

ОПД.Р.03 СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ СООРУЖЕНИЙ

Учебное пособие с вариантами заданий

В учебном пособии изложены основные теоретические сведения динамики сооружений. Пособие содержит большое число наиболее характерных типовых задач с подробными решениями, которым предшествует краткое изложение теории.

Пособие предназначено для студентов всех форм обучения, изучающих курс «Динамика и устойчивость искусственных сооружений». Оно может служить практическим пособием для проектировщиков, аспирантов и инженеров, изучающих и использующих в практической работе методы динамики сооружений.

| | |
|---|-----|
| Введение..... | 4 |
| 1 Предварительные замечания..... | 5 |
| 1.1 Определение перемещений с помощью интеграла Мора..... | 5 |
| 1.2 Применение метода сил и метода перемещений..... | 10 |
| 1.3 Дифференциальные уравнения движения..... | 16 |
| 2 Основные понятия теории колебаний..... | 23 |
| 2.1 Виды колебаний по способу их возбуждения..... | 23 |
| 2.2 Восстанавливающие силы..... | 25 |
| 2.3 Кинематика колебательных процессов..... | 27 |
| 3 Свободные колебания линейных систем с одной степенью свободы..... | 29 |
| 3.1 Линейные осцилляторы..... | 29 |
| 3.2 Диссипативные свойства материалов и конструкций..... | 34 |
| 3.3 Изображение колебательных процессов в системе с одной степенью свободы на фазовой плоскости..... | 36 |
| 4 Вынужденные колебания систем с одной степенью свободы..... | 38 |
| 4.1 Колебания под действием периодической нагрузки..... | 38 |
| 4.2 Движение упругой системы под действием произвольной силы | 46 |
| 4.3 Колебания при внезапно приложенной постоянной силе | 48 |
| 4.4 Кратковременное действие нагрузки..... | 59 |
| 4.5 Колебания под действием мгновенного импульса. Ударная нагрузка..... | 51 |
| 5 Свободные колебания систем с несколькими степенями свободы..... | 60 |
| 5.1 Спектр частот и форм собственных колебаний..... | 60 |
| 5.2 Приближённые способы определения собственных частот колебаний..... | 63 |
| 6 Динамический расчет балок и рам на вибрационную нагрузку..... | 67 |
| 7 Расчеты на сейсмостойкость..... | 73 |
| 8 Задачи для выполнения контрольных работ..... | 83 |
| Библиографический список..... | 101 |

ВВЕДЕНИЕ

Динамика сооружений – это наука о методах расчета сооружений, подвергающихся действию динамических нагрузок. Нагрузки, действующие на сооружение, с течением времени могут изменяться по величине и направлению действия. Это могут быть периодические нагрузки, создаваемые машинами, установленными в сооружении, порывами ветра, движением транспорта вблизи сооружения, или импульсивные нагрузки, вызванные взрывом, ударом или землетрясением. Динамические нагрузки на сооружения характеризуются настолько быстрым изменением во времени их величины, направления или места приложения, что вызывают колебания сооружений, которые необходимо учитывать при расчете.

При действии таких нагрузок объектам сообщается ускорение, существенно влияющее на их напряженное состояние. При этом деформации объектов изменяются во времени, а в упругих системах, какими являются искусственные сооружения, возникают переменные напряжения.

В отличие от постоянных нагрузок, переменные нагрузки могут быть очень коварными, так как вблизи резонанса амплитуды колебаний при малых сопротивлениях резко возрастают. И тогда малая по величине периодическая нагрузка может раскачать сооружение до опасного предела, то есть вызвать напряжения и перемещения, значительно превосходящие те, которые возникают от большей нагрузки, но с иной частотой действий. Всё это объясняется различной способностью сооружений реагировать на периодические действия нагрузки.

Расчет сооружений с учетом переменных нагрузок называется динамическим расчетом, в котором используются хорошо разработанные методы статики сооружений.

1 ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

С целью оценки динамических воздействий на различные конструкции необходимо, с учетом обоснованных допущений, разработать расчетную схему, составить дифференциальные уравнения движения исследуемых объектов и определить метод вычисления искомых величин. Для этого, кроме основ высшей математики используются методы, принципы и теоремы дисциплин теоретической механики, сопротивления материалов и строительной механики. Наиболее часто из указанных дисциплин используются следующие темы:

- определение перемещений с помощью интеграла Мора;
- применение метода сил и метода перемещений;
- составление дифференциальных уравнений движения.

Ниже приводится краткая характеристика этих тем применительно к расчетам в динамике сооружений.

1.1 Определение перемещений с помощью интеграла Мора

Для динамического расчета стержневых систем (балки, валы, рамы, фермы) от различных нагрузок необходимо вычислять линейные и угловые перемещения, возникающие в этих системах. Наиболее эффективным способом определения таких перемещений является использование интеграла Мора (1.1), когда перемещение от любой нагрузки можно выразить через внутренние силовые факторы (ВСФ), возникающие в заданной системе от этой нагрузки и от единичного усилия:

$$\text{Перемещение} = \sum \int_0^l \frac{(BC\Phi)_1 \cdot (BC\Phi)_P dz}{J}. \quad (1.1)$$

Здесь $BC\Phi_1$ – внутренний силовой фактор от единичной силы или единичного момента как функция координаты z произвольного сечения,

$BC\Phi_P$ – внутренний силовой фактор от заданной нагрузки как функция координаты z произвольного сечения,

J – жесткость, соответствующая деформации растяжения, сжатия, сдвига, кручения или изгиба.

Направление единичного усилия принимается совпадающим с направлением определяемого перемещения. Если в результате решения искомое перемещение получилось положительным, то действительное его направление совпадает с направлением единичного усилия, а если отрицательным, то противоположно этому направлению. Когда определяется линейное смещение, например прогиб точки, то единичное усилие представляет безразмерную сосредоточенную силу, приложенную в этой точке. Если определяется угол поворота поперечного сечения, то единичное усилие представляет собой безразмерный сосредоточенный момент, приложенный в этом сечении.

В случае пространственной задачи формула (1.1) содержит все ВСФ, которые могут возникать в поперечных сечениях элементов. В общем случае эта формула имеет вид:

$$\Delta = \sum_0^l \int \frac{M_{x1} \cdot M_{xP}}{EI_x} dz + \sum_0^l \int \frac{M_{y1} \cdot M_{yP}}{EI_y} dz + \sum_0^l \int \frac{M_{z1} \cdot M_{zP}}{GI_p} dz + \sum_0^l \int \frac{N_1 \cdot N_P}{EA} dz + \sum_0^l \int \frac{Q_{y1} \cdot Q_{yP}}{GA} k_y dz + \sum_0^l \int \frac{Q_{x1} \cdot Q_{xP}}{GA} k_x dz. \quad (1.2)$$

Здесь E – модуль упругости первого рода (при растяжении, сжатии, или изгибе), G – модуль упругости второго рода (при сдвиге, срезе, или кручении)

A – площадь поперечного сечения бруса,

EI_y и EI_x – изгибные жесткости бруса,

GI_p – крутильная жесткость бруса,

EA – продольная жесткость бруса, GA – жесткость бруса при сдвиге,

k_x и k_y – коэффициенты, зависящие от формы поперечного сечения бруса.

индекс «1» – соответствует ВСФ от единичного усилия,

индекс «P» – соответствует ВСФ от заданной нагрузки.

Для плоской задачи в большинстве случаев используется лишь одно слагаемое формулы (1.2). Например, если рассматриваются сооружения, элементы которых работают преимущественно на изгиб (балки или рамы), то в формуле

(1.2) с достаточной точностью можно оставить только интеграл, зависящий от изгибающих моментов и перемещения определять по формуле (1.3):

$$\Delta = \sum \int_0^l \frac{M_{x1} \cdot M_{xp}}{EI_x} dz. \quad (1.3)$$

Эпюры изгибающих моментов принято строить на растянутом волокне. При расчете сооружений, элементы которых работают в основном на центральное растяжение и сжатие (фермы), можно не учитывать деформации изгиба и сдвига и пользоваться формулой (1.4):

$$\Delta = \sum \int_0^l \frac{N_1 \cdot N_p}{EA} dz. \quad (1.4)$$

Определение перемещений в системах, состоящих из прямолинейных элементов постоянной жесткости, можно упростить путем специальных приемов вычислений интегралов вида (1.3). Одним из таких приёмов является способ А.К. Верещагина.

Результат перемножения двух эпюр равен произведению площади одной из них на ординату другой (обязательно прямолинейной) эпюры, взятую под (или над) центром тяжести первой эпюры (рис. 1.1), формула (1.5).

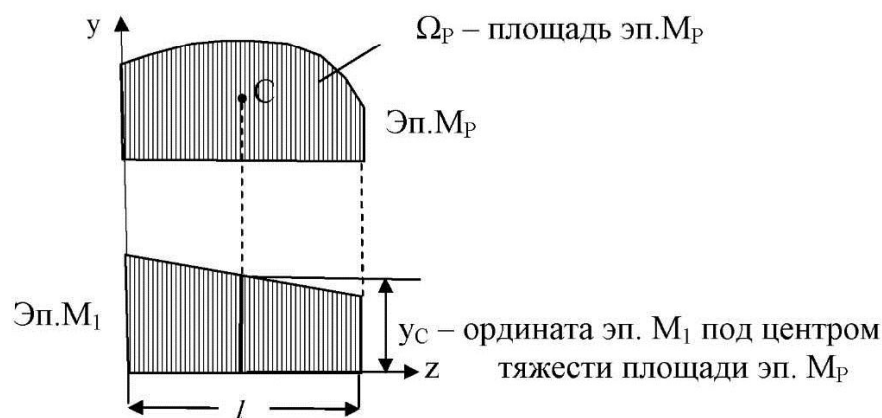


Рис. 1.1

$$\int_0^l \frac{M_P \cdot M_1}{EI_x} dz = \frac{\Omega_P \cdot y_C}{EI_x}. \quad (1.5)$$

Пример 1.1 Определить по формуле Мора (1.3) и по правилу Верещагина (1.5) прогиб середины консоли, если на её конце действует сосредоточенная сила $P = 20$ кН. Длина консоли $l = 3$ м, изгибная жесткость $EI_x = 100$ кНм² (рис. 1.2, а).

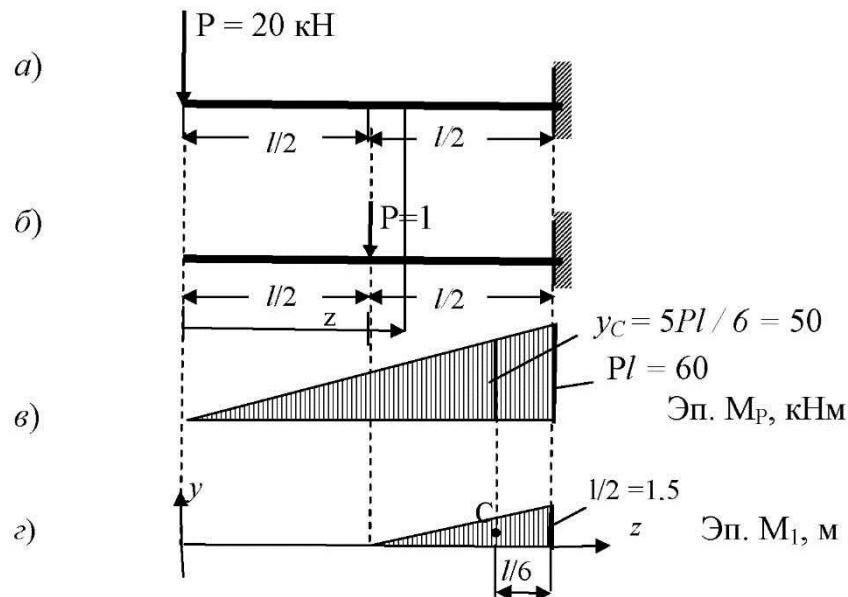


Рис. 1.2

Решение. Единичная сила прикладывается к точке, перемещение которой необходимо определить (рис. 1.1, б). Изгибающие моменты в произвольном сечении консоли на расстоянии z от нагрузки (силы «P») и единичной силы соответственно равны $M_{xP} = P \cdot z$, $M_{x1} = 1 \cdot (z - 0,5l)z$, на участке $0 \leq z \leq 0,5l$ изгибающие моменты в поперечных сечениях консоли от единичной силы равны нулю. Искомый прогиб определяется непосредственным интегрированием правой части равенства (1.3):

$$\Delta_{z=0,5l} = \sum \int_0^l \frac{M_{x1} \cdot M_{xP}}{EI_x} dz = \int_0^{0,5l} \frac{0 \cdot P \cdot z}{EI_x} dz + \int_{0,5l}^l \frac{(z - 0,5l) \cdot P \cdot z}{EI_x} dz = \frac{5Pl^3}{48EI_x}.$$

С учетом исходных данных $\Delta_{z=0,5l} = \frac{5 \cdot 20 \cdot 3^3}{48 \cdot 900} = 0,0625$ м.

Площадь эпюры изгибающих моментов от единичной силы (рис. 1.1, *з*) равна $\Omega = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{l^2}{8}$. Центр тяжести этой эпюры, имеющей вид треугольника, находится на расстоянии $1/3$ высоты от основания, т.е. на расстоянии, равном $\frac{1}{3} \cdot \frac{l}{2} = \frac{l}{6}$. Ордината второй эпюры, взятая над центром тяжести первой y_C , определяется из подобия треугольников (рис. 1.1, *в*), $\frac{y_C}{5l} = \frac{Pl}{l}$, откуда $y_C = P \frac{5l}{6}$.

Искомый прогиб с использованием правила Верещагина определяется по формуле (1.5) $\Delta_{z=0,5l} = \frac{\Omega_P \cdot y_C}{EI_x} = \frac{l^2 P \cdot 5l}{8 \cdot 6 \cdot EI_x} = \frac{5Pl^3}{48EI_x}$, что совпадает с результатом, полученным путем интегрирования.

Когда перемножаются две эпюры, имеющие вид трапеций (рис. 1.3), то для вычисления интеграла Мора ($EI_x = const$) пользуются формулой трапеций (1.6).

$$\frac{1}{EI} \int_0^l M_1 \cdot M_2 dz = \frac{l}{6EI_x} (2ac + 2bd + ad + bc). \quad (1.6)$$

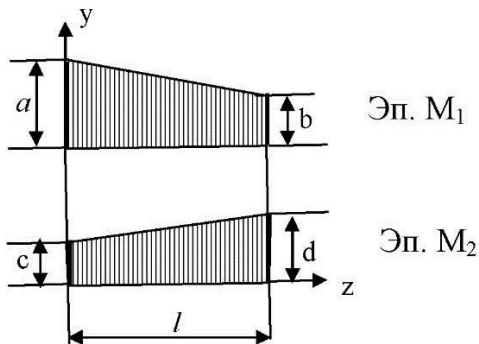


Рис. 1.3

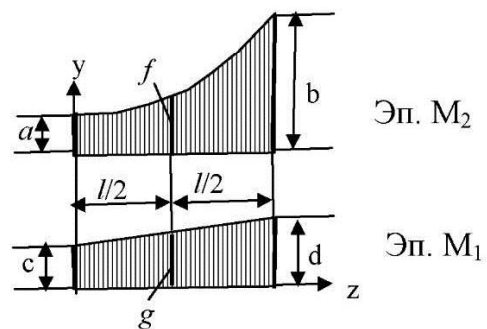


Рис. 1.4

Когда определяются перемещения по формуле Мора для стержней с постоянной изгибной жесткостью, то при перемножении двух эпюр, одна из которых имеет криволинейные очертания (рис 1.4), используется формула Симп-

δ_{12} – перемещение по направлению усилия X_1 от $X_2=1$,

Δ_{jP} – перемещение по направлению усилия X_j от заданной нагрузки и т. д.

Эти коэффициенты определяются с помощью формул (1.3 – 1.7).

Каждое из уравнений (1.8) представляет собой сумму перемещений в основной системе от неизвестных и заданных сил по направлению каждой отброшенной связи, то есть представляет собой уравнение совместности деформаций связи и исследуемого объекта. Из системы « n » уравнений (1.8) определяются « n » неизвестных « X ». Если система один раз статически неопределима, то уравнение метода сил будет иметь вид

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1P} = 0. \quad (1.9)$$

Пример 1.2 Построить эпюру изгибающих моментов и определить наибольшее нормальное напряжение в поперечном сечении балки «AB», формой которого является двутавр № 10 (рис. 1.5, а). Один конец балки жестко заделан, а другой опирается на шарирно-подвижную опору. На балке находится точечный груз, вес которого $G = 2$ кН.

Решение. Для построения эпюры изгибающих моментов необходимо определить значение реакции R_B . Основная система приведена на рис. 1.5, б.

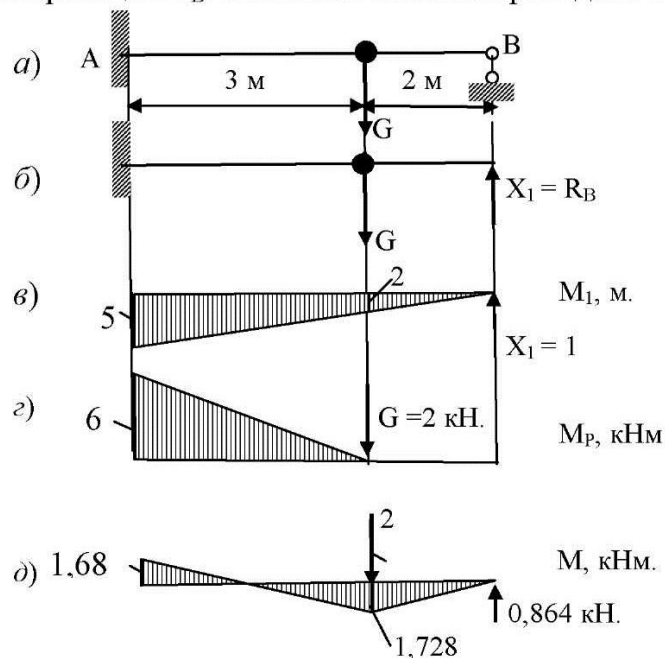


Рис. 1.5

На рис (1.5) приведены эпюры изгибающих моментов, на рис. 1.5, в – от единичной силы, а на рис. 1.5, г – от заданной нагрузки. Система один раз статически неопределима, для определения (лишнего) неизвестного $X_1 = R_B$ применяется каноническое уравнение метода сил (1.9). Для вычисления коэффициента δ_{11} (равного перемещению т. «В» от единичной силы $X_1 = 1$ по её направлению), необходимо эпюру изгибающих моментов от этой силы « M_1 » перемножить саму на себя.

$$\text{По способу Верещагина (формула 1.5) } \delta_{11} = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 \right) = \frac{125}{3EI_x}.$$

Для вычисления коэффициента Δ_{1P} (равного перемещению т. «В» от заданной нагрузки т. е. силы G по направлению X_1), необходимо эпюру изгибающих моментов от заданной нагрузки « M_P » перемножить на эпюру изгибающих моментов от единичной силы M_1 .

$$\text{По формуле трапеций (1.6) } \Delta_{1P} = \frac{3}{6EI_x} [2 \cdot 5 \cdot (-6) + 2 \cdot (-6)] = -\frac{36}{EI_x}.$$

$$\text{Из равенства (1.9) } X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{108}{125} = 0,864 \text{ кН.}$$

Изгибающий момент в сечении балки под силой « G » равен:

$M_G = 0,864 \cdot 2 = 1,728 \text{ кНм} = 172,8 \text{ кНсм}$ (растянуто нижнее волокно балки «АВ»).

Изгибающий момент в сечении балки у заделки «А» равен:

$$M_A = 0,864 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = -1,68 \text{ кНм (растянуто верхнее волокно балки «АВ»)}.$$

Искомая эпюра изгибающих моментов приведена на рис. (1.5, д). Момент сопротивления двутавра № 10 по сортаменту равен $W_x = 39,7 \text{ см}^3$.

$$\text{Максимальное нормальное напряжение } \sigma_{\max} = \frac{M_G}{W_x} = \frac{172,8}{39,7} = 4,35 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 43,5 \text{ МПа}.$$

Если в методе сил в качестве основных неизвестных выбираются внутренние усилия в фиксированных сечениях конструкции, то в методе перемещений за основные неизвестные принимаются перемещения фиксированных сечений.

ний или узлов системы. Число неизвестных перемещений, принимаемых за основные, называется *степенью кинематической неопределенности*. Оно, вообще говоря, не связано со степенью статической неопределенности данной конструкции. Число и вид неизвестных перемещений назначают так, чтобы через них достаточно легко могли быть выражены все прочие факторы системы, в частности, внутренние усилия в ее элементах.

Для иллюстрации сказанного рассмотрим абсолютно жесткий брус, поддерживаемый четырьмя одинаковыми стержнями с жесткостью на растяжение EA (рис. 1.6, а). Такая система является трижды статически неопределимой. В то же время удлинения, а следовательно, и усилия всех стержней вполне определяются одним перемещением, например вертикальным перемещением точки «В», которое обозначим через Z_1 .

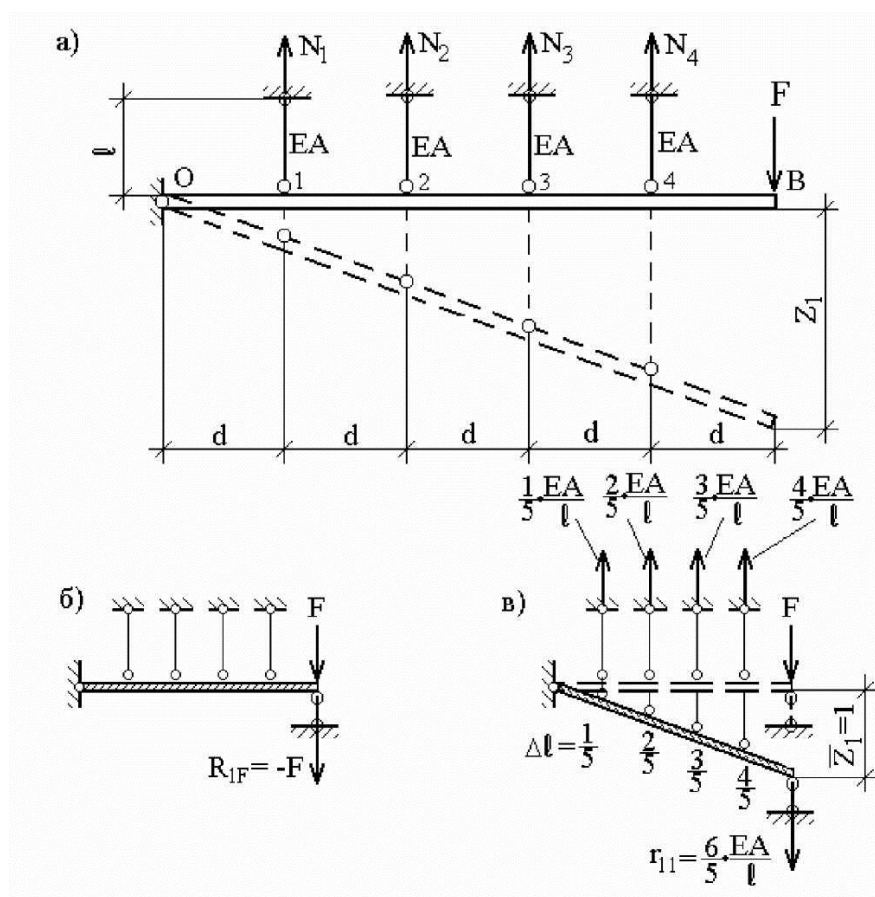


Рис. 1.6

Степень статической неопределимости зависит от числа вертикальных стержней, в то время как степень кинематической неопределимости такой системы остается равной единице при любом числе стержней.

Метод расчета таких систем, рассматриваемый в традиционном курсе сопротивления материалов, также предполагает использование картины деформаций системы, но не является методом перемещений. Здесь же мы рассмотрим решение в форме, характерной для метода перемещений.

Определим усилия в стержнях N_1, N_2, N_3, N_4 , принимая в качестве неизвестного перемещение Z_1 . Устраним перемещение Z_1 , введя по его направлению дополнительную связь (рис. 1.6, б). Сформированную таким образом систему назовем *основной системой* метода перемещений. Сообщим введенной связи принудительное смещение Z_1 , которое определим из условия равенства нулю суммарной реакции R_1 в этой связи, так как в действительности сама связь отсутствует. Будем считать реакцию положительной, если ее направление совпадает с принятым направлением перемещения, и отрицательной – в противном случае.

В основной системе от нагрузки F реакция в связи $R_{1F} = -F$ (рис. 1.6, б). От смещения Z_1 для линейно-упругой системы реакция в связи пропорциональна перемещению Z_1 . Представим ее в виде: $R_{1z_1} = r_{11}z_1$, где r_{11} – реакция от единичного смещения $\bar{z}_1 = 1$ (рис. 1.6, в). Согласно принципу суперпозиции условие отсутствия полной реакции в присоединенной связи имеет вид:

$$R_1 = R_{1z_1} + R_{1F} = 0 \quad (1.10)$$

или

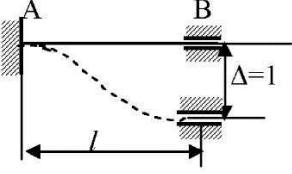
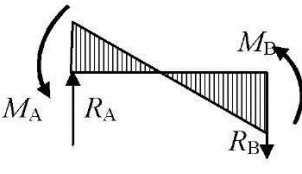
$$r_{11}z_1 + R_{1F} = 0. \quad (1.11)$$

Составляя сумму моментов относительно точки О (рис. 1.6, в), находим:

$$r_{11} = \frac{6}{5} \cdot \frac{FA}{\ell}.$$

Из уравнения (1.11) получим:

Таблица 1.1

| Схема балки и воздействия на нее | Эпюра изгибающих моментов (ординаты отложены со стороны растянутого волокна) и реакции | Формулы для вычисления изгибающих моментов и реакций |
|---|--|--|
|  |  | $M_A = M_B = \frac{6EI}{l^2},$ $R_A = -R_B = \frac{12EI}{l^3}$ |

1.3 Дифференциальные уравнения движения

Число степеней свободы системы при решении динамических задач равно минимальному числу связей, которые необходимо наложить на систему, чтобы полностью устранить движение всех материальных точек, обладающих массой. Каждой степени свободы соответствует обобщенное перемещение в виде какой-либо координаты, которая является функцией единственного аргумента – времени t . Поэтому движение систем с конечным числом степеней свободы « n » описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений, служащих для определения « n » функций, характеризующих движение.

Для систем, имеющих распределённые характеристики жесткости и распределённую массу, число степеней свободы является бесконечным. В этом случае аргументами функций перемещений будет не только время, но и координаты точек, зависящие от физических свойств системы. Поэтому дифференциальные уравнения движения таких систем будут в частных производных. Но часто при проведении динамических расчетов систем с распределенными параметрами их заменяют дискретными системами путем сосредоточения масс в отдельных точках или введения жестких дисков с упругими связями, не имеющих массы. Таким способом для упрощения расчетов систему с бесконечным числом степеней свободы превращают в систему с конечным числом степеней свободы.

При исследовании движения упругих систем начало координат всегда будем принимать в положении их устойчивого статического равновесия и отклонение движущегося объекта отсчитывать от этого положения, тогда силы тяжести, равные упругим реакциям, в уравнение движения не войдут, что позволит упростить решение задач (см. пример 1.3)

Пример 1.3 Составить дифференциальное уравнение колебаний груза, прикрепленного к невесомой пружине (рис. 1.7), используя основной закон движения точки. Масса груза $m = \frac{G}{g}$, жесткость пружины (сила, вызывающая деформацию пружины на единицу длины) равна « c ». Сопротивление движению не учитывать.

Решение. На груз в произвольном положении действуют сила тяжести G и реакция пружины, равная $R = c(f_{cm} + y)$. Дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось « y » имеет вид: $m\ddot{y} = G - R = G - cf_{cm} - cy$. Учитывая, что $G - cf_{cm} = 0$ (рис. 1.7, б), получим $m\ddot{y} + cy = 0$ или, после деления на « m », дифференциальное уравнение колебаний груза примет вид

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0, \quad (1.13)$$

где принято обозначение

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}. \quad (1.14)$$

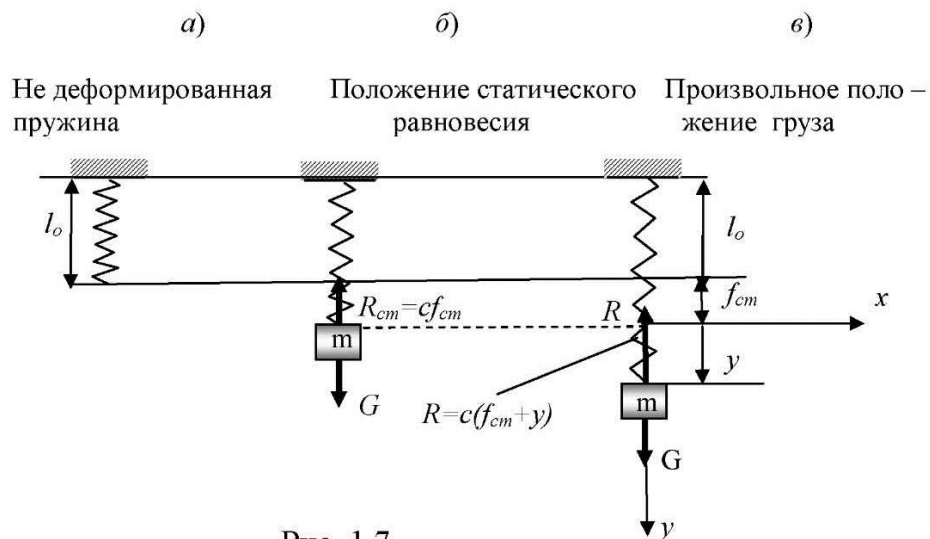


Рис. 1.7

При решении динамических задач использование метода сил и метода перемещений несколько отличается от решения статических задач по содержанию, но форма остаётся такой же. Рассмотрим применение этих методов для составления дифференциальных уравнений движения систем с одной и несколькими степенями свободы.

Пример 1.4 Составить дифференциальное уравнение колебаний точечной массы « m », находящейся на невесомой упругой балке « AB », имеющей изгибную жесткость « EI » рис.(1.8, a), используя метод перемещений.

Решение. По принципу Даламбера, если приложить в произвольный момент времени силу инерции к массе, движущейся с ускорением, то система окажется в покое. То есть в данном случае деформированная балка с точечным грузом после приложения силы инерции оказывается в покое (рис. 1.8, a).

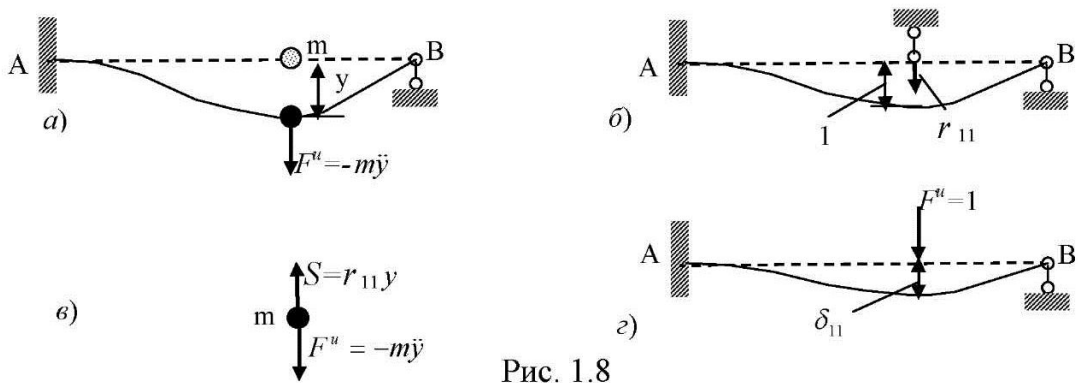


Рис. 1.8

Устраним линейное перемещение массы « m » постановкой стержня в месте её положения. Тогда получим основную систему метода перемещений, т. е. система станет кинематически неизменяемой (рис. 1.8, б). При единичном перемещении такого узла реактивное усилие во введенном стержне равно r_{11} . На свободную массу (рис. 1.8, в) действует упругая восстанавливающая сила « S » (реакция балки), определяемая через жесткость r_{11} равенством $S = r_{11}y$, и сила инерции $F^u = -m\ddot{y}$. По закону «действия – противодействия» на балку со стороны массы действует точно такая же сила в противоположном направлении. Это реальная сила, действующая на упругую балку со стороны колеблющейся мас-

сы, зависит от физических и геометрических свойств упругих элементов $r_{11} = f(EI)$.

Уравнение равновесия сил, действующих на точку, имеет вид: $S - F'' = 0$ или

$$r_{11}y + m\ddot{y} = 0, \quad (1.15)$$

Если здесь обозначить $y = Z$, а $m\ddot{y} = R$, то такое равенство $r_{11} \cdot Z + R = 0$ в строительной механике называют каноническим уравнением метода перемещений.

Разделив равенство (1.15) на m , получим искомое дифференциальное уравнение колебаний:

$$\ddot{y} + \frac{c}{m}y = 0, \quad (1.16)$$

это равенство можно представить в виде равенства (1.13), если обозначить:

$$\omega = \sqrt{\frac{r_{11}}{m}}. \quad (1.17)$$

Пример 1.5 Решить задачу в примере 1.4 методом сил.

Решение. На рис. 1.8, а после приложения силы инерции в любой момент времени балка находится в покое, на рис. 1.8, б к балке приложена единичная сила инерции, которая вызывает перемещение, равное δ_{11} . Прогиб балки от силы инерции $\delta_{11}F'' = \delta_{11} \cdot (-m\ddot{y})$ должен быть равен перемещению массы «у». То есть, как и в методе сил, уравнение составляется на основе того, что прогиб от неизвестного усилия равен прогибу от заданной нагрузки:

$$y = \delta_{11} \cdot (-m\ddot{y}). \quad (1.18)$$

Под «у» понимается отклонение массы от положения равновесия, поэтому, как отмечалось выше, вес массы и соответствующая ему упругая реакция балки в уравнение (1.18) не входят. Разделив уравнение (1.18) на $m\delta_{11}$, получим:

$$\ddot{y} + \frac{1}{m\delta_{11}}y = 0. \quad (1.19)$$

Представим, как и в предыдущем примере, дифференциальное уравнение колебаний (1.19) в виде равенства (1.13), введя обозначение:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}} . \quad (1.20)$$

Для систем с « n » степенями свободы после того, как применён принцип Даламбера, т. е. приложены силы инерции ко всем точкам (обладающих массой) колеблющейся упругой системы и она оказалась в покое, задачи динамики можно решать методами строительной механики для уравновешенных систем сил. Если система с « n » степенями свободы рассчитана на действие единичных сил инерции, то методами строительной механики определяется матрица коэффициентов канонических уравнений метода сил « A » (1.21), которая называется **матрицей податливости**, а соответствующие коэффициенты « δ » – **коэффициентами податливости**.

$$П = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix} . \quad (1.21)$$

Если движение масс ограничить соответствующими связями, то упругие свойства системы будут выражены матрицей коэффициентов метода перемещений, которая называется **матрицей жёсткости** (1.22), а соответствующие коэффициенты « r » – **коэффициентами жёсткости**.

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix} . \quad (1.22)$$

Пример 1.6 На основе метода сил и метода перемещений составить дифференциальные уравнения колебаний двух точечных масс на невесомой упругой раме после того как эти массы получили начальные скорости и смещения (рис. 1.9).

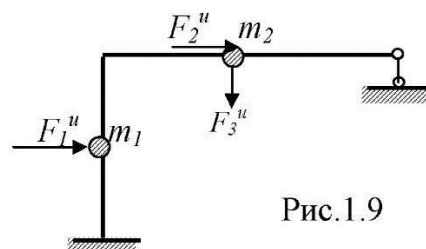


Рис.1.9

Решение. Система имеет три степени свободы: (перемещение первой массы по горизонтали Z_1 , а второй – по горизонтали Z_2 и вертикали Z_3) Предположим, что массы рамы получили некоторые начальные скорости и смещения, после чего рама совершает свободные колебания, характеризуемые независимыми перемещениями масс Z_1, Z_2, Z_3 (рис. 1.9, а). Эти перемещения составляют вектор:

$$\vec{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

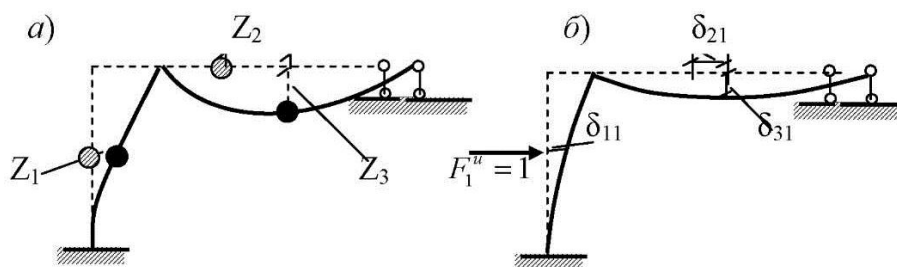


Рис. 1.9

В любой момент движения на раму действуют силы инерции $F_i^u = -m\ddot{Z}_i$, которые можно представить как вектор сил инерции:

$$\vec{F}^u = \begin{bmatrix} F_1^u \\ F_2^u \\ F_3^u \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} m_1 \ddot{Z}_1 \\ m_2 \ddot{Z}_2 \\ m_3 \ddot{Z}_3 \end{bmatrix} = -M \ddot{\vec{Z}}, \quad (1.24)$$

где $M = \begin{bmatrix} m_1 & & \\ & m_2 & \\ & & m_3 \end{bmatrix}$ – диагональная матрица масс, а номера масс соответствуют номерам независимых перемещений.

В рассматриваемом примере $m_2 = m_3$. Матрица податливости системы «П» (1.21) может быть определена, когда система рассчитана на действие единичных сил инерции $F_i^u = 1$.

$$\Pi = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix}. \quad (1.25)$$

На рисунке 1.9, б проиллюстрирован смысл элементов первого столбца этой матрицы – это перемещения всех масс от единичной силы $F_1^u = 1$. В процессе колебаний перемещение первой массы Z_1 будет равно прогибу рамы в этой точке, который может быть получен по принципу независимости действия сил с помощью первой строки матрицы «А».

$$\delta_{11} \cdot F_1^u + \delta_{12} \cdot F_2^u + \delta_{13} \cdot F_3^u = Z_1. \quad (1.26)$$

Составляя равенства, аналогичные (1.26) для остальных точек с учетом (1.24), получим дифференциальные уравнения движения системы точек (1.27):

$$\begin{aligned} \delta_{11} \cdot m_1 \cdot \ddot{Z}_1 + \delta_{12} \cdot m_2 \cdot \ddot{Z}_2 + \delta_{13} \cdot m_3 \cdot \ddot{Z}_3 + Z_1 &= 0, \\ \delta_{21} \cdot m_1 \cdot \ddot{Z}_1 + \delta_{22} \cdot m_2 \cdot \ddot{Z}_2 + \delta_{23} \cdot m_3 \cdot \ddot{Z}_3 + Z_2 &= 0, \\ \delta_{31} \cdot m_1 \cdot \ddot{Z}_1 + \delta_{32} \cdot m_2 \cdot \ddot{Z}_2 + \delta_{33} \cdot m_3 \cdot \ddot{Z}_3 + Z_3 &= 0. \end{aligned} \quad (1.27)$$

В матричной форме равенства (1.27) можно записать:

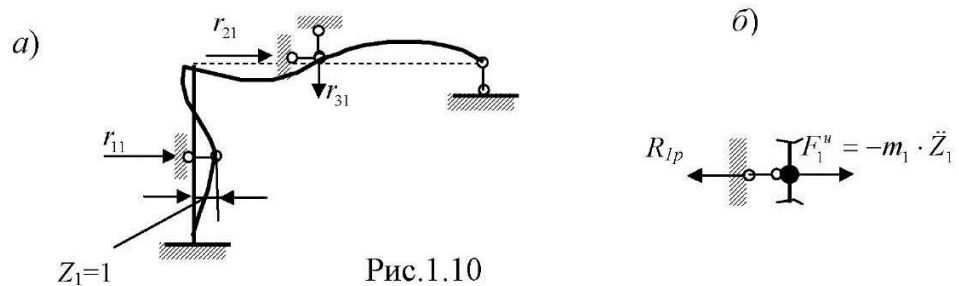
$$PM\ddot{\bar{Z}} + \bar{Z} = 0. \quad (1.28)$$

Форма уравнений (1.27) совпадает с каноническими уравнениями метода сил.

Матрица жесткости (1.22) для данной задачи имеет вид:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}. \quad (1.29)$$

На рисунке 1.10, а проиллюстрирован смысл элементов первого столбца матрицы жесткости – это реактивные усилия во введенных стержнях при единичном перемещении узла 1.



Уравнения равновесия рамы в деформированном состоянии на основе уравнений метода перемещений принимает вид $R\bar{Z} + \bar{R}_p = 0$.

От действия всех сил инерций вектор грузовых реакций $\bar{R}_p = -\bar{F}^u = M\bar{z}^{\cdot}$.

На рис. 1.10, б показаны силы, действующие на узел 1, который находится в покое после приложения силы инерции. Уравнения равновесия этих сил будут $F_i^e - R_{ip} = 0$, а с учетом силы инерции, выраженной через ускорение первой массы получим $m_i \cdot \ddot{Z}_i + R_{ip} = 0$. Для общего случая в матричной форме

$$M\bar{\ddot{Z}} + R\bar{Z} = 0. \quad (1.30)$$

В развернутой форме равенство (1.30) для данной задачи примет вид

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{Z}_1 + r_{11} Z_1 + r_{12} Z_2 + r_{13} Z_3 &= 0, \\ m_2 \ddot{Z}_2 + r_{21} Z_1 + r_{22} Z_2 + r_{23} Z_3 &= 0 \\ m_3 \ddot{Z}_3 + r_{31} Z_1 + r_{32} Z_2 + r_{33} Z_3 &= 0 \end{aligned} \quad (1.31)$$

Форма уравнений (1.31) совпадает с каноническими уравнениями метода перемещений.

2 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ

2.1 Виды колебаний по способу их возбуждения

Процесс колебаний состоит в том, что некоторая величина то возрастает, то убывает во времени. Физическими причинами колебаний могут быть различные взаимодействия объектов: механические, электрические, тепловые и пр. Здесь рассматриваются механические взаимодействия различных систем, при которых изменяются во времени координаты, скорости и ускорения точек системы, внутренние усилия и напряжения в деформируемых объектах.

Колебания упругих систем возникают под действием различных возмущений при взаимодействии этих систем с некоторыми объектами. В результате таких возмущений на упругую систему могут действовать:

- мгновенные силы;
- периодически прилагаемые внешние силы;
- силы, вызывающие изменение параметров системы;

– силы, поддерживающие колебания.

Колебания могут происходить как около положения равновесия, так и относительно некоторого определенного движения системы, в частности стационарного движения. На рис. 2, а, б, в приведены колебательные системы, состоящие из груза и упругого элемента. На рис. 2, а, б упругим элементом является пружина, на рис. 2, в таким элементом является консольный стержень, при колебаниях которого изменяется его изгибная жесткость. На рис. 2, г колебательной системой является математический маятник с нерастяжимой нитью.

В зависимости от характера возбуждения колебания могут быть:

Свободные – колебания, вызванные толчком, либо отклонением системы от положения равновесия или изменения стационарного движения и протекающие без дальнейшего внешнего воздействия. Так, на рис. 2, а груз, прикрепленный к пружине и выведенный из состояния покоя, будет совершать свободные колебания.

Вынужденные – колебания, вызываемые и поддерживаемые вынуждающими силами, заданными в виде явных функций времени и независимыми от движения системы. На рис. 2, б груз, прикрепленный к пружине, совершает вынужденные колебания под действием сил упругости и силы «Р», зависящей от времени. Вынужденные колебания могут быть вызваны кинематическим возбуждением, которое возникает при перемещении объекта с упругой связью по неровной поверхности (рис. 3), при землетрясениях, когда перемещение фундамента с ускорением вызывает колебания сооружения.

Параметрические – колебания, возникающие в системах, параметры которых (жесткость или масса) заданным образом изменяются во времени. На рис. 2, в упругий стержень с грузом на конце будет совершать параметрические колебания, так как при его поворотах относительно заделанного конца меняется длина касания с поверхностью и, следовательно, меняется изгибная жесткость (параметр) стержня.

Автоколебания – незатухающие стационарные колебания, поддерживаемые за счет энергии, которая подводится к системе от источников не колеба-

тельного характера. Например, движение молоточка в электрическом звонке в одну сторону происходит при замыкании цепи электромагнита, а после удара цепь размыкается и молоточек под действием сил упругости начинает двигаться в обратном направлении, замыкая через некоторое время цепь, процесс повторяется до тех пор, пока к системе будет подведено напряжение (пока нажата кнопка звонка). На рис. 2, з для поддержания колебаний маятника при наличии сопротивления прикладывается мгновенный импульс, направленный в сторону движения каждый раз, когда маятник проходит положения равновесия. Здесь сила, подводимая к системе, меняется в зависимости от самого движения (в данном случае от направления движения).

По физической природе колебания указанных четырех типов весьма существенно различаются между собой.

Свободные колебания упругих систем обусловлены возникновением в этих системах восстанавливающих сил.

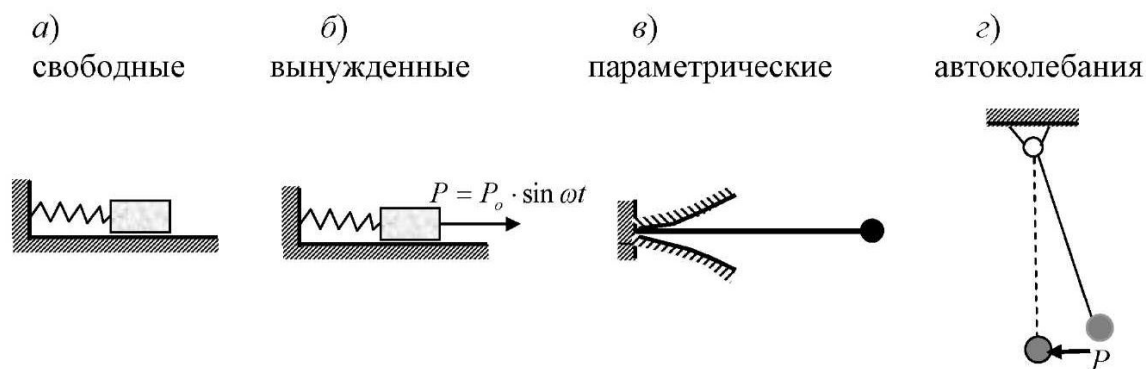


Рис. 2.1 Виды колебаний

2.2 Восстанавливающие силы

Если при отклонении системы от положения статического равновесия возникают силы, стремящиеся вернуть эту систему обратно в это положение, то такие силы называются *восстанавливающими*. При отклонении груза, прикрепленного к пружине, деформации балки, элемента конструкции или всего сооружения такими силами являются *силы упругости*. При отклонении маятника восстанавливающую роль играет *момент силы тяжести относительно оси*

подвеса маятника. При погружении корабля восстанавливающей является *сила Архимеда*, а в пневмосистемах – *сила упругости газа*.

В механических системах с упругими связями восстанавливающие силы возникают вследствие деформирования этих связей в процессе колебаний. Восстанавливающие свойства упругой связи определяются *упругой характеристикой*:

$$R = R(y), \quad (2.1)$$

где R – сила взаимодействия между колеблющимся объектом и упругой связью, приложенная к связи (восстанавливающая сила, равная по величине и обратная по направлению силе R , приложена к объекту),

y – перемещение, вызванное силой R .

Если восстанавливающую роль играют неупругие силы, например момент силы тяжести, то соответствующую характеристику называют *квазиупругой*.

Если восстанавливающая сила строго пропорциональна перемещению, то она имеет линейную характеристику

$$R = cy, \quad (2.2)$$

где c – коэффициент жесткости, представляющий статическую силу, способную вызвать перемещение равное единице.

Поведение колебательной системы зависит от характеристики восстанавливающих сил.

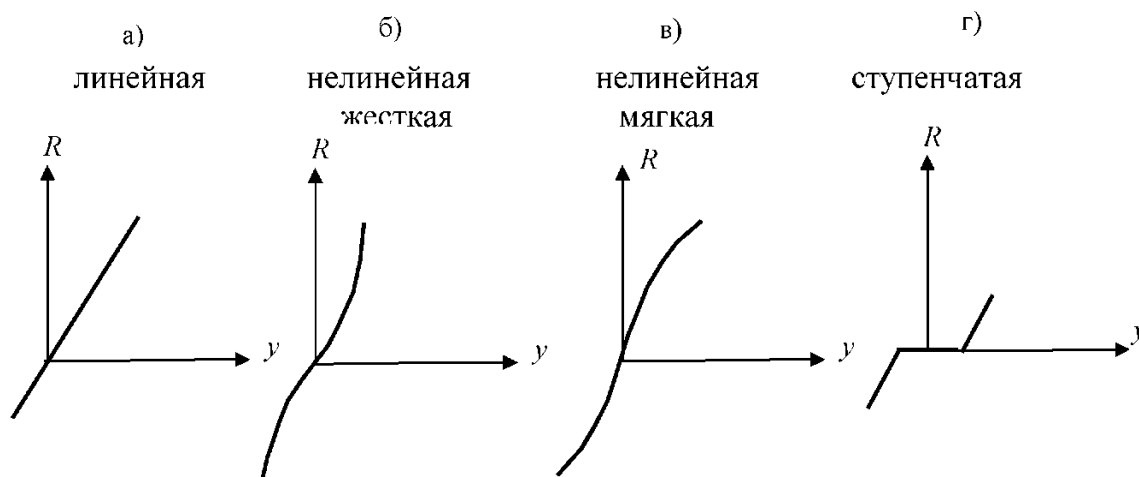


Рис. 2.2 Характеристики восстанавливающих сил

На рис. 2.2, *а* характеристика восстанавливающей силы линейная и колебания в этом случае называются *линейными*. На рис. 2.2, *б* с увеличением перемещения жесткость (отношение силы к перемещению) увеличивается, и характеристика восстанавливающей силы называется *жесткая нелинейная*, на рис. 2.2, *в* с увеличением перемещения жесткость уменьшается, характеристика восстанавливающей силы будет *мягкая нелинейная*, а колебания в этих двух случаях называют *нелинейными*. Кривые «перемещение – сила» могут иметь самую замысловатую форму. На рис. 2.2, *г* кривая характеризует зазоры в соединениях.

Следует помнить, что силы упругости при нахождении системы в покое (положение статического равновесия) или равны нулю, или уравновешены внешними силами, и в этом случае они не будут называться восстанавливающими. Восстанавливающие силы всегда, стремясь вернуть систему в положение статического равновесия, обращаются в нуль, когда система оказывается в этом положении равновесия, и становятся максимальными по величине при максимальном отклонении системы от положения равновесия.

Система, если её внешнее и внутреннее сопротивление будет меньше действия восстанавливающих сил, совершает свободные колебания, характер которых зависит от физических свойств этой системы.

2.3 Кинематика колебательных процессов

На рис. 2.3 показаны некоторые виды колебаний, при которых координата «*y*», определяющая положение объекта в зависимости от времени «*t*», изменяется по различным законам.

Простейшими являются свободные гармонические колебания (рис. 2.3, *а*), описываемые уравнением:

$$y = a \sin(\omega t + \alpha). \quad (2.3)$$

Любые дифференциальные уравнения вида (1.13) имеют решение (2.3), где

a – амплитуда колебаний, величина «*y*», равная максимальному отклонению колеблющейся массы от положения устойчивого статического равновесия;

ω – круговая (циклическая) частота колебаний, равная числу полных колебаний (циклов) величины «у» за 2π секунд и зависящая от физических и геометрических свойств колеблющейся системы (1.14, 1.17, 1.20);

α – начальная фаза, величина, характеризующая положение колеблющейся массы в начальный момент времени $y_0 = a \sin \alpha$;

t – текущее время;

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ – период колебаний (время одного цикла).

Число полных колебаний (циклов) некоторой величины за 1 секунду называется технической частотой:

$$\nu = \frac{1}{T}. \quad (2.4)$$

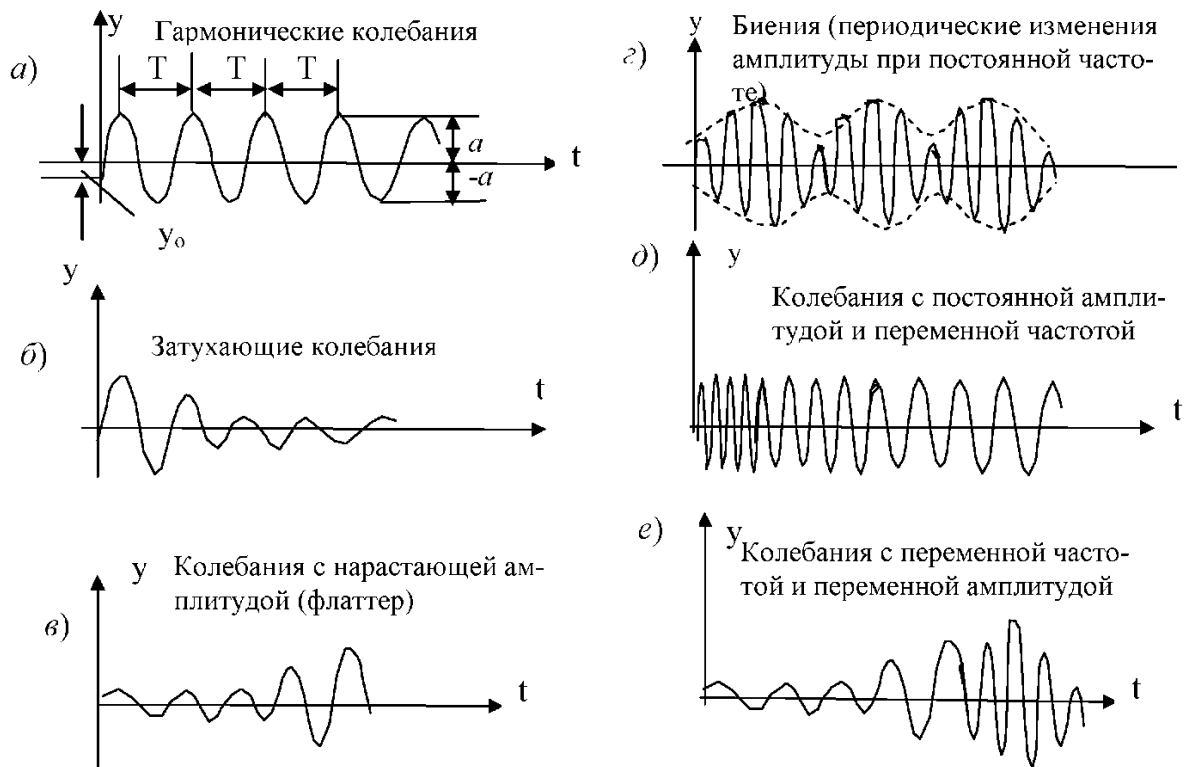


Рис. 2.3

Единицей измерения технической частоты является Герц (1 Гц соответствует одному изменению величины за 1 сек). Зависимость между круговой и технической частотой имеет вид:

$$\omega = 2\pi \cdot \nu. \quad (2.5)$$

Иногда техническую частоту определяют как число полных колебаний в минуту и определяют по формуле:

$$n = \frac{60}{T} = \frac{60\omega}{2\pi}. \quad (2.6)$$

При гармонических колебаниях скорости и ускорения объектов, внутренние силовые факторы, деформации и напряжения меняются также по гармоническим законам.

3 СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

3.1 Линейные осцилляторы

Положение упругой системы с одной степенью свободы в любой момент времени определяется зависимостью обобщенной координаты от времени $q = f(t)$, на величину которой влияет внутреннее и внешнее сопротивление. Дифференциальные уравнения движения 1.13, 1.15, 1.19, полученные в п. 1.3, можно представить выражением:

$$a_n \ddot{q} + cq = 0, \quad (3.1)$$

где q – обобщенная координата, а постоянные величины, зависящие от физических свойств системы, называют a_n – коэффициентом инерции, c – коэффициентом жесткости.

Дифференциальное уравнение (3.1) часто используют в виде (3.2):

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0, \quad (3.2)$$

где обозначено $\omega^2 = \frac{c}{a_n}$.

Если, кроме восстанавливающей силы, равной cq , на систему действует сопротивление, обобщенная сила которого пропорциональна скорости \dot{q} , и коэффициент сопротивления $\beta > 0$:

$$R = -\beta\dot{q}, \quad (3.3)$$

то дифференциальное уравнение движения будет иметь вид:

$$a_u\ddot{q} + \beta\dot{q} + cq = 0, \quad (3.4)$$

или, если ввести обозначения $\frac{\beta}{a_u} = 2n$, $\omega^2 = \frac{c}{a_u}$:

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + \omega^2q = 0. \quad (3.5)$$

Упругие системы, дифференциальные уравнения движения которых можно представить в виде 3.2, или 3.5 при условии, что $n < \omega$ (случай *малого сопротивления*), называют **линейным осциллятором** (лат. *oscillare* – колебаться). Таким образом, **линейный осциллятор** представляет собой колеблющуюся систему, совершающую свободные колебания относительно некоторого положения равновесия).

Так равенство (3.6):

$$q = a \sin(\omega t + \alpha) \quad (3.6)$$

является решением дифференциального уравнения (3.2).

В некоторых случаях решение дифференциального уравнения (3.2) представляется в виде равенства (3.7):

$$q = A \sin \omega t + B \cos \omega t. \quad (3.7)$$

В этом равенстве произвольные постоянные « A » и « B » связаны с постоянными уравнения (3.6) зависимостями $B = a \sin \alpha$, $A = a \cos \alpha$ (в силу того, что $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$, уравнение (3.7) аналогично (3.6). Дифференцируя равенства (3.6) и (3.7) по времени, определим закон изменения скорости величины « y »:

$$\dot{q} = a\omega \cos(\omega t + \alpha), \quad (3.8)$$

$$\dot{q} = A\omega \cos \omega t - B\omega \sin \omega t. \quad (3.9)$$

Из равенства (3.8) следует, что максимальная скорость колеблющегося объекта в системе без сопротивления с одной степенью свободы пропорциональна амплитуде и собственной частоте колебаний:

$$V_{\max} = a \cdot \omega. \quad (3.10)$$

Используя начальные условия (при $t=0$ $q=q_0$, $\dot{q}=\dot{q}_0$), из уравнений (3.6) и (3.8) определим $q_0 = a \sin \alpha$, $\frac{\dot{q}_0}{\omega} = a \cos \alpha$, возводя в квадрат обе части этих равенств и складывая, получим формулу для вычисления амплитуды колебаний:

$$a = \sqrt{q_0^2 + \frac{\dot{q}_0^2}{\omega^2}}. \quad (3.11)$$

Поделив обе части уравнений (3.6) и (3.8) друг на друга (при $t=0$, $q=q_0$, $\dot{q}=\dot{q}_0$), получим формулу для определения начальной фазы колебаний:

$$\alpha = \arctg \frac{q_0 \cdot \omega}{\dot{q}_0}. \quad (3.12)$$

При наличии сопротивления, пропорционального скорости движения, решение дифференциального уравнения (3.5) будет зависеть от соотношения степени сопротивления (n) и собственной частоты колебаний системы (ω). Здесь может быть три случая. Характеристическое уравнение, от корней которого зависит решение дифференциального уравнения (3.5), имеет вид:

$$r^2 + 2n \cdot r + \omega^2 = 0. \quad (3.13)$$

Первый случай. Когда $n > \omega$ (большое сопротивление), корни уравнения (3.13) $r_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega^2}$ будут вещественны и отрицательны, тогда решением дифференциального уравнения (3.5) будет выражение:

$$q = e^{-nt} (C_1 e^{nt} + C_2 e^{-nt}). \quad (3.14)$$

Второй случай. Когда $n = \omega$ (равное сопротивление), корни уравнения (3.13) $r_{1,2} = -n$ будут вещественны, равны и отрицательны, тогда решением диф. уравнения (3.5) будет выражение:

$$q = e^{-nt} (C_1 t + C_2). \quad (3.15)$$

Здесь C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Из равенств (3.14) и (3.15) следует, что при $t \rightarrow \infty$, $q \rightarrow 0$, то есть система асимптотически приближается к равновесному состоянию. Возможные графики зависимости $q = f(t)$ показаны на рис. 3.1.

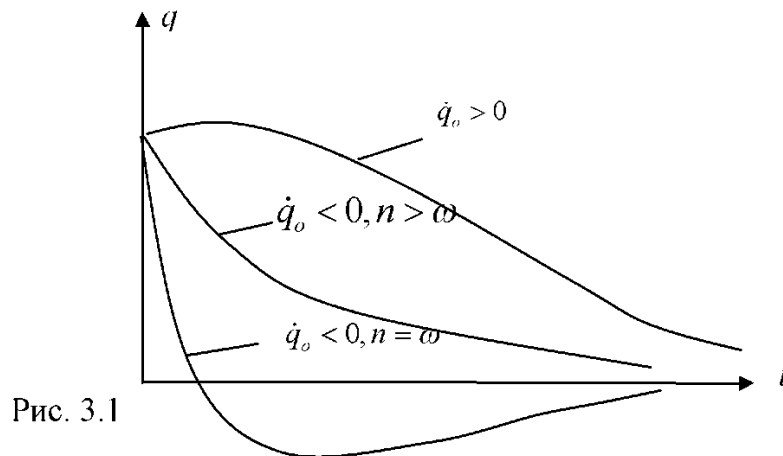


Рис. 3.1

Движение в этих случаях имеет неколебательный характер; система, выведенная из положения равновесия, постепенно уменьшая скорость, стремится к нему, или, пройдя только один раз через положение равновесия, также постепенно возвращается к нему. Такое движение называют *лимитационным* (ограничивающим). Иногда такое движение называют (нестрого) *апериодическим*.

Третий случай. Когда $n < \omega$ (малое сопротивление), корни уравнения (3.13) $r_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega^2}$ будут комплексными, тогда решением дифференциального уравнения (3.5) будет выражение

$$q = e^{-nt} (C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t), \quad (3.16)$$

где
$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2}. \quad (3.17)$$

Если произвольные постоянные C_1 и C_2 заменить другими постоянными так, что $C_1 = a_0 \sin \beta$ и $C_2 = a_0 \cos \beta$, то по аналогии с формулами (3.6) и (3.7) получим:

$$q = a_0 e^{-nt} \sin(\omega_1 t + \beta). \quad (3.18)$$

Закон изменения скорости $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$ имеет вид:

$$\dot{q} = -n \cdot q + a_0 \cdot \omega_1 e^{-nt} \cos(\omega_1 t + \beta). \quad (3.19)$$

Уравнение движения, полученное в виде (3.16), можно преобразовать и выразить через начальные параметры [2], придав ему вид:

$$q = e^{-nt} \left[q_0 (\cos \omega_1 t + \frac{n}{\omega_1} \sin \omega_1 t) + \frac{\dot{q}_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right].$$

Произвольные постоянные β и a_0 определяются из начальных условий (при $t = 0, \dot{q} = \dot{q}_0, q = q_0$) и уравнений (3.18 и 3.19).

$$a_0 = \sqrt{q_0^2 + \frac{(\dot{q}_0 + nq_0)^2}{\omega_1^2}}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{q_0 \cdot \omega_1}{\dot{q}_0 + nq_0}. \quad (3.20)$$

Такое изменение обобщенной координаты с течением времени имеет характер затухающих колебаний (линейный осциллятор с сопротивлением). Графическая зависимость $q=f(t)$ для данного случая показана на рис. 3.2.

Название и физический смысл принятых обозначений здесь следующий:

n – коэффициент затухания (имеет размерность 1/сек) характеризует время, в течение которого продолжаются собственные колебания,

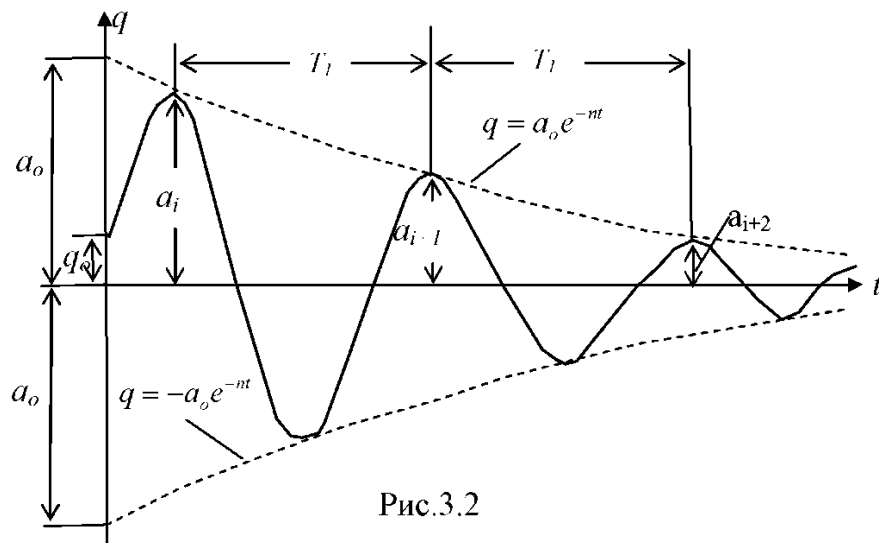
ω_1 – круговая частота затухающих колебаний, равная числу полных колебаний за 2π сек (определяется по формуле 3.17), для реальных конструкций n значительно меньше ω , и поэтому частоты ω и ω_1 считаются одинаковыми,

$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ – период затухающих колебаний, равный времени между двумя

крайними отклонениями в одну сторону,

β – начальная фаза, характеризующая положение колеблющейся массы в начальный момент времени $q_0 = a_0 \sin \beta$,

a – амплитуды затухающих колебаний.



Характерной особенностью затухающих колебаний является постоянство отношения двух последовательных амплитуд во все время колебательного движения. Такое отношение амплитуд называется *декрементом колебаний (или фактором затуханий)*

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_0 e^{n(t-T_1)}}{a_0 e^{-nt}} = e^{-nT_1}, \quad \frac{a_{i-2}}{a_{i-1}} = e^{-nT_1} \quad \text{и т. д.}$$

Величина натурального логарифма таких отношений амплитуд называется *логарифмическим декрементом колебаний* (характеризует убывание размахов колебаний):

$$\delta = nT_1. \quad (3.21)$$

3.2 Диссипативные свойства материалов и конструкций

Колебательные системы обладают свойством диссипации (рассеяния) энергии из-за наличия внутреннего трения в материале (неупругое сопротивление) и сопротивления в узлах конструкций (конструкционное демпфирование).

Чтобы эффективно погасить нежелательные колебания различных конструкций, необходимо определить потерю энергии при колебаниях. Для количественной оценки рассеяния энергии от неупругого сопротивления и конструкционного демпфирования вводятся коэффициенты:

γ – *коэффициент неупругого сопротивления*, равный отношению амплитуд неупругой и упругой сил,

ψ *коэффициент поглощения энергии*, равный отношению энергии, поглощаемой за один цикл, к амплитудному значению потенциальной энергии деформации.

Многочисленные эксперименты показали, что эти коэффициенты и логарифмический декремент колебаний (3.21) ориентировочно связаны между собой зависимостью

$$\psi = 2\delta = 2\pi\gamma. \quad (3.22)$$

В таблице 3.1 приведены полученные экспериментально минимальные, максимальные и средние значения коэффициентов поглощения энергии, а также средних логарифмических декрементов колебаний различных материалов и мостовых конструкций. По известным значениям коэффициентов ψ, γ , или δ можно оценить продолжительность процесса (время затухания) и эффективность гашения колебаний.

Таблица 3.1

| Материал, конструкции | Коэффициент поглощения, ψ | | | Логарифмический декремент, δ |
|--------------------------|--------------------------------|--------------|---------|-------------------------------------|
| | минимальный | максимальный | средний | |
| Бетон без трещин | – | – | 0,06 | 0,03 |
| Бетон с трещинами | 0,2 | – | 0,2 | 0,1 |
| Железобетон | 0,25 | 0,5 | 0,375 | 0,187 |
| Асфальтобетон | 0,314 | 1,884 | 1,099 | 0,549 |
| Резина | 0,2 | 1,2 | 0,7 | 0,35 |
| Сосна, бук | – | – | 0,07 | 0,035 |
| Дуб | – | – | 0,11 | 0,055 |
| Сталь 5 | 0,013 | 0,048 | 0,03 | 0,015 |
| Алюминиевый сплав АМг-61 | 0,0126 | 0,016 | 0,0143 | 0,007 |
| Кирпичная кладка | – | – | – | 0,33 |
| Электрические контуры | – | – | – | 0,003 |
| Камертон | – | – | – | 0,001 |
| Железобетонные мосты | 0,36 | 0,6 | 0,48 | 0,24 |
| Стальные мосты | 0,04 | 0,3 | 0,17 | 0,085 |
| Висячие мосты | 0,03 | 0,15 | 0,09 | 0,045 |

В расчетной практике при проектировании гасителей колебаний пользуются различными характеристиками, отражающими диссипативные свойства основной конструкции, гасителя и системы с гасителем. Такими характеристи-

ками являются логарифмический декремент колебаний и коэффициент неупругого сопротивления основной конструкции, гасителя и системы с гасителем, а так-же коэффициент вязкого трения и коэффициент поглощения энергии гасителя колебаний.

3.3 Изображение колебательных процессов

в системе с одной степенью свободы на фазовой плоскости

Динамическое состояние системы (описываемой дифференциальным уравнением второго порядка) однозначно определяется двумя переменными: координатой и скоростью. Если по оси абсцисс откладывается координата q движения массы, а по оси ординат – соответствующая этой координате скорость \dot{q} , то точка с координатами $q(t)$ и $\dot{q}(t)$ называется *изображающей точкой*. При произвольном значении времени t , возводя в квадрат обе части уравнений (3.6) и (3.8) и складывая их, установим зависимость между координатой « q » и скоростью её изменения \dot{q}

$$\frac{q^2}{a^2} + \frac{\dot{q}^2}{(a\omega)^2} = 1. \quad (3.23)$$

Полученная кривая называется *фазовой траекторией*, а плоскость, в которой она изображается, называется *фазовой плоскостью*. Состоянию равновесия системы соответствует точка с координатами $\dot{q} = 0$, $q = 0$.

Семейство фазовых траекторий (отличающихся друг от друга из-за разных начальных условий) называется *фазовым портретом*, который представляет все возможные процессы в данной системе. Так, фазовым портретом свободных гармонических колебаний является семейство эллипсов (уравнение 3.23, рис. 3.3, *а*). Фазовым портретом затухающих колебаний будут спирали, скручивающиеся к началу координат (рис. 3.3, *б*). В этом случае из любого начального положения изображающая точка с течением времени приближается по спирали к началу координат, система стремится к положению равновесия. Фазовый портрет лимитационных движений приведен на рис. 3.3, *в*.

Анализ движений в линейной колебательной системе с помощью фазовой плоскости имеет перед аналитическими способами исследования только пре-

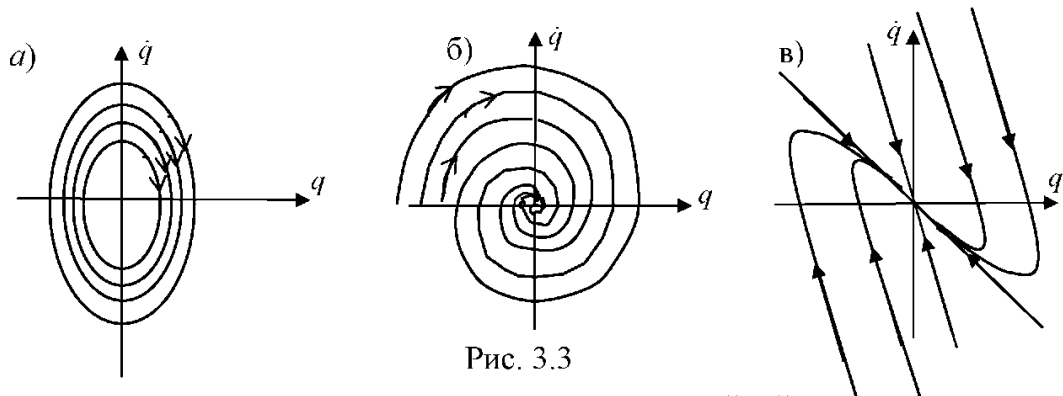


Рис. 3.3

имущество наглядности, в то время как для нелинейной системы он является мощным средством исследования.

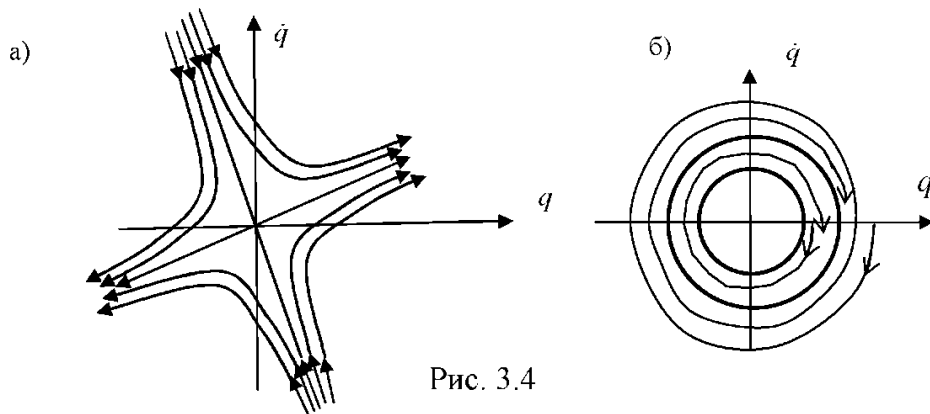


Рис. 3.4

Через каждую точку фазовой плоскости проходит одна фазовая траектория. Исключениями являются точки равновесия (начало координат), называемые особыми точками. На рис. 3.3, *а* колебания системы являются периодическими. Фазовые траектории в окрестности особой точки будут замкнутыми кривыми. Особая точка обладает областью окружения и называется в этом случае **центром**. На рис.3.3 *б* точки пересечения фазовых траекторий с координатными осями монотонно приближаются к особой точке, называемой в этом случае **устойчивым фокусом**. На рис. 3.3, *в* особая точка называется **устойчивым узлом**, а на рис. 3.4, *а* - **седлом**. На рис. 3.4, *б* показаны два предельных цикла: большего радиуса – устойчивый, когда при малом отклонении изображающая точка приближается к нему, и меньшего радиуса – неустойчивый, когда при небольших отклонениях от него изображающая точка будет удаляться от предельного цикла.

4 ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Вынужденные колебания имеют место, когда кроме, восстанавливающей силы и силы сопротивления, на систему ещё действует сила, изменяющаяся во времени. Вынужденные колебания в машинах и механизмах возникают в результате неточной балансировки вращающихся частей (маховиков, коленчатых валов и пр.) или в результате изменения давления газа в цилиндрах двигателя.

Основной причиной возникновения вынужденных колебаний транспортных средств на суше являются неровности пути в виде возвышений, впадин или наличия стыков, на воде – волнения водной поверхности. В искусственных сооружениях (здания, мосты, части их конструкций и пр.) вынужденные колебания возникают из-за движущихся объектов, неуравновешенных вращающихся элементов, ветровой нагрузки и землетрясений.

Реакция упругой системы на такие возмущения будет зависеть не только от величины максимальной силы внешнего воздействия, но и от соотношения периодичности внешней силы и периода собственных колебаний системы. В дальнейшем будет показано, что чем ближе эти периодичности по величине друг к другу, тем все больше становятся размахи колебаний, тем всё больше становится коэффициент динамичности, увеличение которого до бесконечности ограничивается наличием сопротивления.

4.1 Колебания под действием периодической нагрузки

Наибольшее практическое значение для расчета искусственных сооружений имеет вибрационная гармоническая нагрузка, то есть нагрузка, изменяющаяся во времени по закону синуса или косинуса.

Определим уравнение движения точечной массы в результате действия синусоидальной силы $Q = Q_0 \sin pt$ на упругую линейную систему с учетом внутреннего и внешнего сопротивлений (рис. 4.1, *a*). Ввиду многообразия фак-

торов, влияющих на интенсивность колебаний, не существует единой теории, одинаково пригодной для всех видов внутреннего сопротивления. Наибольшее применение получила гипотеза вязкоупругого деформирования материалов, предложенная немецким ученым, работавшим в области физики теории упругости, В. Фойгтом. Закон вязкоупругости по гипотезе Фойгта имеет вид:

$$\sigma = \varepsilon E + \xi \dot{\varepsilon} E, \quad (4.1)$$

где E – модуль упругости,

ξ – коэффициент, характеризующий вязкость материала (он имеет размерность времени),

$\dot{\varepsilon}$ – скорость изменения деформации во времени.

При отбрасывании второго слагаемого в равенстве (4.1) получается обычный закон Гука, при отбрасывании первого слагаемого получается закон Ньютона для вязкой жидкости. Механической моделью соотношения (4.1) является элемент, содержащий идеальную линейно упругую пружину и вязкое сопротивление в виде цилиндра с вязкой жидкостью, в которой движется поршень (рис. 4.1, б). Соотношение (4.1) можно представить как сумму упругого и вязкого напряжений в результате действия упругой $R_{упр}$ (4.2) и вязкой силы $R_{вяз}$ (4.3):

$$\sigma = \sigma_{упр} + \sigma_{вяз}; \quad (4.2)$$

$$R = R_{упр} + R_{вяз}. \quad (4.3)$$

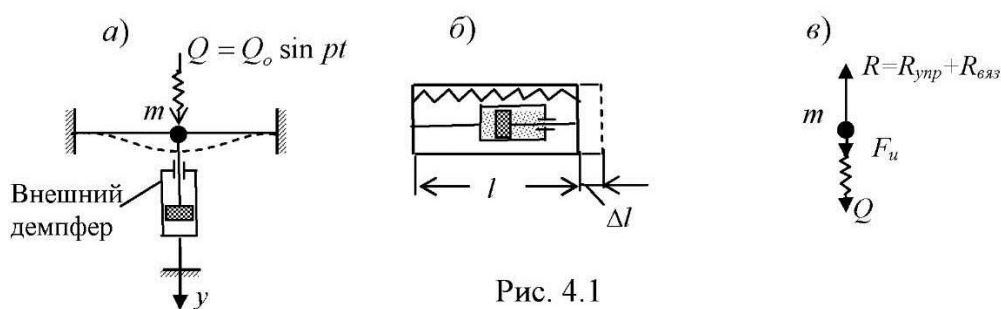


Рис. 4.1

Общее сопротивление учитывается с помощью вязкого элемента, суммарный коэффициент вязкости которого по методике А.Ф. Смирнова принимается равным:

$$\xi = \xi_y + \xi_{\text{внешн}} , \quad (4.4)$$

где ξ_y – условный коэффициент вязкости, с помощью которого корректируются некоторые недостатки гипотезы В. Фойгта; принимается для вынужденных колебаний, равным:

$$\xi_y = \frac{\gamma}{p} . \quad (4.5)$$

На точечную массу m действуют вынужденная сила $Q = Q_0 \sin pt$, сила инерции $F = -m\ddot{y}$ (приложенная с целью использования статических методов решения задачи), а со стороны балки и демпфера на эту массу передаётся сила $R = R_{\text{упр}} + R_{\text{вяз}} = r_{11}y + \xi r_{11}\dot{y}$ (рис. 4.1, в). Уравнение равновесия сил, составленное на основе метода перемещений (1.15), имеет вид:

$$R_{\text{упр}} + R_{\text{вяз}} - F_u - Q = r_{11}y + \xi r_{11}\dot{y} + m\ddot{y} - Q_0 \sin pt = 0 , \text{ или} \\ \ddot{y} + 2n\dot{y} + \omega^2 y = h \sin pt , \quad (4.6)$$

$$\text{где } \omega^2 = \frac{r_{11}}{m} = \frac{c}{m} , \quad 2n = \frac{\xi r_{11}}{m} = \xi \omega^2 , \quad h = \frac{Q_0}{m} .$$

Для большинства практических задач имеет место малое сопротивление (то есть $n < \omega$, п. 3.1). Тогда общий интеграл неоднородного дифференциального уравнения (4.6) представляет сумму:

$$y = y_1 + y_2 = y = a_0 e^{-nt} \sin(\omega_1 t + \beta) + A \sin(pt + \varphi_0) , \quad (4.7)$$

здесь y_1 – общее решение соответствующего однородного уравнения, составленное по типу (3.18). Оно выражает затухающие колебания с собственной частотой $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2} \approx \omega$, y_2 – частное решение, удовлетворяющие правой части уравнения (4.7). На рис. 4.2 показан график решения (4.7). В начале движения имеют место неустановившиеся колебания (переходной процесс). По истечении некоторого времени собственные колебания практически затухают (при $t \rightarrow \infty$,

$y_1 \rightarrow 0, y \rightarrow y_2$), а система совершает установившиеся гармонические колебания с частотой и периодом изменения возмущающей силы $T = \frac{2\pi}{p}$ по закону:

$$y = A \sin(pt + \varphi_o). \quad (4.8)$$

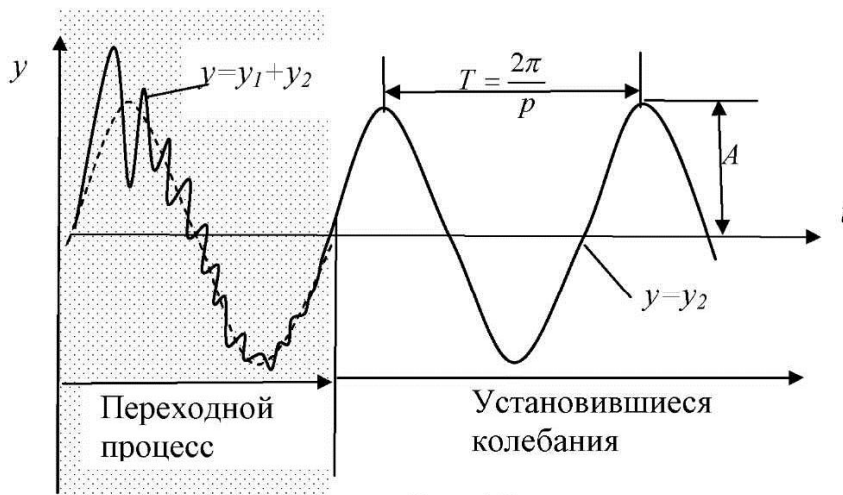


Рис. 4.2

Произвольные постоянные A и φ_o (амплитуда вынужденных колебаний и начальная фаза) определяются из уравнений (4.6–4.8), начальных условий (вывод в учебниках по теории колебаний) и соответственно равны:

$$A = \frac{h}{\sqrt{(\omega^2 - n^2)^2 + 4n^2 p^2}}, \quad (4.9)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_o = \frac{-2np}{\omega^2 - p^2}, \quad (4.10)$$

Преобразуем члены уравнений (4.9 и 4.10), разделив их правые части на ω^2 и учитывая (1.56, 1.60, 4.4 и 4.5): $\frac{4n^2 p^2}{\omega^4} = \frac{(\xi\omega^2)p^2}{\omega^4} = (\gamma + \xi_{\text{внеш}} p)^2$:

$$\frac{h}{\omega^2} = \frac{Q_o}{m\omega^2} = \frac{Q_o}{c} = A_{\text{ст}}, \text{ — прогиб, вызванный статической силой } Q_o,$$

$$\nu = \frac{p}{\omega} \text{ — коэффициент расстройки.}$$

Отношение динамической величины к статической, вызванной силой Q_o , называется **коэффициентом динамичности**.

С учетом введенных обозначений коэффициент динамичности при действии гармонической силы на систему с одной степенью свободы равен:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(1-\nu^2)^2 + (\gamma + \xi_{\text{внеш}} p)^2}}. \quad (4.11)$$

Если система не имеет внешнего демпфера, то формула (4.11) для вычисления коэффициента динамичности приобретает вид:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(1-\nu^2)^2 + \gamma^2}}. \quad (4.12)$$

При совпадении частот собственных и вынужденных колебаний $p = \omega$ (резонанс) коэффициент динамичности обратно пропорционален коэффициенту неупругого сопротивления:

$$\mu = \frac{1}{\gamma}. \quad (4.13)$$

Если не учитывать внешне и внутреннее сопротивление, то коэффициент динамичности следует определять по формуле:

$$\mu = \frac{1}{1-\nu^2}. \quad (4.14)$$

Ввиду того, что $\gamma \ll 1$, при резонансе амплитуды прогибов резко возрастают. Причина этого состоит в том, что при $p = \omega$ в любой момент времени упругая сила $R_{\text{уп}} = r_{11}y$ уравновешена инерционной силой $F_u = -m\ddot{y}$, $r_{11}y - m\ddot{y} = 0$. Так как они образуют взаимно уравновешенную систему сил, они не в состоянии уравновесить внешнюю нагрузку $Q = Q_o \sin pt$. Это может сделать только сила неупругого сопротивления $R_{\text{вз}} - Q = \xi r_{11} \dot{y} - Q_o \sin pt = 0$ (4.6). Вследствие малости неупругой силы прогибы оказываются весьма большими.

Графическая зависимость коэффициента динамичности от соотношения частот вынужденных и свободных колебаний называется амплитудно-частотной характеристикой. Такие графики для ряда значений коэффициента неупругого сопротивления приведены на рис. 4.3, а. При наличии сил сопротивления внешняя нагрузка Q , изменяющаяся во времени по закону синуса, порождает установившиеся колебания, которые зависят от коэффициента расстройки и внутреннего сопротивления системы. При резонансе нагрузка Q ,

уравновешенная только силами внутреннего трения изменяется во времени со сдвигом относительно прогибов на четверть периода, т.е. на угол $\varphi_0 = -\pi/2$ (рис. 4.3, б). В процессе резонансных колебаний прогибы, отставая от внешней силы, достигают максимального значения в те моменты, когда сила обращается в нуль и наоборот. В пределе, когда $\frac{P}{\omega} \rightarrow \infty$ угол $\varphi_0 \rightarrow -\pi$ (рис. 4.3, б), и изменение силы и прогибов происходит в противофазе: экстремумы их совпадают, но направления противоположны, при этом динамический коэффициент μ стремится к нулю. Неупругие силы, несмотря на их относительную малость, играют существенную роль когда $\frac{P}{\omega} \rightarrow 1$. Система как бы включает силы внутреннего трения как резерв, с помощью которого она только и может уравновесить внешнюю нагрузку при $p = \omega$. Следовательно, в резонансной зоне учет сил сопротивления необходим, а вне этой зоны учет этих сил мало сказывается на результатах. Обычно принимается, чтобы собственная частота колебаний отличалась от частоты вынужденной силы не менее, чем на 30 %.

Если частота вынужденной силы равна частоте собственных колебаний системы (резонанс), то общий интеграл уравнения (4.6) без учета сил сопротивления (вывод в теории колебаний) имеет вид:

$$y = \frac{h}{2\omega^2} \sin \omega t - \frac{h}{2\omega} t \cos \omega t. \quad (4.15)$$

Так как $\frac{h}{\omega^2} = \frac{Q_0}{m\omega^2} = \frac{Q_0}{c} = A_{cm}$ (пояснение к выводу формулы 4.11), то равенство 4.15 можно представить в виде $y = 0,5A_{cm}(\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$. Следовательно, при резонансе амплитуда вынужденных колебаний системы без сопротивления, соответствующая второму члену уравнения (4.15) с изменением времени неограниченно возрастает по закону прямой пропорциональности.

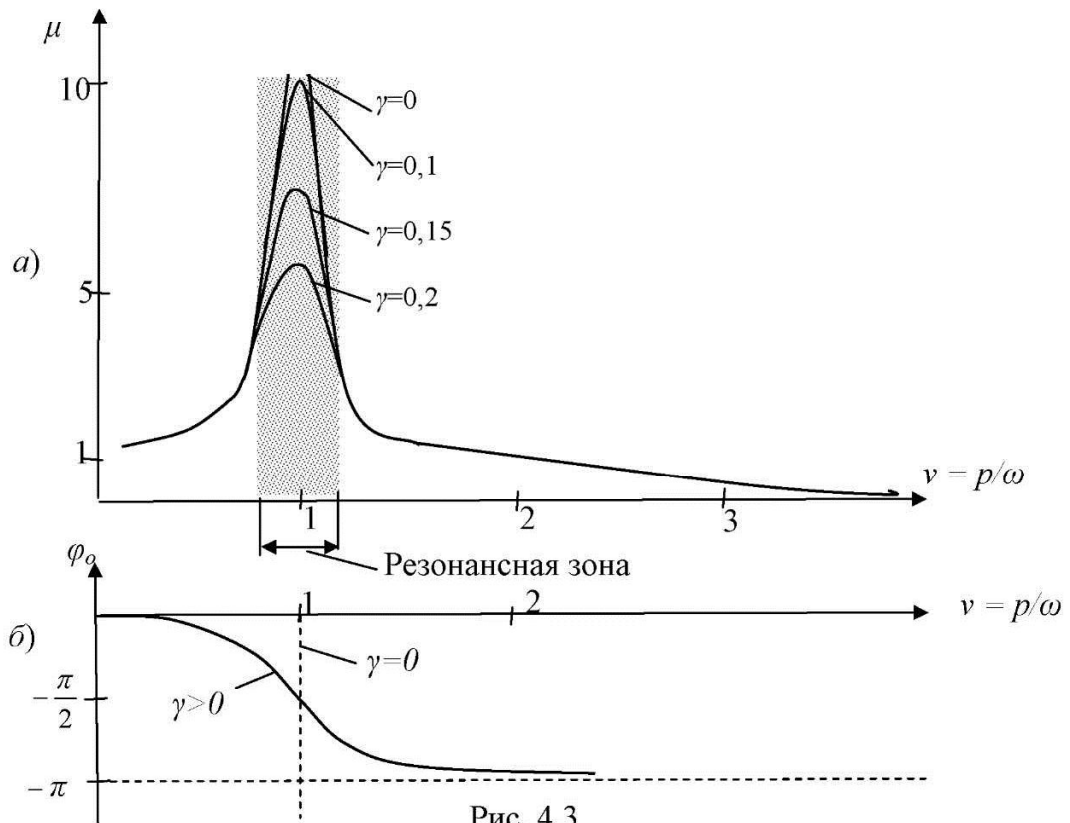


Рис. 4.3

При этом возрастание идет довольно быстро. Из последней формулы следует, что резонансные амплитуды после n -го периода равны $A_{рез} = 0,5A_{см} \cdot (-2\pi n \cos 2\pi n)$, то есть за три-четыре размаха амплитуда достигает значения равного $\approx 10 A_{см}$ (рис. 4.4, а). Учет сил сопротивления ограничивает нарастание амплитуды (рис. 4.4, б)

В тех случаях, когда частота вынужденных колебаний весьма мало отличается от частоты свободных колебаний, т. е. когда $p \approx \omega_1$, уравнение движения (4.7) можно представить в виде (вывод в теории колебаний):

$$y = A(1 - e^{-nt}) \sin pt + 2Ae^{-nt} \sin\left(\frac{p - \omega_1}{2}t\right) \cos pt, \quad (4.16)$$

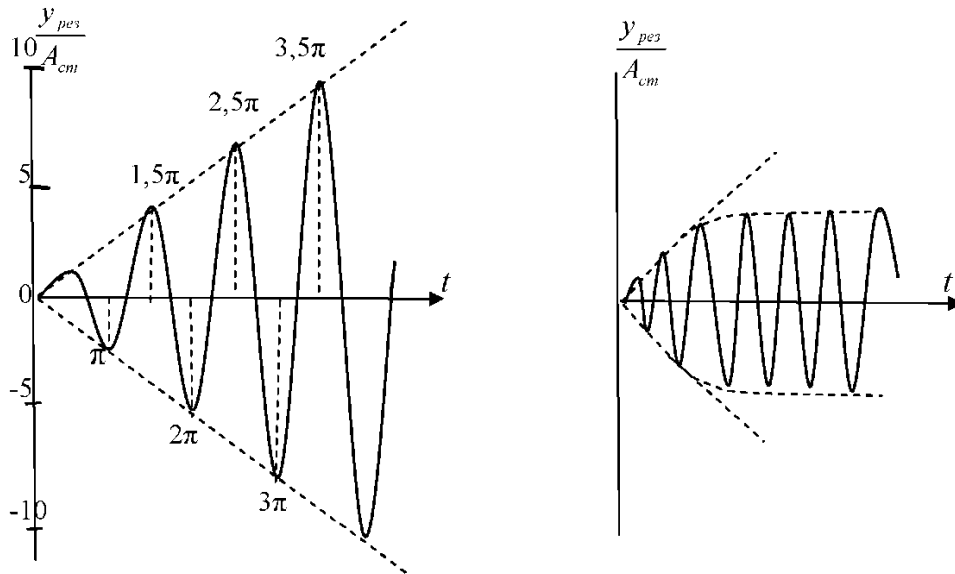


Рис. 4.4

В уравнении (4.16) первый член определяет незатухающие вынужденные колебания системы, второй – затухающие колебания **биений** с амплитудой:

$$A(t) = 2Ae^{-\eta t} \sin \frac{p - \omega_1}{2} t.$$

и периодом $T_\theta = \frac{2\pi}{p}$. Период изменения амплитуды $A(t)$: $T_A = \frac{2\pi}{(p - \omega_1)}$.

График затухающих колебаний биений показан на рис. 4.5

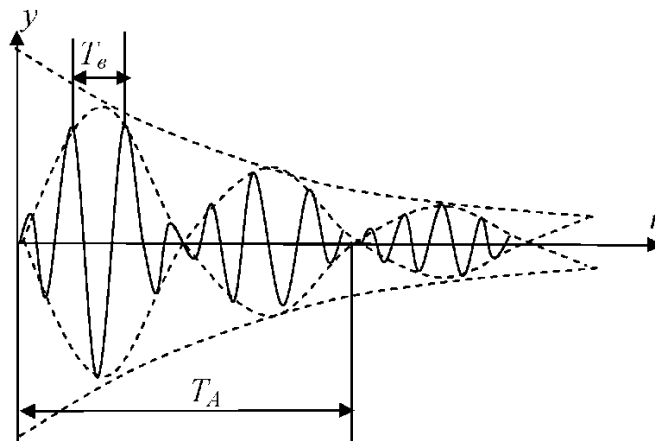


Рис. 4.5

В реальных условиях колебания биений, вызываемые возмущающей силой, с частотой, близкой к частоте затухающих колебаний, имеют практическое значение только в начале движения системы, т. е. в переходной период (рис. 4.2) и при малом значении коэффициента затухания n . При установившемся режиме, который наступает тем быстрее, чем больше сопротивление, движение системы определяется уравнением:

$$y = A \sin pt, \quad (4.17)$$

получаемом из (4.15), так как $e^{-nt} \rightarrow 0$.

4.2 Движение упругой системы под действием произвольной силы

Если на систему с одной степенью свободы (рис. 4.1, а) будет действовать не гармоническая сила $Q = Q_0 \sin pt$, а произвольно зависящая от времени $Q = Q(t)$, то дифференциальное уравнение движения массы (4.6) примет вид:

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + \omega^2 y = \frac{Q(t)}{m}. \quad (4.18)$$

Общий интеграл уравнения (4.18) состоит из суммы решения однородного уравнения y_1 и частного решения y_2 : $y = y_1 + y_2$. Решение y_1 получено в п. 3.1 и выражено через начальные возмущения (3.18), (3.20):

$$y_1 = a_0 e^{-nt} \sin(\omega_1 t + \beta), \quad (4.19)$$

$$\text{где } a_0 = \sqrt{y_0^2 + \frac{(\dot{y}_0 + ny_0)^2}{\omega_1^2}}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{y_0 \cdot \omega_1}{\dot{y}_0 + ny_0}, \quad \omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2}. \quad (4.20)$$

Для получения частного решения y_2 при произвольной возмущающей силе $Q = Q(t)$ необходимо определить перемещение массы от действия на неё начального мгновенного импульса $G = m\dot{y}_0$. Действию такого импульса соответствуют начальные условия: при $t = 0$ $y_0 = 0$, $\dot{y}_0 = \frac{G}{m}$. Подставляя их в (4.20), найдём

$a_0 = \frac{G}{m\omega_1}$, $\beta = 0$. Тогда для $G = 1$ с помощью равенства (4.19) получим:

$$\Phi(t) = \frac{1}{m\omega_1} e^{-nt} \sin \omega_1 t \quad (4.21)$$

Функция $\Phi(t)$ называется реакцией линейного осциллятора на единичный мгновенный импульс.

С помощью $\Phi(t)$ определяется частное решение y_2 . Для этого график $\Phi(t)$ представляется как последовательность элементарных импульсов $dG = Q(\tau)d\tau$ (рис. 4.6). Импульс dG по истечении времени $(t-\tau)$ вызовет перемещение $dy_2 = dG \cdot \Phi(t-\tau)$. Суммируя влияние всех элементарных импульсов за время от 0 до t , получим перемещение y_2 в момент времени t :

$$y_2 = \int_0^t dy_2 = \int_0^t dG \cdot \Phi(t-\tau) = \int_0^t Q(\tau) \cdot \Phi(t-\tau) d\tau. \quad (4.22)$$

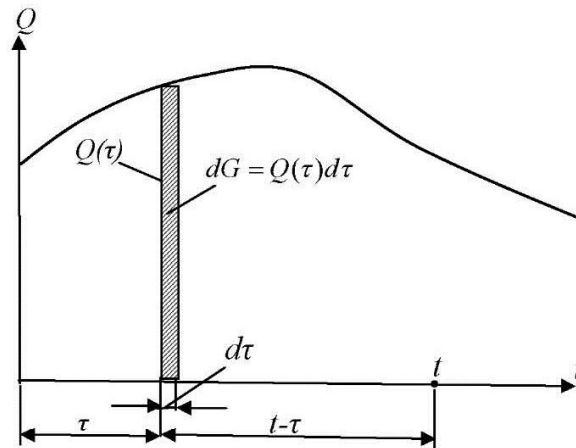


Рис. 4.6

Окончательно общий интеграл дифференциального уравнения (4.18) $y = y_1 + y_2$ с учетом (4.19), (4.21) и (4.22) примет вид (4.23) и называется интегралом Дюамеля:

$$y = a_0 e^{-nt} \sin(\omega_1 t + \beta) + \frac{1}{m\omega_1} \int_0^t Q(\tau) \cdot e^{-n(t-\tau)} \sin \omega_1(t-\tau) d\tau. \quad (4.23)$$

Уравнение (4.23) используется для определения движения упругой системы при действии на неё произвольной нагрузки.

4.3 Колебания при внезапно приложенной постоянной силе

Рассмотрим случай, когда сила, внезапно приложенная к системе, остаётся затем постоянной $Q = const.$, если при $t = 0$, $n = 0$, $\dot{y}_0 = 0$, $y_0 = 0$, $\omega_1 = \omega$.

В этом случае равенство (4.23) принимает вид:

$$y = \frac{1}{m\omega} \int_0^t Q \sin \omega(t - \tau) d\tau, \text{ учитывая, что переменной здесь является } \tau, \text{ а } t \text{ и } \omega$$

являются постоянными величинами, последнее равенство можно представить в виде удобном для интегрирования $y = \frac{1}{m\omega^2} \int_0^t -Q \sin[\omega(t - \tau)] d[\omega(t - \tau)]$. После интегрирования имеем:

$$y = \frac{Q}{m\omega^2} \cos \omega(t - \tau) \Big|_0^t, \quad (4.24)$$

а после подстановки пределов, получим $y = \frac{Q}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t)$. Если сила Q приложена статически, то вызываемый ею прогиб равен $y_{cm} = \frac{Q}{m\omega^2} = \frac{Q}{c} = Q \cdot \delta_{11}$.

Тогда окончательное решение запишется в виде:

$$y = y_{cm} (1 - \cos \omega t) \quad (4.25)$$

Таким образом, сила, внезапно приложенная к упругой системе с одной степенью свободы и, оставаясь затем постоянной (рис. 4.7, а), вызывает колебания с собственной частотой ω около положения статического равновесия с амплитудой $A = y_{cm}$, с максимальным отклонением $y_{max} = 2y_{cm}$ (рис. 4.7, б) и динамическим коэффициентом $\mu = \frac{y_{max}}{y_{cm}} = 2$.

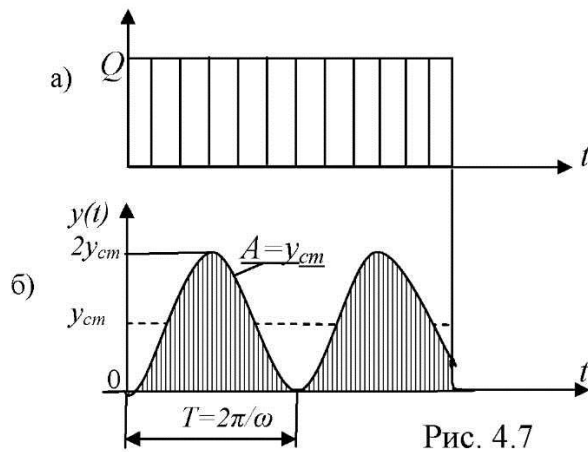


Рис. 4.7

4.4 Кратковременное действие нагрузки

Рассмотрим случай, когда внезапно появившаяся сила Q действует в течение времени $0 \leq t_q \leq \frac{T}{2}$, где T – период свободных колебаний упругой системы, а t_q – время действия нагрузки.

Согласно (4.24) уравнение движения от внезапно приложенной силы $y = y_{cm}(1 - \cos \omega t)$, а динамический коэффициент в этом случае будет $\mu_1 = \frac{y}{y_{cm}} = 1 - \cos \omega t$. При $t_q \leq \frac{T}{2}$ динамический коэффициент μ_1 , когда $t \rightarrow t_q$ будет возрастать и станет максимальным при $t = t_q$:

$$\mu_{1,\max} = 1 - \cos \omega t_q = 1 - \cos \frac{2\pi}{T} t_q, \quad (4.26)$$

а при $t_q = \frac{T}{2}$, $\mu_1 = 2$.

После исчезновения силы, когда $t > t_q$, согласно (4.24) уравнение движения принимает вид:

$$y = \frac{Q}{m\omega^2} \cos \omega(t - \tau) \Big|_0^{t_q} = y_{cm} [\cos \omega(t - t_q) - \cos \omega t]. \text{ Это же выражение в другом ви-}$$

де: $y = 2y_{cm} \sin(\omega t - \frac{\omega t_q}{2}) \sin \frac{\omega t_q}{2}$. Максимальное значение динамический коэффициент

после исчезновения нагрузки принимает, когда $\sin(\omega t - \frac{\omega t_q}{2}) = 1$:

$$\mu_{2,\max} = 2 \sin \frac{\omega t_q}{2} = 2 \sin \frac{\pi}{T} t_q. \quad (4.27)$$

Значения динамических коэффициентов μ_1 и μ_2 , зависящих от времени действия и исчезновения силы Q , приведены в таблице 4.1.

Таблица 4.1

| | | | | | | | |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|------|-------|-----|
| t_q/T | 0,01 | 0,03 | 0,125 | 0,167 | 0,25 | 0,375 | 0,5 |
| $\mu_{1, \max}$ | 0,002 | 0,018 | 0,293 | 0,5 | 1,0 | 1,71 | 2,0 |
| $\mu_{2, \max}$ | 0,06 | 0,19 | 0,76 | 1,0 | 1,41 | 1,83 | 2,0 |

Выводы:

1) наибольшие значения динамических коэффициентов $\mu_{1,\max}$ и $\mu_{2,\max}$ нарастают со временем действия нагрузки до $t_q = \frac{T}{2}$. При этом значения t_q они становятся равными двум и больше быть не могут;

2) когда время действия силы меньше $\frac{1}{6}$ периода свободных колебаний системы, её эффект не превосходит эффекта от такой же статической силы, так, если сила действует в течение $\frac{1}{100}$ периода свободных колебаний, то её эффект примерно в 16 раз меньше статического.

4.5 Колебания под действием мгновенного импульса.

Ударная нагрузка

Колебания упругой системы с одной степенью свободы, находящейся в покое до действия импульса, после прекращения его действия можно считать

свободными при начальных условиях движения, вызванных импульсом, т. е. при $t = 0$ $y_0 = 0$, $\dot{y}_0 = \frac{S}{m}$. В данном случае импульс сообщает массе начальную скорость \dot{y}_0 . Поэтому, используя уравнение (3.20), перемещение массы от такого импульса с учетом сопротивления можно определять по формуле:

$$y = \frac{S}{m\omega_1} e^{-nt} \sin \omega_1 t. \quad (4.28)$$

Соответствующее выражение без учета сопротивления, когда $\omega_1 = \omega$, $n = 0$:

$$y = \frac{S}{m\omega} \sin \omega t. \quad (4.29)$$

Максимальное динамическое перемещение системы в точке расположения сосредоточенной массы при этом равно:

$$y_{\max} = \frac{S}{m\omega}. \quad (4.30)$$

При определении внутренних силовых факторов, вызванных действием импульса, его влияние заменяют эквивалентной статической силой, вызывающей такое же перемещение системы, как и импульс. Величина этой силы может быть определена из формулы:

$$P_{\text{экв}} \cdot \delta_{11} = y_{1,\max}. \quad (4.31)$$

Напряжения в элементах системы, испытывающих растяжение или сжатие при её колебаниях (подвески, растяжки, упругое основание и т. д.), удобно определять по формуле Гука:

$$\sigma_{\max} = \frac{\Delta l_{\max}}{l} E, \quad (4.32)$$

где Δl_{\max} – наибольшее изменение длины элемента от действия импульса, l – длина элемента.

Если система подвергается действию нескольких импульсов S_i во время t_i от начала действия первого импульса, для которого $t_1=0$, то их общее действие в силу линейности дифференциального уравнения движения определяется суммированием действий импульсов:

с учетом сопротивления $y = \sum_{i=1}^n \frac{S_i}{m\omega_1} e^{-m(t-t_i)} \sin \omega_1(t-t_i),$

без учета сопротивления $y = \frac{1}{m\omega} \sum_{i=1}^n S_i \sin \omega(t-t_i).$ (4.33)

В технике часто встречаются случаи загрузки конструкции нагрузками, имеющими ударный характер. Закон изменения силы $P = P(t)$ при этом может быть довольно сложным, а продолжительность действия силы очень небольшой.

Определим эквивалентную заданному импульсу статическую силу удара на упругое сооружение.

Примерный график изменения силы в зависимости от времени её действия приведен на рис. 4.8. Импульс силы может быть определён площадью диаграммы удара (рис. 4.8):

$$S = \int_0^{t_{p,q}} P(t) dt.$$

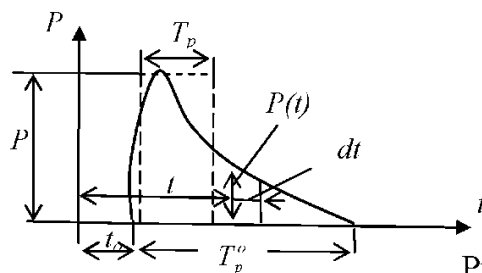


График силы удара заменим равновеликим прямоугольником, считая, что сила P в течение времени T_p остаётся постоянной, так что $S = P T_p$. Воспользуемся равенством (4.27), приняв среднее время действия силы $P T_p = t_q$, тогда динамический коэффициент импульса ударной силы будет равен $\mu = 2 \sin \frac{\omega T_p}{2}$. Обе части этого выражения умножим на P и, кроме того, правую часть этого выражения умножим и разделим на $\frac{\omega T_p}{2}$. Тогда в левой части мы получим статическую силу, эквивалентную данному импульсу по своему действию.

$$P_{\text{эки}} = \mu P = P \omega T_p \frac{\sin \frac{\omega T_p}{2}}{\frac{\omega T_p}{2}} = \omega S \frac{\sin \frac{\omega T_p}{2}}{\frac{\omega T_p}{2}}. \quad (4.34)$$

Так как для любого α отношение $\frac{\sin \alpha}{\alpha} < 1$ и это отношение при стремлении α к нулю стремится к единице, то наиболее опасным из всех ударных импульсов является мгновенный импульс. Следовательно, эквивалентная ударному импульсу статическая сила удара равна произведению собственной частоты свободных колебаний сооружения, по которому наносится удар, на величину мгновенного импульса ударяющего груза.

$$P_{\text{эки}} = \omega \cdot S. \quad (4.35)$$

Импульс силы удара равен количеству движения ударяющей массы $m = \frac{G}{g}$

$$S = m \cdot v = m \dot{y}_o, \quad (4.36)$$

здесь $v = \dot{y}_o$ – скорость ударяющей массы в начале удара.

Динамический коэффициент ударяющего груза весом G определяется по формуле:

$$\mu = \frac{P_{\text{эки}}}{G} = \frac{\omega \cdot S}{G} = \frac{\sqrt{g}}{G} y_{cm} \frac{G}{g} v = \frac{v}{\sqrt{g y_{cm}}}. \quad (4.37)$$

Формула (4.37) показывает, что эффект ударной нагрузки зависит не только от величины её импульса, но также и от частоты собственных колебаний самой системы. Чем жестче сооружение, тем больше будет динамический коэффициент удара при одном и том же импульсе.

Если груз $G = mg$ свободно падает с высоты $h + \mu y_{cm}$, то, подставляя выражение скорости этого груза $v = \sqrt{2g(h + \mu y_{cm})}$ в формулу (4.37) и решая квадратное уравнение, найдем:

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y_{cm}}} \approx \sqrt{\frac{2h}{y_{cm}}}. \quad (4.38)$$

При наличии на сооружении в месте удара точечной приведенной массы $m_{прив}$ статический прогиб от весов обеих масс будет уже равен $y_{1ст} = y_{ст} \left(1 + \frac{m_{прив}}{m}\right)$. Подставляя в формулу (4.38) вместо $y_{ст}$ величину $y_{1ст}$, получим формулу для вычисления динамического коэффициента при падении с высоты h груза $G = mg$ на упругую систему, масса которой $m_{прив}$ приведена к точке падения.

$$\mu = \sqrt{\frac{2h}{y_{1ст}} \frac{1}{\left(1 + \frac{m_{прив}}{m}\right)}} = \sqrt{\frac{2h}{y_{ст}} \frac{1}{\left(1 + \frac{Q_{прив}}{G}\right)}}. \quad (4.39)$$

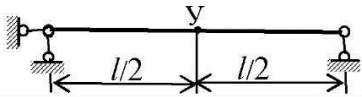
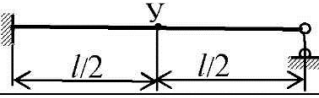
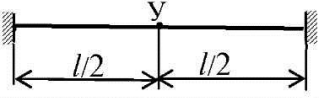
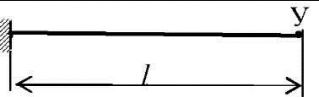
Для стержней равномерно распределённая масса приводится к сосредоточенной в месте удара путём умножения её на некоторый коэффициент приведения β , зависящий от условий опирания концов стержня $m_{прив} = M \cdot \beta = \frac{Q}{g} \cdot \beta$, здесь M – масса, а Q – вес стержня. На схемах стержней в таблице 4.2 для точки удара, обозначенной буквой «У», даны значения коэффициентов приведения масс β . Если точка удара будет расположена в произвольном месте стержня, то тогда коэффициент приведения масс $\beta = \frac{m_{прив}}{M}$ определяется из условия равенства частот колебаний $\omega_1 = \omega$.

ω_1 – основная частота свободных колебаний стержня с равномерно распределённой массой. Формулы для определения таких частот приведены в табл. 4.2.

ω – собственная частота колебаний системы, когда приведённая масса расположена в точке удара на безмассовом стержне такой же изгибной жесткости, как и в первом случае (определяется по формуле 1.20 $\omega = \sqrt{\frac{1}{m_{прив} \delta_{11}}}$).

Коэффициент приведения может быть вычислен в зависимости от веса балки Q по формуле $\beta = \frac{Q_{прив}}{Q}$.

Таблица 4.2

| Схема стержня | β | ω_1 |
|---|---------|---------------------------------------|
|  | 0,493 | $9,87 \sqrt{\frac{EI}{M \cdot l^3}}$ |
|  | 0,460 | $15,42 \sqrt{\frac{EI}{M \cdot l^3}}$ |
|  | 0,375 | $22,37 \sqrt{\frac{EI}{M \cdot l^3}}$ |
|  | 0,24 | $3,516 \sqrt{\frac{EI}{M \cdot l^3}}$ |

Пример 4.1 На балку длиной $l = 6$ м, несущей сосредоточенный груз $G = 35$ кН (рис. 4.9), действует вибрационная сила $P = 5 \sin 30t$ кН. Проверить на прочность по нормальным напряжениям каждую из трёх балок двутаврового сечения № 20, № 22 а и № 24 от воздействия такой нагрузки. Модуль упругости материала балок $E = 2 \cdot 10^4$ кН/см², допускаемое напряжение $[\sigma] = 24$ кН/см². Весом балки и сопротивлением пренебречь.

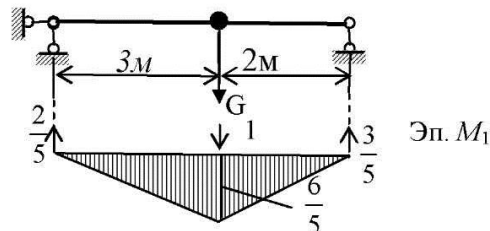


Рис. 4.9

Решение. Значения определяемых величин приведены в табл. 4.3. Масса сосредоточенного груза $m = G/g = 35000 / 9,8 = 3571$ кг. Момент инерции и момент сопротивления двутаврового сечения № 20 определяются по сортаменту $I_x = 1840$ см⁴, $W_x = 184$ см³. Изгибная жесткость двутавра

$$EI = 2 \cdot 10^{11} \cdot 1840 \cdot 10^{-8} = 3,68 \cdot 10^6 \text{ Нм}^2.$$

Коэффициент податливости системы с учетом эпюры изгибающих моментов от единичной силы инерции (рис. 4.9) равен:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} \right) = \frac{2,4}{EI}.$$

Собственная частота колебаний определяется по формуле (1.20).

Размерности величин во избежание ошибок желательно использовать в системе «СИ»:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m \delta_{11}}} = \sqrt{\frac{3,68 \cdot 10^6}{3571 \cdot 2,4}} = 20,72 \text{ 1 / сек.}$$

$$\text{Коэффициент расстройки } \nu = \frac{P}{\omega} \frac{30}{20,72} = 1,45.$$

$$\text{Коэффициент динамичности } \mu = \frac{1}{1 - \nu^2} = \frac{1}{1 - 1,45^2} = 0,915.$$

Наибольшие статические и динамические изгибающие моменты определяются с помощью максимальной ординаты эпюры изгибающих моментов от единичной силы (рис. 4.9).

$$M_{ст} = \frac{6}{5} \cdot G = \frac{6}{5} \cdot 35 = 42 \text{ кНм}, \quad M_{дин} = \frac{6}{5} \cdot P_{\max} \cdot \mu = \frac{6}{5} \cdot 5 \cdot 0,915 = 5,49 \text{ кНм.}$$

Максимальные нормальные напряжения от статической нагрузки:

$$\sigma_{ст} = \frac{M_{ст}}{W_x} = \frac{42 \cdot 100}{184} = 22,83 \text{ кН/см}^2 = 228,3 \text{ МПа.}$$

Максимальные нормальные напряжения от динамической нагрузки:

$$\sigma_{дин} = \frac{M_{дин}}{W_x} = \frac{5,49 \cdot 100}{184} = 2,98 \text{ кН/см}^2 = 29,8 \text{ МПа.}$$

Результирующее напряжение равно сумме напряжений от статической и динамической нагрузки:

$$\sigma = \sigma_{ст} + \sigma_{дин} = 22,83 + 2,98 = 25,81 \text{ кН/см}^2 = 258,1 \text{ МПа.}$$

Алгоритм определения результирующих напряжений в сечениях остальных двух балок двутаврового сечения № 22 а и № 24, имеющих другие моменты инерции и моменты сопротивления, будет таким же, как и для № 20. Результаты таких расчетов приведены в табл. 4.3.

Таблица 4.3

| Наименование заданных и определяемых величин | Значения заданных и определяемых величин для балок двутаврового сечения | | |
|---|---|-------------------|-------|
| | № 20 | № 22 ^a | № 24 |
| Момент инерции $I_x, \text{см}^4$ | 1840 | 2790 | 3500 |
| Момент сопротивления $W, \text{см}^3$ | 184 | 254 | 289 |
| Частота собственных колебаний, ω 1/с | 20,72 | 25,5 | 28,6 |
| Коэффициент расстройки ν | 1,45 | 1,18 | 1,05 |
| Коэффициент динамичности μ | 0,915 | 2,6 | 10 |
| Статические напряжения $\sigma_{ст}, \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$ | 22,83 | 16,53 | 14,53 |
| Динамические напряжения $\sigma_{дин}, \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$ | 1,98 | 6,14 | 20,76 |
| Результирующие напряжения $\sigma, \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$ | 25,81 | 22,67 | 35,29 |

Сравнение результатов напряжений в разных балках от одной и той же нагрузки свидетельствует о том, что увеличение сечения балок при динамической нагрузке не всегда приводит к уменьшению напряжений. Наиболее ненадежными становятся балки, собственная частота колебаний которых приближается к частоте вынужденной силы. В данном примере условие прочности при изгибе выполняется только для балки с двутавровым сечением № 22 *a*.

Пример 4.2 Определить максимальное перемещение точки «2» и максимальный изгибающий момент на опоре «В» от действия импульса для системы, изображённой на рис. 4.10, если $m = 100$ кг, $EI = 6 \cdot 10^5$ Нм². $S = 500$ Нс.

Решение. Коэффициент податливости системы равен перемещению массы в точке «1» от единичной силы инерции (эп. M_1 на рис. 4.10). По формуле (1.5)

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \right) = \frac{15}{EI}. \text{ По формуле (1.6) определяется пере-}$$

мещение точки «2» от единичной силы, приложенной в точке «1»

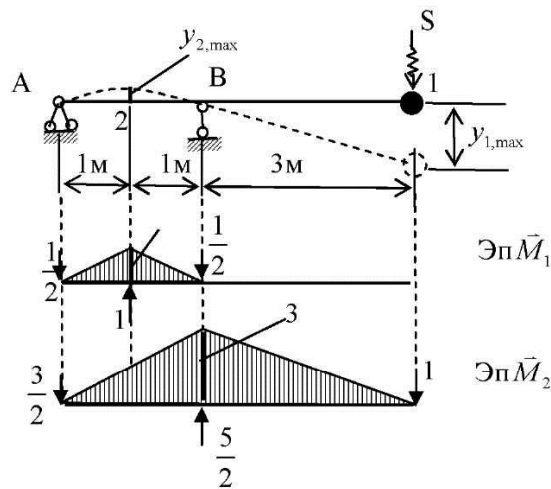


Рис. 4.10

$$\delta_{21} = \frac{1}{EI} \int_0^l \bar{M}_1 \cdot \bar{M}_2 dz = \frac{1}{6EI} \left(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4EI}. \text{ Собственная частота колеба-}$$

ний по (1.20) $\omega = \sqrt{\frac{1}{m \delta_{11}}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 10^5}{100 \cdot 15}} = 20 \text{ 1/сек.}$ Перемещение массы в точке «1»

$$y_{1,max} = \frac{S}{m\omega} = \frac{500}{100 \cdot 20} = 0,25 \text{ м. Эквивалентная сила, действующая статически и вы-}$$

зывающая такое же перемещение точки «1», как и импульс S_2 по (4.31)

$$P_{экс} = \frac{y_{1,max}}{\delta_{11}} = \frac{0,25 \cdot 6 \cdot 10^5}{15} = 10^3 \text{ Н} = 10 \text{ кН. Динамическое перемещение точки «2»}$$

равно прогибу от силы $P_{экс}$ $y_{2,max} = P_{экс} \cdot \delta_{21} = \frac{y_{1,max}}{\delta_{11}} \cdot \delta_{21} = \frac{0,25 \cdot 3}{4 \cdot 15} = 0,0125 \text{ м. Динами-}$

ческий изгибающий момент на опоре «В» равен $M_{B,max} = P_{экс} \cdot 3 = 10 \cdot 3 = 30 \text{ кНм.}$

Пример 4.3 Определить силу удара при падении груза $G = 2 \text{ кН}$. на железобетонную балку пролётом $l = 6 \text{ м}$ с высоты $h = 20 \text{ см}$ в двух случаях. В первом случае груз падает на балку посередине пролёта (рис. 4.11, а), во втором случае груз падает на балку на расстоянии $l/4$ от опоры (рис. 4.11, б). Вес балки $Q = 20 \text{ кН}$, изгибная жесткость балки $EI_x = 100 \cdot 10^6 \text{ Па}$.

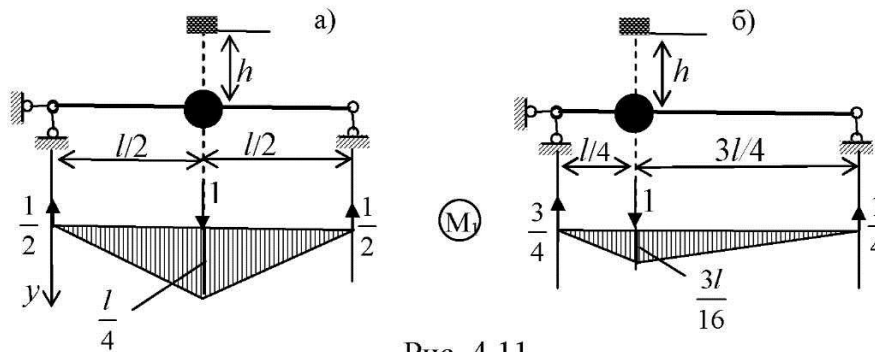


Рис. 4.11

Решение.

Первый случай. Коэффициент приведения массы балки к точке удара по табл. 4.2 равен $\beta = 0,493$. Собственный вес балки, приведённый к этой точке, $Q_{прив} = 0,493 \cdot 20 = 9,86$ кН. Прогиб от единичной силы, приложенной в точке удара, определяется по правилу Верещагина из единичной эпюры моментов (рис. 4.11, а). $\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \frac{l}{2} \frac{l}{4} \frac{2}{3} \frac{l}{4} \right) \cdot 2 = \frac{l^3}{48EI}$. Статический прогиб от веса падающего

груза $y_{cm} = \delta_{11} \cdot G = \frac{6^3 \cdot 2000}{48 \cdot 100 \cdot 10^6} = 0,9 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,009 \text{ см}$. Динамический коэффициент

по формуле (4.39): $\mu = \sqrt{\frac{2h}{y_{cm}} \frac{1}{1 + \frac{Q_{прив}}{G}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{0,009} \frac{1}{1 + \frac{9,86}{2}}} = 27,4$. Сила удара ока-

зывается равной $P_{уд} = \mu \cdot G = 27,4 \cdot 2 = 54,8$ кН.

Второй случай. Прогиб от единичной силы, приложенной в точке удара, определяется по правилу Верещагина из единичной эпюры моментов

(рис. 4.11, б). $\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \frac{l}{4} \frac{3l}{16} \frac{2}{3} \frac{3l}{16} + \frac{1}{2} \frac{3l}{4} \frac{3l}{16} \frac{2}{3} \frac{3l}{16} \right) = \frac{3l^3}{256EI}$. Статический прогиб от ве-

са падающего груза $y_{cm} = \delta_{11} \cdot G = \frac{3 \cdot 6^3 \cdot 2000}{256 \cdot 100 \cdot 10^6} = 0,51 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,00506 \text{ см}$. Коэффици-

ент приведения масс β определяется из условия, что собственная частота колебаний стержня с равномерно распределённой массой $\omega_1 = 9,87 \sqrt{\frac{EI}{M \cdot l^3}}$ (табл.4.2)

Развернув определитель (5.6), получим алгебраическое уравнение относительно λ . Такое уравнение называется **частотным**, или **вековым**, оно имеет число вещественных положительных корней, равное числу степеней свободы системы. Ряд чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ и частот $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n$, определяемых по формуле (5.4), называется спектром собственных чисел и спектром собственных частот. Им отвечает спектр форм собственных колебаний системы. Каждой собственной частоте соответствует собственная форма с амплитудами $a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{nk}$. Здесь первый индекс обозначает номер перемещения, а второй –

номер формы колебаний. Так частоте ω_1 соответствует вектор $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$.

Для определения форм колебаний в однородной системе уравнений (5.5) произвольно задают одно из амплитудных перемещений. Например, если амплитуду одной из масс принять равной единице, то остальные амплитуды из системы уравнений (5.5) будут определяться в долях от единицы. На рис. 5.1 *a, б* показаны две формы колебаний системы с n степенями свободы. Собственные колебания совершаются таким образом, что возможная работа сил инерции одной формы на перемещениях другой формы колебаний равна нулю. То есть, любые две формы собственных колебаний из состава спектра данной системы **ортогональны**. Условием ортогональности любых двух форм собственных колебаний (рис. 5.1, *a, б*) с частотами ω_k и ω_j является равенство (5.7)

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \cdot a_{ik} \cdot a_{ij} = 0, \quad (j \neq k). \quad (5.7)$$

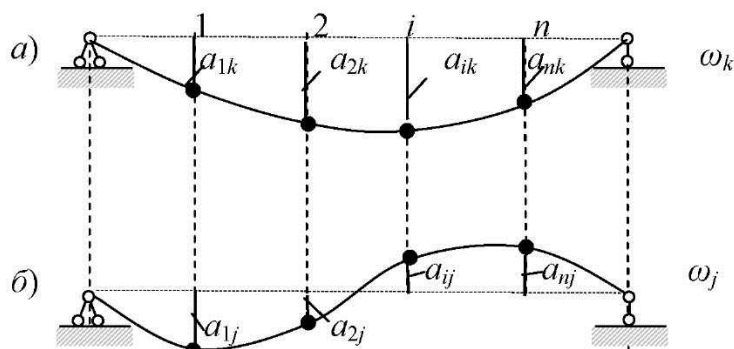


Рис. 5.1

5.2 Приближённые способы определения собственных частот колебаний

В большинстве случаев существенную роль при учете динамических нагрузок играет основная (наинизшая) частота колебаний. В расчетах систем с большим числом степеней свободы (когда частотное уравнение имеет степень выше второй и трудно разрешимо) используются приближенные способы определения основной частоты. В основном применяют энергетические методы, основанные на равенстве максимальной кинетической и максимальной потенциальной энергий упругой системы при колебаниях. При этом рекомендуется использовать формулу Релея (5.8)

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\int_0^l EI \cdot [\ddot{y}(z)]^2 dz}{\int_0^l m(z) y^2(z) dz}}. \quad (5.8)$$

При подстановке в (5.8) точного уравнения формы колебаний $y(z)$ получим точное значение собственной частоты. Однако в большинстве случаев точное уравнение формы колебаний неизвестно и его задают приближенно.

Для систем с сосредоточенными массами уравнение формы колебаний удобно принимать в виде уравнения прогиба системы от действия сил тяжести соответствующих масс системы. В этом случае формула Рэлея принимает вид

(5.9), благодаря чему позволяет определить завышенное значение основной частоты. Заниженное значение основной частоты определяется по формуле Донкерлея (5.10), метод которого основан на приведении системы с несколькими степенями свободы к системе с одной степенью свободы.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g(m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n)}{m_1 y_1^2 + m_2 y_2^2 + \dots + m_n y_n^2}}, \quad (5.9)$$

$$\frac{1}{\omega_1^2} = \sum_{i=1}^n m_i \delta_{ii} = \frac{1}{(\omega_1^{парч})^2} + \frac{1}{(\omega_2^{парч})^2} + \dots + \frac{1}{\omega_n^{парч}}. \quad (5.10)$$

где y_1, y_2, \dots, y_n – статические прогибы точек балки в местах приложения масс $m_1 \dots m_n$; $\omega_1^{парч} \dots \omega_n^{парч}$ – парциальные частоты, то есть частоты колебаний системы при условии нахождения на ней только одной массы (остальные массы равны нулю). Формулы для определения парциальных частот имеют вид:

$$\omega_1^{парч} = \sqrt{\frac{1}{m_1 \delta_{11}}}, \quad \omega_n^{парч} = \sqrt{\frac{1}{m_n \delta_{nn}}}, \quad (5.11)$$

где δ_{11} и δ_{nn} – статические прогибы от действия единичных сил.

Рассчитав основную частоту одной и той же системы по формулам (5.9) и (5.10), мы получим вилку, в которой заключена истинная частота колебаний.

Для систем с распределёнными массами суммирование в формулах (5.9) и (5.10) заменяется интегрированием по длине балки и эти формулы принимают соответственно вид (5.12) и (5.13):

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g \int_0^l m(z) y dz}{\int_0^l m(z) y^2 dz}} \quad (5.12), \quad \frac{1}{\omega_1^2} = \int_0^l m(z) \delta_{zz} dz. \quad (5.13)$$

Здесь δ_{zz} – перемещение точки, определяемой абсциссой z от единичной силы, приложенной в этой точке.

Иногда применяется способ замены распределённой массы системой сосредоточенных масс, то есть система с бесконечно большим числом степеней свободы заменяется системой с конечным числом степеней свободы. При этом может быть два способа такой замены:

– распределённые массы разбиваются на участки, и на каждом участке распределённая масса заменяется сосредоточенной в центре её тяжести;

– сосредоточенные массы в центрах каждого участка распределяются по закону рычага.

Пример 5.1 Заменить балку с равномерно распределённой массой m (рис. 5.2, *a*), имеющей бесконечное число степеней свободы, балкой с двумя степенями свободы по первому способу и балкой с одной степенью свободы по второму способу. Определить точное значение основной частоты колебаний балки с бесконечным числом степеней свободы (рис. 5.2, *a*) и приближённое значение основной частоты такой балки путём замены её балками с двумя (рис. 5.2, *б*) и одной (рис. 5.2, *в*) степенями свободы.

Решение. Разбиваем балку на два равных участка. Массу каждого участка, равную $m_1 = m_2 = \frac{ml}{2}$, сосредотачиваем по первому способу в центре тяжести каждого участка (рис. 5.2, *a*), по второму способу эти массы по закону рычага располагаются на краях участков (рис. 5.2, *в*).

Зададим основную форму собственных колебаний точным уравнением $y = a \sin \frac{\pi}{l} z$. Вычислим интегралы, входящие в формулу (5.8)

$$\int_0^l [\ddot{y}(z)]^2 dz = a^2 \frac{\pi^4}{l^4} \int_0^l \sin^2 \frac{\pi}{l} z dz = a^2 \frac{\pi^4}{l^4} \cdot \frac{l}{2},$$

$$\int_0^l y^2(z) dz = a^2 \int_0^l \sin^2 \frac{\pi}{l} z dz = a^2 \cdot \frac{l}{2}.$$

Подставляя значения интегралов в формулу (5.8), получим точное значение основной частоты колебаний

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}};$$

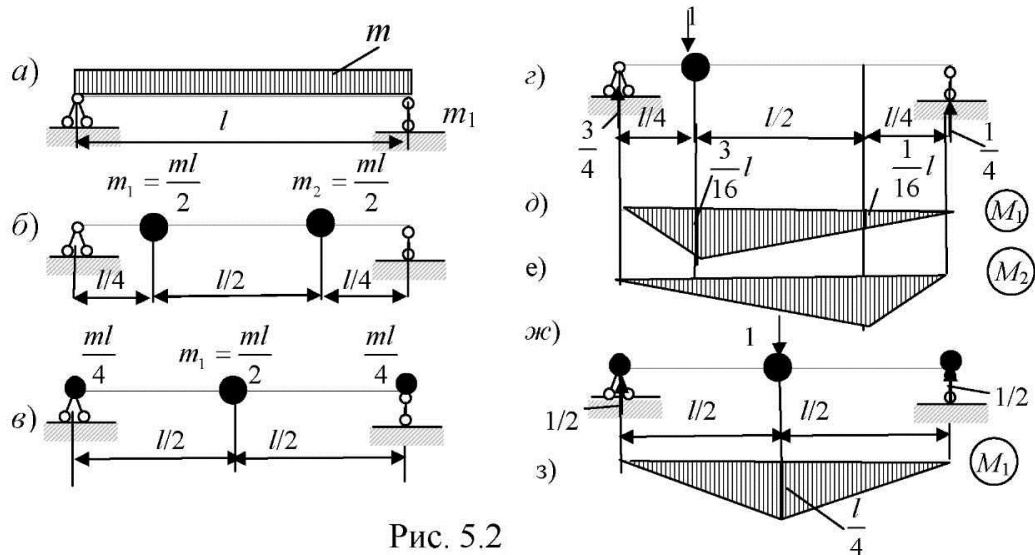


Рис. 5.2

$$\omega = \frac{9,86}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

Приближённое значение основной частоты заменяющей балки по первому способу (рис. 5.2, б) с двумя степенями свободы определим по формуле (5.9). Для этого, используя эпюры изгибающих моментов от единичных сил (рис. 5.2, д, е), найдём по формулам (1.5 и 1.6) коэффициенты податливости

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{3}{16} \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{16} l + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{16} l \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{16} l \right) = \frac{3l^3}{256EI},$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI} \left[\frac{l}{4 \cdot 6} \left(2 \cdot \frac{3}{16} \cdot l \cdot \frac{1}{16} l \cdot 2 \right) + \frac{l}{2 \cdot 6} \left(2 \cdot \frac{3}{16} l \cdot \frac{1}{16} l \cdot 2 + \frac{3}{16} l \cdot \frac{3}{16} l + \frac{1}{16} l \cdot \frac{1}{16} l \right) \right] = \frac{7l^3}{3 \cdot 256EI}.$$

Прогибы точек балки от сил тяжести сосредоточенных масс $G_1 = G_2 = \frac{mgl}{2}$

равны: $y_1 = y_2 = y = \frac{mgl}{2} (\delta_{11} + \delta_{12}) = \frac{mgl}{2} \left(\frac{3l^3}{256EI} + \frac{7l^3}{3 \cdot 256EI} \right) = \frac{mgl^4}{96EI}$. С учётом того, что

$m_1 = m_2$, $y_1 = y_2$, формулу (5.9) можно представить в виде $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{y}}$, тогда

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g \cdot 96EI}{mgl^4}} = \frac{9,8}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}. \text{ Погрешность по сравнению с точным значением частоты для балки с распределённой массой составляет } 0,7 \%$$

Приближённое значение основной частоты заменяющей балки по второму способу (рис. 5.2, в) с одной степенью свободы определим по формуле

(1.20). Для этого, используя эпюру изгибающих моментов от единичной силы инерции (рис. 5.1, з), найдём по формуле (1.5) удельный коэффициент δ_{11} .

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{4} \cdot 2 \right) = \frac{l^3}{48EI}.$$

Значение частоты $\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{m_1 \delta_{11}}} = \sqrt{\frac{96EI}{ml^4}} = \frac{9,8}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$ для системы с одной степенью свободы, полученной при замене балки с равномерно распределённой массой балкой с сосредоточенными массами по способу рычага не отличается от значения частоты, которая получена для заменяющей по первому способу балки с двумя степенями свободы.

6 ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ БАЛОК И РАМ НА ВИБРАЦИОННУЮ НАГРУЗКУ

Для динамического расчета балок и рам необходимо вычислить амплитуды перемещений и усилий, возникающих при колебаниях. Рассмотрим действие на упругую систему по направлению каждого независимого перемещения (рис. 6.1, а) гармонических сил $Q_i = Q_{oi} \sin pt$ ($i=1, 2, \dots, n$). Силы внутреннего и

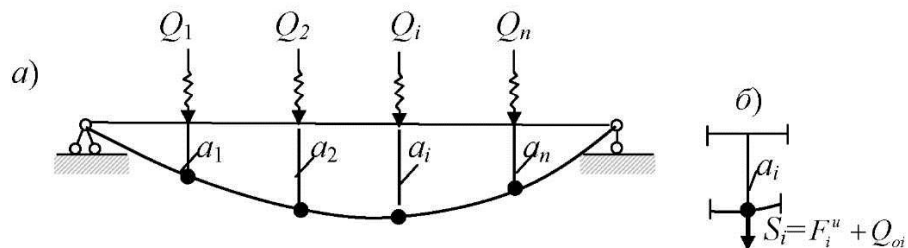


Рис. 6.1

внешнего сопротивления не будем учитывать, тогда установившиеся колебания системы будут происходить с одинаковой частотой и в одной фазе. Для i -й точки, масса которой равна m_i , в амплитудном состоянии (рис. 6.13, б) основными параметрами являются:

a_i – амплитуда колебаний,

$F_i^u = m_i p^2 a_i$ – сила инерции,

Q_{oi} – амплитуда внешней силы,

$S_i = F_i^u + Q_{oi} = m_i p^2 a_i + Q_{oi}$ – амплитуда суммарной внешней динамической силы, равная силе упругости отпора балки.

Уравнения для вычисления вынужденных амплитуд колебаний определяются так же как и для свободных колебаний (гл. 5, уравнения 5.2–5.5) и имеют вид:

$$\begin{aligned} a_1(\delta_{11}^{om} \cdot m_1^{om} - \lambda_o) + a_2 \delta_{12}^{om} \cdot m_2^{om} + \dots + a_n \delta_{1n}^{om} \cdot m_n^{om} + \lambda_o \cdot \Delta_1 &= 0, \\ a_1 \delta_{21}^{om} \cdot m_1^{om} + a_2(\delta_{22}^{om} \cdot m_2^{om} - \lambda_o) + \dots + a_n \delta_{2n}^{om} \cdot m_n^{om} + \lambda_o \cdot \Delta_2 &= 0, \\ \dots & \\ a_1 \delta_{n1}^{om} \cdot m_1^{om} + a_2 \delta_{n2}^{om} \cdot m_2^{om} + \dots + a_n(\delta_{nn}^{om} \cdot m_n^{om} - \lambda_o) + \lambda_o \cdot \Delta_n &= 0. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Уравнения для вычисления динамических сил получаются из (6.1) с учетом зависимости $S_i = m_i p^2 a_i + Q_{oi}$ и имеют вид:

$$\begin{aligned} S_1 \left(\delta_{11}^{om} - \frac{\lambda_o}{m_1^{om}} \right) + S_2 \delta_{12}^{om} + \dots + S_n \delta_{1n}^{om} + \frac{\lambda_o}{m_1^{om}} \cdot Q_{o1} &= 0, \\ S_1 \delta_{21}^{om} + S_2 \left(\delta_{22}^{om} - \frac{\lambda_o}{m_2^{om}} \right) + \dots + S_n \delta_{2n}^{om} + \frac{\lambda_o}{m_2^{om}} \cdot Q_{o2} &= 0, \\ \dots & \\ S_1 \delta_{n1}^{om} + S_2 \delta_{n2}^{om} + \dots + S_n \left(\delta_{nn}^{om} - \frac{\lambda_o}{m_n^{om}} \right) + \frac{\lambda_o}{m_n^{om}} \cdot Q_{on} &= 0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Здесь λ_o – безразмерный частотный параметр, который по аналогии с (5.4) связан с частотой вынужденных колебаний зависимостью:

$$p^2 = \frac{1}{(\lambda_o \cdot m_0 \cdot \delta_0)}, \quad (6.3)$$

$\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ – перемещения масс от статического действия гармонической нагрузки, которые в случае приложения их к сосредоточенным массам определяются по формулам (6.4):

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \delta_{11} \cdot Q_{o1} + \delta_{12} \cdot Q_{o2} + \dots + \delta_{1n} \cdot Q_{on}, \\ \dots & \\ \Delta_n &= \delta_{n1} \cdot Q_{o1} + \delta_{n2} \cdot Q_{o2} + \dots + \delta_{nn} \cdot Q_{on}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Если же точка приложения возмущающей силы не совпадает с точечной массой, то перемещения масс от статического действия гармонической нагрузки определяются аналогично определению грузового коэффициента в методе сил с помощью интеграла Мора и правил Верещагина или формулы Симпсона(1.5–1.7). Уравнениями (6.1) и (6.2) пользуются для определения амплитуд динамических нагрузок или прогибов вдали от резонанса. В системе с n степенями свободы возможно образование n резонансов. Для получения конечных амплитуд при резонансных частотах необходим учет сил демпфирования аналогично системе с одной степенью свободы. С учетом внутреннего трения график зависимости амплитуд от частоты вынужденных сил будет иметь несколько характерных резонансных пиков (рис. 6.2).

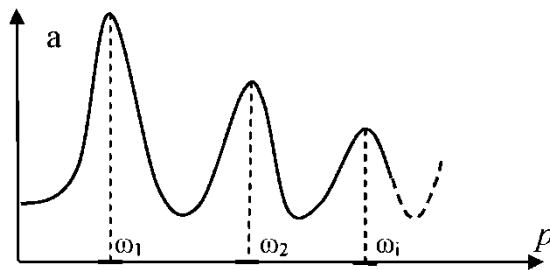


Рис. 6.2

Пример 6.1. На раму с двумя сосредоточенными массами (рис. 6.3, а) действует гармоническая нагрузка $Q(t) = Q_o \sin pt$. Частота вынужденной силы $p = 23,35$ рад/сек, $m_1 = 2000$ кг, $m_2 = 4000$ кг, $Q_o = 6$ кН, изгибная жёсткость стержней рамы одинакова и равна $EI = 10^4$ кНм². Выполнить динамический расчет рамы, где необходимо:

- 1 Определить спектр собственных частот и периоды колебаний.
- 2 Изобразить главные формы колебаний. Проверить их ортогональность.
- 3 Вычислить амплитуды колебаний масс и амплитуды динамических сил.
- 4 Определить амплитудные значения в сечениях рамы динамических изгибающих моментов, поперечных и продольных сил и построить их эпюры.

Решение: 1 Вычисляем коэффициенты податливости системы. Для этого прикладываем к массам единичные силы инерции. Направления единичных сил инерции и эпюры изгибающих моментов от них приведены на рис. 6.3, б, в.

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right) = \frac{16}{3EI},$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot 2 \right) = \frac{9}{16EI}, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \right) = \frac{9}{8EI}. \text{ Примем за}$$

основные значения $\delta_o = \frac{1}{EI}$, $m_o = m_1 = 2000$ кг. Тогда $m_1^{om} = 1$, $m_2^{om} = 2$, $\delta_{11}^{om} = \frac{16}{3}$,

$\delta_{22}^{om} = \frac{9}{16}$, $\delta_{12}^{om} = \delta_{21}^{om} = \frac{9}{8}$. Составляем зависимость между амплитудами свободных

колебаний (система уравнений 5.5):

$$\begin{cases} (m_1^{om} \cdot \delta_{11}^{om} - \lambda) a_1 & m_2^{om} \cdot \delta_{12}^{om} a_2 = 0 \\ m_1^{om} \cdot \delta_{21}^{om} a_1 & (m_2^{om} \cdot \delta_{22}^{om} - \lambda) a_2 = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (\frac{16}{3} - \lambda) a_1 & \frac{9}{4} a_2 = 0 \\ \frac{9}{8} a_1 & (\frac{9}{8} - \lambda) a_2 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Приравнявая определитель этой системы нулю и раскрывая его (5.6), получим частотное уравнение, из которого определяем характеристические числа λ_1 и λ_2 и затем из (5.4) – спектр собственных частот колебаний ω_1 и ω_2 .

$$\begin{vmatrix} \frac{16}{3} - \lambda & \frac{9}{4} \\ \frac{9}{8} & \frac{9}{8} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 6,458 \lambda + 3,469 = 0, \quad \lambda_1 = 5,867, \quad \lambda_2 = 0,591.$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1 \cdot \delta_o \cdot m_o}} = \sqrt{\frac{EI}{\lambda_1 \cdot m_o}} = \sqrt{\frac{10^7}{5,867 \cdot 2 \cdot 10^3}} = 29,2 \frac{P}{c}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{EI}{\lambda_2 \cdot m_o}} = \sqrt{\frac{10^7}{0,591 \cdot 2 \cdot 10^3}} = 92 \frac{P}{c}.$$

Периоды форм колебаний равны: $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2 \cdot 3,14}{29,2} = 0,215$ с, $T_2 = \frac{2 \cdot 3,14}{92} = 0,068$ с.

2 Определим компоненты векторов \bar{a}_1 и \bar{a}_2 , определяющих форму собственных колебаний. Примем $a_{11} = 1$ и из любого уравнения (*) найдем a_{21} (первый индекс векторов \bar{a}_i указывает на номер массы, а второй – на номер формы колебаний). Так для $\lambda_1 = 5,867$ при $a_{11} = 1$ из первого уравнения системы (*) находим $(\frac{16}{3} - 5,867) \cdot 1 + \frac{9}{4} a_{21} = 0$, $a_{21} = 0,24$, а для $\lambda_2 = 0,591$ и $a_{12} = 1$

$(\frac{16}{3} - 0,591) \cdot 1 + \frac{9}{4} a_{22} = 0$, $a_{22} = -2,11$. Знак « - » указывает на то, что перемещение a_{22} противоположно принятому направлению силы инерции F_2'' . Первая и вторая формы колебаний приведены на рис. 6.3, *д*, *е*. Проверяем условие ортогональности двух форм колебаний (5.7)

$$m_1 \cdot a_{11} \cdot a_{12} + m_2 \cdot a_{21} \cdot a_{22} = 0, 2000 \cdot 1 \cdot 1 + 4000 \cdot 0,24 \cdot (-2,11) \approx 0.$$

3 Определим перемещения масс m_1 и m_2 от амплитудного значения гармонической нагрузки $Q_o = 6$ кН. Используя эпюры изгибающих моментов рис. 6.3, *б*, *в*, *г* и правило Верещагина, находим:

$$\Delta_1 = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 = -\frac{24}{EI} = -0,24 \cdot 10^{-4} \text{ м}, \quad \Delta_2 = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 = -6,75 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

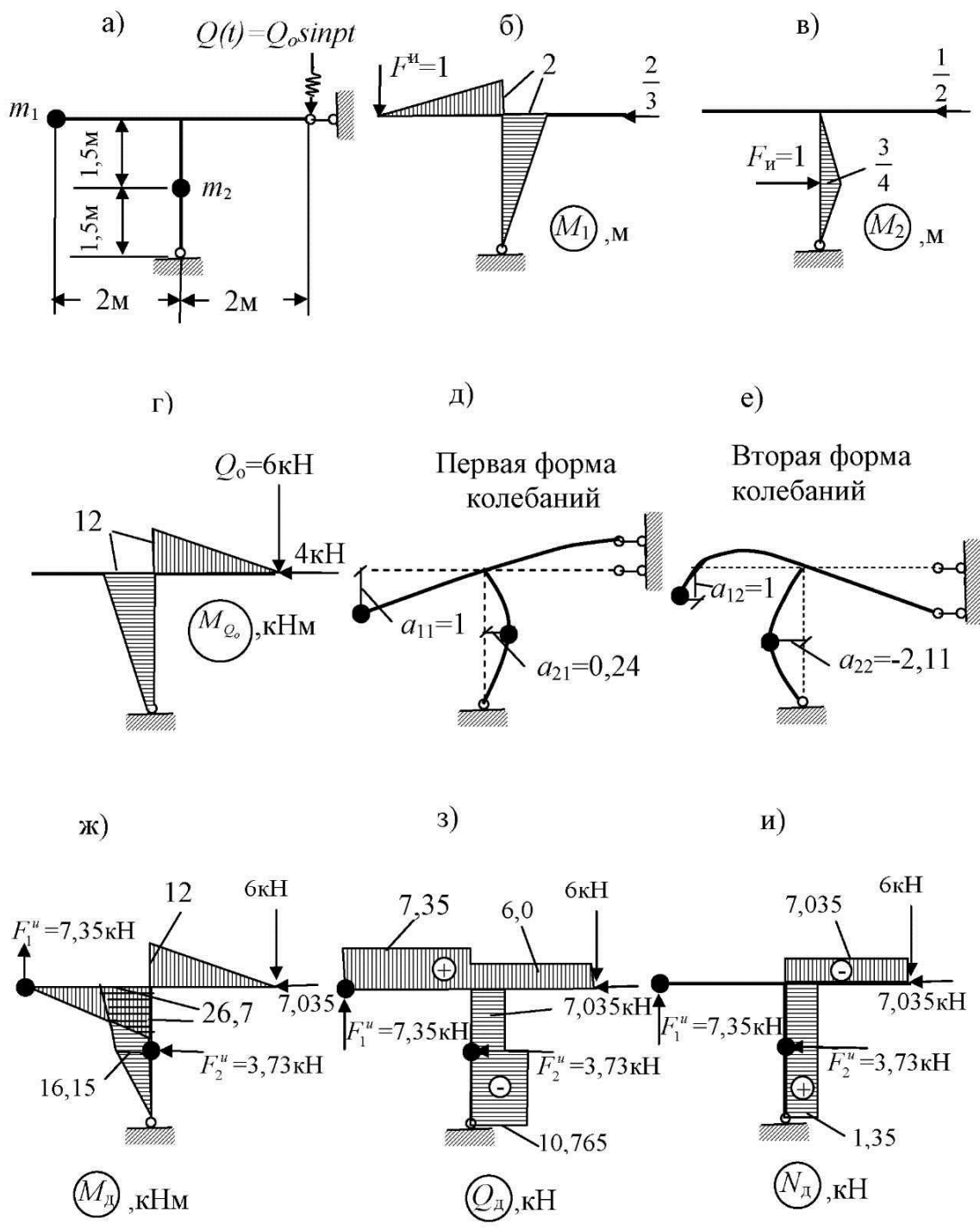


Рис. 6.3

Безразмерный частотный параметр λ_o определяется из (6.3):

$$\lambda_o = \frac{1}{(p^2 \cdot m_o \cdot \delta_o)} = \frac{10^7}{23,35^2 \cdot 2 \cdot 10^3} = 9,171.$$

Амплитуды динамических нагрузок найдём из системы уравнений (6.1)

$$a_1(\delta_{11}^{om} \cdot m_1^{om} - \lambda_o) + a_2\delta_{12}^{om} \cdot m_2^{om} + \lambda_o \cdot \Delta_1 = 0,$$

$$a_1\delta_{21}^{om} \cdot m_1^{om} + a_2(\delta_{22}^{om} \cdot m_2^{om} - \lambda_o) + \lambda_o \cdot \Delta_2 = 0.$$

Подставляя в эти уравнения найденные значения безразмерных величин, а так же перемещений Δ_1 и Δ_2 , получим уравнения:

$$a_1\left(\frac{16}{3} - 9,171\right) + \frac{9}{4}a_2 - 0,022 = 0,$$

$$\frac{9}{8}a_1 + a_2\left(\frac{9}{8} - 9,171\right) - 0,00619 = 0., \text{ из которых определяются иско-}$$

мые амплитуды колебаний масс от воздействия гармонической нагрузки.

$$a_1 = -0,00673 \text{ м}, \quad a_2 = -0,00171 \text{ м}.$$

Амплитудные значения сил инерции определяем по формуле $F_i^u = m_i p^2 a_i$:

$$F_1^u = m_1 p^2 a_1 = 2000 \cdot 23,35^2 \cdot (-0,00673) = -7,35 \cdot 10^3 \text{ Н} = -7,35 \text{ кН}.$$

$$F_2^u = m_2 p^2 a_2 = 4000 \cdot 23,35^2 \cdot (-0,00171) = -3,73 \cdot 10^3 \text{ Н} = -3,73 \text{ кН}.$$

4 Эпюры амплитудных значений динамических изгибающих моментов, поперечных и продольных сил строятся по правилам сопротивления материалов как для обычной заданной нагрузки. Эти эпюры приведены на рис. 6.3, ж, з, и.

7 РАСЧЕТЫ НА СЕЙСМОСТОЙКОСТЬ

Согласно методике, принятой в СНиП, при расчете на сейсмостойкость определяют максимальные значения нагрузок в зависимости от основных динамических параметров сооружения (спектра собственных частот и форм колебаний) и уровня сейсмической опасности района. Формула для сейсмической

сосредоточенной нагрузки, соответствующей каждой главной форме колебаний, имеет вид:

$$S_{ik} = K \cdot A \cdot G_i \cdot \eta_{ik} \cdot \beta_k. \quad (7.1)$$

В этой формуле коэффициент A зависит от ожидаемой силы землетрясения, выражаемой в баллах. Для зданий и сооружений коэффициент A принимают равным 0,1; 0,2; 0,4 соответственно для расчета сейсмичности 7, 8 и 9 баллов. Коэффициент K в нормах представлен в виде произведения трех коэффициентов:

$$K = K_1 \cdot K_2 \cdot K_3. \quad (7.2)$$

K_1 – зависит от степени допускаемых в здании или сооружении повреждений, его значение колеблется в зависимости от назначения здания от 0,12 до 0,25, а в особых случаях принимается равным 1;

K_2 – учитывает особенности конструкции сооружения (число этажей, крупнопанельные здания или каркасные и т.п.). Его значение колеблется от 0,5 до 1,5;

K_3 – учитывает пониженные характеристики демпфирования (башни, мачты, дымовые трубы и т.д.) и принимается в пределах 1–1,5.

β_k – коэффициент динамичности, выражающий зависимость ускорений и сейсмических нагрузок от периода каждой k -й главной формы колебаний.

На основе статистических исследований в нормах принята следующая зависимость:

$$0,8 \leq \beta_k = \frac{\alpha}{T_k} \leq \beta_{\max}, \quad (7.3)$$

где α и β_{\max} – коэффициенты, зависящие от категории грунта, служащего основанием для сооружения, и определяются по таблице 7.2;

η_{ik} – коэффициент формы колебаний; определяется по формуле:

$$\eta_{ik} = \frac{a_{ik} \sum m_i a_{ik}}{M_k}, \quad (7.4)$$

где $M_k = \sum m_i a_{ik}^2$ – приведенная масса k -й главной формы колебаний.

k – номер формы колебаний, i – номер массы. Для систем с одной степенью свободы $\eta_{11} = 1$.

Таблица 7.1

| № п/п | Характеристики грунтов | Номера категории Грунтов | α | β_{max} |
|-------|---|--------------------------|----------|---------------|
| 1 | Скальные неветренелые и слабоветренелые | I | 1,0 | 3,0 |
| 2 | Скальные ветренелые | II | 1,1 | 2,7 |
| 3 | Рыхлые пески, глинистые грунты | III | 1,5 | 2,0 |

Пример 7.1 Определить горизонтальные сейсмические нагрузки, действующие на рамную конструкцию (рис. 7.1, а) при следующих данных: расчетная сейсмичность – 9 баллов, грунты – рыхлые пески (III категория), коэффициенты, зависящие от особенностей конструкции $K_1 = 0,2$; $K_2 = 1,5$; $K_3 = 1,5$ изгибная жесткость стоек $EI = 136 \text{ кНм}^2$, $G = 40 \text{ кН}$; $l = 2 \text{ м}$; $g = 9,81 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Построить эпюры изгибающих моментов в сечениях стоек.

Решение. В первую очередь необходимо найти спектр собственных колебаний системы, обладающей двумя степенями свободы. В данном случае удобно воспользоваться основной системой метода перемещений.

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + m_1\ddot{Z}_1 = 0, \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + m_2\ddot{Z}_2 = 0. \end{cases} \quad (7.5)$$

Для собственных колебаний вектор прогибов \bar{Z} изменяется по гармоническому закону:

$$Z = a \sin \omega t, \quad a = [a_1 a_2]^T \quad \text{или} \quad Z_1 = a_1 \sin \omega t, \quad Z_2 = a_2 \sin \omega t.$$

Подставив эти выражения прогибов в предыдущие дифференциальные уравнения, получим систему уравнений для определения собственных частот ω и соответствующих компонент векторов форм колебаний $a_1 a_2$.

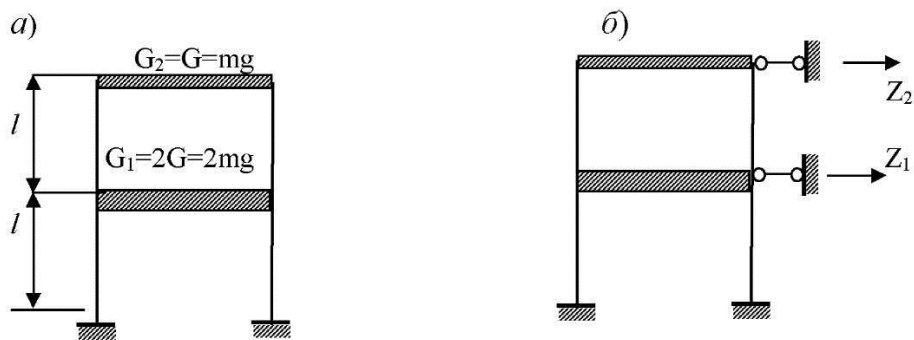


Рис. 7.1 Заданная (а) и основная системы (б)

$$a_1 r_{21} + a_2 (r_{22} - m_2 \omega^2) = 0.$$

Значения реактивных усилий r_{11} , r_{12} и r_{22} в дополнительных стержнях от линейных смещений узлов на величину Z_1 и Z_2 определяются с учетом таблицы 1.1.

$$r_{11} = \frac{48EI}{l^3}, \quad r_{12} = -\frac{24EI}{l^3}, \quad r_{22} = \frac{24EI}{l^3}.$$

Обозначим $c = \frac{24EI}{l^3}$, тогда $r_{11} = 2c$, $r_{12} = -c$, $r_{22} = c$. В этом случае система уравнений, с учетом того, что $m_2 = m$, $m_1 = 2m$, примет вид:

$$\begin{cases} a_1(2c - m_1 \omega^2) - ca_2 = 0, \\ -ca_1 + a_2(c - m_2 \omega^2) = 0. \end{cases}$$

Разделим в этих уравнениях все члены на «с» и введем обозначение $\lambda = \frac{m\omega^2}{c}$, тогда:

$$\begin{cases} a_1(2 - 2\lambda) - a_2 = 0, \\ -a_1 + a_2(1 - \lambda) = 0. \end{cases}$$

Приравняв определитель системы этих уравнений нулю и раскрыв его, получим частотное уравнение, с помощью которого определяются собственные частоты и формы собственных колебаний рамы.

$$\begin{vmatrix} (2 - 2\lambda) - 1 \\ -1 + (1 - \lambda) \end{vmatrix} = 0, \\ 2\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0.$$

Корни этого квадратного уравнения будут равны $\lambda_1 = 0,293$, $\lambda_2 = 1,707$, а собственные частоты колебаний с учетом принятых обозначений определяются по формуле:

$$\omega = \sqrt{\frac{c\lambda}{m}} = \sqrt{\frac{24EI\lambda g}{l^3 G}},$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{24 \cdot 136 \cdot 0,293 \cdot 9,81}{2^3 \cdot 40}} = 5,41 \text{ c}^{-1},$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{24 \cdot 136 \cdot 1,707 \cdot 9,81}{2^3 \cdot 40}} = 13,09 \text{ c}^{-1}.$$

Собственный вектор a_1 , соответствующий первой частоте $\omega_1 = 5,41 \text{ c}^{-1}$ и $\lambda_1 = 0,293$, определяются из любого уравнения системы:

$$\begin{cases} a_{11}(2 - 2 \cdot 0,293) - a_{21} = 0, \\ -a_{11} + a_{21}(1 - 0,293) = 0. \end{cases}$$

Принимая $a_{11} = 1$, получим $a_{21} = (2 - 2 \cdot 0,293) = 1,414$.

Соответственно собственный вектор a_2 , соответствующий второй частоте $\omega_2 = 13,09 \text{ c}^{-1}$ и $\lambda_2 = 1,707$, определяются из любого уравнения системы:

$$\begin{cases} a_{12}(2 - 2 \cdot 1,707) - a_{22} = 0, \\ -a_{12} + a_{22}(1 - 1,707) = 0. \end{cases}$$

Принимая $a_{12} = 1$, получим $a_{22} = \frac{1}{1 - 1,707} = -1,414$.

Таким образом, компоненты собственных векторов будут:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,414 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1,414 \end{bmatrix}.$$

Две формы собственных колебаний изображены на рисунке 7.2.

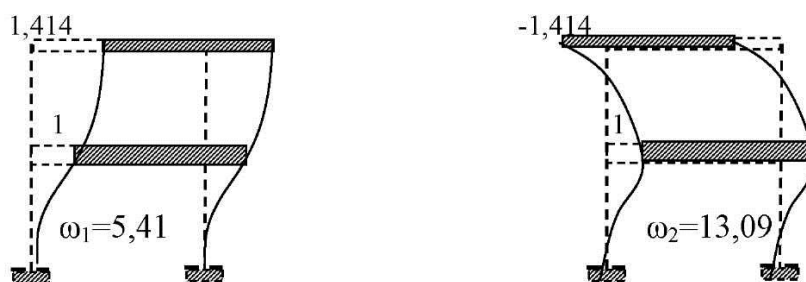


Рис. 7.2. Первая и вторая формы колебаний

После определения спектра собственных колебаний вычисляются сейсмические нагрузки, соответствующие каждой главной форме.

Периоды собственных колебаний будут следующие:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2 \cdot 3,14}{5,41} = 1,16 \text{ сек},$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2 \cdot 3,14}{13,09} = 0,48 \text{ сек}.$$

Коэффициент A для 9 баллов согласно нормам принимаем $A = 0,4$. По формуле (7.2):

$$K = K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 = 0,2 \cdot 1,5 \cdot 1,5 = 0,45.$$

Коэффициент динамичности вычисляется с помощью выражения (7.3) и таблицы 7.1.

Для рыхлых песков: $\alpha_{III} = 1,5$; $\beta_{\max}^{III} = 2$.

$$\beta_1 = \frac{\alpha_{III}}{T_1} = \frac{1,5}{1,16} = 1,29, \quad \beta_2 = \frac{\alpha_{III}}{T_2} = \frac{1,5}{0,48} = 3,125,$$

принимаем $\beta_2 = \beta_{\max}^{III} = 2$.

Приведенная масса $M_k = \sum m_i a_{ik}^2$

для 1-й формы колебаний:

$$\kappa = 1, \quad M_1 = m_1 a_{11}^2 + m_2 a_{21}^2 = 2m \cdot l^2 + m \cdot 1,414^2 = 4 \text{ м};$$

для 2-й формы колебаний:

$$\kappa = 2, \quad M_2 = m_1 a_{12}^2 + m_2 a_{22}^2 = 2m \cdot l^2 + m \cdot (-1,414)^2 = 4 \text{ м}.$$

По формуле (7.4) определяются коэффициенты форм:

для 1-й формы: $\kappa = 1$

$$\eta_{11} = \frac{a_{11}(m_1 a_{11} + m_2 a_{21})}{M_1} = \frac{1 \cdot (2m \cdot 1 + m \cdot 1,414)}{4m} = 0,854,$$

$$\eta_{21} = \frac{a_{21}(m_1 a_{11} + m_2 a_{21})}{M_1} = \frac{1,414 \cdot (2m \cdot 1 + m \cdot 1,414)}{4m} = 1,207;$$

для 2-й формы: $\kappa = 2$

$$\eta_{12} = \frac{a_{12}(m_1 a_{12} + m_2 a_{22})}{M_2} = \frac{1 \cdot (2m \cdot 1 - m \cdot 1,414)}{4m} = 0,146,$$

$$\eta_{22} = \frac{a_{22}(m_1 a_{12} + m_2 a_{22})}{M_2} = \frac{(-1,414) \cdot (2m \cdot 1 - m \cdot 1,414)}{4m} = -0,207.$$

При вычислении коэффициентов формы η следует иметь в виду, что для данной i -й массы сумма коэффициентов η_{ik} всех форм колебаний должна быть равна единице. Проверим:

$$\text{для массы } i = 1: \eta_{11} + \eta_{12} = 0,854 + 0,146 = 1,$$

$$\text{для массы } i = 2: \eta_{21} + \eta_{22} = 1,207 - 0,207 = 1.$$

Сейсмическая нагрузка на этажи рамы определяется по формуле (7.1):

$$S_{ik} = K \cdot A \cdot G_i \cdot \eta_{ik} \cdot \beta_k :$$

$$\kappa = 1, i = 1 : S_{11} = K \cdot A \cdot G_2 \cdot \eta_{21} \cdot \beta_1 = 0,45 \cdot 0,4 \cdot 80 \cdot 0,854 \cdot 1,29 = 11,21 \text{ кН},$$

$$\kappa = 1, i = 2 : S_{21} = K \cdot A \cdot G_2 \cdot \eta_{21} \cdot \beta_1 = 0,45 \cdot 0,4 \cdot 40 \cdot 1,207 \cdot 1,29 = 11,21 \text{ кН},$$

$$\kappa = 2, i = 1 : S_{12} = K \cdot A \cdot G_1 \cdot \eta_{12} \cdot \beta_2 = 0,45 \cdot 0,4 \cdot 80 \cdot 0,146 \cdot 2,0 = 4,21 \text{ кН},$$

$$\kappa = 2, i = 2 : S_{22} = K \cdot A \cdot G_2 \cdot \eta_{22} \cdot \beta_2 = 0,45 \cdot 0,4 \cdot 40 \cdot (-0,207) \cdot 2,0 = -2,98 \text{ кН}.$$

Сейсмическая нагрузка на этажи рамы приведена на рис. 7.3 .

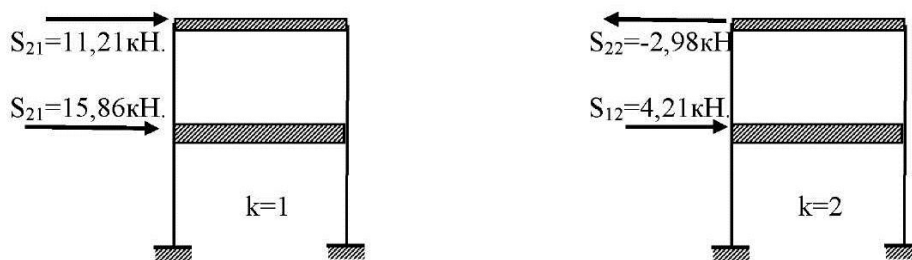


Рис. 7.3. Сейсмическая нагрузка на этажи

Для построения эпюр изгибающих моментов от сейсмической нагрузки воспользуемся методом перемещений. Основная система для каждой формы показана на рисунке 7,4, а, б.

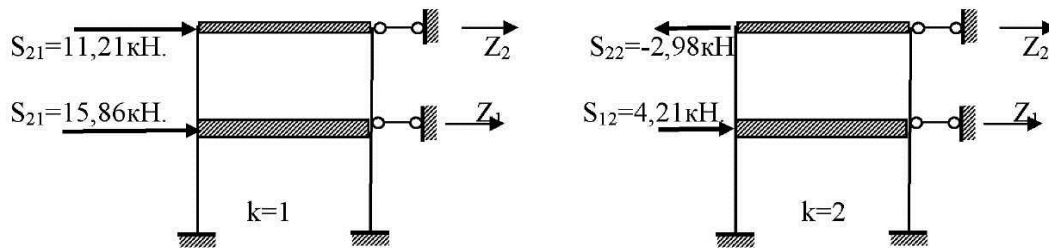


Рис. 7.4. Основная система для первой и второй форм колебаний

$$\begin{aligned} r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + R_{1p} &= 0, \\ r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + R_{2p} &= 0. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Реактивные усилия во введенных стержнях от линейных смещений узлов на $Z = 1$ определяются с учетом таблицы 1.1. $r_{11} = \frac{48EI}{l^3}$, $r_{12} = -\frac{24EI}{l^3}$, $r_{22} = \frac{24EI}{l^3}$.

Обозначим $c = \frac{24EI}{l^3}$, тогда $r_{11} = 2c$, $r_{12} = -c$, $r_{22} = c$. Реактивные усилия в этих стержнях от заданной нагрузки из уравнений статики будут равны: для первой формы ($\kappa = 1$) $R_{1p} = -15,86$, $R_{2p} = -11,21$, для второй формы ($\kappa = 2$) $R_{1p} = -4,21$, $R_{2p} = 2,98$. Равенства (7.6) для первой формы примут вид:

$$\begin{aligned} 2c \cdot Z_1 - cZ_2 - 15,86 &= 0, \\ -c \cdot Z_1 + cZ_2 - 11,21 &= 0. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Решая систему уравнений (7.7), найдем $Z_1 = \frac{27,07}{c}$, $Z_2 = \frac{38,28}{c}$ аналогично для второй формы колебаний:

$$\begin{aligned} 2c \cdot Z_1 - cZ_2 - 4,21 &= 0, \\ -c \cdot Z_1 + cZ_2 - 2,98 &= 0. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Решая систему уравнений (7.8), найдем $Z_1 = \frac{1,23}{c}$, $Z_2 = -\frac{1,23}{c}$.

Эпюры изгибающих моментов от единичных воздействий (с учетом таблицы 1.1) приведены на рисунке 7.5.

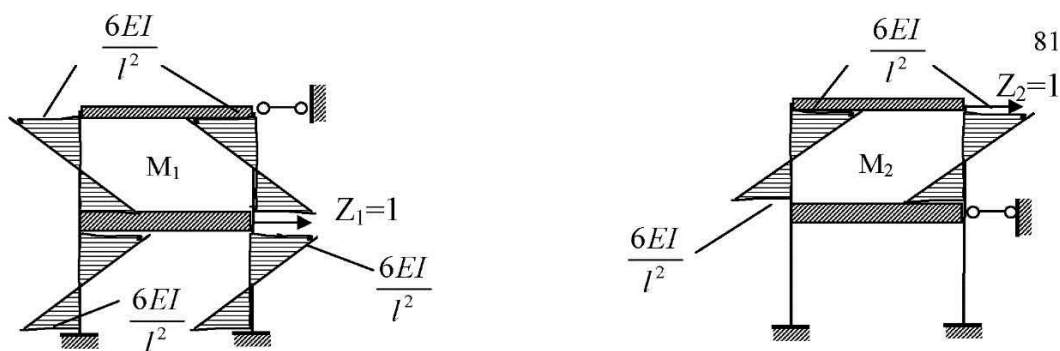


Рис. 7.5. Эпюры моментов от единичных воздействий

Изгибающие моменты от нагрузки в сечениях стоек равны нулю, тогда результирующие изгибающие моменты определяются по формуле:

$$M = M_1 Z_1 + M_2 Z_2. \quad (7.9)$$

С учетом ранее принятых обозначений $\left(\frac{6EI}{l^2} = 0,25c^{-1}\right)$ эпюр M_1 и M_2 (рис. 7.5) и равенства (7.9) изгибающий момент в сечениях у ригелей верхней стойки равен для первой формы:

$$M_B = 1 \cdot \left[\frac{-0,25c \cdot 27,07}{c} + \frac{0,25c \cdot 38,28}{c} \right] = 5,6 \text{ кНм},$$

в сечениях у ригелей нижней стойки:

$$M_H = 1 \cdot \left[\frac{-0,25c \cdot 27,07}{c} \right] = 13,53 \text{ кНм}.$$

Соответствующие изгибающие моменты для второй формы колебаний будут:

$$M_B = 1 \cdot \left[\frac{0,25c \cdot 1,23}{c} + \frac{0,25c \cdot 1,75}{c} \right] = 1,5 \text{ кНм},$$

$$M_H = 1 \cdot \left[\frac{0,25c \cdot 1,23}{c} \right] = 0,62 \text{ кНм}.$$

Результирующая эпюра изгибающих моментов для первой формы приведена на рис. 7.6, а, для второй – на рис. 7.6, б.

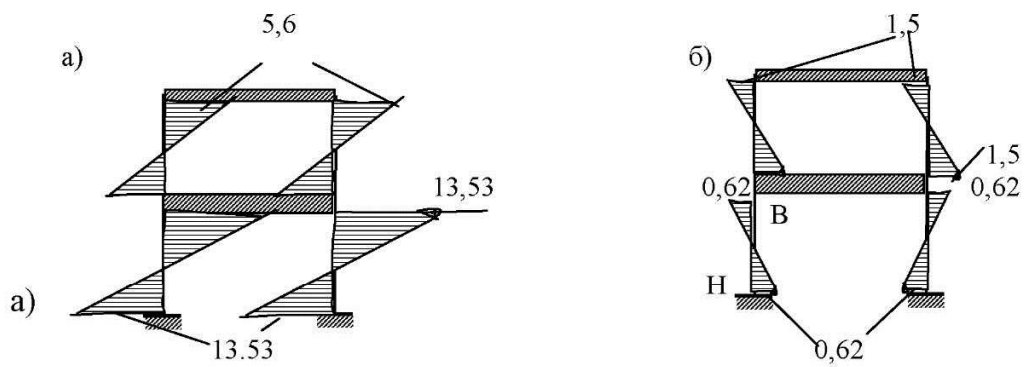


Рис. 7.6. Результирующие эпюры изгибающих моментов

Расчетный изгибающий момент определяется по формуле среднеквадратичного осреднения: $M_{расч} = 13,53^2 + 0,62^2 = 13,54$ кНм.

Задачи для выполнения контрольных работ

Данные к задачам определяются по двум цифрам шифра студента: по первой цифре выбирается рисунок, а по второй – данные из таблиц.

Задача № 1. Точечному грузу, прикрепленному к упругому стержню круглого поперечного сечения диаметром d , находящемуся в положении статического равновесия (рис. 8.1), сообщается начальная скорость V_0 . Масса груза m , модуль упругости материала стержня $E = 2 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2 = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$. Остальные исходные данные задачи приведены в табл.8.1

Без учета сопротивлений и собственного веса стержня при свободных колебаниях системы определить:

- 1 Собственную круговую частоту, период и амплитуду колебаний.
- 2 Уравнение движения, законы изменения скорости и ускорения массы.
- 3 Максимальное нормальное напряжение в поперечном сечении стержня.
- 4 Максимальное перемещение точки «Д» стержня, находящейся на расстоянии $0,6l$ от шарнирно-неподвижной опоры от мгновенного начального импульса.
- 5 Фазовую траекторию колебаний.

Таблица 8.1

| № | m , кг | d , см | V_0 , м/сек | ψ | l , м | Q_0 кН | k |
|----|----------|----------|---------------|--------|---------|----------|-----|
| 1 | 8 | 3 | 0,2 | 0,18 | 1 | 0,4 | 10 |
| 2 | 6 | 4 | 0,3 | 0,15 | 1,3 | 0,2 | 20 |
| 3 | 5 | 3,5 | 0,4 | 0,25 | 1,2 | 0,1 | 5 |
| 4 | 2 | 4 | 0,6 | 0,2 | 0,8 | 0,6 | 8 |
| 5 | 9 | 3 | 0,5 | 0,15 | 2 | 0,1 | 14 |
| 6 | 4 | 2,8 | 0,25 | 0,24 | 1,4 | 0,15 | 6 |
| 7 | 1,5 | 4,5 | 0,1 | 0,18 | 1,6 | 0,45 | 30 |
| 8 | 4,5 | 2,5 | 0,35 | 0,14 | 1,2 | 0,3 | 40 |
| 9 | 10 | 3 | 0,22 | 0,21 | 0,8 | 0,9 | 45 |
| 10 | 4 | 4 | 0,28 | 0,1 | 1,6 | 0,7 | 50 |

Решить задачи № 1, 2, 3, 4, если шифр состоит из двух цифр: **75**.

Пример решения задачи № 1.

Исходная схема задачи, выбранная по первой цифре шифра 7 из рис. 8.1, приведена на рис. 6.2, а. Исходные данные, определённые по второй цифре шифра 5, равны: $m = 9 \text{ кг}$, $d = 3 \text{ см}$, $V_0 = 0,5 \text{ м/сек}$, $l = 2 \text{ м}$.

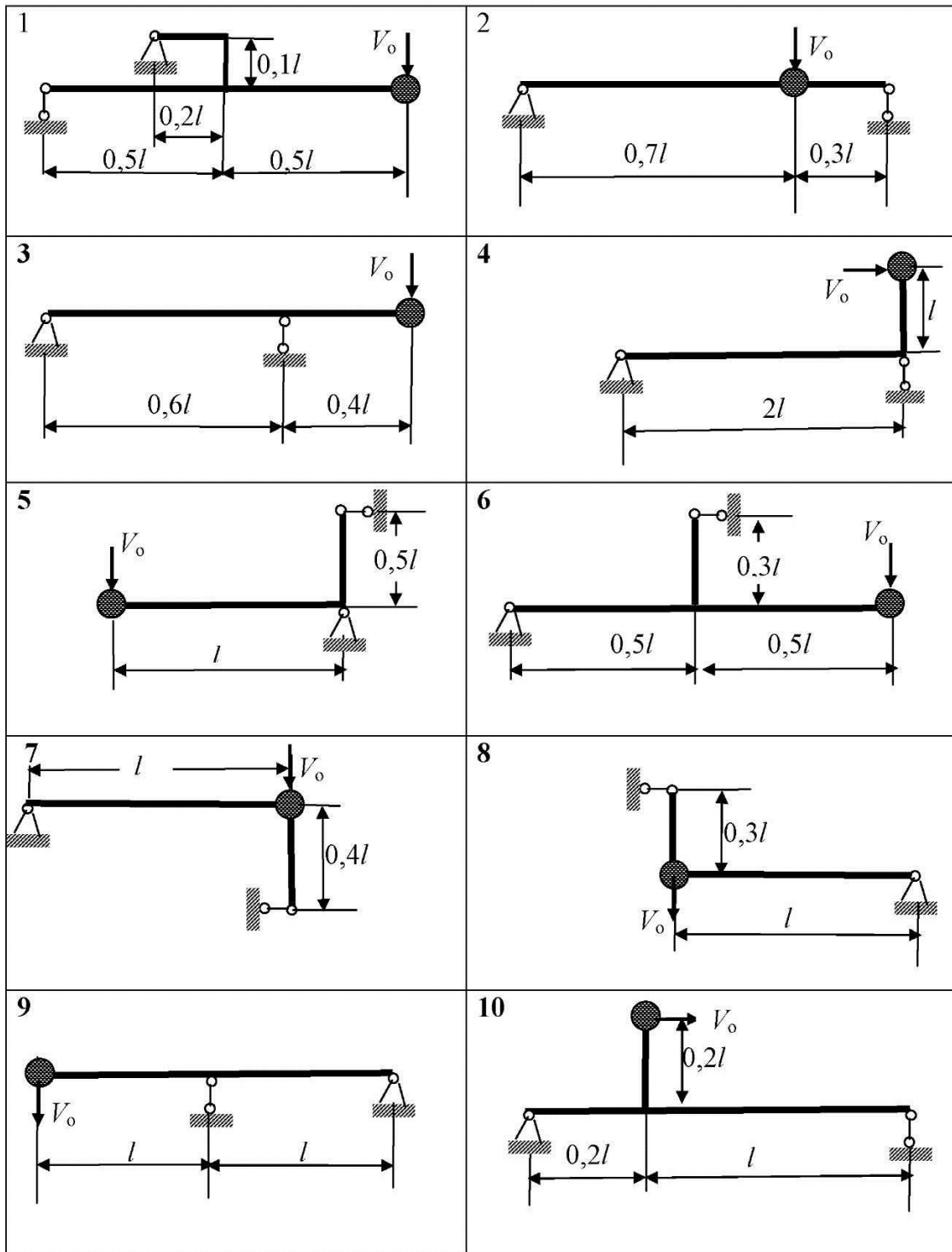


Рис. 8.1

1 Единичную силу инерции принимаем в направлении возможного перемещения массы m (рис. 8.2, б). Для построения эпюры изгибающих моментов от единичной силы инерции определяем из уравнения статики реакцию опоры

«В» – R_B . $\sum M_A = 0, 1 \cdot l - R_B \cdot 0,4l = 0, \rightarrow R_B = 2,5$. Эпюра изгибающих моментов приведена на рис. 6.2, б. Коэффициент податливости системы определяется по правилу Верещагина (1.5):

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} l \cdot l \cdot \frac{2}{3} l + \frac{1}{2} \cdot 0,4l \cdot l \cdot \frac{2}{3} l \right) = \frac{7}{15} \frac{l^3}{EI}$$

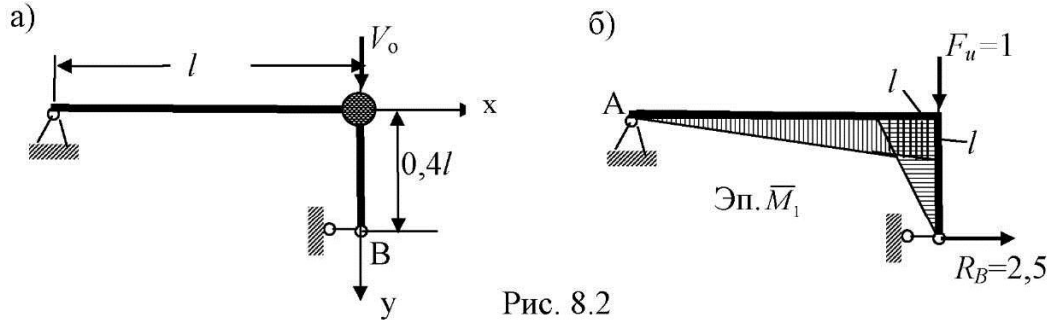


Рис. 8.2

Осевой момент инерции и момент сопротивления поперечного сечения стержня

соответственно равны: $I_x = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 0,03^4}{64} = 3,97 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$,

$$W_x = \frac{I_x}{0,5d} = \frac{3,97}{0,5 \cdot 3} = 2,65 \text{ см}^3.$$

Круговая частота свободных колебаний (1.63):

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m \cdot \delta_{11}}} = \sqrt{\frac{15EI}{7ml^3}} = \sqrt{\frac{15 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 3,97 \cdot 10^{-8}}{7 \cdot 9 \cdot 2^3}} = 15,4 \frac{1}{\text{с}}.$$

Период колебаний: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \cdot 3,14}{15,4} = 0,41 \text{ сек.}$

Амплитуда колебаний (3.11): $A = \sqrt{y_o^2 + \frac{y_o^2}{\omega^2}} = \sqrt{0 + \frac{0,5^2}{15,4^2}} = 0,0325 \text{ м.}$

Начальная фаза колебаний (3.12): $\alpha = \arctg \frac{y_o \cdot \omega}{\dot{y}_o} = 0$, так как $y_o = 0$.

2 Уравнение движения массы (3.6): $y = A \sin \omega t = 0,0325 \cdot \sin 15,4t \text{ м.}$

Закон изменения скорости $V = \frac{dy}{dt} = A\omega \cos \omega t = 0,5 \cdot \cos 15,4t \text{ м/с.}$

Закон изменения ускорения: $\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2} = -A\omega^2 \sin \omega t = -7,7 \cdot \sin 15,4t \text{ м/с}^2.$

3 Амплитудная сила инерции: $F_u^{\max} = m\ddot{y}_{\max} = 9 \cdot 7,7 = 69,3 \text{ Н.}$

Максимальный изгибающий момент (рис. 8.2, б):

$$M_{\max} = (F_u^{\max} + mg) \cdot l = (69,3 + 9 \cdot 9,8) \cdot 2 = 315 \text{ Н}\cdot\text{м} = 31,5 \text{ кНсм}$$

Максимальное нормальное напряжение: $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{31,5}{2,65} = 11,9 \text{ кН/см}^2$.

4 Максимальное отклонение массы от мгновенного начального импульса равно $A_{\max} = 0,0325 \text{ м}$. Заменяем влияние импульса эквивалентной силой $P_{\text{экв}}$, действующей статически и вызывающей такое же перемещение массы m , как и импульс силы. $P_{\text{экв}} = \frac{A_{\max}}{\delta_{11}} = \frac{A_{\max} \cdot 15 \cdot EI}{7l^3} = \frac{0,0325 \cdot 15 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 3,97 \cdot 10^{-8}}{7 \cdot 2^3} = 69,12 \text{ Н}$.

Опорная реакция R_B от единичной силы, приложенной в точке «Д», из уравнения статики равна $R_B = \frac{F \cdot 0,6l}{0,4l} = 1,5$.

Перемножая эпюры \bar{M}_1 и $\bar{M}_{Д1}$ (рис. 8.2, б и 8.3, б) по формуле трапеций (1.49), получим коэффициент δ_{21} , равный перемещению точки «Д» от единичной силы, приложенной к массе m .

$$\delta_{21} = \frac{0,6l}{6EI} (2 \cdot 0,6l \cdot 0,6l) + \frac{0,4l}{6EI} (2 \cdot 0,6l \cdot 0,6l + 2 \cdot 0,6l \cdot l + 0,6l \cdot l + 0,6l \cdot 0,6l) + \frac{0,4l}{6EI} 2l \cdot 0,6l = \frac{0,344l^3}{EI}.$$

Максимальное перемещение точки «Д» стержня:

$$y_{Д}^{\max} = P_{\text{экв}} \cdot \delta_{21} = \frac{A \cdot 15 \cdot EI}{7l^3} \cdot \frac{0,344l^3}{EI} = 0,737A = 0,024 \text{ м}.$$

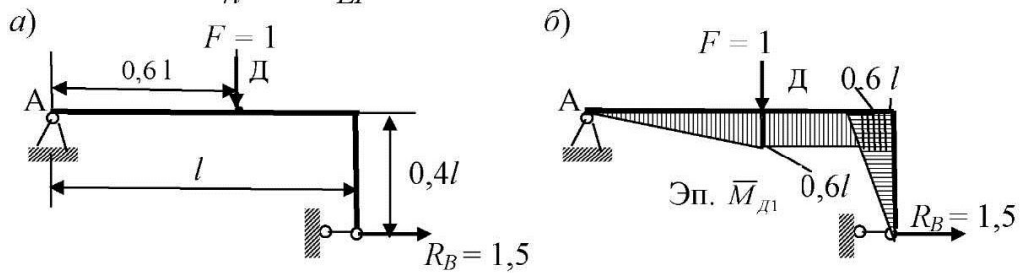


Рис. 8.3

5 Фазовая траектория свободных гармонических колебаний представляет

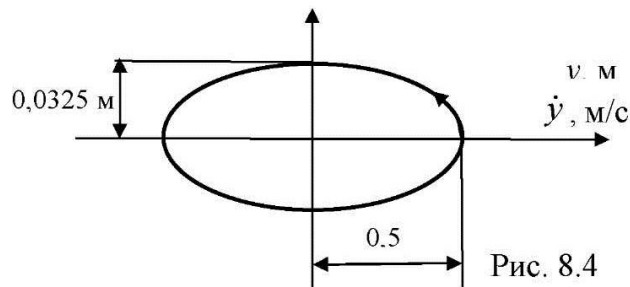


Рис. 8.4

собой эллипс (3.23) с полуосями $A_{max} = 0,0325$ м, $A_{max}\omega = V_{max} = 0,5$ м/с (рис. 8.4) $\frac{y^2}{0,0325^2} + \frac{\dot{y}^2}{0,5^2} = 1$.

Задача № 2. По условию задачи № 1 с учетом внутреннего сопротивления для затухающих колебаний определить:

- 1 Логарифмический декремент и коэффициент затухания колебаний.
- 2 Частоту и период.
- 3 Уравнение движения массы и закон изменения её скорости.
- 4 Огибающую амплитуд и фазовую траекторию колебаний (ориентировочно).
- 5 Число колебаний N , после которых начальная амплитуда уменьшится в k раз.

Значения коэффициента поглощения энергии ψ и других исходных данных приведены в табл. 8.1

Пример решения задачи № 2

Исходные данные согласно шифра 75, определённые по второй цифре шифра 5, равны: $m = 9$ кг, $d = 3$ см, $V_o = 0,5$ м/сек, $l = 2$ м.

1 Логарифмический декремент δ связан с коэффициентом поглощения энергии ψ зависимостью (3.22) $\psi = 2\delta = 2\pi\gamma$, из которой следует:

$$\delta = \frac{\psi}{2} = \frac{0,15}{2} = 0,075.$$

Коэффициент затухания колебаний определяется из системы уравнений (3.21) и (3.17), представленных в виде $\delta = n\Gamma_1 = n\frac{2\pi}{\omega_1}$ и $\omega_1^2 = \omega^2 - n^2$. Собственная частота колебаний определена в задаче №1 и равна $\omega = 15,4$ 1/с. Тогда

$$n = \frac{\omega \delta}{\sqrt{1 + 4\pi^2 \delta^2}} = \frac{15,4 \cdot 0,075}{\sqrt{1 + 4\pi^2 \cdot 0,075^2}} = 0,184 \frac{1}{с}.$$

2 Частота затухающих колебаний $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2} = \sqrt{15,4^2 - 0,184^2} \approx 15,4 \frac{1}{c}$. Таким образом, можно считать, что внутреннее трение практически не влияет на частоту колебаний, поэтому $\omega_1 \approx \omega = 15,4 \frac{1}{c}$, а периоды колебаний упругой системы с внутренним сопротивлением и без него одинаковы $T_1 - T = 0,41$ сек.

3 Используя начальные условия: при $t = 0$ $y_0 = 0$, $\dot{y}_0 = 0,5$ м/с, определим из равенств (3.20) постоянные α_0 и β , необходимые для составления уравнения движения (3.18) и закона изменения скорости (3.19):

$$\alpha_0 = \sqrt{y_0^2 + \frac{(\dot{y}_0 + ny_0)^2}{\omega_1^2}} \text{ или } \alpha_0 = \frac{\dot{y}_0}{\omega_1} = \frac{0,5}{15,4} = 0,0325 \text{ м, } \operatorname{tg} \beta = \frac{y_0 \cdot \omega_1}{\dot{y}_0 + nq_0}, \beta = 0.$$

Уравнение движения (3.18) принимает вид: $y = -0,0325e^{-0,184t} \sin 15,4t$ м.

Закон изменения скорости (3.19)

$$\dot{y} = -n \cdot y + \alpha_0 \cdot \omega_1 e^{-nt} \cos(\omega_1 t + \beta) = -0,184 \cdot y + 0,5e^{-0,184t} \cos(15,4t) \text{ м/с.}$$

4 Максимальная амплитуда имеет место через четверть периода колебаний после начала движения $t_1 = T_1/4 = 0,41/4 = 0,1$ с (рис. 8.5, а).

$$a_1 = 0,0325e^{-0,184 \cdot 0,1} \sin\left(\frac{2\pi}{T_1} \cdot \frac{T_1}{4}\right) = 0,0319 \text{ м.}$$

Огибающая амплитуд колебаний приведена на рис. 8.5, а. Фазовая траектория, имеющая вид спирали, показана на рис. 8.5, б.

5 Число колебаний N , после которых начальная амплитуда уменьшится в k раз, определяется из условия, что амплитуды затухающих колебаний уменьшаются по закону геометрической прогрессии, знаменателем которой является декремент затуханий. По условию задачи $k = 14$, тогда отношение первой и N -й

амплитуды равно $\frac{a_1}{a_N} = e^{\delta \cdot N} = k$, откуда

$$N = \frac{\ln k}{\delta} = \frac{\ln 14}{0,075} = 35.$$

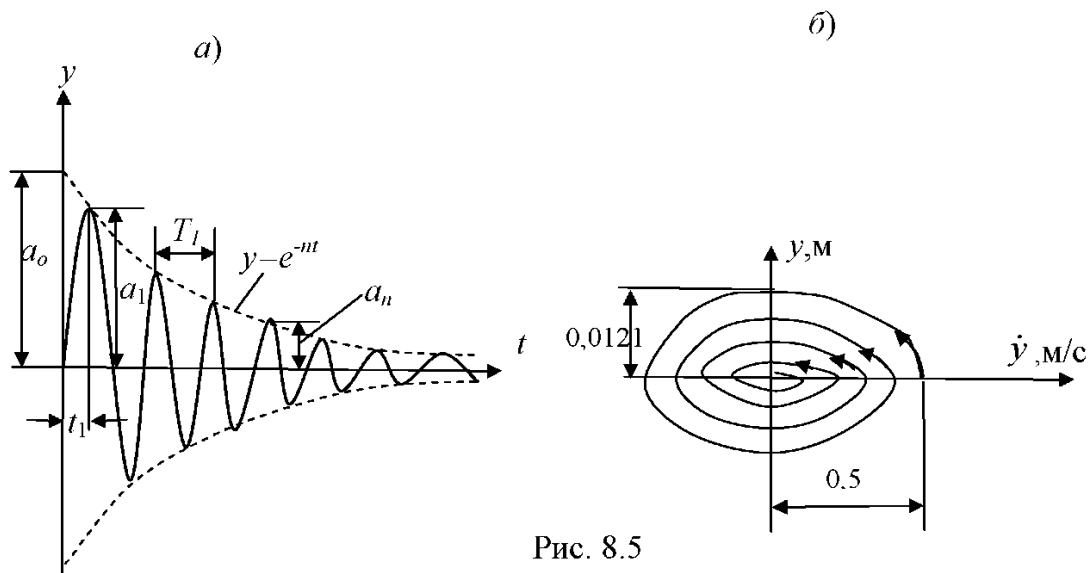


Рис. 8.5

Задача № 3. Для заданной системы в задаче № 1 и № 2 при действии на массу по направлению V_0 гармонической силы $Q = Q_0 \sin pt$ определить:

1 Амплитудно-частотную характеристику, вычислив значения коэффициента динамичности μ в зависимости от коэффициента расстройки ν .

2 Область значений частот вынужденной силы p из условия прочности стержня на изгиб и предельно допустимый коэффициент динамичности, если допускаемое напряжение $[\sigma] = 30 \text{ кН/см}^2$.

Пример решения задачи № 3

1 Коэффициент неупругого сопротивления γ связан с коэффициентом поглощения энергии ψ зависимостью (3.22) $\psi = 2\delta = 2\pi\gamma$, из которой следует:

$$\gamma = \psi / 2\pi = 0,15 / 6,28 = 0,024.$$

Для различных значений коэффициентов расстройки ν вычислим по формуле (4.12) $\mu = \frac{1}{\sqrt{(1-\nu^2)^2 + \gamma^2}}$ коэффициент динамичности μ и результаты сведём в таблицу 8.2.

Таблица 8.2

| | | | | | | | | | |
|-------|---|------|-----|------|------|-------|------|-----|------|
| ν | 0 | 0,1 | 0,3 | 0,5 | 0,8 | 1,0 | 1,2 | 1,5 | 2,0 |
| μ | 1 | 1,01 | 1,1 | 1,33 | 2,78 | 41,67 | 2,27 | 0,8 | 0,33 |

По результатам табл. 8.2 построим амплитудно-частотную характеристику (рис. 8.6).

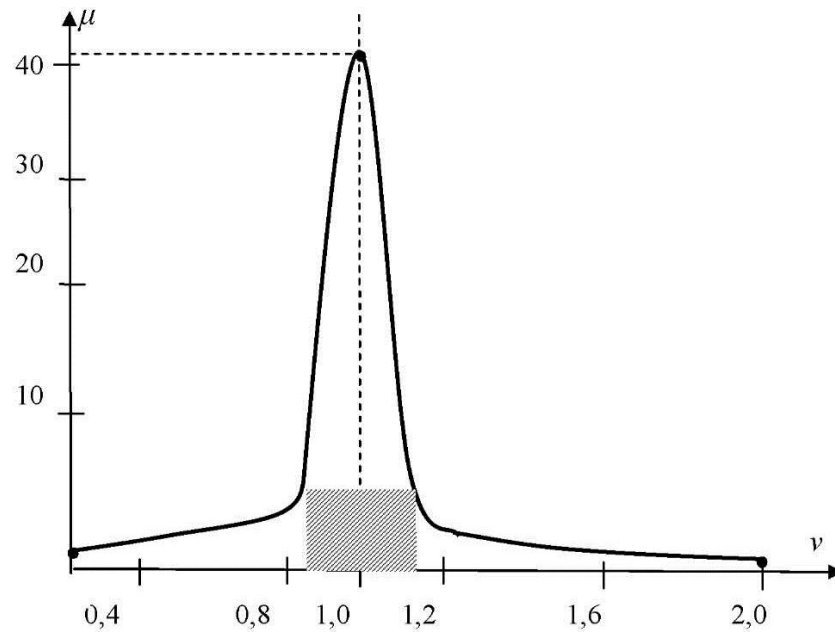


Рис. 8.6

2 Максимальное напряжение в поперечном сечении стержня, равное сумме статического и динамического напряжений $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}^{ст}}{W_x} + \frac{M_{\max}^{дин}}{W_x}$, по условию

прочности не должно превышать допускаемого напряжения $[\sigma] = 30 \text{ кН/см}^2$.

Максимальные изгибающие моменты определяются по эпюре изгибающих моментов от единичной силы (рис. 8.2, б). Максимальный изгибающий момент от

статической нагрузки $M_{\max}^{ст} = mgl = 9 \cdot 9,8 \cdot 2 = 176,4 \text{ Нм} = 17,6 \text{ кНсм}$. Максимальный изгибающий момент от динамической нагрузки в амплитудном состоянии

$$M_{\max}^{дин} = Q_o \cdot l \cdot \mu = Q_o \cdot l \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-\nu^2)^2 + \gamma^2}} = \frac{0,1 \cdot 200}{\sqrt{(1-\nu^2)^2 + \gamma^2}} \text{ кНсм.}$$

Осей момент сопротивления сечения (задача № 1) $W_x = 2,65 \text{ см}^3$. Тогда условие прочности примет

$$\text{вид } \frac{17,6}{2,65} + \frac{20}{2,65\sqrt{(1-\nu^2)^2 + 0,024^2}} \leq 30. \text{ Упростив последнее выражение, получим}$$

биквадратное уравнение $\nu^4 - 2\nu^2 + 0,896 = 0$, откуда определяем $\nu_1 = 0,823$ и $\nu_2 = 1,15$. Зная коэффициент расстройки и частоту собственных колебаний сис-

темы (задача № 1) $\omega = 15,4 \frac{1}{c}$, из формулы $\nu = \frac{p}{\omega}$ (гл. 4) определяем области частот вынужденной силы, в которых обеспечена или не обеспечена прочность стержня.

$$p_1 = \nu_1 \cdot \omega = 0,823 \cdot 15,4 = 12,6 \frac{1}{c}, \quad p_2 = \nu_2 \cdot \omega = 1,15 \cdot 15,4 = 17,71 \frac{1}{c}.$$

Таким образом, область частот вынужденной силы $12,6 < p < 17,71$, соответствующая коэффициентам расстройки $0,823 < \nu < 1,15$, является неприемлемой (на рис. 6.6 заштрихована), так как в этом случае не выполняется условие прочности. Условие прочности стержня выполняется, когда значения p будут находиться в областях $12,6 > p > 17,71 \frac{1}{c}$. Предельно допустимый коэффициент динамичности (4.12) в этом случае равен:

$$\mu_{пред} = \frac{1}{\sqrt{(1 - 0,823^2)^2 + 0,024^2}} = 3,1.$$

Задача № 4. На абсолютно жестком стержне ($EI_x \rightarrow \infty$), имеющем на одном конце шарнирно неподвижную опору, а на другом шарнирно подвижную, закреплена точечная масса (схема задачи № 1), на которую действует гармоническая сила $Q = Q_0 \sin 40$ (задача № 3). Вычислить:

1 Собственную частоту и период свободных колебаний системы.

2 Амплитуду вынужденных колебаний массы m .

3 Максимальные динамические напряжения в упругом стержне шарнирно подвижной опоры.

Длину опорного стержня принять равной $l_0 = 0,2l$, площадь поперечного сечения – $A = 10 \text{ см}^2$, $E = 2 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$. Остальные исходные данные принять по табл. 6.1 согласно заданному шифру $m = 9 \text{ кг}$, $l = 2 \text{ м}$, $l_0 = 0,4 \text{ м}$, $Q_0 = 0,1 \text{ кН}$. Внутреннее и внешнее трение не учитывать.

Пример решения задачи № 4

1 Собственную частоту колебаний системы с точечной массой на абсолютно жестком стержне «АСВ» с упругой опорой «ВД» (рис. 6.7, а) удобнее определять, используя формулу 1.63 в виде $\omega = \sqrt{\frac{c_{11}}{m}}$, где c_{11} – коэффициент жесткости системы в точке сосредоточения массы m , численно равный силе, вызывающий перемещение этой точки, равное единице. Если приложить такую силу в точке «С» (рис. 8.7, б), то все точки абсолютно жесткого стержня при бесконечно малом угле поворота вокруг шарнира «А» получат перемещения.

Перемещение каждой точки стержня будет направлено по нормали к отрезку, соединяющему эту точку с центром вращения «А». Упругий стержень отреагирует на это воздействие реакцией $R_{B1} = c_{оп1} \cdot \Delta l_{оп1}$. Здесь абсолютная деформация опорного стержня при перемещении массы в точке «С» на единицу $\Delta l_{оп1} = BB_2 = BB_1 \cdot \sin \alpha$ (рис. 8.7, б). Продольная жесткость стержня:

$$c_{оп} = EA / l_o = 2 \cdot 10^4 \cdot 10 / 40 = 5 \cdot 10^3 \text{ кН/см.}$$

Из подобия прямоугольных треугольников ACC_1 и ABB_1 (рис. 8.7, б) определим перемещение точки «В»:

$$\frac{BB_1}{AB} = \frac{CC_1}{AC}, \frac{BB_1}{l\sqrt{1^2 + 0,4^2}} = \frac{1}{l}, BB_1 = 1,077, \sin \alpha = \frac{0,4}{\sqrt{1^2 + 0,4^2}} = 0,37.$$

Тогда абсолютная деформация опорного стержня $\Delta_{оп}$ при перемещении массы в точке «С» на единицу: $\Delta l_{оп1} = BB_1 \cdot \sin \alpha = 1,077 \cdot 0,37 = 0,4$.

Необходимая для вычисления собственной частоты жесткость c_{11} определяется из уравнения равновесия силы, вызывающей единичное перемещение массы m и реакций опор.

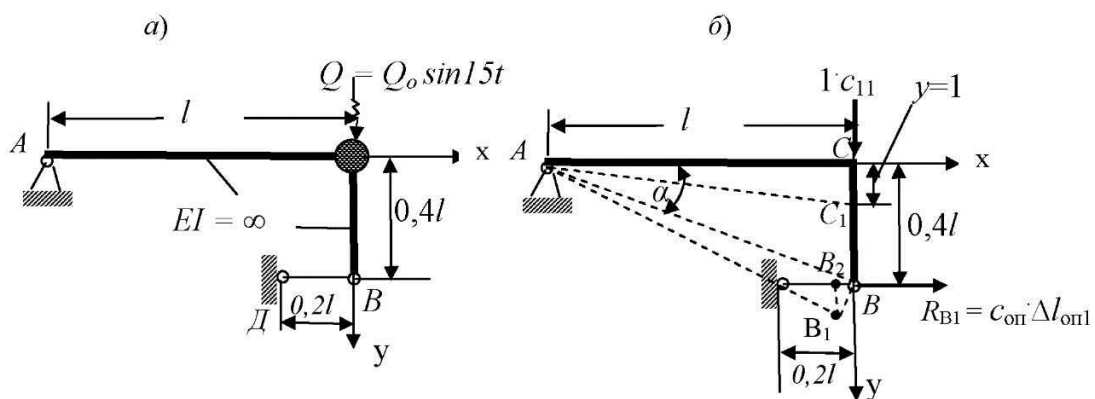


Рис. 8.7

$\sum M_A = 0, c_{11} \cdot l - c_{on} \cdot \Delta l_{on1} \cdot 0,4 \cdot l = 0$, отсюда

$$c_{11} = 0,4c_{on} \cdot \Delta l_{on1} = 0,4 \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 0,4 = 0,8 \cdot 10^3 \frac{\kappa H}{\text{см}} = 0,8 \cdot 10^8 \frac{H}{\text{м}}$$

Собственная частота колебаний системы $\omega = \sqrt{\frac{c_{11}}{m}} = \sqrt{\frac{0,8 \cdot 10^8}{9}} = 2981 \frac{1}{\text{с}}$.

Период колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{6,28}{2981} = 0,0021 \text{ сек.}$

2 Статическое перемещение массы m от действия максимальной динамической нагрузки: $y_{cm} = \frac{Q_0}{c_{11}} = \frac{0,1}{0,8 \cdot 10^3} = 1,25 \cdot 10^{-4} \text{ см.}$

Коэффициент расстройки: $\nu = \frac{p}{\omega} = \frac{40}{2981} = 0,0134$.

Коэффициент динамичности (4.14): $\mu = \frac{1}{1-\nu^2} = \frac{1}{1-0,0134^2} = 1$.

Амплитуда динамических колебаний массы m :

$$A_d = \mu \cdot y_{cm} = 1 \cdot 1,25 \cdot 10^{-4} = 1,25 \cdot 10^{-4} \text{ см.}$$

3 Максимальная абсолютная деформация опорного стержня:

$$\Delta l_{on} = A_d \cdot \Delta l_{on1} = 1,25 \cdot 10^{-4} \cdot 0,4 = 0,5 \cdot 10^{-4} \text{ см.}$$

Максимальные динамические напряжения в опорном стержне определя-

ются по закону Гука $\sigma_{max} = \frac{\Delta l_{on}}{0,4l} \cdot E = \frac{0,5 \cdot 10^{-4}}{0,4 \cdot 200} \cdot 2 \cdot 10^4 = 0,0125 \frac{\kappa H}{\text{см}^2} = 0,125 \text{ МПа.}$

Задача № 5. На стальном стержне круглого поперечного сечения диаметром d прикреплены два точечных груза, массы которых равны m_1 и m_2 . Стержень либо опирается на две опоры, одна из которых шарнирно-неподвижная, а другая шарнирно-подвижная, либо одним концом жестко закреплен (рис. 8.8). Определить:

- 1 Спектр частот и форм собственных колебаний системы точным методом.
- 2 Ортогональность главных форм колебаний.
- 3 Определить основную (низшую) частоту собственных колебаний приближёнными методами Рэлея и Донкерлея.

В расчетах принять модуль упругости стали $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, $g = 10 \frac{м}{с^2}$, весом стержней пренебречь. Данные для расчета принять по таблице 8.3.

Таблица 8.3

| № варианта | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| m_1 , кг | 3 | 2 | 3 | 4 | 2,5 | 5 | 6 | 1,5 | 1 | 2,5 |
| m_2 , кг | 1,5 | 1 | 2 | 1 | 1,5 | 2,5 | 2 | 3 | 2 | 1 |
| a , м | 2 | 1 | 1,5 | 0,8 | 1,4 | 1,2 | 1 | 1,2 | 2 | 0,6 |
| b , м | 1 | 3 | 1,6 | 1 | 1,8 | 1,4 | 1,6 | 2,4 | 3 | 0,8 |
| d , см | 2 | 2,6 | 2,2 | 3 | 2,8 | 2,6 | 2,8 | 2 | 2,5 | 3,2 |

Решить задачу № 5, если шифр состоит из двух цифр: **51**.

Пример решения задачи № 5

Исходная схема задачи, выбранная по первой цифре шифра 5 из рис. 8.8, приведена на рис. 8.9, а. Исходные данные, определённые по второй цифре шифра 1, равны: $m_1 = 3$ кг, $m_2 = 1,5$ кг, $d = 2$ см, $a = 2$ м, $b = 1$ м.

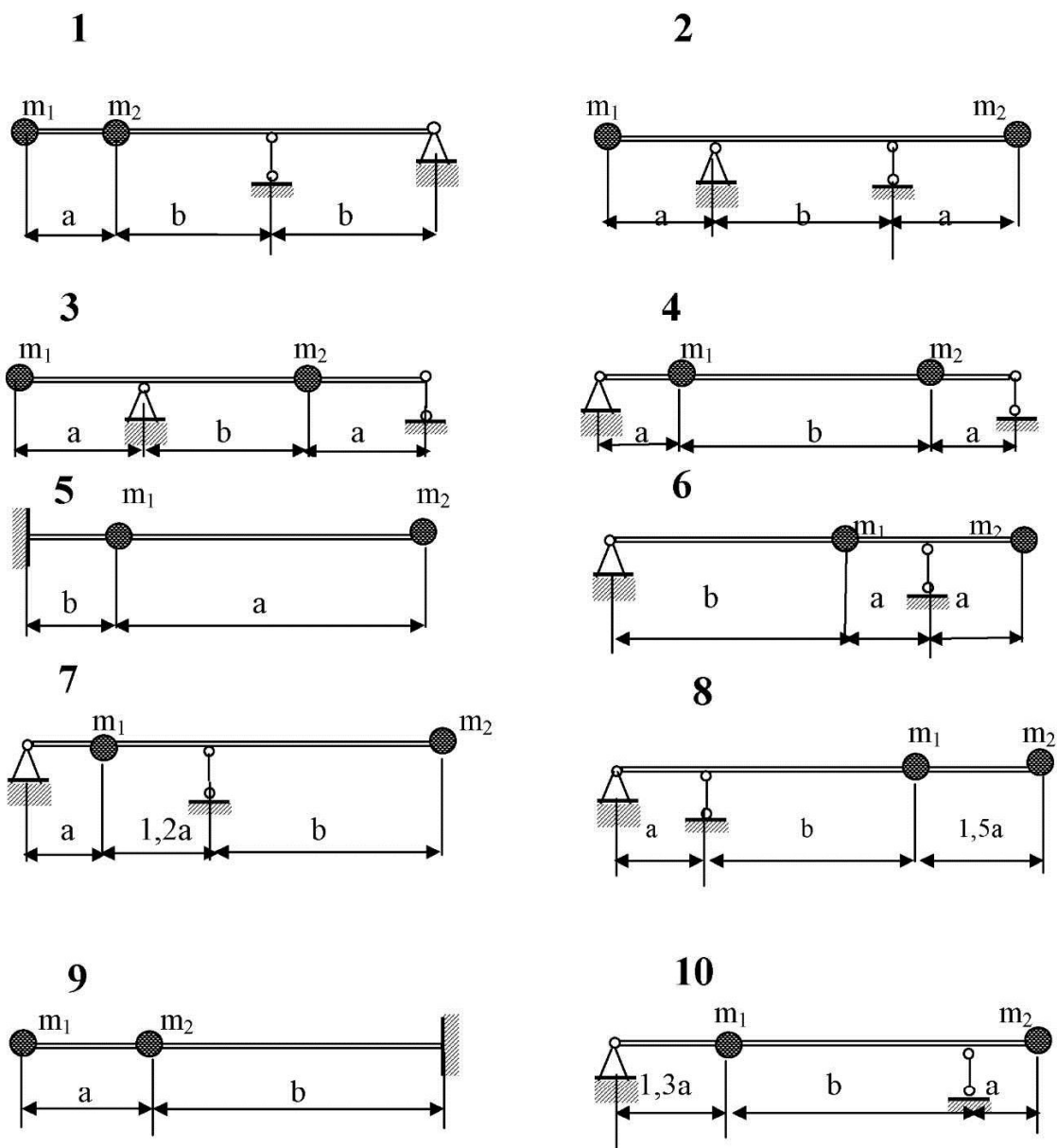


Рис. 8.8

1 Система имеет две степени свободы. Определяем коэффициенты податливости системы δ_{ij} от действия единичных сил инерции F_1'' и F_2'' . При выборе направления сил инерции и сил тяжести необходимо стремиться к тому, чтобы изогнутая ось балки соответствовала форме колебаний основного тона, то есть выпуклость изогнутой оси должна быть направлена в одну сторону.

Если опоры балки расположены на её концах или если балка консольная, то это условие будет выполнено, когда все силы направлены в одну сторону. В случае наличия консольных балок, силы в пролете и на консолях следует на-

правлять в противоположные стороны. Направления единичных сил инерции и эпюры изгибающих моментов от них показаны на рис. 8.9, б, в.

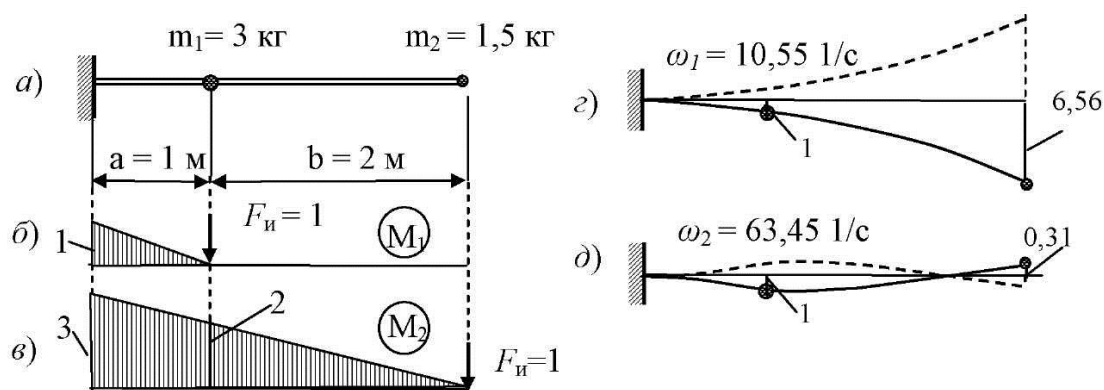


Рис. 8.9

Коэффициенты податливости системы δ_{ij} определяются по формулам строительной механики (1.5), (1.6) или (1.7) Здесь применяется формула трапеций (1,7):

$$\delta_{11} = \frac{1}{6EI} \cdot (2 \cdot 1 \cdot 1) = \frac{1}{3EI}, \quad \delta_{22} = \frac{3}{6EI} \cdot (2 \cdot 3 \cdot 3) = \frac{9}{EI},$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{6EI} \cdot (2 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1) = \frac{4}{3EI}. \text{ Если размерность } EI - \text{ Нм}^2, \text{ то размерность } \delta_{ij} - \frac{\text{м}}{\text{Н}}.$$

Момент инерции сечения $I_x = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 2^4}{64} = 0,785 \text{ см}^4$. Изгибная жесткость стержня $EI = 2 \cdot 10^{11} \cdot 0,785 \cdot 10^{-8} = 1570 \text{ Нм}^2$. Примем за основные значения

$\delta_o = \frac{1}{3EI}$; $m_o = m_2 = 1,5 \text{ кг}$, тогда безразмерные (относительные) величины ($m_i^{om} = \frac{m_i}{m_o}$, $\delta_{ij}^{om} = \frac{\delta_{ij}}{\delta_o}$) будут равны: $m_1^{om} = 2$, $m_2^{om} = 1$, $\delta_{11}^{om} = 1$, $\delta_{22}^{om} = 27$, $\delta_{12}^{om} = 4$, а

определитель (5.6) для вычисления собственных чисел примет вид:

$$\begin{vmatrix} m_1^{om} \cdot \delta_{11}^{om} - \lambda & m_2^{om} \cdot \delta_{12}^{om} \\ m_1^{om} \cdot \delta_{21}^{om} & m_2^{om} \cdot \delta_{22}^{om} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 4 \\ 8 & 27 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем вековое уравнение, из которого найдём значения собственных чисел $(2 - \lambda) \cdot (27 - \lambda) - (8 \cdot 4) = 0$, или $\lambda^2 - 29\lambda + 22 = 0$,

$\lambda_{1,2} = 14,5 \pm \sqrt{14,5^2 - 22} = 14,5 \pm 13,72$, $\lambda_1 = 28,22$, $\lambda_2 = 0,78$. С учётом зависимости

(5.4) $\lambda = \frac{1}{(\omega^2 \cdot m_0 \cdot \delta_0)}$ собственные частоты колебаний равны:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1 \cdot m_0 \cdot \delta_0}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1570}{28,22 \cdot 1,5}} = 10,551/\text{с}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{1}{\lambda_2 \cdot m_0 \cdot \delta_0}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1570}{0,78 \cdot 1,5}} = 63,45 \text{ 1/с}$$

Периоды каждой формы колебаний $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 0,6\text{с}$, $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 0,1\text{ с}$.

2 Вычисляем компоненты собственных векторов \bar{a}_1 и \bar{a}_2 , определяющих форму собственных колебаний. Уравнения (5.5) для амплитудного состояния системы имеют вид:

$\begin{cases} a_1(2 - \lambda) + 4a_2 = 0, \\ 8a_1 + a_2(27 - \lambda) = 0. \end{cases}$ Примем амплитуду первой массы для

всех форм равной единице и из любой строки этих уравнений найдём a_2 .

$$\text{Для первой формы } \begin{cases} a_{11}(2 - \lambda_1) + 4a_{21} = 0, \\ 8a_{11} + a_{21}(27 - \lambda_1) = 0. \end{cases} \text{ при } a_{11}=1 \quad a_{21} = -\frac{2 - 28,22}{4} = 6,56.$$

$$\text{Для второй формы } \begin{cases} a_{12}(2 - \lambda_2) + 4a_{22} = 0, \\ 8a_{12} + a_{22}(27 - \lambda_2) = 0. \end{cases} \text{ при } a_{12}=1 \quad a_{22} = -\frac{2 - 0,78}{4} = -0,31.$$

Собственные векторы амплитуд каждой формы колебаний принимают

вид $\bar{a}_1 = \begin{vmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 6,56 \end{vmatrix}$, $\bar{a}_2 = \begin{vmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ -0,31 \end{vmatrix}$. Знак «-» указывает на то, что перемещение

a_{22} противоположно принятому направлению силы $F_{и} = 1$. Первая и вторая формы колебаний системы приведены на рис. 8.9, ϵ , δ .

Проверка ортогональности форм колебаний: должно быть $\sum_{i=1}^2 m_i \cdot a_{i1} \cdot a_{i2} = 0$.

$$m_1 \cdot a_{11} \cdot a_{12} + m_2 \cdot a_{21} \cdot a_{22} = 3 \cdot 1 \cdot 1 + 1,5 \cdot 6,56 \cdot (-0,31) \approx 0.$$

3 Для вычисления основной частоты колебаний методом Рэлея определяем прогибы точек балки в местах сосредоточенных масс:

$$y_1 = m_1 g \delta_{11} + m_2 g \delta_{12} = 3 \cdot 9,8 \cdot \frac{1}{3 \cdot 1570} + 1,5 \cdot 9,8 \cdot \frac{4}{3 \cdot 1570} = 0,0187 \text{ м.}$$

$$y_2 = m_2 g \delta_{22} + m_1 g \delta_{21} = 1,5 \cdot 9,8 \cdot \frac{9}{1570} + 3 \cdot 9,8 \cdot \frac{4}{3 \cdot 1570} = 0,109 \text{ м.}$$

Основная частота по методу Рэлея (5.8) равна:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g(m_1 y_1 + m_2 y_2)}{m_1 y_1^2 + m_2 y_2^2}} = \sqrt{\frac{9,8(3 \cdot 0,0187 + 1,5 \cdot 0,109)}{3 \cdot 0,0187^2 + 1,5 \cdot 0,109^2}} = 10,68 \text{ 1/с.}$$

Превышение ω_1 по сравнению с точным значением составляет 1,3 %.

Парциальные частоты определяются по формуле (1.63)

$$\omega_1^{\text{парц}} = \sqrt{\frac{1}{m_1 \cdot \delta_{11}}} = \sqrt{\frac{3EI}{3}} = \sqrt{EI}, \quad \omega_2^{\text{парц}} = \sqrt{\frac{1}{m_2 \cdot \delta_{22}}} = \sqrt{\frac{EI}{1,5 \cdot 9}} = \sqrt{\frac{2EI}{27}}.$$

Основная частота по методу Донкерлея определяется из равенства (5.9):

$$\frac{1}{\omega_1^2} = \frac{1}{(\omega_1^{\text{парц}})^2} + \frac{1}{(\omega_2^{\text{парц}})^2} = \frac{1}{EI} \left(1 + \frac{27}{2}\right), \text{ откуда } \omega_1 = \sqrt{\frac{2EI}{29}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1570}{29}} = 10,4 \text{ 1/с.}$$

Уменьшение ω_1 по сравнению с точным значением составляет 1,3 %.

Задача № 6. На массу m_1 (условие задачи № 5) действует вынужденная сила $Q = Q_0 \sin pt$ (рис. 8.10, а). Используя заданный шифр и исходные данные по рис. 8.8 и табл. 8.3, определить частоту вынужденных колебаний p_{1a} , при которой амплитуда вынужденных колебаний массы m_1 равна нулю (p_{1a} – частота антрирезонанса). Изобразить графически зависимость этой амплитуды от частоты вынужденной силы $Q = Q_0 \sin pt$

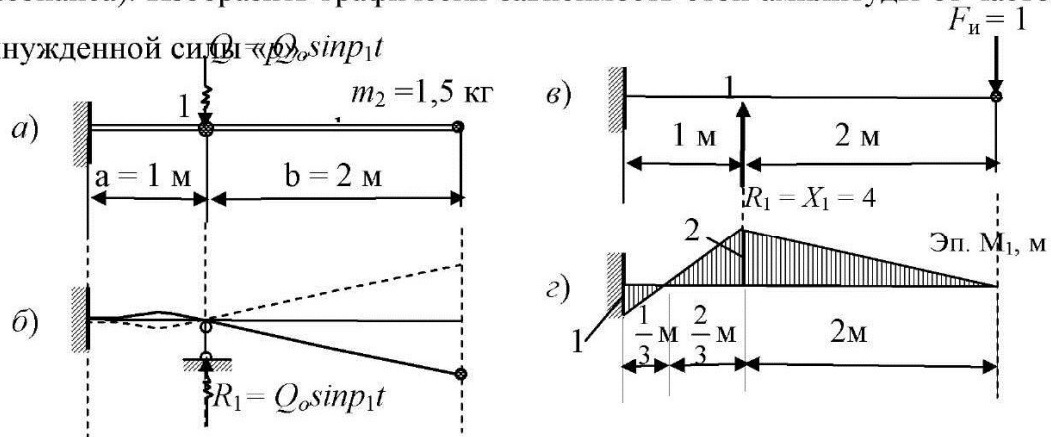


Рис. 8.10

Пример решения задачи № 6

Шифр 51. Исходные данные:

$m_1 = 3 \text{ кг}, m_2 = 1,5 \text{ кг}, d = 2 \text{ см}, a = 2 \text{ м}, b = 1 \text{ м}.$

Используя результаты, полученные в задаче № 5, составим уравнения (6.1) для определения амплитуд колебаний масс 1 и 2 при действии на систему гармонической нагрузки $Q = Q_o \sin pt$:

$$\begin{cases} a_1(2 - \lambda_o) + 4a_2 + \lambda_o \cdot \Delta_{Q_o} = 0, \\ 8a_1 + a_2(27 - \lambda_o) + 4\lambda_o \cdot \Delta_{Q_o} = 0, \end{cases} \quad (**)$$

где $\Delta_{Q_o} = \Delta_1 = \delta_{11} \cdot Q_o = \frac{Q_o}{3EI}$, $4\Delta_{Q_o} = \Delta_2 = \delta_{12} \cdot Q_o = \frac{4Q_o}{3EI}$ перемещения масс от статического действия гармонической нагрузки, определяемые по формулам (5.17).

Найдём из уравнений (**) относительные (безразмерные) величины амплитуд, равные отношению этих амплитуд к перемещению от гармонической нагрузки $\alpha_1^{om} = \frac{a_1}{\Delta_{Q_o}}$, $\alpha_2^{om} = \frac{a_2}{\Delta_{Q_o}}$, тогда равенство (**) примет вид

$$\begin{cases} \alpha_1^{om}(2 - \lambda_o) + 4\alpha_2^{om} + \lambda_o = 0, \\ 8\alpha_1^{om} + \alpha_2^{om}(27 - \lambda_o) + 4\lambda_o = 0. \end{cases}$$

Решая систему этих уравнений, определим зависимость амплитуд масс от частотного параметра λ_o и, следовательно, от частоты вынужденной силы:

$$\alpha_1^{om} = \frac{\lambda_o(\lambda_o - 11)}{\lambda_o^2 - 29\lambda_o + 22}, \quad \alpha_2^{om} = \frac{4\lambda_o^2}{\lambda_o^2 - 29\lambda_o + 22}.$$

В знаменателе здесь стоит детерминант системы, из условия равенства нулю которого найдены собственные числа и частоты ω_1 и ω_2 . Из первого уравнения находим, что при $\lambda_o = 11$ амплитуда колебаний первой массы равна нулю (явление антирезонанса). Соответствующая этому значению частота вынужденной силы определяется по формуле (6.3) $p_{1a} = \sqrt{\frac{1}{\lambda_o m_o \cdot \delta_o}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1570}{11 \cdot 1,5}} = 16,9 \frac{1}{c}$.

Если в точке «1» поставить опору, обеспечивающую условие равенства нулю амплитуды массы m_1 (рис. 8.10, б), то масса m_2 будет совершать колебания с частотой p_{1a} , равной собственной частоте для системы с опорой в точке «1».

Реакция R_1 , меняясь во времени по гармоническому закону с частотой p_{1a} , является внешней силой по отношению к заданной балке, которая обеспечивает равенство нулю амплитуды первой массы.

Собственную частоту колебаний системы с одной степенью свободы (рис. 8.10, б), равную p_{1a} , определим по формуле (1.20) $\omega = p_{1a} = \sqrt{\frac{1}{m_2 \cdot \delta_{11}^*}}$.

Чтобы вычислить δ_{11}^* , необходимо определить реакцию R_1 от действия единичной силы $F_u = 1$ (рис. 6.10, в) и построить эпюру изгибающих моментов. Задача один раз статически неопределима. Для её решения воспользуемся методом сил. Основная система приведена на рис. 6.10, в. Каноническое уравнение метода сил имеет вид: $\delta_{11}^o X_1 + \Delta_{1p} = 0$. Коэффициенты δ_{11}^o и Δ_{1p} определяются с помощью ранее построенных эпюр (рис. 8.9, б и рис. 8.9, в) $\delta_{11}^o = \delta_{11} = \frac{1}{3EI}$, $\Delta_{1p} = -\delta_{12} = -\frac{4}{3EI}$. Подставляя эти значения в каноническое уравнение метода сил, определяем $X_1 = 4$. Эпюра изгибающих моментов от единичной силы инерции приведена на рис. 8.10, з. Перемножая эту эпюру саму на себя по правилу А.К. Верещагина (1.5) $\delta_{11}^* = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{2}{3} (1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 + 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2)$, находим $\delta_{11}^* = \frac{11}{3EI}$. Тогда искомая частота колебаний равна:

$$\omega = p_{1a} = \sqrt{\frac{1}{m_2 \cdot \delta_{11}^*}}, \quad \omega = p_{1a} = \sqrt{\frac{3EI}{m_2 \cdot 11}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1570}{1,5 \cdot 11}} = 16,91/\text{с}.$$

Таким образом, для заданной системы имеют место два резонансных состояния: когда частота вынужденной силы $p_1 = \omega_1 = 10,55 \frac{1}{\text{с}}$ и $p_2 = \omega_2 = 63,45 \frac{1}{\text{с}}$, при этом амплитуда массы m_1 максимальна и одно антирезонансное состояние, когда $\omega = p_{1a} = 16,9 \frac{1}{\text{с}}$, при котором амплитуда массы m_1 равна нулю. На рис.8.11 приведен график зависимости $\alpha_1^{om} = f(p)$.

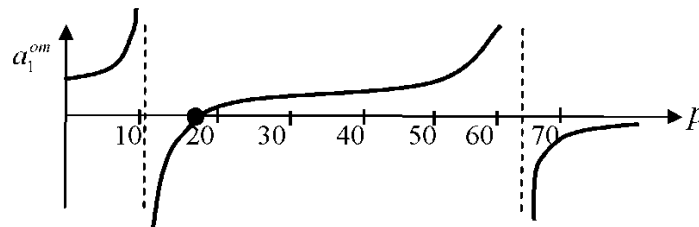


Рис. 8.11

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- 1 **Киселев, В.А.** Строительная механика : учебник для вузов. – 3-е изд. / В.А. Киселев. – М. : Стройиздат, 1980. – 616 с.
- 2 **Безухов, И.М.** Устойчивость и динамика сооружений в примерах и задачах / И.М. Безухов, О.В. Лужин. – М. : Госстройиздат, 1963. – 372 с.
- 3 **Вольмир, А.С.** Устойчивость упругих систем / А.С. Вольмир. – М. : Физматгиз, 1963. – 880 с.
- 4 **Тимошенко, С. П.** Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко, Д.Х. Янг, У. Уивер. – М. : Машиностроение, 1983. – 472 с.
- 5 **Смирнов, Д.Ф.** Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений / А.Ф. Смирнов [и др.]. – М. : Стройиздат, 1984. – 415 с.
- 6 **Биргер, А.И.** Расчет на прочность деталей машин / А.И. Биргер, Б.Ф. Шорр, Р.М. Шнейдерович / М. : Машиностроение, 1966. – 616 с.
- 7 **Бидерман, В.Л.** Теория механических колебаний / В.Л. Бидерман. – М.: Высш. школа, 1980. – 408 с.