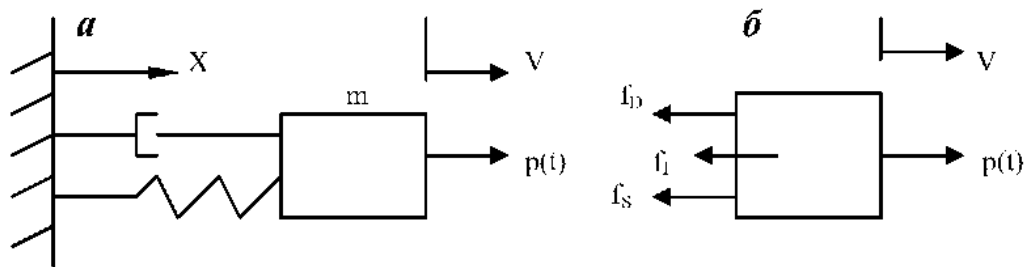


Рисунок 2.1 Моделирование системы с одной степенью свободы: а – элементы системы; б – равновесие сил упругости, сил инерции, сил вязкого сопротивления и внешней нагрузки

1. Метод динамического равновесия (принцип Даламбера)

$$f_l + f_D + f_s = p(t), \quad (2.1)$$

где f_l - сила инерции, f_D - сила вязкого сопротивления (диссипативная), f_s - сила упругого сопротивления.

$$f_s = kV; \quad (2.2)$$

$$f_l = m\ddot{V}; \quad (2.3)$$

$$f_D = c\dot{V} \text{ (модель Фойхта)}. \quad (2.4)$$

Здесь k – жесткость пружины (реакция от упругого перемещения V на величину $V=1$), m – точечная масса, c – постоянная затухания, \dot{V} - скорость массы, \ddot{V} – ускорение массы.

Подставляя выражения (2.2), (2.3), (2.4) в (2.1), получим дифференциальное уравнение движения системы с одной степенью свободы:

$$m\ddot{V} + c\dot{V} + kV = p(t). \quad (2.5)$$

2. Принцип возможных перемещений

Если масса получит виртуальное перемещение δV (единственное, допустимое связями), то общая работа всех сил равна нулю, т. е.

$$-f_i \delta V - f_D \delta V - f_s \delta V + p(t) \delta V = 0; \quad \delta V \neq 0; \quad (2.6)$$

$$[-f_i - f_D - f_s + p(t)] \delta V = 0. \quad (2.7)$$

Поскольку $\delta V \neq 0$, приходим к исходному выражению (2.1) и к уравнению движения (2.5).

3. Принцип Гамильтона

Вариационный принцип Гамильтона записывается в виде

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0. \quad (2.8)$$

Здесь δ – вариация для рассматриваемого временного интервала. Кинетическая энергия и потенциальная энергия пружины определяются из выражений:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{V}^2; \quad U = \frac{1}{2} k V^2. \quad (2.9)$$

Работу неконсервативных сил (нагрузка и затухание) обозначим как W_{nc} .

Вариация неконсервативных сил определяется по формуле

$$\delta W_{nc} = p(t) \delta V - c \dot{V} \delta V. \quad (2.10)$$

Подставляя выражения для кинетической и потенциальной энергии в (2.8), получим зависимость

$$\int_{t_1}^{t_2} [m \dot{V} \delta \dot{V} - c \dot{V} \delta V - k V \delta V + p(t) \delta V] dt = 0 \quad (2.11)$$

Первый член уравнения (2.11) интегрируем по частям

$$\int_{t_1}^{t_2} m \dot{V} \delta \dot{V} dt = m \dot{V} \delta V \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m \ddot{V} \delta V dt, \quad \text{где } \delta \dot{V} = d(\delta V) / dt. \quad (2.12)$$

Вариация δV равна нулю при пределах интегрирования t_1 и t_2 , поэтому первый член выражения (2.12) также равен нулю. Подставив второй член выражения (2.12) в выражение (2.11), получим уравнение

$$\int [-m\ddot{V} - c\dot{V} - kV + p(t)]\delta V dt = 0. \quad (2.13)$$

Поскольку произвольная вариация $\delta V \neq 0$, получим уравнение движения в виде

$$m\ddot{V} + c\dot{V} + kV = p(t).$$

Из принципа Гамильтона вытекает уравнение Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{dq_j}\right) - \frac{d(T-U)}{dq_j} = Q_j.$$

Здесь Q_j – обобщенная сила, действующая при вариации обобщенной координаты δq_j . Q_j – сила, не имеющая потенциала (затухание).

Система уравнений 2-го порядка имеет решение $q_j = q_j(t, c_1, c_2, \dots, c_{2k})$, где $j = (1, 2, \dots, k)$. При этом $2k$ постоянных интегрирования находятся из $2k$ начальных условий

$$q_j(t_0) = q_{j0}; \quad \dot{q}_j(t_0) = \dot{q}_{j0}.$$

Пример

Составить уравнение движения балки, используя принцип Гамильтона.

Обобщенная координата, общая для всех точек – $q(t)$ (Рисунок 2.2). Затуханием колебаний пренебрегаем.

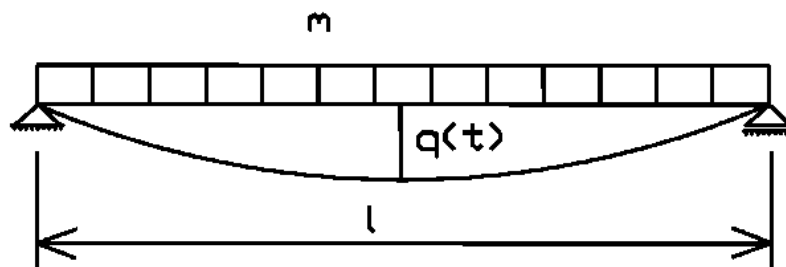


Рисунок 2.2 Колебания балки с распределенной массой

Прогиб в любой точке равен $V(z,t) = q(t)\sin\frac{\pi z}{l}$.

Отсюда $\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \dot{q}\sin\frac{\pi z}{l}$; $V'' = \frac{d^2V}{dz^2} = -\frac{\pi^2}{l^2}q\sin\frac{\pi z}{l}$.

Кинетическая и потенциальная энергии записываются в виде:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l m\dot{V}^2 dz = \frac{1}{2} m\dot{q}^2 \int_0^l \sin^2 \frac{\pi z}{l} dz = \frac{1}{2} m \frac{l}{2} \dot{q}^2;$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI (V'')^2 dz = \frac{1}{2} \frac{EI \pi^4}{l^4} q^2 \int_0^l \sin^2 \frac{\pi z}{l} dz = \frac{1}{2} \frac{\pi^4 EI}{2l^3} q^2 .$$

По принципу Гамильтона функционал формируется, как сумма кинетической и потенциальной энергий

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{ml}{2} \dot{q}^2 - \frac{\pi^4 EI}{2l^3} q^2 \right) dt$$

и имеет стационарное значение. Поэтому принцип Гамильтона называют также принципом наименьшего действия. Условие минимума функционала записывается соответствует условию, что первая вариация равна нулю:

$$\delta S = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{2ml}{2} \dot{q} \delta \dot{q} - \frac{\pi^4 EI}{2l^3} 2q \delta q \right) dt = 0 .$$

Сокращая на общий множитель и беря первый интеграл по частям, получим:

$$ml \dot{q} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} - ml \int_{t_1}^{t_2} \ddot{q} \delta q dt - \frac{\pi^4 EI}{l^3} \int_{t_1}^{t_2} q \delta q dt = 0 .$$

Учитывая, что $\delta q \Big|_{t_1} = \delta q \Big|_{t_2} = 0$ (условие изохроности),

получим $\int_{t_1}^{t_2} \left(ml \ddot{q} + \frac{\pi^4 EI}{l^3} q \right) \delta q dt = 0$, отсюда

$$ml \ddot{q} + \frac{\pi^4 EI}{l^3} q = 0$$

$$\text{или } \ddot{q} + \omega_c^2 q = 0; \quad \omega_c^2 = \frac{\pi^4 EI}{ml^3} .$$

Это уравнение Эйлера для функционала S в условиях рассматриваемой задачи.

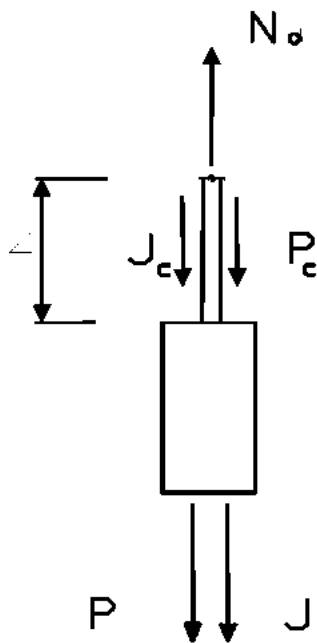


Рисунок 2.3 – Равновесие сил при движении груза

2.2 Примеры.

Использование принципа Даламбера

В тех случаях, когда можно достаточно просто определить силы инерции, для составления уравнения движения используется принцип Даламбера.

1. Задача о движении груза P , подвешенного на тросе (рисунок 2.3).

Груз равноускоренно поднимается (ускорение a). Объемный вес и площадь поперечного сечения троса обозначим как γ и A . Составим уравнение динамического равновесия с учетом веса груза и троса и сил инерции

$$P + P_c + J + J_c - N_d = P + \gamma Az + Pa/g + \gamma Aza/g - N_d = 0.$$

Отсюда сила натяжения троса равна

$$N_d = (P + \gamma Az)(1 + a/g) = N_c k_d.$$

$N_c = P + \gamma Az$ - статическая сила при $a=0$.

$k_d = (1 + a/g)$ - коэффициент динамичности. При подъеме груза $a > 0$ и $k_d > 1$. Если рассматривается не подъем, а спуск груза P , то $a < 0$ и $k_d < 1$.

Условие прочности троса: $\sigma_{d, \max} = \sigma_d \Big|_{z=z \max} = N_{d \max} / A \leq [\sigma]$.

2. Задача о вращении обода маховика (рисунок 2.4)

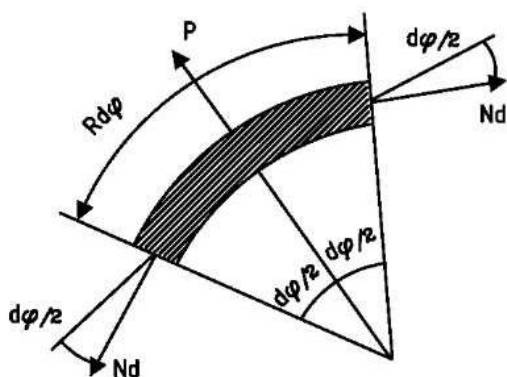


Рисунок 2.4 -
Равновесие сил при
движении маховика

Запишем условия задачи.

Угловая скорость - ω , диаметр - D , площадь сечения - A , объемный вес - γ .

Решение

$$P = \frac{A\gamma \omega^2 D}{g} = m\omega^2 R,$$

где $\omega^2 R$ - центростремительное ускорение.

Используем принцип Даламбера (спицы не учитываем). Уравнение равновесия запишем в виде

$$2N_D \frac{d\varphi}{2} - m\omega^2 R \cdot R d\varphi = 0.$$

Здесь $N_D = m\omega^2 R$; $\sigma_D = \frac{N_D}{A} = \frac{\gamma V^2}{R}$; $V = \omega R$ - окружная скорость.

3. Влияние вертикальных нагрузок (рисунок 2.5)

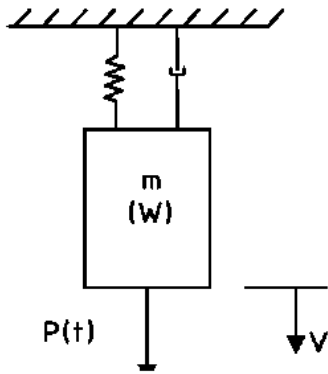


Рисунок 2.5 Модель тела при вертикальных нагрузках

Уравнение динамического равновесия в соответствии с принципом Даламбера имеет следующий вид:

$$m\ddot{V} + c\dot{V} + kV = p(t) + W.$$

Общее перемещение равно сумме статического и динамического перемещений, т.е. $V = \Delta_{st} + \bar{V}$. Соответственно, сила упругого сопротивления равна произведению жесткости на перемещение $f_s = kV = k\Delta_{st} + k\bar{V}$. Подставляя f_s в исходное уравнение, получим $m\ddot{V} + c\dot{V} + k\Delta_{st} + k\bar{V} = p(t) + W$. Учитывая, что вес тела $k\Delta_{st} = W$, получим $m\ddot{V} + c\dot{V} + k\bar{V} = p(t)$.

Таким образом, на уравнение движения не влияют силы тяжести. Следовательно, общие прогибы можно получить раздельным решением и последующим сложением $\Delta_{st} + \bar{V}$. Аналогично определяются напряжения.

4. Влияние кинематического возбуждения основания (рисунок 2.6)

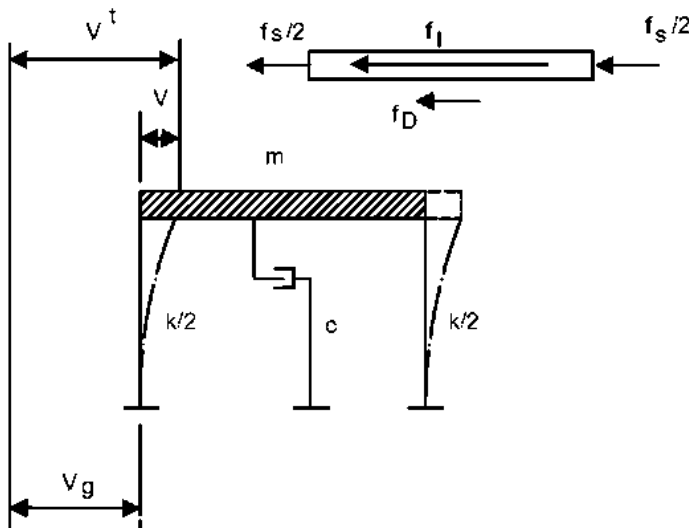


Рисунок 2.6 - Влияние возбуждения основания на равновесие системы

Уравнения равновесия рамы при кинематическом возмущении основания имеют вид

$$f_1 + f_D + f_s = 0; \quad f_1 = m\ddot{V}^t,$$

где V^t - суммарные отклонения, которые состоят из перемещений $V_g(t)$, возникающих при переносном движении, и перемещений V , возникающих при относительном движении:

$$f_D = c\dot{V}; \quad f_s = kV; \quad V^t = V + V_g.$$

Тогда $m\ddot{V} + m\ddot{V}_g + c\dot{V} + kV = 0$; или
 $m\ddot{V} + c\dot{V} + kV = -m\ddot{V}_g(t) = p(t)$.

На практике знак правой части не играет роли, можно брать знак \oplus , так как решение осциллирует.

2.3 Использование принципа Гамильтона

Задача о колебаниях и устойчивости башни, сжатой силой N (рисунок 2.7).

Башня может рассматриваться как обобщенная система с 1-й степенью свободы, которая подвергается сейсмическому воздействию $V_g(t)$.

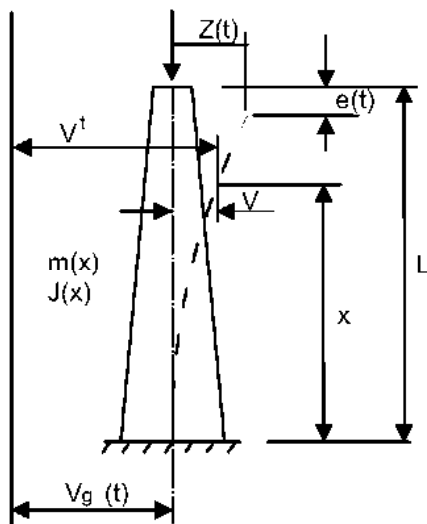


Рисунок 2.7 -Приведение башни к системе с одной степенью свободы

Для аппроксимации движения системой с 1-й степенью свободы необходимо предположить, что она подвергается изгибу по 1-й форме. Функцию прогиба примем $\psi(x)$, амплитуду – $z(t)$.

Тогда

$$V(x,t) = \psi(x)z(t); \quad (2.14)$$

$$\psi(x) = \frac{V(x,t)}{z(t)}. \quad (2.15)$$

Уравнения движения возмущенной системы можно получить только с помощью выражения для работы или энергии (принцип Гамильтона, принцип возможных перемещений). Воспользуемся принципом Гамильтона. Для этого запишем выражения кинетической и потенциальной энергии в виде:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L m(x) [\dot{V}^i(x,t)]^2 dx, \quad U_f = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) [V''(x,t)]^2 dx, \quad (2.16)$$

$$\text{где } V'' = d^2V / dx^2. \quad (2.17)$$

Здесь T – кинетическая энергия, U – потенциальная энергия изгибных деформаций.

Для определения потенциальной энергии осевой силы (которая постоянна по направлению и величине во время возникновения динамической реакции и поэтому является консервативной силой) надо найти $e(t)$ – укорочение от продольного изгиба

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_0^L [V'(x,t)]^2 dx. \quad (2.18)$$

Таким образом потенциальная энергия силы N записывается в виде

$$U_N = -\frac{N}{2} \int_0^L [V'(x,t)]^2 dx. \quad (2.19)$$

Знак минус в выражении (2.19) показывает уменьшение потенциала силы N при увеличении $e(t)$. Если N меняется по длине (собственный вес), то выражение (2.19) надо изменить, включив величину N под знак интеграла.

В расчете не учитывается затухание, что исключает наличие неконсервативных сил. Возмущающая сила $p(t)$ при действии сейсмике отсутствует. Тогда принцип Гамильтона записывается в виде

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U) dt = 0. \quad (2.20)$$

Подставив зависимости (2.16), (2.17), (2.19) в (2.20), получим:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^L m(x) \dot{V}'(x,t) \delta \dot{V}' dx - \int_0^L EI(x) V''(x,t) \delta V'' dx + N \int_0^L V'(x,t) \delta V' dx \right] = 0. \quad (2.21)$$

С учетом условий $\dot{V}t = \dot{V} + \dot{V}_g$; $V'' = \psi'' z$; $V' = \psi' z$; $\dot{V} = \psi \dot{z}$; $\delta \dot{V}' = \delta \dot{V}$; $\delta V'' = \psi'' \delta z$; $\delta V' = \psi' \delta z$; $\delta \dot{V} = \psi \delta \dot{z}$; после подстановки их в уравнение (2.21), приходим к зависимости

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\dot{z} \delta \dot{z} \int_0^L m(x) \psi^2 dx + \delta \dot{z} \dot{V}_g(t) \int_0^L m(x) \psi dx - z \delta z \int_0^L EI(x) (\psi'')^2 dx + Nz \delta z \int_0^L (\psi')^2 dx \right] dt = 0.$$

После интегрирования первого интеграла по частям получим:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[m^* \dot{z} + k^* z - k_G^* z - P_{\psi\psi}(t) \right] \delta z dt = 0. \quad (2.22)$$

Здесь

$$m^* = \int_0^L m(x) \psi^2 dx - \text{обобщенная масса};$$

$$k^* = \int_0^L EI(x) (\psi'')^2 dx - \text{обобщенная жесткость};$$

$$k_G^* = N \int_0^L (\psi')^2 dx - \text{обобщенная геометрическая жесткость};$$

$$P_{\psi\psi} = -\ddot{V}_g \int_0^L m(x) \psi dx - \text{обобщенная эффективная нагрузка}.$$

Так как δz - произвольная вариация, то в уравнении (2.22) выражение в квадратных скобках равно нулю, откуда:

$$m^* \ddot{z}(t) + \bar{k}^* z(t) = P_{\phi\phi}^*(t), \quad (2.23)$$

где $\bar{k}^* = k^* - k_G^*$ - суммарная обобщенная жесткость.

Критическая нагрузка соответствует $\bar{k}^* = 0$

$$\bar{k}^* = k^* - k_G^* = \int_0^L EI(x)(\psi'')^2 dx = 0,$$

$$\text{отсюда} \quad N_{кр} = \int_0^L EI(x)(\psi'')^2 dx / \int_0^L (\psi')^2 dx. \quad (2.24)$$

Последнее выражение соответствует известному методу Рейля.

Числовой пример для башни

Башня имеет распределенную массу и жесткость, постоянные по ее высоте.

Пусть кривая изгиба описывается выражением $\psi(x) = 1 - \cos \frac{\pi x}{2L}$.

Тогда обобщенные (приведенные) масса и жесткость записываются

$$\text{в виде:} \quad m^* = \int_0^L \bar{m} \psi^2 dx = m \int_0^L (1 - \cos \frac{\pi x}{2L})^2 dx = 0,228 \bar{m} L;$$

$$k^* = \int_0^L EI(\psi'')^2 dx = EI \int_0^L (\frac{\pi^2}{4L^2} \cos \frac{\pi x}{2L})^2 dx = \frac{\pi^4 EI}{32 L^3}.$$

При действии колебания основания обобщенная нагрузка равна

$$P_{\phi\phi}(t) = \ddot{V}_g(t) \int_0^L \bar{m} \psi dx = \bar{m} \ddot{V}_g(t) \int_0^L (1 - \cos \frac{\pi x}{2L}) dx = 0,364 \bar{m} L \ddot{V}_g(t).$$

Если осевая нагрузка не учитывается, то уравнение колебаний имеет вид:

$$0,228 \bar{m} L \ddot{z}(t) + \frac{\pi^4 EI}{32 L^3} z(t) = 0,364 \bar{m} L \ddot{V}_g(t).$$

С учетом осевой силы обобщенная геометрическая жесткость равна

$$k_G^* = N \int_0^L (\psi')^2 dx = N \int_0^L \frac{\pi}{2L} \sin \frac{\pi x}{2L})^2 dx = \frac{N \pi^2}{8L}.$$

Суммарная обобщенная жесткость определяется из выражения

$$k^* = k^* - k_G^* = \frac{\pi^4 EI}{32L^3} - \frac{N\pi^2}{8L} .$$

Потере устойчивости башни соответствует условие $\overline{k^*} = 0$.

Критическая сила, которая соответствует этому моменту,

$$N_{sp} = \frac{\pi^4 EI}{32L^3} \frac{8l}{4L^2} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} .$$

С учетом осевой нагрузки уравнение колебаний имеет вид:

$$0,228mLz(t) + \frac{\pi^4 EI}{32L^3} \left(1 - \frac{N}{N_{cr}}\right) z(t) = 0,364mLV_g(t) .$$

2.4 Двумерные задачи

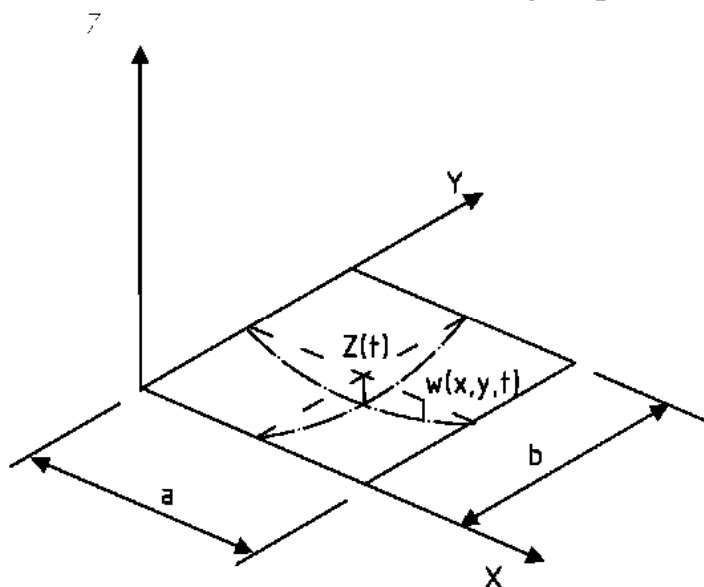


Рисунок 2.8 – Конструкция в виде пластины

При расчете двумерных конструкций типа пластин также можно использовать модель системы с одной степенью свободы

$$Z(x, y, t) = \psi_i(x, y) \cdot Z(t) .$$

Здесь $Z(t)$ – обобщенная координата.

Запишем функцию, удовлетворяющую граничным условиям, в виде:

$$\psi(x, y) = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} .$$

Обобщенная масса и обобщенная жесткость определяются из выражений

$$m^* = \int_A m(x, y) [\psi(x, y)]^2 dA ;$$

$$k^* = D \int_A \left[\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) \right] dA .$$

Здесь $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость плиты.

Обобщенная нагрузка равна $p^* = \int_A p(x, y) \psi(x, y) dA$. Дальнейший ход решения аналогичен приведенной выше последовательности действий.

Лекция 3

Реакция систем при динамических воздействиях общего вида

Реакция систем при динамических воздействиях определяется на основе решения дифференциальных уравнений движения.

Дифференциальное уравнение n -го порядка записывается в виде

$$a_0 z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_m z = f(t), \quad (3.1)$$

где $a_0, a_1, \dots, a_m, f(t)$ - заданные функции от t или постоянные числа, причем $a_0 \neq 0$, n - порядок старшей производной. Если $f(t) \neq 0$, то уравнение (3.1) называется неоднородным дифференциальным уравнением (НДУ), при $f(t) = 0$ - однородным. Уравнение движения системы с одной степенью свободы описывается уравнениями Даламбера-Лагранжа второго порядка ($n=2$), которое записывается в виде

$$\ddot{z} + a\dot{z} + bz = f(t). \quad (3.2)$$

Соответствующее однородное уравнение (ОДУ)

$$\ddot{z} + a\dot{z} + bz = 0. \quad (3.3)$$

Функция $\tilde{z}(t)$, которая обращает (3.3) в тождество, называется решением ОДУ. Функция $\tilde{z}(t)$ при $f(t) \neq 0$ - решение неоднородного дифференциального уравнения (НДУ). Из теории дифференциальных уравнений известно, что полное решение уравнения - это сумма решений однородного (общего решения) и неоднородного уравнения (частное решение):

$$z = \tilde{z} + \bar{z}. \quad (3.4)$$

3.1 Решение однородного дифференциального уравнения

3.1.1 Общая методика решения однородного дифференциального уравнения с учетом затухания

Будем искать его в виде $\tilde{z} = Ae^{pt}$. Тогда $\dot{\tilde{z}} = Ape^{pt}$; $\ddot{\tilde{z}} = Ap^2 e^{pt}$. Подставляя эти выражения в уравнение (3.3), получим

$$Ap^2 e^{pt} + Aape^{pt} + Abye^{pt} = 0. \quad (3.5)$$

Так как $Ape^{pt} \neq 0$, характеристическое уравнение записывается в виде $p^2 + ap + b = 0$. Корни характеристического уравнения

$$p_{1,2} = -a/2 \pm \sqrt{a^2/4 - b}. \quad (3.6)$$

В общем случае, когда под корнем образуется отрицательное число (дискриминант уравнения $D < 0$), решение имеет пару комплексных корней $p_{1,2} = \alpha \pm i\omega$, где $\alpha = -a/2$, или Re действительная часть корня.

При учете затухания $a \neq 0$. Мнимая часть (Im) — $\omega = \sqrt{|a^2/4 - b|}$. Каждому значению корня p будет соответствовать одно решение

$$\tilde{z}_1 = A_1 e^{pt}; \quad \tilde{z}_2 = A_2 e^{pt}. \quad (3.7)$$

Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\tilde{z} = A_1 e^{(\alpha + i\omega)t} + A_2 e^{(\alpha - i\omega)t}. \quad (3.8)$$

Используя формулу Эйлера $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, приходим от показательной к тригонометрической форме:

$$\tilde{z}_1 = A_1 e^{\alpha t} (\cos \omega t + i \sin \omega t); \quad \tilde{z}_2 = A_2 e^{\alpha t} (\cos \omega t + i \sin \omega t), \quad (3.9)$$

или, иначе, к сумме действительной и мнимой частей:

$$\tilde{z}_1 = A_1 e^{\alpha t} \cos \omega t + A_1 e^{\alpha t} i \sin \omega t; \quad \tilde{z}_2 = A_2 e^{\alpha t} \cos \omega t + A_2 e^{\alpha t} i \sin \omega t. \quad (3.10)$$

Из теории дифференциальных уравнений известно, что каждое слагаемое этих выражений также будет являться решением однородного уравнения. Поэтому, если ограничиться только действительной частью выражений, то получим зависимость

$$\tilde{z} = A_1 e^{\alpha t} \cos \omega t + A_2 e^{\alpha t} \cos \omega t = Le^{\alpha t} \cos \omega t. \quad (3.11)$$

Так как $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$ — две независимые функции, то можно показать, что функция $\tilde{z} = Be^{\alpha t} \sin \omega t$ также будет являться решением однородного дифференциального уравнения. Следовательно,

$$\tilde{z} = e^{\alpha t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t), \quad (3.12)$$

где A, B — произвольные постоянные, определяемые начальными условиями.

3.1.2 Свободные колебания без учета затухания

При отсутствии затухания $\alpha = 0$ и дифференциальное уравнение имеет вид

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0.$$

Его решение

$$\tilde{z} = A \cos \omega t + B \sin \omega t. \quad (3.13)$$

Для начала движения $t=0$; $B = z(0)/\omega$; $z(0) = A$. Таким образом, с учетом начальных условий, решение записывается, как

$$z(t) = \frac{\dot{z}(0)}{\omega} \sin \omega t + z(0) \cos \omega t. \quad (3.14)$$

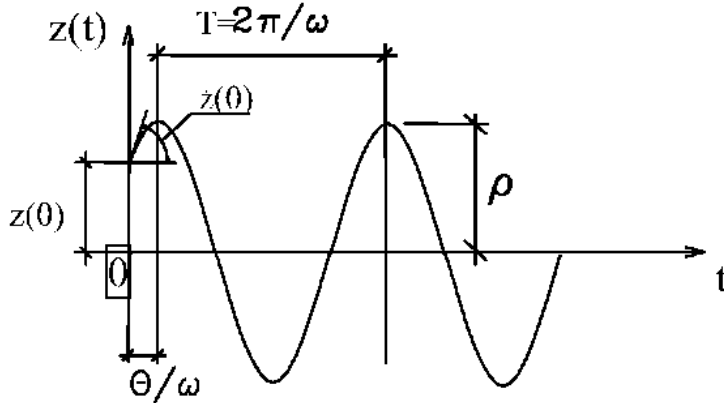


Рисунок 3.1 –График свободных колебаний

Это выражение описывает простое гармоническое движение (рисунок 3.1). Здесь ω – называется круговой частотой колебаний (угловой скоростью), которая измеряется в рад/с. Круговую частоту можно интерпретировать как количество колебаний

за 2π секунд. Отсюда частота собственных колебаний в Гц (колебание/с) равна $f = \omega/2\pi$, период собственных колебаний

$$T = 2\pi/\omega = 1/f.$$

В выражение (3.13) можно ввести подстановку $A = A_1 \cos \theta$ и $B = B_1 \sin \theta$. Тогда решение выражение (3.13) можно представить в виде уравнения гармонического колебания

$$z(t) = \rho \cdot \cos(\omega t - \theta), \quad (3.15)$$

где $\rho = \sqrt{[z(0)]^2 + [\dot{z}(0)/\omega]^2}$ – амплитуда колебаний, $\theta = \text{tg}^{-1}[(\dot{z}(0)/\omega) / z(0)]$ – фазовый угол.

3.1.3 Свободные колебания с учетом затухания

С учетом затухания (демпфирования) дифференциальное уравнение колебаний записывается в виде $\ddot{z} + (c/m)\dot{z} + \omega^2 z = 0$. Для него характеристическое уравнение $p^2 + (c/m)p + \omega^2 = 0$. Свободные колебания зависят от параметра затухания c

$$p = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega^2}.$$

С учетом затухания имеем *три вида движения*, которые характеризуются величиной дискриминанта $\sqrt{c^2/4m - b} = \sqrt{r^2 - \omega^2}$.

1) $r = \omega$ - критическое затухание (при $D=0$)

$$c_{кр} = 2m\omega; \quad p_1 = p_2 = -\omega.$$

Как указывалось выше, решение уравнения ищется в виде $\tilde{z} = Ae^{pt}$. Реакция, в соответствии с этим условием, для критического затухания равна

$$z(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\omega t}. \quad (3.16)$$

Второй член умножается на t , так как в решении уравнения присутствует только одно значение p . Подстановка начальных условий в уравнение (3.16) дает уравнение движения для случая критического затухания

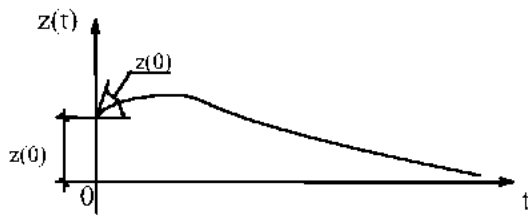


Рисунок 3.2 – Критическое затухание

$$z(t) = e^{-\omega t} [z(0)(1 + \omega t) + \dot{z}(0)t].$$

График такого движения показан на рисунке 3.2. Реакция в этом случае не содержит колебаний относительно нулевого уровня. Перемещение стремится к нулю по экспоненте.

2) $r < \omega_c$ – комплексные корни ($c < m\omega$), характеризующие колебательный процесс

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = 0.$$

Удобно выразить затухание через относительный параметр затухания $\xi = c/c_{кр} = c/2m\omega$. Для обычных строительных конструкций $\xi < 20\%$. Подставляя ξ в выражение $p = -c/2m \pm \sqrt{(c/2m)^2 - \omega^2}$, получим корни характеристического уравнения в виде:

$$p_{1,2} = -\xi\omega \pm \sqrt{(\xi\omega)^2 - \omega^2} = -\xi\omega \pm i\omega_D.$$

Здесь $\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2}$ – частота демпфированных колебаний. Тогда $z(t) = e^{-\xi\omega t} (A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t)$. При введении начальных условий $z(0)$ и $\dot{z}(0)$ имеем

$$z(t) = e^{-\xi\omega t} \left[\frac{\dot{z}(0) + z(0)\xi\omega}{\omega_D} \sin \omega_D t + z(0) \cos \omega_D t \right]. \quad (3.17)$$

Это выражение реакции системы можно записать в форме вращающегося вектора

$$z(t) = \rho e^{-\xi\omega t} \cos(\omega_D t - \theta), \quad (3.18)$$

$$\text{где } \rho = \left\{ \left[\frac{\dot{z}(0) + z(0)\xi\omega}{\omega_D} \right]^2 + [z(0)]^2 \right\}^{1/2}; \quad \theta = \text{tg}^{-1} \frac{\dot{z}(0) + z(0)\xi\omega}{\omega_D z(0)}. \quad (3.19)$$

График колебательного процесса с затуханием показан на рисунке 3.3. Скорость затухания можно охарактеризовать, рассматривая отношение соседних амплитуд $Z_n / Z_{n+1} = \exp(2\pi\xi\omega / \omega_D)$ или логарифмический декремент затухания $\delta \equiv \ln(Z_n / Z_{n-1}) = 2\pi\xi\omega / \omega_D = 2\pi\xi / \sqrt{1-\xi^2}$. Для строительных конструкций величиной ξ^2 можно пренебречь, при этом $\omega \approx \omega_D$. Если $\omega \approx \omega_D$, то логарифмический декремент затухания $\delta \approx 2\pi\xi$. Приблизительно, при экспериментальных измерениях, $\xi = (z_n - z_{n+m}) / 2m\pi z_{n-m}$. При небольшом затухании $\delta \approx 2\pi\xi$.

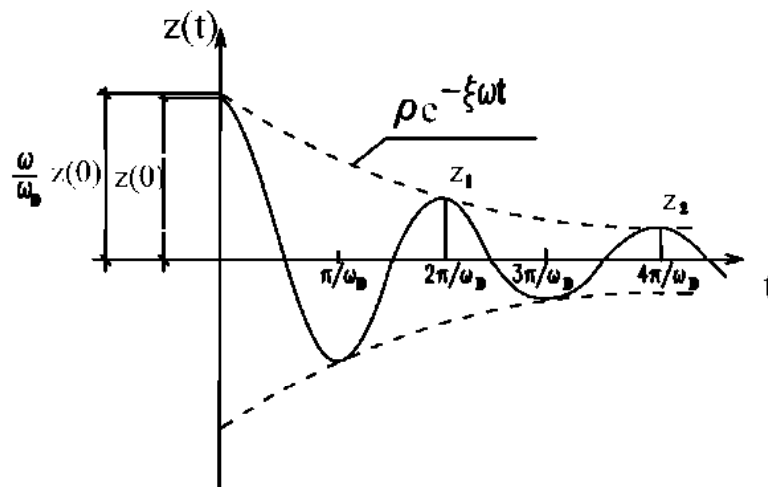


Рисунок 3.3 – Свободные колебания с затуханием

Тогда можно представить $z_n / z_{n+1} = e^\delta = e^{2\pi\xi} = 1 + 2\pi\xi + (2\pi\xi)^2 / (2!) + \dots$.

Если оставить только 2 члена (для небольших ξ), то $\xi = (z_n - z_{n-1}) / 2m\pi z_{n-1}$. Практически можно использовать соотношение $\xi = (z_n - z_{n-m}) / 2m\pi z_{n-m}$.

При экспериментальной оценке параметров по свободным колебаниям демпфированных систем удобно пользоваться методом, который заключается в определении числа циклов, в течение которых амплитуда уменьшается в 2 раза. Уменьшение амплитуды на 50 % происходит при затухании 10% от критического.

3) $r > \omega$ - передемпфированная система с затуханием больше критического. При этом $\xi > 1$. Решение дифференциального уравнения в этом случае выражается через гиперболические функции $z(t) = [A \sinh \omega t + B \cosh \omega t] e^{-\xi \omega t}$ – это решение определяет минимальную величину затухания, при котором не происходит свободных колеба-

ний. Возврат к нулевому уровню замедляется при увеличении параметра затухания.

3.1.4 Пример. Определение параметров затухания

Для определения динамических характеристик здания (рисунок 3.4) ломкратом отклонили его конструкцию и внезапно отпустили. Измеренное перемещение равно $z = 0,51$ см при $P=90,6$ кН. После спятия P обратное отклонение составило $z_{max} = -0,41$ см, а период колебания $T=1,4$ с.

Нужно найти параметры затухания δ, ζ, c .

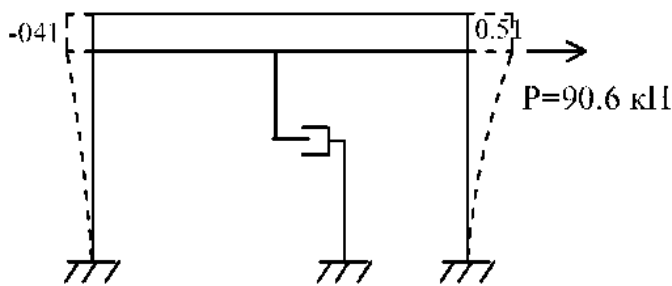


Рисунок 3.4 Схема здания при вибрационных испытаниях

Производим действия в следующей последовательности.

1. Определим нагрузку (приведенный вес) ригеля. Период собственных колебаний рамы записывается в

$$\text{виде } T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{W}{kg}} = 1,4 \text{ с.}$$

Отсюда $W = \left(\frac{1,4}{2\pi}\right)^2 kg = 0,0496 \times 90,6 / 0,51 \times 980 = 8700$ кН.

2. Частота колебаний $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1,4} = 0,714$ Гц,

круговая частота – $\omega = 2\pi f = 4,48$ рад/с.

3. Характеристика затухания $\delta = \ln(0,51/0,41) = 0,223$.

4. Параметр затухания $\xi = \delta / 2\pi = 3,55\%$.

5. Коэффициент затухания

$$c = \xi c_{sp} = \xi (2m\omega) = 0,0355 \cdot \frac{2 \cdot 8700}{980} \cdot 4,48 = 2,82 \text{ кН/(см} \cdot \text{с)}.$$

6. Динамическая частота (с учетом затухания)

$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2} = \omega (0,999)^{1/2} \approx \omega.$$

7. Амплитуда после шести циклов

$$Z_6 = \left(\frac{z_1}{z_0}\right)^6 z_0 = \left(\frac{4}{5}\right)^6 \cdot 0,51 = 0,133 \text{ см.}$$

3.2 Общая методика решения неоднородного дифференциального уравнения

Наиболее общим методом является метод вариации произвольных постоянных, согласно которому решение уравнения

$$\ddot{z} + c\dot{z} + bz = f(t) \quad (3.20)$$

ищется в виде

$$\tilde{z} = C_1(t)\tilde{z}_1 + C_2(t)\tilde{z}_2, \quad (3.21)$$

где $C_1(t), C_2(t)$ - некоторые функции, которые надо определить, $f(t)$ - функция произвольного вида; \tilde{z}_1, \tilde{z}_2 - решения однородного уравнения. В зависимости от корней решение может быть представлено в виде $z = e^{\alpha t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$, где $\alpha = -\zeta \omega$. Каждое слагаемое здесь также является решением однородного уравнения, то есть $\tilde{z}_1 = Ae^{\alpha t} \cos \omega t$; $\tilde{z}_2 = Be^{\alpha t} \sin \omega t$. В другой форме эти выражения можно записать в виде $z_1 = Ae^{\mu_1 t}$, $z_2 = Be^{\mu_2 t}$ и т. д. Продифференцируем равенство (3.21) с учетом того, что $\dot{C}_1 = \dot{C}_1(t), \dot{C}_2 = \dot{C}_2(t)$:

$$\dot{\tilde{z}} = \dot{C}_1 \tilde{z}_1 + C_1 \dot{\tilde{z}}_1 + \dot{C}_2 \tilde{z}_2 + C_2 \dot{\tilde{z}}_2. \quad (3.22)$$

Подберем C_1 и C_2 так, чтобы выполнялось равенство

$$\dot{C}_1 \tilde{z}_1 + \dot{C}_2 \tilde{z}_2 = 0. \quad (3.23)$$

Тогда
$$\dot{\tilde{z}} = C_1 \dot{\tilde{z}}_1 + C_2 \dot{\tilde{z}}_2, \quad (3.24)$$

$$\ddot{\tilde{z}} = C_1 \ddot{\tilde{z}}_1 + C_2 \ddot{\tilde{z}}_2 + \dot{C}_1 \dot{\tilde{z}}_1 + \dot{C}_2 \dot{\tilde{z}}_2. \quad (3.25)$$

Подставив выражение (3.21), (3.24), (3.25) в неоднородное уравнение (3.20), получим

$$C_1 \ddot{\tilde{z}}_1 + C_2 \ddot{\tilde{z}}_2 + \dot{C}_1 \dot{\tilde{z}}_1 + \dot{C}_2 \dot{\tilde{z}}_2 + a(C_1 \dot{\tilde{z}}_1 + C_2 \dot{\tilde{z}}_2) + b(C_1 \tilde{z}_1 + C_2 \tilde{z}_2) = f(t)$$

или
$$C_1 (\ddot{\tilde{z}}_1 + a\dot{\tilde{z}}_1 + b\tilde{z}_1) + C_2 (\ddot{\tilde{z}}_2 + a\dot{\tilde{z}}_2 + b\tilde{z}_2) + \dot{C}_1 \dot{\tilde{z}}_1 + \dot{C}_2 \dot{\tilde{z}}_2 = f(t). \quad (3.26)$$

Выражения в первых 2-х скобках обращаются в 0, так как \tilde{z}_1 и \tilde{z}_2 - решения однородного уравнения. Тогда имеем

$$\dot{C}_1 \dot{\tilde{z}}_1 + \dot{C}_2 \dot{\tilde{z}}_2 = f(t). \quad (3.28)$$

Таким образом, C_1 и C_2 будут удовлетворять выражениям (3.24) и (3.28),

т.е.
$$\dot{C}_1 \tilde{z}_1 + \dot{C}_2 \tilde{z}_2 = 0; \quad \dot{C}_1 \dot{\tilde{z}}_1 + \dot{C}_2 \dot{\tilde{z}}_2 = f(t). \quad (3.29)$$

Из системы уравнений (3,29) находим $\dot{C}_1 = -\frac{f(t)\dot{\tilde{z}}_2}{\tilde{z}_1\dot{\tilde{z}}_2 - \dot{\tilde{z}}_1\tilde{z}_2}$; $\dot{C}_2 = \frac{f(t)\dot{\tilde{z}}_1}{\tilde{z}_1\dot{\tilde{z}}_2 - \dot{\tilde{z}}_1\tilde{z}_2}$.

$$\text{Отсюда} \quad C_1 = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{f(t)\tilde{z}_2 dt}{\tilde{z}_1\dot{\tilde{z}}_2 - \dot{\tilde{z}}_1\tilde{z}_2} + \bar{C}_1, \quad C_2 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{f(t)\tilde{z}_1 dt}{\tilde{z}_1\dot{\tilde{z}}_2 - \dot{\tilde{z}}_1\tilde{z}_2} + \bar{C}_2. \quad (3.30)$$

где \bar{C}_1, \bar{C}_2 – произвольные постоянные интегрирования.

Найдя C_1 и C_2 и подставив в (3.21), получим общее решение неоднородного уравнения. Если положить $\bar{C}_1 = \bar{C}_2 = 0$, то выражение (3.21) – частное решение дифференциального уравнения, которое в конкретных случаях определения решений зависит от вида $f(t)$.

3.3 Иллюстрация решения неоднородного дифференциального уравнения.

Интеграл Дюамеля. Коэффициент динамичности

Для иллюстрации процесса решения рассмотрим вначале более простой случай – уравнения без учета затухания:

$$z + \omega^2 z = P(t) / m. \quad (3.31)$$

Полное решение является суммой общего и частного решений:

$$z = z_1(t) + z_2(t).$$

Общее решение (решение однородного уравнения):

$$z_1(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t. \quad (3.32)$$

По виду общего решения запишем (см. 3.21) частное решение:

$$\tilde{z} = c_1(t) \cos \omega t + c_2(t) \sin \omega t. \quad (3.33)$$

Здесь $c_1(t), c_2(t)$ – дважды дифференцируемые функции по (t) .

Найдем первую производную от (3.33):

$$\dot{\tilde{z}} = \dot{c}_1(t) \cos \omega t + \dot{c}_2(t) \sin \omega t - c_1(t) \omega \sin \omega t + c_2(t) \omega \cos \omega t. \quad (3.34)$$

Подберем C_1 и C_2 так, чтобы выполнялось условие

$$\dot{c}_1(t) \cos \omega t + \dot{c}_2(t) \sin \omega t = 0. \quad (3.35)$$

С учетом условия (3.35) получим:

$$\ddot{\tilde{z}} = -\dot{c}_1(t) \omega \sin \omega t + \dot{c}_2(t) \omega \cos \omega t - c_1(t) \omega^2 \cos \omega t - c_2(t) \omega^2 \sin \omega t. \quad (3.36)$$

Подставляя (3.33) и (3.36) в исходное уравнение (3.31), получим два уравнения:

$$\begin{aligned} c_1(t) \cos \omega t + c_2(t) \sin \omega t &= 0; \\ -\dot{c}_1(t) \omega \sin \omega t + \dot{c}_2(t) \omega \cos \omega t &= P(t) / m. \end{aligned}$$

Их совместное решение приводит к результату:

$$\dot{c}_1(t) = -\frac{1}{m\omega} P(t) \sin \omega t, \quad \dot{c}_2(t) = -\frac{1}{m\omega} P(t) \cos \omega t. \quad (3.37)$$

Отсюда, после интегрирования:

$$c_1(t) = -\frac{1}{m\omega} \int_0^t P(\tau) \sin \omega\tau d\tau ; \quad c_2(t) = -\frac{1}{m\omega} \int_0^t P(\tau) \cos \omega\tau d\tau . \quad (3.38)$$

Подставляя выражения (3.38) в (3.33), получим

$$z(t) = \frac{1}{m\omega} \sin \omega t \int_0^t P(\tau) \cos \omega\tau d\tau - \frac{1}{m\omega} \cos \omega t \int_0^t P(\tau) \sin \omega\tau d\tau ,$$

или $z(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t P(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau$ - *интеграл Дюамеля*. (3.39)

Таким образом, полное решение записывается в виде

$$z(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{1}{m\omega} \int_0^t P(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau . \quad (3.40)$$

Если считать, что собственные колебания быстро затухают, то установившиеся процессы описываются зависимостью

$$z_{\text{уст}}(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t P(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau = \frac{\omega}{m\omega^2} \int_0^t P(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau .$$

Поскольку $\omega^2 = 1/(m\delta_{11}) = k/m$, где δ_{11} – перемещение от силы $P=1$, то

$$z_{\text{уст}} = \delta_{11} \omega \int_0^t P(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau = \delta_{11} P_s(t) . \quad (3.41)$$

Коэффициент динамичности определяется как отношение $\mu = z_{\text{дин}} / z_{\text{стат}}$.

Лекция 4

Реакция систем с одной степенью свободы при гармонических воздействиях

Гармонические воздействия возникают при работе различного рода двигателей, машин, при движении транспорта. Они являются следствием периодического вращения недостаточно уравновешенных двигателей или периодического воздействия при движении колес по неровному пути (вынужденные колебания). Многие нестационарные воздействия могут моделироваться с помощью набора гармонических нагрузок и их реакций. Поэтому анализ реакции системы с одной степенью свободы при гармонических воздействиях является весьма важным этапом любого динамического расчета.

Уравнение движения такого рода системы записывается в виде

$$m\ddot{z}(t) + c\dot{z}(t) + kz(t) = P_0 \sin \bar{\omega}(t) . \quad (4.1)$$

В формуле (4.1) P_0 – амплитуда периодического воздействия, $\bar{\omega}$ – частота вынужденных колебаний. Правая часть уравнения (4.1) описывает гармоническое воздействие. Иногда вместо функции синуса употребляют функцию косинуса. Это связано с необходимостью удовлетворения начальным условиям, так как при $t=0$ синус равен нулю, а косинус – единице. Как будет показано позднее, в ряде случаев нагрузка может быть представлена в виде ряда, содержащего обе эти функции.

При постоянном повторении воздействия затухание сильно влияет, как правило, в резонансной области, при совпадении частоты вынужденных и собственных колебаний. Поэтому рассмотрим более простое уравнение колебательного процесса без учета затухания

$$m\ddot{z} + kz = P_0 \sin \bar{\omega} t . \quad (4.2)$$

Как уже указывалось ранее, общее решение неоднородного дифференциального уравнения является суммой решения однородного уравнения (переходной процесс) и частного решения, зависящего от правой части. При установившейся реакции переходной процесс в ряде случаев не успевает проявиться.

4.1 Недемпфированная система

А. Решение однородного уравнения

$$m\ddot{z} + kz = 0 \quad (4.3)$$

Как уже указывалось, решение однородного уравнения имеет вид

$$z_0(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad .$$

Б. Частное решение (реакция системы в результате действия нагрузки).

Будем считать, что при гармонической нагрузке реакция тоже является гармонической и имеет фазу совпадающую с нагрузкой, т.е.

$$z_p(t) = G \sin \bar{\omega}(t) \quad . \quad (4.4)$$

Здесь G – амплитуда реакции, которую следует определить. Подставив выражение (4.4) в (4.2), получим:

$$-m\bar{\omega}^2 G \sin \bar{\omega}t + kG \sin \bar{\omega}t = P_0 \sin \bar{\omega}t \quad . \quad (4.5)$$

Поскольку $\omega^2 = k/m$ (ω – круговая частота собственных колебаний), то после сокращения на $\sin \bar{\omega}t$ и ω^2 и после ряда преобразований придем к зависимости:

$$G(1 - \bar{\omega}^2 / \omega^2) = P_0 / k \quad . \quad (4.6)$$

Введем коэффициент, выражающий соотношение частот :

$$\beta = \bar{\omega} / \omega \quad . \quad (4.7)$$

Тогда амплитуда реакции равна

$$G = \frac{P_0}{k} \left(\frac{1}{1 - \beta^2} \right) \quad . \quad (4.8)$$

В. Общее решение

Общее решение дифференциального уравнения (4.2) имеет вид

$$z(t) = z_0(t) + z_p(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t + \frac{P_0}{k} \left(\frac{1}{1 - \beta^2} \right) \sin \bar{\omega} t \quad . \quad (4.9)$$

Постоянные интегрирования A и B зависят от начальных условий. Допустим, что колебания начинаются из состояния покоя. Тогда при $z(0) = 0$ и $\dot{z}(0) = 0$

$$A = - \frac{P_0 \beta^2}{k} \left(\frac{1}{1 - \beta^2} \right); \quad B = 0 \quad . \quad (4.10)$$

С учетом начальных условий получаем из уравнения (9) полную реакцию:

$$z(t) = \frac{P_0}{k} \left(\frac{1}{1 - \beta^2} \right) \cdot (\sin \bar{\omega} t - \beta^2 \sin \omega t) \quad . \quad (4.11)$$

В формуле (4.11) $z_{cm}(t) = P_0 / k$ – статическое перемещение от амплитудного значения P_0 ; $1/(1-\beta^2)$ – коэффициент усиления (КУ); $\sin \bar{\omega} t$ – составляющая, определяющая установившуюся часть реакции, зависящую от нагрузки (рисунок 4.1 а); $\beta \sin \omega t$ – составляющая реакции, возникающая от собственных колебаний (рисунок 4.1 б). Эта составляющая называется переходной частью, так как она значительно влияет только при начале колебаний и в практических случаях при установившихся колебаниях вследствие затухания её вклад в реакцию мал.

Если рассматривается недемпфированная система, то теоретически эта составляющая влияет на результат решения от начала до конца процесса и не затухает со временем (рисунок 4.1 в).

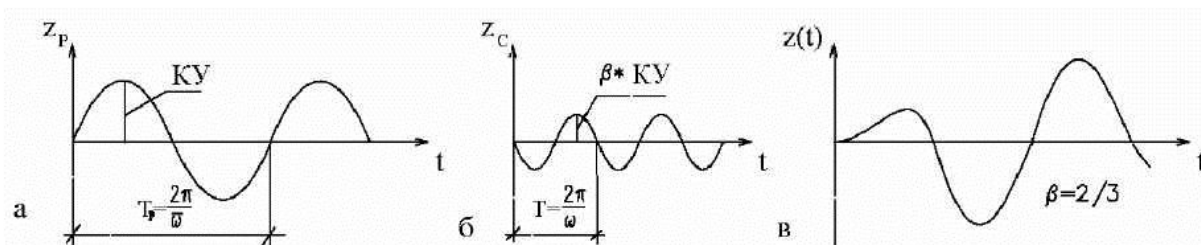


Рисунок 4.1 – Составные части реакции
а – установившийся режим; б – переходной режим; в – полная реакция

Г. Коэффициент динамичности (относительный параметр реакции)

При практических инженерных расчетах весьма удобно использовать отношение динамической реакции к соответствующему статическому перемещению

$$\mu(t) = z(t) / z_{cm} = z(t) / (P_0 / k). \quad (4.12)$$

Для гармонического воздействия динамический коэффициент равен

$$\mu(t) = \left(\frac{1}{1-\beta^2} \right) (\sin \bar{\omega} t - \beta \sin \omega t) \quad (4.13)$$

(продумайте стремление 2-х режимов войти в фазу и эффект биения).

4.2 Демпфированная система

Запишем дифференциальное уравнение колебаний с учетом относительного параметра затухания $\xi = c/c_{кр}$.

$$z(t) + 2\xi\omega z(t) + \omega^2 z(t) = (P_0/m)\sin \omega(t). \quad (4.14)$$

На практике затухание ниже критического, т.е. $c < c_{кр} = 2m\omega$. Поэтому решение однородного уравнения имеет вид:

$$z_0(t) = e^{-\xi\omega t} (A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t). \quad (4.15)$$

Частное решение при гармоническом нагружении определяется как

$$z_p(t) = G_1 \sin \bar{\omega} t + G_2 \cos \bar{\omega} t. \quad (4.16)$$

Здесь вводится второе слагаемое, так как реакция может не находиться в одной фазе с нагрузкой. Подставляя (4.16) в (4.14) и отделяя коэффициенты при $\sin \bar{\omega} t$ от коэффициентов при $\cos \bar{\omega} t$, получим зависимости:

$$\left[-G_1 \bar{\omega}^2 - G_2 \bar{\omega} (2\xi \omega) + G_1 \omega^2 \right] \sin \bar{\omega} t - \frac{P_0}{m} \sin \bar{\omega} t; \quad (4.17)$$

$$\left[-G_2 \bar{\omega}^2 - G_1 \bar{\omega} (2\xi \omega) + G_2 \omega^2 \right] \cos \bar{\omega} t = 0. \quad (4.17,a)$$

После деления на ω^2 и сокращения на тригонометрические функции имеем:

$$G_1(1 - \beta^2) - G_2(2\xi\beta) - \frac{P_0}{k}; \quad (4.18)$$

$$G_2(1 - \beta^2) + G_1(2\xi\beta) = 0. \quad (4.18,a)$$

Отсюда получаем: $G_1 = \frac{P_0}{k} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}; G_2 = \frac{P_0}{k} \frac{-2\xi\beta}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}.$ (4.19)

После подстановки выражений (4.19) в частное решение (4.16) и суммирования с решением однородного уравнения, получаем общее решение в виде:

$$z(t) = e^{-\xi\omega t} (A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t) + \frac{P_0}{k} \frac{[(1 - \beta^2) \sin \bar{\omega} t - 2\xi\beta \cos \bar{\omega} t]}{[(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]}. \quad (4.20)$$

Коэффициенты A и B могут быть легко вычислены для любых начальных условий. В практических расчетах первый член в формуле (4.20) близок к нулю и не представляет интереса. Перемещения при установившемся процессе (установившаяся реакция) могут быть записаны в виде гармонических колебаний

$$z(t) = \rho \sin(\bar{\omega} t - \theta). \quad (4.21)$$

В формуле (4.21) амплитуда реакции установившегося процесса равна

$$\rho = \frac{P_0}{k} [(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]^{-0.5}. \quad (4.22)$$

Фазовый угол (угол, на который реакция отстает от приложенной нагрузки) определяется зависимостью ($tg^{-1} = arctg$):

$$\theta = tg^{-1} \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2} . \quad (4.23)$$

Отношение результирующей амплитуды ρ к статическому перемещению, вызываемому силой P_0 , называется коэффициентом динамичности и определяется из выражения

$$\mu = \frac{\rho}{P_0/k} = [(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]^{0.5} . \quad (4.24)$$

Амплитуду реакции установившегося процесса можно эффективно представить в виде диаграммы Арганда (рисунок 4.2). На ней по оси абсцисс откладывается реальная составляющая Re , а по оси ординат – мнимая составляющая реакции Im . В процессе колебаний векторы слагаемых формулы (4.22) вместе с амплитудой ρ вращаются с угловой скоростью ωt .

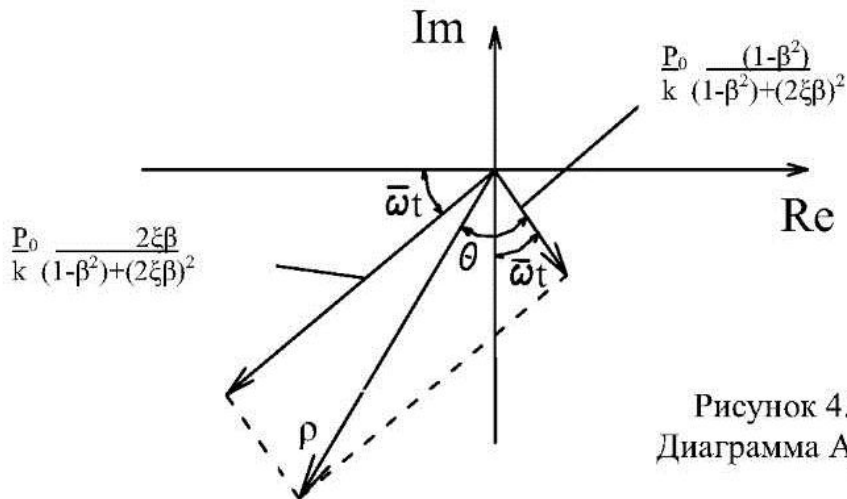


Рисунок 4.2 -
Диаграмма Арганда

Из выражения (4.24) видно, что коэффициенты динамичности и фазовый угол зависят от отношения частот $\beta = \omega/\omega$ и относительного затухания $\xi = c/c_{кр} = c/2m\omega$. На рисунках 4.3, 4.4 показаны графики этих зависимостей.

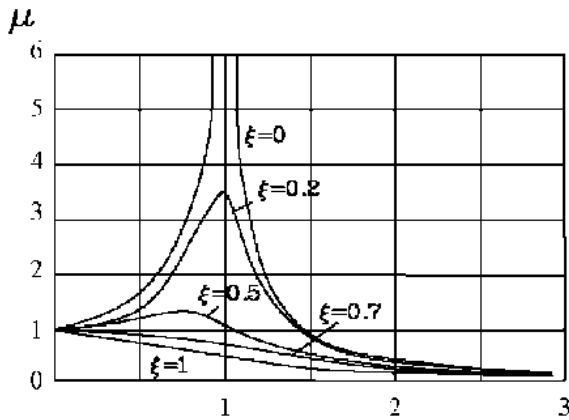


Рисунок 4.3 – Зависимость коэффициента динамичности от β и ξ

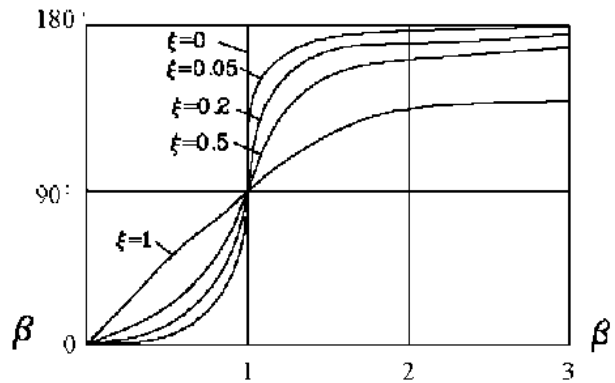


Рисунок 4.4 – Зависимость фазового угла θ от β и ξ

4.3 Пример. Определение динамических характеристик сооружения

Требуется определить динамические характеристики сооружения путем измерения амплитуд и фазовых углов в натуральных условиях. Для возбуждения колебаний используется переносная вибрационная машина. Включая ее при 2-х частотах $\bar{\omega}$ и измеряя амплитуды и фазовые углы, можно определить массу, параметр затухания и жесткость m, ξ, k системы с 1-й степенью свободы. При исследовании здания возбуждались колебания с частотами вибромашины $\bar{\omega}_1 = 16 \text{ рад/с}$; $\bar{\omega}_2 = 25 \text{ рад/с}$.

Амплитуда инерционной силы составляет 2,22 кН.

Измеренные амплитуды и фазовые углы равны:

$$\rho_1 = 18,3 \cdot 10^{-3} \text{ см}; \theta_1 = 15^\circ; \cos \theta_1 = 0,966; \sin \theta_1 = 0,259.$$

$$\rho_2 = 36,83 \cdot 10^{-3} \text{ см}; \theta_2 = 55^\circ; \cos \theta_2 = 0,57; \sin \theta_2 = 0,819.$$

Для определения динамических характеристик запишем формулу для определения амплитуды в виде

$$\rho = \frac{P_0}{k} \frac{1}{(1 - \beta^2)} \left\{ \frac{1}{1 + [2\xi\beta/(1 - \beta^2)]^2} \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{P_0}{k} \frac{\cos \theta}{1 - \beta^2}. \quad (4.25)$$

Здесь $\left\{ \frac{1}{1 + [2\xi\beta/(1 - \beta^2)]^2} \right\}^{\frac{1}{2}} = \cos \theta.$

$$\text{Отсюда } k(1 - \beta^2) = k - \bar{\omega}^2 m = \frac{P_0 \cos \theta}{\rho}.$$

Приходим к матричному уравнению

$$\begin{bmatrix} 1 - 16^2 \\ 1 - 25^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = 2,22 \cdot \begin{bmatrix} 0,966 \\ 18,3 \cdot 10^{-3} \\ 0,574 \\ 36,83 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}.$$

Его решение: $k=175$ кН/см; $m=22462$ кг;
 $W=mg=22462 \cdot 9,8=220128$ Н= $220,128$ кН.

Отсюда частота собственных колебаний:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 27,9 \text{ рад/сек } (f = 4 \text{ Гц}); \quad \xi = \frac{P_0 \sin \theta}{2\beta k \rho} = \frac{P_0 \sin \theta}{c_{кр} \bar{\omega} \rho}.$$

$$\text{По первому испытанию } c_1 = \xi c_{кр} = \frac{2,22 \cdot 0,259}{16 \cdot 18,3 \cdot 10^{-3}} = 1,964 \frac{\text{кН} \cdot \text{с}}{\text{см}}.$$

$$\text{По второму испытанию } c_2 = \xi c_{кр} = \frac{2,22 \cdot 0,819}{25 \cdot 36,83 \cdot 10^{-3}} = 1,975 \frac{\text{кН} \cdot \text{с}}{\text{см}}.$$

Таким образом, результаты опытов дали близкие результаты. Определим параметр затухания в процентах от критического

$$\xi = \frac{c}{2k/\omega} = \frac{1,964 \cdot 27,9}{2 \cdot 175} 100\% = 15,7\%.$$

4.4 Резонансный режим

Резонансный режим проявляется в том случае, когда отношение частот вынужденных и собственных колебаний стремится к единице. В этом случае для недемпфированной системы (см. формулы (4.11), (4.13)) реакция и, следовательно, коэффициент динамичности стремятся к бесконечности. Однако на самом деле этого не происходит вследствие влияния затухания. Для слабо демпфированных систем, к которым принадлежит большинство обычных сооружений, относительный параметр затухания $\xi < 1/\sqrt{2}$, а в практических случаях лежит в диапазоне от 3 до 20%. Формула (4.24) показывает, что в этом случае коэффициент динамичности хотя и имеет значительную величину, но ограничен величиной

$$\mu = 1/2\xi. \quad (4.26)$$

Однако условие $\beta = 1$ не характеризует настоящего максимума реакции. Для его определения надо исследовать выражение (4.24) на экстремум

$$\frac{d\mu}{d\beta} = \frac{d[(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]^{0,5}}{d\beta} = 0. \quad (4.27)$$

При $\xi < 1/\sqrt{2}$ максимум реакции проявляется при $\beta_{\max} = \sqrt{1-\xi^2}$, а коэффициент динамичности равен

$$\mu_{\max} = 1/(2\xi\sqrt{1-\xi^2}). \quad (4.28)$$

Вследствие малости ξ разница между величинами, определяемыми по формулам (4.26) и (4.28) пренебрежимо мала и может не учитываться в практических расчетах.

Рассмотрим процессы, возникающие при резонансе вследствие действия гармонических нагрузок. Запишем общее решение дифференциального уравнения с учетом затухания (см. формулу (4.20)) при $\beta = 1$ в виде:

$$z(t) = e^{-\xi\omega t} (A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t) - \frac{P_0}{k} \frac{\cos \bar{\omega} t}{2\xi}, \text{ причём } \bar{\omega} \approx \omega.$$

Полагая $z(0) = \dot{z}(0) = 0$, получим $A = \frac{P_0}{k} \frac{\omega}{2\omega_D} = \frac{P_0}{k} \frac{1}{2\sqrt{1-\xi^2}}$; $B = \frac{P_0}{k} \frac{1}{2\xi}$;

$$z(t) = \frac{1}{2\xi} \frac{P_0}{k} \left[e^{-\xi\omega t} \left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_D t + \cos \omega_D t \right) - \cos \bar{\omega} t \right]. \quad (4.29)$$

Для малых параметров затухания, обычных для большинства конструкций, член при \sin мало влияет на амплитуду и $\omega_D \approx \omega$. Отсюда коэффициент динамичности приближенно равен

$$\mu(t) = \frac{z(t)}{P_0/k} \cong \frac{1}{2\xi} (e^{-\xi\omega t} - 1) \cos \omega t. \quad (4.30)$$

При нулевом затухании уравнение (4.29) становится неопределенным, но после применения правила Лопиталя получим

$$\mu(t) = \frac{1}{2} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t). \quad (4.31)$$

Зависимости (4.30) и (4.31) характеризуют процесс возрастания колебаний демпфированных и недемпфированных систем при резонансе. Для недемпфированной системы возрастание становится неограниченным (рисунок 4.5). Это ведет к расстройству системы.

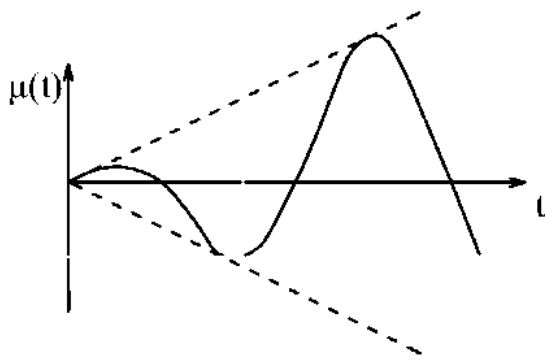


Рисунок 4.5 - Реакция без затухания

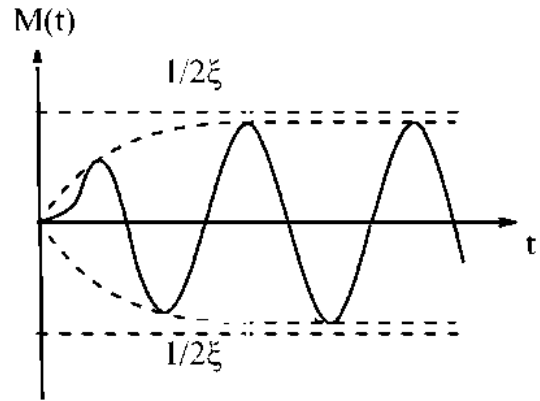


Рисунок 4.6 - Реакция с затуханием

Для демпфированной системы вследствие влияния затухания амплитуда колебаний ограничивается (рисунок 4.6) величиной $1/2\xi$. Однако скорость возрастания резонансной кривой зависит от степени затухания (рисунок 4.7).

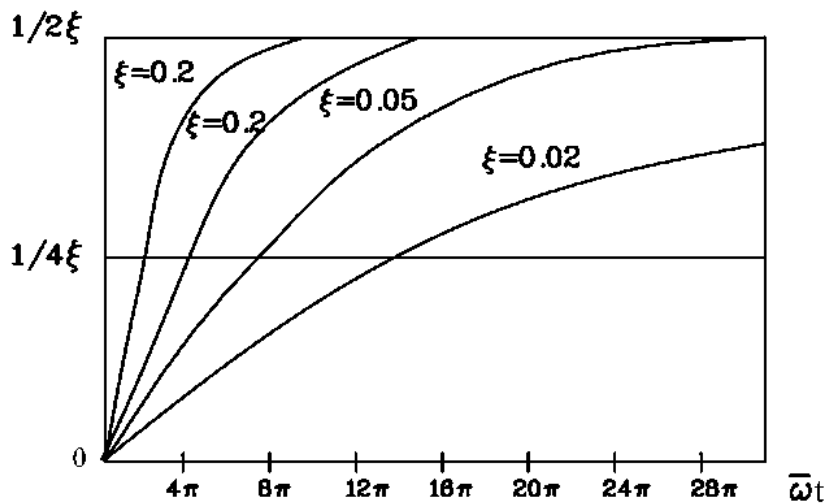


Рисунок 4.7 – Скорость возрастания резонансной кривой

Чем больше затухание, тем меньше количество циклов, за которые амплитуда достигает наибольшей величины.

Лекция 5 Виброизоляция (виброзащита)

5.1 Вибрации и виброизоляция

Вибрации – колебания, которые возникают при действии неуравновешенных масс двигателей, движении транспорта, периодических воздействий различного рода. Борьба с вибрациями является важной проблемой, которой посвящено много научной литературы. Здесь мы ограничимся только вибрациями, возникающими при действии гармонических воздействий в системах с одной степенью свободы.

Существует два типа технических проблем, возникающих при проектировании и конструировании зданий, сооружений и машин. К первому типу [45] относят задачи, в которых необходимо уменьшить влияние динамических сил, возникающих во время работы двигателя или машины на фундамент, опорную конструкцию или окружающую среду. Задачи второго типа [19] возникают в случае, когда надо защитить людей или ценное и высокочувствительное оборудование от вредных воздействий, возникающих при работе машин, двигателей и механизмов, находящихся рядом, путем изоляции объекта от этих воздействий. С точки зрения механики и математического описания оба типа задач близки друг другу.

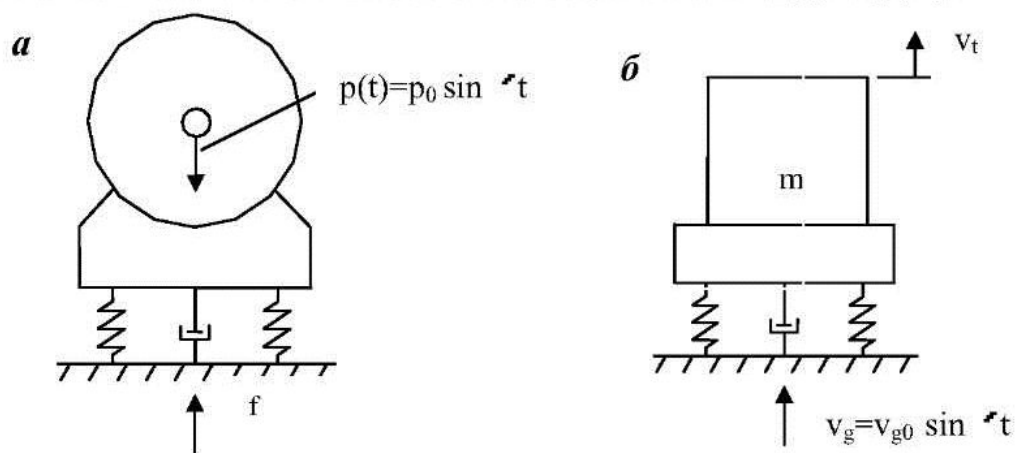


Рисунок 5.1 – Система активной виброизоляции
а – активной; б – пассивной

Виброизоляция – способы уменьшения воздействий от колебаний, основанные на варьировании характеристик связей системы и основания. Если источник возбуждения колебаний находится внутри системы, то виброизоляция носит название «активной», если же воздействие вызвано колебаниями основания, виброизоляция называется «пассивной».

5.2 Активная виброизоляция

Для системы с одной степенью свободы (рисунок 5.1,а) реакция (перемещение) при установившихся колебаниях двигателя записывается в виде гармонического процесса

$$z(t) = \frac{P_0}{k} \tilde{d} \cdot \sin(\bar{\omega} t - \theta), \quad (5.1)$$

$$\text{где } \tilde{d} = 1 / \sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}. \quad (5.2)$$

$$f_s = kz(t) = P_0 \tilde{d} \cdot \sin(\bar{\omega} t - \theta). \quad (5.3)$$

Реакция в виде скорости определяется формулой

$$\dot{z}(t) = \frac{P_0}{k} \tilde{d} \cdot \bar{\omega} \cos(\bar{\omega} t - \theta). \quad (5.4)$$

Отсюда получаем диссипативную силу вязкого сопротивления

$$f_D = c\dot{z}(t) = \frac{cP_0 \tilde{d} \bar{\omega}}{k} \cos(\bar{\omega} t - \theta) = 2\xi\beta P_0 \cos(\bar{\omega} t - \theta). \quad (5.5)$$

Эта сила направлена под углом 90° к упругой силе. Поэтому амплитуда силы в основании

$$f_{\max} = (f_{S,\max}^2 + f_{D,\max}^2)^{0.5} = P_0 \tilde{d} [1 + (2\xi\beta)^2]^{0.5} \quad (5.6)$$

Отношение максимальной силы в основании к амплитуде нагрузки называется *передаточным числом (ПЧ)* и записывается [22] в виде зависимости

$$ПЧ = f_{\max} / P_0 = \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2} / \sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}. \quad (5.7)$$

Формула (5.7) показывает, что влиять на ПЧ можно с помощью изменения жесткости пружин и вязкости демпферов. В противном случае следует менять массу тела или применять специальные устройства (динамические гасители колебаний). Зависимость ПЧ от отношения частот β и относительного затухания ξ показана на рисунке 5.2.

Отношение максимальной силы в основании к амплитуде нагрузки называется *передаточным числом (ПЧ)* и записывается [22] в виде зависимости

$$ПЧ = f_{\max} / P_0 = \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2} / \sqrt{[(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]}. \quad (5.7)$$

Формула (5.7) показывает, что влиять на ПЧ можно с помощью изменения жесткости пружин и вязкости демпферов. В противном случае следует менять массу тела или применять специальные устройства (динамические гасители колебаний). Зависимость ПЧ от отношения частот β и относительного затухания ξ показана на рисунке 5.2.

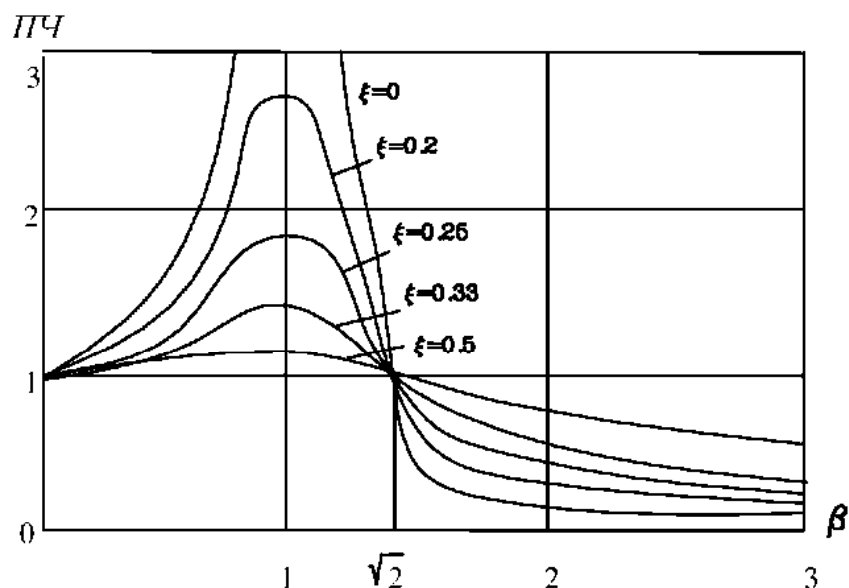


Рисунок 5.2 Изменение передаточного числа ПЧ в зависимости от ξ и β

Все графики проходят через $\beta = \sqrt{2}$, т.е. затухание снижает эффект систем виброизоляции в виде пружин и вязкого демпфера при $\beta > \beta_{кр}$. Передаточное число принято также называть *коэффициентом виброизоляции*.

5.3 Пассивная виброизоляция

Этот тип виброизоляции связан, как правило, с перемещением массы объекта относительно основания и расчетом устройств, помещаемых между ними (упругие и демпфирующие элементы).

Модель системы с одной степенью свободы показана на рисунке 5.16. Основание колеблется по гармоническому закону $z_g(t) = z_{g0} \sin \bar{\omega} t$. Ускорение изолируемой системы является векторной суммой относительного и переносного ускорений $\ddot{z}_g + \ddot{z}$. Подставляя эту сумму в уравнение колебания системы, получим

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{z}_g(t) = P_{\text{eff}}(t) \quad (5.8)$$

Ускорение основания равно

$$\ddot{z}_g(t) = -\ddot{z}_{g0} \bar{\omega}^2 \sin(\bar{\omega} t - \theta) \quad (5.9)$$

Фазовый угол не представляет практического интереса. Эффективная сила определяется формулой

$$P_{\text{eff}}(t) = -m\ddot{z}_{g0} \bar{\omega}^2 \sin \bar{\omega} t = P_{g0} \sin \bar{\omega} t \quad (5.10)$$

(знак не играет роли, так как сила осциллирует).

Установившаяся динамическая реакция системы характеризуется амплитудой (см. формулу (4.22)):

$$\rho = \frac{P_{g0}}{k} [(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]^{-0.5} = \frac{m\bar{\omega}^2 z_{g0}}{k} [(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]^{-0.5} = z_{g0} \beta^2 [(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]^{-0.5} \quad (5.11)$$

Отсюда

$$z(t) = z_{g0} \beta^2 [(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]^{-0.5} \sin(\bar{\omega} t - \bar{\theta}) \quad (5.12)$$

Когда движение основания векторно суммируется с $z(t)$, общее перемещение массы определяется из выражения

$$z'(t) = z_{g0} \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2} [(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]^{-0.5} \sin(\bar{\omega} t - \bar{\theta}) \quad (5.13)$$

Фазовый угол, как уже указывалось, практического интереса не имеет.

Для этого случая передаточное число совпадает с формулой (5.7) и эффективность виброизоляции также может быть оценена с помощью графиков на рисунке 5.2:

$$ПЧ = z'_{\text{max}} / z_{g0} = \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2} / \sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \quad (5.14)$$

Как видно из рисунка 5.2, виброизоляция эффективна только при соотношении частот $\beta > \sqrt{2}$ и малом затухании. В таком случае при практических расчетах можно определять коэффициент виброизоляции (ПЧ) при нулевом затухании

$$ПЧ = 1/(\beta^2 - 1) \quad (5.15)$$

Отметим также, что

$$\beta^2 = \frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2} = \omega^2 (m/k)^2 = \omega^2 \left(\frac{W}{kg}\right) = \omega^2 \left(\frac{\Delta_{cm}}{g}\right)$$

Здесь $\Delta_{ст} = \frac{W}{k}$ - статический прогиб.

С учетом того, что $\bar{\omega} = 2\pi\bar{f}$ (\bar{f} - частота входного воздействия), получим уравнение

$$\bar{f}^2 = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{ст}} \frac{(1+ПЧ)}{(2\pi)^2 ПЧ}}. \quad (5.16)$$

Графическое изображение уравнения (5.16) для различных передаточных чисел (коэффициентов виброизоляции) показано на рисунке 5.3. Зная частоту вынужденных колебаний и $ПЧ$, которые определяются техническими требованиями, можно подобрать жесткость и соответствующий прогиб $\Delta_{ст}$, обеспечивающий эффективную виброизоляцию. Возможно влиять на $ПЧ$ (см. формулу (5.14)) с помощью выбора материала для вязкого демпфера и также достигать эффективности виброизоляции. Однако из рисунка 5.3 видно, что при большой жесткости системы (перемещение $\Delta_{ст}$ мало) или при низких частотах возмущения виброизоляция нецелесообразна (заштрихованная область).

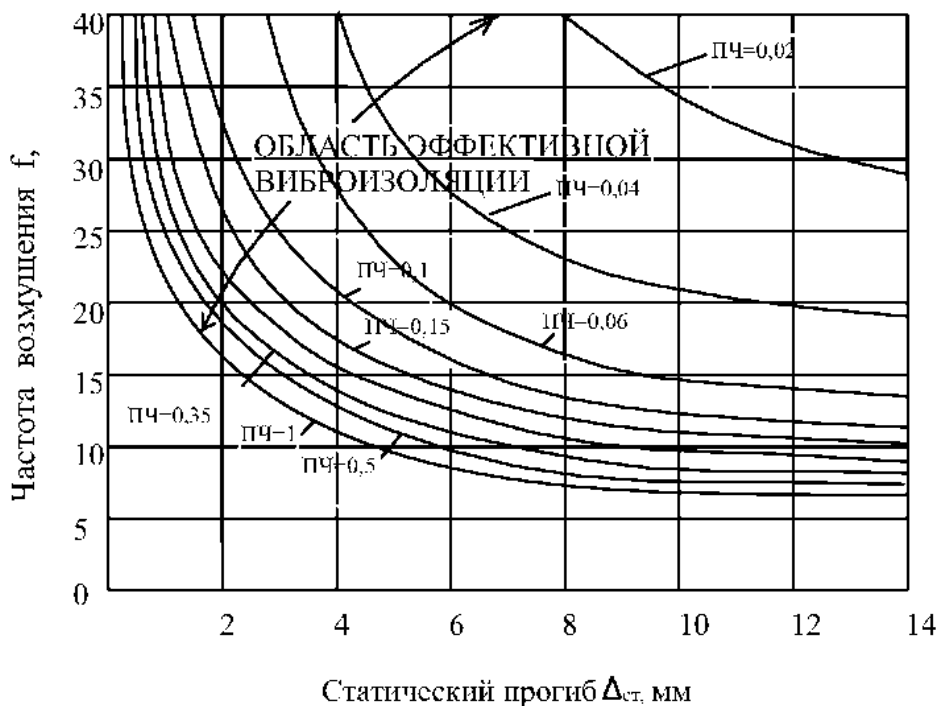


Рисунок 5.3 Расчетная диаграмма системы виброизоляции

5.4 Проектирование виброизоляции

При проектировании активной виброизоляции рекомендуется так проектировать опоры, чтобы отношение частот было $\beta = \bar{\omega} / \omega \geq 4$. При этом должны учитываться требования санитарных или технических норм и условия обеспечения несущей способности конструкций.

Подбор коэффициента вязкости ξ можно осуществлять с помощью графиков на рисунке 5.4.

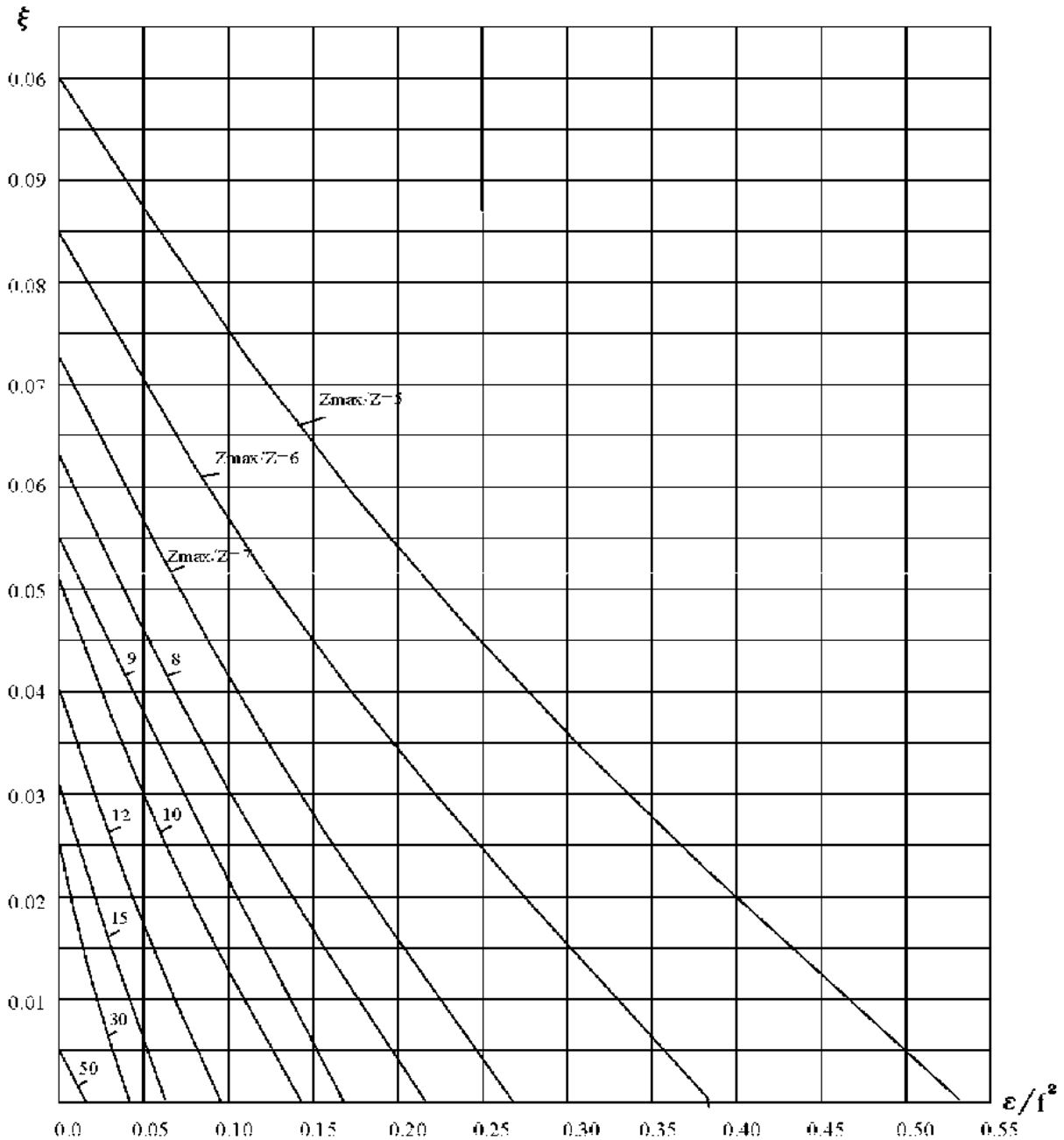


Рисунок 5.4 Определение параметра относительного затухания

Приведенные графики обеспечивают уменьшение резонансных пиков при пуске и остановке машин в зависимости от отношения скорости нарастания частоты вынужденных колебаний ε (Гц/сек) к квадрату частоты собственных колебаний f^2 (Гц·Гц) и отношения максимальной амплитуды колебаний при пуске к амплитуде при установившихся колебаниях $z_{\max}/z(t)$. При $\xi \leq 0,015$ можно применять виброизоляторы в виде стальных пружин, при $\xi > 0,015$ следует использовать резиновые, пластмассовые или комбинированные изоляторы.

Проектирование пассивной виброизоляции так же, как и для активной виброизоляции, основано на подборе пружинных, резиновых и комбинированных виброизоляторов. Эффективность её тоже оценивается коэффициентом виброизоляции ($ПЧ$). При $ПЧ > 1,25$ влиянием затухания можно пренебречь и пользоваться выражением (5.15).

Повышение эффективности пассивной виброизоляции обеспечивается за счет увеличения $ПЧ$ и уменьшения коэффициента демпфирования ξ . При практических расчетах это приводит к стремлению уменьшить жесткость упругих связей или увеличить массу системы. Однако такие меры могут привести к недопустимо большим статическим деформациям виброизолятора. Слишком податливые системы приводят к «зыбкости» при статических воздействиях. Это может оказаться неприемлемым при эксплуатации из-за неприятных ощущений для людей при их перемещении или по технологическим соображениям. Приемлемой нижней границей податливости является перемещение 0,7 мм при статической нагрузке 1 кН. Перемещение величиной 10 мм можно считать верхней границей.

При определении собственной частоты виброизолируемой установки рекомендуется использовать следующие ограничения:

- 1) при нормировке амплитуды перемещений установки

$$\omega^2 \leq \bar{\omega}^2 [z] / (\bar{z}_1 + [z]);$$

- 2) при нормировке амплитуды скорости перемещений установки (как правило, при частотах 10-100 Гц)

$$\omega^2 \leq \bar{\omega}^2 [\dot{z}] / (\bar{\omega} z_1 + [\dot{z}]);$$

- 2) при нормировке амплитуды ускорения перемещений установки (как правило, при частотах 1-10 Гц)

$$\omega^2 \leq \bar{\omega}^2 [\ddot{z}] / (\bar{\omega}^2 z_1 + [\ddot{z}]).$$

Здесь $[z]$, $[\dot{z}]$, $[\ddot{z}]$ – соответственно предельно допустимые амплитуды перемещений, скоростей и ускорений виброизолируемой установки. При этом могут использоваться зависимости $[z] = [\dot{z}] / \bar{\omega}$, $[z] = [\ddot{z}] / \bar{\omega}^2$.

Излагаемая здесь методика может оказаться бесполезной при частотах колебаний основания меньших, чем собственная частота установки или при близости этих частот.

Для решения примеров и использования в практических расчетах приведем таблицы 5.1, 5.2, 5.3, в которых содержатся некоторые полезные данные и рекомендации.

Таблица 5.1 Допускаемые амплитуды скоростей и ускорений

Класс машин и приборов	Характеристика чувствительности к колебаниям	Наименование машин и приборов	Допускаемая амплитуда	
			Ускорения $[\ddot{z}]$, мм/с ² Для частот 1-10 Гц	Скорости $[\dot{z}]$, мм/с Для частот 10-100 Гц
1	Высокочувствительные	Особоточные измерительные установки, микроскопы и другие точные оптические приборы, высокоточные механические контрольно-измерительные приборы, металлорежущие станки особо высокой точности шлифовальной группы и т.п.	6,3	0,1
2	Среднечувствительные	Металлорежущие станки шлифовальной группы средних размеров, координатно-расточные, точные автоматы	63	1,0
3	Малочувствительные	Токарные, фрезерные, сверлильные и другие металлорежущие станки нормальной точности, прядильные машины, ткацкие станки, типографские машины и т.п.	250	4,0
4	Печувствительные	Вентиляторы, центрифуги, электромоторы, штампы, прессы, вибростолы, виброгрохоты и т.п.	Более 250	Более 4,0

Таблица 5.2 Демпфирующие свойства виброизоляторов

Марка материала	Коэффициент вязкости	Марка материала	Коэффициент вязкости
Сталь	0,005	Резина КР=407	0,110
Резина 3311	0,020	Резина 9831	0,125
Резина 7-120с	0,040	Резина 3826	0,150
Резина 2566	0,055	Резина 2462	0,155
Резина 2959	0,070	Резина 2542Н	0,160
Резина 4326	0,080	Пластмасса ПХВЭ	0,2-0,4
Резина 194	0,085	Пластмасса ППУ	0,1-0,2

Таблица 5.3 Допустимые параметры вибраций

Частота, Гц	Амплитуда перемещения, мм	Частота, Гц	Амплитуда перемещения, мм
1,4	3,11	12,5	0,036
1,6	2,22	16,0	0,028
2,0	1,28	20,0	0,022
2,5	0,73	22,4	0,020
2,8	0,61	25,0	0,018
3,2	0,44	31,5	0,014
4,0	0,28	40,0	0,011
5,0	0,16	45,0	0,010
5,6	0,13	50,0	0,009
6,3	0,09	63,0	0,007
8,0	0,056	80,0	0,006
10,0	0,045	90,0	0,005

5.5 Расчет характеристик пружинных демпферов

Расчет (подбор) пружины производится по следующим формулам:

$$a) \text{ диаметр прутка } d = 1,6 \sqrt{kPc / [\tau]} , \quad (5.17)$$

где k – коэффициент, определяемый по аппроксимационной формуле

$$k = 0.0043517 c^2 - 0.107397 c + 1.7607 . \quad (5.18)$$

Здесь $c = D / d$ - отношение среднего диаметра пружины к диаметру прутка (индекс пружины), который рекомендуется принимать в пределах от 4 до 10;

P – расчетная нагрузка на одну пружину, кН;

$[\tau]$ – допускаемое напряжение на срез для материала пружины, кН/см²;

б) число рабочих витков (i) пружины

$$i = Gd / (8 Kc^3) , \quad (5.19)$$

где G – модуль сдвига (для стали $78,4 \cdot 10^3$ кН/см²);

K – жесткость пружины, в кН/см;

в) число «мертвых» витков (i_2) пружины

$i_2 = 1,5$ на оба торца пружины при $i \leq 7$ и $i_2 = 2,5$ при $i > 7$;

г) полное число витков пружины $i_1 = i + i_2$; (5.20)

д) высота ненагруженной пружины

$$H_0 = ih + (i_2 - 0.5)d , \quad (5.21)$$

где h – шаг пружины, принимаемый в пределах $(0,25-0,50)D$. Для пружин, работающих на сжатие, отношение высоты ненагруженной пружины к её среднему диаметру должно быть в пределах $H_0 / D \leq 1.5$.

5.6 Примеры расчета виброизоляции

Пример 1

По дороге движется автомобиль со скоростью 20 м/с (72 км/ч). Вследствие просадки основания полотна на дороге образовалось углубление пролетом 12 м с амплитудой 3 см (рисунок 5.5). Вес автомобиля $W = 18$ кН. Жесткость рессор автомобиля по испытаниям характеризуется прогибом 0,32 см при дополнительной нагрузке $P = 0,5$ кН.

Требуется определить параметры стационарных вертикальных колебаний внутри автомобиля при затухании $\xi = 0,4$ (40% от критического).

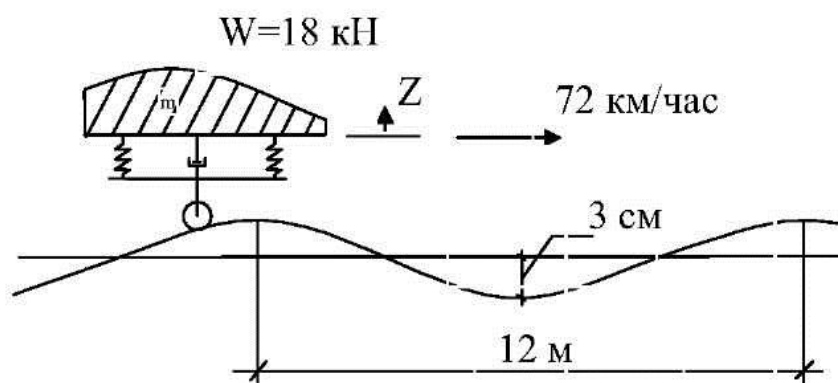


Рисунок 5.5 – Модель движения автомобиля по неровной дороге

Амплитуда вертикальных колебаний равна

$$Z_{\max}^{(t)} = Z_{go} ПЧ = Z_{go} \left[\frac{1 + (2\xi\beta)^2}{[(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Период возмущения при скорости 72 км/час (20 м/с) будет

$$L/V = T_p; T_p = 12 \text{ м} / 20 \text{ м/с} = 0,6 \text{ с}.$$

Жесткость рессор $k = 100 \cdot 0,5 / 0,32 = 156,25 \text{ кН/м}$.

Период собственных колебаний

$$T_{\text{собст.}} = 2\pi / \omega = 2\pi \sqrt{W/kg} = 6,28 \sqrt{18 / (156,25 \cdot 9,81)} = 0,680 \text{ с},$$

отсюда $\beta = T/T_p = 0,6 / 0,680 = 0,882$.

$$ПЧ = \sqrt{[1 + (2 \cdot 0,4 \cdot 0,882)^2] / [(1 - 0,882^2)^2 + (2 \cdot 0,4 \cdot 0,882)^2]} = 1,655.$$

При $\xi=0,4$ амплитуда $Z'_{\max} = 3,0 \cdot 1,655 = 4,97 \text{ см}$,

при $\xi=0$ $1/(1 - \beta^2) = 1 - 0,888^2 = 0,222$,

$$Z_{\max} = Z_0 / (1 - \beta^2) = 3 / 0,222 = 13,5 \text{ см} !!!$$

Эта величина показывает, что без наличия амортизаторов движение по дороге с неровностями становится затруднительным, а иногда и невозможным (в зависимости от жесткости рессор и характеристик неровности пути).

Пример 2

Машина с возвратно-поступательным движением весом 90 кН опирается на жесткую плиту с пружинами по четырем углам. Машина развивает вертикальные гармонические колебания, которые дают соответствующие нагрузки с амплитудой 2,25 кН при частоте вынужденных (установившихся) колебаний 40 Гц.

Какую жесткость пружин следует принять, чтобы полная гармоническая нагрузка, передаваемая на здание, была меньше, чем 0,4 кН?

Вычислим передаточное число

$$ПЧ = 0,4 / 2,25 = 0,178;$$

$$1 / ПЧ = (\beta^2 - 1) = 5,618 \text{ отсюда } \beta^2 = 6,618 .$$

Суммарная жесткость пружин определяется из зависимости $\beta^2 = \bar{\omega}^2 W / kg$, т.е.

$$k_s = 40^2 \cdot 90 / (6,618 \cdot 9,81 \cdot 100) = 22,18 \text{ кН/см} .$$

Жесткость одной пружины равна $k/4 = 5,545 \text{ кН/см} .$

Статический прогиб от веса машины при полученной жесткости составляет $\Delta_{стат} = 90 / 22,18 = 4,06 \text{ см} .$

Пример 3

Вентилятор весом $W=3 \text{ кН}$ вращается с числом оборотов $n=1500$ об/мин. Центробежная сила, возникающая при работе вентилятора из-за неуравновешенности ротора, равна $P=1 \text{ кН}$. От этой силы возникают вертикальные колебания несущей конструкции с амплитудой $z_0 = 0,2 \text{ мм}$. В то же время допускаемая амплитуда колебаний несущей конструкции $[z_{дон}^k] = 0,01 \text{ мм}$. Допускаемые перемещения вала вентилятора при стационарном режиме равны $[z_{дон}^e] = 0,1 \text{ мм}$. Максимальная амплитуда в момент остановки $z_{max} = 0,8 \text{ мм}$. Такие данные обычно приводятся в паспорте устройства.

Требуется определить параметры виброизоляции, отвечающие приведенным ограничениям, и подобрать соответствующие устройства.

Определим частоту возмущающей силы

$$\bar{\omega} = 2\pi n / 60 = 2 \cdot 3,14 \cdot 1500 / 60 = 157 \text{ с}^{-1}; \quad \bar{f} = \bar{\omega} / 2\pi = 25 \text{ Гц} .$$

Требуемый коэффициент виброизоляции

$$ПЧ = [z_{дон}^k] / z_0 = 0,01 / 0,2 = 0,05 .$$

Отсюда найдем требуемое отношение частоты вынужденных колебаний к частоте собственных колебаний

$$\beta_{mp} = \bar{\omega} / \omega = \sqrt{1 / ПЧ + 1} = \sqrt{1 / 0,05 + 1} = 4,58 \text{ и требуемую частоту собственных колебаний } \omega = \bar{\omega} / \beta_{mp} = 157 / 4,58 = 34,28 \text{ или}$$

$$f = 34,28 / 2\pi = 5,46 \text{ Гц} .$$

Как известно, центробежная сила определяется из выражения $P = m \cdot a_n = m \cdot \bar{\omega}^2 \cdot R$. Принимая в качестве радиуса вращения неуравновешенной массы $[z_{\text{дон}}^s] = 0,1 \text{ мм}$, получим величину неуравновешенной вращающейся массы

$$m = P / ([z_{\text{дон}}^s] \cdot \bar{\omega}^2) = 1000 / (0,1 \cdot 10^{-3} \cdot 157^2) = 405,7 \text{ кг}.$$

Теперь найдем суммарную жесткость виброизоляторов

$$k_{\text{мп}} = m \cdot \omega^2 = 405,7 \cdot 34,28^2 = 476,7 \text{ кН/м}.$$

Статическая осадка установки равна $z_{\text{ст}} = g / \omega^2 = 9,81 / 34,28^2 = 0,0083 \text{ м}$, что отвечает требованиям эксплуатации.

Зададимся характерным для стали коэффициентом вязкости (таблица 5.2) $\xi = 0,005$ и уточним амплитуду колебаний виброизолированной установки по формуле, вытекающей из уравнения (5.13)

$$z_{\text{max}} = (P / k_{\text{мп}}) \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2 [(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]}^{0,5} =$$

$$= (1000 / 476,7 \cdot 10^3) \sqrt{1 + (2 \cdot 0,005 \cdot 4,58)^2 [(1 - 4,58^2)^2 + (2 \cdot 0,005 \cdot 4,58)^2]}^{0,5} = 0,0001 \text{ м} = 0,1 \text{ мм}.$$

Такая величина совпадает с допустимой. Из рассмотренного примера видно, что при расчете амплитуды колебаний и определении коэффициента виброизоляции, как указывалось и ранее, влиянием демпфирования виброизоляторов можно пренебречь.

Лекция 6

Динамические гасители колебаний

Статические способы уменьшения динамических воздействий от вибраций двигателей различных машин, как уже указывалось выше, не всегда могут быть эффективными. В современных условиях для борьбы с колебаниями приборов, строительных конструкций и различных сооружений весьма часто применяют динамические гасители колебаний. Их работа основана на создании колебаний, реакция от которых находится в противофазе с основными реакциями [60]. В зависимости от технических условий динамические гасители могут использоваться как активная виброзащита (колебательные системы, присоединенные к источнику колебаний), или как пассивная виброзащита объекта.

6.1 Динамический гаситель без учета демпфирования

Для упрощения здесь рассматривается система с двумя степенями свободы. Часть системы с массой m_1 является основной.

Использование динамического гасителя основано на присоединении к основной системе, имеющей массу m_1 и жесткость упругой связи k_1 , дополнительной массы гасителя m_2 , связанной с основной массой упругой связью с жесткостью k_2 (рисунок 6.1).

Демпфированием системы пренебрегаем.

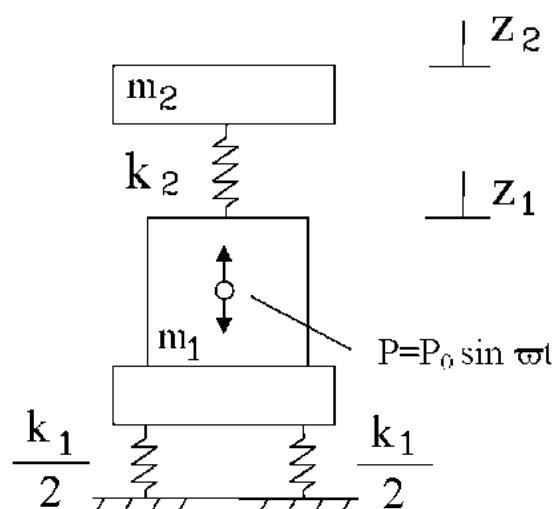


Рисунок 6.1 – Система с двумя степенями свободы

Основная система (рисунок 6.1) приводится в колебательное движение возмущающей силой.

$$P = P_0 \sin \varpi t . \quad (6.1)$$

Дифференциальные уравнения колебания полученной системы с двумя степенями свободы (сложение переносного и относительного движений) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{z}_1 + k_1 z_1 + k_2 (z_1 - z_2) &= P_0 \sin \varpi t; \\ m_2 \ddot{z}_2 + k_2 (z_2 - z_1) &= 0; \end{aligned} \right\} , \quad (6.2)$$

где z_1 и z_2 – абсолютные координаты перемещений масс m_1 и m_2 .

Частные решения этой системы уравнений, соответствующие установившимся колебаниям, определяются выражениями:

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= C_1 \sin \varpi t; \\ z_2 &= -C_2 \sin \varpi t - C_2 \sin(\varpi t - \pi) \end{aligned} \right\} . \quad (6.3)$$

Здесь C_1 – амплитуда колебаний объекта массой m_1 , C_2 – амплитуда колебаний динамического гасителя массой m_2 .

После подстановки частных решений в систему уравнений (6.2) получим

$$C_1 = \lambda_{cm} \frac{\alpha^2 - \beta^2}{(\alpha^2 - \beta^2)(1 - \beta^2) - \mu \alpha^2 \beta^2}; \quad (6.4)$$

$$C_2 = \lambda_{cm} \frac{\alpha^2}{(\alpha^2 - \beta^2)(1 - \beta^2) - \mu \alpha^2 \beta^2}. \quad (6.5)$$

В формулах (6.4) и (6.5):

$$\lambda_{cm} = P_0 / k_1; \quad \alpha = \omega_2 / \omega_1; \quad \beta = \varpi / \omega_1; \quad \mu = m_2 / m_1;$$

$\omega_1 = \sqrt{k_1 / m_1}$ – круговая частота собственных колебаний объекта (при отсутствии гасителя), $\omega_2 = \sqrt{k_2 / m_2}$ – парциальная круговая частота собственных колебаний гасителя (при неподвижной массе m_1).

Из выражения (6.4) видно, что основная масса m_1 не будет совершать колебания ($C_1 = 0$) при $\alpha = \beta$, когда круговая частота ω_2 гасителя будет равна круговой частоте ϖ возмущающей силы:

$$\omega_2 = \sqrt{k_2 / m_2} = \varpi . \quad (6.6)$$

При этом хотя возмущающая сила и действует на массу m_1 , однако она вызывает колебания только дополнительной массы m_2 . Амплитуда этих колебаний, как это следует из формулы (6.5), при $\alpha = \beta$, будет равна:

$$C_2 = -\frac{P_0}{m_2 \varpi^2} = -\frac{P_0}{k_2} . \quad (6.7)$$

Очевидно, что при правильном подборе и настройке масса динамического гасителя колеблется в противофазе как раз с такой амплитудой, что сила, с которой пружина жесткостью k_2 действует на основную массу m_1 , уравнивает возмущающую силу, передающуюся на эту массу через пружину жесткостью k_1 . Таким образом, присоединение к объекту гасителя, настроенного на частоту возмущающей силы, образует систему с двумя степенями свободы, у которой при частоте, совпадающей с частотой возмущающей силы, возникает антирезонанс. На рисунке 6.2 приведена амплитудно-частотная характеристика такой системы с гасителем при $\alpha=1$. Для сравнения на том же рисунке штриховой линией нанесена амплитудно-частотная характеристика объекта без гасителя. Из рисунка 6.2 видно, что при частоте антирезонанса, совпадающей с резонансной частотой исходной системы без гасителя, колебания объекта полностью гасятся ($C_1/\lambda_{cm} = 0$). Явление антирезонанса имеет место при любом коэффициенте расстройки $\beta = \bar{\omega}/\omega_1$. Однако значительное снижение амплитуды колебаний основной массы проявляется в случае, когда при настройке вся система находится в состоянии резонанса или близка к нему, т.е. при $\omega_1 \cong \omega_2 \cong \bar{\omega}$ и $\alpha \cong \beta \cong 1$. При этом выполняется соотношение $k_2/k_1 \cong m_2/m_1 \cong \mu$.

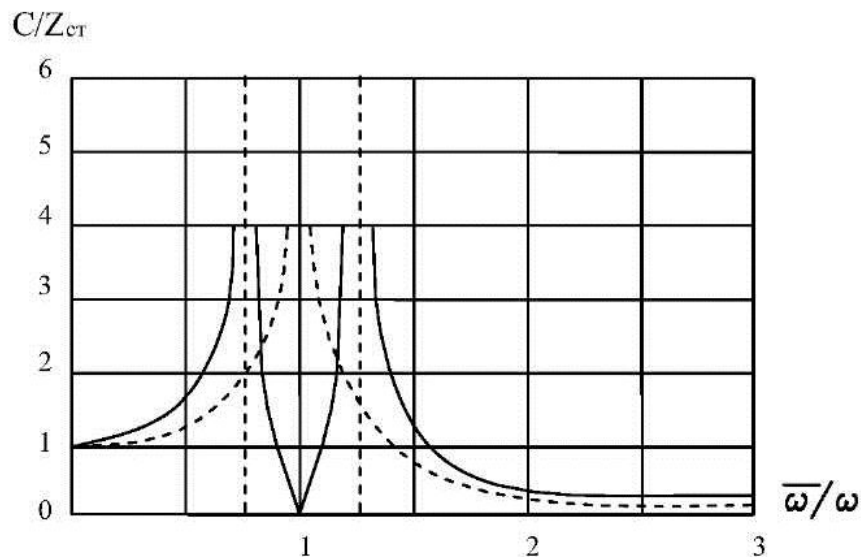


Рисунок 6.2 - Амплитудно-частотные характеристики (с гасителем – сплошные линии, без гасителя – пунктир)

При использовании динамического гасителя для систем пассивной виброзащиты необходимо уменьшить амплитуду колебаний защищаемого объекта от вибрации его основания с амплитудой $C_{осн}$. При этом, с учетом формулы (6.7), для настройки можно использовать зависимость

$$C_2 = -P_0 / k_2 = -C_{осн} k_1 / k_2 = -C_{осн} m_1 / m_2 . \quad (6.8)$$

Расчет динамического гасителя без демпфирования связан с необходимостью удовлетворять ряду ограничений. Подбор жесткости C_2 упругого элемента (или массы m_2) должен обеспечивать и его прочность. Кроме того, следует учитывать, что присоединенная масса m_2 в системах пассивной виброзащиты должна составлять не менее 1-2% от массы защищаемого объекта.

При настройке динамического гасителя на антирезонанс по обе стороны от частоты настройки гасителя ($\omega/\omega_2=1$) возникают дополнительные резонансные частоты (см. рисунок 6.2). Поэтому системы с гасителем без демпфирования, настроенные на антирезонанс, очень чувствительны к изменению частоты возмущающей силы ω или жесткости упругого элемента k_2 . Любая незначительная расстройка гасителя может привести к резкому увеличению амплитуды и свести "на нет" весь эффект от антирезонанса.

6.2 Динамический гаситель с учетом демпфирования

Для того, чтобы гаситель был эффективным в достаточно широкой области частот возмущающей силы, необходимо между основным объектом с массой m_1 и гасителем с массой m_2 (см. рисунок 6.3) ввести дополнительный демпфер с коэффициентом вязкости ξ . Для таких гасителей, называемых гасителями с затуханием, существуют определенные значения коэффициента расстройки частот β , при которых можно "настроить" гаситель таким образом, что амплитуда колебаний всей системы не будет зависеть от характеристики демпфера. Такой гаситель называется гасителем с наилучшей настройкой.

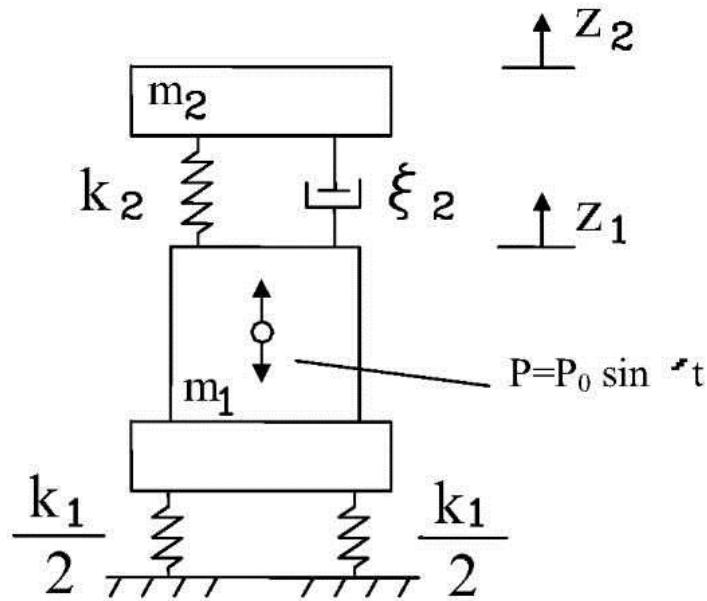


Рисунок 6.3 – Гаситель с наилучшей настройкой

Для его "настройки" на любую величину массы гасителя m_2 должно выполняться условие

$$\alpha = \frac{1}{1 + \mu} \quad \text{или} \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad (6.9)$$

Амплитуда колебаний объекта в случае активной виброзащиты при этом будет равна

$$C_1 = z_{cm} \sqrt{1 + \frac{2}{\mu}} = \frac{P_0}{k_1} \sqrt{\frac{2m_1 + m_2}{m_2}} \quad (6.10)$$

Для динамических гасителей с демпфированием при постоянной настройке, т.е. когда $\alpha = \omega_2 / \omega_1 = 1$, собственная частота ω_1 , и амплитуда C_1 колебаний объекта массой m_1 при выбранной массе гасителя находятся из соотношений:

$$\beta^2 = 1 - \sqrt{\frac{\mu}{2 + \mu}} = 1 - \sqrt{\frac{m_2}{2m_1 + m_2}} \quad ; \quad (6.11)$$

$$C_1 = \frac{P_0}{k_1} \frac{1}{(1 + \mu)\sqrt{\mu/(2 + \mu)} - \mu} \quad (6.12)$$

В этом случае гаситель называют настроенным на частоту системы.

Коэффициент затухания в демпфере, удовлетворяющий условию наилучшего действия гасителя, определяется по известной формуле

$$c = 2\xi m_2 \omega_2 \quad , \quad (6.13)$$

где ξ – относительный параметр затухания. Его можно определять по графикам, приведенным на рисунке 6.4.

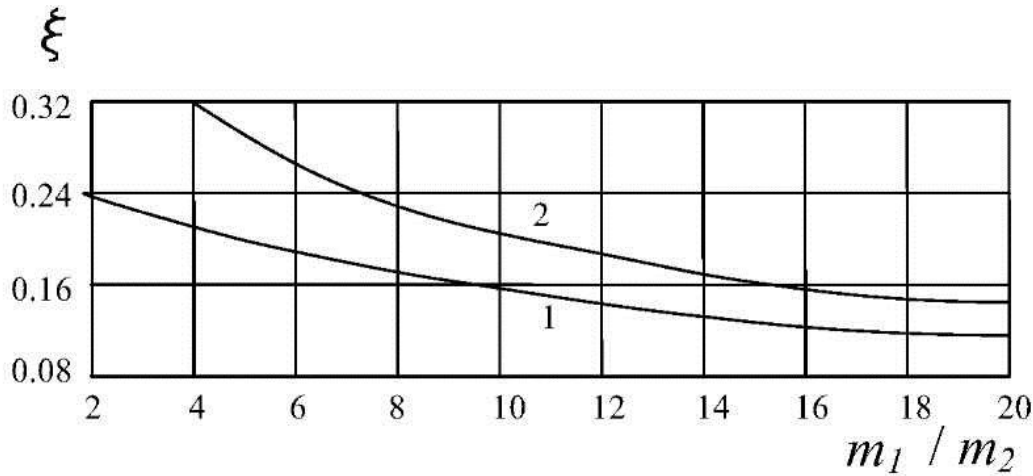


Рисунок 6.4 – Кривые коэффициентов затухания, удовлетворяющие условию наилучшего действия гасителя

Параметр затухания можно также определять по приведенным здесь аппроксимационным формулам:

$$\xi = 0,26666 - 0,013996 / \mu + 0,000333 / \mu^2 ; \quad (6.14)$$

$$\xi = 0,43888 - 0,03361 / \mu + 0,0009722 / \mu^2 . \quad (6.15)$$

Формула (6.14) соответствует гасителю с наилучшей настройкой, а формула (6.15) – гасителю, настроенному на частоту основной системы.

При использовании динамического гасителя в системах пассивной виброзащиты его эффективность оценивается отношением амплитуды колебаний конструкции без гасителя к "остаточной" амплитуде колебаний конструкции после установки гасителя. Максимальная эффективность гасителя с затуханием достигается при $\omega_2 = \varpi$ и обратно пропорциональна коэффициенту вязкости ξ , что соответствует условию

$$C_{осн} / C_1 = 1 / 2\xi = m_2 \varpi_2 / 2c . \quad (6.16)$$

Таким образом, величина вязкости (относительного демпфирования) является определяющим параметром для динамических гасителей с затуханием, воспринимающих гармонические воздействия. Чем меньше демпфирование динамического гасителя, тем выше

его эффективность при строго фиксированных частотах возмущения, так как при этом $C_1 \rightarrow 0$. Однако даже при незначительной расстройке по частоте можно получить нежелательное и даже опасное увеличение колебаний защищаемого объекта.

При проектировании гасителя для пассивной виброзащиты обычно приходится иметь дело с многочастотными (полигармоническими) колебаниями основания (фундамента), поэтому важно рассчитать такое значение коэффициента вязкости, при котором динамический гаситель будет достаточно эффективен в необходимой ширине полосы частот возмущения. Требуемый, согласно методике ЦНИИСК [45], коэффициент ξ может быть определен по формуле:

$$\xi = \frac{\nu ((4\Delta - \Delta^2))}{8\sqrt{1-\nu^2}}, \quad (6.17)$$

где $\Delta = 2\Delta\varpi/\omega_2$ – относительная ширина рабочей зоны частот возмущения (расстройка гасителя); ν – допускаемый коэффициент снижения эффективности гасителя за счет затухания; $\Delta\varpi$ – максимальная величина расстройки частоты возмущения.

Конструктивное выполнение динамических виброгасителей, применяемых в настоящее время, весьма разнообразно и зависит от вида виброзащиты (активная, пассивная), формы колебаний, характера движения рабочих органов и типа источника вибрации, а также других факторов.

6.3 Пример расчета динамического гасителя для активной виброзащиты

Требуется рассчитать динамический гаситель для поршневого компрессора весом $P_1=2000$ Н, являющегося источником вертикальных колебаний с частотой $\varpi=160$ с⁻¹. Амплитуда возмущающей силы, создаваемой компрессором, $P_0 = 500$ Н. Допускаемая амплитуда колебаний компрессора $[C_1] = 0,8$ мм, а амплитуда колебаний динамического гасителя не должна превышать 2 мм, т.е. $C_2 \leq 2$ мм.

Решение

1. Расчет гасителя без затухания

Гаситель без затухания рассчитаем для резонансного режима, т.е. при фиксированных значениях частот:

$$\omega_1 = \omega_2 = \varpi = 160 \text{ с}^{-1}.$$

Требуемую жесткость упругого элемента гасителя найдем из формулы (6.6):

$$k_2 = \frac{P_0}{C_2} = \frac{500}{2 \cdot 10^{-3}} = 2,5 \cdot 10^5 \text{ Н/м.}$$

Необходимую массу динамического гасителя определим из формулы (6.5):

$$m_2 = \frac{k_2}{\omega_2^2} = \frac{2,5 \cdot 10^5}{160^2} = 9,75 \text{ кг,}$$

$$\text{т.е. вес гасителя } P_2 = m_2 g = 9,75 \cdot 9,81 = 95,6 \text{ Н.}$$

Требуемую для соблюдения резонансного режима гасителя жесткость упругих элементов, устанавливаемых между компрессором и фундаментом, найдем по формуле (6.7):

$$k_1 = k_2 \frac{m_1}{m_2} = k_2 \frac{P_1}{P_2} = 2,5 \cdot 10^5 \frac{2000}{95,6} = 5,2 \cdot 10^6 \text{ Н/м.}$$

Статическая осадка этих упругих элементов

$$\lambda_{ст} = \frac{P_1 + P_2}{k_1} = \frac{2000 + 95,6}{5,2 \cdot 10^6} = 0,0004 \text{ м} = 0,4 \text{ мм,}$$

что вполне допустимо.

2. Расчет гасителя с затуханием, настроенного на частоту системы

При рассчитанной выше массе гасителя коэффициент расстройки частот β найдем из соотношения (6.11):

$$\beta^2 = 1 - \frac{9,75}{2 \frac{2000}{9,81} + 9,75} = 0,847,$$

откуда $\beta = 0,92$. Требуемая собственная частота компрессора с гасителем

$$\omega_1 = \frac{\varpi}{\beta} = \frac{160}{0,92} = 173,9 \text{ с}^{-1}.$$

Необходимая жесткость упругих элементов, устанавливаемых между компрессором и фундаментом,

$$k_1 = \omega_1^2 m = 173,9^2 \left(\frac{2000 + 95,6}{9,81} \right) = 6,46 \cdot 10^6 \text{ Н/м.}$$

Амплитуду колебаний компрессора при $\mu = m_2 / m_1 = 0,0478$ найдем по формуле (6.12):

$$C_1 = \frac{500}{6,46 \cdot 10^6} \frac{1}{(1 + 0,0478) \sqrt{2 + 0,0478 - 0,0478}} = 0,00069 \text{ м} = 0,69 \text{ мм},$$

что меньше предельно допустимого значения $[C_1] = 0,8 \text{ мм}$. Коэффициент затухания в гасителе определяется в соответствии с формулой (6.13):

$$c = 2\xi m_2 \omega_2 = 2 \cdot 0,15 \cdot 9,75 \cdot 173,9 = 509 \text{ кг/с}.$$

Коэффициент затухания $\xi = 0,15$. Для соотношения $m_1 / m_2 = 21$ его определяем по формуле (6.15).

Таким образом, введение в систему "объект-гаситель" затухания (демпфера) привело к "остаточной" вибрации компрессора с амплитудой $C_1 = 0,69 \text{ мм}$. Однако в этом случае существенно повышается надежность работы гасителя при случайной его расстройке, а также при нестационарных режимах (пусках и остановках компрессора).

6.4 Пример расчета динамического гасителя для пассивной виброзащиты

Требуется рассчитать динамический гаситель для уменьшения вибрации рабочих мест в здании с амплитудой $C_{осн} = 0,2 \text{ мм}$, возникающей от работы технологического оборудования в резонансной области. Вес здания $P_1 = 10^7 \text{ Н}$, собственная частота колебаний $\omega_1 = 120 \text{ с}^{-1}$ ($f_1 = 19,1 \text{ Гц}$). Обеспечить эффективную работу гасителя при максимальной величине расстройки по частоте возмущения $\pm 5\%$. Снижение эффективности гасителя при этом не должно превышать 50% ($\nu = 0,5$).

Решение

Рассчитаем гаситель с затуханием и наилучшей настройкой.

Допускаемая амплитуда колебаний рабочих мест, расположенных в здании, согласно санитарным нормам, составляет $[C_1] = 0,023$.

Припьем суммарный вес динамического гасителя, равным 1% от веса здания:

$$P_2 = 0,01 P_1 = 10^5 \text{ Н}.$$

Необходимую для наилучшей настройки собственную частоту гасителя определим с помощью формулы (6.9):

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \omega_1 \frac{P_1}{P_1 + P_2} = 120 \frac{10^7}{10^7 + 10^5} = 118,8 \text{ с}^{-1}.$$

Максимальная величина расстройки частоты возмущения ($\pm 5\%$):

$$\Delta \varpi = 0,05 \omega_2 = 5,94 \text{ с}^{-1}.$$

Относительную ширину рабочей зоны частот возмущения найдем по формуле

$$\Delta = \frac{2\Delta \varpi}{\omega_2} = \frac{2 \cdot 5,94}{118,8} = 0,1.$$

Требуемый коэффициент вязкости при $\nu = 0,5$ определяем по формуле (6.17):

$$\xi = \frac{\nu(4\Delta - \Delta^2)}{8\sqrt{1-\nu^2}} = \frac{0,5(4 \cdot 0,1 - 0,1^2)}{8\sqrt{1-0,5^2}} = 0,028.$$

"Остаточную" амплитуду колебаний здания с гасителем найдем из выражения (6.13):

$$C_1 = 2\xi C_{осн} = 2 \cdot 0,028 \cdot 0,2 = 0,0112 \text{ мм},$$

что в два раза меньше допустимой амплитуды колебаний рабочих мест в здании $[C_1] = 0,023 \text{ мм}$.

Требуемый коэффициент затухания в демпфере гасителя

$$c = \xi m_2 \omega_2 = 0,028 \cdot 10^5 \cdot 118,8 = 3,32 \cdot 10^5 \text{ Н/с}.$$

Таким образом, гаситель с затуханием, параметры настройки которого

$P_2 = 10^5 \text{ Н}$; $\omega_2 = 118,8 \text{ с}^{-1}$; $c = 3,32 \cdot 10^5 \text{ Н/с}$, обеспечивает снижение амплитуды колебаний рабочих мест в здании в 17,8 раза.

Лекция 7

Реакция системы с одной степенью свободы при импульсных и неперiodических нагрузках

7.1 Мгновенный импульс

Рассмотрим свободные колебания системы с 1-й степенью свободы (рисунок 7.1) от мгновенного импульса p , который действует за мгновение до начала колебаний.

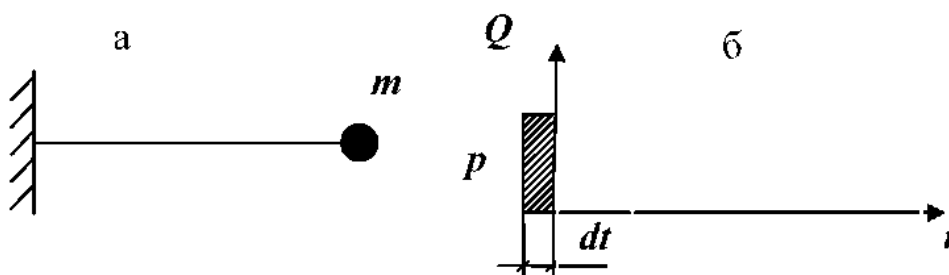


Рисунок 7.1 - Система с одной степенью свободы; схема (а); мгновенный импульс p , действующий до начала колебаний (б)

Реакцию системы найдем из уравнения, описывающего процесс колебаний,

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0. \quad (7.1)$$

При начальных условиях, действующих к моменту окончания импульса,

$z(t) = 0$ при $t=0$ (вследствие мгновенности импульса перемещения не успевают произойти); $m\dot{z}(t) = p$ при $t=0$ (закон сохранения импульса).

Запишем общее решение уравнения и его первую производную:

$$z(t) = B_1 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t; \quad (7.2)$$

$$\dot{z}(t) = B_1 \omega \cos \omega t - B_2 \omega \sin \omega t. \quad (7.3)$$

Используя начальные условия, получим $B_2 = 0$; $B_1 = p/m\omega$. В итоге

$$z(t) = (p/(m\omega)) \sin \omega t; \quad z_{\max} = p/(m\omega).$$

7.2 Сила, действующая за короткий отрезок времени

Будем считать, что импульс p является следствием действия силы Q , причем эта сила действует на протяжении короткого ($t < T/4$), но конечного отрезка времени τ (рисунок 7.2 а).

Определим перемещение z, z_{\max} . Для этого из графика импульса (рисунок 7.2 б) выделим участок продолжительностью $d\tau_1$ на расстоянии τ_1 от начала. Дифференциал искомого решения определяется на основе изложенного выше решения для мгновенного импульса. При этом $p = Qd\tau_1$, а время t надо заменить на время между текущим моментом и моментом действия элементарного импульса ($t - \tau_1$).

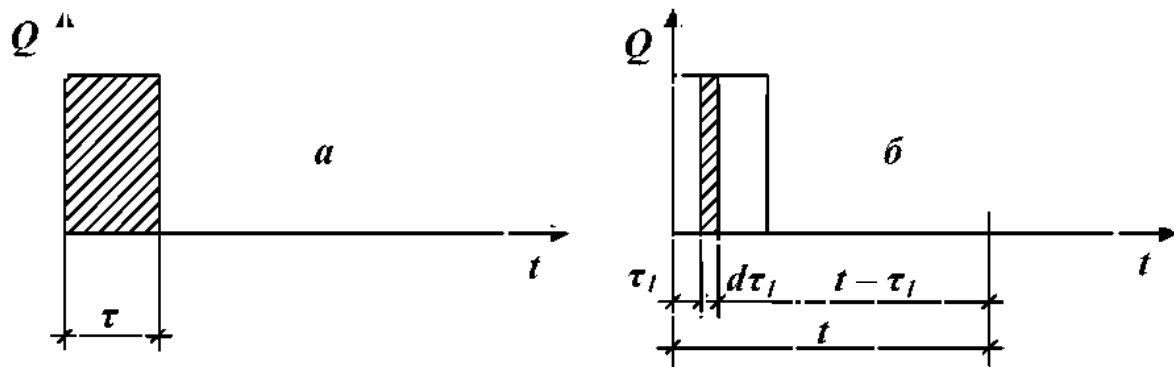


Рисунок 7.2 - Импульс конечной продолжительности τ (а);
интегрирование импульса по $d\tau_1$ (б)

Тогда $dz = (Qd\tau_1 / m\omega) \sin \omega(t - \tau_1)$ и отсюда

$$z = \int_0^{\tau} dz = \int_0^{\tau} (Qd\tau_1 / m\omega) \sin \omega(t - \tau_1). \quad (7.4)$$

После преобразований имеем

$$z = (Q/m\omega) \int_0^{\tau} (\sin \omega t \cos \omega \tau_1 - \cos \omega t \sin \omega \tau_1) d\tau_1 = (2Q/m\omega^2) \sin(\omega\tau/2) \sin \omega(t - \tau/2) \quad (7.5)$$

Максимальная реакция (перемещение) возникает, когда $\sin \omega(t - \tau/2) = 1$, и равна

$$z_{\max} = (2Q / m \omega^2) \sin(\omega\tau / 2). \quad (7.6)$$

Выполним оценку погрешности при замене импульса конечной продолжительности на мгновенный. Введем коэффициент относительной продолжительности действия силы Q , равный

$\alpha = \tau / T = \tau / (2\pi / \omega) = \omega\tau / 2\pi$. Отсюда $\tau = 2\alpha\pi / \omega$. Преподобуем множителъ в выражении (7.6), умножая числитель и знаменатель на τ ,

$$2Q / m\omega^2 = 2Q\tau / m\omega^2\tau = 2p\omega / (m\omega^2 2\alpha\pi) = p / (m\omega\alpha\pi). \quad (7.7)$$

С учетом зависимостей (7.6), (7.7) найдем максимальную реакцию

$$z_{\max} = [p / (m\omega)] \cdot (\sin \alpha\pi) / (\alpha\pi). \quad (7.8)$$

Зададимся отношением $(\sin \alpha\pi) / (\alpha\pi) = 0.95$, что соответствует погрешности 5%. Решая это трансцендентное уравнение, получим $\alpha = 0,175679$. Таким образом, при продолжительности действия силы не более $\tau \leq 0,175679 T$ ее можно считать мало отличающейся от действия мгновенной силы.

Рассмотрим вопрос об определении коэффициента динамичности $\mu = z_{\max} / z_{\text{стат}}$. Статическое перемещение равно $z_{\text{стат}} = Q / k$, где $k = m\omega^2$ – жесткость.

Следовательно, $\mu = 2\sin(\omega\tau / 2)$, и при $\sin(\omega\tau / 2) = 1$ будем иметь максимальное значение, обычно применяемое в расчетах, т.е. $\mu = 2$.

7.3 Внезапно приложенная нагрузка

График приложения нагрузки в зависимости от времени изображен на рисунке 7.3. Начальные условия в этом случае записываются в виде $z(t) = 0$ если $t < 0$; $z(t) \neq 0$ при $t \geq 0$.

Отсюда реакция системы с одной степенью свободы

$$z(t) = \frac{Q}{m\omega^2} \omega \int_0^t \sin \omega(t - \tau) d\tau = z_{\text{ст}} \cos \omega(t - \tau) \Big|_0^t = \frac{Q}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t) = z_{\text{ст}} (1 - \cos \omega t). \quad (7.9)$$

Коэффициент динамичности равен $\mu = (1 - \cos \omega t)$.

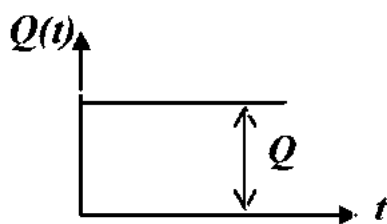
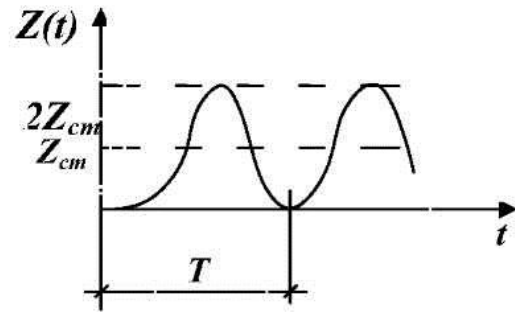


Рисунок 7.3 - График действия внезапно приложенной нагрузки

Максимальное значение μ_{\max} соответствует моментам времени, при которых $\cos \omega t_n = -1$, то есть $\omega t_n = (2n + 1)\pi / 2$. При $t = T / 2 = \pi / \omega$ $\mu = 2$; (в действительности $\mu < 2$ из-за затухания). По существу это соответствует падению груза Q на массу m с высоты $h = 0$. Система

при внезапно приложенной нагрузке совершает колебания вида, показанного на рисунке 7.4.

Рисунок 7.4 - График колебаний при внезапно приложенной нагрузке



Пример. Найти максимальные напряжения в консольной балке длиной L с сечением $b \cdot h$ при внезапно приложенной сосредоточенной нагрузке на конце балки (рисунок 7.5 а,б).

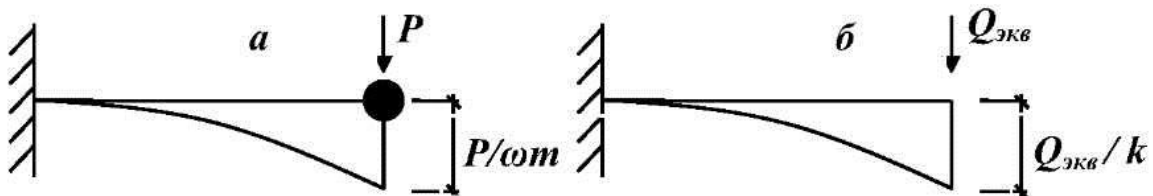


Рисунок 7.5 - Балка, нагруженная импульсом (а); балка, нагруженная эквивалентной силой (б)

Решение. Введем понятие эквивалентной силы. Эта сила эквивалентна по максимальным перемещениям (прогибам) действию некоторого импульса (7.8).

Таким образом

$$Q_{\text{эkv}} = z_{\text{max}} k = Pk / m\omega = P\omega^2 / \omega = P\omega = P\sqrt{k/m} = P\sqrt{3EI/mL^3} = (Ph^2 / 2L)\sqrt{Eb/mhL}.$$

Отсюда определяем максимальные напряжения

$$\sigma_{\text{max}} = M_{\text{max}} / W = Q_{\text{эkv}} L / (bh^2 / 6).$$

7.4 Внезапно приложенная нагрузка при $t=0$ и удаленная при $t=\tau$

Внезапно приложенной нагрузке в момент времени $t=0$ соответствует закон деформирования, характеризующийся следующей формулой (см. формулу (7.9))

$$z(t) = \frac{Q}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t).$$

Этот закон справедлив в промежутке времени от $t=0$ до $t=\tau$.

В момент времени $t=\tau$ груз Q внезапно удаляется с системы (рисунок 7.6), что эквивалентно внезапному приложению силы $(-Q)$.

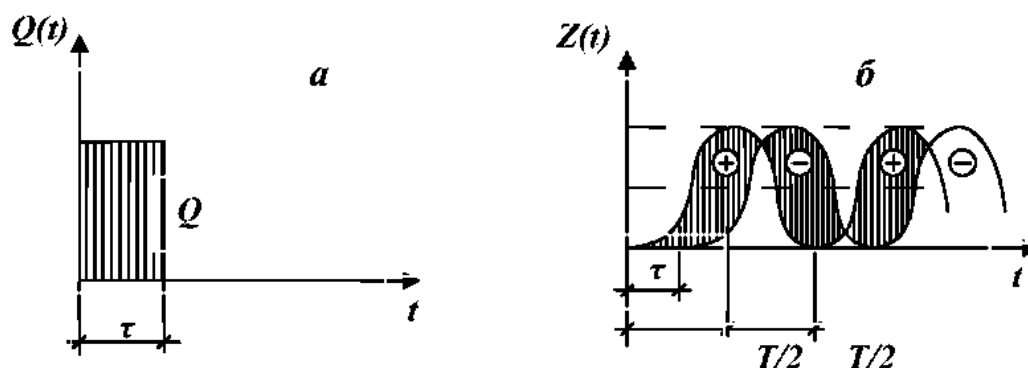


Рисунок 7.6 - Действие постоянной силы, создающей конечный импульс (а); колебательный процесс после внезапного удаления силы (б)

Будем считать, что масса системы не меняется при приложении и удалении нагрузки. Тогда на втором интервале при $t>\tau$ перемещение $z^{(2)}$ может быть представлено суммой двух колебательных процессов: 1) при внезапном приложении силы Q при $t=0$; 2) при внезапном приложении силы $(-Q)$ в момент времени $t=\tau$. Такое движение соответствует закону

$$z^{(2)}(t) = \frac{Q}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t) - \frac{Q}{m\omega^2} (1 - \cos \omega(t - \tau)). \quad (7.10)$$

Второе слагаемое этой формулы можно рассматривать, как сдвинутую вправо на величину τ косинусоиду (рисунок 7.6). Закон изменения (7.10) после тригонометрических преобразований представим в виде (см. 7.5)

$$z^{(2)}(t) = (2Q/m\omega^2) \sin(\omega\tau/2) \sin \omega(t - \tau/2) = 2Z_{cm} \sin(\omega\tau/2) \sin \omega(t - \tau/2) \quad (7.11)$$

Наибольшее значение $z^{(2)}(t)$ имеет, если $\sin \omega(t - \tau/2) = 1$. Тогда максимальное перемещение равно $z^{(2)}_{max} = 2Z_{cm} \sin(\omega\tau/2) = \mu \cdot z_{cm}$, где μ - динамический коэффициент. При $\tau = \pi / 3\omega$ величина $\sin(\omega\tau/2) = 0,5$ и $\mu = 1$, что соответствует статическому воздействию. Если время τ мало, то получим значение динамического коэффициента в виде $\mu = \omega\tau$ (см. действие кратковременного импульса).

7.5 Периодическое повторное нагружение

При периодическом повторном нагружении через промежутки времени, равные периоду собственных колебаний T , последовательно нарастают амплитуды колебаний (рисунок 7.7 а, б).

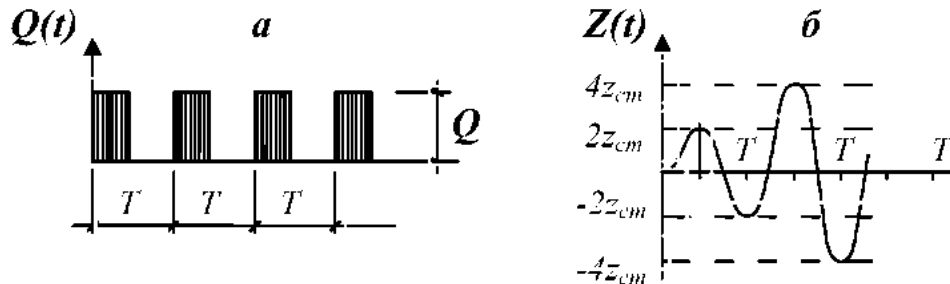


Рисунок 7.7 - График изменения возмущающей силы (а); график перемещения с периодически возрастающей амплитудой (б)

- 1) Первое нагружение ($t=0$ $z_1=2z_{ст}$ при $t=0,5T$).
- 2) Второе нагружение (с $t=T$ $z_2=4z_{ст}$ при $t=1,5T$).
- 3) n -е нагружение $z_{(2n-1)max} = 2nz_{ст}$ при $t = (n-1/2)T$.

Здесь $\mu = 2n$; n - число импульсов.

Однако на самом деле затухание меняет картину и перемещения z нарастают только до определенного предела.

7.6 Реакция при линейном возрастании возмущающей нагрузки

Функцию нагрузки можно представить в виде $Q = c\tau$, причем $\tau \leq t$ (рисунок 7.8 а).

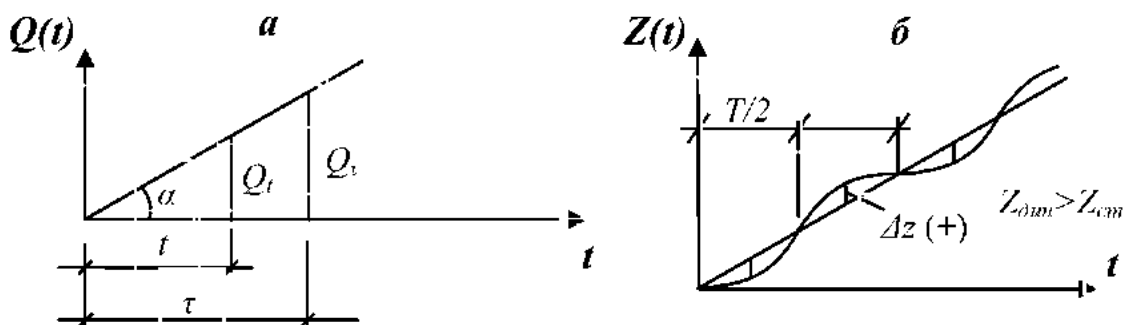


Рисунок 7.8 - Линейное возрастание возмущающей силы (а); динамическая добавка Δz к статическому возрастанию (б)

Начальные условия при $t=0$: $z(t) = 0; \dot{z}(t) = 0$.

Воспользуемся решением в виде

$$z = B_1 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t + \frac{1}{\omega m} \int_0^t c \tau \sin \omega(t - \tau) d\tau. \quad (7.12)$$

При $t=0$ интеграл равен нулю, так как $Q=0$.

Из начальных условий получаем $B_2=0; B_1 \omega=0; (B_1=0)$.

Тогда решение (7.12) преобразуется к выражению

$$z(t) = c / m \omega \int_0^t \tau (\sin \omega t \cdot \cos \omega \tau - \cos \omega t \cdot \sin \omega \tau) d\tau. \quad (7.13)$$

После преобразований получаем

$$z(t) = \frac{c}{\omega^3 m} (\omega t - \sin \omega t) = \frac{ct}{\omega^2 m} - \frac{c}{\omega^3 m} \sin \omega t$$

или

$$z = z_{cm} + \Delta z(t). \quad (7.14)$$

График на рисунке 7.8 б показывает статическую часть нагрузки и наложенную на неё динамическую добавку $\Delta z(t)$ (синусоида с амплитудой $\Delta z_{\max} = c/m\omega^3$). Отметим, что касательная к графику $z(t)$ при $t=0$ горизонтальна, поскольку $\dot{z}(t) = 0$.

7.7 Реакция при линейном возрастании возмущающей нагрузки и затем постоянной

График на рисунке 7.9 а показывает характер изменения нагрузки.

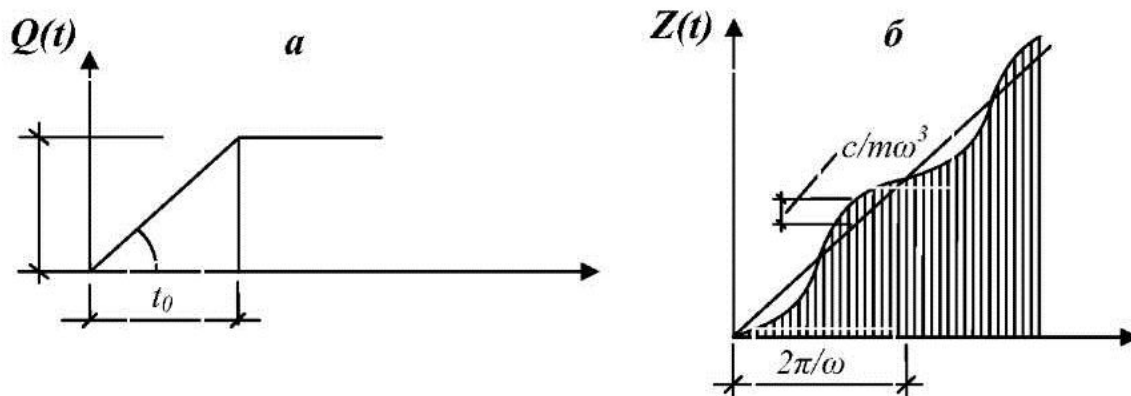


Рисунок 7.9. - График нагрузки, возрастающей по линейному закону и затем постоянной (а); график перемещения с учетом динамической добавки (б)

Решение найдем как сумму двух решений

$$z = \frac{c}{\omega^3 m} (\omega t - \sin \omega t) - \frac{c}{\omega^3 m} [\omega(t - t_0) - \sin \omega(t - t_0)]. \quad (7.15)$$

Второе слагаемое учитывается только при $t \geq t_0$.

После небольших преобразований при $t \geq t_0$ получим

$$z = \frac{c}{\omega^3 m} [\sin \omega(t - t_0) - \sin \omega t] - \frac{ct_0}{\omega^2 m} = \frac{2c}{\omega^3 m} \sin\left(-\frac{\omega t_0}{2}\right) \cos\frac{2t - t_0}{2} \omega + \frac{ct_0}{\omega^2 m}. \quad (7.16)$$

Первый член приобретает амплитудное значение при $t = t_0/2 + n\pi$, где $n=0,1,2,\dots$, так как $\cos[\omega(2t - t_0)/2] = \pm 1$. Максимальное значение амплитуды z_{\max} соответствует (-1). Поэтому

$$z_{\max} = \frac{2ct_0}{\omega^3 m t_0} \sin\left(\frac{\omega t_0}{2}\right) + \left(\frac{ct_0}{\omega^2 m}\right). \quad (7.17)$$

С учетом того, что $ct_0 = Q_0$ (сила при $t \geq t_0$), $k = \omega^2 m$ – жесткость и $Q_0/k = z_{cm}$:

$$z_{\max} = z_{cm} + Q_0/k \left(\sin\frac{\omega t_0}{2}\right) / \frac{\omega t_0}{2} = z_{cm} \left(1 + \sin\frac{\omega t_0}{2} / \frac{\omega t_0}{2}\right) = z_{cm} + z_{dm}. \quad (7.18)$$

В формуле (7.18) последнее слагаемое – динамическая добавка.

Весьма часто при анализе процесса нагружения говорят, что при медленном возрастании нагрузки процесс является статическим, а при быстром возрастании необходимо учитывать силы инерции и, следовательно, он будет динамическим. Представляется интересным оценить эту «быстроту». Определим, чему равно время t_0 , при котором динамическая добавка составляет 5% от статической. Это условие равнозначно трансцендентному уравнению $(\sin \omega t_0 / 2) / (\omega t_0 / 2) = 0,05$, которому соответствует наибольший корень, отвечающий условию $(\omega t_0 / 2) = 5,6522\pi$. Отсюда время возрастания нагрузки равно $t_0 = 5,6522T$, где $T = 2\pi / \omega$ – период свободных колебаний системы.

Таким образом, при линейном возрастании нагрузки за время, большее или равное $5,6522T$, нагрузка может с погрешностью 5% считаться статической. В противном случае необходимо учитывать динамическое воздействие по формуле (7.18).

7.8 Линейно убывающая нагрузка (взрыв)

График на рисунке 7.10 показывает характер изменения нагрузки.

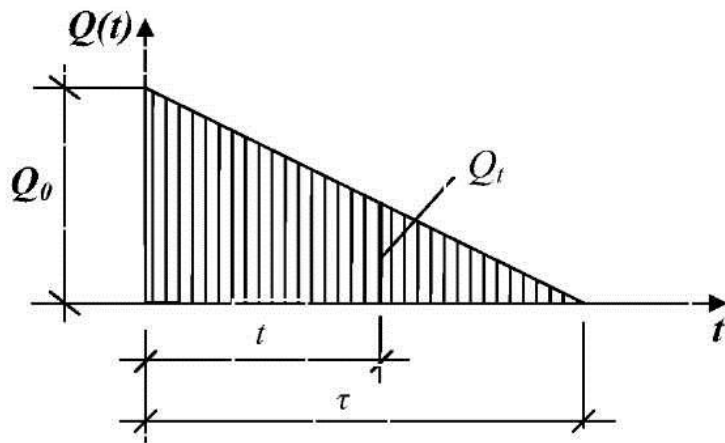


Рисунок 7.10 - График убывающей нагрузки

Нагрузка при $t \leq \tau$ записывается в виде

$$Q_t = Q_0 \left(\frac{\tau - t}{\tau} \right), \text{ а при}$$

$$t > \tau; Q_t = 0.$$

При решении задачи необходимо исследовать два закона изменения нагрузки и перемещений. Практическое значение имеет

решение при времени действия нагрузки значительно большем периода собственных колебаний $t \gg T$.

При нулевых начальных условиях после определения произвольных постоянных получим решение в виде

$$z(t) = \frac{Q_0}{m} \frac{(1 - \cos \omega t)}{\omega^2} - \frac{Q_0}{m\tau} \frac{(\omega t - \sin \omega t)}{\omega^3} = z_{cm} \left[(1 - \cos \omega t) - \frac{(\omega t - \sin \omega t)}{\omega t} \right] = z_{cm} \mu.$$

Максимальное значение τ соответствует условию $d\mu/dt = 0$.

Отсюда $\sin \omega t_0 = (1 - \cos \omega t_0) / \omega \tau$. Решая это уравнение, получим время t_0 , которое соответствует максимальному значению коэффициента динамичности μ . При достаточно большом $\omega \tau$ можно принять условие $\omega t_0 = \pi$. Тогда максимальная реакция равна

$$z_{\max} \approx z_{cm} (2 - \pi / \omega \tau).$$

Если пренебречь вторым членом, то $\mu_{\max} = 2$.

Для 2-го участка ($t > \tau$)

$$z_{\max} = z_{cm} \left\{ \left[(1 - \cos \omega t) - \frac{\omega t - \sin \omega t}{\omega \tau} \right] + \frac{1}{\omega \tau} \left[\omega(t - \tau) - \frac{\omega t - \sin \omega t}{\omega \tau} \right] \right\}. \quad (7.19)$$

Для различных соотношений τ/T коэффициенты динамичности показаны в таблице 7.1.

Таблица 7.1 Коэффициенты динамичности

t_1/T	0,2	0,4	0,5	0,75	1	1,5	2
μ	0,66	1,05	1,2	1,42	1,55	1,69	1,76

7.9 Реакция от синусоидальной импульсной нагрузки

Характер нагрузки показан на рисунке 7.11. Затухание системы не учитывается. При анализе колебаний рассматриваются две фазы: 1) фаза воздействия импульса (гармоническая нагрузка); 2) фаза последствия (свободные колебания).

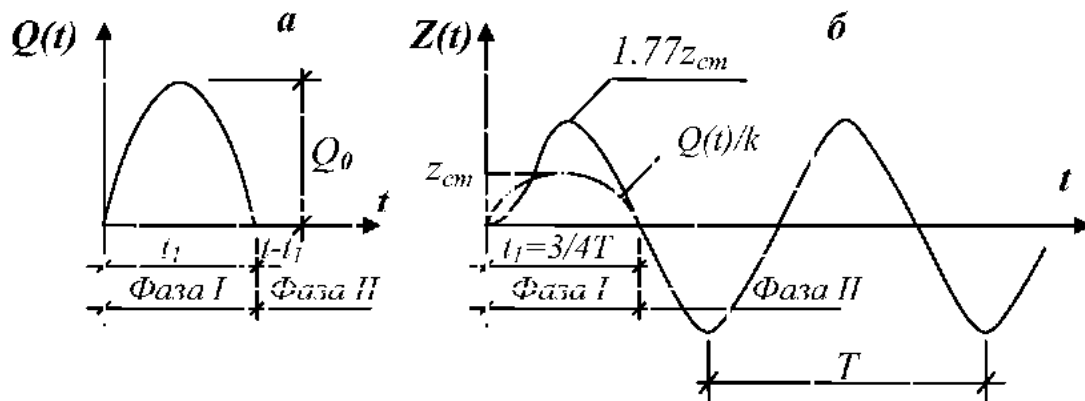


Рисунок 7.11 - Полусинусоидальный импульс (а); реакция при $t_1=3/4T$ (б)

Фаза 1. Реакция с учетом переходного и стационарного процесса определяется известным выражением

$$z(t) = Q_0 / k \cdot \frac{1}{1 - \beta^2} (\sin \bar{\omega}t - \beta \sin \omega t) . \quad (7.20)$$

Фаза 2. Свободные колебания зависят от перемещения $z(t_1)$ и скорости $\dot{z}(t_1)$ в конце фазы 1. Для новой переменной по времени $\bar{t} = t - t_1$ с учетом этих начальных условий реакция при свободных колебаниях записывается в виде

$$z(\bar{t}) = [\dot{z}(t_1) / \omega] \sin \omega \bar{t} - z(t_1) \cos \omega \bar{t} . \quad (7.21)$$

Очевидно, что величина динамической реакции зависит от отношения t_1/T .

Время достижения максимальной реакции на первой фазе определяется из условия

$$dz(t) / dt = Q_0 / k \cdot \frac{1}{1 - \beta^2} (\bar{\omega} \cos \bar{\omega}t - \bar{\omega} \cos \omega t) = 0 . \quad (7.22)$$

Отсюда $\cos \bar{\omega}t = \cos \omega t$ и

$$\bar{\omega}t = \pm \omega t + 2\pi n \quad (n = 0, \pm 1, 2, 3, \dots) . \quad (7.23)$$

Пока $\bar{\omega}t \leq \pi$, максимум реакций будет возникать в период действия импульсной нагрузки. Если частота нагрузки $\bar{\omega}$ стремится к частоте собственных колебаний ω , то при $n=1$ имеем условие $\bar{\omega}t = 2\pi / (1 + \omega / \bar{\omega})$ и амплитуда реакции может быть получена подстановкой последнего условия в уравнение (7.20). Необходимо отметить, что это соответствует случаю, когда $\beta < 1$ и $\bar{\omega}t < \pi$.

При $\beta > 1$ ($\bar{\omega} > \omega$) максимальная реакция возникает на фазе свободных колебаний. Начальные условия для этой фазы (перемещение и скорость в момент времени t_1) определяются путем подстановки $\bar{\omega}t_1 = \pi$ в уравнение (7.20). Таким образом,

$$\begin{aligned} z(t_1) &= Q_0 / k \cdot \frac{1}{1 - \beta^2} (0 - \beta \sin \pi / \beta); \\ \dot{z}(t_1) &= Q_0 / k \cdot \frac{\bar{\omega}}{1 - \beta^2} (-1 - \cos \pi / \beta). \end{aligned} \quad (7.24)$$

Следовательно, амплитуда свободных колебаний и коэффициент динамичности при $\beta > 1$ и $t > t_1$ равны соответственно:

$$\rho = \{[\dot{z}(t_1) / \omega]^2 + [z(t_1)]^2\}^{0.5} = Q_0 / k \cdot \frac{\beta}{1 - \beta^2} [2 + \cos(\pi / \beta)]^{0.5}; \quad (7.25)$$

$$\mu = z_{\max} / z_{\text{стат}} = \frac{2\beta}{1 - \beta^2} \cos\left(\frac{\pi}{2\beta}\right). \quad (7.26)$$

График изменения относительного параметра реакции $R(t) = z(t) / (Q_0 / k) = z(t) / z_{\text{стат}}$ для условия $t_1 = (3/4)T$ показан на рисунке 7.11, б. В этом случае максимум нагрузки достигается на первой фазе, во время действия импульса. Подставляя $t_1 = (3/4)T$ в формулу (7.22), получим $\bar{\omega}t = (4/5)\pi$ и величину динамического коэффициента $\mu = 1 / (1 - 4/9) \cdot [\sin(4\pi/5) - (2/3)\sin(6\pi/5)] = 1,77$.

7.10 Приближенный метод определения реакций при импульсной нагрузке. Спектры реакций

Для практических расчетов весьма часто используют графики, на которых изображают огибающие максимальных значений реакций, которые называют «спектрами реакций» («спектрами ответов»). В ряде случаев спектры удобнее изображать в виде графиков

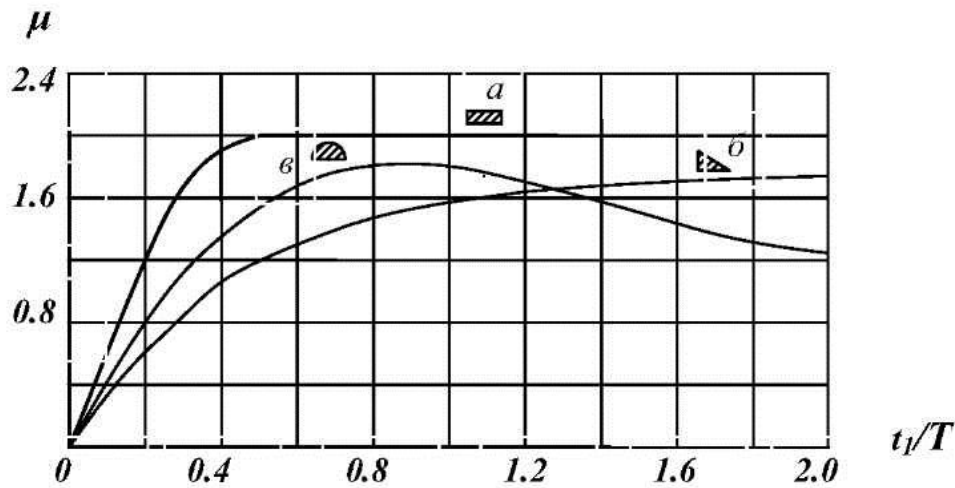


Рисунок 7.12 - Спектры коэффициентов динамичности при трех видах импульсов: а - прямоугольный; б - треугольный; в - полусинусоидальный

динамических коэффициентов μ в отношении к t_1/T для импульсов различного типа (рисунок 7.12). Анализ спектров при действии импульсной нагрузки показывает, что при нагрузках небольшой продолжительности ($t_1/T < 1$) амплитуда перемещений и, соответственно, динамический коэффициент существенно зависят от величины импульса $I = \int_{t_0}^{t_1} Q(t) dt$ и от формы импульса.

Лекция 8

Удар

8.1 Общие понятия об ударе

Удар – это процесс, в котором силы взаимодействия тел нарастают и убывают в очень короткие промежутки времени. Скорости тел при соударении меняются на значительную величину. Следствие удара – большие ускорения, силы инерции и силы взаимодействия при ударе. В окрестности соударения тел возникают контактные напряжения.

В процессе удара широко используется понятие импульса

$$S = \int_{t_0}^{t_1} Q(t) dt \text{ или } S = Q_{cp}(t_1 - t_0). \quad (8.1)$$

При анализе ударного процесса используется и мгновенный импульс, который представляется как произведение бесконечного значения силы на равное нулю время действия.

Материал тел может работать в упругой, упруго-пластической, пластической стадиях. Эти состояния захватывают тела целиком или их части, лежащие около контакта. Может наблюдаться и разрушение (локальное, общее) одного или обоих соударяющихся тел. На характер соударения сильно влияют реологические свойства (вязкость) материалов.

Теория удара далека от завершения из-за математических сложностей. Поэтому обычно применяют упрощенные теории. При этом подход к анализу удара основан на трех классах задач:

1. Средства механики твердого тела. Реакции определяются в наложенных связях. Тела считаются абсолютно твердыми.
2. Задачи с дополнительными уравнениями, отражающими свойства тел. Вводятся упрощающие гипотезы.
3. Учет деформируемости тел. Использование методов дискретизации тел (МКЭ).

Задачи первого класса здесь не рассматриваются.

Задачи 2-го класса

Гипотезы Пьютона и Рауса.

Рассматривается соударение тел А и В.

По Пьютону разность проекций на нормаль к площадке контакта скоростей центров масс тел А и В до и после удара пропорциональны, т.е.

$$V_{zA+} - V_{zB+} = -R(V_{zA-} - V_{zB-}).$$

Здесь $R > 0$ – коэффициент восстановления, его находят из опыта. Если предположить, что шарик падает на горизонтальную плоскость (массивное тело из того же материала, что и шарик), то $R = |V_{zA+}|/|V_{zA-}| = \sqrt{h_+ / h_-}$, где h_+ – высота отскока, h_- – высота падения. При $R=1$ удар называется абсолютно упругим, при $R=0$ – абсолютно неупругим. Если $0 < R < 1$, то имеем неупругий удар. Гипотеза Рауса утверждает также, что существует подобие зависимости Кулопа между проекциями сил нормальной N и тангенциальной составляющей Q , возникающих при ударе двух тел, т.е. $fQ \geq N$, причем f – динамический коэффициент трения.

Повторные удары в автономных системах

Пусть тело падает на массивное тело. Время падения t_0 . Высота падения равна $h_0 = gt_0^2 / 2$. После первого удара шарик отскакивает на высоту h_1 , после второго – на h_2 и так далее. Таким образом, $h_n = R^{2n} h_0$. Продолжительность удара уменьшается и находится по формуле $t_n = 2R^n t_0$. Время продолжительности процесса τ – ограничено, $\tau = t_0(1+R)/(1-R)$. При ударах меняется и ударный импульс в соответствии с зависимостью $I_n = mV_0 R^{n-1}(1+R)$. При этом среднее значение силы $Q = I_n / [(t_{n-1} - t_n) / 2] = mV_0 / t_0 = mg$.

Повторные удары в неавтономных системах (например, сваи) рассматриваются в специальной литературе.

8.2 Удар абсолютно твердого тела об упругую невесомую преграду

Удар абсолютно твердого тела об упругую невесомую преграду показан на рисунке 8.1 (задача 3-го класса).

Идеализация системы:

1. Невесомая цилиндрическая пружина идеально упругая.
2. Оголовок пружины – невесомый.
3. Соударение по всей плоскости (нет контактных напряжений).

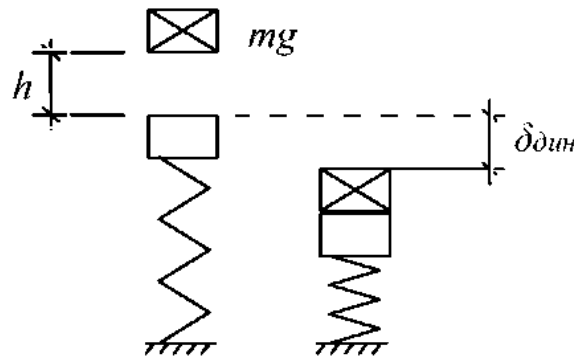


Рисунок 8.1 – Удар твердого тела об упругую невесомую преграду

Энергия падающего груза к концу удара переходит в потенциальную энергию деформаций

$$T=U. \quad (8.2)$$

Момент окончания удара равен моменту максимальных деформаций пружины

$$T=mg (h+\delta_{дин}). \quad (8.3)$$

Жесткость при динамическом воздействии равна жесткости при статическом воздействии $k_{дин.}=k_{ст.}=k$. Тогда потенциальная энергия $U = 0.5P_{дин.} \delta_{дин.}$. Здесь сила удара груза о пружину

$$P_{дин.} = k\delta_{дин.}. \quad (8.4)$$

Поэтому потенциальная энергия может быть записана в виде

$$U = 0.5k\delta_{дин.}^2. \quad (8.5)$$

Подставляя выражения (8.3) и (8.5) в (8.3), получим уравнение

$$mg(h + \delta_{дин.}^2) = \frac{1}{2}k\delta_{дин.}^2 \quad (8.6)$$

Преобразуя его, будем иметь

$$\delta_{дин.}^2 - \frac{2mg}{k}\delta_{дин.} - \frac{2mgh}{k} = 0. \quad (8.7)$$

Запишем условие $mg/k = P_{ст.}/k = \delta_{ст.}$. Тогда уравнение (8.7) примет вид

$$\delta_{дин.}^2 - 2\delta_{ст.}\delta_{дин.} - 2\delta_{ст.}h = 0. \quad (8.8)$$

Решение этого уравнения дает корень

$$\delta_{дин.} = \delta_{ст.} (1 + \sqrt{1 + 2h/\delta_{ст.}}). \quad (8.9)$$

Второй корень (с минусом) соответствует движению вверх. Отсюда получаем формулы для определения коэффициента динамичности и динамической нагрузки:

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + 2h / \delta_{ст}} = \delta_{\delta} / \delta_{ст} ; \quad (8.10)$$

$$P_{дин.} = k\mu\delta_{ст} = \mu P_{ст}. \quad (8.11)$$

Напряжения в линейно упругих системах пропорциональны нагрузкам, поэтому

$\sigma_{дин.} = \mu\sigma_{ст}$. Динамический коэффициент μ может быть записан в другом виде. Запишем условия $V^2 = 2gh$ и $2h = V^2 / g$. Подставив их в (8.10), получим:

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + V^2 / g\delta_{ст}} , \quad (8.12) \quad \text{или} \quad \mu = 1 + \sqrt{1 + T_0 / U_{ст}} , \quad (8.13)$$

где $T_0 = mgh$. Если $h=0$ (внезапное приложение нагрузки), то $\mu=2$.

При $10 < 2h / \delta_{ст} < 100$ в формуле (8.10) можно пренебречь под корнем единицей. Тогда $\mu = 1 + \sqrt{2h / \delta_{ст}} = \delta_{\delta} / \delta_{ст}$, или $\mu = 1 + \sqrt{V^2 / g\delta_{ст}}$, или $\mu = 1 + \sqrt{T_0 / U_{ст}}$.

При $2h / \delta_{ст} > 100$ можно опустить единицу вне радикала. Динамический коэффициент определяется по формуле $\mu = \sqrt{2h / \delta_{ст}} = \delta_{\delta} / \delta_{ст}$. Однако при $2h / \delta_{ст} \approx 100$ и более теория удара недостаточно точна, так как удельная потенциальная энергия деформации вблизи удара много больше среднего значения. Образуются пластические деформации в зоне удара.

8.3 Примеры расчета конструкций при ударном воздействии

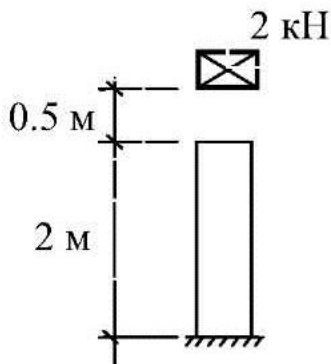


Рисунок 8.2 – Схема удара по стержню

Пример 1

Найти напряжения в поперечном сечении вертикального деревянного стержня (модуль упругости $E=10000$ МПа = 1000 кН/см²) площадью $A=625$ см² при осевом ударе по торцу груза $P = 2$ кН (вес), падающего с высоты 5 см. Длина стержня 200 см (рисунок 8.2).

Решение Статические напряжения равны $\sigma_{ст} = P/A = 2/625 = 0,0032$ кН/см².

Статическое укорочение стержня составляет $\delta_{ст} = \Delta l = Pl / EA = 2 \cdot 200 / (1000 \cdot 625) = 0,00064$ см.

Найдем динамический коэффициент и динамические напряжения:

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + 2h / \delta_{ст}} = 1 + \sqrt{1 + 2 \cdot 5 / 0,00064} = 126,04 ,$$

$$\sigma_{дин.} = \sigma_{ст.} \mu = 0,0032 \cdot 126,04 = 0,403 \text{ кН/см}^2.$$

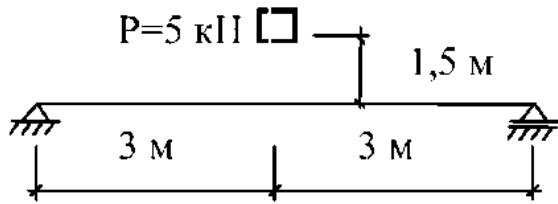


Рисунок 8.3 -
Схема удара по балке

Пример 2

На стальную двутавровую балку из двутавра 30 пролетом 6 м падает посередине пролета груз $P=5 \text{ кН}$ с высоты 1,5 м (Рисунок 8.3).

Модуль упругости $E=2,06 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2,06 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$.

Момент инерции $J_x=7080 \text{ см}^4$.

Расчетное сопротивление стали

$$R_y=240 \text{ МПа}=24 \text{ кН/см}^2.$$

Решение

Определим прогиб балки при статической нагрузке (рисунок 8.3).

$$\delta_{ст.} = \frac{P_{ст} l^3}{48EI} = \frac{5 \cdot 600^3}{48 \cdot 2,06 \cdot 10^4 \cdot 7080} = 0,15 \text{ см}.$$

Так как $\delta_{ст.}$ значительно меньше, чем высота падения h , определим динамический коэффициент по формуле:

$$\mu = \sqrt{2h / \delta_{ст.}} = \sqrt{2 \cdot 150 / 0,15} = 44,72.$$

Динамический изгибающий момент равен

$$M_{дин.} = M_{стат.} \cdot \mu = 1 \cdot 600 / 4 \cdot 44,72 = 6708 \text{ кНсм}.$$

Наибольшее напряжение $\sigma = M/W = 6708 / (7080/15) = 14,2 \text{ кН/см}^2 < R_y = 24 \text{ кН/см}^2$. Прочность обеспечена.

Динамический прогиб определяется

$$\text{как } \delta_{дин.} = \delta_{ст.} \cdot \mu = 0,15 \cdot 44,72 = 6,71 \text{ см}.$$

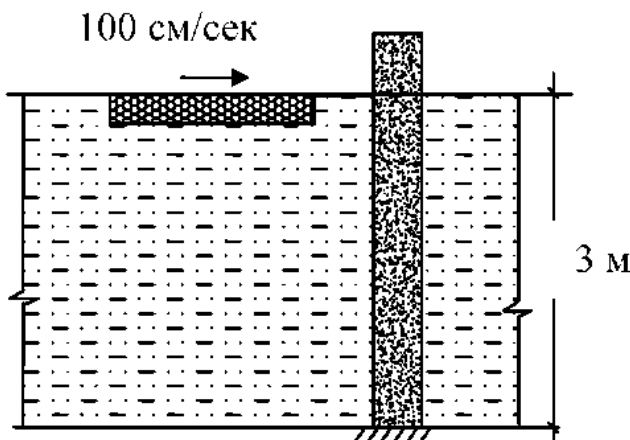


Рисунок 8.4 - Схема удара льдины о сваи

Пример 3

В шпунтовую сваю из железобетона сечением 300x300 мм, забитую в дно реки, ударяет льдина весом 20 кН на высоте 3 м от дна (рис 8.4). Скорость течения 100 см/с. Модуль упругости $E=3 \cdot 10^4 \text{ МПа} = 3 \cdot 10^3 \text{ кН/см}^2$.

Момент инерции сечения сваи $J_x = 30 \cdot 30^3 / 12 = 67500 \text{ см}^4$.

Решение Определим статический прогиб шпунтовой балки при нагрузке, равной весу льдины:

$$\delta_{ст} = \frac{P_{ст} l^3}{48EI} = \frac{20 \cdot 300^3}{48 \cdot 3 \cdot 10^3 \cdot 67500} = 0.056 \text{ см} .$$

Динамический коэффициент равен

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + V^2 / g \delta_{ст}} = 1 + \sqrt{1 + 100^2 / (981 \cdot 0.056)} = 14.53 .$$

Динамический изгибающий момент

$$M_{дин} = M_{стат} \cdot \mu = 20 \cdot 300 \cdot 14.53 = 87180 \text{ кНсм} .$$

Наибольший прогиб сваи $\delta_{дин} = \delta_{ст} \cdot \mu = 0.056 \cdot 14.53 = 0.82 \text{ см} .$

8.4 Неупругий удар (прилипание)

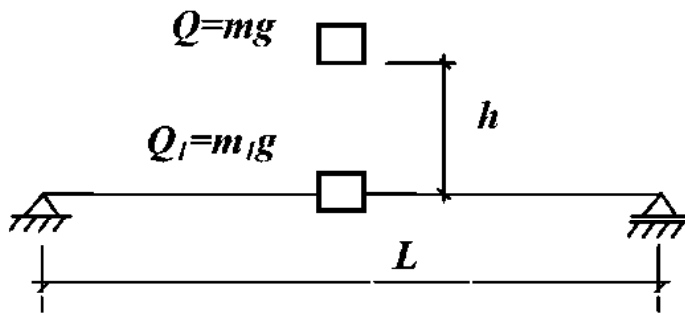


Рисунок 8.5 -
Схема неупругого соударения

Схема соударения показана на рисунке 8.5. Начальная скорость падения $V_0 = 0$. Используем решение для кратковременной нагрузки. С учетом того, что время удара мало,

$$z_{max} = (2Q / m \omega^2) \sin(\omega \tau / 2) .$$

После некоторых преобразований получим

$$z(t) = \frac{2Q}{m \omega^2} \frac{\omega \tau}{2} (\sin \frac{\omega \tau}{2}) / \frac{\omega \tau}{2} = 2z_{ст} \frac{\omega \tau}{2} (\sin \frac{\omega \tau}{2}) / \frac{\omega \tau}{2} . \quad (8.14)$$

Коэффициент динамичности равен (при $Q = Q_{ст}$, $S(x, t) = Q \cdot \tau$)

$$\mu = z(t) / z_{ст} = Q \mu / Q_{ст} = S(x, t) \omega / Q_{ст} = S(x, t) \omega / mg . \quad (8.15)$$

Импульс силы $S(t)$ определяется из теоремы о сохранении количества движения

$mV - mV_0 = S(t)$. Тогда

$$S(t) = mV = (Q / g) V . \quad (8.16)$$

После удара $m + m_1 = (Q + Q_1) / g$ (8.17)

и $\omega = \sqrt{1 / [\delta_{11} (m + m_1)]} = \sqrt{g / [\delta_{11} (Q + Q_1)]}$. (8.18)

После преобразований

$$\mu = QV / (gQ) \sqrt{g / [\delta_{11} (Q + Q_1)]} = V \sqrt{g / [g^2 \delta_{11} Q (1 + Q_1 / Q)]} ,$$

или
$$\mu = V \sqrt{1/g \delta_{cm} (1 + Q_1/Q)} . \quad (8.19)$$

Если масса падает с высоты h , то $V = \sqrt{2gh}$ и коэффициент динамичности определяется по формуле Кокса

$$\mu = \sqrt{2h/[\delta_{cm} (1 + Q_1/Q)]} . \quad (8.20)$$

Контактная сила равна $P_c = \mu Q = \mu mg$.

Очевидно, что учет массы ударяемого тела снижает коэффициент динамичности μ .

8.5 Удар падающего тела по упругой балке с распределенной массой

При решении задачи распределенная масса балки приводится к одной сосредоточенной массе, расположенной в месте удара, то есть балка приводится к системе с одной степенью свободы. Вычисленная сосредоточенная «приведенная» масса сообщает системе частоту колебаний, близкую к тому, какую давали распределенные массы. Отношение приведенной массы к полной массе стержня называется *коэффициентом приведения массы*.

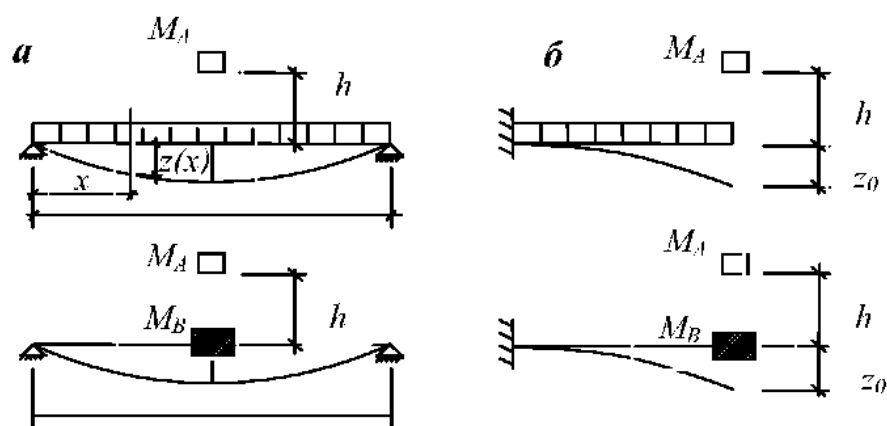


Рисунок 8.6 - Удар по балкам с распределенной массой.
Балка на двух опорах (а). Консольная балка (б)

При использовании этого метода необходимо задаться видом деформации, который получается в балке от действия сосредоточенной силы, приложенной в точке соударения. При этом распределение скоростей в балке будем считать пропорциональным перемещениям, т.е.

$$V(x) = \alpha z(x) . \quad (8.21)$$

Для однопролетной балки пролетом l на двух шарнирных опорах (рисунок 8.6 а), нагруженной сосредоточенной силой, перемещение в любой точке с координатой x определяется выражением $z(x) = (Pl^3 / 48EJ)(3l^2 - 4x^3) / l^3$. Тогда скорость сосредоточенной массы $V_c = \alpha Pl^3 / 48EJ$.

Приведенная сосредоточенная масса для балки с распределенной массой определяется из условия равенства кинетических энергий балки с распределенной массой T'_B и балки с сосредоточенной массой T''_B :

$$T'_B = 2 \frac{1}{2} V_c^2 \int_0^{l/2} \left(\frac{3l^2 x - 4x^3}{l^3} \right)^2 m_B dx = \frac{17}{35} \cdot \frac{m_B V_c^2 l}{2}; \quad (8.22)$$

$$T''_B = \frac{M_B V_c^2}{2}. \quad (8.23)$$

Отсюда получим приведенную сосредоточенную массу для балки на двух опорах в виде $M_B = (17/35) \cdot m_B l$.

Для определения приведенной массы консольной балки (рисунок 8.6,б) поместим сосредоточенную приведенную массу на конец консоли. Заладимся уравнением прогиба в виде $z(x) = z_0(1 - \cos \pi x / 2l)$, где $z_0 = Pl^3 / 3EJ$. Скорость сосредоточенной массы равна $V_c = \alpha Pl^3 / 3EJ$.

Принимая $\alpha = V_c / (Pl^3 / 3EJ)$ и $z^2(x) = z_0^2(1 - 2\cos \pi x / 2l + \cos^2 \pi x / 2l)$, получим выражения для определения кинетической энергии консольной балки с распределенной массой и балки с сосредоточенной (приведенной) массой:

$$T'_B = \frac{1}{2} V_c^2 \int_0^l (1 - 2\cos \pi x / 2l + \cos^2 \pi x / 2l) m_B dx = 0,23 \cdot \frac{m_B V_c^2 l}{2}. \quad (8.24)$$

$$T''_B = \frac{M_B V_c^2}{2}. \quad (8.25)$$

Приведенная сосредоточенная масса для консольной балки равна $M_B = (0,23) \cdot m_B l$. Отсюда получим соответствующую собственную круговую частоту $\omega_B = \sqrt{(3EJ / l^3) / (0,23 m_B l)} = 3,61 / l^2 \sqrt{EJ / m}$. Точное значение частоты имеет множитель 3,515. Ошибка составляет всего 2,5%.

После приведения массы расчет по определению результатов ударного воздействия осуществляется в соответствии с приведенными в данной главе методиками для системы с одной степенью свободы.

Лекция 9

Реакция системы с 1-й степенью свободы при произвольных периодических нагрузках.

9.1 Представление нагрузки в виде ряда Фурье

Ранее были рассмотрены уравнения реакции линейных систем при любой гармонической нагрузке. Особенностью линейных систем является правомерность использования принципа суперпозиции или принципа независимости действия нагрузок. Использование принципа суперпозиции предполагает возможность сложения реакций от нескольких независимых гармонических воздействий. В таком случае произвольную периодическую нагрузку можно представить в виде некоторого ряда. Для каждого члена ряда реакция определяется как для гармонической нагрузки, а общая реакция является суммой реакций на основании принципа суперпозиции.

Весьма важно при этом использование системы ортогональных функций. Ортогональность означает, что на интервале $a < x < b$ для двух вещественных функций $g(x)$ и $h(x)$ существует интеграл

$$\int_a^b g(x)h(x)dx = 0 . \quad (9.1)$$

Исторически первым и наиболее важным примером системы ортогональных функций является система функций вида

$$1, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \dots, \cos(nx), \sin(nx), \dots \quad (9.2)$$

на интервале $-\pi \leq x \leq \pi$. Система функций (9.2) ортогональна также на интервале $0 \leq x \leq 2\pi$ и вообще на любом интервале длиной 2π . Умножая аргумент x на постоянный множитель, можно получить аналогичные системы функций.

На основе ортогональных функций нагрузку обычно выражают в виде ряда Фурье

$$P(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n}{T_p} t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2\pi n}{T_p} t . \quad (9.3)$$

Здесь T_p – период функции нагрузки (рисунок 9.1), n – частота собственных колебаний, Гц.

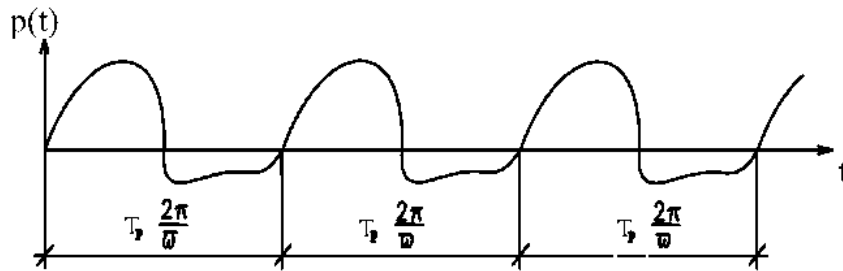


Рисунок 9.1 Произвольное периодическое нагружение

Коэффициенты ряда определяются формулами:

$$a_0 = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} P(t) dt; \quad (9.4)$$

$$a_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} P(t) \cos \frac{2\pi n}{T_p} t dt; \quad (9.5)$$

$$b_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} P(t) \sin \frac{2\pi n}{T_p} t dt. \quad (9.6)$$

Члены a_0 и $\cos \frac{2\pi n}{T_p} t$ – четные, $\sin \frac{2\pi n}{T_p} t$ – нечетные.

Периодическая функция в пределах от $t = -T$ до $t = +T$ или от 0 до $2T$ может быть разложена в ряд Фурье.

9.2 Реакция системы при нагрузках, представляемых рядами Фурье

Нагрузку, представленную рядом Фурье, можно рассматривать как сумму некоторой средней нагрузки, зависящей от a_0 и ряда гармонических нагрузок с частотами $\omega_n = 2\pi n/T_p$ и амплитудами a_n и b_n .

Установившаяся реакция недемпфированной системы от каждого члена ряда, включающего синус, равна:

$$z(t) = \frac{P_0}{k} \frac{1}{1 - \beta^2} (\sin \omega t - \beta \sin \omega t). \quad (9.7)$$

Опуская в уравнении (9.7) член, соответствующий переходному режиму при \sin , получим:

$$z_n(t) = \frac{b_n}{k} \frac{1}{1 - \beta_n^2} \sin n\bar{\omega}_1 t, \quad \text{где} \quad \beta_n = \bar{\omega}_n / \omega = n\bar{\omega}_1 / \omega. \quad (9.8)$$

Аналогично имеем решение при \cos

$$z_n(t) = \frac{a_n}{k} \frac{1}{1 - \beta_n^2} \cos n\bar{\omega}_1 t. \quad (9.9)$$

При a_0 -реакция равна статическому прогибу

$$z_0 = a_0 / k. \quad (9.10)$$

Общая реакция недемпфированной системы является суммой реакций при членах разложения ряда и записывается в виде

$$z(t) = \frac{1}{k} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \beta_n^2} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) \right]. \quad (9.11)$$

С учетом затухания получим:

$$z(t) = \frac{1}{k} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - \beta_n^2) + (2\xi\beta_n)^2} \left\{ [a_n 2\xi\beta_n + b_n(1 - \beta_n^2)] \sin n\omega_1 t + [a_n(1 - \beta_n^2) - b_n 2\xi\beta_n] \cos n\omega_1 t \right\} \right]. \quad (9.12)$$

Пример

Определим реакцию системы при периодической нагрузке в виде положительных частей простой синусоиды (рисунок 9.2).

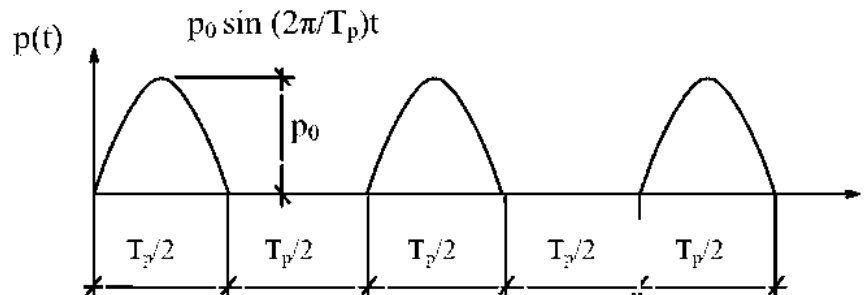


Рис. 9.2 – Периодическое нагружение в виде положительных частей синусоиды

Запишем коэффициенты ряда Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^{T_p/2} P_0 \sin \frac{2\pi t}{T_p} dt = \frac{P_0}{\pi};$$

$$a_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p/2} P_0 \sin \frac{2\pi t}{T_p} \cos \frac{2\pi n t}{T_p} dt = \begin{cases} 0 & \text{при } n \text{ нечетных;} \\ P_0 \cdot 2 & \text{при } n \text{ четных;} \\ \pi \cdot 1 - n^2 & \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p/2} P_0 \sin \frac{2\pi t}{T_p} \sin \frac{2\pi n t}{T_p} dt = \begin{cases} P_0 / 2 & \text{при } n = 1; \\ 0 & \text{при } n > 1. \end{cases}$$

Подставляя a_0, a_n, b_n в ряд Фурье, получим выражение для вычисления периодической нагрузки

$$P(t) = \frac{P_0}{\pi} \left(1 + \frac{\pi}{2} \sin \bar{\omega}_1 t - \frac{2}{3} \cos 2\bar{\omega}_1 t - \frac{2}{15} \cos 4\bar{\omega}_1 t - \frac{2}{35} \cos \bar{\omega}_1 t - \dots \right), \text{ где } \bar{\omega}_1 = \frac{2\pi}{T_p}.$$

Если предположить, что система недемпфирована и принять условия

$$\frac{T_p}{T} = \frac{4}{3}; \quad \frac{\bar{\omega}_1}{\omega} = \beta_1 = \frac{3}{4}; \quad \beta_2 = \frac{2\bar{\omega}_1}{\omega} = \frac{3}{2}, \text{ то, в соответствии с выражением}$$

(9.3) получим установившуюся реакцию системы в виде:

$$z(t) = \frac{P_0}{k\pi} \left(1 + \frac{8\pi}{7} \sin \bar{\omega}_1 t + \frac{8}{15} \cos 2\bar{\omega}_1 t + \frac{1}{60} \cos 4\bar{\omega}_1 t \dots \right).$$

9.3 Другая форма ряда Фурье

Запишем $a_n = P_n \sin \gamma_n; b_n = P_n \cos \gamma_n$.

Подставив в выражение для нагрузки (9.3), получим

$$P(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n \sin \left(n\pi \frac{t}{T_p} + \gamma_n \right). \quad (9.12)$$

$$\text{Здесь } P_n = (a_n^2 + b_n^2)^{\frac{1}{2}}; \quad \gamma_n = \arctg \frac{a_n}{b_n}; \quad (9.13)$$

если наоборот, $a_n = P_n \cos \bar{\gamma}_n; b_n = P_n \sin \bar{\gamma}_n$, то

$$P(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n \cos \left(n\pi \frac{t}{T_p} - \bar{\gamma}_n \right); \quad (9.14)$$

$$P_n = (a_n^2 + b_n^2)^{\frac{1}{2}}; \quad \bar{\gamma}_n = \arctg \frac{b_n}{a_n}. \quad (9.15)$$

В рядах (9.12), (9.14) коэффициенты P_n располагаются только в положительной области, что позволяет оценить вклад в $P(t)$ составляющих гармоник.

9.4 Экспоненциальная (комплексная) форма решения при воздействии в виде рядов Фурье. Передаточная функция

Формулы Эйлера (1743г.):

$$\sin x = -\frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}); \quad \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix});$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x; \quad e^{ix} = \cos x + i \sin x .$$

Откуда
$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(in\omega_1 t), \quad (9.16)$$

где
$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^{T_1} p(t) \exp(-in\omega_1 t) dt . \quad (9.17)$$

Пусть $n = +m$. В уравнении (9.16) каждому $n > 0$ соответствует $n = -m$.

Два члена $\exp(im\bar{\omega}_1 t)$ и $\exp(-im\bar{\omega}_1 t)$ могут быть представлены как два вектора, вращающиеся по часовой стрелке и против нее с угловой скоростью $m\bar{\omega}_1$. При этом C_{-m} является комплексно сопряженным с C_m и поэтому все мнимые части в $p(t)$ уничтожаются.

Запишем уравнение реакции системы при гармонической нагрузке с установившимся режимом, вводя единичную функцию нагрузки системы.

$$mz(t) + cz(t) + kz(t) = \exp(i\omega t) . \quad (9.18)$$

Стационарное решение уравнения (9.18)

$$z(t) = H(\omega) \exp(i\omega t) . \quad (9.19)$$

Здесь $H(\bar{\omega})$ - комплексная передаточная функция. Она же называется частотной или амплитудно-фазовая характеристикой. Если (9.19) подставить в (9.18), то $H(\bar{\omega})$ принимает вид

$$H(\bar{\omega}) = \frac{1}{-\omega^2 m + i\omega c + k} . \quad (9.20)$$

После подстановки в $H(\bar{\omega})$ (комплексно сопряженной с $H(-\bar{\omega})$) отношений частот β и параметра затухания ξ , получим:

$$H(\omega) = \frac{1}{k(-\beta^2 + 2i\beta\xi + 1)} . \quad (9.21)$$

Следовательно, комплексная передаточная функция при воздействии с частотой $\bar{\omega}_n = n\bar{\omega}_1$ равна:

$$H(\bar{\omega}) = \frac{1}{k(-n^2 \beta_1^2 + 2in\beta_1 \xi + 1)} . \quad (9.22)$$

Здесь $\beta_1 = \bar{\omega}_1 / \omega$; $H(\bar{\omega}_1 n) \rightarrow$ сопряженное с $H(-\bar{\omega}_1 n)$.

Реакцию системы можно выразить в виде суммы

$$z(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(n\bar{\omega}_1) C_n \exp(in\bar{\omega}_1 t) . \quad (9.23)$$

Преимущество такого представления очевидно!

9.5 Частотный анализ систем

Принцип частотного анализа также основан на принципе суперпозиции:

- 1) определение реакции для каждой из составляющих гармоник;
- 2) последующее объединение для определения полной реакции системы.

Однако для представления непериодических нагрузок нужно расширить представление о рядах Фурье. Удобнее использовать экспоненциальную форму рядов Фурье (см. зависимости (9.18), (9.19)).

Рассмотрим произвольную непериодическую нагрузку, показанную на рисунке 9.3.

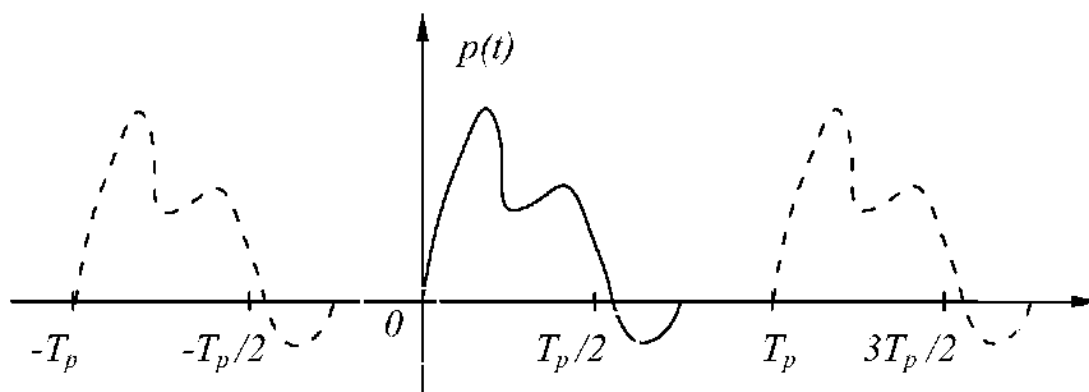


Рисунок 9.3 График произвольной непериодической нагрузки, представляемой рядами Фурье

Если функция может быть представлена в виде ряда Фурье, то коэффициенты C_n , полученные интегрированием на интервале $0 < t < T_p$, будут определять периодическую функцию, показанную на рисунке 9.3 сплошной и пунктирной линией. Известно, что условно повторные нагрузки могут быть ограничены путем расширения периода T_p до ∞ .

Поэтому необходимо преобразовать ряд Фурье, чтобы он относился к бесконечному интервалу времени. Перепишем выражения (9.18), (9.19), используя обозначения:

$$\frac{1}{T_p} = \frac{\bar{\omega}_1}{2\pi} = \frac{\Delta\bar{\omega}}{2\pi}; \quad n\bar{\omega}_1 = n\Delta\bar{\omega} \equiv \bar{\omega}_n; \quad C_n = \frac{1}{T_p} C(\bar{\omega}_n) = \frac{\Delta\bar{\omega}}{2\pi} C(\bar{\omega}_n).$$

Тогда выражения для ряда Фурье примут вид:

$$P(t) = \frac{\Delta\bar{\omega}}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C(\bar{\omega}_n) \exp(in\bar{\omega}_1 t); \quad (9.24)$$

$$C(\bar{\omega}_n) = T_p C_n = \frac{T_p}{T_p} \int_{T_p}^{T_p+T_p} P(t) \exp(-i\bar{\omega}_n t) dt. \quad (9.25)$$

Удобство такого представления в том, что пределы могут охватить один цикл приложения нагрузки. Если увеличить теперь период до ∞ ($T_p \rightarrow \infty$), то приращение частот становится бесконечно малым $\Delta\bar{\omega} = d\bar{\omega}$ и дискретные частоты становятся непрерывной функцией $\bar{\omega}$.

В пределе получаем интегралы Фурье

$$P(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\bar{\omega}) \exp(i\bar{\omega}t) d\bar{\omega}, \quad (9.26)$$

где
$$C(\bar{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} P(t) \exp(-i\bar{\omega}t) dt. \quad (9.27)$$

Формулы (9.26), (9.27) известны как парные преобразования Фурье (ПФ). Так как временной функционал может быть получен из функции частоты и, наоборот, необходимым условием существования ПФ является сходимость интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} |P(t)| dt$.

По аналогии с выражением (9.24) для ряда Фурье, интеграл Фурье (9.26) может рассматриваться как представление произвольной нагрузки в виде бесконечной суммы гармоник, где $(1/2\pi)C(\bar{\omega})$ определяет амплитуду на единицу $\bar{\omega}$ для составляющей нагрузки с частотой $\bar{\omega}$. Умножая это выражение на $H(\bar{\omega})$ (передаточную функцию), можно получить амплитуду на единицу $\bar{\omega}$ реакции системы при $\bar{\omega}$.

Отсюда полная реакция определяется суммированием по диапазонам частот. Это основное уравнение частотного анализа.

$$z(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\bar{\omega}) C(\bar{\omega}) \exp(i\bar{\omega}t) d\bar{\omega}. \quad (9.28)$$

Пример

Частотный анализ системы.

Рассмотрим импульс $P(t) = P_0$ при $0 < t < t_1$; $P(t) = 0$ при $t > t_1$.

Преобразование Фурье имеет вид

$$C(\bar{\omega}) = \frac{P_0}{-i\bar{\omega}} [\exp(-i\bar{\omega}t) - 1]. \quad (9.29)$$

Подставляя $C(\bar{\omega})$ и $H(\bar{\omega}) = \frac{1}{k(-\beta^2 + 2i\beta\xi + 1)}$ в выражение реакции (7.28), получаем реакцию в интегральной форме

$$z(t) = \frac{i\omega_D}{2\pi k} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\beta t} e^{-i\beta t_1}}{\beta(\beta - \gamma_1)(\beta - \gamma_2)} d\beta - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\beta t}}{\beta(\beta - \gamma_1)(\beta - \gamma_2)} d\beta \right], \quad (9.30)$$

где $\gamma_1 = \xi i + \sqrt{1 - \xi^2}$; $\gamma_2 = \xi i - \sqrt{1 - \xi^2}$; $\xi^2 \rightarrow 0$.

Интегралы в (9.30) легко определить интегрировавшим в комплексной плоскости β , что приводит к зависимостям:

1) $z(t) = 0$ при $t < 0$;

2) $z(t) = \frac{P_0}{k} \left[1 - e^{-\xi\omega t} \left(\cos \omega_D t + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \omega_D t \right) \right]$ при $0 < t < t_1$;

3) $z(t) = \frac{P_0}{k} e^{-\xi\omega(t - t_1)} \left\{ \left[e^{-\xi\omega t_1} \left(\sin \omega_D t_1 - \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cos \omega_D t_1 \right) + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \right] \sin \omega_D (t - t_1) + \left[1 - e^{-\xi\omega t_1} \left(\cos \omega_D t_1 + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \omega_D t_1 \right) \right] \cos \omega_D (t - t_1) \right\}$

при $t > t_1$.

Полученные выражения соответствуют результатам временного анализа с учетом затухания.

Лекция 10

Основы виброметрии

10.1 Теоретические основы устройства измерительных приборов

При статических испытаниях перемещение исследуемого объекта под воздействием испытательных нагрузок измеряется относительно неподвижных точек, в качестве которых используется или сам испытательный стенд, или соседняя, заведомо неподвижная конструкция, или земля, на которой расположено сооружение. При этом используются некоторые соединительные элементы, при помощи которых измерительные устройства связываются с конструкцией.

При динамических испытаниях, как правило, измерительные приборы устанавливаются на конструкции, колебания которых исследуются. Очевидно, что измерительный прибор должен иметь массу, значительно меньше, чем масса конструкции, чтобы не вносить искажений в колебательный процесс основной системы.

Для определения параметров колебаний используют инерционную массу, укрепленную на упругом подвесе (осциллятор), размещенную в корпусе датчика измерительного прибора (рисунок 10.1). Для того, чтобы перемещения осциллятора не влияли на конструкцию прибора, вязкость демпфера c должна быть значительной.

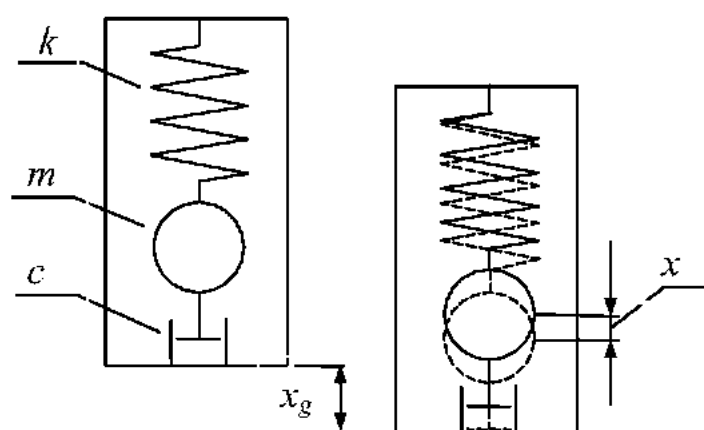


Рисунок 10.1 – Переносное (x_g) и относительное движения (x) инерционной массы

Пусть перемещение объекта (переносное движение), на котором помещен датчик, описывается координатой x_g , а перемещение корпуса прибора относительно инерционной массы (относительное движение), координатой x (рисунок 10.1). При этом прибор должен регистрировать изменение параметра x . В зависимости от настройки прибора в одном случае параметр x будет пропорционален перемещениям точек основной колеблющейся системы, а в других – ускорениям или скоростям.

Для того, чтобы оценить параметры колебаний, необходимо определить функцию $x = f(x_g)$. Уравнение колебаний имеет вид

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m\ddot{x}_g, \quad (10.1)$$

где m - инерционная масса, c - коэффициент демпфирования, k - жесткость пружины. Разделив все слагаемые уравнения (10.1) на m и обозначив $\sqrt{k/m} = \omega$ и $c/2m\omega = \xi$, получим уравнение

$$\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x = \ddot{x}_g. \quad (10.2)$$

Здесь ω - круговая частота собственных колебаний инерционной массы, ξ - коэффициент относительного затухания.

Рассмотрим объект, который совершает гармонические колебания, описываемые уравнением

$$x_g = x_0 \sin \varpi t, \quad (10.3)$$

где ϖ – частота вынужденных колебаний конструкции. При этом ускорение равно: $\ddot{x}_g = -\varpi^2 x_0 \sin \varpi t$, а установившаяся реакция имеет вид

$$x(t) = \rho \sin(\varpi t - \theta). \quad (10.4)$$

Задачей измерений является определение амплитуды перемещения $\rho = x_{\max}$, которая определяется зависимостью

$$\rho = \frac{m\varpi^2}{k} x_0 \cdot \mu = x_0 \beta^2 \cdot \mu, \quad (10.5)$$

где $\beta = \varpi / \omega$ – соотношение частот вынужденных и собственных колебаний. В формуле (10.5) параметр $\mu = [(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]^{-1/2}$ является коэффициентом динамичности. Для измерения амплитуды перемещения $\rho = x_{\max}$ нужно, чтобы произведение $\beta^2 \cdot \mu$ было практически постоянным. Это достигается при параметре затухания $\xi = 0,5$ и соотношении $\beta > 1$ (рисунок 10.2).

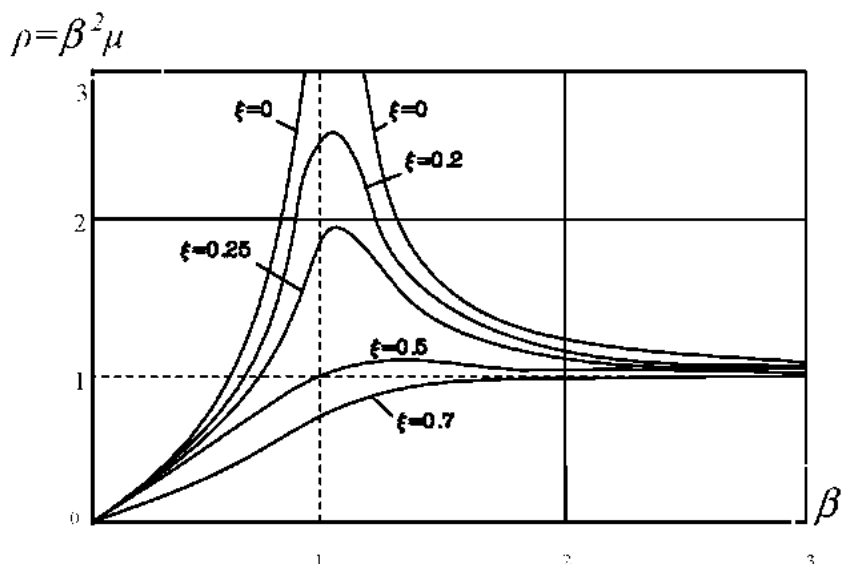


Рисунок 10.2 Зависимость амплитуды ρ от β и ξ

Учитывая, что здания и сооружения имеют, как правило, невысокую собственную частоту, при соответствующей настройке датчика прибора можно измерять перемещения системы. Для расширения области работы измерителя перемещений уменьшают частоту собственных колебаний уменьшением жесткости за счет установки двух предварительно натянутых пружин и создания тем самым “отрицательной жесткости” (рисунок 10.3).

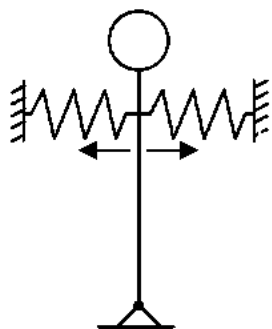


Рисунок 10.3 Система с «отрицательной» жесткостью при горизонтальных колебаниях

Для измерения скорости достаточно продифференцировать выражение (10.4) по времени.

Рассмотрим реакцию прибора (датчика) при гармонических колебаниях основания с ускорением. Установившаяся реакция системы может быть записана в виде $\rho = (m/k) \cdot x_0 \cdot \mu$.

Из рисунка 10.4, повторяющего рисунок 4.3, видно, что при параметре затухания $\xi = 0.7$ для интервала частот $0 > \beta > 0,6$ величина

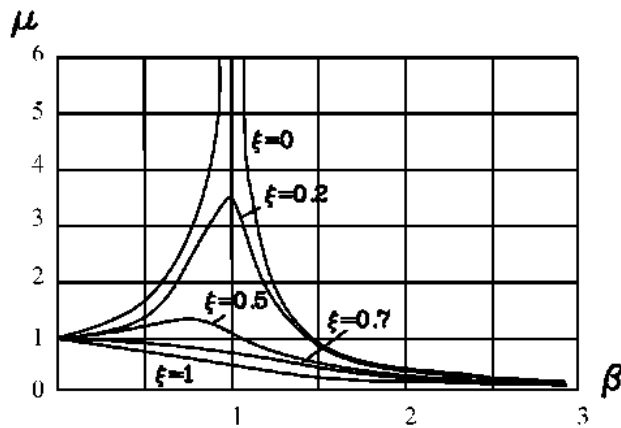


Рисунок 10.4 Зависимость коэффициента динамичности от β и ξ

коэффициента динамичности μ практически постоянна, поэтому реакция прибора (датчика) будет пропорциональна амплитуде ускорения основания x_0 .

Однако датчик такого рода будет эффективно работать только при низких частотах воздействия. Для того, чтобы расширить область работы прибора необходимо увеличить частоту

собственных колебаний массы. Это можно сделать путем увеличения жесткости пружины k .

10.2 Конструкции измерительных приборов

1. Виброметр. Прибор состоит из датчика, укрепляемого на исследуемой конструкции и измерительного блока, который соединяется с датчиком проводами. Конструкция виброметра схематически показана на рисунке 10.5.

Датчик имеет корпус, в котором размещена инерционная масса на описанном выше подвесе с «отрицательной жесткостью», катушку с отводом от середины и перемещающийся внутри нее ферромагнитный стержень, который соединен с инерционной массой. Датчик соединен тремя проводами с измерительным прибором.

Измерительный прибор содержит такую же катушку и сердечник, который можно при необходимости перемещать внутри катушки и фиксировать в нужном положении, усилитель, показывающий измерительный прибор детекторной системы, высокочастотный генератор, питающий мост и выходной узел, предназначенный для подключения внешних устройств, таких как осциллограф, магнитограф, контроллер компьютера или иных.

Как видно из схемы, преобразовательная система виброметра представляет собой индуктивный мост, питаемый от генератора. Перемещая сердечник катушки в измерительном блоке, добиваются баланса моста. При этом выходной сигнал равен 0.

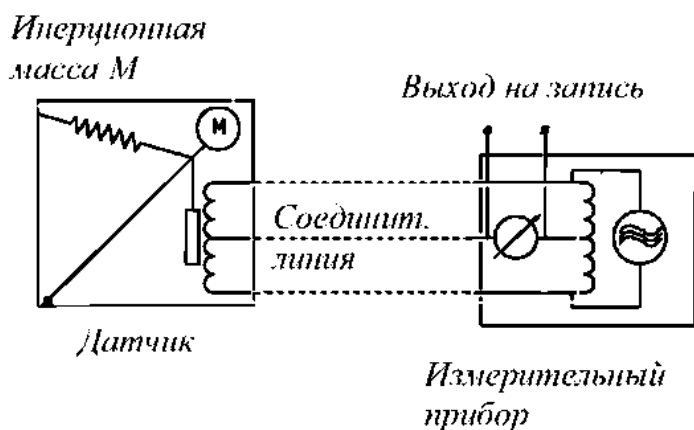


Рисунок 10.5 Схема виброметра

Когда датчик, укрепленный на конструкции, совершает колебания вместе с пей, инерционная масса и соединенный с пей ферромагнитный сердечник остаются неподвижными, а катушка вместе с корпусом датчика повторяет колебания конструкции. Взаимное перемещение катушки и сердечника приводит к разбалансировке моста и появлению в измерительной диагонали сигнала, пропорционального перемещению. Этот сигнал усиливается, детектируется и подается на показывающий прибор. Кроме того, усиленный сигнал через буферный блок подается на выход для подключения, в случае необходимости, внешних устройств. Буферный блок необходим для исключения влияния внешних подключений на работу прибора.

2. **Велосиметр.** Этот прибор имеет сходную конструкцию с виброметром (рисунок 10.6). Неподвижная точка отсчета обеспечивается такой же, как в предыдущем случае инерционной массой на подвесе с «отрицательной жесткостью». Отличие состоит в конструкции преобразователя. Он представляет собой катушку, внутри которой расположен свободно перемещающийся магнит, соединенный с инерционной массой.

Прибор работает следующим образом. Датчик, установленный на конструкции, колеблется вместе с ней и полностью повторяет ее движение. При этом катушка, укрепленная на корпусе датчика, перемещается относительно неподвижного магнита, что вызывает изменение магнитного потока пропорционально перемещению. Это, в свою очередь, приводит к появлению на выводах катушки ЭДС, пропорциональной скорости изменения магнитного потока. Следовательно, сигнал на выходе датчика пропорционален скорости перемещения конструкции.

Прибор работает следующим образом. Датчик, установленный на конструкции, колеблется вместе с ней и полностью повторяет ее движение. При этом катушка, укрепленная на корпусе датчика, перемещается относительно неподвижного магнита, что вызывает изменение магнитного потока пропорционально перемещению. Это, в свою очередь, приводит к появлению на выводах катушки ЭДС, пропорциональной скорости изменения магнитного потока. Следовательно, сигнал на выходе датчика пропорционален скорости перемещения конструкции.

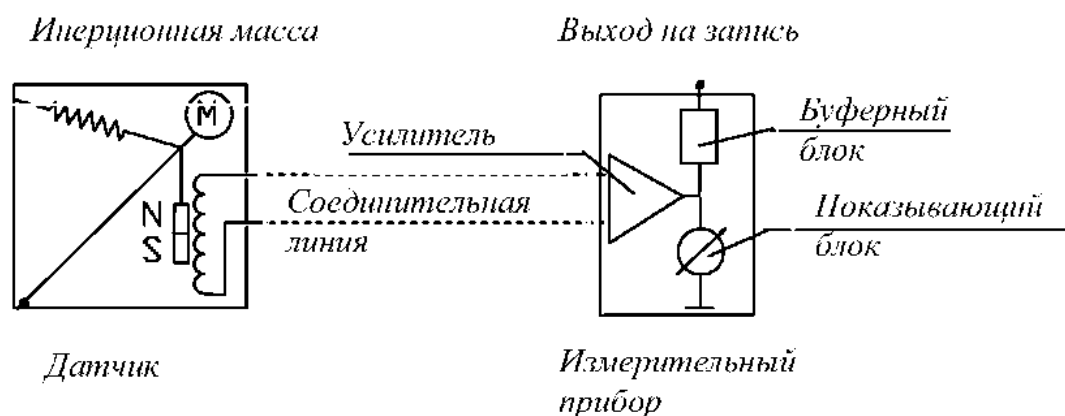


Рисунок 10.6 – Схема велосиметра

Датчик, установленный на конструкции, соединяется с измерительным блоком проводами. Измерительный блок содержит усилитель, вольтметр переменного тока и буферный блок для подключения внешних устройств.

3. Акселерометр. Выше было отмечено, что для акселерометра требуется как можно более высокая частота собственных колебаний инерционной массы. Это обеспечивается большой жесткостью подвеса. Поэтому устройство акселерометра существенно отличается от устройства виброметра и велосиметра.

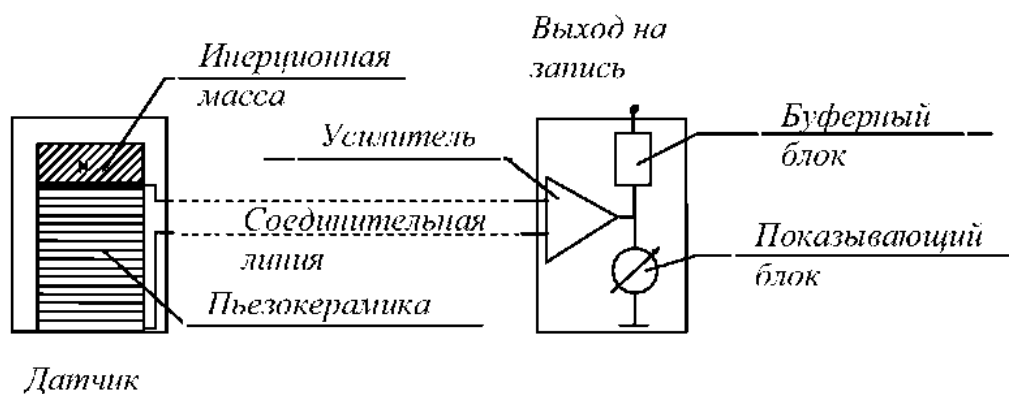


Рисунок 10.7 – Схема акселерометра

Конструктивно акселерометр выполнен следующим образом. Датчик, показанный на рисунке 10.7, представляет собой небольшой стакан, внутри которого к основанию прикреплен чувствительный элемент из пьезокерамики. На него сверху наклеена инерционная

масса. Выводные провода припаяны к полярным граням пьезокерамики.

При колебаниях датчика, установленного на конструкции, колебания инерционной массы полностью повторяют ее движение, так как пьезокерамика обладает достаточной жесткостью.

На инерционную массу действует сила инерции $F = m x$. Эта сила вызывает деформацию пьезокерамики

$$\Delta l = (h \cdot F) / (EA), \quad (10.6)$$

где h – высота блока пьезокерамики; E – модуль упругости; A – площадь поперечного сечения.

Деформирование пьезоэлемента вызывает появление на его обкладках электродвижущую силу (ЭДС), пропорциональную величине деформации

$$e = \varepsilon \cdot \Delta l = \varepsilon \frac{(mx)l}{EA}. \quad (10.7)$$

Здесь ε – пьезомодуль (параметр, характеризующий электрическую активность сегнетоэлектрика).

Все величины, входящие в состав формулы (10.7) при x , определяются конструкцией датчика и являются постоянными. Отсюда следует, что напряжение e на выходе датчика пропорционально ускорению. Это напряжение подается на измерительный блок, включающий усилитель, показывающий прибор и блок сопряжения с внешними устройствами.

4. Электротензометрия. Для оценки напряженного состояния элементов конструкции, подверженной динамическим воздействиям, применяют метод *электротензометрии*. Сущность метода заключается в следующем. На элемент исследуемой конструкции в

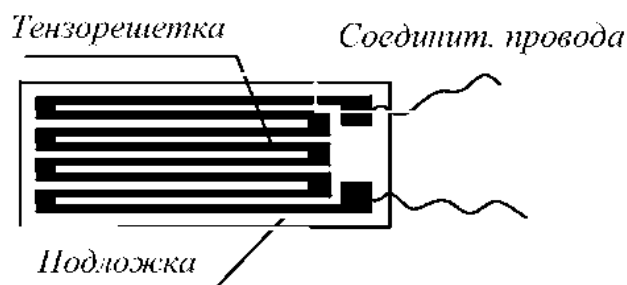


Рисунок 10.8 – Схема устройства тензорезистора

том месте, где необходимо измерить напряжение, наклеивают специальный датчик, называемый *тензорезистором*.

Тензорезистор (рисунок 10.8) представляет собой тонкую пленку (подложку) из изоляционного материала, на которую напылен

токопроводящий слой из сплава высокого сопротивления (константан) в виде последовательно соединенных параллельных полос (тензонити). При деформации конструкции под влиянием внешних воздействий, тензорезистор деформируется вместе с ней, полностью повторяя ее деформации, что приводит к изменению его активного электрического сопротивления. Активное сопротивление проводника равно

$$R = \rho \cdot (l / A), \quad (10.8)$$

где ρ – удельное сопротивление тензонити; l – длина тензонити; A – площадь поперечного сечения тензонити.

Логарифмируя, а затем дифференцируя выражение (10.8), получим:

$$dR/R = d\rho/\rho + dl/l - dA/A \text{ или } dR/R = dl/l + 2\mu \cdot dl/l + d\rho/\rho. \quad (10.9)$$

Здесь μ – коэффициент Пуассона.

Из формулы (10.9) видно, что относительное изменение активного сопротивления пропорционально относительной деформации.

Метрологические характеристики тензорезисторов определяются коэффициентом тензочувствительности, который вычисляется из соотношения

$$S = (dR/R)/(dl/l) = 1 + 2\mu + (d\rho/\rho)/(dl/l). \quad (10.10)$$

Поскольку регистрирующая аппаратура позволяет работать с различными типами тензорезисторов, которые выбираются в зависимости от особенностей решаемых задач, в каждом конкретном случае коэффициент тензочувствительности определяется экспериментально путем специальной калибровки.

10.3 Калибровка измерительной аппаратуры

Описанные выше датчики измерительной аппаратуры преобразовывают измеряемый параметр в электрический сигнал, который после обработки поступает на регистрирующий прибор. Для нахождения связи измеряемого параметра с регистрируемым электрическим сигналом проводят калибровку (тарирование). Ее сущность заключается в том, что датчику прибора сообщается динамическое воздействие, параметры которого заведомо известны.

Передаточный коэффициент при этом или определяется, или, если позволяет конструкция прибора, он регулируется так, чтобы

передаточный коэффициент был равен 1. Применяемый для этой цели вибростенд схематически показан на рисунке 10.9. Он состоит из мощного электромагнита, питаемого постоянным током и катушки, которая через усилитель с изменяемым коэффициентом усиления питается от генератора синусоидальных колебаний.

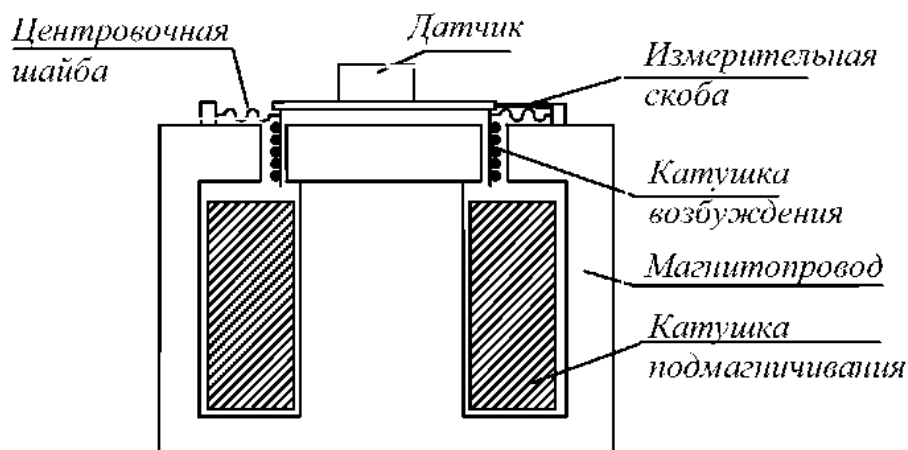


Рисунок 10.9 – Схема вибростенда

Катушка располагается в поле электромагнита, которое концентрируется при помощи специальных магнитопроводов. На плоскости катушки имеется рабочий столик, к которому и крепятся датчики приборов при проведении калибровки. При включении устройства катушка, столик и установленные на нем датчики совершают чисто синусоидальные колебания. Частота колебаний регулируется изменением частоты генератора, а амплитуда – изменением коэффициента усиления усилителя. При этом регистрируются и сопоставляются показания прибора, а также частота и амплитуда колебаний столика вибростенда.

Калибровка тензорезисторов производится на специальном устройстве, называемом калибровочной балкой. Ее схема показана на рисунке 10.10.

Она состоит из плоской балочки, выполненной из высокопрочной стали, опорного и нагружающего устройств, а также индикатора, измеряющего прогиб балочки в середине пролета. В процессе калибровки на балочку паклеивают тензорезисторы и загружают по форме, отвечающей чистому изгибу. Относительную деформацию фибрового волокна балочки определяют по формуле

$$\epsilon = 4 ft / l^2, \quad (10.11)$$

где f – прогиб балки; t – толщина балки; l – длина зоны чистого изгиба.

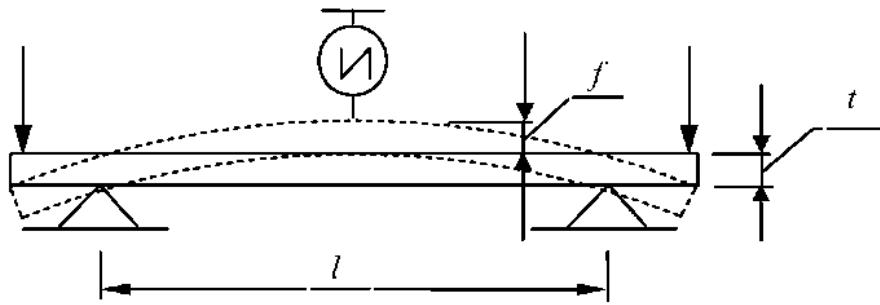


Рисунок 10.10 – Калибровочная балка

Балку ступенчато нагружают и на каждой ступени регистрируют показания прибора и прогиб в середине пролета. По формуле (10.11) вычисляют значение относительной деформации, соответствующее каждой ступени нагружения. По этим данным строится график в координатах «показания прибора – относительная деформация». Это и есть калибровочный график.

Современная аппаратура имеет регулировки, которые позволяют выставить значение поправочного коэффициента, равное единице.

10.4 Нагрузочные устройства

1. Ротационная вибромашина. Принцип действия ротационной вибромашины иллюстрируется на рисунке 10.11.

Вибромашина состоит из станины, на которой размещены два диска одинакового диаметра с эксцентрично расположенными на

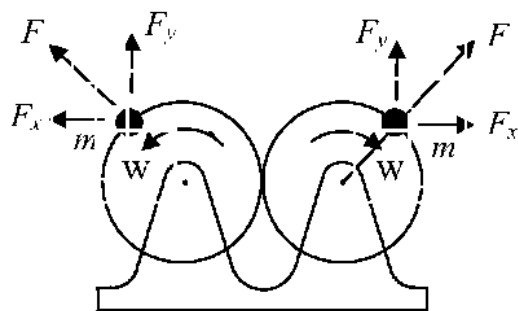


Рисунок 10.11 – Схема ротационной вибромашины

них одинаковыми по величине массами. Диски вращаются синхронно и противофазно, т.е. с одинаковой скоростью и в разные стороны. При этом возникает центробежная сила

$$F = m\omega^2 R. \quad (10.12)$$

Здесь m – масса; ω – угловая скорость; R – радиус вращения.

Сила F может быть разложена на вертикальную F_y ,

горизонтальную F_x составляющие. Как видно из рисунка (10.11), горизонтальные составляющие F_x на каждом из дисков равны по величине и противоположно направлены, а потому взаимно компенсируют друг друга. Вертикальные составляющие F_y направлены в одну сторону и складываются. Следовательно, рассмотренное устройство создаст знакопеременную нагрузку, равную $2F_y$, действующую в вертикальном направлении. Пусть за время t масса m , вращающаяся с угловой скоростью ω , повернется на угол φ относительно горизонтальной оси. Тогда

$$F_y = F \sin \varphi = F \sin \omega t . \quad (10.13)$$

Сумма вертикальных составляющих, т.е. динамическая нагрузка, создаваемая ротационной вибромашинной, будет ориентирована по одному направлению и изменяться по синусоидальному закону

$$N_{дин} = 2m\omega^2 R \sin \omega t . \quad (10.14)$$

Как видно из полученной формулы, амплитуда динамического воздействия зависит от величины массы и угловой скорости, а частота определяется как

$$f = \omega / 2\pi . \quad (10.15)$$

Практическая реализация описанного устройства представляет собой кинематическую пару из двух шестерен одинакового диаметра с одинаковым числом зубьев одинакового модуля. Система приводится во вращение электродвигателем, соединенным с одной из шестерен гибким валом. Частота нагружения регулируется или изменением частоты вращения двигателя, или при помощи бесступенчатого вариатора.

Существенным недостатком такого устройства является зависимость создаваемой силы от частоты нагружения, а также и то, что, обладая некоторой, пусть не очень большой массой, при установке на исследуемую конструкцию оно искажает форму колебаний, что приводит к определенным погрешностям.

2. Электромагнитный вибровозбудитель. Электромагнитный вибровозбудитель является устройством бесконтактного воздействия. Его устройство схематически показано на рисунке 10.12.

Оно состоит из магнитопровода, на котором размещены две катушки – катушки возбуждения и катушки подмагничивания. Первая питается от генератора, частота которого меняется оператором,

а вторая – от источника постоянного тока. Необходимость подмагничивания объясняется следующим образом.

Между магнитопроводом и ферромагнетиком, каковым и является исследуемая конструкция, действует сила *притяжения*, изменяющаяся по закону «выпрямленного синуса».

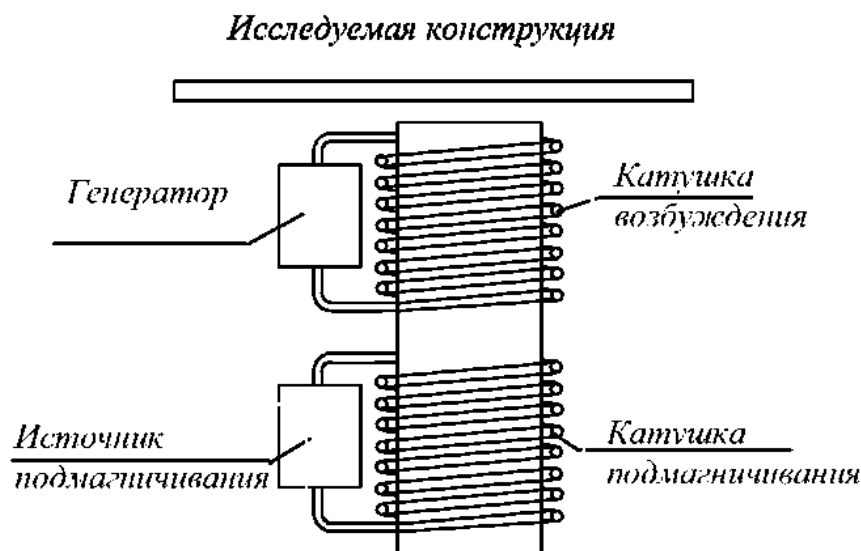


Рисунок 10.12 Электромагнитный вибровозбудитель

Такая форма действующей силы имеет довольно широкий спектр, что сильно затрудняет анализ результатов испытаний. Введение постоянной составляющей в результате действия подмагничивания позволяет получить характер влияния, показанный на рисунке 10.13. С учетом постоянной подмагничивания a_0 характеристика вибровозбуждения записывается в виде $y(t) = a_0 + a_1 \sin \omega t$ и имеет две компоненты – постоянную составляющую величиной a_0 и синусоидальную, величиной $a_1 \sin \omega t$, где a_0 определяется величиной тока подмагничивания, а ω – частотой генератора возбуждения.

Амплитуда динамического воздействия регулируется током возбуждения. Токи возбуждения I_e и подмагничивания I_n выбираются таким образом, чтобы выполнялось условие $I_n \geq I_e$.

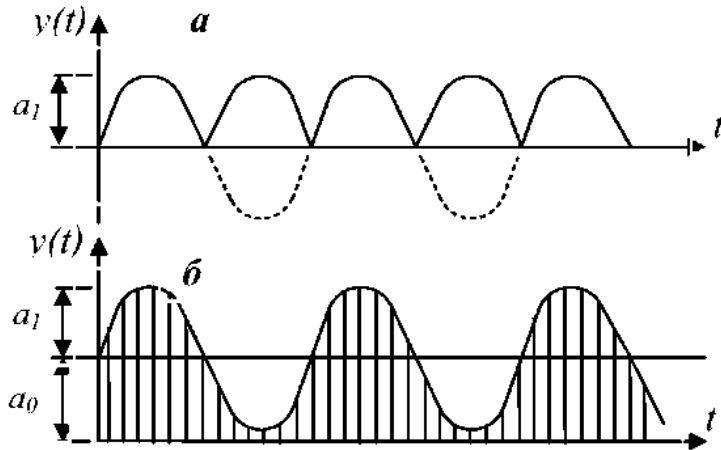


Рисунок 10.13 – Характеристики силы притяжения:
 а – по закону “выпрямленного синуса”;
 б – с учетом подмагничивания

3. Электродинамический вибровозбудитель. Схема электродинамического вибровозбудителя показана на рисунке 10.14. Он содержит магнитопровод, на котором размещена катушка постоянного магнита. В рабочем зазоре магнитопровода размещена подвижная катушка, питаемая от генератора с регулируемой частотой. Эта катушка укреплена на гибком подвесе, который имеет возможность перемещаться только в вертикальном направлении.

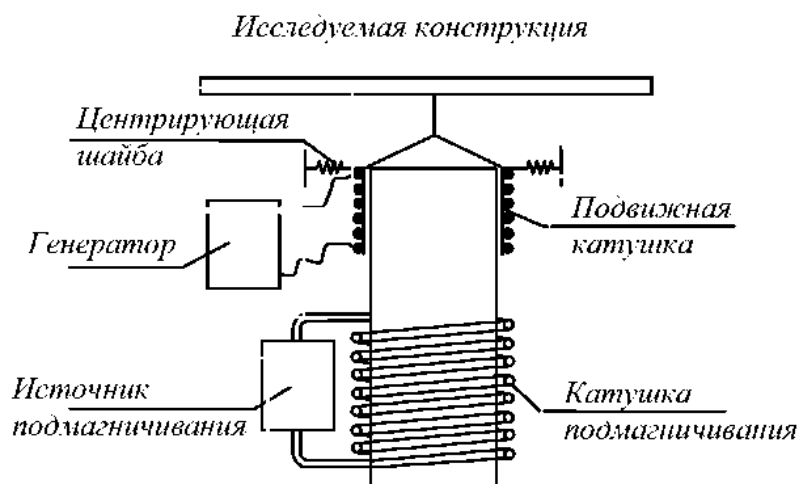


Рисунок 10.14 – Электродинамический вибровозбудитель

Устройство работает следующим образом. Источник постоянного тока, питающий неподвижную катушку, создаст в рабочем зазоре интенсивное магнитное поле, в котором находится подвижная катушка. При пропускании через нее переменного тока от генератора происходит взаимодействие полей, в результате которого появляется сила, изменяющаяся с частотой генератора. Подвижная катушка при помощи специального соединительного элемента скрепляется с исследуемой конструкцией и сообщает ей колебательное движение, форма которого повторяет форму тока, вырабатываемого генератором.

Сопоставление схем и принципов работы описанных выше электрических возбуждателей показывает, что достоинством первого является возможность бесконтактного возбуждения, а недостатком – появление постоянной составляющей. У второго из них постоянная составляющая отсутствует, однако требуется соединение с исследуемой конструкцией, что не всегда удобно.

10.5 Проведение динамических испытаний

Различают два вида динамических испытаний конструкций – *резонансный и вибрационный*.

При первом из них конструкцию выводят из положения равновесия, а затем резко отпускают, предоставляя самой себе. Возникают затухающие колебания, которые и регистрируются измерительной аппаратурой.

При втором – конструкции при помощи одного из рассмотренных выше динамических нагрузочных устройств сообщается колебательное движение. При этом в определенном диапазоне изменяется частота воздействия и регистрируется отклик конструкции.

1. Резонансный метод. Резонансный метод реализуется, как правило, двумя способами.

При первом на исследуемую конструкцию сбрасывают груз, который и вызывает колебательное движение или ударяют специальным тараном, если надо вызвать горизонтальные колебания.

При втором конструкцию нагружают, например, подвешивая к ней груз, а затем резко обрывают подвес. Конструкция совершает затухающие колебания, которые и регистрируются.

Для создания вертикального удара груз поднимают на пужную высоту (в литературе встречаются рекомендации по высоте до 2,5 м, а по массе груза до 0,1 % от полного веса испытываемой конструкции) и сбрасывается на конструкцию. При этом в месте приложения вертикального удара устраивается песчаная подушка высотой 100-200 мм для предохранения конструкции от локального разрушения.

В случае приложения горизонтального удара тараном следует принять меры к тому, чтобы таран не создавал повторного удара.

Несмотря на кажущуюся простоту этих способов, их практическое применение целесообразно только в простейших случаях, когда не требуется точности. Сброшенный на конструкцию груз будет совершать колебания вместе с пей и, естественно, исказит колебательный процесс. Подвеска тарана для создания горизонтального удара является довольно сложной операцией, а возможность убрать его после удара представляется весьма проблематичной.

При втором способе подвешенный груз вызывает прогиб (вертикальный или горизонтальный) конструкции. При внезапном отпускации груза или обрыве подвеса конструкция получает свободные затухающие колебания. Величина массы груза в этом случае должна быть несколько больше, чем в первом случае, однако здесь отсутствуют искажения формы колебаний конструкции из-за дополнительной присоединенной массы.

2. Вибрационный метод. В этом случае к конструкции прикладывается динамическое воздействие, создаваемое при помощи одного из описанных выше вибровозбудителей. При выборе нагрузочного устройства предпочтение следует отдать электромагнитным или электродинамическим, так как они значительно проще в управлении и не вызывают заметных искажений колебательного процесса. Место приложения нагрузки выбирают таким образом, чтобы при минимальном силовом воздействии вызвать максимальные перемещения. Предварительно, или расчетным путем, или по аналогии с похожими конструкциями определяют частоту свободных колебаний f_0 .

Процесс испытаний состоит в том, что на конструкцию передается динамическое воздействие, частота которого меняется. Диапазон изменения частоты выбирается в пределах $(4 - 5)f_0$ так, чтобы

ожидаемая частота собственных колебаний оказалась в середине. Параметры колебаний конструкции регистрируются при помощи описанных ранее измерительных приборов. Выбор типа измерительного прибора (виброметр, велосиметр, акселерометр) определяется характером решаемых задач. По полученным данным строится резонансная кривая в координатах «частота воздействия – отклик конструкции».

Следует иметь в виду, что снятие отсчетов или запись процесса на каждой ступени воздействия следует производить только после того, как конструкция совершит несколько колебаний заданной частоты. Это позволит исключить влияние переходных процессов.

10.6 Регистрация показаний измерительных приборов

При вибрационных испытаниях возможна визуальная регистрация измеряемого параметра с ручной записью для последующей обработки, что применяется крайне редко. Удобнее всего использовать записывающей или запоминающей аппаратуры, такой как *осциллограф* или *магнитограф*.

1. Осциллограф. При регистрации динамических процессов применяют два типа осциллографов – электронно-лучевой и светолучевой.

Функциональная схема первого показана на рисунке 10.15. Осциллограф имеет электронно-лучевую трубку, усилители вертикального и горизонтального отклонения и генератор развертки.

Принцип работы осциллографа состоит в следующем. Электронно-лучевая трубка содержит источник электронов, фокусирующую систему, а также системы вертикального и горизонтального отклонения луча. Экран электроно-лучевой трубки изнутри покрыт слоем люминофора – вещества, которое светится при попадании на него электронов.

На пластины горизонтального отклонения подается пилообразное напряжение от генератора развертки, которое вызывает линейное смещение луча по экрану.

На пластины вертикального отклонения подается усиленный сигнал с приемного преобразователя. Это вызывает соответствующее отклонение луча по вертикали. Таким образом, происходит ви-

зуализация электрического сигнала в реальном времени. Поскольку форма электрического сигнала повторяет форму исследуемого процесса, он и отображается на экране осциллографа.

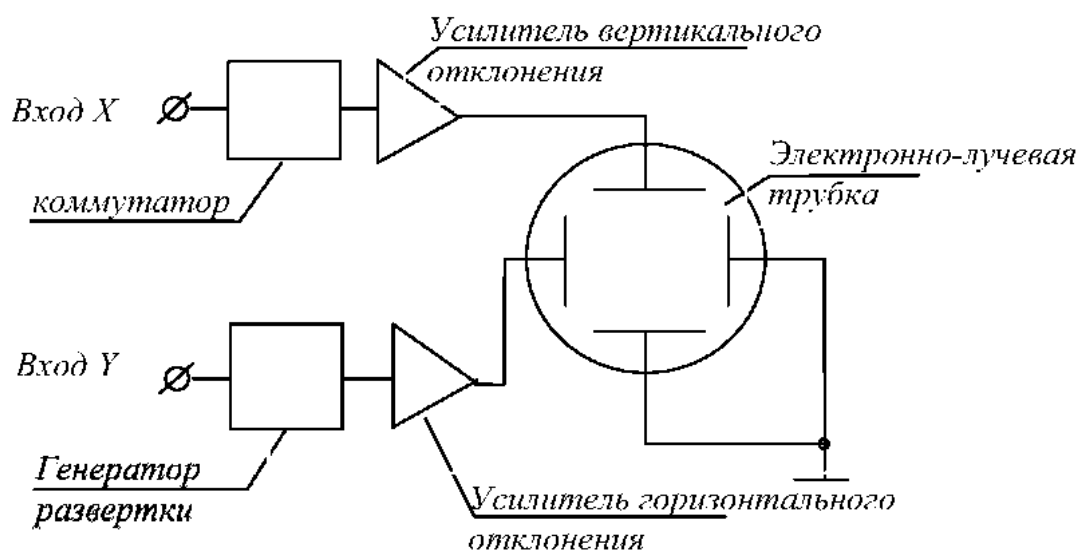


Рисунок 10.15 – Электронно-лучевой осциллограф

Песмотря на очевидные достоинства, такой метод регистрации имеет и существенный недостаток, который заключается в том, что наблюдение процесса возможно только в то время, когда происходит сам процесс. При резонансных испытаниях длительность колебаний конструкции весьма мала и недостаточна для восприятия и анализа результатов.

Промышленностью выпускаются осциллографы с запоминающими трубками, которые хранят изображение несколько минут, в течение которых можно сфотографировать изображение. Однако они очень дороги и требуют высококвалифицированного обслуживания. Кроме того, качество изображения невысоко, что затрудняет дальнейшую обработку данных.

Светолучевой осциллограф записывает электрический сигнал на фоточувствительную пленку или бумагу. Его чувствительным элементом является небольшая катушка, помещенная в поле постоянного магнита. К ней прикреплено зеркальце. От источника света на зеркальце направлен узкий световой пучок, который, отражаясь, попадает на светочувствительный материал. Когда на катушку подается электрический сигнал, она поворачивается в магнитном поле, что вызывает отклонение светового луча. При помощи лентопр-

тяжного механизма фотопленка перемещается с постоянной скоростью. Исследуемый процесс регистрируется на светочувствительном материале. После соответствующей обработки получается фотокопия исследуемого сигнала.

Основным недостатком описанного устройства является необходимость проявления фотоматериала, что довольно сложно, так как обработка фотоматериалов процесс многоступенчатый, мокрый, требующий особых условий. Значительные сложности возникают также вследствие того, что длина пленки, на которую произведена запись, иногда достигает десятков метров.

Однако с внедрением цифровой техники процесс обработки результатов измерений значительно упрощается.

2. Магнитограф. Магнитограф – записывающий аппарат, использующий принцип магнитной записи, так же как и обычный магнитофон.

Поскольку он является измерительным прибором, к его метрологическим характеристикам предъявляются очень жесткие требования. Особенно это относится к частотному диапазону. Если обычный высококачественный магнитофон способен записывать сигналы в диапазоне 20 Гц – 20 КГц, магнитограф должен регистрировать сигналы от постоянного тока до частот в несколько десятков килогерц. Его функциональная схема в упрощенном виде показана на рисунке 10.16.

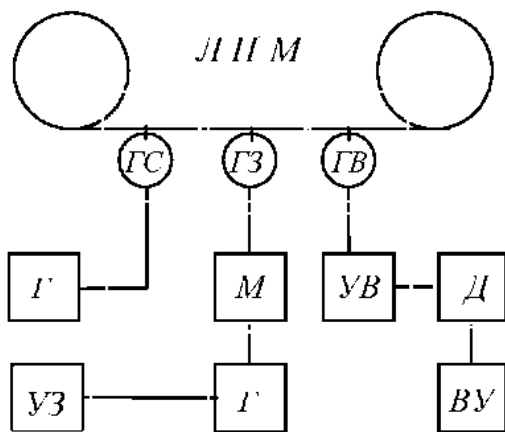


Рисунок 10.16 Функциональная схема магнитографа

Магнитограф состоит из лентопротяжного механизма ЛПМ, входного усилителя УЗ, гетеродина Г, модулятора М, блока головок ГС, ГЗ, ГВ, усилителя воспроизведения УВ, детектора Д и оконечного усилителя ВУ. Лентопротяжный механизм обеспечивает транспортировку магнитной ленты мимо головок с постоянной скоростью. Входной усилитель усиливает сигнал, поступающий с датчика, и пе-

редает его на модулятор. Гетеродин генерирует высокочастотные колебания строго синусоидальной формы, которые также поступают на модулятор. Это напряжение модулируется входным сигналом и поступает на головку записи. В рабочем зазоре головки возникает магнитное поле, напряженность которого изменяется пропорционально проходящему току. Это поле запоминается магнитным носителем.

При воспроизведении пленка протягивается мимо головок с той же скоростью, что и при записи. Воспроизводящая головка считывает магнитную информацию и трансформирует ее в электрический сигнал, повторяющий сигнал записи. Этот сигнал после усиления детектируется, в результате чего из него удаляется высокочастотная составляющая и остается напряжение, форма которого идентична форме сигнала с датчика. Напряжение с выхода детектора усиливается и подается на выход для последующей обработки и анализа.

Преимуществами такого способа регистрации являются частотный диапазон, начинающийся практически с 0, т.е. возможность регистрировать очень низкие частоты без искажений, а также возможность многократно воспроизводить один и тот же участок записи, что очень удобно при анализе результатов испытаний. Имеется, кроме того, возможность работать в режиме «стоп-кадр», что особенно удобно при использовании подключенной ЭВМ.

Лекция 11

Линейные системы с большим числом степеней свободы

11.1 Формирование исходных уравнений

Действительную работу конструкции или сооружения с несколькими степенями свободы при динамических воздействиях или кинематических возмущениях можно описать различными расчетными моделями [1, 3, 8, 22, 32 и др.]. Рассмотрим один из вариантов расчетной модели, характеризующей основные элементы пространственной работы сооружения.

Известно, что каждая конструкция представляет собой в общем случае континуальную систему. Метод, разработанный на базе использования конечных элементов, позволяет замкнуть такую систему системой с конечным числом степеней свободы. Пространственная или плоская система представляется как набор конечных элементов в виде стержней, призм, треугольников, прямоугольников и т.п., соединенных между собой в узлах.

Обобщенными координатами являются перемещения и угловые повороты узловых точек концов элементов. В общем случае каждая узловая точка k имеет три поступательных перемещения (U_1^k, U_2^k, U_3^k) вдоль осей x, y, z и три вращательных (U_4^k, U_5^k, U_6^k) относительно тех же осей (рисунок 11.1).

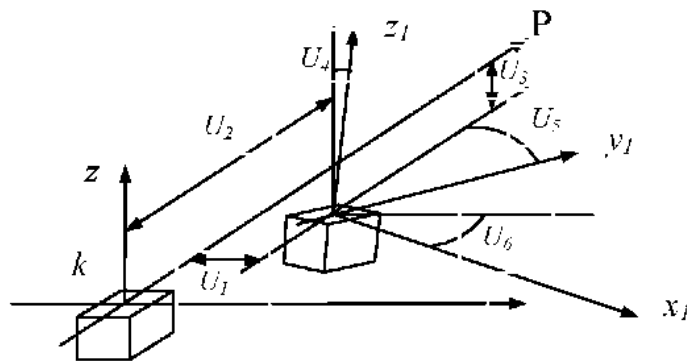


Рисунок 11.1 – Поступательные и вращательные перемещения k -го узла

Обозначим вектор перемещения узла k

$$[U^k] = [U_1^k, U_2^k, U_3^k, U_4^k, U_5^k, U_6^k]^T \quad (k=1, 2, 3, \dots, n).$$

Уравнения движения такой системы могут быть записаны по принципу Даламбера для каждой из N степеней свободы.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_1 + R_1 + F_1 = P_1(t) \\ \Phi_2 + R_2 + F_2 = P_2(t) \\ \dots\dots\dots \\ \Phi_i + R_i + F_i = P_i(t) \\ \dots\dots\dots \\ \Phi_N + R_N + F_N = P_N(t) \end{array} \right. , \quad (11.1)$$

где Φ_1, Φ_2, Φ_3 – силы инерции узла, соответствующие поступательным перемещениям U_1, U_2, U_3 , вдоль осей x, y, z ;
 Φ_4, Φ_5, Φ_6 – силы инерции того же узла, соответствующие вращательному движению U_4, U_5, U_6 относительно тех же осей;
 R_1, R_2, R_3 и F_1, F_2, F_3 – силы затухания и упругости, соответствующие поступательным перемещениям узла вдоль осей x, y, z ;
 R_4, R_5, R_6 и F_4, F_5, F_6 – аналогичные силы, соответствующие поворотам этого же узла относительно осей x, y, z ;
 \bar{P}_i – вектор внешнего кинематического или динамического воздействия.

Для каждого узла в общем случае можно составить 6 уравнений типа (11.1), следовательно, движение системы будет описано $N=6n$ уравнениями.

Запишем систему уравнений (11.1) в компактной матричной форме

$$\|\Phi\| + \|R\| + \|F\| = \|P(t)\| . \quad (11.2)$$

Рассмотрим общий вид сил, действующих на систему. Сила упругости F_i , представляющая собой реакцию в направлении U_i от смещения других точек системы, может быть записана в виде:

$$F_i = r_{i1}U_1 + r_{i2}U_2 + r_{i3}U_3 + \dots + r_{ij}U_j + \dots + r_{iN}U_N . \quad (11.3)$$

Здесь r_{ij} – сила упругости, соответствующая координате i при единичном смещении координаты j (или r_{ij} – реакция в дополнительной связи i , поставленной по направлению движения i -й координаты от сдвигного смещения по направлению координаты j).

При составлении уравнений (11.2) и (11.3) предполагается, что имеет место принцип суперпозиции, так как сооружение обладает упругими свойствами.

Представим в матричной форме систему упругих сил

$$\|F\| = \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_{11}r_{12}\dots r_{1N} \\ r_{21}r_{22}\dots r_{2N} \\ \dots \\ r_{N1}r_{N2}\dots r_{NN} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ U_N \end{vmatrix} = \|K\| \cdot \|U\| \quad , \quad (11.4)$$

где $\|K\|$ - матрица коэффициентов жесткости, $\|U\|$ - вектор перемещения сооружения

$$\|K\| = \begin{vmatrix} r_{11}r_{12}\dots r_{1N} \\ r_{21}r_{22}\dots r_{2N} \\ \dots \\ r_{N1}r_{N2}\dots r_{NN} \end{vmatrix} \quad , \quad \|U\| = \begin{vmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ U_N \end{vmatrix} \quad . \quad (11.5)$$

При колебаниях реальных конструкций наблюдается затухание, связанное с процессами поглощения и рассеивания энергии. Согласно гипотезе Фойгта, колебания реальных тел рассматриваются как колебания упруговязких тел. Механической моделью такой системы служит тело, состоящее из упругого и параллельно подсоединенного к нему вязкого элемента, сопротивление которого пропорционально скорости деформации:

$$\|\dot{U}\| = \|\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dots, \dot{U}_N\|^T \quad .$$

Силы сопротивления R по аналогии с (11.4) могут быть записаны с помощью коэффициентов затухания $\|b\| = \|b_{ij}\|$ (b_{ij} - сила сопротивления, соответствующая координате i при единичной скорости движения координаты j)

$$\|R\| = \begin{vmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ R_N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11}b_{12}\dots b_{1N} & \dot{U}_1 \\ b_{22}b_{22}\dots b_{2N} & \dot{U}_2 \\ \dots & \dots \\ b_{N1}b_{N2}\dots b_{NN} & \dot{U}_N \end{vmatrix} \times \dots = \|B\| \cdot \|\dot{U}\| \quad . \quad (11.6)$$

Матрица сил инерции может быть представлена в следующей форме:

$$|\Phi| = \begin{vmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \dots \\ \dots \\ \Phi_N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_{11}m_{12}\dots m_{1N} \\ m_{21}m_{22}\dots m_{2N} \\ \dots \\ \dots \\ m_{N1}m_{N2}\dots m_{NN} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ \dots \\ U_N \end{vmatrix} = |m| \cdot |U| \quad , \quad (11.7)$$

где $|m| = |m_{ij}|$ - матрица масс системы, $\|\ddot{U}\|$ – вектор ускорений, m_{ij} - коэффициенты инерции, определяемые как силы, соответствующие реакции по направлению i -й координаты при единичном ускорении координаты j .

С учетом зависимостей (11.4) и (11.7), уравнение (11.2), описывающее движение системы с N степенями свободы, представляем в виде

$$\|m\| \cdot \|\ddot{U}\| + \|b\| \cdot \|\dot{U}\| + \|K\| \cdot \|U\| = \|P(t)\| \quad . \quad (11.8)$$

Если в качестве обобщенных координат принять перемещения узлов КЭ (конечного элемента), то степень свободы системы КЭ может быть весьма велика, что может вызвать различные математические трудности при решении задачи.

Для успешного решения задачи о колебаниях сооружения при воздействии динамических нагрузок или при кинематическом возбуждении основания необходимо уменьшить динамическую степень свободы при условии сохранения ее связи со степенью свободы системы КЭ. В этом случае массы конденсируются в особо выделенных узлах. Тогда исследуемая упругая система превращается в систему суперэлементов (СЭ), соединенных между собой узлами в местах расположения масс. Для того чтобы система СЭ работала так же, как система более мелких КЭ, необходимо, чтобы единичные грузовые реакции в оставшихся связях СЭ отвечали условию совместности деформаций системы конечных элементов.

11.2 Использование метода конечных элементов для построения матриц жесткости, матриц инерционных коэффициентов, затухания

Для построения матрицы жесткости можно использовать обычный прием, основанный на расчете систем методом конечных

элементов. К исходной системе (рисунок 11.2) в направлении координаты каждой массы прикладывается единичная сила (или единичный момент).

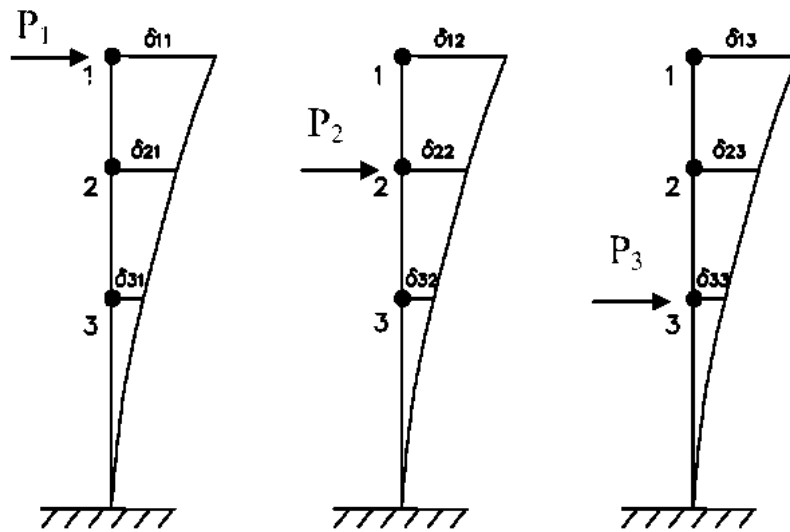


Рисунок 11.2 К построению матриц податливости

При расчете по методу КО определяются перемещения от каждой единичной силы в отдельности и записываются в виде столбца (строки). В результате образуется матрица податливости Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1N} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{N1} & \delta_{N2} & \dots & \delta_{NN} \end{vmatrix} . \quad (11.9)$$

Здесь δ_{ij} - перемещение, соответствующее координате i , вызванное силой $P_j = 1$.

Матрица жесткости $\|K\|$ равна обращенной матрице податливости $\|K\| = \|\Delta\|^{-1}$. Матрица жесткости может быть также получена на основе отыскания коэффициентов по формуле

$$r_{ij} = \sum_{k=v}^l \int_0^l EJ(\xi) \psi_i(\xi) \psi_j(\xi) d\xi . \quad (11.10)$$

Здесь ψ_i, ψ_j - функции изгиба или функции деформирования, записываемые в виде аппроксимирующих полиномов от ξ , $EJ(\xi)$ - жесткости элементов.

В том случае, когда система имеет большое число степеней свободы, удобнее вместо КЭ использовать суперэлементы СЭ, расположенные между точками приложения масс и соединенные в этих точках узлами. Если подобрать аппроксимирующие функции для СЭ становится затруднительно, то для определения реакции нужно рассчитывать на единичные смещения каждый суперэлемент отдельно (см. рисунок 11.3).

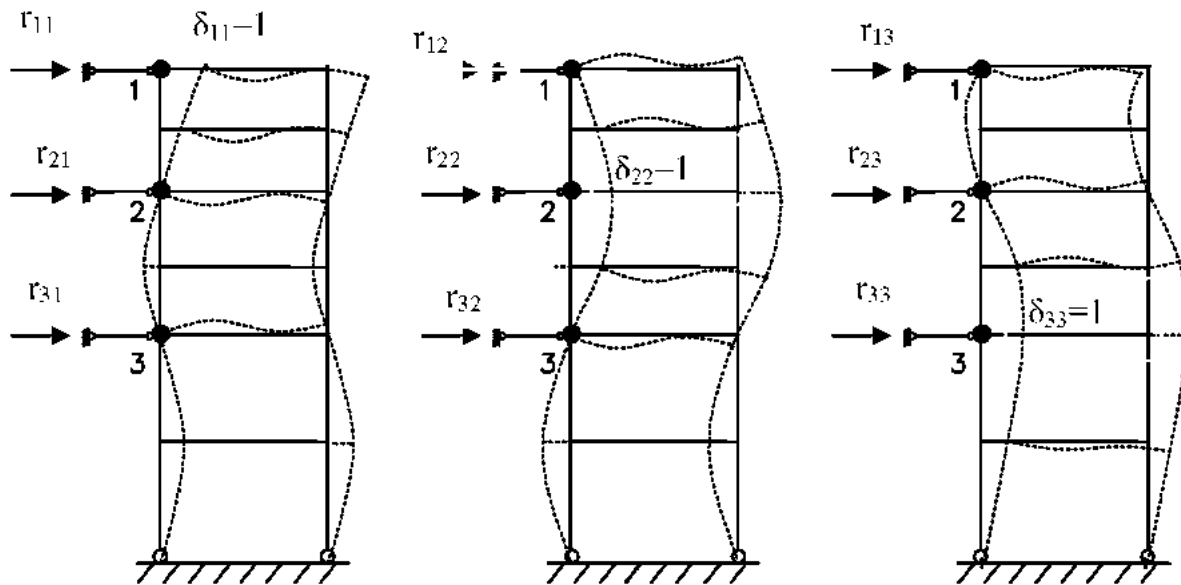


Рисунок 11.3 – Построение матрицы жесткости на основе СЭ

Очевидно, что такой путь затруднителен, если конструкции не отличаются регулярностью, и следует остановиться на использовании матрицы податливости.

Аналогичный прием возможно применить для построения матрицы инерционных коэффициентов $\|m\|$, обратной матрице единичных ускорений:

$$\|m\| = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1N} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{N1} & m_{N2} & \dots & m_{NN} \end{vmatrix} = \|A\|^{-1}.$$

Инерционные коэффициенты m_{ij} можно определить по формуле, которая отражает работу системы с распределенными массами:

$$m_{ij} = \sum_{i \neq j} \int_0^l m(\xi) \psi_i(\xi) \psi_j(\xi) d\xi . \quad (11.11)$$

Для системы с сосредоточенными массами побочные коэффициенты m_{ij} при $j \neq i$ обычно имеют весьма малые величины по сравнению с главными $(m_{11}, m_{22}, \dots, m_{NN})$. Поэтому матрицу $\|m\|$ обычно представляют в виде диагональной матрицы масс:

$$\|m\| = \begin{vmatrix} m_{11} & & \\ & m_{22} & \\ & & m_{NN} \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad \|m\| = \begin{vmatrix} m_1 & & \\ & m_2 & \\ & & m_N \end{vmatrix} .$$

Матрица затухания конечного элемента может быть представлена в форме, подобной методу Рэлея: $\|b\| = \|\alpha\|_{\mathcal{O}_s} \cdot \|K\|_{\mathcal{O}_s} + \|\gamma\|_{\mathcal{O}_s} \cdot \|m\|_{\mathcal{O}_s}$. Тогда матрица затухания системы запишется в виде:

$$\|b\| = \sum_s \|\alpha\|_{\mathcal{O}_s} \cdot \|K\|_{\mathcal{O}_s} + \sum_s \|\gamma\|_{\mathcal{O}_s} \cdot \|m\|_{\mathcal{O}_s} , \quad (11.12)$$

где матрицы коэффициентов затухания соответствующего конечного элемента с номерами узлов (i – левого, j - правого):

$$\|\alpha\|_{\mathcal{O}_s} = \begin{vmatrix} \alpha_{is} & 0 \\ 0 & \alpha_{js} \end{vmatrix} ; \quad \|\gamma\|_{\mathcal{O}_s} = \begin{vmatrix} \gamma_{is} & 0 \\ 0 & \gamma_{js} \end{vmatrix} , \quad (11.13)$$

матрица жесткости и инерции элемента

$$\|K\|_{\mathcal{O}_s} = \begin{vmatrix} K_{is} & K_{is} \\ K_{js} & K_{js} \end{vmatrix} \quad (11.14)$$

$$\|m\|_{\mathcal{O}_s} = \begin{vmatrix} m_{is} & m_{is} \\ m_{js} & m_{js} \end{vmatrix} . \quad (11.15)$$

Выражение (11.12) можно представить в более общем виде как комбинацию матриц (11.14-11.15) $\|b\| = \|m\| \sum_n \alpha_n \left[\|m\|^{-1} \cdot \|K\| \right]^n$, причем количество слагаемых n может быть выбрано произвольно. Если матрица затухания $\|b\|$ пропорциональна только матрице масс, то есть $n=0$ и $\|b\| = \alpha_0 \|m\|$, то параметры затухания обратно пропорциональны частоте колебаний и высшие формы колебаний будут иметь малое затухание. Если же затухание пропорционально матрице жесткости $\|b\| = \alpha_1 \|k\|$, т.е. $n=1$, то параметр затухания прямо пропорцио-

пален частоте и высшие формы колебаний будут сильно демпфированы.

Определение узловых сил $P_i(t)$, основанное на методе конечных элементов, позволяет записать их в виде:

$$P_i(t) = \sum_0^L \int_0^L P(x,t) \psi_i(x) dx, \quad (11.16)$$

где $P(x,t)$ – распределенная по длине и времени нагрузка, приложенная к элементам системы. Весьма часто динамическая нагрузка разделяется по времени и координате и представляется в виде $P(x,t) = P(x)\xi(t)$. Тогда нагрузка на элемент описывается формулой

$$P_i(t) = \xi(t) \int_0^L P(x) \psi_i(x) dx. \quad (11.17)$$

После того, как в соответствии с (11.16) и (11.17) получены обобщенные силы на каждый элемент, приведенную узловую нагрузку можно определить на основе принципа суперпозиции.

Однако весьма часто для определения узловых нагрузок используется способ, основанный на принципе равновесия: узловые силы задаются в виде набора сосредоточенных нагрузок, приложенных по направлению степеней свободы и (или) эквивалентных распределённым и другим сосредоточенным нагрузкам (набор балочек или участков).

11.3 Анализ частот и форм собственных колебаний

Экспериментально доказано, что упругая система с распределенными параметрами и малым демпфированием при гармоническом возбуждении испытывает резонансные колебания на некоторых характерных частотах. Каждой такой резонансной собственной частоте соответствует свойственная ей форма распределения амплитуд колебаний. Очевидно, что такая форма описывается некоторой функцией $x_i(z)$, отвечающей граничным условиям системы. Влияние сил затухания на собственные частоты не успевает проявиться и определение собственных частот и форм производится без учета демпфирования. При этом рассматривается система однородных уравнений

$$\|m\| \cdot |U| + |K| \cdot U = 0. \quad (11.18)$$

Важной особенностью собственных форм является их *ортogonalность*, т.е. свойство, отвечающее условию.

$$\int x_i(z)x_j(z)m(z)dz = 0; (i \neq j). \quad (11.19)$$

Здесь $m(z)$ - масса на единицу длины.

Исторически известно, что функции $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx$ на интервале $-\pi \leq x \leq \pi$ – ортогональны, например:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = 0 \quad \text{при } m \neq n; \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx dx = 0 \quad \text{при любых } m,$$

$n=0, 1, 2, \dots$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = 0 \quad \text{при } m \neq n.$$

Соответственно ортогональными являются функции:

$$1, \cos \frac{\pi x}{l}; \sin \frac{\pi x}{l}, \cos \frac{2\pi x}{l}, \sin \frac{2\pi x}{l}, \dots, \cos \frac{n\pi x}{l}, \sin \frac{n\pi x}{l} \quad \text{при } -l \leq x \leq l.$$

Условия ортогональности собственных форм получаем на основании теоремы Бетти (о взаимности возможных работ $A_{ij} = A_{ji}$). Пусть $f_{ki}(t), f_{kj}(t)$ – силы инерции (рисунок 11.4).

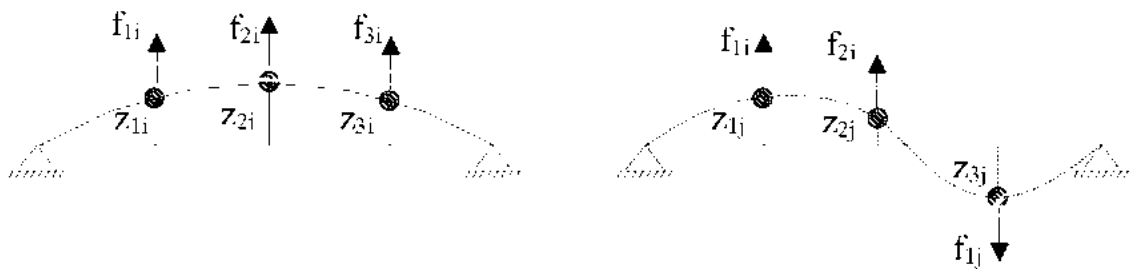


Рисунок 11.4 Формы колебаний (i, j) и инерционные силы

Теорема Бетти записывается в виде равенства

$$\sum_k f_{ki}(t)z_{kj}(t) = \sum_k f_{kj}(t)z_{ki}(t). \quad (11.20)$$

Здесь $z_{kj}(t), z_{ki}(t)$ – возможные (виртуальные) перемещения k масс по j -той и i -той формам. Предполагая, что по аналогии с системой, обладающей 1-й степенью свободы, собственные формы совершают гармонические колебания, получим:

$$\begin{aligned} z_{ki}(t) &= z_{ki}B_i \sin(\omega_i t + \theta_i); \\ z_{kj}(t) &= z_{kj}B_j \sin(\omega_j t + \theta_j); \end{aligned} \quad (11.21)$$

$$\begin{aligned} z_{ki}(t) &= -z_{ki} B_i \omega_i^2 \sin(\omega_i t + \theta_i); \\ z_{kj}(t) &= -z_{kj} B_j \omega_j^2 \sin(\omega_j t + \theta_j) . \end{aligned} \quad (11.22)$$

Подставляя (11.21), (11.22) в (11.20) и сокращая на $B_i B_j \sin(\omega_i t + \theta_i) \sin(\omega_j t + \theta_j)$,

будем иметь условие $\sum m_k (\omega_i^2 - \omega_j^2) z_{ki} z_{kj} = 0$; при $i \neq j$. Поскольку $\omega_i \neq \omega_j$, то $\sum m_k z_{ki} z_{kj} = 0$. По отношению к жесткостям условие ортогональности можно записать в виде $\sum k_k z_{ki} z_{kj} = 0$.

Подставляя зависимости (11.21), (11.22) в систему уравнений (11.18), получим

$$(\|K\| - \lambda \|m\|) \|U_0\| = 0, \quad (11.23)$$

где $\lambda = \omega^2$ - собственные числа.

Решение однородной системы (11.23) определяется по правилу Крамера

$$\|U_0\| = \frac{0}{\det(\|K\| - \lambda \|m\|)} . \quad (11.24)$$

Из курса высшей математики известно, что это решение может быть не тривиальным ($=0$) только при условии:

$$\det(\|K\| - \lambda \|m\|) = 0. \quad (11.25)$$

Для двухстепенной системы условие (10.25) выглядит следующим образом:

$$(r_{11} - \lambda m_1)(r_{22} - \lambda m_2) - r_{12} r_{21} = 0. \quad (11.26)$$

Раскрывая определитель (11.25) для системы с n степенями свободы, получим алгебраическое частное уравнение n -й степени и, соответственно, n корней $\lambda = \omega^2$. Форма, соответствующая низшей частоте, называется первой; остальные располагаются по степени возрастания частот:

$$\omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \dots \ \omega_n]^T. \quad (11.27)$$

Определение собственных частот позволяет перейти к определению координат собственных форм. Для этого подставим любую собственную частоту ω_i в уравнение (11.23)

$$(\|K\| - \omega_i^2 \|m\|) \|U_0\| = (\|K\| - \lambda_i \|m\|) \|U_0\| = 0. \quad (11.28)$$

Здесь $\lambda_i = \omega_i^2$ - собственные числа.

Уравнение (11.28) оставляет амплитуду U_0 неопределенной, так как удовлетворяется при любом ω_i . Можно найти только относительное

значение координат собственных форм. Будем считать матрицу масс диагональной, тогда запишем (11.28) в виде

$$\begin{vmatrix} (r_{11} - \omega_i^2 m_{11}) & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & (r_{22} - \omega_i^2 m_{22}) & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & (r_{nn} - \omega_i^2 m_{nn}) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} U_{0i} \\ U_{02} \\ \dots \\ U_{0ni} \end{vmatrix} = 0. \quad (11.29)$$

Нормируем в выражении (11.29) столбец координат (разделим все U_{0i} на U_{01i}):

$$\begin{vmatrix} (r_{11} - \omega_i^2 m_{11}) & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & (r_{22} - \omega_i^2 m_{22}) & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & (r_{nn} - \omega_i^2 m_{nn}) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ \hat{U}_{2i} \\ \dots \\ \hat{U}_{0ni} \end{vmatrix} = 0. \quad (11.30)$$

Уравнения (11.30) приведем к виду

$$\begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ \hat{U}_{0i} \end{vmatrix} = 0, \text{ или} \quad (11.31)$$

$$B_{11} \cdot 1 + B_{12} \cdot \hat{U}_{0i} = 0; \quad (11.32, \text{ а})$$

$$B_{21} \cdot 1 + B_{22} \cdot \hat{U}_{0i} = 0. \quad (11.32, \text{ б})$$

Здесь $B_{11} = (r_{11} - \omega_i^2 \cdot m_1)$, $B_{21} = B_{12}$ – векторы-столбцы, B_{22} – усеченная матрица

$\|K\| - \omega_i^2 \|m\|$, $\|\hat{U}_{0i}\|$ – неизвестный вектор нормированных перемещений (координат) при колебаниях по i -й собственной форме. Уравнение (11.32, б) имеет решение

$$\|\hat{U}_{0i}\| = -(B_{22})^{-1} \cdot B_{21}, \quad (11.33)$$

которому тождественно удовлетворяет и уравнение (11.32, а). Полученный вектор перемещений вместе с единичной первой компонентой образуют вектор амплитуд перемещений, соответствующий i -й собственной форме колебаний

$$\|U_i\| = \begin{bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_{2i} \\ \dots \\ \varphi_{ni} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{U}_{2i} \\ \dots \\ \hat{U}_{0ni} \end{bmatrix}. \quad (11.34)$$

Для остальных частот формы колебаний определяются аналогично. В итоге может быть построена квадратная матрица собственных форм в виде

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \dots & \varphi_{ni} \end{bmatrix}. \quad (11.35)$$

11.4 Пример определения частот и форм собственных колебаний

Задана рама, имеющая шесть динамических степеней свободы. Нумерация степеней свободы показана на рисунке 11.5. Необходимо найти значение частот собственных колебаний и координаты каждой формы колебаний.

Величина веса масс равна $500 \text{ кН} \cdot \text{с}^2/\text{м}$ (50 т). Сечение ригелей и колонн принято в виде двутавра с полками $250 \times 16 \text{ мм}$ и стенкой $700 \times 10 \text{ мм}$.

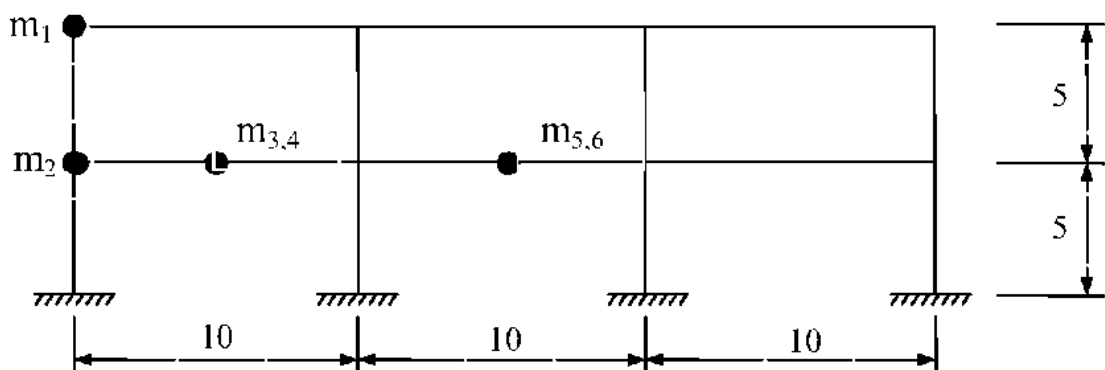


Рисунок 11.5 – Расчетная схема рамы с шестью степенями свободы

Строим матрицу жесткости, задавая единичные перемещения связей 1,2,...,6 и определяя реакции в них с применением любой программы статического расчета рам. Массы $m_{1,2,3,4}$ перемещаются

по горизонтали, массы $m_{4,6}$ – по вертикали. Как уже указывалось выше, можно построить предварительно матрицу податливости от единичных сил, приложенных поочередно по направлению степеней свободы, а затем произвести операцию обращения:

$$\|U\| \cdot 10^{-1} = \begin{bmatrix} 6.391 \cdot 10^5 & -3836.1 & -6.297 \cdot 10^5 & 628.13 & 149.51 & -54.746 \\ -3836.1 & 11786 & -2286.6 & 151.25 & -10090 & 34.087 \\ -6.297 \cdot 10^5 & -2286.6 & 9.474 \cdot 10^5 & -202.45 & -3.124 \cdot 10^5 & 183.11 \\ 628.13 & 151.25 & -202.45 & 9593.6 & -188.64 & 1163.5 \\ 149.51 & -10090 & -3.124 \cdot 10^5 & -188.64 & 3.365 \cdot 10^5 & -120.43 \\ -54.746 & 34.087 & 183.11 & 1163.5 & -120.43 & 9851 \end{bmatrix}.$$

1. Матрица масс [M] содержит на главной диагонали значения величин масс.
2. Для получения величин круговых собственных частот решаем уравнение (11.28). Для этого составим матрицу $\|U\| \cdot 10^{-1} =$

$$= \begin{bmatrix} 6.391 \cdot 10^5 - 50\lambda & -38361 & -6.297 \cdot 10^5 & 62813 & 14951 & -54746 \\ -38361 & 11786 - 50\lambda & -22866 & 15125 & -10090 & 34087 \\ -6.297 \cdot 10^5 & -22866 & 9.474 \cdot 10^5 - 50\lambda & -20245 & -3.124 \cdot 10^5 & 18311 \\ 62813 & 15125 & -20245 & 95936 - 50\lambda & -18864 & 11635 \\ 14951 & -10090 & -3.124 \cdot 10^5 & -18864 & 3.365 \cdot 10^5 - 50\lambda & -12043 \\ -54746 & 34087 & 18311 & 11635 & -12043 & 9851 - 50\lambda \end{bmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель (11.25), получим характеристическое уравнение

$$1.5539 \cdot 10^{10} \cdot \lambda^6 - 6.107 \cdot 10^{14} \cdot \lambda^5 + 4.4093 \cdot 10^{18} \cdot \lambda^4 - 3.57 \cdot 10^{21} \cdot \lambda^3 + 1.0051 \cdot 10^{24} \cdot \lambda^2 - 1.1105 \cdot 10^{26} \cdot \lambda + 3.7685 \cdot 10^{27} = 0.$$

3. Определение корней характеристического уравнения даст набор собственных чисел и собственных круговых частот:

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} 60.375 \\ 171.092 \\ 217.912 \\ 431.559 \\ 8.284 \cdot 10^3 \\ 3.014 \cdot 10^4 \end{bmatrix}; \quad [\omega] = \begin{bmatrix} \sqrt{60.375} \\ \sqrt{171.092} \\ \sqrt{217.912} \\ \sqrt{431.559} \\ \sqrt{8.284 \cdot 10^3} \\ \sqrt{3.014 \cdot 10^4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.77 \\ 13.08 \\ 14.762 \\ 20.774 \\ 91.016 \\ 173.609 \end{bmatrix}.$$

4. Определяем относительные смещения масс по направлениям их степеней свободы на каждой частоте и строим матрицу собственных форм. Для этого делим все перемещения в связях на перемещение в i -й связи и решаем уравнение

$\|\hat{U}_{0i}\| = -(B_{22})^{-1} \cdot B_{21}$ (11.33), полученное путём вычеркивания первой строки и столбца из матрицы (11.30) при каждой из круговых частот:

$\omega=7.77$; $\omega=13.08$; $\omega=14.762$; $\omega=20.774$; $\omega=91.016$; $\omega=173.609$;

$$\begin{bmatrix} 1.84 \\ 0.999 \\ -0.079 \\ 0.991 \\ 0.003 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2.198 \\ 1.083 \\ 87.119 \\ 1.12 \\ -78.253 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1.775 \\ 1.064 \\ 86.738 \\ 1.16 \\ 96.669 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -1.583 \\ 0.991 \\ 7.226 \cdot 10^{-4} \\ 0.931 \\ -0.003 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0.024 \\ 0.352 \\ 0.002 \\ -1.415 \\ 4.534 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -0.003 \\ -1.322 \\ 5.533 \cdot 10^{-4} \\ 0.353 \\ -2.263 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix};$$

5. В итоге составляем матрицу собственных форм:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1.84 & 2.198 & 1.775 & -1.583 & 0.024 & -0.003 \\ 0.999 & 1.083 & 1.064 & 0.991 & 0.352 & -1.322 \\ -0.079 & 87.119 & 86.738 & 7.226 \cdot 10^{-4} & 0.002 & 5.533 \cdot 10^{-4} \\ 0.991 & 1.12 & 1.16 & 0.931 & -1.415 & 0.353 \\ 0.003 & -78.253 & 96.669 & -0.003 & 4.534 \cdot 10^{-4} & 2.263 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}.$$

11.5 Образование несвязанных уравнений колебаний и их решение

В качестве реакции сооружения рассматриваются перемещения по направлению динамических степеней свободы. При разложении по собственным формам перемещения для j -й составляющей формы колебаний (модальной компоненты) можно выразить в виде:

$$U_j(t) = \varphi_j X_j(t), \quad (11.36)$$

где $X_j(t)$ - амплитуда колебаний по j -й форме (обобщенная координата – вклад каждой собственной формы в перемещение). Общее перемещение равно сумме отдельных компонент (см. рисунок 11.5)

$$\|U_j(t)\| = \varphi_1 X_1(t) + \varphi_2 X_2(t) + \dots + \varphi_n X_n(t) = \sum_{j=1}^n \varphi_j X_j . \quad (11.37)$$

При расчете реальных сооружений доля слагаемых, соответствующих самым низким частотам, является наибольшей. Вклад высоких частот в реакцию значительно меньше. Поэтому число членов ряда (11.37) ограничивается. Для представления всех перемещений имеем матрицу-столбец

$$\|U\| = \|\Phi\| \cdot \|X\| . \quad (11.38)$$

Здесь $\|\Phi\|$ - матрица собственных форм, которая преобразует неизвестные обобщенные координаты $\|X\|$ к геометрическим координатам $\|U\|$. Такие обобщенные координаты называются нормальными (главными) координатами систем.

Подставляя разложение (11.38) в исходные дифференциальные уравнения (без учета затухания), получим в матричном виде систему уравнений:

$$\|m\| \cdot \|\Phi\| \cdot \|\ddot{X}\| + \|K\| \cdot \|\Phi\| \cdot \|X\| = \|P(t)\| . \quad (11.39)$$

Если уравнение (11.39) умножить слева на транспонированный вектор j -й формы колебаний φ_j' , то приходим к зависимости:

$$\varphi_j' \|m\| \cdot \|\Phi\| \cdot \|\ddot{X}\| + \varphi_j' \|K\| \cdot \|\Phi\| \cdot \|X\| = \varphi_j' \|P(t)\| . \quad (11.40)$$

Если два слагаемых в левой части этого выражения представить в развернутой форме, то все слагаемые, кроме j -й формы, вследствие ортогональности исчезают и остается выражение:

$$\varphi_j' \|m\| \varphi_j \ddot{X}_j + \varphi_j' \|K\| \varphi_j X_j = \varphi_j' \|P(t)\| . \quad (11.41)$$

Введем новые обозначения: 1) обобщенная масса; 2) обобщенная жесткость; 3) обобщенная нагрузка:

$$M_j = \varphi_j' \|m\| \varphi_j; \quad K_j = \varphi_j' \|K\| \varphi_j; \quad Q_j(t) = \varphi_j' \|P(t)\| . \quad (11.42)$$

С учетом этих обозначений исходная система распадается на ряд независимых и несвязанных уравнений для каждой j -й формы:

$$M_j \ddot{X}_j + K_j X_j = Q_j(t) . \quad (10.43)$$

Уравнение (11.43) является уравнением колебаний системы с одной степенью свободы для j -й формы, причем $\omega_j^2 = K_j / M_j$. Тогда выражение (11.43) приводится к виду

$$\ddot{X}_j + \omega_j^2 X_j = Q_j(t) / M_j. \quad (11.44)$$

Решение каждого уравнения (11.44) аналогично решению обычного уравнения для одной степени свободы без учета затухания

$$X_j(t) = \frac{1}{M_j \omega_j} \int_0^t Q_j(\tau) \sin \omega_j(t - \tau) d\tau + A_j \sin \omega_j t + B_j \cos \omega_j t. \quad (11.45)$$

С учетом затухания уравнение (11.44) преобразовывается и имеет вид:

$$\ddot{X}_j + 2\xi_j \omega_j \dot{X}_j + \omega_j^2 X_j = \frac{Q_j(t)}{M_j}. \quad (11.46)$$

Решение уравнения (11.46) также состоит из двух частей:

1) реакция от нагрузки; 2) реакция от собственных колебаний:

$$X_j = \frac{1}{M_j \omega_{jD}} \int_0^t Q_j(\tau) e^{-\xi_j \omega_j (t - \tau)} \sin \omega_{jD} (t - \tau) d\tau + e^{-\xi_j \omega_j t} \left[\frac{X_j(0) + X_j(0) \xi_j \omega_j}{\omega_{jD}} \sin \omega_{jD} t + X_j(0) \cos \omega_{jD} t \right], \quad (11.47)$$

где $\dot{X}_j(0)$ $X_j(0)$ – скорость и перемещение для j -й формы при $t=0$ (начальные условия). Они определяются из условий:

$$X_j(0) = \frac{\varphi_j^T \|m\| U(0)}{M_j}; \quad \dot{X}_j(0) = \frac{\varphi_j^T \|m\| \dot{U}(0)}{M_j}. \quad (11.48)$$

После вычисления обобщенных координат X_j реакция системы в виде перемещений по направлению динамических степеней свободы системы в первоначальных координатах вычисляется в соответствии с выражением (11.37):

$$\|U_j(t)\| = \varphi_1 X_1(t) + \varphi_2 X_2(t) + \dots + \varphi_n X_n(t) = \sum_{j=1}^n \varphi_j X_j. \quad (11.49)$$

Другие параметры реакции (упругие силы, напряжения) вычисляются по известным перемещениям.

11.6 Нормирование векторов собственных форм колебаний

Как уже указывалось, формы собственных колебаний определяются относительными координатами. Однако их абсолютные значения являются неопределенными. Поэтому в рассмотренных ранее примерах и выкладках одна из амплитуд принималась равной единице, а другие – в долях от единицы. При этом одни ординаты могут быть меньше единицы, а другие – больше. В таких случаях можно среди полученных ординат выбрать максимальное значение и разделить все остальные ординаты на него. Процесс приведения к относительным координатам называется *нормированием* собственных векторов.

В некоторых случаях при расчетах на ЭВМ используются *ортонормированные* собственные формы, которые вычисляются с использованием приведенной массы (см. (11.42)) по формуле:

$$\hat{\phi} = \phi_j \cdot M_j^{1/2}. \quad (11.50)$$

В этом случае условие ортогональности по отношению к диагональной матрице масс записывается в следующем виде:

$$\|\hat{\Phi}\|^T \cdot \|m\| \cdot \|\hat{\Phi}\| = \|I\|. \quad (11.51)$$

Здесь $\|I\|$ – диагональная единичная матрица. По отношению к матрице жесткости также соблюдается условие ортогональности в виде:

$$\|\hat{\Phi}\|^T \cdot \|K\| \cdot \|\hat{\Phi}\| = \|\Omega^2\|, \quad (11.52)$$

где $\|\Omega^2\|$ – диагональная матрица вида:

$$\|\Omega^2\| = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_n^2 \end{bmatrix}. \quad (11.53)$$

Рассмотрим условие ортогональности для матрицы затухания. Для того, чтобы при учете затухания обеспечивалось разделение на несвязанные уравнения, необходимо выполнение условия

$$\|\Phi\|^T \cdot \|C\| \cdot \|\Phi\| = 0. \quad (11.54)$$

Однако выполнение этого условия зависит от характера представления функции затухания (диссипации). Предложенная Релеем зави-

симось, при которой матрица затухания является линейной комбинацией матрицы масс и матрицы жесткости вида $\|C\| = \alpha_1 \|m\| + \alpha_2 \|K\|$, обеспечивает условие ортогональности и, соответственно, разложение решения по собственным формам, поскольку каждое слагаемое отвечает условию ортогональности.

Необходимо отметить, что ортогонализация собственных форм является распространенным и весьма эффективным методом, однако он неприменим для систем, имеющих две формы колебаний с совпадающими частотами.

При представлениях матрицы затухания, не обеспечивающей разделение на несвязанные уравнения, решение системы дифференциальных уравнений производится, как правило, шаговыми итерационными методами.

11.7 Пример решения задачи на основе разделения на несвязанные уравнения

Рассмотрим на примере в виде трехэтажной рамы ход расчета на основе разложения решения по собственным формам. Этот метод можно использовать для любой упругой системы, перемещения которой определяются n дискретными степенями свободы (координатами). Относительное затухание ξ_n при необходимости определяется (задается в %) отдельно для каждой собственной формы (моды). Внешняя нагрузка задается в виде вектора $[P(t)]$ (рисунок 11.6).

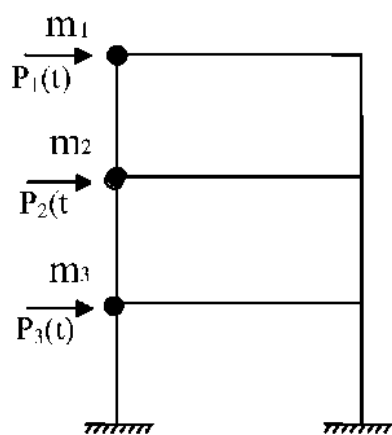


Рисунок 11.6 Расчетная схема рамы

Будем считать, что массы $[m]$ и жесткости системы $[k]$ заданы:

$$[m] = \begin{bmatrix} 174,6 & 0 & 0 \\ 0 & 261,9 & 0 \\ 0 & 0 & 349,2 \end{bmatrix} \text{ кН}\cdot\text{с}^2/\text{м} ;$$

$$[k] = 10^3 \begin{bmatrix} 105 & -105 & 0 \\ -105 & 315 & -210 \\ 0 & -210 & 525 \end{bmatrix} \text{ кН/м} .$$

Этап 1 Анализ частот собственных колебаний

Затуханием при определении собственных частот, как правило, можно пренебрегать, поэтому запишем определитель уравнения (11.29) в виде:

$$[k] - c \cdot [m] = \begin{bmatrix} 105 \cdot 10^3 - 174,6 \cdot c & -105 \cdot 10^3 & 0 \\ -105 \cdot 10^3 & 315 \cdot 10^3 - 261,9 \cdot c & -210 \cdot 10^3 \\ 0 & -210 \cdot 10^3 & 525 \cdot 10^3 - 349,2 \cdot c \end{bmatrix} = 0 .$$

Раскрывая определитель и решая характеристическое уравнение, получим его корни и, соответственно, собственные частоты:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 210,25 \\ 967,21 \\ 2125,21 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14,5 \\ 31,1 \\ 46,1 \end{bmatrix} \text{ рад/с.}$$

Этап 2 Определение форм собственных колебаний

Решая уравнение (11.33), получим соответствующие формы собственных колебаний в виде:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0,644 & -0,601 & -2,57 \\ 0,300 & -0,676 & 2,47 \end{bmatrix} .$$

Для проверки ортогональности собственных форм выполним умножение матриц

$$\Phi^T m \Phi = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} .$$

Этап 3 Определение обобщенной (приведенной) массы

Для последующего получения ортонормированных форм найдём сначала величины приведенных масс по формуле

$$\hat{M}_n = \varphi_n^T \cdot m \cdot \varphi_n :$$

$$\hat{M}_1 = 314,5 \text{ кН} \cdot \text{с}^2 / \text{м}; \quad \hat{M}_2 = 428,7 \text{ кН} \cdot \text{с}^2 / \text{м}; \quad \hat{M}_3 = 4033,7 \text{ кН} \cdot \text{с}^2 / \text{м}.$$

Этап 4 Учет начальных условий

Зададимся следующими начальными условиями:

$$U(t=0) = \begin{bmatrix} 1,27 \\ 1,01 \\ 0,76 \end{bmatrix} \cdot 10^{-2} \text{ м}; \quad \dot{U}(t=0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 22,86 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-2} \text{ м/с.}$$

Матрица обобщенных масс:

$$M = \begin{bmatrix} 314,5 & & \\ & 428,7 & \\ & & 4033,7 \end{bmatrix} \text{ кг} \cdot \text{с}^2/\text{м}.$$

Необходимо найти начальные условия в обобщенных координатах по формулам:

$$X(t=0) = [M]^{-1} \Phi^T [m] [U(t=0)];$$

$$\dot{X}(t=0) = [M]^{-1} \Phi^T [m] [\dot{U}(t=0)].$$

$$\text{Вычислим множитель } M^{-1} \Phi^T m = \begin{bmatrix} 0,555 & 0,536 & 0,333 \\ 0,407 & -0,366 & -0,55 \\ 0,043 & -0,167 & 0,214 \end{bmatrix}.$$

После вычислений получим:

$$X(t=0) = [M^{-1} \Phi^T m] \cdot \begin{bmatrix} 1,27 \\ 1,01 \\ 0,70 \end{bmatrix} \cdot 10^{-2} = \begin{bmatrix} 1,503 \\ -0,274 \\ 0,048 \end{bmatrix} \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$\dot{X}(t=0) = [M^{-1} \Phi^T m] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 22,86 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-2} = \begin{bmatrix} 12,26 \\ -8,382 \\ -3,81 \end{bmatrix} \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Этап 5 Определение реакций по каждой моде (собственной форме)

Реакция в обобщенных координатах при свободных колебаниях:

$$X_n(t) = \frac{\dot{X}_n(t=0)}{\omega_n} \sin \omega_n t + X_n(t=0) \cos \omega_n t. \quad (11.55)$$

Соответственно будем иметь:

$$\begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ X_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,846 \sin \omega_1 t \\ -0,270 \sin \omega_2 t \\ -0,083 \sin \omega_3 t \end{bmatrix} \cdot 10^{-2} + \begin{bmatrix} 1,503 \cos \omega_1 t \\ -0,274 \cos \omega_2 t \\ 0,048 \cos \omega_3 t \end{bmatrix} \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Этап 6 Определение реакций в исходных координатах

На основании принципа суперпозиции (сложения реакций по формам) можно определить перемещения при свободных колебаниях на каждом этаже, т.е. по направлению степени свободы. Эти перемещения будут содержать вклад каждой собственной формы. При вычислении перемещений используем матричную зависимость $[U(t)] = [\Phi] \cdot [X(t)]$. При необходимости вычислять инерционное воздействие (упругие силы) следует использовать выражение

$$[\dot{U}(t)] = [\Phi] \cdot [\dot{X}(t)] = [\Phi] \cdot \omega^2 \cdot [X(t)]. \quad (11.56)$$

Этап 7 Определение реакций в обобщенных координатах от динамической нагрузки

Представим нагрузку в виде импульсивной нагрузки от взрыва

$$\begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot (2222) \cdot \cos \frac{\pi}{2t_1} t \quad \text{кН, где } t_1=0,02\text{с}; \quad -\frac{t_1}{2} < t < \frac{t_1}{2}.$$

В начальной фазе колебаний при действии импульсной нагрузки затухание практически не проявляется и им можно пренебречь. Тогда реакция по каждой n -й форме колебаний записывается в виде

$$X_n(t) = \mu_n \frac{Q_{0n}}{K_n} \sin \omega_n t. \quad (11.57)$$

Здесь $K_n = M_n \omega_n^2$ — обобщенная жесткость.

Амплитудные величины обобщенных нагрузок, действующих по

направлению n -й степени свободы, $Q_{0n} = \varphi_n^T \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot 2222$.

Отсюда $Q_{01} = 2,882 \cdot 2222 = 6403,8$ кН; $Q_{02} = -1,554 \cdot 2222 = -3453$ кН;

$Q_{03} = 0,8 \cdot 2222 = 1777,6$ кН.

Матрица обобщенных нагрузок записывается в виде

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6403,8 \\ -3453 \\ 1777,6 \end{bmatrix} \quad \text{кН.}$$

Определим величины обобщенных жесткостей

$$\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 314,5 \cdot (14,5)^2 \\ 428,7 \cdot (31,1)^2 \\ 4033,7 \cdot (46,1)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66123,6 \\ 414642,9 \\ 8572459,5 \end{bmatrix} \text{ кН/м} .$$

Определим параметры относительной продолжительности импульса

$$\begin{bmatrix} t_1/T_1 \\ t_1/T_2 \\ t_1/T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \frac{0,02}{2\pi} = \begin{bmatrix} 0,046 \\ 0,099 \\ 0,149 \end{bmatrix} .$$

Для определения коэффициента динамичности μ используем решение для кратковременной нагрузки $\mu_n = 2 \cdot \sin \omega_n t_1 / 2$. С учетом этого выражения получим следующие коэффициенты динамичности:

$$\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,29 \\ 0,61 \\ 0,89 \end{bmatrix} .$$

Подставляя коэффициенты динамичности и обобщенные параметры в уравнение (11.57), получим:

$$\begin{bmatrix} X_1(t_1) \\ X_2(t_2) \\ X_3(t_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0,29 \cdot 6403,8 / 66123,6) \sin 14,5t \\ -(0,61 \cdot 3453 / 414642) \sin 31t \\ (0,89 \cdot 1777,6 / 8572459,5) \sin 46,1t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0,028) \sin 14,5t \\ -(0,0051) \sin 31t \\ (0,000184) \sin 46,1t \end{bmatrix} \text{ м} .$$

Этап 8 Определение реакций в исходных координатах от динамической нагрузки

В основе определения реакций в исходных координатах лежит принцип суперпозиции. На этом этапе производится суммирование вкладов каждой формы по формуле $U_i(t) = \sum \varphi_{in} X_n(t)$. Перемещения на уровнях этажей (по направлению степеней свободы):

$$U_1(t) = \sum \varphi_{1n} X_n(t) = [2,8 \sin 14,4t - 0,51 \sin 31,1t + 0,0184 \sin 46,1t] \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$U_2(t) = \sum \varphi_{2n} X_n(t) = [1,803 \sin 14,4t - 0,30351 \sin 31,1t + 0,0473 \sin 46,1t] \cdot 10^{-2} \text{ м};$$
(11.58)

$$U_3(t) = \sum \varphi_{31n} X_n(t) = [0,84 \sin 14,4t - 0,345 \sin 31,1t + 0,04545 \sin 46,1t] \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Упругие силы F_i также определяются на основе суммирования вклада каждой собственной формы из выражения

$$F_i(t) = \sum m_n \omega_n^2 \cdot \varphi_{in} X_n(t):$$

$$F_1 = \sum m_n \omega_n^2 X_n(t) \varphi_{1n} = [102,787 \sin 14,5t + 861,26 \sin 31,1t - 68,275 \sin 46,1t] \text{ кН};$$

$$F_2 = \sum m_n \omega_n^2 X_n(t) \varphi_{2n} = [99,3 \sin 14,5t - 776,43 \sin 31,1t - 263,2 \sin 46,1t] \text{ кН}; \quad (11.59)$$

$$F_3 = \sum m_n \omega_n^2 X_n(t) \varphi_{3n} = [61,67 \sin 14,5t - 116,44 \sin 31,1t - 337,28 \sin 46,1t] \text{ кН}.$$

Сравнение выражений (11.58) и (11.59) показывает, что вклад высших форм колебаний в упругие силы больше, чем в перемещения.

Лекция 12

Случайные процессы и случайные воздействия

Теория случайных процессов – математическая наука, изучающая закономерности случайных явлений и динамику их развития. Это достаточно новый раздел теории вероятностей [26, 47, 9].

В природе весьма часто случаются явления, поведение и развитие которых невозможно описать точно с помощью детерминированных моделей. Неопределенность процессов такого рода вызвана влиянием случайных факторов. Математические модели, описывающие развитие процессов под воздействием случайных факторов, называются стохастическими (вероятностными).

В инженерной практике к явлениям, возникающим под воздействием случайных нагрузок и имеющим стохастический характер, относятся, например, сила ветра в данном районе, пульсации скорости турбулентного ветра в точке на поверхности сооружения, сейсмические колебания, морские и речные волны и реакции сооружений от указанных случайных нагрузок.

Для выполнения практических расчетов на эти нагрузки необходимо использовать основные понятия теории вероятности и математической статистики, теории случайных функций и случайных процессов.

12.1 Фундаментальные соотношения теории вероятности

Предполагая, что изучающие данный курс слушатели уже знакомы с элементами теории вероятности, дадим здесь только основные понятия без доказательств и выводов.

1. Случайность.

Если событие A из совокупности повторений опыта (испытаний) S может произойти или не произойти, оно называется случайным.

2. Вероятность. Относительная частота событий.

Относительной частотой называется отношение m/n , где m – количество произошедших событий A , n – количество испытаний из совокупности S . Если при больших значениях n отношение m/n незначительно отличается от единственного предельного значе-

пия $P(A)$, то число $P(A)$ называется вероятностью появления события A .

3. Сложение вероятностей.

Если события A_1 и A_2 несовместимы (взаимно исключают), то вероятность того, что события A_1 и A_2 произойдут, равна

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2), \quad (12.1)$$

где $A_1 = m_1/n$, $A_2 = m_2/n$.

4. Совместимые и условные вероятности.

Вероятность того, что два события A и B произойдут одновременно, называется совместной вероятностью событий A и B и обозначается, как $P(A \cap B)$.

Вероятность того, что событие A определяется после того, как событие B уже произошло, называется условной вероятностью и обозначается $P(A/B)$, причем

$$P(A/B) = P(A \cap B) / P(B). \quad (12.2)$$

Аналогично $P(B/A) = P(A \cap B) / P(A) \quad (12.3)$

и $P(A \cap B) = P(B)P(A/B) = P(A)P(B/A). \quad (12.4)$

5. Независимость.

Если событие A каким образом не зависит от B , то

$$P(A/B) = P(A). \quad (12.5)$$

Два события A и B , для которых справедливо соотношение (12.5), называются стохастически независимыми. Другое определение независимости

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \quad (12.6)$$

Для трех независимых событий:

$$\begin{aligned} P(A \cap C) &= P(A)P(C); \\ P(B \cap C) &= P(B)P(C); \\ P(A \cap B \cap C) &= P(A)P(B)P(C). \end{aligned} \quad (12.7)$$

12.2 Случайные величины и распределения вероятностей

Случайная величина – величина, которая в результате опытов, испытаний примет одно и только одно возможное значение, заранее неизвестное и зависящее от случайных факторов, которые заранее не могут быть учтены.

Дискретной (прерывной) называется случайная величина, принимающая отдельные, изолированные значения (счетное множе-

ство) с определенными вероятностями. Пример – преобразование монеты (орел, решка). Непрерывная величина принимает все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Пусть для изучения количественного (дискретного или непрерывного) признака X из генеральной совокупности извлечена выборка x_1, x_2, \dots, x_k объемом n . *Статистическим распределением выборки* называют перечень вариантов x_i вариационного ряда и соответствующих им частот n_i . Обозначим отношение $W_i = n_i / n$, где n_i / n – относительная частота значения x_i .

Статистическое распределение выборки можно также задавать в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот (в качестве частоты интервала принимают сумму частот вариантов, попавших в этот интервал).

Пример 1 Выборка задана в виде распределения частот

x_i	2	3	6	7
n_i	1	3	5	1

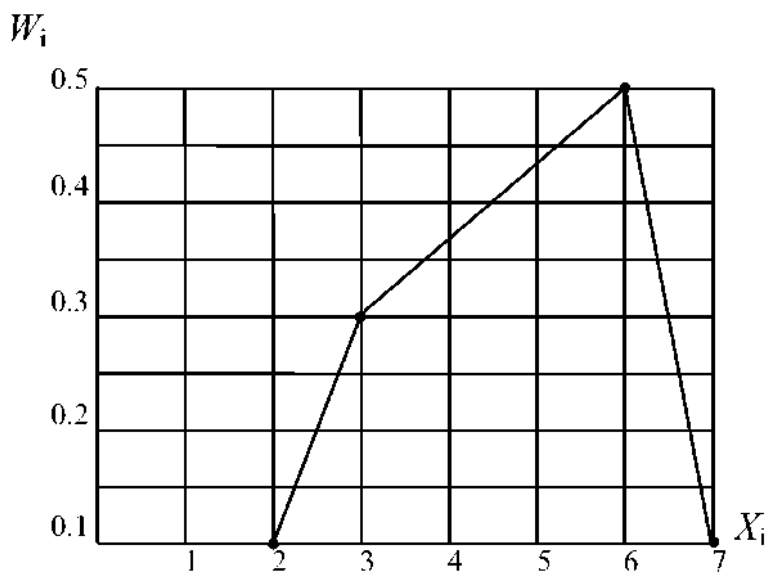


Рисунок 12.1 Полигон относительных частот

Общий объем выборки $n = 1+3+5+1 = 10$.

Относительные частоты равны $W_1=1/10=0,1$;

$W_2=3/10=0,3$; $W_3=5/10=0,5$;

$W_{\Sigma}=1/10=0,1$. Сумма относительных частот равна единице. Это условие, как правило, используется в качестве проверки выборки относительных частот W_i .

Полигон частот – ломаная, соединяющая точки

$$(x_1; n_1), (x_2; n_2) \dots, (x_k, n_k),$$

где x_i – варианты выборки, n_i – соответствующие им частоты. Полигон относительных частот – ломаная соединяющая точки x_i и соответствующие им относительные частоты W_i (рисунок 12.1).

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру (рисунок 12.2), состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной ΔX ,

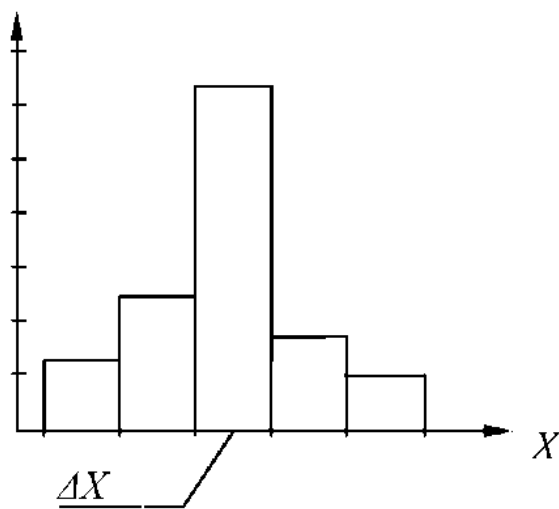


Рисунок 12.2 – Гистограмма частот

а высоты равны отношению $n_i / \Delta X$ (плотность частот). Здесь n_i – количество случаев, когда случайная величина X принимала значения в заданных интервалах $X_i = X_{i-1}$. Относительная частота W_i события $X_{i-1} < X \leq X_i$ равна произведению ординаты $n_i / (n\Delta X)$ на интервале ΔX .

Поскольку площадь, ограниченная гистограммой, равна

$$(n_1 + n_2 + \dots n_i + \dots)\Delta X = n\Delta X, \quad (12.8)$$

то общая площадь гистограммы равна единице.

Когда ΔX мало, можно записать $\Delta X = dx$. При этом $n \rightarrow \infty$ и ординаты графика плотности распределения частот приближаются к величинам $f(x)$, где x - текущее значение случайной величины X .

Функция $f(x)$ называется функцией плотности распределения вероятностей случайной величины X (Рисунок 12.3). Вероятность события $x < x < x+dx$ равна $f(x)dx$.

При этом $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

(сравните с гистограммой!). Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу $(x_1,$

x_2), равна площади криволинейной трапеции, ограниченной осью X , кривой распределения $f(x)$ и прямыми $x=x_1$ и $x=x_2$.

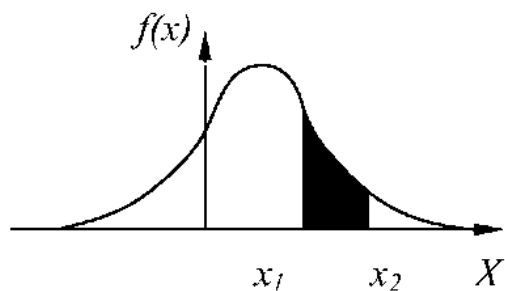


Рисунок 12.3 – Функция плотности вероятности

Эмпирическая функция распределения (функция распределения выборки) $F^*(x)$ дискретной случайной величины X определяет для каждого значения x относительную частоту события для $X < x$ (Рисунок 12.4). При этом

$$F^*(x) = n_x / n, \quad (12.9)$$

где n_x – число вариантов, меньших x ; n – объем выборки. Па-

пример. для того, чтобы найти, например, $F^*(x_2)$, надо число вариантов, меньших x_2 , разделить на объем выборки: $F^*(x_2) = n_{x_2} / n$. Необходимо отметить, что: а) значения $F^*(x)$ лежат в пределах $[0, 1]$; б) $F^*(x)$ – неубывающая функция; в) если x_1 – наименьшая варианта, а x_k – наибольшая, то $F^*(x) = 0$ при $x < x_1$ и $F^*(x) = 1$ при $x > x_k$.

Пример 2 Выборка задана в виде распределения относительных частот

x_i	1	2	3
W_i	0,3	0,5	0,2

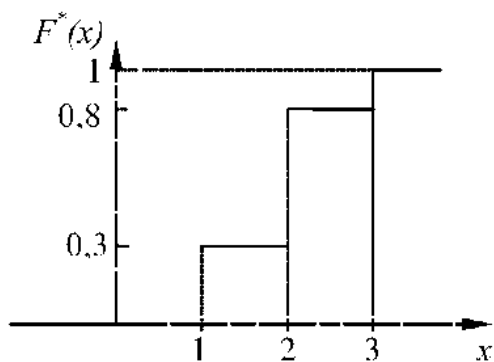


Рисунок 12.4 – Функция распределения $F^*(x)$

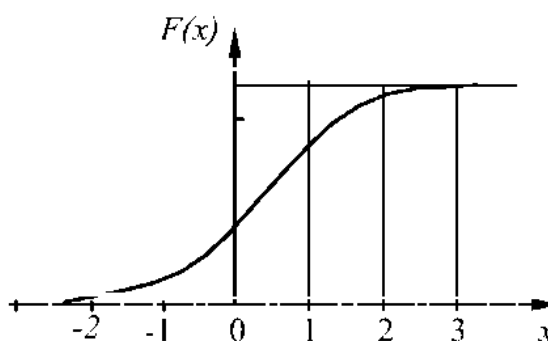


Рисунок 12.5 – Функция распределения $F(x)$

Функция распределения вероятностей имеет вид (рисунок 12.4) :

$$F^*(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{при} & x \leq 1 \\ 0,3 & \text{при} & 1 < x \leq 2 \\ 0,8 & \text{при} & 2 < x \leq 3 \\ 1 & \text{при} & x > 3 \end{array} \right\} .$$

Функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины X (рисунок 12.5) может быть записана в виде

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx . \quad (12.10)$$

Функцию распределения можно трактовать, как функцию, определяющую для каждого значения x относительную частоту для $X < x$. Из выражения (12.10) следует

$$f(x) = dF(x) / dx . \quad (12.11)$$

Совместное распределение вероятностей. Допустим, что X и Y – две непрерывные случайные величины, и пусть $f(x,y)dxdy$ равны вероятности того, что $x < X \leq x+dx$ и $y < Y \leq y+dy$. Функция $f(x,y)$ называется совместной плотностью распределения вероятностей случайных величин X и Y (рисунок 12.6).

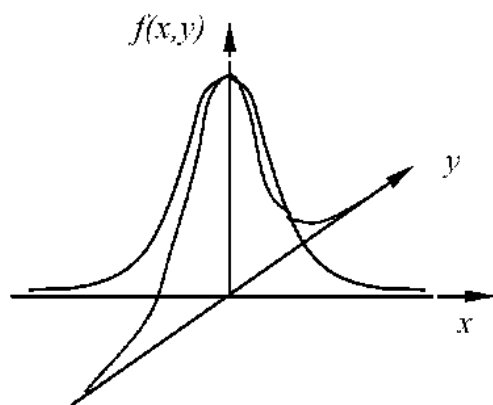


Рисунок 12.6 – Совместная плотность распределения вероятности

Вероятность того, что $X \leq x$ и $Y \leq y$, называется совместной функцией распределения X и Y и обозначается $F(x,y)$, при этом

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x,y) dx dy \quad \text{и} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx dy = 1 . \quad (12.12)$$

Из (12.12) получаем

$$f(x,y) = d^2 F(x,y) / dx dy . \quad (12.13)$$

Если функция $f(x,y)$ известна, то вероятность того, что $x < X \leq x + dx$,

$$\text{равна } f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy . \quad (12.14)$$

Условная плотность распределения вероятностей Y при $X=x$ записывается в виде

$$f(y/x) = f(x, y) / f_x(x) . \quad (12.15)$$

Если X и Y независимы, то $f(y/x) = f_y(y)$ и

$$f(x, y) = f_x(x) f_y(y) . \quad (12.16)$$

Понятие условной плотности применяется в теории надежности сооружений. Поведение сооружения зависит от случайной нагрузки и от случайных свойств материала.

12.3 Характеристики случайной величины

Среднее значение, медиана, мода, дисперсия, стандартное отклонение, коэффициент корреляции, распределения вероятностей

Среднее значение (математическое ожидание) дискретной случайной величины X записывается в виде

$$M(X) = \sum_{i=1}^m x_i f_i , \quad (12.17)$$

где m – число принимаемых X значений. Выразим математическое ожидание через относительные частоты (вероятность p_i):

$$M(X) = \sum_{i=1}^m x_i \cdot n_i / n = \sum_{i=1}^m x_i \cdot p_i . \quad (12.18)$$

Если случайная величина непрерывна, то

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx . \quad (12.19)$$

Медиана – такое значение, при котором функция распределения равна $F(x)=1/2$. Модой непрерывной случайной величины X называется такое ее значение, которому соответствует максимум плотности вероятности $f(x)$. Моду можно также рассматривать как значение случайной величины, имеющее наибольшую вероятность появления в любом заданном испытании.

Математическое ожидание от величины $[x - M(X)]^2$ называется дисперсией случайной величины X . Дисперсия позволяет оценить рассеяние возможных значений случайной величины вокруг ее среднего значения. Дисперсию можно записать в виде

$$D = \text{Var}(X) = M\{[X - M(X)]^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x) dx. \quad (12.20)$$

Для вычисления дисперсии можно использовать известную теорему о том, что «дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом её математического ожидания», т.е.

$$D = \text{Var}(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Стандартным отклонением случайной величины (стандартом) называется величина

$$\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\text{Var}(X)}. \quad (12.21)$$

Эта величина называется также **средним квадратическим отклонением**. Она используется в тех случаях, когда желательно, чтобы оценка рассеяния имела размерность случайной величины.

Отношение $\sigma/M(X)$ называется **коэффициентом вариации** случайной величины X .

Дисперсия, стандарт и коэффициент вариации характеризуют разброс (рассеяние) случайной величины относительно её среднего значения.

Коэффициент корреляции определяет связь двух случайных величин X и Y и определяется соотношением

$$K_{x,y} = K(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(x)] \cdot [y - M(y)] f(x, y) dx dy / [\sigma(x) \sigma(y)]. \quad (12.22)$$

Выражение $\mu_{x,y} = M[x - M(X)] \cdot [y - M(Y)]$ называется **корреляционным моментом**. С учетом этого

$$K_{x,y} = \mu_{x,y} / (\sigma_x \sigma_y). \quad (11.23)$$

Очевидно, что $K_{x,y}$ – безразмерная величина. Её величина всегда находится в пределах $-1 \leq K_{x,y} \leq 1$. Если две случайные величины связаны линейной зависимостью типа $Y = a + bX$, то $K_{x,y} = \pm 1$. Если две случайные величины независимы друг от друга, то $K_{x,y} = 0$. Промежуточные значения позволяют оценить зависимость случайных величин друг от друга.

Необходимо отметить, что равенство $K_{x,y} = 0$ необязательно свидетельствует о независимости величин X и Y .

Распределения вероятностей

Отметим здесь некоторые типы плотностей распределения вероятностей.

Нормальное распределение (Гаусса). При нормальном распределении плотность распределения вероятностей X имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{[x - M(X)]^2}{2\sigma_x^2} \right]. \quad (12.24)$$

Множитель $1/\sigma_x \sqrt{2\pi}$ отвечает условию нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

Кривые плотности нормального распределения при различных параметрах σ и $M(X)=0$ показаны на рисунке 12.7,а.

Отметим, что параметр $a=M(X)$ определяет сдвиг кривых вдоль оси x (рисунок 12.7,б).

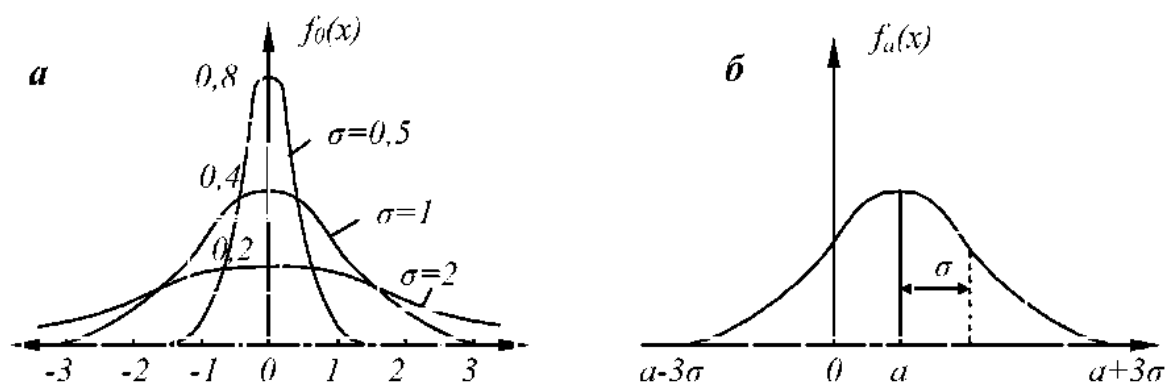


Рисунок 12.7: а Кривые плотности вероятности при различных σ ;
б сдвиг кривой на величину $a=M(X)$

В практических приложениях часто используется следующее правило: для нормально распределенной величины практически достоверно, что её отклонения от центра будут меньше утроенного стандарта (правило трех сигм). При этом вероятность того, что абсолютная величина отклонения превысит 3σ , очень мала (рисунок 12.7,б) и равна 0,0027 (0,27%).

Нормальное распределение широко используется в различных инженерных и физических задачах, например для описания ошибок измерения. При больших объёмах опытов (измерений) нормальное распределение используется при описании прочностных свойств ма-

териалов и определении таких характеристик, как нормативные сопротивления стали, бетона.

Однако следует отметить, что экстремальные скорости ветра, соответствующие географическому району, не могут быть описаны нормальным законом распределения.

Распределения вероятностей, используемые в инженерных исследованиях ветровых воздействий

Распределение Пуассона применяется для событий, каждое из которых может произойти независимо от других и с равной вероятностью в любой точке временного интервала $0 \leq t \leq T$. Пусть $p(n, \tau)$ обозначает вероятность того, что n событий произойдут за интервал времени τ . При этом на $p(n, \tau)$ не влияет появление любого числа событий за пределами этого интервала. Тогда

$$p(n, \tau) = \frac{(\lambda \tau)^n}{n!} e^{-\lambda \tau} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (12.25)$$

Математическое ожидание и дисперсия равны $\lambda \tau$ (ожидаемое число событий за время τ). Параметр λ называется средней интенсивностью входного потока и представляет ожидаемое число событий за единицу времени.

Критерий согласия. Критерием согласия называют критерий проверки гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения. Имеется несколько критериев согласия – χ^2 К. Пирсона, Колмогорова, Смирнова и др.

Критерий Пирсона записывается в виде

$$\chi^2 = \sum (n_i - n'_i)^2 / n'_i \quad (12.26)$$

Здесь n_i – эмпирические частоты, n'_i – теоретические расчеты. Если $\chi^2 \leq \chi^2_{кр}$ – гипотезу распределения не отвергают. Если $\chi^2 > \chi^2_{кр}$ – гипотезу отвергают.

12.4 Случайные функции и их характеристики

Случайной функцией является функция, которая в процессе опыта может принять тот или иной конкретный вид, неизвестный заранее. Конкретный вид, принимаемый функцией в результате опыта, называется *реализацией случайной функции*. Такого рода выбороч-

ную функцию называют еще *случайным сигналом*. При нескольких опытах возникает *семейство реализаций* случайной функции.

В тех случаях, когда мы имеем дело с непрерывно работающей системой (например, работа насосной водоперекачивающей станции), при управлении ею приходится учитывать различного рода случайные помехи (колебания электрического тока, изменение уровня воды в реке и многие другие). Такие случайные воздействия и вызываемые ими реакции системы являются *случайными функциями*.

На практике встречаются случайные функции, зависящие не только от времени, но и от других параметров. Например, аэрологические данные состояния атмосферы (температура, давление, ветер) зависят как от времени, так и от координат. Однако чаще всего в практических задачах рассматриваются случайные функции одного аргумента (времени t).

При анализе случайных функций используются основные характеристики, аналогичные числовым характеристикам случайных величин. Однако, в отличие от числовых величин, характеристики случайных функций являются функциями.

Математическим ожиданием случайной функции $X(t)$ называется неслучайная функция $m_x(t)$, которая при каждом значении аргумента t равна математическому ожиданию соответствующего сечения семейства реализаций

$$m_x(t) = M[X(t)] . \quad (12.27)$$

Таким образом, математическое ожидание случайной функции представляет собой некоторую *среднюю функцию*, вокруг которой варьируются возможные реализации случайной функции.

Дисперсией случайной функции $X(t)$ называется неслучайная функция $D_x(t)$, которая при каждом значении аргумента t равна дисперсии соответствующего сечения семейства реализаций.

$$D_x(t) = D[X(t)] . \quad (12.28)$$

Дисперсия случайной функции характеризует разброс полученных в опытах реализаций относительно *средней функции*. Она является неотрицательной функцией (см. 12.20).

Среднее квадратическое отклонение случайной функции (стандарт) определяется, как корень квадратный от дисперсии

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D[X(t)]} . \quad (12.29)$$

Для описания и анализа случайных функций недостаточно таких понятий, как математическое ожидание, дисперсия, стандарт. Рассмотрим две реализации, показанные на рисунке 12.8 .

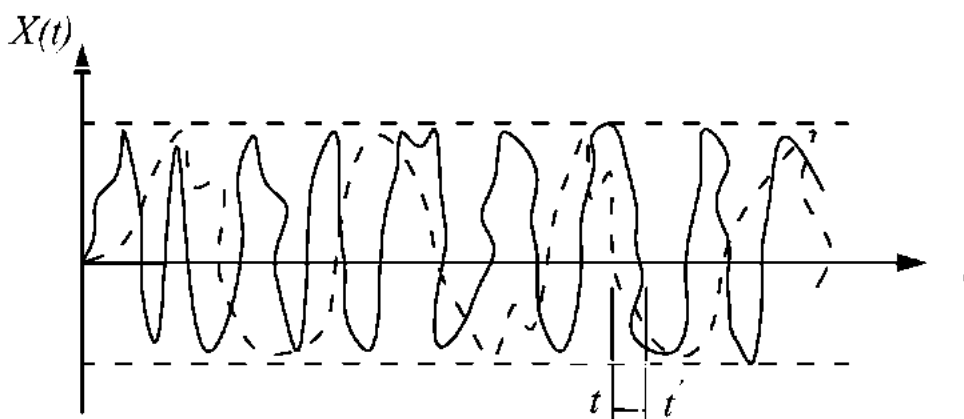


Рисунок 12.8 Реализации случайных функций с различными корреляционными функциями

У этих реализаций почти одинаковые математические ожидания и дисперсии. Однако структура обоих случайных процессов существенно различается. Для описания этих различий вводится особая характеристика – **корреляционная функция (автокорреляционная функция)**.

Для лучшего понимания этой характеристики рассмотрим одну реализацию случайной функции $X(t)$ в моменты времени t и t' . Из рисунка 12.8 видно, что при близких значениях t и t' величины $X(t)$ и $X(t')$ связаны тесной зависимостью и, если $X(t)$ примет какое-то значение, то с большой вероятностью $X(t')$ примет значение, близкое к нему. При увеличении интервала между t и t' связь между $X(t)$ и $X(t')$ ослабевает.

Степень зависимости величин $X(t)$ и $X(t')$ характеризуется их **корреляционным моментом (моментом связи)**. Эта характеристика получила также название **ковариации**

$$K_x(t) = [X(t) - m_x(t)][X(t') - m_x(t')] . \quad (12.30)$$

При $t = t'$ корреляционная функция обращается в дисперсию случайной функции. Корреляционная функция симметрична относительно своих аргументов

$$K_x(t, t') = K_x(t', t) . \quad (12.31)$$

Кроме ковариации используют нормированную корреляционную функцию

$$r_x(t, t') = K_x(t', t) / (\sigma_x(t) \cdot \sigma_x(t')). \quad (12.32)$$

Функция (12.32) представляет собой *коэффициент корреляции* величин $X(t)$ и $X(t')$. При $X(t)$ и $X(t')$ нормированная корреляционная функция равна единице.

12.5 Стационарные случайные функции и случайные процессы

Случайный процесс, являющийся функцией времени, называется стационарным, если его статистические свойства не зависят от времени отчета. Такой процесс имеет вид случайных колебаний семейства функций вокруг некоторого среднего значения. При этом средняя амплитуда и характер колебаний практически не меняются с течением времени. При исследовании стационарного процесса в качестве начала отчета можно выбрать любой момент и считать, что процесс длится бесконечно [54].

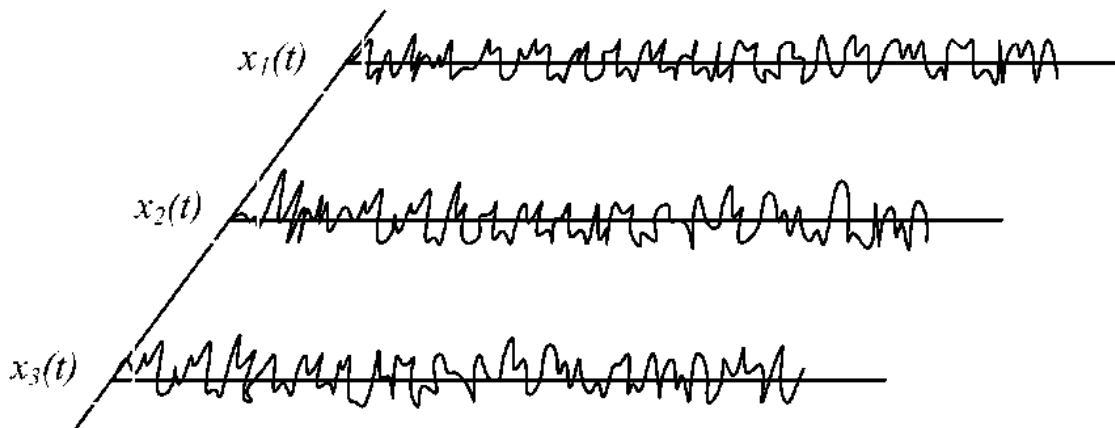


Рисунок 12.9 Реализации эргодического стационарного случайного процесса с различными корреляционными функциями

К стационарным случайным процессам можно отнести колебания в электрической сети, случайные помехи и шумы в радиотехнике. Существуют нестационарные процессы, которые на определенном отрезке времени могут рассматриваться как стационарные, например, сейсмические колебания. Воздействие ветра на сооружения может в течение длительного периода времени считаться стационарным случайным воздействием.

Стационарный случайный процесс является эргодическим, если для него осреднения по времени (математические ожидания) равны осреднениям по семейству функций (рисунок 12.9).

При практическом анализе стационарного случайного процесса реализацию случайной функции (стационарный случайный сигнал) принято рассматривать как суперпозицию гармонических колебаний в непрерывном интервале частот и использовать гармонический анализ для определения реакций сооружений при стационарных случайных воздействиях.

Ряды и интегралы Фурье

Периодическая функция $x(t)$ с нулевым средним значением и периодом T может быть описана рядом Фурье в виде

$$x(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(2\pi k n_1 t - \varphi_k) \quad (12.33)$$

Здесь $n_1 = 1/T$ – основная частота; Коэффициенты ряда

$$C_0 = 1/T \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt; \quad C_k = (A_k^2 + B_k^2)^{\frac{1}{2}}; \quad (12.33^a)$$

$$\varphi_k = \arctg(B_k / A_k) = \operatorname{tg}^{-1}(B_k / A_k); \quad (12.33^b)$$

$$A_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos 2\pi k n_1 t dt; \quad (12.33^b)$$

$$B_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin 2\pi k n_1 t dt \quad (11.33^b)$$

Выражение (12.33) называется “разложением $x(t)$ в ряд Фурье”.

Если функция $y(t)$ является непериодической, то ее можно рассматривать, как периодическую с бесконечным периодом. При этом $y(t)$ выражается через интеграл Фурье (в действительной форме):

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(n) \cos [2\pi n t - \varphi(n)] dn; \quad (12.34)$$

$$C(n) = [A^2(n) + B^2(n)]^{\frac{1}{2}}; \quad (12.34a)$$

$$\varphi(n) = \arctg [B(n) / A(n)]; \quad (12.34b)$$

$$A(n) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cos 2\pi n t dt; \quad (12.34b)$$

$$B(n) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \sin 2\pi nt \, dt \quad (12.34\Gamma)$$

Следует отметить, что $y(t)$ должна быть кусочно-дифференцируемой и отвечать условию сходимости в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)| \, dt \quad (12.35)$$

Из выражений (12.34 а-г) и соотношений $\sin\varphi = tg\varphi / \sqrt{1+tg^2\varphi}$; $\cos\varphi = 1 / \sqrt{1+tg^2\varphi}$ получим

$$C(n) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cos [2\pi nt - \varphi(n)] \, dt \quad (12.36)$$

Функции $y(t)$ и $C(n)$, которые соответствуют выражениям (12.34) и (12.36), называются *интегральными парными преобразованиями Фурье*.

При дифференцировании (12.34) получим

$$\dot{y}(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi n C(n) \sin [2\pi nt - \varphi(n)] \, dn \quad (12.37a)$$

$$y(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} 4\pi^2 n^2 C(n) \cos [2\pi nt - \varphi(n)] \, dn \quad (12.37б)$$

Равенство Парсеваля

Средний квадрат периодической функции $x(t)$ с периодом T записывается в виде

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) \, dt \quad (12.38)$$

Подставляя ряд Фурье (12.33) в (12.38), получим

$$\sigma_x^2 = \sum_{k=0}^{\infty} S_k \quad (12.39)$$

где $S_0 = C_0^2$ и $S_k = 1/2 C_k^2$ ($k = 1, 2, \dots$). Величина S_k является вкладом частоты kn_1 в среднее значение квадрата функции $x(t)$.

Перейдем к непериодической функции $y(t)$, для которой справедливо интегральное преобразование Фурье

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} y^2(t) \, dt &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \int_{-\infty}^{\infty} C(n) \cos [2\pi nt - \varphi(n)] \, dn \, dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} C(n) \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cos [2\pi nt - \varphi(n)] \, dt \, dn = 2 \int_0^{\infty} C^2(n) \, dn \quad (12.40) \end{aligned}$$

Формула (12.40) характеризует равенство Парсеваля для непериодической функции.

Спектральная плотность стационарного случайного сигнала

Для функций, описывающих стационарный сигнал $z(t)$, понятие спектральной плотности эквивалентно величине S_k . Рассмотрим стационарный случайный сигнал $z(t)$ с нулевым средним значением (рисунок 12.10). Для него условие сходимости интеграла Фурье

$$\int_{-\infty}^{\infty} |z(t)| dt \text{ не существует.}$$

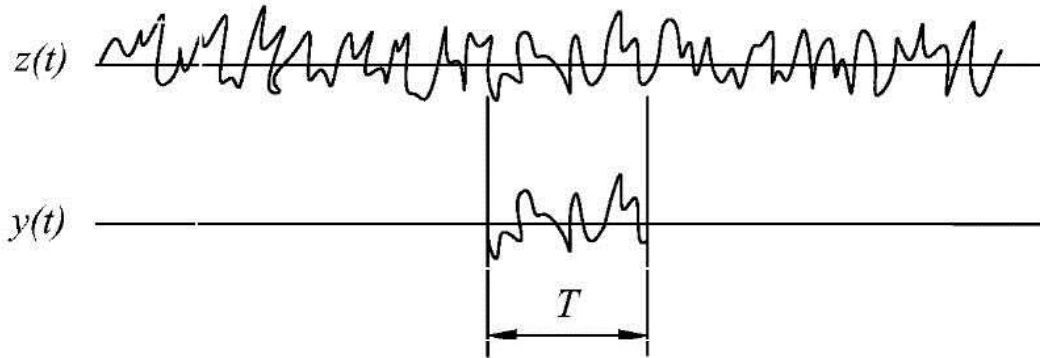


Рисунок 12.10 – Определение функции $y(t)$

Поэтому зададим вспомогательную непериодическую функцию $y(t)$, отвечающую условию

$$\begin{aligned} y(t) &= z(t) & (-T/2 < t < T/2). \\ y(t) &= 0 & \text{другие моменты времени.} \end{aligned} \quad (12.41a)$$

Из определения (12.41 а) следует $\lim_{T \rightarrow \infty} y(t) = z(t)$. (12.41б)

Такая непериодическая функция $y(t)$ удовлетворяет условию сходимости и для нее существует интеграл Фурье. Поэтому на основании зависимости (12.41 а) и условия (12.41 б) средний квадрат функции $y(t)$ равен

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} y^2(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{\infty} C^2(n) dn . \quad (12.42)$$

Соответственно средний квадрат функции $z(t)$ записывается в виде

$$\sigma_z^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \sigma_y^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{T} \right) \int_0^{\infty} C^2(n) dn . \quad (12.43)$$

Если обозначить

$$S_z(n) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{T} \right) C^2(n), \quad (12.44)$$

то выражение (12.43) можно привести к виду

$$\sigma_z^2 = \int_0^{\infty} S_z(n) dn. \quad (12.45)$$

Функция $S_z(n)$ называется спектральной плотностью стационарного случайного сигнала $z(t)$. На каждой частоте n ($0 < n < \infty$) она характеризует элементарный вклад $S_z(n)dn$ в среднее значение квадрата σ_z^2 и равно площади, ограниченной кривой спектральной плотности $S_z(n)$ (рисунок 12.11).

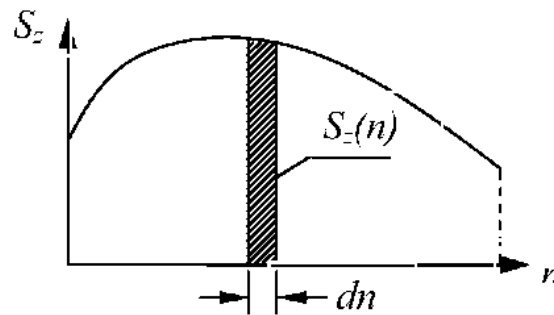


Рисунок 12.11 – Спектральная плотность стационарного случайного сигнала $z(t)$

При выборе интервала ($0 < n < \infty$) $S_z(n)$ называется односторонней спектральной плотностью функции $z(t)$, а при $-\infty < n < \infty$ получим двусторонний спектр.

Из соотношений (12.37 а, б) получим формулы для описания спектральных плотностей первой и второй производных случайного процесса.

$$S_{z'(n)} = 4\pi^2 n^2 S_z(n); \quad (12.46 \text{ а})$$

$$S_{z''(n)} = 16\pi^4 n^4 S_z(n). \quad (12.46 \text{ б})$$

Спектральная плотность и ковариация. Воздействие случайного сигнала на некоторую систему в одной и той же точке определяется тем, как его спектральная плотность зависит от характера взаимодействия отдельных “частей” сигнала в различные моменты времени. Сигнал как бы “догоняет” сам себя.

На основании зависимостей (11.27 а-г) можно записать

$$\begin{aligned}
(2/T)C^2(n) &= (2/T)[A^2(n) + B(n)^2] = (2/T)[A(n)A(n) + B(n)B(n)] = \\
&= (2/T) \left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t_1) \cos 2\pi n t_1 dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} y(t_2) \cos 2\pi n t_2 dt_2 + \int_{-\infty}^{\infty} y(t_1) \sin 2\pi n t_1 dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} y(t_2) \sin 2\pi n t_2 dt_2 \right] = \\
&= 2/T \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y(t_1) y(t_2) \cos 2\pi n (t_2 - t_1) dt_1 dt_2 . \quad (12.47)
\end{aligned}$$

Введем функцию $\tilde{R}(\tau) = 1/T \int_{-\infty}^{\infty} y(t_1) y(t_1 + \tau) dt_1$, где $\tau = t_2 - t_1$. (12.48)

С учетом (12.48) выражение (12.47) приводится к виду

$$(2/T)C^2(n) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{R}(\tau) \cos 2\pi n \tau d\tau . \quad (12.49)$$

На основании зависимостей (12.49), (12.41,б), (12.44), с учетом замсны функции вспомогательной функции $y(t)$ на непериодическую функцию $z(t)$, получим

$$S_z(n) = \int_{-\infty}^{\infty} 2R_z(\tau) \cos 2\pi n \tau d\tau , \quad (12.50)$$

где $R_z(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \int_{T/2}^{T/2 + \tau} z(t) z(t + \tau) dt$. (12.51)

Функция $R_z(\tau)$ называется *ковариацией* $z(t)$ и характеризует степень независимости значений переменной z для моментов времени t и $t + \tau$. Из определения ковариации (12.51) и условия стационарности следует, что

$$R_z(\tau) = R_z(-\tau) . \quad (12.52)$$

Выражение (12.52) показывает, что $R_z(\tau)$ является четной функцией τ .

Отсюда

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2R_z(\tau) \sin 2\pi n \tau d\tau = 0 . \quad (12.53)$$

Соотношения (12.50) и (12.36) показывают, что $S_z(n)$ и $2R_z(\tau)$ образуют парное преобразование Фурье, поэтому

$$R_z(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_z(n) \cos 2\pi n \tau dn , \quad (12.54)$$

Поскольку $S_z(n)$ - четная функция, то

$$R_z(n) = \int_0^{\infty} S_z(n) \cos 2\pi n \tau dn . \quad (12.55)$$

Используя (12.50) и (12.52), аналогично получим

$$S_z(n) = 4 \int_0^{\infty} R_z(\tau) \cos 2\pi n \tau d\tau . \quad (12.56)$$

Из определения ковариации (12.51) следует, что

$$R_z(0) = \sigma_z^2 . \quad (12.57)$$

Произведение $z(t)z(t + \tau)$ в (12.21) не всегда будет положительным. Поэтому

$$R_z(\tau) < \sigma_z^2 . \quad (12.58)$$

При больших значениях τ вследствие наличия положительных и отрицательных значений $z(t)z(t + \tau)$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_z(\tau) = 0 . \quad (12.59)$$

Безразмерная величина $R_z(\tau)/\sigma_z^2$ называется **корреляционной функцией** (рисунок 12.12). Она равна единице при $\tau=0$ и обращается в нуль при $\tau=\infty$.

Качественным показателем структуры случайного сигнала $z(t)$ называется величина

$$\bar{\tau} = \int_0^{\infty} \frac{R_z(t)}{\sigma_z^2} dt . \quad (12.60)$$

Другое название этой функции – ***временной масштаб***. Этот показатель имеет малые значения при быстром затухании $R_z(t)$ при

увеличении t и, наоборот, большие при малом затухании.

Для ветрового турбулентного потока, описываемого функцией $z(t)$ и имеющего среднюю скорость U , вводится понятие **интегрального продольного масштаба U** (характерная длина) $L_x = U\bar{\tau}$, которая характе-

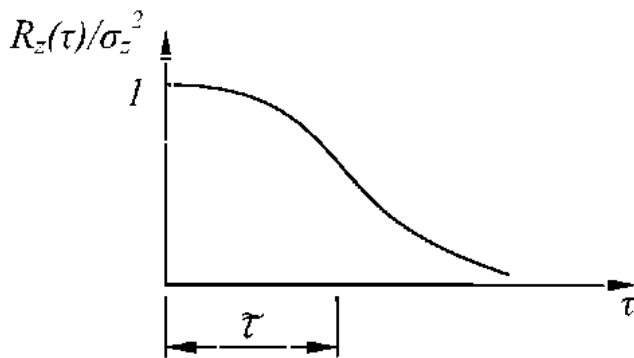


Рисунок 12.12 – Корреляционная функция

ризует средний размер турбулентных вихрей в направлении среднего течения. Аналогично вычисляются поперечный и вертикальный масштабы. На основании (12.60) и (12.56) получим

$$L_x = (1/4) \left(\frac{U}{\sigma_z^2} \right) S(0) . \quad (12.61)$$

Здесь σ_U – среднее квадратическое значение пульсаций продольной компоненты скорости; $S(\theta)$ - спектральная плоскость при $U=0$.

Взаимная ковариация, коспектр, квадратурный спектр, когерентность

Рассмотрим два случайных сигнала с нулевым средним значением. Взаимной ковариацией называется функция

$$R_{z_1 z_2}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \int_{-T/2}^{T/2} z_1(t) z_2(t + \tau) dt . \quad (12.62)$$

При этом из определения взаимной ковариации (12.62) и условия стационарности двух сигналов в общем случае следует

$$R_{z_1 z_2}(\tau) = R_{z_2 z_1}(-\tau) . \quad (12.63)$$

Однако в общем случае $R_{z_1 z_2}(\tau) \neq R_{z_1 z_2}(-\tau)$.

Из рисунка 12.13 следует, что если $z_2(\tau) \equiv z_1(\tau - \tau_0)$, то

$$R_{z_1 z_2}(\tau_0) = R_{z_1} (0) ; \quad (12.64)$$

$$R_{z_1 z_2}(-\tau_0) = R_{z_1}(2\tau_0) . \quad (12.65)$$

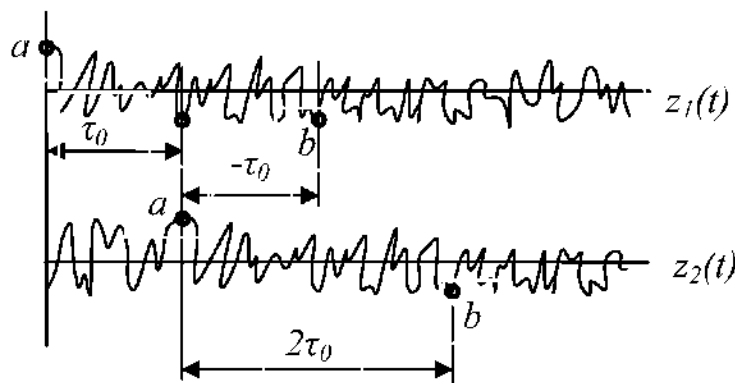


Рисунок 12.13 – Функции $z_1(t)$ и $z_2(t) = z_1(t - \tau_0)$

Коспектр и квадратичный спектр $z_1(\tau)$ и $z_2(\tau)$ записываются в виде

$$S_{z_1 z_2}^C(n) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{z_1 z_2}(\tau) \cos 2\pi n \tau d\tau , \quad (12.66)$$

$$S_{z_1 z_2}^Q(n) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{z_1 z_2}(\tau) \sin 2\pi n \tau d\tau \quad (12.67)$$

(сравните с условием 12.53).

Из (12.63) следует
$$S_{z_1 z_2}^C(n) = S_{z_2 z_1}^C(n), \quad (12.68 \text{ а})$$

$$S_{z_1 z_2}^Q(n) = -S_{z_2 z_1}^Q(n). \quad (12.68 \text{ б})$$

Когерентность – характеристика степени взаимодействия двух сигналов $z_1(t)$ и $z_2(t)$ описывается выражением

$$\text{Coh}_{z_1 z_2}(n) = \left\{ \frac{[S_{z_1 z_2}^C(n)]^2 + [S_{z_1 z_2}^Q(n)]^2}{S_{z_1}(n)S_{z_2}(n)} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (12.69)$$

12.6 Распределение вероятности максимальных значений нормального стационарного случайного сигнала

Рассмотрим нормальный случайный сигнал $z(t)$ с нулевым средним значением. Пусть $M(k)$ – ожидаемое число максимальных значений нормального стационарного случайного сигнала за единицу времени. Максимальные значения более чем в k раз превышают среднее квадратическое значение $z(t)$. В практических вычислениях используется выражение

$$M(k) = \nu \exp\left(-\frac{k^2}{2}\right), \quad (12.70)$$

$$\text{где } k > 3 \text{ и } \nu = \left\{ \frac{\int_0^\infty n^2 S_z(n) dn}{\int_0^\infty S_z(n) dn} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (12.71)$$

Здесь $S_z(n)$ – спектральная плотность $z(t)$.

Вероятность того, что редкое событие, когда максимальное значение, большее, чем $k\sigma_z$, не встретится за интервал времени T , записывается в виде

$$P(0, T) = e^{-M(k)T}. \quad (12.72)$$

Ожидаемое значение наибольшего максимума найдено Давенпортом:

$$\bar{k} = (2 \ln \nu T)^{\frac{1}{2}} + \frac{0,577}{(2 \ln \nu T)^{\frac{1}{2}}}. \quad (12.73)$$

Лекция 13

Основные положения расчета зданий и сооружений на ветровую нагрузку

Определение ветровых нагрузок на сооружение является проблемой, связанной с решением нескольких задач различного характера. Строительные конструкции, как правило, относятся к плохообтекаемым телам. При действии ветрового потока на сооружения действуют такие факторы, как скорость ветра, порывистость скоростного напора и аэродинамические характеристики здания или сооружения [44, 54, 38].

Определение параметров ветрового потока связано с проведением регулярных метеорологических и климатологических наблюдений. Несмотря на наличие в гидродинамике хорошо разработанной теоретической базы, определение характеристик, описывающих особенности обтекания зданий или сооружений ветровым потоком, связано с проведением экспериментальных аэродинамических исследований.

Другой стороной проблемы является динамическое взаимодействие конструкций и ветрового потока. Параметры, которые определяются в этой задаче, зависят от массы, жесткости и характеристик вязкого сопротивления элементов (рассеяния энергии).

13.1 Ветровые воздействия на сооружение

Давление ветра или сила лобового сопротивления тела, погруженного в поток $W(z, t)$, зависит от горизонтальной нормативной скорости ветра $V(z, t)$ и определяется по формуле

$$W(z, t) = (1/2) \cdot \rho V^2(z, t) B^2 C_x(z). \quad (13.1)$$

Переменное по времени давление ветра $W(z, t)$ на линейно протяженное сооружение на уровне z от поверхности определяется как сумма статической составляющей $W_{cm}(z)$ и пульсационной составляющей $W''(z, t)$, т.е.

$$W(z, t) = W_{cm}(z) + W''(z, t). \quad (13.2)$$

В формуле (13.2): ρ – плотность воздуха; $C_x(z)$ – безразмерный коэффициент лобового сопротивления, B – характерный размер со-

оружения. Все давления на поверхности сооружения сравнивают со средним динамическим давлением ветра $W_0 = (1/2) \cdot \rho V^2(z, t)$ (скоростным напором) на значительном удалении от сооружения (W_0). Таким образом,

$$C_x(z) = (W - W_0) / (0,5 \rho V^2(z, t)),$$

где V – среднее значение скорости ветра.

При решении инженерных задач можно считать, что турбулентные свойства ветрового потока по высоте (за исключением придошной области) постоянны, а средняя скорость ветра $V(z)$ направлена горизонтально (по направлению оси x).

Шероховатость местности влияет на скорость ветра до определенной высоты, называемой градиентным уровнем (рисунок 13.1). Влияние шероховатости на скорость ветра принято оценивать через параметр шероховатости z_0 . Параметр z_0 определяет величину, пропорциональную среднему размеру неровностей на подстилающей поверхности. Скорость ветра на высоте z_0 равна нулю. Параметру шероховатости соответствует коэффициент поверхностного трения k_0 (коэффициент лобового сопротивления) подстилающей поверхности, который определяется по формуле:

$$k_0 = K^2 / (\ln(10 / z_0)), \text{ где } K \approx 0,4 \text{ – постоянная Кармана.}$$

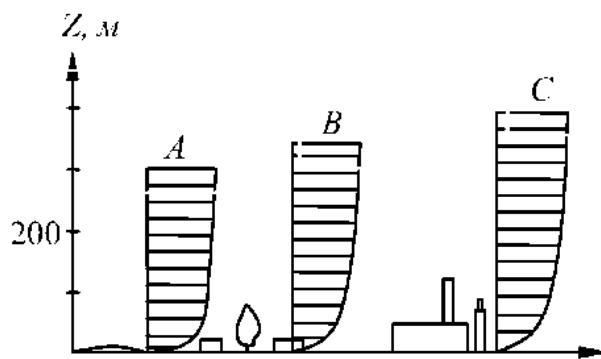


Рисунок 13.1 Влияние шероховатости подстилающей поверхности

На рисунке 13.1 индексы А, В, С – тип местности, причем:

А – открытые побережья, пустыни, степи, тундра;

В – городские территории, лесные массивы и другие местности, покрытые препятствиями высотой > 10 м;

С – городские районы с застройкой $h > 25$ м.

При указанных выше предпосылках скорость ветра $V(z, t)$ рассматривается как сумма средней и пульсационной компонент скорости

$$V(z, t) = V(z) + V'(z, t). \quad (13.3)$$

Подставим (13.3) в формулу (13.2) и получим

$$W(z,t) = 0.5 \cdot \rho \cdot \bar{V}^2(z) B^2 C_x(z) + \rho \cdot \bar{V}(z) \cdot V'(z,t) \cdot B^2 \cdot C_x(z) + 0.5 \cdot \rho \cdot (V'(z,t))^2 \cdot B^2 \cdot C_x^2(z). \quad (13.4)$$

Поскольку при сильных ветрах величина $V'(z,t)$ по отношению к $\bar{V}(z)$ мала ($V'(z,t)/\bar{V}(z) < 0.2$), то величиной $(V'(z,t))^2$ можно пренебречь и упростить выражение (13.4):

$$W(z,t) \cong W_c(z) + \rho V(z) V'(z,t) B^2 C_x(z). \quad (13.5)$$

Здесь $W_c(z) = 0.5 \rho \bar{V}^2(z) B^2 C_x(z)$ – установившееся значение силы лобового сопротивления. Обычно $C_x(z)$ принимается постоянной величиной. Выражение (13.5) с учетом упрощений можно записать в виде

$$W(z,t) = W_c(z) \cdot [1 + 2 \cdot V'(z,t) / \bar{V}(z)]. \quad (13.6)$$

Из выражения (13.6) выделим величину давления, соответствующую пульсационной части скорости $V'(z,t)$:

$$W'(z,t) = 2 W_c(z) \cdot [V'(z,t) / \bar{V}(z)]. \quad (13.7)$$

Для большинства сооружений, имеющих размеры меньше, чем масштаб турбулентности L , справедливо предположение, что скорость ветра полностью коррелирована по высоте сооружения (рисунок 13.1). Тогда скорость пульсации на уровне z записывается в виде произведения случайной функции времени $f(t)$ на функцию координат

$$V'(z,t) = f(t) \cdot \sigma_{V'(z)}, \quad (13.8)$$

где $\sigma_{V'(z)}$ – стандарт пульсации продольной компоненты скорости. Среднее значение функции координат и стандарт случайной функции времени равны: $f(t) = 0$; $\sigma_f^2 = 1$.

Возмущающая сила (см. формулу 13.7) на уровне z :

$$W'(z,t) = 2 W_c(z) \gamma_m(z) f(t). \quad (13.9)$$

В выражении (13.9) $\sigma_{W'(z)} = 2 W_c \gamma_m(z)$ – стандарт возмущающей нагрузки, $\gamma_m(z)$ – коэффициент турбулентности, зависящий от типа местности (А, В, С) и высоты z .

Нормативное значение пульсационной составляющей ветровой нагрузки на уровне z определяется на основании (13.9) как $W'_n(z) = W_c(z) \zeta(z)$, где коэффициент пульсации равен

$\zeta(z) = 2 \alpha \gamma_m(z)$, α – коэффициент обеспеченности. Согласно [2, 4], значения коэффициента пульсации:

$$\zeta_A(z) = 0,76 \cdot \left(\frac{z}{10}\right)^{-0,15}; \zeta_B(z) = 1,06 \cdot \left(\frac{z}{10}\right)^{-0,2}; \zeta_C(z) = 1,78 \cdot \left(\frac{z}{10}\right)^{-0,25}. \quad (13.10)$$

A, B, C – тип местности, причем A – открытые побережья, пустыни, степи, тундра; B – городские территории, лесные массивы и другие местности, покрытые препятствием > 10 м; C – городские районы с застройкой $h > 25$ м. Коэффициенты ζ подсчитываются по 10 – минутному осреднению.

Кроме общего расчета сооружения на действие усредненных ветровых нагрузок, часто требуется производить расчет элементов стен, покрытия, окон на максимальную местную нагрузку, вызванную мгновенными порывами ветра

$$W_{loc}(z) = W_{max}(z) \cdot B^2 \cdot C_{loc}. \quad (13.11)$$

В формуле (13.11): B^2 – площадь рассчитываемого элемента; C_{loc} – локальный аэродинамический коэффициент.

13.2 Случайные процессы и спектры пульсации компонент скорости ветра

Воздействие пульсационной составляющей ветрового давления на сооружение принято рассматривать как эргодический случайный процесс, являющийся комбинацией (суперпозицией) ряда гармоник с различными собственными частотами. Для моделирования случайных процессов крайне важно опираться на измерения, проведенные в приземном слое атмосферы. Эти измерения подтверждают, что в горизонтальном однородном ветровом потоке генерация энергии ветра примерно уравнивается ее диссипацией за счет вязкости. При этом скорость ветра, и, соответственно, реакция сооружения являются случайными функциями времени (сигналами).

Представление случайных функций основано на частотном анализе. Энергетический спектр $S(f)$ характеризует зависимость энергии системы от вклада каждой бесконечно малой частоты df . Такого рода фундаментальная эмпирическая зависимость для описания спектральной плотности пульсационной составляющей продольной компоненты скорости ветра на любой высоте получена А.

Давенпортом [67,68] в результате ряда измерений на высотных сооружениях

$$S_{V'}(f) = 4k_0 V_{10}^2 u^2 / [f(1+u^2)^{4/3}] , \quad (13.12)$$

где $u = L \cdot f / V_{10}$, V_{10} – среднечасовая скорость на высоте 10 м, $L=1200$ м – масштаб длины потока, k_0 – коэффициент лобового сопротивления подстилающей поверхности (для открытой местности $k_0 = 0,005$, для лесных массивов и окраин городов $k_0 = 0,1$, для городов $k_0 = 0,04-0,05$, для открытого моря $k_0 = 0,002$). Эта зависимость широко используется в отечественных и многих зарубежных нормах. Однако следует отметить, что выражение (13.11) не учитывает влияние высоты на спектр, которое подтверждается экспериментальными данными.

Несмотря на некоторые недостатки, спектр А. Давенпорта хорошо согласуется с экспериментальными данными в инерционном интервале, т.е. при больших значениях u . Поэтому он, как правило, используется в инженерных расчетах.

Для определения давления пульсационной составляющей необходимо учесть вероятностные свойства семейства случайных функций, а также аэродинамические особенности сооружения.

При вычислении величины давления мы не можем использовать среднюю скорость стационарного пульсационного процесса, так она равна нулю. Следовательно дисперсия равна среднему квадрату скорости пульсации

$$\sigma_{V'}^2 = [V'(t)^2 - 0] . \quad (13.13)$$

Здесь $V'(t)^2$ – средний квадрат случайной величины (скорости). Его можно использовать для последующего определения давления от пульсационной составляющей. Выражение (13.13) можно интерпретировать в виде

$$\sigma_{V'}^2 = V'(t)^2 = \int_0^{\infty} S_{V'}(f) df . \quad (13.14)$$

Таким образом, дисперсия $\sigma_{V'}^2$ равна площади, ограниченной кривой $S_{V'}(f)$ (рисунок 13.2). Поскольку $S_{V'}(f)$ задан в интервале $(0 < f < \infty)$, то $S_{V'}(f)$ называется односторонней спектральной функцией $V'(t)$.

Стандарт продольных пульсаций скорости ветра может быть получен путем подстановки выражения (13.11) в формулу (13.14) и последующего интегрирования:

$$\sigma_{V'}^2 = 6k_0 V_{10}^2 \quad (13.15)$$

При расчетах сооружений обычно используется безразмерный нормированный спектр Давенпорта (рисунок 13.2):

$$S_{V'}^n(f) = f \cdot S_{V'}(f) / \sigma_{V'}^2 = u^2 / [3f(1+u^2)^{4/3}] \quad (13.16)$$

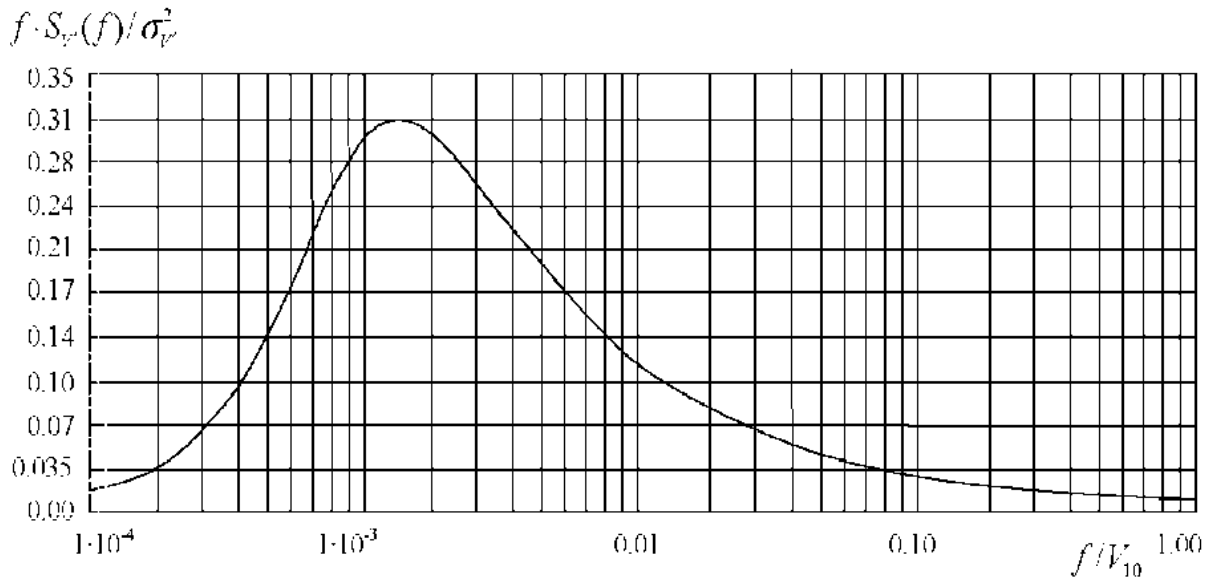


Рисунок 13.2 – Спектр пульсаций продольной компоненты скорости (спектр Давенпорта)

При действии вострового потока необходимо также учитывать статистические зависимости между точками, расположенными на некотором расстоянии друг от друга. Взаимодействие отдельных компонентов ветрового потока определяется на основе выражения, определяющего взаимный спектр пульсаций в точках k и j :

$$S_{V_k V_j}^n(f) = u^2 / [3f(1+u^2)^{4/3}] \cdot R_{V'}(u, \chi) \quad (13.17)$$

В формуле (13.17) коэффициент взаимной корреляции гармоник скоростей (с безразмерным периодом u) вычисляется по формуле

$$R_{V'}(u, \chi) = \exp[-u(20|x_k - x_j| + 8|y_k - y_j| + 8|z_k - z_j|)/L] \quad (13.18)$$

Поскольку взаимные спектральные плотности состояний k и j пропорциональны общей мощности соответствующих энергетических процессов, их можно использовать при определении взаимных спектральных плотностей нагрузок.

13.3 Динамический расчет конструкций на ветровую нагрузку

Динамический расчет конструкции на ветровую нагрузку обычно сводится к определению реакции системы в виде перемещений и усилий. Поскольку система считается линейной, обычно расчет выполняется на основе разделения неизвестных путем использования разложения в ряд по ортогональным функциям. В качестве ортогональных функций используются собственные формы.

Первым этапом динамического расчета является определение собственных частот и форм (см. главу 11).

Вторым этапом является решение несвязанных уравнений колебательного процесса. Здесь необходимо учитывать статистические свойства и особенности случайной ветровой нагрузки.

На третьем этапе определяется полная реакция системы на основе суперпозиции решений несвязанных уравнений.

Рассмотрим алгоритм получения и решения несвязанных уравнений. Введем обобщенные координаты $X_s(t)$, соответствующие полному разделению неизвестных в уравнениях колебаний линейной системы. Величины $X_s(t)$ определяют вклад каждой s -ой формы в общее перемещение в точке j , т.е:

$$y_j(z, t) = \sum_{s=1}^n X_s(t) \cdot \varphi_s(z_j) . \quad (13.19)$$

Здесь $\varphi_s(z_j)$ – ордината s -й собственной формы на уровне z_j .

Учитывая ортогональность собственных форм, имеем последовательность уравнений Лагранжа:

$$\ddot{X}_s(t) + 2\xi_s \omega_s \cdot \dot{X}_s(t) + \omega_s^2 \cdot X_s(t) = Q_s(t) / M_s^{ob} . \quad (13.20)$$

Здесь $Q_s(t) = \sum_{j=1}^r X_j(t) \cdot \varphi_s(z_j)$ – обобщенная сила для s -й формы;

$M_s^{ob} = \sum_{j=1}^r M_j \cdot \varphi_s^2(z_j)$ – обобщенная масса; r – общее количество точек.

Параметры затухания по всем формам представим в виде $\gamma = 2\xi_s = \delta / \pi$. Здесь δ – логарифмический декремент колебаний.

Средний квадрат перемещений j -й точки равен квадрату стандарта:

$$y_j^2(t) = \sigma_j^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n X_s(t) \cdot X_i(t) \cdot \varphi_s(z_j) \cdot \varphi_i(z_j) . \quad (13.21)$$

В формуле (13.21) ковариация обобщенных координат зависит от произведения передаточных (самосопряженных) функций, умноженных на взаимную спектральную плотность обобщенных сил $S_{Q_s Q_l}(\omega)$:

$$\overline{X_s(t)X_l(t)} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} \Phi_s(i\omega) \cdot \Phi_l(-i\omega) \cdot S_{Q_s Q_l}(\omega) d\omega . \quad (13.22)$$

Передаточные функции, соответствующие s -й и l -й собственным частотам, определяются из выражений:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_s(i\omega) &= \frac{1}{M_s(-\omega^2 + i \cdot \gamma \cdot \omega_s \cdot \omega + \omega_s^2)} \\ \Phi_l(-i\omega) &= \frac{1}{M_l(-\omega^2 - i \cdot \gamma \cdot \omega_l \cdot \omega + \omega_l^2)} \end{aligned} \right\} . \quad (13.23)$$

Передаточные функции и взаимную спектральную плотность обобщенных сил удобнее выражать через безразмерный период

$$\varepsilon = 1/u = V_0 / (1200 \cdot f) . \quad (13.24)$$

В этом случае произведение передаточных функций имеет вид

$$\Phi_s(i\omega) \cdot \Phi_l(-i\omega) = \frac{\varepsilon^4 [\varepsilon^4 - (\varepsilon_s^2 + \varepsilon_l^2 - \gamma \varepsilon_s \varepsilon_l) \varepsilon^2 + \varepsilon_s^2 \varepsilon_l^2]}{M_s M_l \omega_s^2 \omega_l^2 [\varepsilon^4 - 2(1 - \gamma^2 / 2) \varepsilon_s^2 \varepsilon^2 + \varepsilon_s^4] [\varepsilon^4 - 2(1 - \gamma^2 / 2) \varepsilon_l^2 \varepsilon^2 + \varepsilon_l^4]} . \quad (13.25)$$

Спектральная плотность обобщенных сил является функцией нормированного энергетического спектра пульсации продольной компоненты скорости (А. Давенпорта). С учетом зависимости (13.24) имеем

$$S_V^u(\varepsilon) = (1200 \cdot \varepsilon^{5/3}) / (3V_0 (1 + \varepsilon^2)^{4/3}) . \quad (13.26)$$

Выражение для взаимной спектральной плотности обобщенных сил записывается в виде

$$S_{Q_s Q_l}(\omega) = \sum_{j=1}^r \sum_{m=1}^r S_{j_m}(\omega) \cdot \varphi_s(z_j) \cdot \varphi_l(z_m) , \quad (13.27)$$

где $S_{j_m}(\omega)$ – взаимная спектральная плотность возмущающих сил $P_j(t)$ и $P_m(t)$.

Поскольку силы воздействия пропорциональны скоростям пульсаций, вместо спектра $S_{j_m}(\omega)$ можно использовать спектр пульсации продольной компоненты скорости, т.е.

$$S_{Q_s Q_l}(\omega) = \sum_{j=1}^r \sum_{m=1}^r P_H(z_j) \cdot P_H(z_m) \cdot \varphi_s(z_j) \cdot \varphi_l(z_m) \cdot S_V^u(\varepsilon, \chi) . \quad (13.28)$$

Здесь $P_H(z_j) = 2 \cdot P_H^{cm}(z_j) \cdot \zeta(z_j)$ – нормативное значение давления от пульсации на отметке z_j .

Нормированная взаимная спектральная плотность пульсации продольной компоненты скорости определяется из выражения (см. формулу 13.16):

$$S_{v'}^{ii}(\varepsilon, \chi) = S_{v'}^{ii}(\varepsilon, z_0) \cdot R_{v'}(\varepsilon, \chi) = \frac{1200 \cdot \varepsilon^{5/3}}{3 \cdot V_0 (1 + \varepsilon^2)^{4/3}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\chi_x}{60} + \frac{\chi_y}{150} + \frac{\chi_z}{150}\right)\right]. \quad (13.29)$$

В формуле (13.29) $R_{v'}(\varepsilon, \chi)$ – коэффициент взаимной корреляции скоростей, где χ_x, χ_y, χ_z – проекции расстояний между рассматриваемыми точками на оси координат. При этом ось y направлена вдоль течения ветра, а ось z – вертикально.

Ковариацию обобщенных координат (13.22) можно выразить на основе зависимости, приведенной в [44]:

$$X_s(t)X_l(t) = \frac{2}{3 M_s M_l \omega_s^2 \omega_l^2} \psi_{sl}^2. \quad (13.30)$$

Здесь

$$\psi_{sl}^2 = \frac{2}{3} \int_0^{\infty} \frac{J(\varepsilon) \cdot \varepsilon^{11/3} [\varepsilon^4 - (\varepsilon_s^2 + \varepsilon_l^2 - \gamma \cdot \varepsilon_s \cdot \varepsilon_l) \cdot \varepsilon^2 + \varepsilon_s^2 \cdot \varepsilon_l^2] \cdot d\varepsilon}{(1 + \varepsilon^2)^{4/3} [\varepsilon^4 - 2 \cdot (1 - 0,5\gamma^2) \cdot \varepsilon_s^2 \cdot \varepsilon^2 + \varepsilon_s^4] \cdot [\varepsilon^4 - 2 \cdot (1 - 0,5\gamma^2) \cdot \varepsilon_l^2 \cdot \varepsilon^2 + \varepsilon_l^4]}, \quad (13.31)$$

$$J(\varepsilon) = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r P_H(z_j) \cdot P_H(z_k) \cdot \alpha_s(z_j) \cdot \alpha_l(z_k) \cdot \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\chi_x}{60} + \frac{\chi_y}{150} + \frac{\chi_z}{150}\right)\right]. \quad (13.32)$$

В (13.32) $\chi_x = X_1 - X_2$; $\chi_y = Y_1 - Y_2$; $\chi_z = Z_1 - Z_2$ – расстояние между точками на поверхности сооружения.

Выражение (13.32) можно рассматривать как квадрат модуля аэродинамической передаточной функции здания. Эта функция является поправкой, позволяющей перейти от идеального случая тела, погруженного в турбулентный поток с полной пространственной корреляцией, к реальным телам.

Полученные зависимости позволяют определить реакцию в виде перемещения, полученного как корень квадратный из среднего квадрата перемещения (см. формулу (13.21)). Следует отметить, что основные зависимости в п.13.3 соответствуют методике, изложенной в замечательной книге [44].

13.4 Определение эквивалентной статической нагрузки при пульсации ветра

В основу отечественных норм [56] положен принцип замены динамического расчета статическим расчетом на эквивалентную нагрузку. Аналогичный подход был разработан в [44] и использован в настоящей работе. Эквивалентную нагрузку в j -й точке сооружения можно представить в виде произведения массы m_j на приведенное ускорение. В общем случае следует учитывать как вклады самих собственных форм, так и корреляционные взаимосвязи между собственными формами. Необходимо также учитывать корреляцию между воздействиями в различных точках сооружения. В данной главе излагается такого рода методика, полученная в [46] на основе известных спектральных статистических зависимостей для стационарного эргодического ветрового потока ([44], [54]). Согласно [46], эквивалентная нагрузка в j -й точке сооружения от пульсационной составляющей ветрового потока определяется по формуле

$$W_j = m_j \zeta(z_j) \sum_{s=1}^n \sum_{l=1}^n \eta_{js} \eta_{jl} \xi_s \xi_l v_{sl}^2 \quad (13.33)$$

В формуле (13.33) приведенные ускорения в j -й точке системы определяются из выражений:

$$\eta_{js} = \varphi_s(z_j) \frac{\sum_{j=1}^r P_j \cdot \varphi_s(z_j)}{\sum_{j=1}^r M_j \cdot \varphi_s^2(z_j)}; \quad \eta_{jl} = \varphi_l(z_j) \frac{\sum_{j=1}^r P_j \cdot \varphi_l(z_j)}{\sum_{j=1}^r M_j \cdot \varphi_l^2(z_j)} \quad (13.34)$$

Произведение коэффициентов динамичности можно получить из выражения (13.31), считая процесс полностью коррелированным, т.е. при $R_v(\chi, \omega) = 1$. Тогда

$$\xi_s \cdot \xi_l = \frac{2}{3} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{11/3} \cdot [\varepsilon^4 - (\varepsilon_s^2 + \varepsilon_l^2 - \gamma^2 \cdot \varepsilon_s \cdot \varepsilon_l) \cdot \varepsilon^2 + \varepsilon_s^2 \cdot \varepsilon_l^2] d\varepsilon}{(1 + \varepsilon^2)^{4/3} \cdot [\varepsilon^4 - 2 \cdot (1 - 0,5 \gamma^2) \cdot \varepsilon_s^2 \cdot \varepsilon^2 + \varepsilon_s^4] \cdot [\varepsilon^4 - 2 \cdot (1 - 0,5 \gamma^2) \cdot \varepsilon_l^2 \cdot \varepsilon^2 + \varepsilon_l^4]} \quad (13.35)$$

При определении ветровой нагрузки необходимо также в общем случае учитывать корреляционные коэффициенты, учитывающие взаимное влияние собственных форм и корреляцию пульсации продольной компоненты скорости в различных точках по фронту сооружения. Для этого вычислим по формуле (13.31) средний квад-

рат обобщенных координат $\overline{X_s(t) \cdot X_l(t)}$ с учетом корреляции пульсации в различных точках (ковариация), а также обобщенные координаты по s -й и l -й формам в предположении, что пульсация по высоте и ширине полностью коррелирована, т.е. $J(\varepsilon)=1$. Квадрат коэффициента корреляции в формуле (13.33) определяется из соотношения

$$v_{sl}^2 = \frac{X_s(t) \cdot X_l(t)}{X_s^*(t) \cdot X_l^*(t)}. \quad (13.36)$$

Здесь

$$X_s^*(t) = \left\{ \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{11/3} \cdot [\varepsilon^4 - \varepsilon_s^2(2 - \gamma^2) \cdot \varepsilon^2 + \varepsilon_s^4] d\varepsilon}{(1 + \varepsilon^2)^{4/3} \cdot [\varepsilon^4 - 2 \cdot (1 - 0,5\gamma^2) \cdot \varepsilon_s^2 \cdot \varepsilon^2 + \varepsilon_s^4]^2} \right\}^{0.5}, \quad (13.37a)$$

$$X_l^*(t) = \left\{ \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{11/3} \cdot [\varepsilon^4 - \varepsilon_l^2(2 - \gamma^2) \cdot \varepsilon^2 + \varepsilon_l^4] d\varepsilon}{(1 + \varepsilon^2)^{4/3} \cdot [\varepsilon^4 - 2 \cdot (1 - 0,5\gamma^2) \cdot \varepsilon_l^2 \cdot \varepsilon^2 + \varepsilon_l^4]^2} \right\}^{0.5}. \quad (13.37b)$$

Приведенный здесь алгоритм был разработан при участии автора в 1991 году [46]. Он учитывает взаимное влияние собственных форм колебаний и корреляцию пульсации по высоте и ширине фронта здания. Эти факторы играют большую роль при проектировании ответственных сооружений. Однако существующие нормы не позволяют оценить их влияние. Очевидно, что предложенная здесь методика может быть реализована в основном с применением ЭВМ. Следует отметить, что рекомендации, приведенные в СНиП 2.01.07-85*, вытекают из изложенных здесь положений, как частные случаи для определенного рода сооружений.

13.5 Расчет конструкций на ветровую нагрузку по СНиПу с использованием ЭВМ

Наиболее распространенными программными комплексами, применяемыми при расчете конструкций на статические и динамические воздействия, являются ВК Мираж, MicroFc, Лира, СКАД, СТАРК и другие. В них реализуется методика СНиП 2.01.07-85 с учетом нескольких форм колебаний. При этом расчетные сочетания также определяются по методике СНиП 2.01.07-85*, т.е.

$$X = X_{\text{стат}} + X_{\text{динам}} = X_{\text{стат}} + \sqrt{\sum_{j=1}^r X_{\text{с.формы}}^2}, \quad (13.38)$$

где r – количество учитываемых собственных форм. В ряде случаев для расчета сооружений, имеющих плотный спектр частот, нужно учитывать взаимное влияние собственных форм колебаний. В СНиП 2.01.07-85* это влияние не учитывается и коэффициенты динамичности и корреляций пульсаций даны по 1-й форме, а для остальных форм эти коэффициенты определяются упрощенно и завышают нагрузку.

В СНиП 2.01.07-85* также не приводятся данные по величине аэродинамических коэффициентов сопротивления для ряда специальных конструкций. Их определяют при обдувке макетов здания в аэродинамической трубе. Расчет по нормам не в полной мере отвечает действительной работе высотных башен и несимметричных высотных зданий на действие статической и пульсационной составляющей ветрового давления.

В СНиП 2.01.07-85* "Нагрузки и воздействия" нормирование пульсационной составляющей производится на основе вероятностной модели, в результате чего формула (13.3) представлена в виде

$$V(z, t) = \bar{V}(z) + \sigma_v \cdot V'(z, t), \quad (13.39)$$

где σ_v – стандарт (среднее квадратичное отклонение) пульсаций скорости, т.е. параметр, который характеризует рассеяние случайной величины $V'(z, t)$ и определяется по формуле

$$\sigma_v = \sqrt{M \cdot (x - a)^2}. \quad (13.40)$$

В выражении (13.40) a – центр распределения, т.е. математическое ожидание (среднее арифметическое) $V'_{cp}(z, t)$; $M(x - a)$ – математическое ожидание квадрата отклонения, т.е. $M[V'(z, t) - V'_{cp}(z, t)]^2$. Такое представление с учетом квазистационарного обтекания сооружения турбулентным потоком ветра (пренебрегаем квадратом пульсаций скорости) дает возможность представить давление ветра в виде

$$W(z, t) = W(z) \cdot [1 + \zeta(z) \cdot V'(z, t)]. \quad (13.41)$$

Здесь $\zeta(z) = \frac{\alpha \sigma_{V'}(z)}{V(z)}$ – коэффициент пульсации давления ветра

на высоте z , α – число стандартов, отсчитываемое от средней скорости ветра. Согласно [3,5], значения коэффициента пульсации равны:

$$\zeta_A(z) = 0.76 \cdot \left(\frac{z}{10}\right)^{-0.15}; \quad \zeta_B(z) = 1.06 \left(\frac{z}{10}\right)^{-0.20}; \quad \zeta_C(z) = 1.78 \left(\frac{z}{10}\right)^{0.25}. \quad (13.42)$$

Коэффициенты ζ подсчитываются в [56] по 10-минутному осреднению.

Определение нагрузки на сооружение требует учитывать взаимное воздействие пульсационных составляющих скоростей при обтекании сооружения. Для этого в [44] рекомендуется использовать коэффициент взаимной пространственной корреляции скоростей ветра $R(\bar{r}_1, \bar{r}_2, f)$ с частотой f между точками с координатами X_1, Y_1, Z_1 и X_2, Y_2, Z_2 :

$$R(\bar{r}_1, \bar{r}_2, f) = \exp \left[-U \left(\frac{1}{60} |x_1 - x_2| + \frac{1}{150} |y_1 - y_2| + \frac{1}{150} |z_1 - z_2| \right) \right]. \quad (13.43)$$

Здесь r_1, r_2 – радиусы-векторы, определяющие положение точек; $U = 1200 \cdot f / V_0$; $V_0 = V(z)$ – скорость ветра на отметке 10 м; ось x совпадает с направлением ветра.

Для строгого учета корреляции при определении нагрузок пужно расчетную реакцию сооружения умножить на коэффициент корреляции реакции, равный отношению реакции при $R(r_1, r_2, f)$, вычисленному по формуле (13.43), к реакции при $R(\bar{r}_1, \bar{r}_2, f) = 1$ (полностью коррелированные воздействия).

В нормах коэффициент корреляции реакции заменен на коэффициент пространственной корреляции нагрузки ν , который равен отношению стандартов главного вектора пульсационной составляющей. В [44] указывается формула

$$\nu = \frac{1}{F} \sqrt{2 \cdot \int_0^{\infty} \int_F \int_F \int_F S_{\nu}(f) \cdot R(r_1, r_2, f) df(r_1) df(r_2) df}. \quad (13.44)$$

Интегрирование в (13.44) ведется по поверхности сооружения площадью F , причем $S_{\nu}(f)$ – автоспектр (см.п.13.2).

На реакцию сооружения, кроме сил ветрового давления, влияют силы инерции, возникающие в процессе колебаний масс каркаса. Для того, чтобы свести динамическую задачу к квазистатической, их учитывают при помощи коэффициента динамичности ξ , на который умножается значение пульсационной составляющей $W'(z, t)$. Коэффициент ξ определяется в зависимости от параметра $\varepsilon = \sqrt{\gamma \cdot f \cdot W_0 / (940 \cdot f)}$, где γ – коэффициент надежности по нагрузке;

W_0 – нормативное значение ветрового давления. В связи с тем, что коэффициент динамичности, представляющий отношение динамической реакции к статической, не является единым для всех точек сооружения, вводится дополнительно коэффициент ψ , равный отношению интенсивности обобщенной силы к обобщенной массе соответствующих собственной форме колебаний:

$$\psi = \nu \cdot \frac{\int_F \bar{y}(r) \cdot \bar{W}(r) \cdot \zeta(z) \cdot dF(r)}{\int_{\Phi} y^2(r) m(r) dr} . \quad (13.45)$$

Интегрирование в знаменателе ведется по пространственной области Φ , занятой сооружением. Величина $\psi y(r)/\nu$ является приведенным ускорением. При разбивке сооружения на r участков и точечных масс [44], имеем:

$$\psi = \frac{\sum_{k=1}^R y_k \cdot W_{pk}}{\sum_{k=1}^R y_k^2 M_k} . \quad (13.46)$$

Здесь M_k , y_k – масса и горизонтальное перемещение (по собственной форме) центра k -го участка; W_{pk} – равнодействующая пульсационной ветровой нагрузки на k -м участке.

Для сооружений, у которых первая частота f больше предельной частоты f_e (для $T=0,25$ с), т.е. $f_1 > f_e$, нагрузка на уровне z определяется по формуле

$$W_p = W_m \cdot \zeta \cdot \nu \cdot \xi . \quad (13.47)$$

Здесь коэффициент динамичности $\xi > 1$. Для сооружений, которые можно рассчитывать как систему с одной степенью свободы при $f_1 < f_e$, нагрузка также определяется по формуле (13.44), но при этом $\xi = 1$. Для зданий, симметричных в плане, у которых $f_1 < f_1$, а также для всех сооружений, у которых $f_1 < f_1 < f_2$, причем f_2 – частота второй формы,

$$W(z) = m_z \cdot \xi \cdot \psi \cdot y . \quad (13.48)$$

В формуле (13.48) m_z – масса сооружения на уровне z , отнесенная к площади поверхности, к которой приложена нагрузка. Подставляя (13.46), (13.47) в (13.48), получим формулу для нагрузки на уровне z

$$W_p(z) = m_z \cdot \xi_z \cdot \nu_z \cdot \sum_{k=1}^R (y_k \cdot W_{pk} \cdot \xi_k \cdot \nu_k) / (y_k^2 M_k) . \quad (13.49)$$

Легко заметить, что из выражения (13.49) при одном участке суммирования можно получить формулы (13.47) и (13.48). Они являются упрощением общего подхода, основанного на суммировании реакций от вклада собственных форм колебаний.

13.6 Полная динамическая реакция на действие ветра как сумма квазистатической и резонансной составляющих

Можно считать, что пульсации скорости в турбулентном потоке, происходящем через некоторую точку, происходят вследствие суперпозиции вихрей, каждый из которых совершает периодическое движение со своей угловой частотой $\omega = 2\pi n$ (где n – частота) или волновым числом $K = \frac{2\pi}{\lambda}$ (где λ – длина волны). Соответственно полную кинетическую энергию турбулентного движения можно рассматривать как сумму вкладов каждого из вихрей потока. Функция $S_H^v(\omega)$ – выражающая зависимость этих вкладов энергии от волнового числа, носит определение энергетического спектра турбулентного движения или энергетического спектра пульсации компонент скорости ветра.

В основу современных отечественных норм [56] положен энергетический спектр пульсации скорости ветра Давенпорта (далее – спектр Давенпорта), который достаточно точно описывает пульсации ветровой нагрузки на наветренных поверхностях зданий и сооружений:

$$S_H^v(f) = \frac{1200 \cdot \varepsilon^{5/3}}{3 \cdot V_0 \cdot (1 + \varepsilon^2)^{4/3}}, \quad (13.50)$$

где V_0 – скорость ветра на стандартной высоте 10 (м);

$\varepsilon = \frac{V_0}{Lf}$ – безразмерный период;

$L = 1200$ (м) – интегральный масштаб турбулентности;

$f = \frac{\omega}{2\pi}$ – частота пульсации, Гц.

Графически спектр Давенпорта представлен на рисунке 13.2.

Как было показано в п.13.3 реакцию системы можно получить через спектр пульсации скорости ветра (спектра Давенпорта) с помощью двух передаточных функций. Первая аэродинамическая передаточная функция позволяет перейти от спектра Давенпорта к спектру нагрузки, действующей на сооружение. С помощью второй механической передаточной функции системы можно перейти от спектра воздействия (нагрузки) к спектру реакции сооружения на

пульсационную ветровую нагрузку. При этом задача из динамической сводится к задаче квазистатической на эквивалентную пульсационную нагрузку. Методика расчета на ветровую динамику была разработана М.Ф. Барштейном и в полной мере представлена в работе [44]. Дальнейшее развитие данной методики отражено в работах [40, 46].

Спектр реакции сооружения на воздействие случайного процесса пульсаций имеет характерный вид представленный на рисунке 13.3:

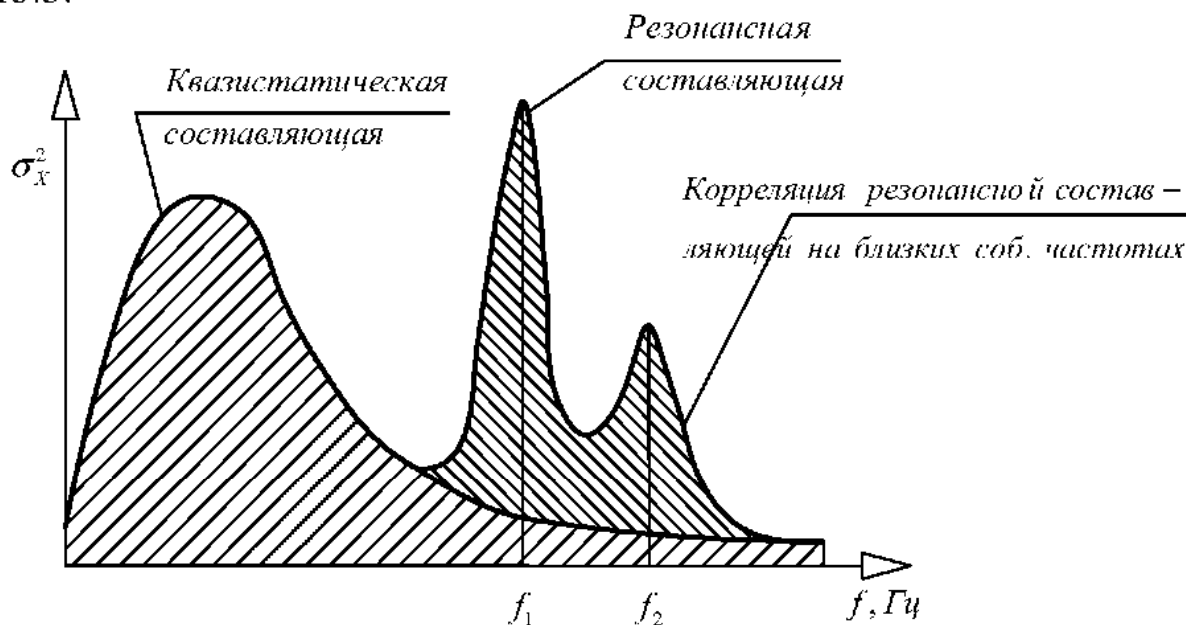


Рисунок 13.3 – Спектр реакции сооружения

Реакцию системы можно представить в виде суммы квазистатической и динамической составляющих. Квазистатическая часть соответствует реакции безмассовой системы и зависит от структуры потока. Динамическая часть включает силы инерции и соответствует реакции на частотах ветра близких к частотам собственным колебаниям сооружения (f_1 и f_2 на рисунке.13.3).

Как показано в работе [40] такое разделение реакции бывает необходимо при оценке выносливости материала и в случае определения предельной частоты собственных колебаний f_{lim} , дающей более или менее весомый вклад в общую реакцию сооружения.

Средний квадрат реакции системы можно представить в виде:

$$\sigma_x^2 = \int_0^{\infty} S_Q(f) \cdot |H_T(f)|^2 df, \quad (13.51)$$

где

$$H_l(f)^2 = \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{f}{f_l}\right)^2\right]^2 + \left[2 \cdot \zeta_l \left(\frac{f}{f_l}\right)\right]^2} \quad (13.52)$$

- функция аналогичная передаточной функции системы. По своему смыслу соответствует квадрату коэффициента динамичности на каждой f частоте возмущения для l -ой собственной форме колебаний.

$S_Q(f)$ – нормированная спектральная плотность возмущающих сил, определенная в данном случае в положительной области.

Интеграл в формуле (13.51) можно записать как сумму трех составляющих:

$$\sigma_x^2 = \sigma_{x1}^2 + \sigma_{x2}^2 + \sigma_{x3}^2, \quad (13.53)$$

где
$$\sigma_{x1}^2 = \int_0^{\beta-\Delta l} S_Q(f) \cdot H(f)^2 df \quad (13.54a)$$

- часть спектра до резонансного пика (рисунок 13.4 а);

$$\sigma_{x2}^2 = \int_{\beta-\Delta l}^{\beta+\Delta l} S_Q(f) \cdot |H(f)|^2 df \quad (13.54б)$$

- часть спектра в резонансном пике (рисунок 13.4 б);

$$\sigma_{x3}^2 = \int_{\beta+\Delta l}^{\infty} S_Q(f) \cdot |H(f)|^2 df \quad (13.54в)$$

- часть спектра после резонансного пика (рисунок 13.4 б);

Величина $H_l(f)^2$ (13.52), показанная на рисунке 13.4б, является аналитической функцией, поэтому интеграл этой величины (от 0 до ∞) по f может быть найден путем интегрирования в комплексной области или из таблиц интегралов.

Реакция системы в пределах резонансного пика после интегрирования равна:

$$\sigma_{x2}^2 \approx \frac{\pi \cdot f_l}{4 \cdot \zeta_l} S_Q(f_l), \quad (13.55)$$

где f_l и ζ_l – соответственно частота собственных колебаний и коэффициент демпфирования системы по l -й собственной форме колебаний.

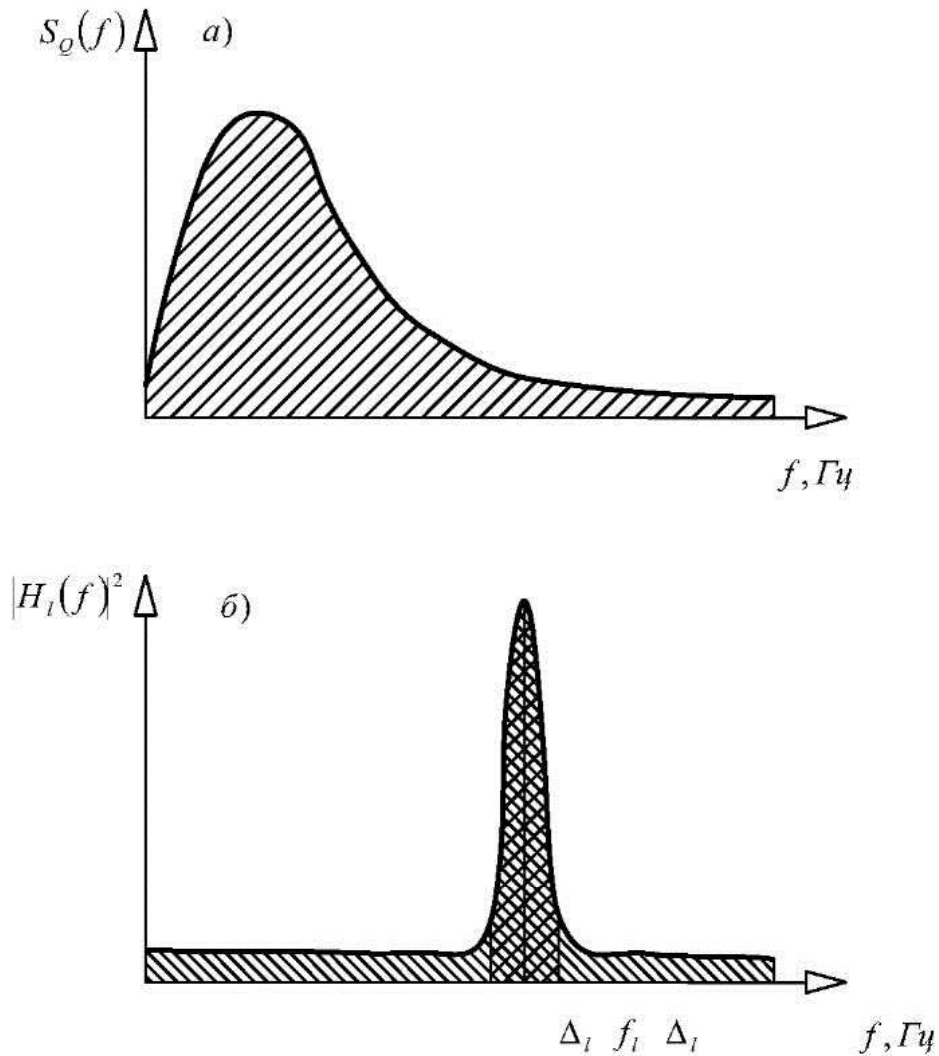


Рисунок 13.4 – квазистатическая и резонансная части спектра;
 а – квазистатическая часть спектра;
 б – квадрат модуля передаточной функции сооружения

Для участка спектра реакции $0 < f < f_l - \Delta_l$, $|H(f)|^2 \approx 1$; а σ_{X3}^2 – пренебрежимо мала.

Следовательно, реакция системы на пульсацию ветра:

$$\int_0^{\infty} S_{\varrho}(f) \cdot |H(f)|^2 df = \int_0^{\infty} S_{\varrho}(f) df + \frac{\pi \cdot f_l}{4 \cdot \zeta_l} S_{\varrho}(f_l). \quad (13.56)$$

Первое слагаемое (13.56) соответствует квазистатической, а второе динамической части спектра реакции.

Одним из важнейших коэффициентов, характеризующим реакцию сооружения на пульсационное воздействие ветра, выступает коэффициент динамичности сооружения по каждой l -й собственной форме колебаний:

$$\xi_l^2 = \omega_l^4 \cdot M_l^2 \cdot \int_0^\infty \Phi_l^2(if) \cdot S_\varrho(f) df - \int_0^\infty S_\varrho(f) \cdot H(f)^2 dn, \quad (13.57)$$

или как сумма квазистатической и динамической составляющих:

$$\xi_l^2 = \int_0^\infty S_\varrho(f) d\omega + \frac{\pi \cdot f_l}{4 \cdot \zeta_l} S_\varrho(f_l). \quad (13.58)$$

Лекция 14

Основные направления в методике расчета сооружений и оборудования на сейсмостойкость

При проектировании сооружений требуется обеспечить не только их сейсмостойкость, но и безаварийную работу различного оборудования (технологического, систем управления и защиты контрольно-измерительных приборов и т.д.). Сооружения и оборудование должны быть запроектированы так, чтобы выдержать сейсмическое воздействие заданной интенсивности при полной работоспособности без снижения безопасности.

В качестве меры безопасности сооружения в расчетах принимается наиболее сильное землетрясение, которое возможно для площадки строительства, при этом гарантируется безопасная остановка оборудования и поддержание его в остановленном состоянии [7], [58].

14.1 Основные характеристики землетрясений

Землетрясение представляет весьма сложное, слабоизученное стихийное явление. Существуют различные гипотезы об условиях возникновения и механизме землетрясений. По теории "тектоники плит" (дрейфа континентов) причиной возникновения землетрясения является движение со скоростью от 1,5 до 10 мм в год гигантских плит, образующих оболочку Земли, с расположенными на них материками под действием конвекционных потоков, возникающих на больших глубинах от поверхности в условиях высоких температур и давлений. При этом в соответствующих участках (блоках) земной коры возникают дополнительные напряжения и деформации. После того как по наиболее слабым участкам (сейсмическим швам) они достигают критических значений, происходит разрушение пород, разрядка напряжения и возникают остаточные смещения различных типов (сдвига, надвига – сдвига, сброса и др.).

Основная часть накопленной в очаге энергии затрачивается на необратимые (пластические) деформации, дробление и нагревание пород и лишь небольшая часть (доли процента) расходуется в виде упругих объемных и поверхностных сейсмических волн, приводя-

щих к колебаниям различного характера и интенсивности [24] по поверхности земли. В зависимости от глубины очага различаются землетрясения: неглубокие (≤ 60 км), промежуточные (60-300 км) и глубокие (> 300 км) [3].

Для классификации землетрясений и оценки воздействия обычно используются [4] следующие характеристики:

1) макросейсмическая балльность j_0 (в баллах), связанная с сотрясаемостью поверхности грунтов в эпицентральной зоне или вблизи сооружения;

2) энергия E (в эргах или джоулях) или энергетический класс $k = Ig E$ (Есть предположение, что максимальное количество энергии, высвобождаемой при одном землетрясении $\approx 5 \cdot 10^{25}$ эрг, что равно 0,001 общей тепловой энергии, выделяемой землей на ее поверхность за год);

3) магнитуда M (т.е. землетрясение с излучением энергии $\approx 10^{12}$ эрг);

4) геометрические характеристики (длина, ширина, глубина разрыва, относительные смещения краев), а также статические временные характеристики (повторяемость землетрясений, степень риска и т.д.).

Так, например, в районе Билибинской АЭС, относящейся к Арктико-Атлантическому поясу, происходят землетрясения с магнитудой $5,5 \leq m \leq 6,5$, силой 5-6 баллов.

Для классификации землетрясений в настоящее время применяются шкалы макросейсмической балльности, которые характеризуются смещениями, скоростями и ускорениями колебаний грунтов [50]. Сейсмические станции записывают движение грунта в трех направлениях: двух горизонтальных С-Ю, В-З и вертикальном. Смещение грунтов регистрируется сейсмографами, скорости – велосиграфами, а ускорения почвы – акселерографами. Акселерограф устроен так, что масса прикрепляется к корпусу прибора жесткими связями, благодаря которым период собственных колебаний этой системы значительно меньше периодов колебаний, подлежащих измерению. При землетрясении масса вместе с корпусом прибора перемещается практически так же, как грунт, и в массе возникают силы инерции, которые вызывают в связях деформации, пропорциональные силам инерции, т.е. ускорениям грунта.

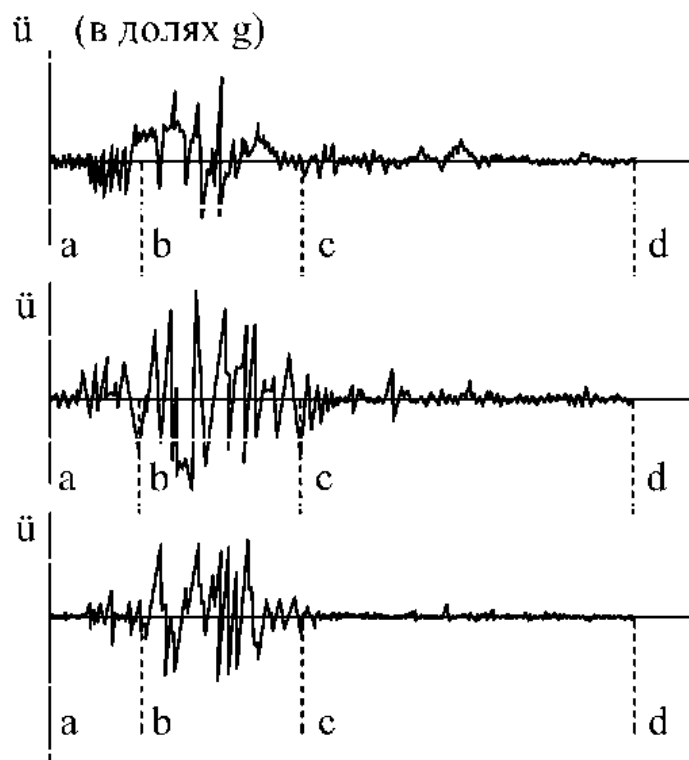


Рисунок 14.1 – Акселерограмма Helena

На рисунке 14.1 в качестве иллюстрации приведены акселерограммы землетрясений 8 баллов с магнитудой $M=7$, записанные в трех направлениях.

Отметим особенности, присущие сейсмическим воздействиям.

1. Колебательный процесс поверхности Земли является нестационарным с переменной амплитудой и периодом.

2. Регистрируемый процесс колебаний содержит три основные фазы:

а) начальная фаза (участок a-b) – начальный отрезок записи, в котором обнаруживаются небольшие амплитуды с высокой частотой колебаний;

б) основная фаза (участок b-c) – наиболее интенсивный по амплитудам колебаний. Внутри земной коры проходят два вида волн: первичные, продольные волны (волны растяжения-сжатия) и вторичные, поперечные (волны сдвига). Все эти волны возникают одновременно при высвобождении энергии в гипоцентре землетрясений, но скорость распространения продольных волн больше, они раньше достигают пункта наблюдений на земной поверхности и вызывают начальную фазу колебания. Последующее появление попе-

речных и поверхностных волн характеризует основную фазу. Периоды колебаний на этом участке почти такие же, как в начальной фазе;

в) конечная фаза (участок записи с-d) – характеризуется постепенным, хотя и нерегулярным уменьшением амплитуды колебаний. Этот участок отличается от предыдущих более длинными периодами колебаний.

3. Горизонтальные составляющие ускорений соизмеримы между собой и обычно не зависят от угла регистрирующего прибора относительно эпицентра.

4. Продолжительность колебательного процесса грунта.

5. Величины смещения грунта при сейсмических воздействиях в зависимости от интенсивности землетрясения и грунтовых условий могут достигать 100 мм. Для скальных грунтов, характерных для Билибинской АЭС, смещение в 15 раз меньше, чем у рыхлых, при той же интенсивности землетрясения [52].

6. Наиболее характерные периоды сейсмического воздействия располагаются в диапазоне 0,1-1,5 с. В этих же пределах находятся периоды колебаний большинства проектируемых в сейсмических районах сооружений, поэтому для них важны эти характеристики.

7. Наибольшие ускорения грунта при землетрясениях обычно находятся в диапазоне короткого периода спектра от 0,1 до 0,5 с. При этом ускорения грунта могут иметь значения до 0,4g. В таблице 14.1 приведены параметры акселерограмм, регистрация которых возможна на площадке Билибинской АЭС от вероятных сейсмических воздействий; для Ташкентского землетрясения характерны ускорения в пределах 0,06g – 0,153g ; землетрясение Элина, США – 0,07g; Броули, США от 0,101g до 0,231g.

8. Различным грунтам соответствуют преобладавшие периоды колебаний T_{max} , характерные для данных грунтовых условий.

14.2 Краткая история развития теории расчета

Возникающие при землетрясении перемещения грунта носят хаотический характер. Сложность явления, с одной стороны, его малая продолжительность (исчисляемая секундами) и сравнительно редкая повторяемость – с другой, крайне затрудняли исследование вопроса и создание обоснованной теории расчета сооружений на

сейсмические воздействия. Поэтому расчет зданий и сооружений на сейсмические воздействия до недавнего времени основывался на так называемой "статической теории", предложенной японским ученым Ф. Омори.

Таблица 14.1 Аналоговые записи (акселерограммы), регистрация которых возможна на площадке Билибинской АЭС

Параметры аналоговых записей ускорений и землетрясений, при которых они зарегистрированы						
Пункт и характеристики землетрясений	Координаты	α_{\max} g	T_{\max} , с	τ , с	Δt , с	Грунт
Ташкент, 4.07.1966. M=4; h=3 км; Δ =6км; J= 6-7 баллов	X Y	99,24* 150,55 59,78	0,05 0,16 0,16	2,5 2,6 3,0	0,009 0,009 0,017	Рыхлые
Броули, 25.01. 1975, M=4; h=7 км; Δ =6км; J= -	Г1 Г2 В	0,231 0,250 0,101	0,13 0,11 0,05	2,6 2,6 4,2	0,056 0,056 0,056	Средне Грунтовые условия
Элипа, США 31.10.1935, M=6; Δ =7 км; J= VIII баллов	Г-50 В	0,13 0,07	0,5 0,16	6,6 10,3	0,03 0,03	Скала
США, 13.04.1949 M=7,1; h=7,1 км; Δ =10-12 км; J= 16 баллов		70,0* 66,0			0,02 0,02	Рыхлые

•) Величины максимальных пиковых ускорений приведены в $\text{см}/\text{с}^2$. Аномально высокие значения максимальных пиковых ускорений на записях N 2 и 4 обусловлены отсутствием инструментальных записей на площадке АЭС.

Согласно этой теории, сооружения рассматривались как абсолютно жесткие тела, которые при землетрясениях перемещаются

вместе с почвой. Кроме того, предполагалось, что здания не имеют вращательных перемещений. Таким образом, ускорения, возникающие в сооружениях, должны быть такими же, что и его основания. Следовательно, силы инерции, возникающие в любом элементе массы конструкции будут равны $S = \ddot{y}_0 m$, где \ddot{y}_0 – ускорение основания сооружения-грунта, в котором оно заделано. Если ввести понятие коэффициента сейсмичности $K_c = \ddot{y}_0 / g$, то с учетом Q – веса здания имеем:

$$S = \ddot{y}_0 m = \ddot{y}_0 Q / g = K_c Q . \quad (14.1)$$

Здесь $K_c = \ddot{y}_0 / g$ - характеризует интенсивность землетрясения, зависит от сейсмичности района, может иметь значение 0,1-0,025.

Для скальных грунтов возможен ввод коэффициента масштабирования по оси амплитуд $k=0,5$ по отношению к записям, зарегистрированным на рыхлых и средних грунтах.

Сделанная Омори оценка, в лучшем случае, могла быть использована для определения нижних пределов K_c , так как элементы сооружения в действительности могут иметь ускорения существенно больше, чем ускорения грунта.

Несовершенство этого метода определения сейсмических сил, приводившего в ряде случаев к тяжелым последствиям, вызвало необходимость его пересмотра. В нормах, действующих в СССР до 1957 года (ПСП-101-51), это осуществлялось путем введения в формулу (14.1) дополнительного множителя α [52], т.е. $S = \alpha K_c Q$.

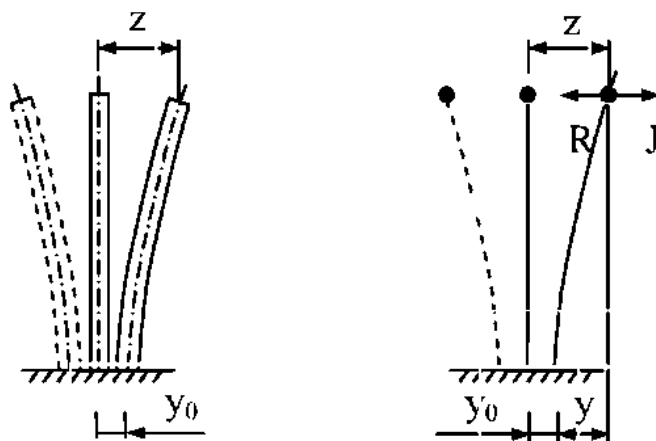


Рисунок 14.2 – Колебания системы с одной степенью свободы

В 1920 году другим японским ученым Мононобе было предложено определять сейсмические нагрузки с учетом деформируемости сооружения.

Сооружение рассматривалось как консервативная линейно-упругая система с одной степенью свободы, заделанная в грунт, колебания которой при землетрясении следуют гармоническому закону (рисунок 14.2).

Если обозначить y_0 – смещение основания (грунта) при землетрясении, y – смещение массы m относительно основания, то $z = y_0 + y$ является абсолютным смещением массы.

Мононобе предлагал определять сейсмическую силу $S = m\ddot{z}$, направленную горизонтально и приложенную к точке системы, где расположена масса m . Применяя принцип Даламбера, обозначая силу инерции $J = -S = -m\ddot{z}$, а восстанавливающую силу $R = -r \cdot y$ (r – коэффициент жесткости или упругая реакция стержня по направлению движения массы от единичного перемещения), имеем:

$$R + J = 0, \quad (14.2)$$

или $m\ddot{z} = -ry$, отсюда

$$m(\ddot{y}_0 + \ddot{y}) = -ry. \quad (14.3)$$

Дифференциальное уравнение колебаний системы записывается в виде

$$\ddot{y} + \omega^2 y = -\ddot{y}_0, \quad (14.4)$$

где $\omega^2 = r/m$ – круговая частота собственных колебаний системы. Величина сейсмической нагрузки $S(t) = m\ddot{z} = -ry = -m\omega^2 y$.

Мононобе принимал $\ddot{y}_0(t) = \ddot{y}_{0\max} \sin \theta t$, где θ – частота сейсмического воздействия. Поэтому (14.4) приобретает вид

$$\ddot{y} + \omega^2 y = -\ddot{y}_{0\max} \sin \theta t. \quad (14.5)$$

Решение (14.5) при нулевых начальных условиях

$$y(t) = -\frac{\ddot{y}_{0\max} (\sin \theta t - \frac{\theta}{\omega} \sin \omega t) \theta}{(\omega^2 - \theta^2)}. \quad (14.6)$$

Первый член формулы (14.6) представляет вынужденные колебания, амплитуда которых равна

$$y^* = \frac{\ddot{y}_{0\max}}{(\omega^2 - \theta^2)} = \frac{\ddot{y}_{\max}}{\omega^2 (1 - \theta^2 / \omega^2)}.$$

Максимальное значение сейсмической силы:

$$S_{\max} = m\omega^2 y^* = \frac{m\ddot{y}_{0\max}}{|1 - \theta^2 / \omega^2|} = \mu_d \frac{\ddot{y}_{0\max}}{g} mg = \mu_d K_0 Q. \quad (14.7)$$

Здесь коэффициент динамичности μ_d определяется из зависимости

$$\mu_d = 1 / |1 - \theta^2 / \omega^2|. \quad (14.8)$$

Следует отметить прогрессивное значение теории Мопопобе, впервые указавшей на роль динамических характеристик сооружения в формировании сейсмических нагрузок. Но эта теория имела и ряд недостатков. Исследования землетрясений приводят к выводу, что наиболее сильные разрушения происходят в начальный момент, когда свободные колебания сооружений, вызванные первыми толчками, еще не затухли. Мопопобе не учел, что, суммируясь с вынужденными, эти колебания усиливают сейсмические воздействия.

Вторым недостатком теории Мопопобе было игнорирование затухания колебаний в сооружении и слишком упрощенная схема принятого им синусоидального закона сейсмических движений основания. Теория Мопопобе (так же, как и теория Омори) не дает ответа на вопрос о характере распределения сейсмической нагрузки по высоте сооружения, о влиянии на их величины высших форм колебаний.

Первое конкретное предложение по переходу на динамический метод расчета в СССР с учетом начальной стадии землетрясения было внесено К.С. Заврисвым [16,17]. Им было предложено рассматривать сейсмические перемещения почвы как гармонические незатухающие колебания в косинусоидальной форме, $y_0 = \alpha_0 \cos \omega t$, что давало возможность отразить внезапный характер начала сейсмического воздействия (где α_0 и θ - амплитуда и угловая частота колебания грунта). При этом ускорение $\ddot{y}_0(t) = -\alpha_0 \theta^2 \cos \theta t = -\ddot{y}_{0\max} \cos \theta t$.

Уравнение колебаний без учета затухания:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = -\ddot{y}_{0\max} \cos \theta t. \quad (14.9)$$

Решение (14.9) выглядело так:

$$y = \frac{\alpha_0 \omega^2}{\omega^2 - \theta^2} (\cos \omega t - \cos \theta t).$$

Наибольшее выражение в скобках равно ± 2 , следовательно, амплитуда колебаний будет равна:

$$y_{\max} = \frac{2\alpha_0}{1 - (\theta/\omega)^2}, \quad (14.10)$$

$$\mu_d = \frac{2}{1 - (\theta/\omega)^2}. \quad (14.11)$$

Сравнивая (14.7), (14.8) с (14.10), (14.11), убеждаемся, что учет свободных колебаний приводит к удвоению сейсмического эффекта.

В тот период предложение К.С.Заврисва было прогрессивным, но встретило серьезные возражения по вопросу начального закона развития колебаний. Более успешными оказались исследования, проводившиеся в США (М.А. Био, Г.В. Хаузнер, Р.Р. Мартель и Д.Л. Альфорд).

Экспериментальных анализов землетрясений, происшедших в США, было проведено очень много и их результаты легли в основу

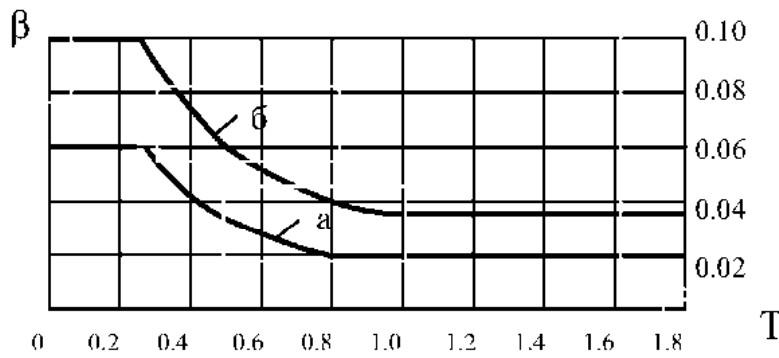


Рисунок 14.3 – График Калифорнийского кода

стандартного графика, принятого по проекту Калифорнийского кода (рисунок 14.3). Этот график представляет собой некоторую усредненную экспериментально полученную функциональную зависи-

мость между средними максимальными ускорениями в системе с одной степенью и периодом ее собственных колебаний при перемещении основания по закону, отвечающему набору реальных землетрясений.

Пользуясь этим графиком, можно представить максимальную величину сейсмической силы в виде:

$$S = m \ddot{z}_{\max}(T) = c(T)Q. \quad (14.12)$$

По известному периоду свободных колебаний T сооружения можно определить и величину сейсмической силы на высоте h от основания:

$$S = \frac{h_k Q_k^n c(T) \sum_{k=1}^n Q_k}{\sum_{k=1}^n h_k Q_k}, \quad (14.13)$$

где Q_k – вес на расстоянии h_k от подошвы сооружения; ΣQ_i – вес всего сооружения.

К недостаткам этого метода следует отнести условность формулы (14.13), которая очень упрощает представление о характере деформаций сооружения при колебаниях, в результате чего все сооружения, как гибкие, так и жесткие, при расчете получают одинаковое распределение интенсивности сейсмических сил по высоте, что в некоторых случаях может привести к ошибкам, особенно в системах, у которых высшие фермы колебаний дают большие дополнительные сейсмические силы.

Развитие метода, предложенного М.А. Био, нашло отражение в работах А.Г. Назарова [30]. Большую роль в развитии динамического метода расчета сейсмических сил сыграли работы И.Л. Корчинского [52].

На основе анализа сейсмограмм некоторых слабых землетрясений, происшедших в нашей стране, И.Л. Корчинский предложил записывать колебания грунта в виде суммы затухающих синусоид

$$y_0(t) = \sum_{i=1}^n Q_{0i} e^{-\varepsilon_{0i} t} \sin(\theta_1 t + \gamma_1), \quad (14.14)$$

где y_0 – перемещение основания; α_{0i} – начальная амплитуда соответствующей слагаемой ряда; ε_{0i} – коэффициент затухания грунта; ω_1 – частота соответствующей слагаемой ряда; γ_1 – угол, определяющий момент вступления соответствующей слагаемой ряда.

Однако в дальнейших выводах он учитывал только одно слагаемое этой суммы, т.е.

$$y_0(t) = \alpha_0 e^{-\varepsilon_0 t} \sin \theta t \quad . \quad (14.15)$$

Величина сейсмической силы в этой случае

$$S = k_c Q \beta, \text{ где } k_c = \alpha_0 \theta^2 / g \quad . \quad (14.16)$$

Следовательно, реакция системы, которая уравнивается силами инерции, возникающими при колебаниях, равна статическому действию горизонтальной силы, умноженной на коэффициент динамичности β . Для определения коэффициента β И.Л. Корчинский анализировал системы с одной степенью свободы с учетом (14.16) при разных значениях угловой частоты θ . Таким образом, он получил график коэффициента динамичности β в зависимости от P/θ , где P – собственная частота (рисунок 14.4), причем логарифмический декремент колебаний системы был принят равным $\delta = 0,3$.

Сейсмические колебания грунта правильнее характеризовать как суммарное действие ряда затухающих синусоид, поэтому в некотором интервале $\theta_n - \theta_m$ может быть целый ряд резонансных пик (рисунок 14.5). Объединяя весь участок $\theta_n - \theta$ одной огибающей линией, получим общее очертание графика β в функции от P .

В дальнейшем, чтобы охватить область высоких частот, Корчинский предложил строить график зависимости β от T , что сближало его выводы с зарубежными опытными данными (рисунок 14.6).

Когда были получены некоторые опытные данные в СССР,

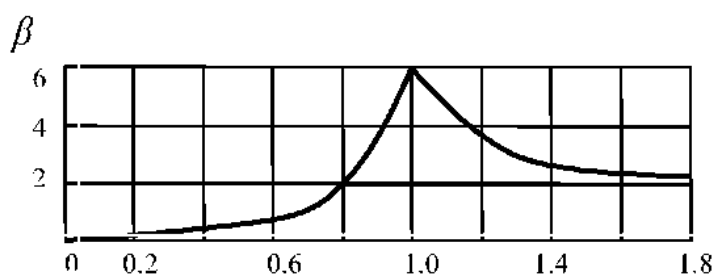


Рисунок 14.4 График коэффициентов динамичности (по И.Л. Корчинскому)

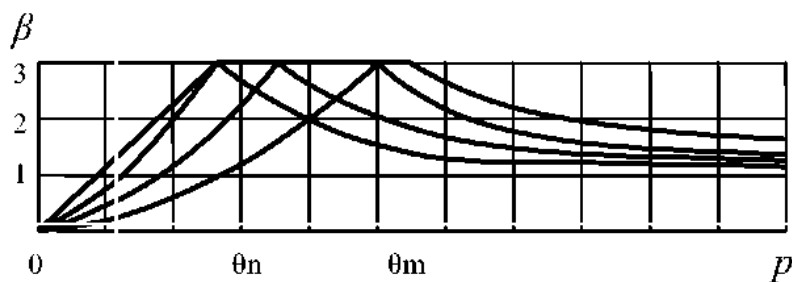


Рисунок 14.5 График огибающей динамического коэффициента β

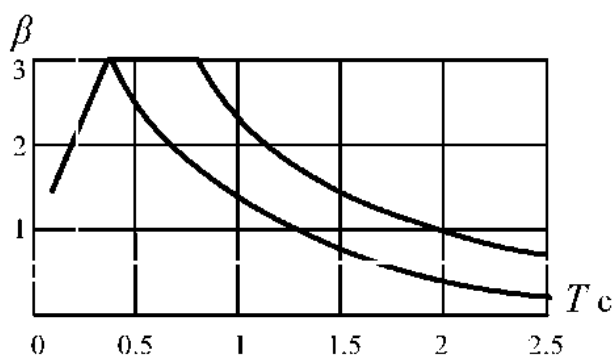


Рисунок 14.6 – График зависимости β от T (по И.Л. Корчинскому)

график β – был еще раз изменен и получил вид, представленный пунктирной кривой на рисунке 14.7. Эта кривая была включена в нормы проектирования сейсмостойких конструкций 1957 г. и в последующие издания СНиП.

Из графика (14.6) следует, что можно достичь существенного снижения сейсмических сил путем увеличения периодов собственных колебаний. Именно поэтому стараются проектировать конструкции малой жесткости, отличающиеся большими периодами собственных колебаний T .

С.В. Поляко-

вым в работе [39] было предложено при очередном пересмотре СНиПа ввести дифференцирование по типам грунтов (графики β), но его предложение сначала не было принято. В нормах СНиП 1969 г. график был представлен единой формулой $\beta = 1/T$ при $0,8 \leq \beta \leq 3$ (рисунок 14.7). Случай $T = 0$ соответствует абсолютно жесткому телу, которое при поступательном движении и жесткой заделке в основании точно повторяет колебания последнего ($\beta=1$).

В нормах СНиП П-7-81* спектр β (рисунок 14.8) представлен уже тремя графиками (по категориям грунтов).

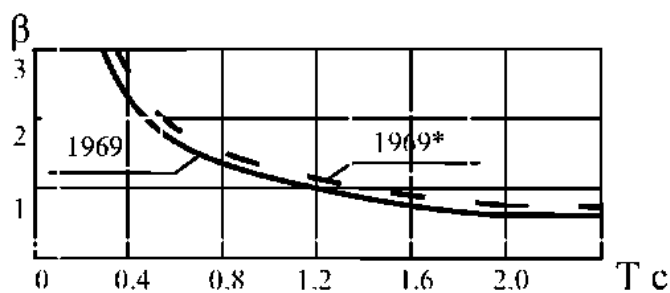


Рисунок 14.7 Спектр коэффициента динамичности по СНиП II-A.12.69*

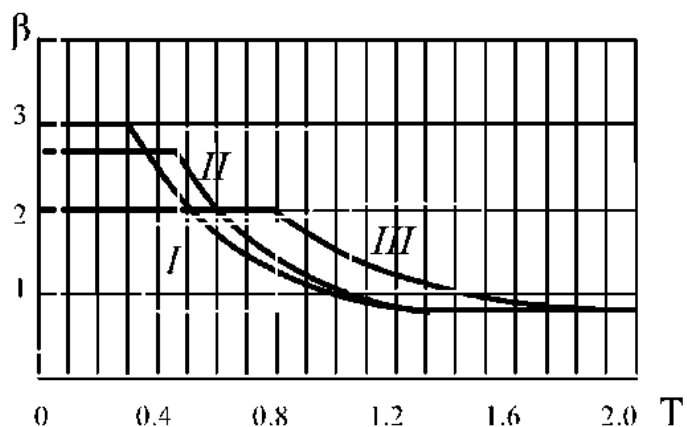


Рисунок 14.8 – Спектр коэффициента динамичности по СНиП II-7.81*

Определяя максимальные значения ускорений, скоростей, смещений линейных осцилляторов с соответствующими динамическими параметрами на воздействие различных землетрясений (согласно акселерограммам), получают спектральные кривые $s(T\varepsilon)$, где T - собственный период осцилляторов, ε - мера рассеяния энергии. На основании полученных спектральных кривых определяют вели-

В шестидесятых годах возникла и является наиболее распространенной в настоящее время линейно-спектральная теория или расчет по спектральным кривым. В основе теории лежит идея замены сложной системы со многими степенями свободы системой независимых линейных осцилляторов с соответствующими периодами и затуханием. Затем решение задачи сводится к нахождению форм свободных колебаний расчетной схемы и решению линейных дифференциальных уравнений колебаний отдельных осцилляторов.

чины сейсмических нагрузок, соответствующие нормальным формам колебаний системы с n свободы

$$S_{1k} = \max |S_{1k}(t)| = M_k \eta_{1k} c_w(T_{1,\alpha}) = M_k \eta_{1k} \omega_1 c_v(T_{1,\alpha}) = M_k \eta_{1k} \omega_1^2 c_y(T_{1,\alpha}), \quad (14.17)$$

где $c_w(T_{1,\alpha})$, $c_v(T_{1,\alpha})$, $c_y(T_{1,\alpha})$ - амплитуда спектров ускорений, скоростей и перемещений соответственно; ω_1 - частота колебаний, соответствующая i -й форме, M_k - масса, сосредоточенная в k -й точке; η_{1k} коэффициент i -й нормированной формы для k -й точки.

Отмечая недостатки спектрального метода, следует сказать, что он не содержит данных о фазовых соотношениях нормальных колебаний и о характере совместного воздействия всех нормальных форм колебаний сооружения. На практике этот недостаток восполняют следующие допущения:

1) в нормах СССР и США в качестве расчетного принимается усилие одной из нормальных форм (как правило, основной - первой формы);

2) в нормах Мексики учитываются усилия по всем формам и в качестве расчетного принимается среднеквадратическое значение максимальных усилий нормальных форм:

$$S = \sqrt{\sum_{i=1}^n [S^{(i)}]^2} . \quad (14.18)$$

Вопросу учета высших форм колебаний в расчетах по спектральным кривым посвящены работы Д.Хадсона, К.Ньюмарка. Д.Хадсон в своем докладе приводит данные о колебаниях 16-тиэтажного здания Александер в г.Сан-Франциско во время землетрясения 22 марта 59 года. Здание оборудовано акселерографами, паходящимися в подвале и на различных этажах. Согласно приводимым акселерограммам, наибольшие ускорения на 11-м и 16-м этажах соответственно на 22% и 67% превышают наибольшее ускорение в подвале. Динамические параметры здания были установлены натурными вибрационными испытаниями. Д.Хадсон приводит сравнение расчетных и действительных ускорений, зарегистрированных в здании Александер. Действительное наибольшее ускорение оказалось меньше абсолютного максимума по первым трем формам, но больше среднеквадратической величины максимумов этих форм [21].

Результаты исследований Дженнингсома и Ньюмарка [33] свидетельствуют, что действительные максимальные усилия близки

к среднеквадратичным значениям усилий по отдельным формам, но иногда могут быть больше последних.

Современные вычислительные средства дают возможность производить расчеты на сейсмические воздействия, заданные в виде фактически зарегистрированных акселерограмм $\ddot{y}_0(t)$ прошлых землетрясений.

Сейсмическую нагрузку в этом случае принимают в виде

$$S_k(t) = M_k \sum_{i=1}^n \eta_{ik} Q(T_i, \varepsilon, t), \quad (14.19)$$

где $Q(T, \varepsilon, t)$ – приведенное сейсмическое ускорение для i -й формы, определяемое выражением

$$Q(T_i, \varepsilon, t) = \omega_i \int_0^t e^{-\varepsilon \omega_i(t-\tau)} \sin \omega_i(t-\tau) y_0(\tau) d\tau. \quad (14.20)$$

Неудобство применения формулы (14.19) состоит в том, что неизбежна погрешность, возникающая от неучета всех периодов и форм свободных колебаний. Практически в таких расчетах учитывается только несколько периодов и форм собственных колебаний, что связано с трудоемкостью вычислительного процесса.

В целом методы определения сейсмических нагрузок с помощью разложения колебаний системы по нормальным составляющим связаны с отсутствием замкнутых решений для различных расчетных схем зданий и сооружений.

14.3 Представление сейсмического воздействия в виде случайного процесса

Применение вероятностных методов к оценке возможного землетрясения на сооружения является весьма перспективным. Этому вопросу посвящены работы М.Ф. Барштейна [3], В.В. Болотина [8], И.В. Гольдсблата [13], Я.М. Айзенберга [2], Н.А. Николаско, Ю.П. Назарова [32] и ряда других ученых. Сущность этих исследований сводится к тому, что, поскольку колебания почвы при землетрясении носят хаотический характер и их нельзя описать никакой определенной функцией, то движение грунта рассматривать как случайный процесс, подчиненный лишь статистическим закономерностям. То же самое можно сказать и относительно ускорений

группа, которые с точки зрения воздействия на сооружение представляют главный интерес.

Для описания сейсмического колебательного процесса могут быть использованы как стационарные [4, 31], так и нестационарные [8, 9, 2] случайные процессы. Здесь встречаются два типа моделей.

Первая использует огибающие максимальных ординат спектров реакции линейных осцилляторов только для анализа стационарных упругих систем.

В другой модели применяются акселерограммы из опыта прошлых землетрясений или искусственные, поэтому она может быть пригодна для анализа любых систем, но не отражает всего многообразия возможных землетрясений.

При исследовании случайных процессов пользуются специфической терминологией.

Каждой случайной функции $\chi(t)$ соответствует множество ее реализаций, которое ограничено числом проделанных экспериментов. Математическое ожидание – это среднее по совокупности реализации значение функции и определяется для момента t по формуле

$$\bar{\chi}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n \chi_s(t). \quad (14.21)$$

Если задан закон распределения $F(\chi, t)$, то математическое ожидание

$$\bar{\chi}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi F_1(\chi, t) d\chi = m_\chi(t). \quad (14.22)$$

Центрированной случайной функцией называют разность: $\chi^0(t) = \chi(t) - m_\chi(t)$. Дисперсия характеризует разброс случайной функции около среднего значения:

$$D_\chi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n [\chi_s(t) - m_\chi(t)]^2. \quad (14.23)$$

При известном законе распределения $F_1(\chi, t)$ дисперсия равна

$$\sigma_\chi^2(t) = D_\chi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [\chi(t) - m_\chi(t)]^2 F_1(\chi, t) dt. \quad (14.24)$$

Величина $m_\chi(t)$ и $D_\chi(t)$ не определяет связи между значениями случайной величины функции при двух разных моментах времени t_1, t_2 . Этот фактор оценивается корреляционной функцией процесса:

$$K_{\chi}(t_1, t_2) = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n \chi_s^0(t_1) \chi_s^0(t_2) \quad (14.25)$$

или

$$K_{\chi}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\chi(t_1) - m_{\chi}(t_1)] \cdot [\chi(t_2) - m_{\chi}(t_2)] \cdot F_2[\chi(t_1), \chi(t_2), t_1, t_2] d\chi_1 d\chi_2, \quad (14.26)$$

где $F_2[\chi(t_1), \chi(t_2), t_1, t_2]$ – функция распределения.

В том случае, когда $\chi(t_1) = \chi(t_2)$,

$$K_{\chi}(t_1, t_2) = D_{\chi}(t). \quad (14.27)$$

Такие случайные процессы, при которых законы распределения вероятности двух групп значений функций $[\chi(t_1), \dots, \chi(t_i)]$ и $[\chi(t_1 + \tau), \dots, \chi(t_i + \tau)]$ тождественны друг другу, называются стационарными. Стационарный случайный процесс, описывающий сейсмические ускорения, является эргодическим, т.е. все реализации одного и того же случайного процесса, а, следовательно, и статические характеристики процесса, могут быть вычислены по одной его реализации, записанной на достаточно длинном отрезке времени.

Математическое ожидание стационарной случайной функции не зависит от τ и определяется формулой

$$\bar{\chi}(t) = m_{\chi} = \frac{1}{T} \int_0^T \chi(t) d\tau,$$

а ее корреляционная функция и дисперсия равны:

$$K_{\chi}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \chi^0(t) \chi^0(t + \tau) d\tau; \quad D(\chi) = K_{\chi}(0), \quad (14.28)$$

где $\tau = t_2 - t_1$, T – длительность реализации процесса.

В силу предположения о стационарности, корреляционная функция сейсмических ускорений y_0 грунта будет зависеть только от разности моментов времени $t_2 - t_1 = \tau$, т.е.

$$K_y(t_1, t_2) = K_y(t_1 - t_2) = K_y(\tau) \text{ или } K_y(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \ddot{y}(t) \ddot{y}(t + \tau) d\tau. \quad (14.29)$$

Возможность представления сейсмического воздействия стационарного процесса рассматривалась И.И. Гольденблатом [13] и М.Ф. Барштейном [4]. Последний, обрабатывая пять акселерограмм землетрясений США, построил нормированные корреляционные функции

$$K''(\tau) = \frac{K_y(\tau)}{K_y(0)}, \quad (14.30)$$

где $K_y(0) = \overline{\dot{y}^2}(t) = D$ – значение корреляционной функции при $\tau=0$, равно среднему квадрату сейсмических ускорений грунта, или равно дисперсии.

Нормированные корреляционные функции $K''(\tau)$, полученные Барштейном, достаточно хорошо аппроксимируются функциями типа

$$R_0(\tau) = e^{-\alpha\tau} \cos \omega_0 \tau, \quad (14.31)$$

где $\alpha = 6 - 8,5 \text{ с}^{-1}$, $\omega_0 = 14-20 \text{ с}$ (ω_0 – преобладающая частота колебаний грунта, α – величина, характеризующая степень корреляции. Чем меньше α , тем больше корреляция, тем меньше диапазон частот, в котором заключена большая часть энергии).

При $\tau < 0,1$ кривые $R_0(\tau)$ и опытные хорошо согласуются. При увеличении τ статистическая связь \overline{y}^0 и $\dot{y}(t+\tau)$ будет ослабевать, а при $\tau = \infty$ они независимы.

Время корреляции сейсмического ускорения, т.е. интервал времени τ , в пределах которого имеет место заметная статистическая связь между значениями случайной функции ($R(\tau) > 0,05$), составляет примерно 1-1,5 с. Отсюда М.Ф. Барштейн устанавливает, что для получения достаточной статистической информации о сейсмическом ускорении длительность интервала T на акселерограмме достаточно выбрать равной 10-12 с.

При стационарном эргодическом процессе спектральная плотность $S(\omega)$ и корреляционная функция $K(\tau)$ связаны между собой соотношениями Хинчина-Винера:

$$S(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad K(\tau) = \int_0^{\infty} S(\omega) \cos \omega \tau d\omega.$$

$$\text{При } \tau=0 \quad K(0) = \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega = D. \quad (14.31)$$

Если принять нормированную спектральную функцию равной $R(\tau)$, то

$$S(\omega) = \frac{2}{\pi} D \alpha \frac{\omega^2 + b^2}{\omega^4 + 2a\omega^2 + b^4}, \quad (14.32)$$

где $b^2 = \alpha^2 + \omega^2$, $a = \alpha^2 - \omega^2$.

М.Ф. Барштейн показал, что преобладавшие периоды колеба-

пий для данной группы землетрясений располагаются в диапазоне $T=0,3-0,45$ с. При известной спектральной плотности $S(\omega)$ можно было получить средний квадрат ускорений осциллятора $\overline{\ddot{y}^2(t)}$, а затем и динамический коэффициент

$$\beta_D = p^2 \sqrt{\overline{\ddot{y}^2} / D}, \quad (14.33)$$

где p – частота собственных колебаний осциллятора.

Выражения (14.32) и (14.33) получены для системы с одной степенью свободы.

Задача колебаний линейной системы с n степенями свободы может быть решена аналогичным образом с использованием разложения сейсмических смещений в ряд по нормальным составляющим.

Если собственные частоты системы не близки одна к другой, то можно пренебречь взаимной корреляцией нормальных координат [26]. Это учтено в работе [3]. Как показано в этой работе, среднеквадратическое значение (стандарт) сейсмической силы S , соответствующей массе m_k , можно представить в таком виде:

$$S_k = \sqrt{\sum_{i=1}^n S_{ik}^2} = \sqrt{\overline{\ddot{y}_0^2(t)} m_k} \sqrt{\sum_{i=1}^n \beta_{Di}^2 \eta_{ik}^2}, \quad (14.34)$$

где η_{ik} – коэффициент формы, β_{Di} – коэффициент динамичности для i -й нормальной составляющей.

В последнее время появились работы, где землетрясение рассматривается как нестационарный процесс. К числу первых работ этого направления следует отнести работы В.В.Болотина [8, 9]. Он предложил представить ускорение грунта в виде суммы функций

$$A_1(t) = \ddot{y}_0(t) = \sum_k^n A_k(t) z_k(t), \quad (14.35)$$

где $A_k(t)$ – детерминированная функция времени (оглабающая акселерограммы), $z_k(t)$ – стационарная случайная функция. Для функции $A_k(t)$ могут быть взяты выражения

$$A(t) = A_0 e^{-c_1 t} \text{ или } A(t) = A_0 (e^{-c_1 t} - V e^{-c_2 t}). \quad (14.36)$$

Параметры A_0, c_1, c_2, V определяются путем обработки сопоставимых акселерограмм. Сопоставимыми В.В.Болотин называет акселерограммы, которые имеют одинаковые или достаточно близкие значения интегральных признаков оглабающей $A_k(t)$. Таковы, например, акселерограммы одного и того же землетрясения, записанные в рядом расположенных пунктах.

Если сопоставимые акселерограммы отсутствуют, то среднее значение амплитуды ускорений находится следующим образом. Акселерограмму разбивают на участки и находят средние значения

$$\bar{a}_1^2, \bar{a}_2^2, \dots, \bar{a}_n^2;$$

$$\bar{a}_1^2 = D_1 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a}_1^2)^2; \quad A_1(\Delta t_1) = \sqrt{\bar{a}_1^2};$$

$$\bar{a}_2^2 = D_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a}_2^2)^2; \quad A_2(\Delta t_2) = \sqrt{\bar{a}_2^2}; \text{ и т.д.}$$

Огибающая может быть построена по найденным значениям $A_1(\Delta t_1), A_2(\Delta t_2) \dots A_n(\Delta t_n)$. Допустим, для функции $A(t)$ взято значение $A(t) = A_0 e^{-ct}$.

Затем, используя метод минимизации среднеквадратичного ускорения, строят функцию

$$J(A_0, c, t) = \sum (\ln A_0 - ct_1 - \ln A_1)^2.$$

Обозначая $\ln A_0 = B_0$, $\ln A_1 = E_1$, имеем $J(B_0, c, t) = \sum (B_0 - ct_1 - E_1)^2$. Для определения параметров A_0 , B_0 , c вычисляют производные:

$$\frac{dJ}{dB_0} = \sum_{i=1}^N 2(B_0 - ct_1 - E_1) = 0; \quad (14.37a)$$

$$\frac{dJ}{dc_0} = \sum_{i=1}^N 2(B_0 - ct_1 - E_1)t_1 = 0. \quad (14.37b)$$

Решая систему уравнений (14.37), находят:

$$c = \frac{1}{N^2 - T} \left(\sum_{i=1}^N E_i - \frac{N}{T} \sum_{i=1}^N E_i t_i \right), \quad B_0 = cN + \frac{1}{T} \sum E_i t_i, \quad A_0 = e^{B_0}.$$

Уравнение огибающей $A(t) = A_0 e^{-ct}$ получено.

После этого каждое значение $a(t)$ делят на соответствующее значение $A(t)$ и отсюда находят реализацию случайной функции $\varphi(t)$. Затем по найденной $\varphi(t)$ находят спектральную плотность $S(\omega)$:

$$K_\varphi(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t) \varphi(t+\tau) dt = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \varphi(t_i) \varphi(t_i + \Delta t),$$

$$S(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty K_\varphi(\tau) \cos \omega t d\tau.$$

Методика В.В.Болотина [9] основана на допущении, что изменением спектрального состава в течение всего землетрясения можно пренебречь. Такое допущение может быть принято в первом приближении, учитывая, что высокочастотные толчки, которыми обыч-

но заканчивается землетрясение, оказывают весьма малое влияние на прочность по сравнению с сильными низкочастотными толчками. Если принять это допущение, то можно представить компоненты ускорения грунта в виде реализации стационарного случайного процесса, модулированного при помощи некоторой детерминированной функции времени.

Дальнейшее развитие применения статистических методов к задачам сейсмостойкости получило в работах Л.М.Айзенберга, П.А.Николаско, Ш.Г.Напетваридзе, В.М.Ляхтера и др.

Л.М.Айзенберг в своей работе [2] разработал модель, представленную в виде множества случайных процессов. Она отличается от вышеприведенных моделей тем, что задается не одним, а множеством спектров в диапазоне частот, важных с точки зрения инженерных задач.

Расчетная модель представлена в виде множества нестационарных гауссовских мультипликативных процессов. Каждый элемент этого множества в области частот $\omega_{\min} \leq \omega_j \leq \omega_{\max}$ имеет вид:

$$\Phi(t, \bar{\omega}_j) = A(t, \bar{\omega}_j) \varphi(t, \omega_j),$$

где $A(t, \omega_j) = A_j t e^{-e_j t}$ - огибающая функция, задаваемая при фиксированных ω_j в виде импульса Берлага; $\varphi(t, \omega)$ - стационарный гауссовский процесс; ω_j - несущая частота.

Нормированная корреляционная функция и спектральная плотность равны:

$$K(\tau, \omega_j) = e^{-\alpha_j |\tau|} (\cos \omega_j \tau + \alpha_j \sin \omega_j |\tau|) / \bar{\omega}_j,$$

$$S(\omega, \omega_j) = 2\alpha_j / \pi(\alpha_j^2 + \omega_j^2)((\omega^2 - \omega_j^2 - \alpha_j^2) + 4\alpha_j^2 \omega^2).$$

Таким образом, эта модель учитывает четыре параметра:

- 1) α_j - характеризующий быстроту убывания корреляционной связи между ординатами случайного процесса ($\alpha_j = 0,5\omega_j$ на основе анализа акселерограмм);
- 2) e_j - параметр, определяющий форму временной огибающей ($e_j = 0,05\omega_j$);
- 3) $\sigma_j(\omega)$ - дисперсия процесса характеризует интенсивность сейсмических колебаний.

Модель Л.М.Айзенберга [2], как утверждает автор, учитывает все важные с точки зрения инженерных расчетов частоты сейсмиче-

ского воздействия, но без учета региональных особенностей конкретной территории. В работе [1] этот недостаток частично устранен и предложена новая модель $\Phi(t, \omega_j)$, которая предназначена для оптимизационных расчетов с целью определения обоснованных объемов антисейсмических мероприятий, выбора типов зданий и сооружений и назначения динамических параметров систем сейсмической защиты.

Заключая этот раздел, следует отметить, что теория случайных процессов позволяет получить надежное решение при оптимальной экономии материалов для ответственных сооружений. Однако она носит ограниченный характер ввиду сложностей моделей, ограниченности числа степеней свободы и математических трудностей в решении, поэтому обычно при определении реакции от сейсмического воздействия используется детерминированный подход.

14.4 Влияние рассеяния энергии на колебания системы при сейсмических воздействиях

Колебания реальных сооружений сопровождаются рассеянием механической энергии. Оно может быть вызвано трением в сочленениях, примыканиях и опорных устройствах конструктивных элементов, несовершенной упругостью (внутренним трением) материалов, обратной утечкой части энергии в грунт основания. В настоящее время существуют несколько способов учета рассеяния энергии.

В зарубежной литературе по сейсмостойкости рассеяние энергии обычно учитывается по гипотезе W.Voigta (Фойгта) – гипотеза вязкого сопротивления. Согласно ей внутреннее трение в материале, порождавшее силы сопротивления и вызывающее рассеяние энергии, принимается пропорциональным скорости деформации. В связи с этим зависимость между напряжением и деформацией выражается формулой

$$\sigma = E\varepsilon + \chi E\dot{\varepsilon}, \quad (14.38)$$

где σ – суммарное переменное напряжение, обусловленное упругими и вязкими силами;

$\varepsilon, \dot{\varepsilon}$ – относительные деформация и скорость деформации;
 χ – коэффициент вязкого трения, постоянный для данного материала.

Для системы с одной степенью свободы упругая сила (при изгибе, сжатии, растяжении, кручении и сдвиге) характеризуется значением $R = ry$, где r – коэффициент упругости, y – деформация.

Сила неупругого сопротивления по гипотезе Фойгта представляется выражением

$$R = -\chi \frac{dF}{dy} = -\chi r \dot{y}, \quad (14.39)$$

т.е. сила неупругого сопротивления пропорциональна скорости упругих перемещений и, следовательно, частоте колебаний системы. Действительно, если перемещения при колебаниях равны

$$y = y_0 \sin(\omega t + \varphi),$$

то упругая сила

$$F = F_0 \sin(\omega t + \varphi),$$

а неупругое сопротивление равно

$$R = -\chi F_0 \omega \cos(\omega t + \varphi) = \chi F_0 \omega \sin(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}). \quad (14.40)$$

Отсюда видно, что R отстает от F по фазе на $\pi/2$ [37]. Гипотеза Фойгта характеризуется рядом недостатков. В частности, она часто критикуется с той точки зрения, что потеря энергии, как показывают опыты, мало зависит от скорости (например, площадь петли упругого гистерезиса практически не зависит от продолжительности цикла, т.е. от скорости деформирования). Основное достоинство гипотезы Фойгта – простота и удобство применения, вытекающие из линейности получаемых дифференциальных уравнений.

При обработке опытных виброграмм свободных затухающих колебаний чаще всего обнаруживается, что убывание амплитуд не следует закону геометрической прогрессии (что справедливо для гипотезы Фойгта). Это служит признаком того, что сопротивление отличается от линейно-вязкого и имеет зачастую нелинейный характер.

Нелинейная зависимость сил сопротивления от скорости может быть описана различными аналитическими выражениями. Так, Н.Н. Давиденков связывает величину трения с явлениями упругого гистерезиса. Для описания прямого и обратного хода диаграммы $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ он предлагает следующие зависимости:

$$\sigma_+ = E(\varepsilon - \frac{\eta}{n}((\varepsilon_0 + \varepsilon)^n - 2^{n-1} \varepsilon_0^n)), \quad \sigma_- = E(\varepsilon + \frac{\eta}{n}((\varepsilon_0 + \varepsilon)^n - 2^{n-1} \varepsilon_0^n)), \quad (14.41)$$

где n и η – коэффициенты, определяемые экспериментально, ε_0 – амплитудное значение деформации. Формула, предложенная Д.Ю. Паповым, имеет вид

$$\sigma = E\varepsilon + \text{sign } \varepsilon \chi \varepsilon_0 \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^2\right). \quad (14.42)$$

Модель А.П.Филиппова [63] для учета зависимости затухания от амплитуды записывается в виде

$$\sigma = E\varepsilon + \frac{E}{\omega} (\mu_0 + \mu_1 \varepsilon_1 \text{sign } \varepsilon_1 + \mu_2 \varepsilon_1^2) \frac{d\varepsilon}{d\tau}, \quad (14.43)$$

где $\text{sign } \varepsilon_1 = \begin{cases} 1 & \text{при } \varepsilon > 0, \\ -1 & \text{при } \varepsilon < 0 \end{cases}$.

В выражении (14.43) μ_0, μ_1, μ_2 – коэффициенты, определяемые из опыта.

Использование зависимостей типа (14.41-14.43) приводит к нелинейным уравнениям колебаний системы, которые в основном решаются с помощью асимптотических методов. К недостаткам нелинейных гипотез (14.41-14.43) следует отнести тот факт, что они учитывают лишь небольшую часть общего рассеяния энергии и применение их встречает серьезные математические трудности даже в простейших задачах о затухающих и вынужденных колебаниях систем с одной степенью свободы.

За последние годы в нашей стране широкое применение получила гипотеза неупругого сопротивления материала Е.С. Сорокина [59].

Эта гипотеза базируется на рассмотрении колебаний не вполне упругого тела, для которого зависимость между смещением и соответствующим усилием P при циклическом нагружении носит гистерезисный характер.

Иногда за меру внутреннего трения выбирается величина энергии, рассеянная в единице объема образца (при одноосном напряжении) за одну секунду.

$$\Delta W = \sigma \frac{d\varepsilon}{dt} \cdot V.$$

Наиболее часто употребляют безразмерную характеристику внутреннего трения $\psi = \Delta W / W$, где энергия рассеяния по всему объему V образца за один период $\Delta W = (2\pi / \omega) \int \sigma \varepsilon dV$. Энергия ко-

лебаний всего образца, отвечающая амплитудным значениям напряжения и деформации определяется зависимостью

$$W = \frac{1}{2} \int \sigma_0 \varepsilon_0 dV. \quad (14.44)$$

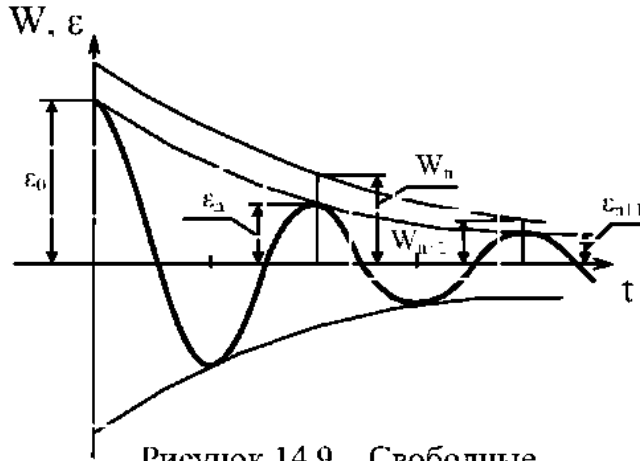


Рисунок 14.9 Свободные затухающие колебания

Коэффициент поглощения ψ может быть определен и по развертке свободных затухавших колебаний образца изучаемого материала (рисунок 14.9):

$$\psi = - \int_t^{t+T} \frac{dW}{W}.$$

Если положить величину энергии $W = k\varepsilon_0^2$, т.е. пропорциональной квадрату

амплитуды деформации $\varepsilon_0^2(t)$, где $\varepsilon_0(t)$ - огибающая кривой свободных колебаний, то $dW = 2k\varepsilon_0 d\varepsilon_0$. Тогда коэффициент поглощения

$$\psi = - \int_t^{t+T} \frac{dW}{W} = - \int_t^{t+T} \frac{2k\varepsilon_0 d\varepsilon_0}{k\varepsilon_0^2} = 2 \ln \frac{\varepsilon_0(t)}{\varepsilon_0(t+T)} = 2 \ln \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n+1}} = 2\delta, \quad (14.45)$$

где δ – логарифмический декремент.

Многочисленные эксперименты показывают, что при рассеянии энергий колебаний возможен сдвиг по фазе между напряжением и деформацией: деформация отстает от напряжения на некоторый угол φ . Угол сдвига фазы в самом деле является подходящей мерой внутреннего трения, так как количество энергии, рассеянной за цикл, стремится к нулю, если $\varphi \rightarrow 0$.

Полагая $\sigma = \sigma_0 \cos \omega t$, $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos(\omega t - \varphi)$, получим

$$\Delta W = \frac{2\pi}{\omega T} \int_0^T \int_V \sigma \dot{\varepsilon} dt dV = \frac{2\pi}{\omega T} \int_0^T \int_V \sigma_0 \varepsilon_0 \left[\frac{1}{2} \sin \varphi + \frac{1}{2} \sin(2\omega t - \varphi) \right] dV dt = \pi \sin \varphi \int_V \sigma_0 \varepsilon_0 dV.$$

С учетом (14.44) найдем коэффициент поглощения $\varphi = \frac{\Delta W}{W} = 2\pi \sin \varphi$.

Эта связь справедлива, если $\cos \varphi \cong 1$, поэтому можно принять

$$\varphi = 2\pi \operatorname{tg} \varphi, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\varphi}{2\pi}. \quad (14.46)$$

Процесс затухания колебаний можно проследить также в системе координат R, ε , где R – сумма упругого и вязкого диссипативных напряжений.

$$R = f_1(\varepsilon) + f_2(\dot{\varepsilon}).$$

Если упругое напряжение подчиняется закону Гука, а вязкое сопротивление пропорционально первой степени $\dot{\varepsilon}$, то

$$R = E\varepsilon + \gamma\dot{\varepsilon}. \quad (14.47)$$

Исключая из уравнения $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos(\omega t - \varphi)$ и (14.40), получим связь $R(\varepsilon)$ при вынужденных установившихся колебаниях

$$R(\varepsilon) = E\varepsilon + \gamma\varepsilon_0\omega \sin(\omega t - \varepsilon).$$

Поскольку $\cos(\omega t - \varphi) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$, $\sin(\omega t - \varepsilon) = \frac{R - E\varepsilon}{\varepsilon_0\gamma\omega}$, имеем уравнение ба-
лапса

$$\frac{(R - E\varepsilon)^2}{\varepsilon_0^2\gamma^2 - \omega^2} + \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_0^2} = 1.$$

То есть при вынужденных установившихся колебаниях площадь петли гистерезиса – замкнутая кривая – эллипс (рисунок 14.10), при

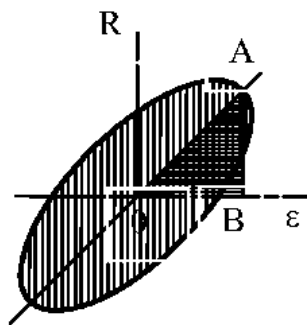


Рисунок 14.10 – Замкнутая петля гистерезиса

этом площадь петли равна энергии рассеяния ΔW , а площадь ΔOAB равна упругой энергии цикла W . При затухающих колебаниях петля динамического гистерезиса представляет систему незамкнутых петель. При малом затухании площадь трапеции ΔW , представляющая разность двух треугольников, пропорциональна потенциальной энергии в начале и конце цикла. Она приближенно должна равняться отмечен-

ной на рисунке 14.11 замкнутой площади петли гистерезиса. Избыточная площадка (ромбовидная штриховка) в первую половину цикла компенсирует такой же недостаток рассеяния во второй половине цикла.

Е.С. Сорокин в своей работе [59] получил уравнение петли гистерезиса в виде

$$\sigma = E\varepsilon = E_0 c\varepsilon_0 \left(\sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_0^2} + d^2} - d \right),$$

где E_0 – модуль упругости при $\varepsilon \rightarrow 0$, E – некоторый секущий модуль упругости. Здесь секущий модуль деформации определяется зависимостью

$$E = E_0 \left(1 - \frac{\gamma^2}{4}\right) \left(1 + \frac{\gamma^2}{4}\right),$$

причем γ – коэффициент внутреннего трения при данном напряженном состоянии, c и d – некоторые постоянные, зависящие от площади и формы петли гистерезиса, ε_0 – амплитуда деформации.

Как было уже сказано, гармоническому процессу деформирования отвечает эллиптическая петля гистерезиса, при этом $d = 0$ и σ имеет вид

$$\sigma = E_0 \left(U\varepsilon - v\varepsilon_0 \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_0^2}} \right). \quad (14.48)$$

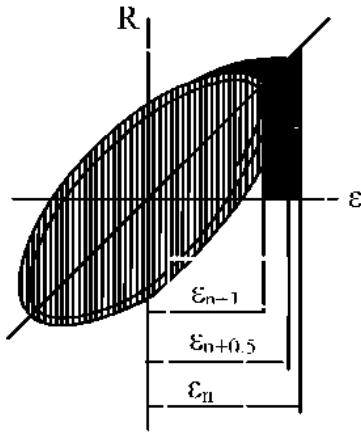


Рисунок 14.11 Петля гистерезиса при затухающих колебаниях

В выражении (14.48) U и v определяются по формулам:

$$U = \left(1 - \frac{\gamma^2}{4}\right) / \left(1 + \frac{\gamma^2}{4}\right); \quad v = \gamma / \left(1 + \frac{\gamma^2}{4}\right). \quad (14.49)$$

Пелинейное уравнение (14.41) принимает линейную форму для гармонической деформации, т.е. $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos(\omega t + \mu)$. Обозначим $\varphi = \omega t$, тогда $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos(\varphi + \mu)$ и $d\varepsilon/d\varphi = -\varepsilon_0 \sin(\varphi + \mu)$. Подставляя последние выражения в (14.48), получим

$$\sigma = E \left[U\varepsilon - v\varepsilon_0 \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_0^2 \cos^2(\varphi + \mu)}{\varepsilon_0^2}} \right] = E \left[U\varepsilon - v\varepsilon_0 \sin(\varphi + \mu) \right] = E \left(U\varepsilon + v \frac{d\varepsilon}{d\varphi} \right). \quad (14.50)$$

Для гармонической деформации $\chi(\varepsilon_0) = const$ так как $\varepsilon_0 = const$. Следовательно гармонической деформации будет соответствовать гармоническое напряжение. Эта же зависимость имеет место при $\gamma = const$, что характерно для ряда материалов (железобетон, мягкая сталь, дерево, резина, стекло и т.п.).

Зависимость (14.50) выведена только для гармонического процесса деформирования и не допускает сложения и разложения деформации. Последнее обстоятельство не позволяет применить ее к негармоническим процессам деформирования.

В последние годы различными авторами [23], [25], [41] были сделаны попытки распространить результаты этой теории на нестационарные процессы, в связи с чем были вскрыты некоторые противоречия, присущие самой концепции частотной независимости внутреннего трения.

На основании этих данных можно сделать вывод, что гипотеза Е.С. Сорокина, по-видимому, может применяться только при решении стационарных задач.

Для расчета многомассовых систем вначале рассматриваются колебания без учета демпфирования, а диссипативные члены, соответствующие упруго-вязкой модели, вводят уже после разделения уравнения в главных координатах.

В некоторых работах предпринимаются попытки создать модель, обеспечивающую частотную независимость декрементов колебаний многомассовых систем и систем с распределенными параметрами.

В частности, В.Т. Рассказовский предложил для многомассовых систем уравнения вида

$$MZ + \gamma(Mk)^{\frac{1}{2}}\dot{Z} + kZ = p, \quad (14.51)$$

где γ – постоянный для всех форм колебаний коэффициент потерь; M, k – матрицы инерционных и квазиупругих коэффициентов; Z, P – векторы перемещения и внешних сил.

А.И. Цейтлинным предложены в [65] уравнения более общего типа

$$[M]\ddot{Z} + [M] \cdot [M]^{-1}[K]^{\frac{1}{2}}[\Gamma] \cdot \dot{Z} + [K]Z = P, \quad (14.52)$$

где $[\Gamma]$ – матрица диссипативных коэффициентов.

Важной особенностью уравнений (14.51), (14.52) является возможность расчета системы с диссипативными элементами, имевшими различные коэффициенты потерь. Существенным является то обстоятельство, что матрица демпфирования $B = M(M^{-1}K)^{1/2}[\Gamma]$ даст возможность рассмотреть два типа задач. Во-первых, – это расчет конструкции и сооружений, для которых можно задать коэффициенты потерь для форм собственных колебаний, причем учитывается различие в величинах коэффициентов потерь для различных форм колебаний. Во-вторых, это задачи, где рассматриваются дискретные динамические системы с узлами трения (например, виброизолированные фундаменты) и могут быть за-

даны в качестве исходной информации парциальные коэффициенты потерь для виброизоляторов и грунтового основания.

Следует отметить, что задачи второго типа решаются в конечном виде только при определенных условиях, например, с учетом того, что влияние рассеяния энергии сказывается только в резонансных зонах.

При проектировании АЭС в США используют приближенный способ задания диссипации, предполагая, что затухание, присущее различным частям системы, распределяется по собственным формам пропорционально их доле в общей энергии.

Введение затухания по формам предполагает использование такой матрицы $[B]$, которая позволяет перейти к независимым уравнениям колебаний по главным формам колебаний.

Это возможно только при определенном виде матрицы $[B]$, удовлетворяющей условиям ортогональности. Например, матрица затухания в форме Релея

$$[B] = \alpha_0 [M] + \alpha_1 [K], \quad (14.53)$$

где α_0 и α_1 – произвольные коэффициенты пропорциональности. Клаф [22] показал, что матрица, обеспечивавшая требуемую величину затухания по любой форме, имеет вид

$$[B] = [M][\Phi][\zeta][\Phi]^T [M], \quad (14.54)$$

где $[\Phi]$, $[\Phi]^T$ – прямая и транспонированная матрица форм колебаний; $[\zeta]$ – диагональная матрица из элементов $\zeta_n = (2\zeta_n \omega_n) / M_n$; ζ_n – параметр затухания по n -й форме; ω_n – соответствующая частота.

Способы интегрирования дифференциальных уравнений системы зависят от вида матрицы $[B]$.

Если матрица обобщенных затуханий (14.54) является диагональной, то можно прийти к системе несвязанных уравнений, которые легко интегрируются. Если же получение несвязанных уравнений невозможно, тогда применяют метод пошагового интегрирования, но в этом случае вычисления требуют значительного объема времени.

Лекция 15

Расчетные модели и методы решения задачи сейсмостойкости

15.1 Формирование исходных уравнений при сейсмическом воздействии

Уравнения равновесия для системы с одной степенью свободы при кинематическом возмущении основания имеют вид (см. п. 2.2)

$$f_I + f_D + f_s = 0 ,$$

где V^t - суммарные отклонения, которые состоят из перемещений $V_g(t)$, возникающих при переносном движении (движение земли), и перемещений V , возникающих при относительном движении, т.е. $V^t = V + V_g^t$. При этом сила инерции, диссипационная сила, сила упругого сопротивления соответственно равны

$$f_I = m\ddot{V}^t; f_D = c\dot{V}; f_s = kV .$$

Тогда $m\ddot{V} + m\ddot{V}_g + c\dot{V} + kV = 0$; или

$$m\ddot{V} + c\dot{V} + kV = -m\ddot{V}_g(t) = p(t) .$$

Здесь $p(t)$ - условная сила сейсмического воздействия («сила эффекта»). Знак правой части не играет роли, можно брать знак \oplus , так как решение осциллирует.

Известно, что каждая конструкция представляет собой континуальную систему. Метод конечных элементов позволяет заменить такую систему на систему с конечным числом степеней свободы.

Обобщенными координатами являются линейные перемещения и углы поворота узловых точек конечных элементов. В общем случае каждая узловая k -я точка имеет три поступательных перемещения (U_1^k, U_2^k, U_3^k) вдоль осей x, y, z и три вращательных перемещения (U_4^k, U_5^k, U_6^k) относительно тех же осей. Обозначим вектор перемещений k -го узла, как

$$[U^k] = [U_1^k, U_2^k, U_3^k, U_4^k, U_5^k, U_6^k]^T , \text{ где } (k=1, 2, 3 \dots, n) .$$

Уравнения движения такой системы при сейсмическом возбуждении основания могут быть записаны по принципу Даламбера для каждой из степеней свободы

$$\begin{cases} \Phi_1 + R_1 + F_1 = P_1(t) \\ \Phi_2 + R_2 + F_2 = P_2(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Phi_N + R_N + F_N = P_N(t) \end{cases}, \quad (15.1)$$

где Φ_1, Φ_2, Φ_3 – силы инерции узла, соответствующие поступательным перемещениям U_1, U_2, U_3 вдоль осей x, y, z ; Φ_4, Φ_5, Φ_6 – силы инерции того же узла, соответствующие вращательному движению U_4^k, U_5^k, U_6^k относительно тех же осей; R_1, R_2, R_3 и F_1, F_2, F_3 – силы затухания и упругости, соответствующие поступательным перемещениям U_1, U_2, U_3 вдоль осей x, y, z ; R_4, R_5, R_6 и F_4, F_5, F_6 – силы затухания и упругости, соответствующие поступательным перемещениям U_4, U_5, U_6 вдоль осей x, y, z ;

Запишем систему уравнений (15.1) в компактной матричной форме

$$|\Phi| + |R| + |F| = |P(t)|. \quad (15.2)$$

Подробно формирование системы дифференциальных уравнений при динамических расчетах показано в гл. 11.

В большинстве случаев при расчете систем с большим количеством степеней свободы используют расчетные модели с точечными массами, расположенными в узлах. Количество возможных перемещений масс (динамических степеней свободы), как правило, меньше количества степеней свободы системы метода конечных элементов (КЭ), описывающей структуру конструкции. В этом случае массы конденсируются в особо выделенных узлах. Исследуемая упругая система превращается в систему суперэлементов (СЭ), соединенных между собой в узлах расположения масс (рисунок 15.1).

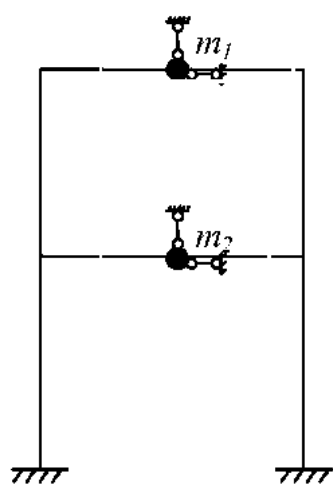


Рисунок 15.1 Схема СЭ при определении степеней свободы

Для того, чтобы система СЭ работала так же, как система более мелких конечных элементов, необходимо, чтобы единичные грузовые реакции в оставшихся связях СЭ отвечали условию со-

вместности деформаций системы КЭ. Если подобрать аппроксимирующие функции становится затруднительно, тогда для определения реакции пужпо рассчитывать на единичные смещения каждый СЭ, наподобие изображенного на рисунке 15.1.

15.2 Расчетная модель сложной системы при использовании акселерограмм и спектров ускорений

Акселерограммой пазывается график ускорений основания как функции от времени. Такой график либо является синтезированным, либо полученным путем записи при реальных землетрясениях. Такие графики обычно задаются по трем компонентам x, y, z пространства.

По этой методике вынужденные колебания описываются системой дифференциальных уравнений.

$$|m| \cdot (\ddot{U}) + |B| \cdot (\dot{U}) + K \cdot (U) = -|m| \cdot ((C_x)\ddot{X}_0 + (C_y)\ddot{Y}_0 + (C_z)\ddot{Z}_0). \quad (15.3)$$

Здесь $\ddot{X}_0, \ddot{Y}_0, \ddot{Z}_0$ – компоненты расчетной акселерограммы; $(C_x), (C_y), (C_z)$ – векторы косинусов углов между перемещениями по координатам системы и направлениями действия $\ddot{X}_0, \ddot{Y}_0, \ddot{Z}_0$. Весьма часто расчет выполняется по отдельности на каждую компоненту. Затем результаты суммируются.

Информация, получаемая при анализе реакции сооружения с использованием единственной записи, явно ненадежна вследствие стохастической (случайной) природы колебания грунта. Поэтому акселерограммы синтезируются на ЭВМ так, чтобы учесть возможность случайного отклонения.

Другой подход заключается в использовании нескольких реальных акселерограмм, отличающихся частотным составом и амплитудами воздействий. Эти акселерограммы задаются сейсмологами на основании изучения структуры земной коры в зоне строительства. Очевидно, что «угадать» характер и параметры землетрясения можно только приблизительно. Поэтому акселерограммы задаются не по одному, а по нескольким уже произошедшим землетрясениям в виде графиков и оцифровок этих графиков. При этом, как правило, максимальное значение ускорение в зависимости от балльности и уровня ответственности сооружения задается в долях ускорения земного притяжения g .

Предполагается, что система уравнений (15.3) является линейной. В этом случае можно использовать метод разложения решения по собственным формам. При условии, что матрица диссипаций $|B|$ пропорциональна матрице масс и матрице жесткости (см. гл. 11), система уравнений (15.3) приводится к набору уравнений колебаний одномассовой системы, соответствующих собственным частотам ω_j . Полная реакция определяется на основе суммирования полученных для каждой моды решений с использованием среднеквадратичной оценки случайных величин типа

$$y(t) = \sqrt{(y_1)_{max}^2 + (y_2)_{max}^2 + (y_3)_{max}^2 + \dots} \quad (15.4)$$

В практических расчетах вклад каждой модальной составляющей, соответствующей определенной форме колебаний, будет различным. Чаще всего доля низкочастотных форм является наибольшей и уменьшается для более высоких форм. Поэтому число членов в формуле (15.4) обычно ограничивается несколькими низшими формами.

Другая проблема заключается в необходимости моделирования акселерограмм, представляющих собой нерегулярные случайные функции с участками, имеющими различные частоты и амплитуды колебаний (рис. 14.1). Обычно используется представление акселерограммы в виде ряда синусоидальных колебаний вида

$$y(t) = \sum_{j=1}^n A_j \sin(\omega_j t + \varphi_j), \quad (15.5)$$

где A_j, ω_j, φ_j – соответственно амплитуда, частота, фазовый угол j -й синусоидальной составляющей. Самое простое представление (15.4) – синусоида со средней амплитудой и частотой на участке акселерограммы с максимальными ускорениями.

Как здесь уже указывалось, интегрирование уравнений (15.3) соответствует линейной задаче, когда предполагается, что в процессе колебательного процесса система продолжает оставаться упругой, характеристики упругости, демпфирования и массы остаются постоянными в течение всего времени воздействия.

Для изучения реакции сооружения на основе заданной акселерограммы группа строится спектры ускорений на различных уровнях здания. Эти уровни соответствуют расположению масс. Спектры ускорений являются огибающими графиков полученных в ре-

зультате расчетов поэтажных ускорений масс с учетом уровня затухания и определяют максимальное квазистатическое воздействие на сооружение как произведение массы на ускорение.

Учет стохастической природы землетрясений требует внимательного от-

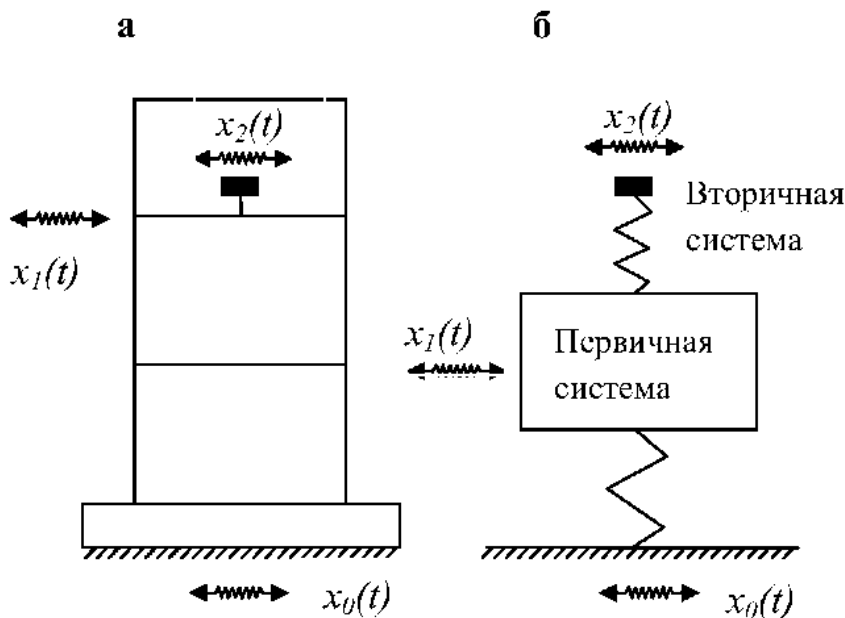


Рисунок 15.2 Разделение системы на первичную и вторичную: а – схема сооружения; б – физическая модель

пошения к выбору исходных акселерограмм. Расчеты производственных зданий, зданий ГРЭС, и в особенности АЭС связаны с проблемой изучения взаимодействия грунта и здания, а также с проблемой определения сейсмических сил, действующих на оборудование.

При этом в принципе можно сооружение моделировать как единую систему с многими степенями свободы. Если эффект взаимодействия между грунтами и сооружениями или зданием и оборудованием является существенным, необходимо формировать единую модель. Однако обычно систему разделяют на первичную (здание) и вторичную (оборудование). Первичная система есть линейная система блочных масс и конечных элементов, а вторичная система – простой линейный осциллятор (рисунок 15.2). Сейсмический анализ вторичной системы отделяют от анализа первичной системы и рассматривают реакцию ускорения в точке опоры вторичной системы как вход для динамического анализа вторичной системы.

Такая несвязанная модель рациональна в тех случаях, когда инерциальные свойства первичной (массивной) и вторичной (легкой) систем сильно различаются. Преимущество указанной модели в том, что она позволяет изучить весь спектр входной системы и оп-

ределить воздействие на разнообразное оборудование, находящееся на этаже здания.

Таким образом, задача расчета двухступенчатой системы сводится на первом шаге к расчету уравнений (15.3) и получению характеристик акселерограммы в точке опоры вторичной системы.

Второй шаг заключается в исследовании уравнения вынужденных колебаний осциллятора

$$\ddot{\xi} + 4\pi f_1^2 \xi + 4\pi f_1 C_k \dot{\xi} = \ddot{U}_z, \quad (15.6)$$

где \ddot{U}_z - соответствующая поэтажная акселерограмма (ИА); C_k - значения коэффициента диссипации (в долях от критического); f_1 - значение собственной частоты осциллятора, которое варьируется.

Для каждой пары C_k и f_1 , в интервале времени T , равном продолжительности акселерограммы, вычисляются значения ускорений осциллятора $\ddot{\xi}$ и полное ускорение оборудования в виде

$$\ddot{\xi}_a = \ddot{\xi} + \ddot{U}_z. \quad (15.7)$$

Для каждого момента времени запоминаются максимальные значения модулей $[\ddot{\xi}]_{\max}$, что позволяет построить спектры ускорений оборудования $S(x)$, $S(y)$, $S(z)$. Эти спектры можно перевести в эквивалентные квазистатические нагрузки для определения напряжений в элементах оборудования.

15.3 Численные методы пошагового интегрирования системы дифференциальных уравнений

Метод разложения по собственным формам (метод частотного анализа) весьма удобен при анализе упругих систем, у которых характеристики упругости, демпфирования и массы остаются постоянными в течение всего времени воздействия.

При сейсмической нагрузке параметры жесткости, затухания весьма часто могут меняться вследствие частичных разрушений, появления трещин, развития пластических деформаций. В результате нарушается условие ортогональности форм и принцип суперпозиции реакций.

В этом случае наиболее подходящими для решения системы уравнений (15.3) являются численные методы пошагового интегрирования систем дифференциальных уравнений.

Процесс воздействия и колебаний системы разделяется на небольшие промежутки времени. В течение этого промежутка все характеристики считаются постоянными и равными тем, что были определены в начале промежутка. На малом интервале реакцию определяют как для линейной системы. В конце интервала характеристики меняются в соответствии с напряженно-деформированным состоянием. Таким образом, неупругий анализ колебаний рассматривается как последовательность расчета непрерывно меняющихся упругих систем.

Очевидно, что пошаговые методы с успехом могут применяться и для расчета упругих систем, когда упругие характеристики постоянны. Это делает пошаговые методы универсальными.

Другим преимуществом пошаговых методов является возможность вводить любую систему коэффициентов затухания, отвечающую работе конструкции, например. Более высокие значения этих коэффициентов – для основания и меньшие – для каркаса здания.

Общим недостатком пошаговых методов является необходимость задания величины «шага», т.е. временного отрезка. В результате выбора малого шага точность решения повышается, но одновременно существенно увеличивается время расчета сложных систем на ЭВМ. Выбор слишком большого шага ведет к нарушению точности, а иногда к грубым ошибкам.

Существует много вариантов пошаговых методов, каждый из которых в той или иной мере пытается преодолеть указанный недостаток.

В данной работе показаны только некоторые методы, поскольку в основе почти всех пошаговых методов лежат общие принципы.

15.3.1 Уравнения колебаний в приращениях

Уравнение равновесия приращений сил в течение интервала времени Δt получают как разность между условиями равновесия для моментов времени t и $t + \Delta t$ (в матричном виде):

$$[\Delta f_I(t)] + [\Delta f_D(t)] + [\Delta f_S(t)] = [\Delta p(t)]. \quad (15.8)$$

Здесь $[\Delta f_I(t)]$, $[\Delta f_D(t)]$, $[\Delta f_S(t)]$ - соответственно матрицы сил инерции, диссипативных сил, упругих сил, $[\Delta p(t)]$ - матрица эффективной нагрузки, возникающей от ускорения грунта.

Приращения сил равны:

$$[\Delta f_I(t)] = [m(t)] \cdot [\Delta \dot{U}(t)] ,$$

$$[\Delta f_D(t)] = [c(t)] \cdot [\Delta \dot{U}(t)] ,$$

$$[\Delta f_S(t)] = [k(t)] \cdot [\Delta U(t)] ,$$

$$[\Delta p(t)] = [p(t + \Delta t)] - [p(t)] .$$

При нелинейной работе системы и её материала элементы матриц $[c(t)]$ и $[k(t)]$ определяются для фиксированного момента времени в начале интервала $\Delta(t)$, т.е.

$$c_{ij}(t) = \{df_{Di} / d\dot{U}_j\} ; k_{ij}(t) = \{df_{Si} / dU_j\} . \quad (15.9)$$

Таким образом, система уравнений колебаний в приращениях в матричной форме приводится к виду

$$[m(t)] \cdot [\Delta \dot{U}(t)] + [c(t)] \cdot [\Delta \dot{U}(t)] + [k(t)] \cdot [\Delta U(t)] = [\Delta p(t)] . \quad (15.10)$$

15.3.2 Метод центральных разностей

Метод центральных разностей имеет порядок точности $(\Delta(t))^2$. При его использовании матрица ускорений также усредняется на отрезке $2\Delta(t)$ и записывается в виде

$$[\dot{U}_t] = \{[U_{t-\Delta t}(t)] - 2 \cdot [U_t] + [U_{t+\Delta t}(t)]\} \cdot 1/(2\Delta t)^2 . \quad (15.11)$$

Матрицу скорости допускается вычислять по формуле

$$[\dot{U}_t] = \{[U_{t+\Delta t}(t)] - [U_{t-\Delta t}(t)]\} \cdot 1/(2\Delta t) . \quad (15.12)$$

Перемещения для момента времени $t + \Delta(t)$ определяются из уравнения (15.10) для момента времени (t) .

Подставляя (15.11), (15.12) в (15.10), получим

$$\{(1/\Delta t^2) \cdot [m] + (1/2\Delta t) \cdot [c]\} \cdot [U_{t+\Delta t}] = P(t) - \{[k] - (2/\Delta t^2) \cdot [m]\} \cdot [U_t] - \{(1/\Delta t^2) \cdot [m] - (1/2\Delta t) \cdot [c]\} \cdot [U_{t-\Delta t}] . \quad (15.13)$$

Таким образом, при диагональной матрице масс алгоритм интегрирования системы дифференциальных уравнений методом центральных разностей имеет следующую последовательность.

А. Начальные операции

1. Формируются матрицы жесткостей $[k]$, масс $[m]$, демпфирования $[c]$.

2. Задаются начальные условия $[U_0], [U'_0], [\ddot{U}_0]$.

3. Выбирается шаг интегрирования Δt . Он должен быть меньше критического Δt_{kr} . При этом $\Delta t_{kr} = (1/6 \div 1/10)T$.

Определяются постоянные:

$$a_0 = 1/\Delta t^2; a_1 = 1/2\Delta t; a_2 = 2a_0; a_3 = 1/a_2.$$

4. По начальным значениям из уравнения равновесия вычисляется $U_{-\Delta t}^{(i)}$:

$$U_{-\Delta t}^{(i)} = U_0^{(i)} = \Delta t \cdot U_0^{(i)} + (\Delta t^2/2) \cdot U_0^{(i)}. \quad (15.14)$$

5. Формируется эффективная матрица масс:

$$[\hat{m}] = a_0[m] + a_1[c].$$

Б. Для каждого шага

1. Вычисляется эффективная нагрузка:

$$[\hat{R}_t] = [R_t] - ([k] - a_2[m]) \cdot [U_t] - (a_0[m] - a_1[c]) \cdot [U_{t-\Delta t}].$$

2. Определяются перемещения для времени $t + \Delta t$

$$[U_{t+\Delta t}] = [\hat{m}] \cdot [\hat{R}_t].$$

3. Вычисляются ускорения и скорости в момент t

$$[\ddot{U}_t] = a_0(U_{t-\Delta t} - 2U_t + U_{t+\Delta t}); [\dot{U}_t] = a_1(-U_{t-\Delta t} + U_{t+\Delta t}).$$

Метод центральных разностей эффективен при диагональной матрице масс. При этом шаг интегрирования не должен превышать критического шага $\Delta t_{cr} = T_n/\pi$, где T_n наименьший период собственных колебаний.

Существует ряд методов, по своему характеру близких к методу центральных разностей и являющихся его развитием (методы Хоболта, Вилсона, Ньюмена). Приемы, используемые в них, позволяют получить более высокую точность и повысить устойчивость метода, по принципиальному отличию не имеют.

15.3.3 Метод Рунге-Кутты

Покажем вначале этот метод в более простом варианте. Пусть U т.е. приближенное решение в момент t , уже известно. Тогда $U_{t+\Delta t}$ можно найти с помощью следующих выражений:

$$F_t = F(t, U_t); \alpha_t = F(t + \Delta t, U_t + F_t \Delta t/2); [U_{t+\Delta t}] = [U_t] + \alpha_t \cdot h.$$

Геометрический смысл этого вычисления показан на рисунке 15.3. Каждое звено $M_t, M_{t+\Delta t}$ ломаной линии, аппроксимирующей интегральную линию, строится так.

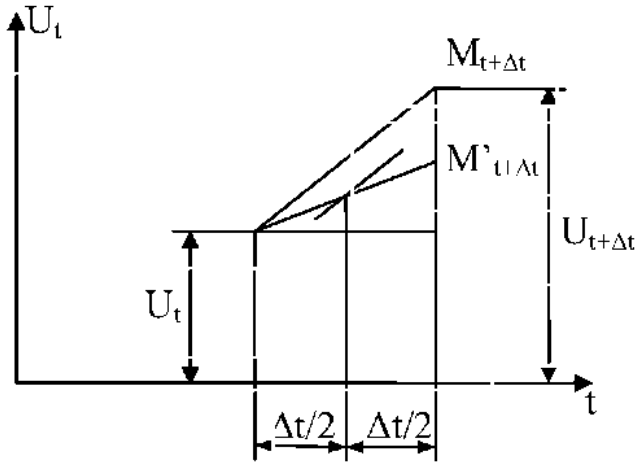


Рисунок 15.3 – Схема метода Рунге-Кутты

Проводим отрезок $M_t, M_{t+\Delta t}$, руководствуясь направлением F_t поля в точке M_t .

Затем определяем направление α_t поля в середине этого отрезка и проводим отрезок $M_t, M'_{t+\Delta t}$ под этим новым направлением.

Еще более точный результат получится, если вычислять по схеме:

$$\begin{aligned}
 F_t &= F(t, U_t); \\
 \alpha_t &= F(t + \Delta t, U_t + F_t \Delta t / 2); \\
 \beta_t &= F(t + \Delta t / 2, U_t + \alpha_t \Delta t / 2); \\
 \gamma_t &= F(t + \Delta t, U_t + \beta_t \Delta t); \\
 U_{t+\Delta t} &= U_t + 1/6 (F_t + 2\alpha_t + 2\beta_t + \gamma_t) \cdot \Delta t.
 \end{aligned}$$

Точность этой схемы составляет Δt^4 . Если число точек деления увеличится в 10 раз, то точность повысится в 10^4 раз.

Рассмотрим последовательность расчета системы дифференциальных уравнений второго порядка вида:

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{U}_1 + \sum_j^n C_{1j} \dot{U}_j + \sum_j^n K_{1j} U_j &= F_1(t); \\
 \dots m_2 \ddot{U}_2 + \sum_j^n C_{2j} \dot{U}_j + \sum_j^n K_{2j} U_j &= F_2(t); \\
 \dots & \\
 \dots m_n \ddot{U}_n + \sum_j^n C_{nj} \dot{U}_j + \sum_j^n K_{nj} U_j &= F_n(t).
 \end{aligned}$$

Отсюда $\ddot{U}_i = d^2U_i / dt^2 = F(t, \dot{U}_{i1}, \dot{U}_{i2} \dots U_{in}, U_{i1}, U_{i2} \dots U_{in})$.

Здесь

$$F(t, \dot{U}_{i1}, \dot{U}_{i2} \dots U_{in}, U_{i1}, U_{i2} \dots U_{in}) = \\ (1/m_i) \cdot (C_{i1}U_1 + C_{i2}U_2 + \dots + C_{in}U_n + \\ + K_{i1}U_1 + K_{i2}U_2 + \dots + K_{in}U_n) + P_i(t)/m_i.$$

Метод Рунге-Кутты для системы уравнений второго порядка вида

$$\ddot{U}_i = d^2U_j / dt^2 = F(t, \dot{U}, U), \quad (15.15)$$

имеющий погрешность (Δt^5), реализуется с помощью формул:

$$K_{1j} = \Delta t \cdot F_j(t, \dot{U}, U); \\ K_{2j} = \Delta t \cdot F_j(t + \Delta t/2, \dot{U}_j + K_{1j}/2, U_j + \Delta t/2 \cdot \dot{U}_j + \Delta t/8 \cdot K_{1j}); \\ K_{3j} = \Delta t \cdot F_j(t + \Delta t/2, \dot{U}_j + K_{2j}/2, U_j + \Delta t/2 \cdot \dot{U}_j + \Delta t/8 \cdot K_{2j}); \\ K_{4j} = \Delta t \cdot F_j(t + \Delta t/2, \dot{U}_j + K_{3j}/2, U_j + \Delta t/2 \cdot \dot{U}_j + \Delta t/8 \cdot K_{3j}); \\ U_{j,t+\Delta t} = U_{jt} + \Delta t \cdot [U_{jt} + 1/6 \cdot (K_{1j} + K_{2j} + K_{3j})]; \\ \dot{U}_{j,t+\Delta t} = \dot{U}_{jt} + 1/6 \cdot (K_{1j} + 2K_{2j} + 2K_{3j} + K_{4j}).$$

Перед вычислениями надо задать шаг Δt и начальные значения $t_0, \dot{U}(t_0), U(t_0)$.

15.4 Частотный анализ при определении сейсмической реакции

При определении реакции от сейсмического воздействия кроме описанных в п.15.3, 15.4 методов применяется метод случайных колебаний. Будем рассматривать его на примере линейных систем с одной степенью свободы, обладающих различными собственными частотами ω_n (от 0 до ∞) с малой постоянной вязкого затухания ξ . Решение, полученное на основе этого метода, представляет спектральную характеристику реакции $y_{s,p}$ при вероятности превышения уровня p и длительности сейсмических колебаний s . Она определяется как величина, кратная $\sigma_y(s)$ - стандартному отклонению реакции системы с одной степенью свободы, т.е.

$$y_{s,p} = r_{s,p} \cdot \sigma_y(s),$$

где $r_{s,p}$ – пиковый коэффициент (рисунок 15.4). Выбор его величины основывается на практически приемлемых приближенных решениях. Для типичных колебаний грунта значение $r_{s,p}$ лежит в интервале от 1.25 до 3.5. Чаще всего полагают этот коэффициент постоянным, определяя максимальную реакцию на основе «правила 3σ ».

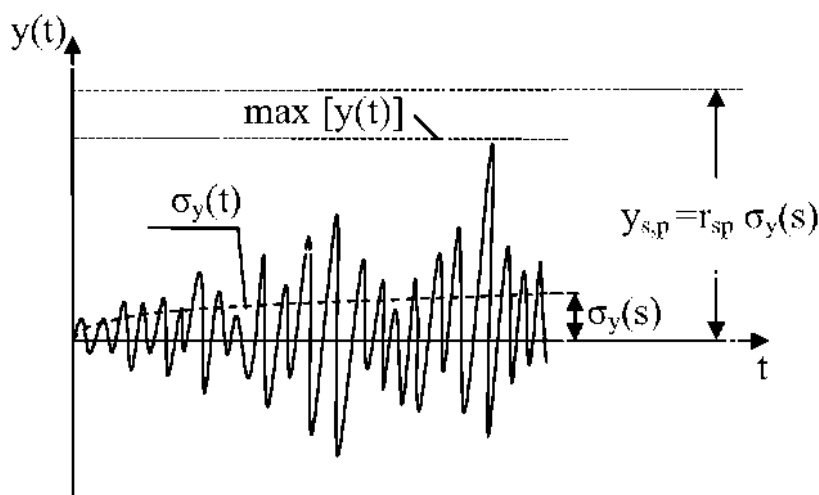


Рисунок 15.4 Связь между стандартными отклонениями реакции, пиковым коэффициентом, максимальной реакцией

В теории стационарных случайных возмущений линейных систем основным соотношением между функциями спектральной плотности (ФСР) на входе и выходе является зависимость:

$$G_y(\omega) = G(\omega) \cdot |H(\omega)|^2. \quad (15.16)$$

Здесь $G_y(\omega)$ – ФСР на выходе; $G(\omega)$ – ФСР на входе; $|H(\omega)|$ – передаточная функция или функция усиления линейной системы, которая также может рассматриваться, как амплитуда установившейся реакции на синусоидальное возмущение с единичной амплитудой и частотой ω . Дисперсия реакции (квадрат стандарта) равна площади (рисунок 15.5) под кривой $G_y(\omega)$:

$$\sigma_y^2 = \int_0^{\infty} G_y(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} G(\omega) \cdot |H(\omega)|^2 d\omega. \quad (15.17)$$

Реакция в виде относительного смещения стационарной случайной функции равна стандарту σ_y . Реакция в виде ускорения определяется из выражения

$$\sigma_a = \omega_n^2 \sigma_y. \quad (15.18)$$

В формуле (15.17) квадрат передаточной функции для системы с одной степенью свободы, имеющей собственную частоту ω_n и коэффициент относительного затухания ξ_n равен:

$$|H(\omega)|^2 = [(\omega_n^2 - \omega)^2 + 4\xi_n^2 \omega_n^2 \omega^2]^{-1}. \quad (15.19)$$

На краях частотного диапазона приведенные формулы дают следующие результаты [10]. При $\omega_n \rightarrow \infty$ и $|H(\omega)|^2 \rightarrow \omega_n^{-4}$ стандарт ускорения a стремится к стандартному отклонению ускорения грунта, т.е.

$$\sigma_a = \omega_n^2 \sigma_y \rightarrow \left[\int_0^\infty G(\omega) d\omega \right]^{1/2} = \sigma. \quad (15.20)$$

Когда $\omega_n \rightarrow 0$ и, соответственно, $|H(\omega)|^2 \rightarrow \omega_n^2$, получим квадрат стандарта смещения грунта (дисперсию):

$$\sigma_y^2 = \int_0^\infty \omega^{-4} G(\omega) d\omega = \sigma_{см.гр.}^2. \quad (15.21)$$

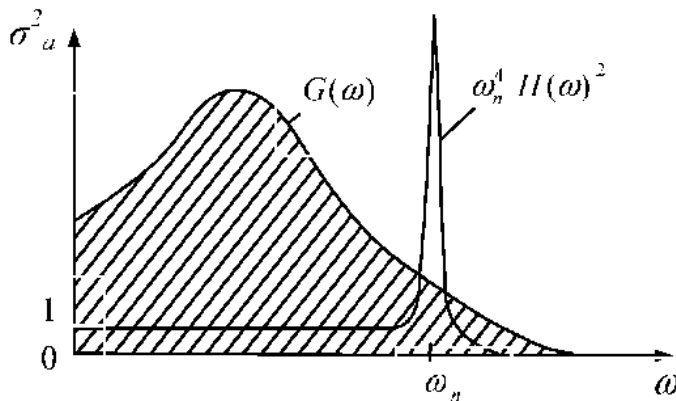


Рисунок 15.5 – Дисперсия реакции системы

Функция спектральной плотности сейсмического воздействия $G(\omega)$ плавно изменяется вблизи собственной частоты системы ω_n . Однако передаточная функция $|H(\omega)|^2$ имеет в точке ω_n острый пик (рисунок 15.5). Высота этого пика зависит от коэффициента

затухания ξ (см. формулу 15.19).

Согласно [10], дисперсия реакции в виде ускорения $\sigma_a^2 = \omega_n^4 \sigma_y^2$ может быть аппроксимирована выражением:

$$\sigma_a^2 = \omega_n^4 \int_0^\infty G(\omega) |H(\omega)|^2 d\omega \cong \omega_n^4 G(\omega_n) \cdot \int_0^\infty |H(\omega)|^2 d\omega - \omega_n G(\omega_n) + \int_0^{\omega_n} G(\omega) d\omega. \quad (15.22)$$

На рисунке 15.5 показан вклад, вносимый узкой резонансной полосой частот вблизи ω_n , соответствующий третьему члену в выражении (15.22). Первому слагаемому в (15.22) соответствует вклад

от диапазона частот $(0, \omega_n)$. Член $\omega_n G(\omega_n)$ имеет знак минус для того, чтобы соответствующая ему площадь не учитывалась дважды. Относительная значимость третьего слагаемого в выражении (15.22) возрастает при увеличении собственной частоты. Для слабо демпфированных систем доминирует первый член.

Формула (15.22), согласно [10], приводится к виду:

$$\sigma_a^2 = G(\omega_n) \omega_n (\pi / 4\xi - 1) + \int_0^{\omega_n} G(\omega) d\omega. \quad (15.23)$$

Величина дисперсии ускорения, определяемая формулой (15.21), соответствует установившимся колебаниям. На самом деле величина дисперсии возрастает от нуля (в момент сейсмического толчка) до максимальной величины к моменту окончания колебаний. Вклад в дисперсию (квадрат стандарта реакции) на частотном и временном диапазоне удобнее описывать зависящей от времени функцией спектральной плотности $G_y(\omega, t)$. В этом случае дисперсию переменной реакции можно получить интегрированием по частоте

$$\sigma_y^2 = \int_0^{\infty} G_y(\omega, t) d\omega. \quad (15.24)$$

Для линейной системы с функцией импульсной реакции $h(t)$ можно записать зависящую от времени передаточную функцию

$$|H(\omega, t)| = \int_0^t h(t - \tau) \exp(-\omega\tau) d\tau. \quad (15.25)$$

При $t \rightarrow \infty$ функция (15.25) сходится к передаточной функции $|H(\omega)|$. Если система внезапно подвергается установившемуся возбуждению, характеризующемуся функцией спектральной плотности $G(\omega)$, то функция спектральной плотности переменной реакции будет равна:

$$G_y(\omega, t) = G(\omega) \cdot |H(\omega)|^2. \quad (15.26)$$

Интегрирование переменной функции усиления по частоте, согласно [], приводит к приближенной зависимости

$$\int_0^{\infty} |H(\omega, t)|^2 d\omega \approx \pi / (4\xi\omega_n^3 [1 - \exp(-2\xi\omega_n t)] \approx [(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi\omega_n^2\omega^2]^{-1}. \quad (15.27)$$

Эта формула имеет вид, аналогичный (15.19), за исключением параметра ξ_s – фиктивного затухания, зависящего от времени. Формула для определения ξ_s может быть получена из выражения (15.27):

$$\xi_s = \xi / [1 - \exp(-2\xi\omega_n t)] . \quad (15.28)$$

Для практических расчетов весьма важно определить оценку дисперсии ускорения в конце s временного интервала

$$\sigma_a^2(s) = \omega_n^4 \sigma_y^2(s) \approx G(\omega_n) \omega_n (\pi / 4 \xi_s - 1) + \int_0^{\omega_n} G(\omega) d\omega . \quad (15.29)$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Айзенберг, Я.М. Сейсмоизоляция и адекватные системы сейсмозащиты / Я.М. Айзенберг. – М.: Стройиздат, 1983. – 140 с.
2. Айзенберг, Я.М. Сооружения с выключающимися связями для сейсмических районов / Я.М. Айзенберг. – М.: Стройиздат, 1976. – 299 с.
3. Барштейн, М.Ф. Воздействие сейсмических сил на систему с “n” степенями свободы / М.Ф. Барштейн // Снижение стоимости и улучшение качества сейсмостойкого строительства. – М.: Госстройиздат, 1961.
4. Барштейн, М.Ф. Приложение вероятностных методов к расчету сооружений на сейсмические воздействия / М.Ф. Барштейн // Строительная механика и расчет сооружений. – 1960. – № 2. – С. 6-14.
5. Бернштейн, А.С. Расчет сооружений с учетом их пространственной работы на динамическое действие ветра / А.С. Бернштейн // Сб. трудов ЦНИИСК «Динамика строительных конструкций». – М., 1988.
6. Бернштейн, С.А. Основы динамики сооружений / С.А. Бернштейн. – М.: Госстройиздат, 1938. – 158 с.
7. Бирбрайер, А.Н., Сейсмостойкость атомных электростанций / А.Н. Бирбрайер, С.Г. Шульман. – М.: Информэнерго, 1979. – 60 с.
8. Болотин, В.В. К расчету строительных конструкций на сейсмические воздействия / В.В. Болотин // Строительная механика и расчет сооружений. – М., 1980. – №1. – С. 9-14.
9. Болотин, В.В. Статистические методы в строительной механике / В.В. Болотин. – М.: Госстройиздат, 1965. – 266 с.
10. Ванмарке, Э.Х. Реакция сооружений на землетрясения / Э.Х. Ванмарке // Сейсмический риск и инженерные решения. – М.: Недра, 1981. – С. 256-270.
11. Вибрации в технике: справочник. Т. 6 “Защита от вибрации и ударов”. – М.: Машиностроение, 1981. – 456 с.
12. Временные рекомендации по назначению нагрузок и воздействий, действующих на многофункциональные высотные здания и комплексы в Москве. – М.: ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко, 2006.
13. Гольденблат, И.И. О развитии методов расчета на сейсмостойкость / И.И. Гольденблат, В.А. Быховский. – М.: Госстройиздат, 1958.

14. Десп-Гартог, Дж.П. Механические колебания / Дж.П. Десп-Гартог. – М.: Физматгиз, 1960. – 17 с.
15. Деркачев, А.А. Метод расчета на сейсмические воздействия с помощью акселерограмм / А.А. Деркачев // Бюл. Совета по сейсмологии. – Изд-во АН СССР. – 1963. – № 14. – С. 69-766.
16. Завриев, К.С. Динамика сооружений / К.С. Завриев. – М.: Трансжелдориздат, 1946. – 288 с.
17. Завриев, К.С. Основы теории сейсмостойкости зданий и сооружений / К.С. Завриев, А.Г. Назаров, Я.М. Айзенберг. – М.: Стройиздат, 1970. – 222 с.
18. Инструкция по расчету несущих конструкций промышленных зданий и сооружений на динамические нагрузки. – М.: Стройиздат, 1970. – 288 с.
19. Инструкция по устранению воздействий вибраций рабочих мест на предприятиях железобетонных изделий / СН 190-61. – М.: Госиздательство по стр-ву, арх-ре и стр. материалам, 1962. – 67 с.
20. Казакевич, М.И. Аэродинамика мостов / М.И. Казакевич. – М.: Транспорт, 1987. – 240 с.
21. Карцивалдзе, Г.Н. Сейсмостойкое строительство за рубежом / Г.Н. Карцивалдзе, С.В. Мелведев, Ш.Г. Папетваридзе. – М.: Госстройиздат, 1962. – 223 с.
22. Клаф, Р. Динамика сооружений / Р. Клаф, Дж. Пензен. – М.: Стройиздат, 1978. – 320 с.
23. Колоушек, В. Динамика строительных конструкций / В. Колоушек. – М.: Стройиздат, 1965. – 632 с.
24. Красников, П.Д. Сейсмостойкость гидротехнических сооружений из грунтовых материалов / П.Д. Красников. – М.: Энергоиздат, 1981. – 240 с.
25. Кренделл, С. Роль демпфирования в теории колебаний / С. Кренделл // Механика: периодический сборник переводов иностранных статей. – М., 1971. – С. 5-129.
26. Купер, Дж. Вероятностные методы анализа сигналов и систем / Дж. Купер, К. Макгиллем. – Мир, 1989.
27. МГСН 4.04-94. Многофункциональные здания и комплексы / Правительство Москвы. – М.: ПИАЦ «Градо», 1995. – 60 с.
28. МГСН 4.19-2005 Временные нормы проектирования многофункциональных высотных зданий и зданий-комплексов в городе Москве / Правительство Москвы. – М.: ПИАЦ «Градо», 2005. – 52 с.

29. Медведев, С.В. Сейсмические воздействия на здания и сооружения / С.В. Медведев, В.К. Карапетян, А.М. Быховский. – М.: Стройиздат, 1968. – 191 с.
30. Пазаров, А.Г. Метод инженерного анализа сейсмических сил / А.Г. Пазаров. – Ереван, 1959.
31. Пиколаенко, П.А. Вероятностные методы динамического расчета машиностроительных конструкций / П.А. Пазаров. – М.: Машгиз, 1967. – 365 с.
32. Пиколаенко, П.А. Динамика и сейсмостойкость сооружений / П.А. Пиколаенко, Ю.П. Пазаров. – М.: Стройиздат, 1988. – 306 с.
33. Ньюмарк, Н. Основы сейсмостойкого строительства / Н. Ньюмарк, Э. Розенблюэт. – М.: Стройиздат, 1982.
34. Паповко, Я.Г. Введение в теорию механических колебаний / Я.Г. Паповко. – М.: Наука, 1971. – 239 с.
35. Перельмутер, А.В. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа / А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер. – Киев: ВПП “Компас”, 2001.
36. Петров, А.А. Влияние взаимной корреляции между обобщенными координатами при случайных колебаниях линейных систем / А.А. Петров, С.В. Базилевский // Строительная механика и расчет сооружений. – 1979. – №4.
37. Писаренко, Г.С. Рассеяние энергии при механических колебаниях / Г.С. Писаренко. – Киев: изд-во АНУССР, 1962.
38. Пичугин, С.Ф. Ветровая нагрузка на строительные конструкции / С.Ф. Пичугин, А.В. Махишко. – Полтава, 2005.
39. Поляков, С.В. Последствия землетрясения в г. Ниигата (Япония) в 1964 году / С.В. Поляков // Сейсмостойкость крупнопанельных и каменных зданий. – М., 1967.
40. Попов, Н.А. Рекомендации по уточненному динамическому расчету зданий и сооружений на действие пульсационной составляющей ветровой нагрузки / Н.А. Попов. – М.: ЦНИИСК, 2000.
41. Резников, Л.М. Об учете внутреннего неупругого сопротивления при исследовании случайных колебаний конструкций / Л.М. Резников // Строительная механика и расчет сооружений. – 1974. – №4. – С.48-53.
42. Рекомендации по определению расчетной сейсмической нагрузки для сооружений с учетом пространственного характера воздействия и работы конструкций. – М.: ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко, 2004.

43. Реттер, Э.И. Архитектурно-строительная аэродинамика / Э.И. Реттер. – М.: Стройиздат, 1984.- 294 с.
44. Руководство по расчету зданий и сооружений на действие ветра. – М.: ЦНИИСК, Стройиздат, 1978.
45. Руководство по проектированию виброизоляции машин и оборудования. – М.: Стройиздат, 1972. – 160 с.
46. Руководящий документ по отрасли. Методика расчета зданий ГРЭС подвесными котлами на пульсационную нагрузку от ветра. РД 34 72.099-91 / И.С. Холопов, Ю.Э. Сеницкий; Минэнерго.- М., 1991.
47. Румшицкий, Л.З. Элементы теории вероятностей / Л.З. Румшицкий. – М.: Наука, 1976.
48. Саваренский, Е.Ф. Элементы сейсмологии и сейсмометрии / Е.Ф. Саваренский, Д.П. Кирнос. – М.: Гостеортехиздат, 1965. – 543 с.
49. Савицкий, Г.А. Ветровая нагрузка на сооружения / Г.А. Савицкий. – М.: Стройиздат, 1972. – 110 с.
50. Сейсмическая шкала и методы измерения сейсмической интенсивности / отв. ред.: А.Г. Назаров, Н.В. Шабалин. – М.: Стройиздат, 1968. – 229 с.
51. Сейсмостойкие конструкции зданий: учебное пособие для вузов / С.В. Поляков. 2-е изд. – М.: Высшая школа, 1983. – 304 с.
52. Сейсмостойкое строительство зданий: учебное пособие для вузов / под ред. И.Л. Корчинского. – М.: Высшая школа, 1971. – 320 с.
53. Сеницкий, Ю.А. Основы динамики стержневых систем / Ю.А. Сеницкий, И.А. Епанчинцева; Куйб. гос. ун-т. – Куйбышев, 1978.
54. Симмиу, Э. Воздействия ветра на здания и сооружения / Э. Симмиу, Р. Сканлан. – М.: Стройиздат, 1984.
55. Смирнов, А.Ф. Устойчивость и колебания сооружений / А.Ф. Смирнов. – М.: Трансжелдориздат, 1958.
56. СНиП 2.01.07-85. Нагрузки и воздействия.
57. Снитко, П.К. Динамика сооружений / П.К. Снитко – М.: Госстройиздат, 1960. – 356 с.
58. Соболев, П.И. О дополнительных требованиях к строительным конструкциям сооружений сейсмостойких тепловых электростанций / П.И. Соболев, Е.Г. Карпов // Энергетическое строительство. – 1993. – №6. – С. 55.

59. Сорокин, Е.С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем / Е.С. Сорокин. – М.: Госстройиздат, 1960. – 125 с.
60. Справочник по динамике сооружений / под ред. Б.Г. Коренева, И.М. Рабиновича. – М.: Стройиздат, 1972.
61. Строительство в сейсмических районах. СНиП. Нормы проектирования СНиП II-7-81*. – М.: Стройиздат, 1982.
62. Тимошенко, С.П. Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко. – М.: Наука, 1967. – 444 с.
63. Филиппов, А.П. Колебания деформируемых систем / А.П. Филиппов. – М.: Машиностроение, 1979. – 724 с.
64. Холопов, И.С. Расчет стержневых систем на сейсмические воздействия: учебное пособие / И.С. Холопов. – Самара, 1993. – 74 с.
65. Цейтлин, А.И. Статистические методы расчета сооружений на групповые динамические воздействия / А.И. Цейтлин, П.И. Гусева. – М.: Стройиздат, 1979. – 176 с.
66. Цейтлин, А.И. Новая редакция раздела “Ветровые нагрузки”, главы СНиП “Нагрузки и воздействия” / А.И. Цейтлин, А.С. Бернштейн, Н.И. Гусева, И.А. Попов // СМиРС. – № 6. – 1987. – С. 28.
67. Davenport, A.G. The Dependence of Wind Loads on Meteorological Parameters. Proc. of Inter. Res. Seminar of Wind Effects on Buildings and Structures. Ottawa, 1967.
68. Davenport, A.G., The Spectrum of Horizontal Gustiness Near the Ground in High Winds . J. Royal Meteorol. Soc. – №87. – 1961. – 194-211 p.
69. EN 1991-1-4. Eurocode 1: Action on Structures – Part 1-4. General actions – Wind actions.-Brussels: CEN, 2002. – 54 p.
70. N.A. Popov, V.I. Travush, M.A. Berezin “Pedestrian Wind Comfort Study for Moscow International Business Center”, IV Symposium Environment Effects in Building and People – Actions, influences, interactions, discomfort: Susice, POLAND, 16-18 JUNE 2004.
71. Van der Hoven J. Power Spektrum of Horizontal Wind Speed in the Frequency Range from 0.0007 to 900 cycles per Hour. J. of Met., v 14, 1957.