

**ОПД.Р.03 СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА  
МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ЭПЮР В СТАТИЧЕСКИ  
ОПРЕДЕЛИМЫХ И СТАТИЧЕСКИ  
НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМАХ**

Учебное пособие

## ВВЕДЕНИЕ

Книга состоит из четырех глав, в которых достаточно подробно рассматриваются методы построения эпюр внутренних силовых факторов статически определимых и статически неопределимых стержневых системах.

В большинстве изданных учебников и учебных пособий этот важнейший вопрос излагается поверхностно, или вообще отсутствует.

В главе 1 рассматривается построение эпюр в различных стержневых системах: балках, рамах, плоскопространственных и др.

В главе 2 приводятся различные общие методы определения перемещений, что имеет самостоятельное значение, а также является базой для двух последующих глав.

В главе 3 дается подробное изложение метода сил применительно к расчету статически неопределимых балок и рам. Рассмотрены все проверки метода, а также использование симметрии.

Глава 4 посвящена изложению метода перемещений. Приведенный здесь материал в лекционном курсе, как правило, не излагается в связи с ограниченностью во времени. Тем не менее метод перемещений очень важен, так как, во-первых, является мощным инструментом для расчета статически неопределимых систем, а во-вторых, используется студентами механических специальностей в дисциплинах, читаемых на старших курсах.

Книга снабжена большим количеством примеров.

# ГЛАВА 1

## ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ

### 1.1 ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ УПРУГОСТИ. МЕТОД СЕЧЕНИЙ

Рассмотрим тело произвольной формы в “спокойном”, ненагруженном состоянии. Между его частицами всегда существуют силы взаимодействия, которые стремятся сохранить его как единое целое, то есть препятствуют изменению взаимного расположения частиц. При нагружении тела произвольной внешней нагрузкой силы взаимодействия между частицами изменяются, появляются дополнительные силы взаимодействия, которые приводят к изменению взаимного расположения частиц тела, то есть к его деформации.

Эти дополнительные силы взаимодействия называются *внутренними силами упругости (ВСУ)* и являются предметом изучения сопротивления материалов.

Анализ характера распределения внутренних сил упругости осуществляется при помощи *метода сечений*. Рассмотрим тело произвольной формы, нагруженное самоуравновешенной системой сил (рис.1,а). В интересующем нас сечении мысленно разрежем его плоскостью на две части (рис.1,б)

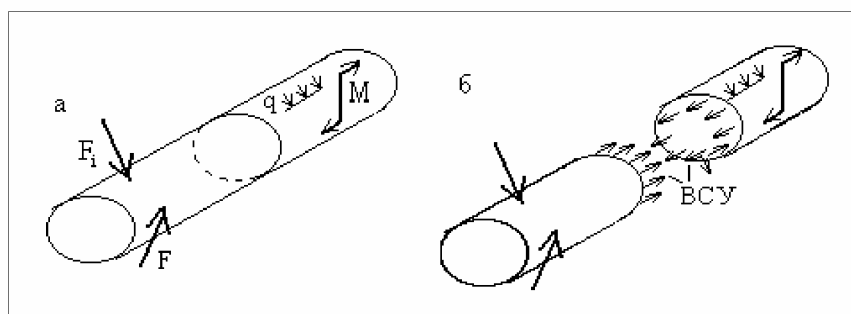
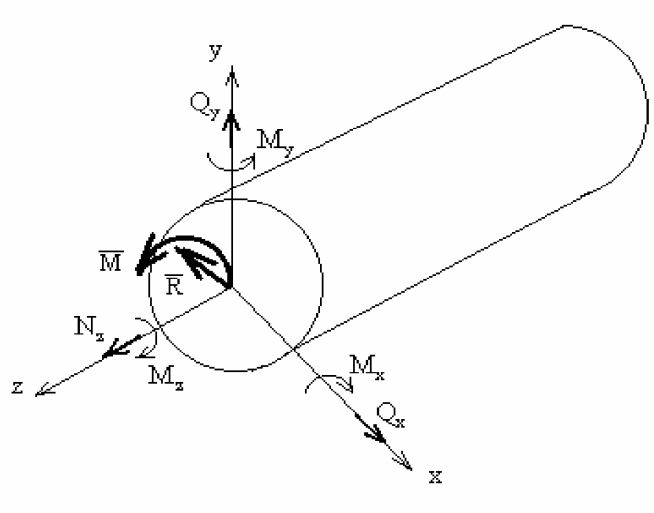


Рис. 1

Внутренние силы упругости определяют взаимодействие между частицами тела, расположенными по разные стороны от мысленно проведенного сечения. В разных сечениях тела возникают разные внутренние силы упругости, но по принципу действия и противодействия они всегда взаимны. Правая отсеченная часть тела действует на левую точно так же, как и левая на правую, а это означает, что равнодействующая внутренних сил может определяться из условий равновесия как левой отсеченной части тела, так и правой.

Из курса теоретической механики известно, что любую произвольную систему сил можно привести к центру тяжести сечения. В результате внутренние силы упругости, действующие в рассматриваемом сечении, приводятся к *главному вектору*  $\bar{R}$  и *главному моменту*  $\bar{M}$ . Выберем прямоугольную систему координат OXYZ так, что ось Z будет направлена по нормали к поперечному сечению, а оси X и Y лежат в плоскости сечения. Проектируя главный вектор  $\bar{R}$  на каждую из осей, а главный момент  $\bar{M}$  на каждую из координатных плоскостей, получим шесть величин - 3 силы и 3 момента, - которые называются *внутренними силовыми факторами* (рис.2).



**Рис. 2**

Полученные таким образом 6 внутренних силовых факторов (ВСФ) имеют строго определенные названия:

$N_z$  - продольная (нормальная) сила;

$Q_x, Q_y$  - поперечная (перерезывающая) сила;

$M_x, M_y$  - изгибающий момент;

$M_z$  - крутящий момент.

Иногда обозначение  $M_z$  заменяют на  $M_{кр}$  или  $M_k$ , более точно отвечающие физическому смыслу этой величины.

График, показывающий как меняется внутренний силовой фактор по длине рассматриваемого тела, называется *эпюрой*.

Правильность построения эпюры обеспечивается, в первую очередь, надлежащим выбором *характерных сечений*, то есть тех сечений, в которых величина внутреннего силового фактора обязательно должна быть определена.

*К характерным сечениям относятся:*

- 1) сечения, расположенные бесконечно близко по обе стороны от точек приложения сосредоточенных сил и моментов;
- 2) сечения, расположенные в начале и в конце каждого участка с распределенной нагрузкой;
- 3) сечения, расположенные бесконечно близко к опорам, а также на свободных концах.

## 1.2 ВИДЫ СОПРОТИВЛЕНИЙ

В зависимости от характера внешней нагрузки и от особенностей нагружаемого тела, в поперечных сечениях могут возникать не все шесть внутренних силовых факторов, а какой-либо один или некоторая их комбинация. В соответствии с этим различают следующие *виды сопротивлений*.

*Растяжение (или сжатие)* - это вид сопротивления, при котором во всех поперечных сечениях возникает только продольная сила  $N_z$ .

*Кручение* - это вид сопротивления, при котором во всех поперечных сечениях возникает только крутящий момент  $M_{кр}$ .

*Чистый изгиб* - это вид сопротивления, при котором во всех поперечных сечениях возникает только изгибающий момент  $M_x$  (или  $M_y$ ). Чаще всего изгибающий момент  $M_x$  сопровождается наличием поперечной силы  $Q_y$  (или момент  $M_y$  сопровождается наличием поперечной силы  $Q_x$ ). В этом случае имеет место *поперечный изгиб*.

Возможны случаи, когда в поперечных сечениях возникают два и более внутренних силовых фактора одновременно (исключая их комбинации, рассмотренные выше), тогда говорят о *сложном сопротивлении*.

### 1.3 ВИДЫ ОПОРНЫХ ЗАКРЕПЛЕНИЙ

С технической точки зрения опорные закрепления конструкций весьма разнообразны. При формировании расчетной схемы все многообразие существующих опорных устройств схематизируется в виде ряда основных типов опор, из которых наиболее часто встречаются: *шарнирно-подвижная опора* (возможные обозначения для нее представлены на рис.3,а), *шарнирно-неподвижная опора* (рис.3,б) и *жесткое защемление, или заделка* (рис.3,в).



Рис. 3

В шарнирно-подвижной опоре возникает одна опорная реакция, перпендикулярная опорной плоскости. Такая опора лишает опорное сечение одной степени свободы, то есть препятствует смещению в направлении опорной плоскости, но допускает перемещение в перпендикулярном направлении и поворот опорного сечения.

В шарнирно-неподвижной опоре возникают вертикальная и горизонтальная реакции. Здесь невозможны перемещения по направлениям опорных стержней, но допускается поворот опорного сечения.

В жесткой заделке возникают вертикальная и горизонтальная реакции и опорный (реактивный) момент. При этом опорное сечение не может смещаться и поворачиваться.

При расчете систем, содержащих жесткую заделку, возникающие опорные реакции можно не определять, выбирая при этом отсеченную часть так, чтобы заделка с неизвестными реакциями в нее не попадала. При расчете систем на шарнирных опорах реакции опор должны быть определены обязательно. Уравнения статики, используемые для этого, зависят от вида системы (балка, рама и др.) и будут приведены в соответствующих разделах настоящего пособия.

#### 1.4 ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ПРОДОЛЬНЫХ СИЛ $N_z$

Продольная сила в сечении численно равна алгебраической сумме проекций всех сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, на продольную ось стержня.

*Правило знаков для  $N_z$* : условимся считать продольную силу в сечении положительной, если внешняя нагрузка, приложенная к рассматриваемой отсеченной части стержня, вызывает растяжение и отрицательной - в противном случае.

**Пример 1.** Построить эпюру продольных сил для жестко защемленной балки (рис.4).

*Порядок расчета:*

1. Намечаем характерные сечения, нумеруя их от свободного конца стержня к заделке.

2. Определяем продольную силу  $N_z$  в каждом характерном сечении. При этом рассматриваем всегда ту отсеченную часть, в которую не попадает жесткая заделка.

$$N_{z,1} = 0;$$

$$N_{z,2} = N_{z,3} = q_1 \cdot 2 = 20 \text{ кН};$$

$$N_{z,4} = N_{z,5} = q_1 \cdot 2 - F_1 = 20 - 40 = -20 \text{ кН}$$

$$N_{z,6} = q_1 \cdot 2 - F_1 + q_2 \cdot 1 = 20 - 40 + 20 = 0$$

$$N_{z,7} = N_{z,8} = N_{z,6} - F_2 = -30 \text{ кН}$$

3. По найденным значениям строим эпюру  $N_z$ .

Положительные значения откладываются (в выбранном масштабе) над осью эпюры, отрицательные - под осью.

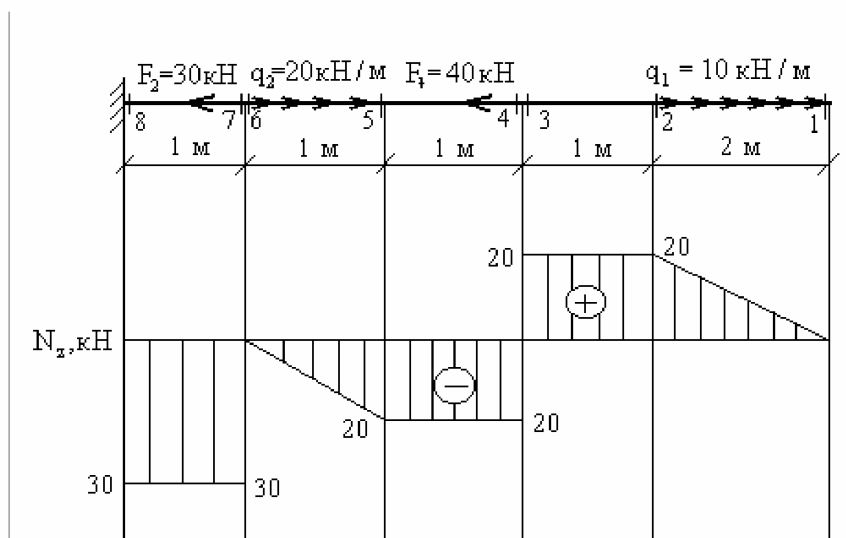


Рис. 4

#### 1.4 ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР КРУТЯЩИХ МОМЕНТОВ $M_{кр}$

*Крутящий момент* в сечении численно равен алгебраической сумме внешних моментов, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, относительно продольной оси  $Z$ .

*Правило знаков для  $M_{кр}$* : условимся считать крутящий момент в сечении положительным, если при взгляде на сечение со стороны рассматриваемой отсеченной части внешний момент виден направленным против движения часовой стрелки и отрицательным - в противном случае.



**Пример 2.** Построить эпюру крутящих моментов для жестко заземленного стержня (рис.5,а).

*Порядок расчета.*

Следует отметить, что алгоритм и принципы построения эпюры крутящих моментов полностью совпадают с алгоритмом и принципами построения эпюры продольных сил.

1. Намечаем характерные сечения.

2. Определяем крутящий момент в каждом характерном сечении.

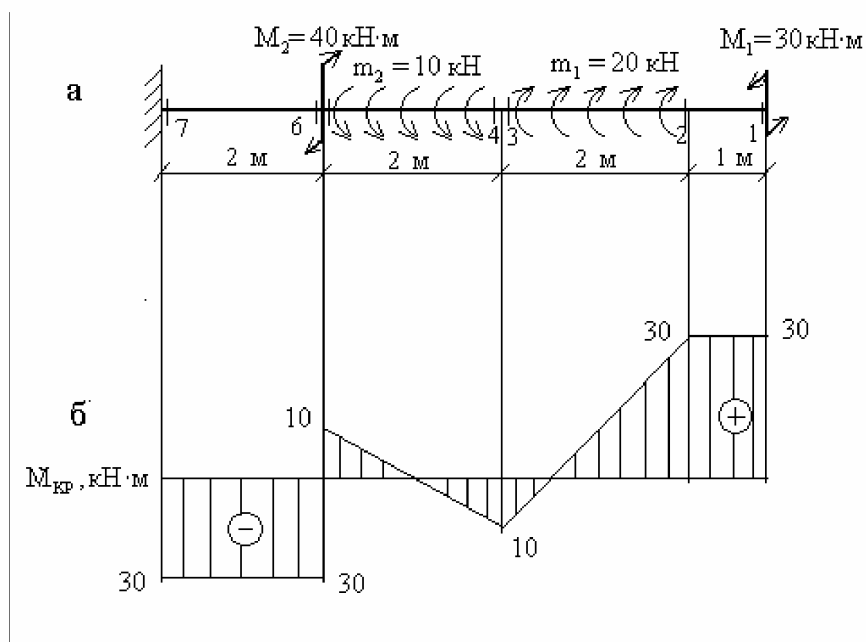
$$M_{\text{кр},1} = M_{\text{кр},2} = M_1 = 30 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{\text{кр},3} = M_{\text{кр},4} = M_1 - m_1 \cdot 2 = 30 - 40 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{\text{кр},5} = M_1 - m_1 \cdot 2 + m_2 \cdot 2 = 30 - 40 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{\text{кр},6} = M_{\text{кр},7} = M_{\text{кр},5} - M_2 = 10 - 40 = -30 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

3. По найденным значениям строим эпюру  $M_{\text{кр}}$  (рис.5,б).



**Рис. 5**

## 1.6 ПРАВИЛА КОНТРОЛЯ ЭПЮР $N_Z$ И $M_{кр}$

Для эпюр продольных сил и крутящих моментов характерны определенные закономерности, знание которых позволяет оценить правильность выполненных построений.

1. Эпюры  $N_Z$  и  $M_{кр}$  всегда прямолинейные.

2. На участке, где нет распределенной нагрузки, эпюра  $N_Z$  ( $M_{кр}$ ) - прямая, параллельная оси; а на участке под распределенной нагрузкой - наклонная прямая.

3. Под точкой приложения сосредоточенной силы на эпюре  $N_Z$  обязательно должен быть скачок на величину этой силы, аналогично под точкой приложения сосредоточенного момента на эпюре  $M_{кр}$  будет скачок на величину этого момента.

## 1.7 ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ $Q_y$ И ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ $M_x$ В БАЛКАХ

Стержень, работающий на изгиб, называется *балкой*. В сечениях балок, нагруженных вертикальными нагрузками, возникают, как правило, два внутренних силовых фактора - поперечная сила  $Q_y$  и изгибающий момент  $M_x$ .

*Поперечная сила* в сечении численно равна алгебраической сумме проекций внешних сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, на поперечную (вертикальную) ось.

*Правило знаков для  $Q_y$* : условимся считать поперечную силу в сечении положительной, если внешняя нагрузка, приложенная к рассматриваемой отсеченной части, стремится повернуть данное сечение по часовой стрелке и отрицательной - в противном случае.

Схематически это правило знаков можно представить в виде



Изгибающий момент  $M_x$  в сечении численно равен алгебраической сумме моментов внешних сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, относительно оси  $x$ , проходящей через данное сечение.

Правило знаков для  $M_x$ : условимся считать изгибающий момент в сечении положительным, если внешняя нагрузка, приложенная к рассматриваемой отсеченной части, приводит к растяжению в данном сечении нижних волокон балки и отрицательной - в противном случае.

Схематически это правило знаков можно представить в виде:

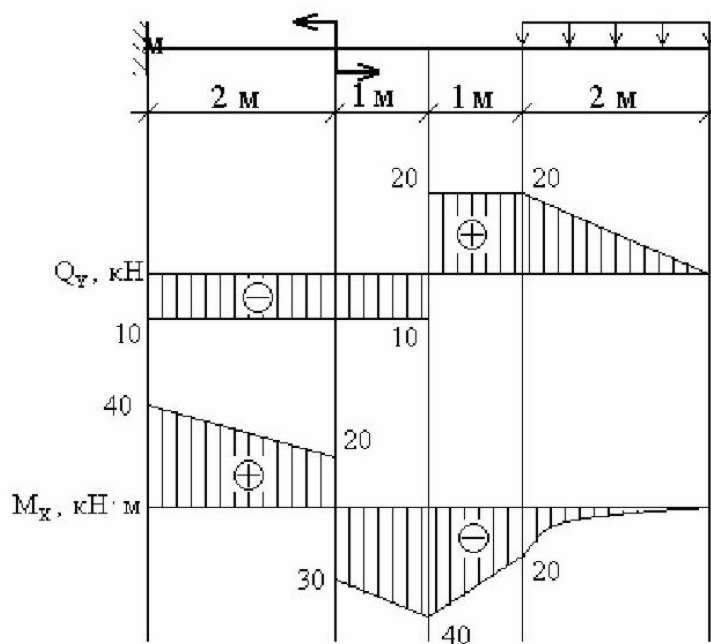


Следует отметить, что при использовании правила знаков для  $M_x$  в указанном виде, эпюра  $M_x$  всегда оказывается построенной со стороны сжатых волокон балки.

## 1.8 КОНСОЛЬНЫЕ БАЛКИ

При построении эпюр  $Q_y$  и  $M_x$  в консольных, или жестко защемленных, балках нет необходимости (как и в рассмотренных ранее примерах) вычислять опорные реакции, возникающие в жесткой заделке, но выбирать отсеченную часть нужно так, чтобы заделка в нее не попадала.

**Пример 3.** Построить эпюры  $Q_y$  и  $M_x$  (рис.6).



**Рис. 6**

*Порядок расчета.*

1. Намечаем характерные сечения.
2. Определяем поперечную силу  $Q_y$  в каждом характерном сечении.

$$Q_{y,1} = 0;$$

$$Q_{y,2} = Q_{y,3} = q \cdot 2 = 20 \text{ кН};$$

$$Q_{y,4} = Q_{y,5} = Q_{y,6} = Q_{y,7} = q \cdot 2 - F = 20 - 30 = -10 \text{ кН}$$

По вычисленным значениям строим эпюру  $Q_y$ .

3. Определяем изгибающий момент  $M_x$  в каждом характерном сечении.

$$M_{x,1} = 0;$$

$$M_{x,2} = -q \cdot 2 \cdot 1 = -20 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x,3} = M_{x,4} = -q \cdot 2 \cdot 2 = -40 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x,5} = -q \cdot 2 \cdot 3 + F \cdot 1 = -30 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x,6} = M_{x,5} + M = -30 + 50 = 20 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x,7} = -q \cdot 2 \cdot 5 + F \cdot 3 + M = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

По вычисленным значениям строим эпюру  $M_x$ , причем, на участке под распределенной нагрузкой эпюра будет криволинейной (квадратная парабола). Выпуклость кривой на этом участке всегда обращена навстречу распределенной нагрузке.

### 1.9 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ $q, Q_y, M_x$

Указанные зависимости используются при построении эпюр  $Q_y, M_x$ , поэтому приведем их здесь без соответствующего вывода, который дается в лекционном курсе.

$$\left. \begin{array}{l} q = \frac{dQ_y}{dz}; \\ Q_y = \frac{dM_x}{dz}; \end{array} \right\} \Rightarrow q = \frac{d^2M_x}{dz^2}.$$

**Пример 4.** Построить эпюры  $Q_y, M_x$  (рис.7).

В данном случае для правильного построения эпюры  $M_x$  необходимо использовать приведенные выше дифференциальные зависимости.

*Порядок расчета.*

1. Намечаем характерные сечения.
2. Определяем поперечные силы в характерных сечениях.

$$Q_{y,1} = F = 30 \text{ кН};$$

$$Q_{y,2} = Q_{y,3} = F - q \cdot 2 = 30 - 40 = -10 \text{ кН}.$$

Строим эпюру  $Q_y$ .

Характер эпюры, то есть тот факт, что эпюра  $Q_y$  пересекает ось, говорит о том, что в этом сечении момент  $M_x$  будет иметь экстремальное значение.

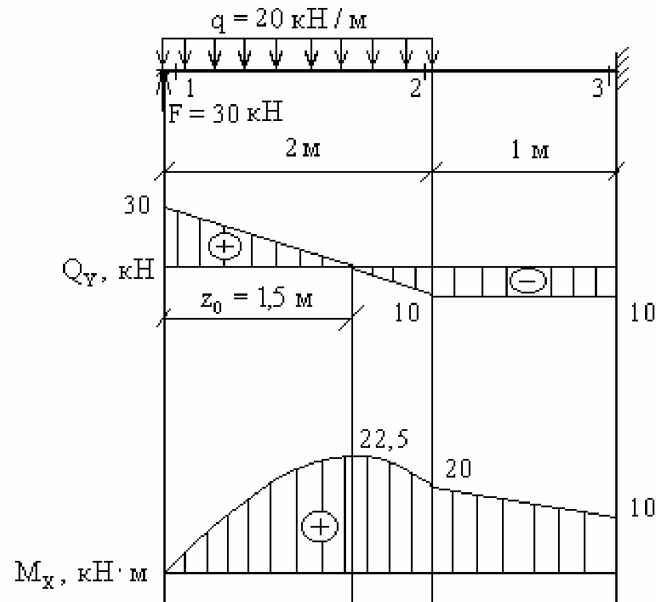
Действительно, пересечение эпюры с осью  $z$  означает, что в этом сечении

$$Q_y = \frac{dM_x}{dz} = 0, \text{ а из курса математики известно, что если производная функции}$$

равна нулю, то сама функция в данной точке имеет экстремальное значение.

Для определения положения “нулевого” сечения необходимо величину расположенной слева от него ординаты эпюры  $Q_y$  разделить на интенсивность распределенной нагрузки  $q$ :

$$z_0 = \frac{Q_{y,\text{лев}}}{q} = \frac{30}{20} = 1,5 \text{ м}$$



**Рис. 7**

Определяем изгибающие моменты в характерных сечениях.

$$M_{x,1} = 0;$$

$$M_{x,2} = F \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = 60 - 40 = 20 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x,3} = F \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 2 = 90 - 80 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

4. Вычисляем экстремальное значение изгибающего момента в сечении,

где  $Q_y = 0$ :  $M_{x,\text{экстр}} \Big|_{Q_y=0} = F \cdot 1,5 - q \cdot 1,5 \cdot 0,75 = 22,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$

Строим эпюру  $M_x$ .

## 1.10 БАЛКИ НА ДВУХ ОПОРАХ

В отличие от консольных балок, при расчете балок на двух шарнирных опорах необходимо сначала определить опорные реакции из уравнений статики, так как и в левую, и в правую отсеченные части для любого сечения, расположенного между опорами, попадает соответствующая реакция.

Для плоской системы число уравнений статики в общем случае равно трем. Если балка загружена только вертикальными нагрузками, то горизонтальная реакция шарнирно-неподвижной опоры равна нулю, и одно из уравнений равновесия ( $\sum F_{ix} = 0$ ) обращается в тождество. Таким образом, для определения реакций в опорах шарнирной балки используются два уравнения статики:

$$1) \sum M_A = 0;$$

$$2) \sum M_B = 0.$$

Условие  $\sum F_{iy} = 0$  используется для проверки вычисленных значений опорных реакций.

**Пример 5.** Построить эпюры  $Q_y, M_x$  для балки с шарнирным опиранием (рис.8).

*Порядок расчета.*

1. Вычисляем реакции опор.

$$\sum M_A = 0: R_B \cdot 5 - M - F \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 1 = 0; R_B = 30 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0: R_A \cdot 5 + M - F \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 4 = 0; R_A = 40 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\sum F_{iy} = 0: R_A - q \cdot 2 - F + R_B = 40 - 20 \cdot 2 - 30 + 30 = 0$$

2. Намечаем характерные сечения.

В отличие от консольных балок здесь известны обе опорные реакции, поэтому для любого сечения можно рассматривать как левую, так и правую отсеченную часть.

3. Определяем поперечные силы в характерных сечениях.

$$Q_{y,1} = R_A = 40 \text{ кН};$$

$$Q_{y,2} = Q_{y,3} = R_A - q \cdot 2 = 40 - 40 = 0;$$

$$Q_{y,4} = Q_{y,5} = Q_{y,6} = Q_{y,7} = -R_B = -30 \text{ кН}.$$

Строим эпюру  $Q_y$ .

4. Определяем изгибающие моменты в характерных сечениях.

$$M_{x,1} = 0;$$

$$M_{x,2} = R_A \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = 80 - 40 = 40 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x,3} = M_{x,4} = R_A \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 2 = 120 - 80 = 40 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x,5} = R_B \cdot 1 - M = 30 - 20 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x,6} = R_B \cdot 1 = 30 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x,7} = 0.$$

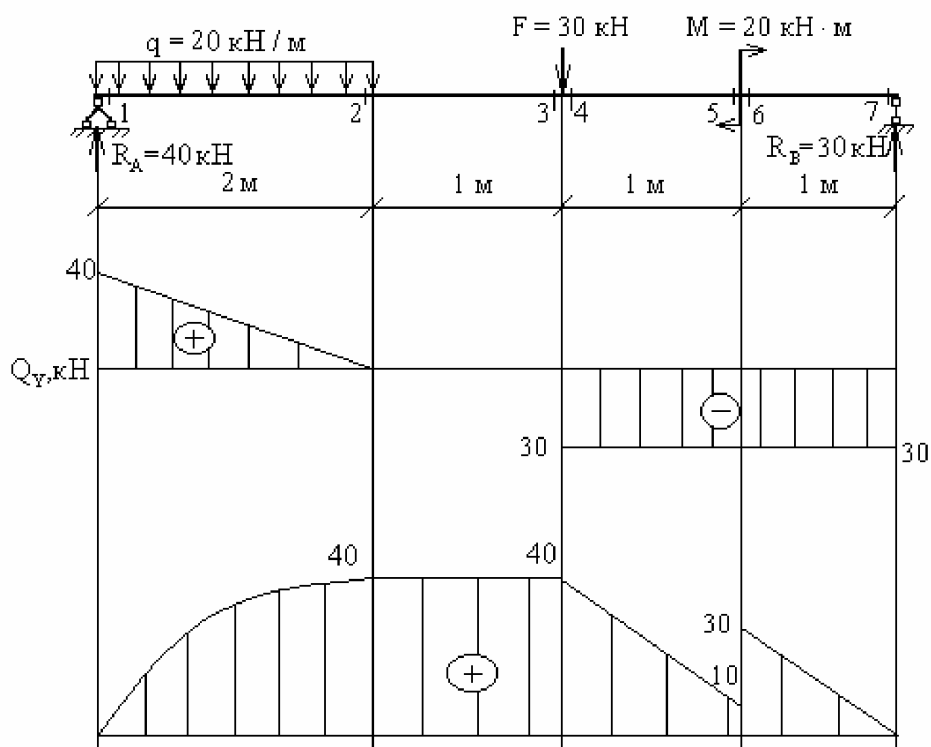


Рис. 8

Строим эпюру  $M_x$



**Пример 6.** Построить эпюры  $Q_y$  и  $M_x$  для балки на двух опорах с консолью (рис.9,а)

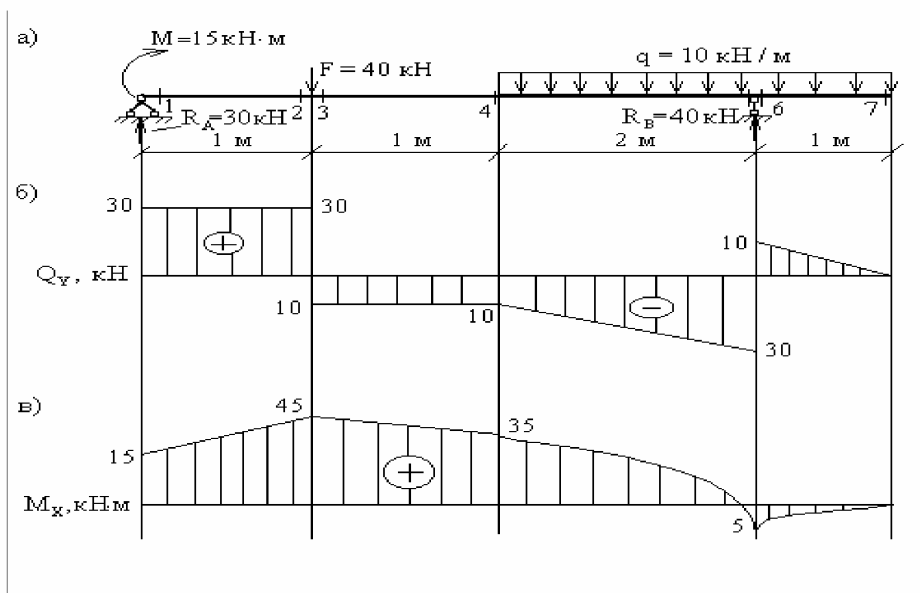
*Порядок расчета.*

1. Вычисляем опорные реакции.

$$\begin{aligned} \sum M_{Ai} = 0: & \quad M + F \cdot 1 + q \cdot 3 \cdot 3,5 - R_B \cdot 4 = 0; \quad R_B = 40 \text{ кН} \\ \sum M_{Bi} = 0: & \quad M - F \cdot 3 - q \cdot 3 \cdot 0,5 + R_A \cdot 4 = 0; \quad R_A = 30 \text{ кН} \end{aligned}$$

Во втором уравнении равновесия (впрочем, как и в первом) момент от распределенной нагрузки  $q$  вычислен без разбиения ее на две части - слева и справа от опоры В, то есть определена равнодействующая нагрузки  $q - q \cdot 3$ , ее положение (в середине участка с распределенной нагрузкой), что позволяет определить плечо равнодействующей относительно опоры В и направление создаваемого ею момента. В то же время можно было в уравнении равновесия учитывать отдельно части нагрузки  $q$ , приложенные слева и справа от опоры В; при этом второе уравнение равновесия имеет вид:

$$\sum M_{Bi} = 0: \quad M - F \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 1 + q \cdot 1 \cdot 0,5 + R_A \cdot 4 = 0$$



**Рис.9**

Вычисленное из этого уравнения значение реакции  $R_A$ , разумеется, совпадает с полученным ранее.

Проверка:

$$\sum F_{yi} = 0: R_A - F - q \cdot 3 + R_B = 30 - 40 - 30 + 40 = 0$$

2. Намечаем характерные сечения.

3. Вычисляем поперечную силу и изгибающий момент в характерных сечениях.

Из рассмотрения левой отсеченной части:

$$Q_{y,1} = Q_{y,2} = R_A = 30 \text{ кН};$$

$$Q_{y,3} = Q_{y,4} = R_A - F = 30 - 40 = -10 \text{ кН};$$

$$M_{x,1} = M = 15 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x,2} = M_{x,3} = M + R_A \cdot 1 = 15 + 30 = 45 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x,4} = M + R_A \cdot 2 - F \cdot 1 = 15 + 60 - 40 = 35 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для сечений 5-7 удобнее рассматривать правую отсеченную часть:

$$Q_{y,5} = q \cdot 1 - R_B = 10 - 40 = -30 \text{ кН};$$

$$Q_{y,6} = q \cdot 1 = 10 \text{ кН};$$

$$Q_{y,7} = 0;$$

$$M_{x,5} = M_{x,6} = -q \cdot 1 \cdot 0,5 = -5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x,7} = 0.$$

По вычисленным значениям строим эпюры  $Q_y$  и  $M_x$  (рис.9,б,в).

### 1.11 ПРАВИЛА КОНТРОЛЯ ЭПЮР $Q_y$ И $M_x$

Дифференциальные зависимости между  $q, Q_y, M_x$  определяют ряд закономерностей, которым подчиняются эпюры  $Q_y$  и  $M_x$ .

1. Эпюра  $Q_y$  является прямолинейной на всех участках; эпюра  $M_x$  - криволинейная (квадратная парабола) на участке под равномерно распределенной нагрузкой, причем, выпуклость кривой всегда обращена навстречу нагрузке  $q$ , и прямолинейная на всех остальных участках.

2. Под точкой приложения сосредоточенной силы (реакции) на эпюре  $Q_y$  обязательно должен быть скачок на величину этой силы (реакции). Аналогично, под точкой приложения сосредоточенного момента на эпюре  $M_x$  обязателен скачок на величину момента.

3. Если на участке под распределенной нагрузкой эпюра  $Q_y$  пересекает ось ( $Q_y = 0$ ), то эпюра  $M_x$  в этом сечении имеет экстремум.

4. На участках с поперечной силой одного знака эпюра  $M_x$  имеет одинаковую монотонность. Так, при  $Q_y > 0$  эпюра  $M_x$  возрастает слева направо; при  $Q_y < 0$  - убывает.

5. Порядок линии на эпюре  $Q_y$  всегда на единицу меньше, чем на эпюре  $M_x$ . Например, если эпюра  $M_x$  - квадратная парабола, то эпюра  $Q_y$  на этом участке - наклонная прямая; если эпюра  $M_x$  - наклонная прямая, то эпюра  $Q_y$  на этом участке - прямая, параллельная оси; если  $M_x = \text{const}$  (прямая, параллельная оси), то на этом участке  $Q_y = 0$ .

## 1.12 ДРУГИЕ ПОДХОДЫ К ПОСТРОЕНИЮ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ

Помимо описанного выше, можно выделить еще два подхода к построению эпюр. В первом случае намечают не характерные сечения, а характерные точки, в качестве которых выделяют точки приложения сосредоточенных сил и моментов, а также точки начала и конца участков с распределенными нагрузками. Затем определяют величину внутреннего силового фактора слева и справа (бесконечно близко) от характерной точки.

Другой возможный подход состоит в том, что балка разбивается на участки (с распределенными нагрузками и между точками приложения сил и моментов). Для каждого участка записывается выражение внутреннего силового фактора в общем виде как функции координаты  $z$ . Затем вычисляются значения на концах каждого участка.

Очевидно, что при обоих подходах в конечном счете все сводится к вычислению внутренних силовых факторов *в характерных сечениях*, то есть соответствует описанному выше способу, но требует дополнительной, как правило неоправданной, работы.

Правда, следует отметить, что запись общих выражений как функций от  $z$  удобна при программировании построения эпюр при помощи вычислительной техники.

### 1.13 ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ДЛЯ ПЛОСКИХ РАМ

*Плоской рамой* называется стержневая система, элементы которой жестко или шарнирно соединены между собой, нагруженная в своей плоскости.

Вертикально (или под наклоном) расположенные стержни рамы называются *стойками*, а горизонтальные - *ригелями*. Жесткость узлов устраняет возможность взаимного поворота скрепленных стержней, то есть в узловой точке углы между их осями остаются неизменными.

Как и многие другие системы, рамы делятся на статически определимые и статически неопределимые (рис.10, б,в,д,е).

Промежуточный шарнир снижает степень статической неопределимости рамы на величину  $m - 1$ , где  $m$  - число стержней, сходящихся в шарнире. Если  $m > 2$ , то шарнир называется *кратным* (рис.10,д).

Для определения *степени статической неопределимости* плоской рамы можно воспользоваться формулой:

$$n = 3K - Ш,$$

где  $n$  - степень статической неопределимости;  $K$  - число замкнутых контуров в предположении полного отсутствия шарниров;  $Ш$  - число шарниров в пересчете на одиночные.

Основание (земля) рассматривается как стержень.

Для рамы (рис.10,б) имеем:

$$K=1; Ш=0;$$

$$n = 3 \cdot 1 - 0 = 3$$

Для рамы (рис.10,д):

$$K=3; \quad \text{Ш}=3$$

$$n = 3 \cdot 3 - 3 = 6$$

В более простых случаях, когда отсутствуют замкнутые контуры и промежуточные шарниры, то есть когда используются комбинации тех же опор, что и в балках (жесткая заделка, шарнирно-подвижная и шарнирно-неподвижная опоры), для определения степени статической неопределимости используется “балочная” формула:

$$n = r - S,$$

где  $r$  - число неизвестных реакций;  $S$  - число уравнений статики ( для плоской рамы  $S=3$ ).

В данной работе ограничимся рассмотрением простейших статически определимых рам трех видов:

- 1) с жесткой заделкой;
- 2) на двух шарнирных опорах (неподвижной и подвижной);
- 3) на двух шарнирно неподвижных опорах с простым промежуточным шарниром.

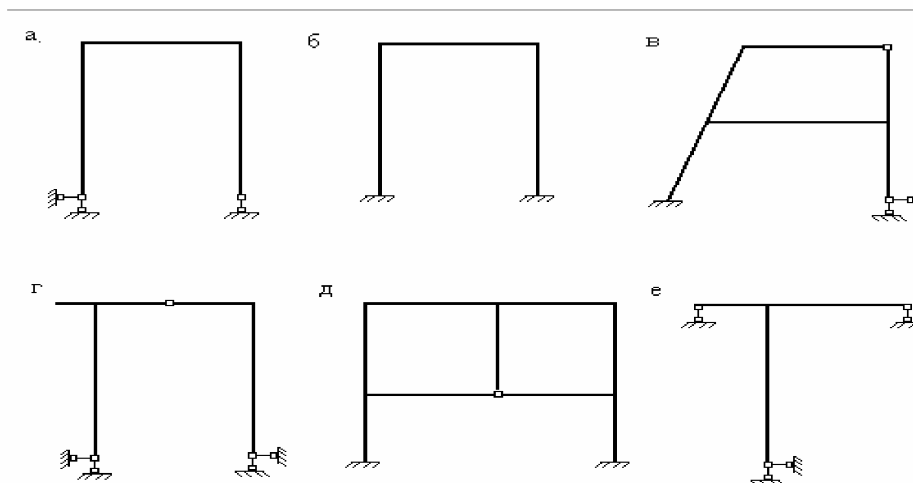


Рис. 10

Из шести внутренних силовых факторов в сечениях плоской рамы в общем случае возникают три: продольная сила  $N_z$ ; поперечная сила  $Q_y$ ; изгибающий момент  $M_x$ .

*Правила знаков.* Для  $N_z$  и  $Q_y$  сохраняются ранее принятые правила знаков.

$N_z > 0$ , если внешняя нагрузка, приложенная к рассматриваемой отсеченной части, вызывает в данном сечении растяжение и  $N_z < 0$  - в противном случае.

$Q_y > 0$ , если внешняя нагрузка, приложенная к рассматриваемой отсеченной части, стремится повернуть данное сечение по часовой стрелке и  $Q_y < 0$  - в противном случае.

Ординаты эпюр  $N_z$  и  $Q_y$  (как, впрочем и  $M_x$ ) откладывают, как и обычно, перпендикулярно к оси элементов рамы. Иногда положительные ординаты  $N_z$  и  $Q_y$  откладывают с внешней стороны рамы, а отрицательные – с внутренней, но рама часто имеет такую конфигурацию, при которой невозможно выделить внутреннюю и внешнюю стороны, поэтому *в дальнейшем условимся*: ординаты эпюр  $N_z$  и  $Q_y$  откладываются в произвольную сторону, но обязательно указывается знак.

Для изгибающих моментов специального правила знаков нет, а при вычислении момента в любом сечении знак принимается произвольно. Но результат вычислений *всегда откладывается со стороны сжатого волокна* элемента рамы. При этом знак на эпюре  $M_x$  никогда не указывается. Такое условие полностью соответствует характеру построения эпюр  $M_x$  в балках, где в соответствии с принятым для изгибающих моментов правилом знаков (см. 1.7) ординаты эпюр  $M_x$  всегда оказывались расположенными со стороны сжатых волокон балки.

## 1.14 РАМЫ С ЖЕСТКОЙ ЗАДЕЛКОЙ

### Пример 7.

Рассмотрим жесткозащемленную плоскую раму (рис.11,а). В жесткой заделке рамы в общем случае нагружения возникают три опорные реакции: две силы ( $H_A$  и  $R_A$ ) и опорный момент ( $M_A$ ). Для построения эпюр определение этих реакций не является безусловной необходимостью: расчет, как и в случае жесткозащемленной балки, можно вести от свободного конца, то есть всякий раз так выбирать отсеченную часть для рассматриваемого сечения, чтобы в нее не попадала опора с неизвестными опорными реакциями. Тем не менее, иногда целесообразно вычислить опорные реакции. Это позволяет проверить построение эпюр или облегчить их построение. Для вычисления реакций в жесткозащемленной раме используются три условия равновесия:

$$\begin{aligned} 1) \sum F_{xi} &= 0; \\ 2) \sum F_{yi} &= 0; \\ 3) \sum M_{Ai} &= 0. \end{aligned}$$

Построим эпюры  $N_z, Q_y, M_x$  для рассматриваемой рамы, не вычисляя опорные реакции.

Методика построения эпюр аналогична ранее рассмотренной для балок, т.е. сначала необходимо наметить характерные сечения. В дополнение к ранее указанным (см.1.2), в рамах характерными являются также сечения, расположенные бесконечно близко к жесткому узлу на всех элементах, сходящихся в этом узле.

*Построение эпюры  $N_z$ .* Следуя установленным правилам, в рассматриваемой раме можно выделить 8 характерных сечений. Продольная сила в любом из них численно равна алгебраической сумме проекций всех сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, на продольную ось стержня. При этом следует учитывать, что положение продольной оси будет изменяться в зависимости от того, чему принадлежит рассматриваемое сечение - стойкам или ригелю.

$$N_{z,1} = N_{z,2} = N_{z,3} = N_{z,4} = 0;$$

$$N_{z,5} = N_{z,6} = -F = -20 \text{ кН};$$

$$N_{z,7} = N_{z,8} = -q \cdot 4 = -40 \text{ кН}.$$

*Построение эпюры  $Q_y$ .* Поперечная сила в любом сечении численно равна алгебраической сумме проекций всех сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, на поперечную ось рамы. Положение поперечной оси также будет изменяться в зависимости от принадлежности данного сечения стойкам или ригелю. С учетом правила знаков, двигаясь от свободного конца к жесткой заделке, получим для  $Q_y$ :

$$Q_{y,1} = Q_{y,2} = 0 \text{ (проекция пары } M \text{ на любую ось равна нулю);}$$

$$Q_{y,3} = Q_{y,4} = F = 20 \text{ кН};$$

$$Q_{y,5} = 0;$$

$$Q_{y,6} = q \cdot 4 = 40 \text{ кН};$$

$$Q_{y,7} = Q_{y,8} = -F = -20 \text{ кН}.$$

Необходимо обратить внимание на тот факт, что  $Q_{y,7} = -Q_{y,4}$ , т.е. что поперечная сила в верхних сечениях противоположных стоек от действия силы, приложенной к правой стойке (при заделке, расположенной слева, и наоборот) имеет противоположные знаки. Отчасти это можно объяснить противоположными направлениями оси  $y$  для сечений 4 и 7, но более строгое обоснование указанного равенства будет дано ниже.

*Построение эпюры  $M_x$ .* Изгибающий момент в любом сечении численно равен алгебраической сумме моментов всех нагрузок, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, относительно этого сечения (более строго: относительно оси  $x$  этого сечения). Обратим внимание на два важных замечания:

1) составляющая момента  $M_x$  от действия сосредоточенного момента  $M$  всегда одинакова и равна  $M$ ;

2) под плечом силы всегда понимается длина перпендикуляра, опущенного из центра тяжести данного сечения *на линию действия силы*. Это означает, что, например, плечо силы  $F$  для сечений 4-7 одинаково и равно 3 м.



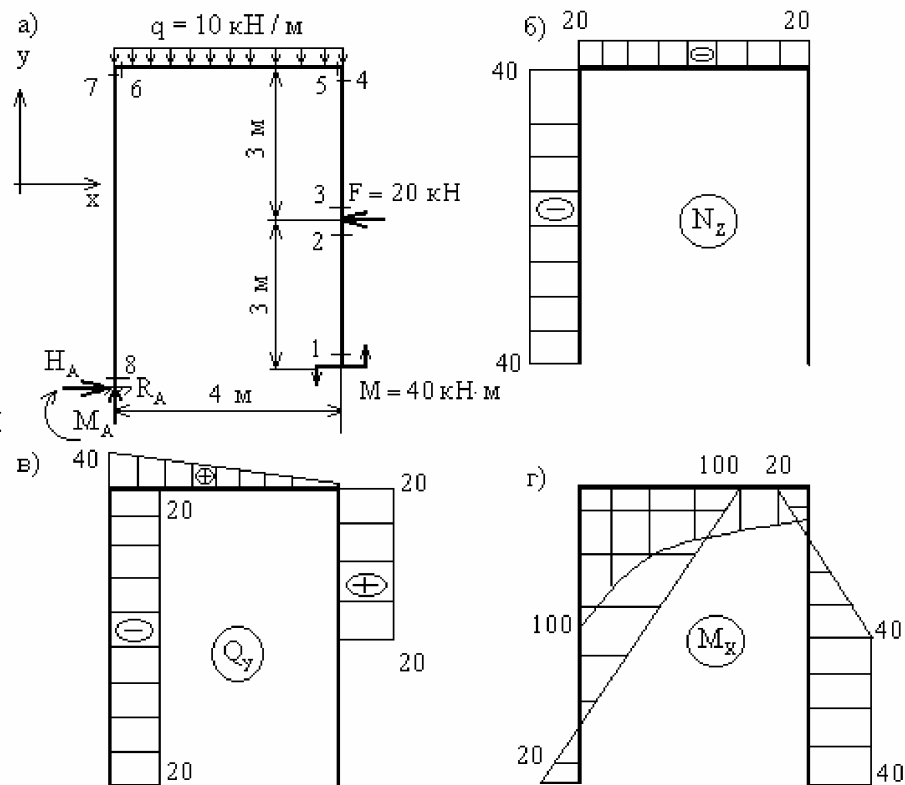


Рис. 11

Таким образом, для сечений 1-8 получим:

$M_{x,1} = M_{x,2} = M_{x,3} = M = 40 \text{ кН}\cdot\text{м}$  (сжатым является правое волокно в сечениях 1-3, поэтому ордината отложена вправо от оси стойки);

$M_{x,4} = M_{x,5} = M - F \cdot 3 = -20 \text{ кН}\cdot\text{м}$  (знаки "+" и "-" здесь имеют относительный характер; результирующий момент сжимает левые волокна в сечении 4 и нижние волокна в сечении 5, поэтому ордината "20" откладывается соответственно влево и вниз);

$M_{x,6} = M - F \cdot 3 - q \cdot 4 \cdot 2 = -100 \text{ кН}\cdot\text{м}$  (сжаты нижние волокна);

$M_{x,7} = M_{x,6} = -100 \text{ кН}\cdot\text{м}$  (сжаты правые волокна);

$M_{x,8} = M + F \cdot 3 - q \cdot 4 \cdot 2 = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}$  (сжаты левые волокна).

Между  $q$ ,  $Q_y$  и  $M_x$  в плоских рамах сохраняются те же зависимости, что и в балках, а именно:

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{dQ_y}{dz}; \\ Q_y &= \frac{dM_x}{dz} \end{aligned} \right\} \Rightarrow q = \frac{d^2 M_x}{dz^2}.$$

Из этого следует, что правила контроля эюр  $Q_y$  и  $M_x$  остаются теми же, что и для балок (см. 1.11).

Эюры  $N_z$  в плоских рамах строятся наиболее просто и при отсутствии нагрузок, распределенных вдоль стержней, представляют собой графически отрезки прямых, параллельные осям стержней (или совпадают с ними при  $N_z = 0$ ).

Если проанализировать процесс построения эюр (рис.11,б-г), то очевидно, что наиболее "сложно" вычислять ординаты в сечениях стержня, примыкающего к заделке (на рис.11,б-г это сечения 7 и 8). Как уже отмечалось, с этой целью иногда вычисляют реакции  $H_A, R_A$  и момент  $M_A$ .

При принятом для всей рамы направлении осей  $x, y$  (рис.11,а) уравнения равновесия имеют вид:

$$\begin{aligned} 1) \sum F_{xi} = 0: & \quad H_A - F = 0; \quad H_A = F = 20 \text{ кН} \\ 2) \sum F_{yi} = 0: & \quad R_A - q \cdot 4 = 0; \quad R_A = q \cdot 4 = 40 \text{ кН} \\ 3) \sum M_{Ai} = 0: & \quad M_A + q \cdot 4 \cdot 2 - F \cdot 3 - M = 0; \quad M_A = 20 \text{ кН} \end{aligned}$$

Полученный для каждой из величин  $H_A, R_A, M_A$  знак "+" говорит, что направления их были выбраны правильно.

После вычисления опорных реакций значения величин  $N_z, Q_y, M_x$  в сечениях 7 и 8 (как, впрочем, и в любом другом) можно вычислять, двигаясь от жесткой заделки к свободному концу.

Например, для сечений 7 и 8:

$N_{z,7} = N_{z,8} = -R_A = -40 \text{ кН}$  (знак "-" указывает на сжатие в этих сечениях с силой  $R_A$ );

$Q_{y,7} = Q_{y,8} = -H_A = -20 \text{ кН}$  (т.к. реакция  $H_A$  стремится повернуть каждое из этих сечений против часовой стрелки.)

При сравнении величины  $Q_{y,7}$  с ранее полученной величиной  $Q_{y,4}$  видно, что

$$Q_{y,7} = -Q_{y,4}, \text{ о чем уже говорилось выше.}$$

$$M_{x,8} = M_A = 20 \text{ кН} \cdot \text{м (сжаты левые волокна стойки);}$$

$$M_{x,7} = M_8 - H_A \cdot 6 = -100 \text{ кН} \cdot \text{м (сжаты правые волокна стойки).}$$

Разумеется, результаты получаемые для любого сечения при движении от свободного конца к жесткой заделке и при движении в обратном направлении одинаковы.

### 1.15 РАМЫ НА ДВУХ ШАРНИРНЫХ ОПОРАХ

В дальнейшем для краткости будем говорить "шарнирная рама", имея в виду ее статическую определимость и отсутствие промежуточных шарниров ( см. 1.13).

#### Пример 8.

Рассмотрим раму той же конфигурации, размеров и с теми же нагрузками, что и в предыдущем примере, но с шарнирным опиранием (рис.12,а).

Здесь также имеем 8 характерных сечений, но для построения эпюр необходимо вычислить сначала опорные реакции, т.к. ни для одного из сечений нельзя выбрать отсеченную часть так, чтобы избежать попадания в нее опоры с неизвестной реакцией.

Для определения опорных реакций в плоских шарнирных рамах используются следующие уравнения равновесия:

$$1) \sum F_{xi} = 0 \text{ (или } \sum F_{yi} = 0);$$

$$2) \sum M_{Ai} = 0;$$

$$3) \sum M_{Bi} = 0.$$

Первое уравнение равновесия используется в том из двух приведенных вариантов, который будет содержать одну неизвестную опорную реакцию.

Так, в рассматриваемом примере этим условием будет  $\sum F_{xi} = 0$ , которое будет содержать неизвестную реакцию  $H_A$  (в то время как условие  $\sum F_{yi} = 0$

содержало бы две неизвестных реакции). Если бы опоры располагались так, что вертикальным является один стержень, то в качестве первого шага использовалось условие  $\sum F_{yi} = 0$ .

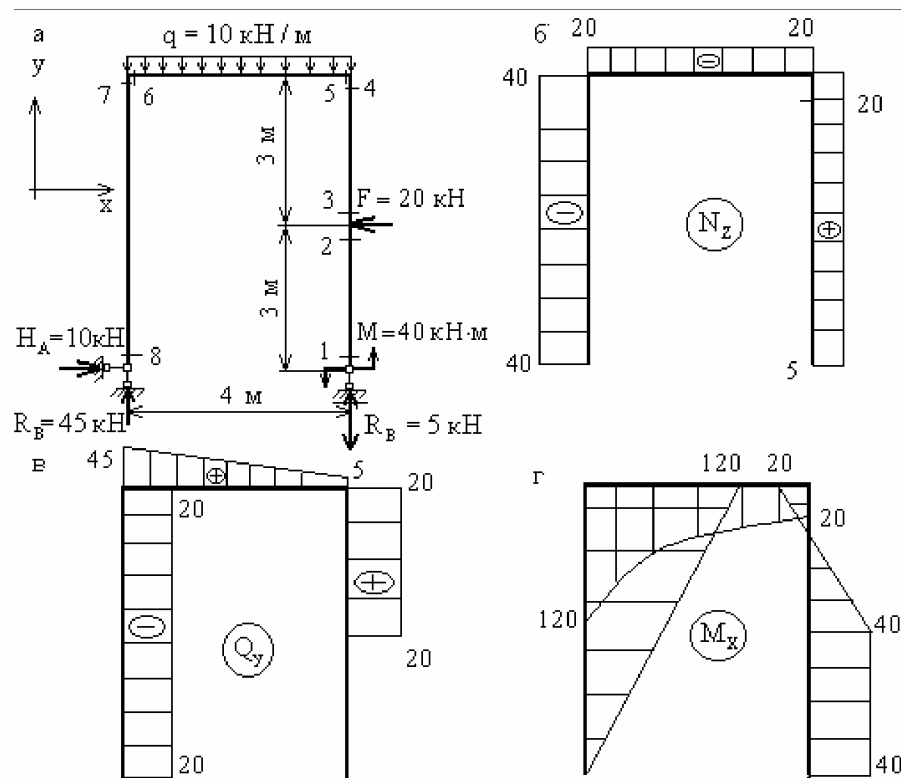


Рис. 12

Второе и третье уравнения равновесия ( $\sum M_{Ai} = 0, \sum M_{Bj} = 0$ ) - такие же, как и для балок, но в одно из них обязательно войдет реакция, вычисленная из первого уравнения (иногда - с нулевым плечом).

В качестве проверки вычисленных реакций используется условие, противоположное первому, то есть  $\sum F_{yi} = 0$  (или  $\sum F_{xi} = 0$ ).

Построение эпюр  $N_z, Q_y, M_x$  в шарнирных рамах выполняется так же, как и в заземленных, но "с меньшими затратами", так как после вычисления реакций опор направление обхода рамы не играет роли, и выбор отсеченной части в каждом случае определяется ее простотой.

Вычислим реакции опор рамы (рис.12,а)

Уравнения статики:

$$1) \sum F_{xi} = 0: H_A - F = 0; H_A = F = 20 \text{ кН}$$

$$2) \sum M_A = 0: q \cdot 4 \cdot 2 - F \cdot 3 - M - R_B \cdot 4 = 0; R_B = -5 \text{ кН}$$

$$3) \sum M_B = 0: R_A \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 2 - F \cdot 3 - M = 0; R_A = 45 \text{ кН}$$

Знак "-", полученный при вычислении реакции  $R_B$ , говорит, что принятое для нее направление нужно изменить на противоположное. Выполним проверку:

$$\sum F_{yi} = 0: R_A - q \cdot 4 - R_B = 45 - 40 - 5 = 0,$$

то есть реакции опор вычислены правильно.

*Построение эпюры  $N_z$ .*

Двигаясь по оси рамы от сечения 1 к сечению 6, получим:

$$N_{z,1} = N_{z,2} = N_{z,3} = N_{z,4} = R_B = 5 \text{ кН}$$

$$N_{z,5} = N_{z,6} = -F = -45 \text{ кН}$$

Для сечений 7 и 8 проще рассматривать отсеченную часть, продвигаясь от опоры А к сечению 7:

$$N_{z,8} = N_{z,7} = -R_A = -45 \text{ кН}$$

Этот же результат получим из рассмотрения отсеченной части 1-6:

$$N_{z,7} = N_{z,8} = -R_B - q \cdot 4 = -45 \text{ кН}$$

Этот же результат получим из рассмотрения отсеченной части 1-6:

$$N_{z,7} = N_{z,8} = -R_B - q \cdot 4 = -45 \text{ кН}$$

По вычисленным значениям строим эпюру  $N_z$  (рис.12,б)

*Построение эпюры  $Q_y$ .*

Из рассмотрения отсеченной части 1-5:

$$Q_{y,1} = Q_{y,2} = 0;$$

$$Q_{y,3} = Q_{y,4} = F = 20 \text{ кН};$$

$$Q_{y,5} = R_B = 5 \text{ кН}$$

Из рассмотрения отсеченной части 8-6:

$$Q_{y,8} = Q_{y,7} = -H_A = -20 \text{ кН};$$

$$Q_{y,6} = R_A = 45 \text{ кН}$$

Эпюра  $Q_y$ , построенная по вычисленным значениям, показана на рис.12,в.

*Построение эпюры  $M_x$ .*

Из рассмотрения отсеченной части 1-5:

$$M_{x,1} = M_{x,2} = M = 40 \text{ кН} \cdot \text{м} \text{ (сжаты правые волокна стойки);}$$

$$M_{x,3} = M_{x,2} = 40 \text{ кН} \cdot \text{м} \text{ (плечо силы } F \text{ равно нулю);}$$

$$M_{x,4} = M_{x,5} = M - F \cdot 3 = -20 \text{ кН} \cdot \text{м} \text{ (сжаты левые волокна стойки в сечении 4 и}$$

нижние волокна ригеля в сечении 5);

Из рассмотрения отсеченной части 8 -6:

$$M_{x,8} = 0;$$

$$M_{x,7} = M_{x,6} = H_A \cdot 6 = 120 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

(сжаты правые волокна стойки и нижние волокна ригеля в сечениях 7 и 6 соответственно).

Эпюра  $M_x$  показана на рис12,г.

**Пример 9.** Рассмотрим шарнирную раму более сложной конфигурации (рис.13,а).

Здесь необходимо рассматривать 10 характерных сечений для построения эпюр  $N_z, Q_y, M_x$ . Сечения 1-6 расположены на ригеле слева направо, а сечения 7-10 - на стойке сверху вниз. Как и в предыдущем примере, указанное расположение характерных сечений является безусловно необходимым, а их нумерация - произвольной.

Уравнения статики для вычисления опорных реакций имеют вид:

$$1) \sum F_{yi} = 0:$$

$$R_B + F_1 - q_1 \cdot 2 - F_2 = 0; \quad R_B = 20 \text{ кН}$$

$$2) \sum M_{Ai} = 0:$$

$$q_1 \cdot 2 \cdot 1 - F_1 \cdot 2 - q_3 \cdot 3 \cdot 1,5 - F_2 \cdot 4 - M_1 + M_2 + H_B \cdot 6 = 0; \quad H_B = 20 \text{ кН}$$

$$3) \sum M_{Bi} = 0:$$

$$H_A \cdot 6 + F_1 \cdot 2 - q_1 \cdot 2 \cdot 1 - q_2 \cdot 3 \cdot 4,5 + F_2 \cdot 4 + M_1 - M_2 = 0; \quad H_A = 10 \text{ кН}$$

Проверка вычисления опорных реакций:

$$\sum F_{xi} = 0:$$

$$H_A + H_B - q_2 \cdot 3 = 10 + 20 - 30 = 0$$

При построении эпюр  $N_z, Q_y, M_x$  целесообразно выбирать отсеченную часть, продвигаясь к центральному узлу рамы с четырех сторон, т.к. в этом случае определение внутренних силовых факторов в каждом из характерных сечений осуществляется наиболее просто.

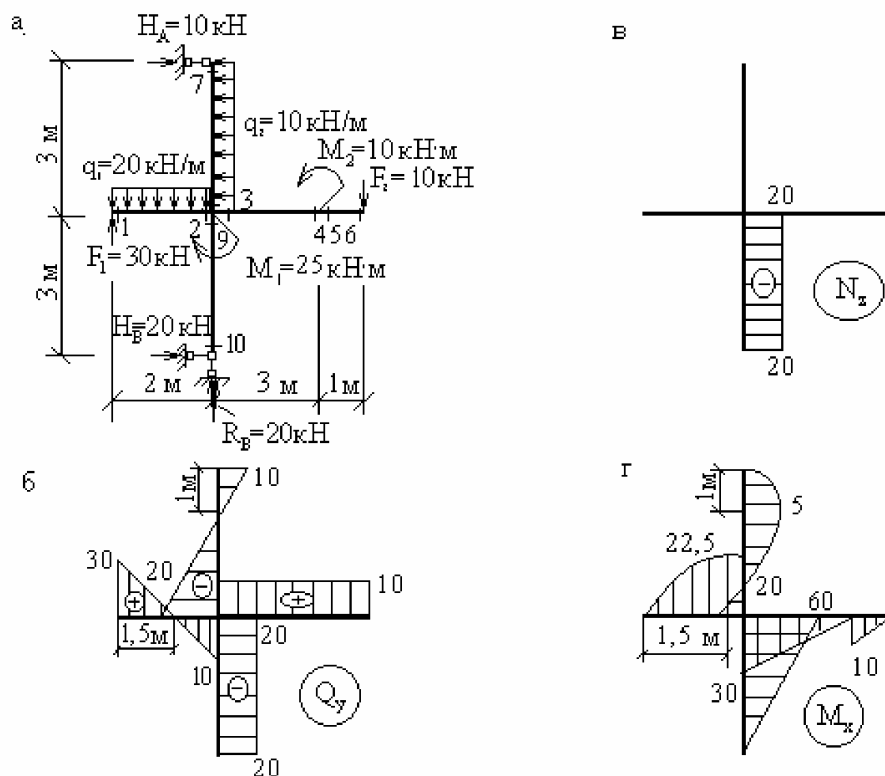


Рис. 13

Построение эпюр  $N_z, Q_y, M_x$ .

Из рассмотрения левой относительно центрального узла отсеченной части (сечения 1-2):

$$\begin{aligned}N_{z,1} &= N_{z,2} = 0; \\Q_{y,1} &= F_1 = 30 \text{ кН}; \\Q_{y,2} &= F_1 - q_1 \cdot 2 = 30 - 40 = -10 \text{ кН}; \quad (\text{сжаты верхние волокна}). \\M_{x,1} &= 0; \\M_{x,2} &= F_1 \cdot 2 - q_1 \cdot 2 \cdot 1 = 60 - 40 = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}\end{aligned}$$

Из рассмотрения правой отсеченной части (сечения 3-6):

$$\begin{aligned}N_{z,3} &= N_{z,4} = N_{z,5} = N_{z,6} = 0; \\Q_{y,3} &= Q_{y,4} = Q_{y,5} = Q_{y,6} = F_2 = 10 \text{ кН}; \\M_{x,3} &= M_2 - F_2 \cdot 4 = 10 - 40 = -30 \text{ кН} \cdot \text{м} \quad (\text{сжаты нижние волокна}) \\M_{x,4} &= M_2 - F_2 \cdot 1 = 10 - 10 = 0; \\M_{x,5} &= -F_2 \cdot 1 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м} \quad (\text{сжаты нижние волокна}) \\M_{x,6} &= 0\end{aligned}$$

Из рассмотрения верхней относительно центрального узла отсеченной части (сечения 7-8):

$$\begin{aligned}N_{z,7} &= N_{z,8} = 0; \\Q_{y,7} &= H_A = 10 \text{ кН}; \\Q_{y,8} &= H_A - q_2 \cdot 3 = 10 - 30 = -20 \text{ кН}; \\M_{x,7} &= 0; \\M_{x,8} &= H_A \cdot 3 - q_2 \cdot 3 \cdot 1,5 = 30 - 45 = -15 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad (\text{сжаты левые волокна})\end{aligned}$$

Из рассмотрения нижней отсеченной части (сечения 9-10):

$$\begin{aligned}N_{z,9} &= N_{z,10} = -R_B = -20 \text{ кН}; \\Q_{y,9} &= Q_{y,10} = -H_B = -20 \text{ кН}; \\M_{x,9} &= H_B \cdot 3 = 20 \cdot 3 = 60 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad (\text{сжаты правые волокна}) \\M_{x,10} &= 0.\end{aligned}$$

Характер эпюры  $Q_y$  на участках рамы с распределенными нагрузками  $q_1$  и  $q_2$ , а именно, наличие пересечений эпюры с осью рамы, говорит о том, что



в этих точках момент  $M_x$  принимает экстремальные значения. Определение положений точек пересечения (т.е. тех точек, где  $Q_y = 0$ ) выполняется так же, как и в балках (см. 1.9).

Вычислим экстремальные значения момента  $M_x$ .

На участках под распределенной нагрузкой  $q_1$ :

$$M_{x,\max} \Big|_{Q_y=0} = F_1 \cdot 1,5 - q_1 \cdot \frac{1,5^2}{2} = 45 - 22,5 = 22,5 \text{ кН}\cdot\text{м} \text{ (сжаты верхние волокна)}.$$

На участке с распределенной нагрузкой  $q_2$ :

$$M_{x,\max} \Big|_{Q_y=0} = H_A \cdot 1 - q_1 \cdot 1 \cdot 0,5 = 10 - 5 = 5 \text{ кН}\cdot\text{м} \text{ (сжаты правые волокна)}.$$

Эпюры  $N_z, Q_y, M_x$  показаны на рис.13,б,в,г.

### 1.16 РАМЫ НА ДВУХ ОПОРАХ С ПРОМЕЖУТОЧНЫМ ШАРНИРОМ

Как отмечалось выше, рамы на двух шарнирно-неподвижных опорах с одним промежуточным шарниром также являются статически определимыми.

**Пример 10.** Рассмотрим построение эпюр  $N_z, Q_y, M_x$  для рамы с промежуточным шарниром (рис.14,а)

В дополнение к условиям равновесия, рассмотренным в примерах 8 и 9, здесь для определения неизвестных реакций ( $H_A, R_A, H_B, R_B$ ) используются еще два условия:  $\sum M_C^{\text{лев}} = 0$  и  $\sum M_C^{\text{прав}} = 0$ , каждое из которых по своей сути выражает факт равенства нулю изгибающего момента  $M_x$  в промежуточном шарнире С (рис.14,а).

Для определения четырех неизвестных реакций возможно использование различных комбинаций уравнений равновесия, но чаще всего используются следующие уравнения:

- 1)  $\sum M_{A_i} = 0;$
- 2)  $\sum M_{B_i} = 0;$
- 3)  $\sum M_C^{\text{лев}} = 0;$
- 4)  $\sum M_C^{\text{прав}} = 0;$

При этом для проверки вычисленных реакций служат уравнения:

$$\sum F_{xi} = 0;$$

$$\sum F_{yi} = 0;$$

При заданных нагрузках (рис.14,а) уравнения равновесия принимают вид:

- 1)  $\sum M_{Ai} = 0; F_2 \cdot 2 - q \cdot 4 \cdot 2 + M + F_1 \cdot 2 + R_B \cdot 4 = 0; R_B = -15 \text{ кН};$
- 2)  $\sum M_{Bi} = 0; R_A \cdot 4 - F_2 \cdot 6 - M - q \cdot 4 \cdot 2 - F_1 \cdot 2 = 0; R_A = 75 \text{ кН}$
- 3)  $\sum M_C^{\text{лев}} = 0; R_A \cdot 2 - H_A \cdot 6 - M - q \cdot 2 \cdot 1 - F_2 \cdot 4 = 0; H_A = 1,67 \text{ кН}$
- 4)  $\sum M_C^{\text{прав}} = 0; H_B \cdot 6 - R_B \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 - F_1 \cdot 4 = 0; H_B = 28,33 \text{ кН};$

Знак "-", полученный при вычислении реакции  $R_B$ , говорит о необходимости изменить принятое для нее направление на противоположное (перечеркнутая стрелка на рис.15,а).

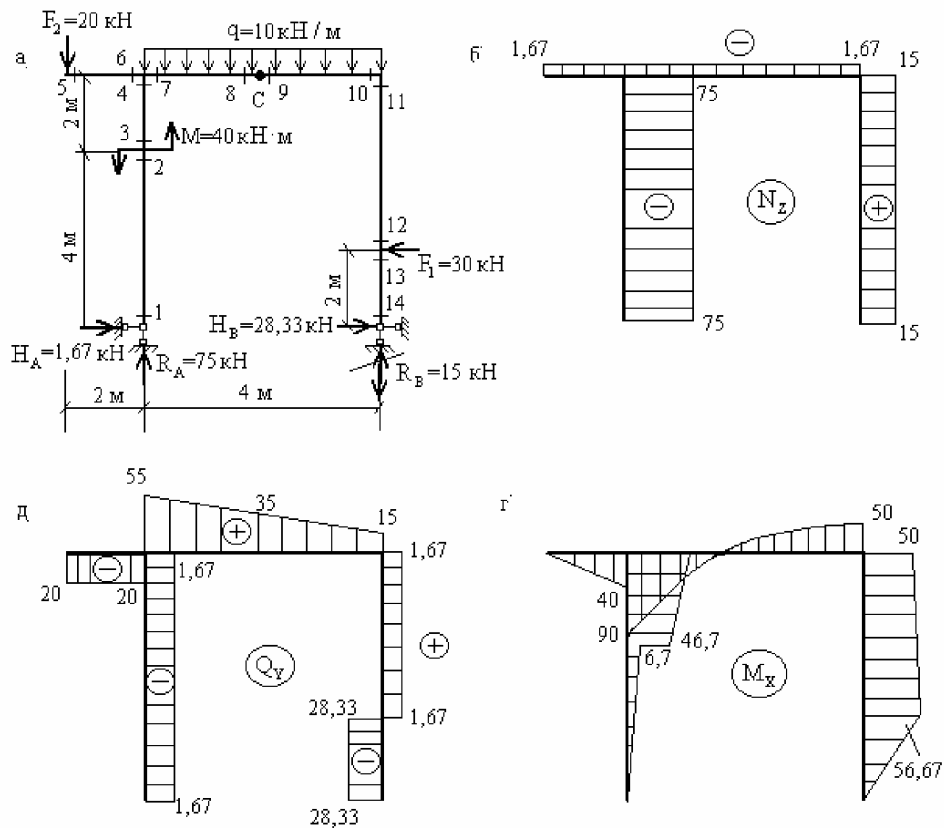


Рис 14.

Проверяем правильность вычисления опорных реакций.

$$\sum F_{xi} = 0: H_A + H_B - F_1 = 1,67 + 28,33 - 30 = 0;$$

$$\sum F_{yi} = 0: R_A - F_2 - q \cdot 4 - R_B = 75 - 20 - 40 - 15 = 0.$$

Теперь вычисляем значения  $N_z, Q_y, M_x$  в характерных сечениях, выбирая для сечений 1-8 левую отсеченную часть, а для сечений 9-14 - правую.

Из рассмотрения левой отсеченной части:

$$N_{z,1} = N_{z,2} = N_{z,3} = N_{z,4} = -R_A = -75 \text{ кН};$$

$$N_{z,5} = N_{z,6} = N_{z,7} = N_{z,8} = -H_A = -1,67 \text{ кН};$$

$$Q_{y,1} = Q_{y,2} = Q_{y,3} = Q_{y,4} = -H_A = -1,67 \text{ кН};$$

$$Q_{y,5} = Q_{y,6} = -F_2 = -20 \text{ кН};$$

$$Q_{y,7} = -F_2 + R_A = -20 + 75 = 55 \text{ кН};$$

$$M_{x,1} = 0;$$

$$M_{x,2} = H_A \cdot 4 = 1,67 \cdot 4 = 6,7 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

(сжаты правые волокна стойки);

$$M_{x,3} = M_{x,2} + M = 6,7 + 40 = 46,7 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x,4} = H_A \cdot 6 + M = 10 + 40 = 50 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x,5} = 0;$$

$$M_{x,6} = F_2 \cdot 2 = 40 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

(сжаты нижние волокна ригеля);

$$M_{x,7} = F_2 \cdot 2 + M + H_A \cdot 6 = 40 + 40 + 10 = 90 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x,8} = F_2 \cdot 2 + M + H_A \cdot 6 + q \cdot 2 \cdot 1 - R_A \cdot 2 = 80 + 40 + 10 + 20 - 150 = 0$$

Вновь подчеркнем, что знаки "+" и "-" для изгибающих моментов  $M_x$  принимаются относительно, то есть для разграничения противоположно направленных моментов, а эпюра  $M_x$  строится со стороны сжатых волокон.

Из рассмотрения правой отсеченной части:

$$N_{z,9} = N_{z,10} = H_B - F_1 = 28,33 - 30 = -1,67 \text{ кН};$$

$$N_{z,11} = N_{z,12} = N_{z,13} = N_{z,14} = R_B = 15 \text{ кН};$$

$$Q_{y,9} = q \cdot 2 + R_B = 20 + 15 = 35 \text{ кН};$$

$$Q_{y,10} = R_B = 15 \text{ кН};$$

$$Q_{y,11} = Q_{y,12} = -H_B + F_1 = -28,33 + 30 = 1,67 \text{ кН};$$

$$Q_{y,13} = Q_{y,14} = -H_B = -28,33 \text{ кН};$$

$$M_{x,9} = H_B \cdot 6 - R_B \cdot 2 - F_1 \cdot 4 - q \cdot 2 \cdot 1 = 170 - 30 - 120 - 20 = 0$$

$$M_{x,10} = H_B \cdot 6 - F_1 \cdot 4 = 170 - 120 = 50 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

(сжаты верхние волокна ригеля)

$$M_{x,11} = M_{x,10} = 50 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

(сжаты правые волокна стойки)

$$M_{x,12} = M_{x,13} = H_B \cdot 2 = 56,66 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M_{x,14} = 0$$

Эпюры  $N_z, Q_y, M_x$ , построенные по вычисленным значениям, приведены на рис.14,б,в,г.

## 1.17 ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР В ПЛОСКО-ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СИСТЕМАХ

Систему, состоящую из прямолинейных стержней, жестко соединенных между собой, расположенных в одной плоскости и нагруженных перпендикулярно к этой плоскости, будем называть плоско-пространственной.

В настоящем пособии будем рассматривать только жесткозащемленные плоско-пространственные системы (далее сокращенно: ППС). При этом возможны два основных варианта:

1) система располагается горизонтально, нагрузки приложены в вертикальных плоскостях (рис.15,а,б),

2) система располагается в вертикальной плоскости, нагрузки приложены горизонтально (рис.15,в,г)

В первом случае (рис.15,а,б) в поперечных сечениях стержней системы могут возникать поперечная сила  $Q_y$ , изгибающий момент  $M_x$  и крутящий момент  $M_{кр}$ ; во втором случае -  $Q_x, M_y, M_{кр}$ . Очевидно, что поворотом на 90 градусов системы второго вида (рис.15,в,г) приводятся к системам первого вида, при этом  $Q_x$  переходит в  $Q_y, M_y$  - в  $M_x$ , поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением систем первого вида.

Известно, что при одновременном наличии в сечениях изгибаемой стержневой системы внутренних моментов и внутренних сил влияние

последних на напряженно-деформированное состояние системы незначительно (исключение составляет "короткие" стержни), поэтому исключим из рассмотрения поперечную силу  $Q_y$ .

Итак, остановимся на правилах построения эпюр  $M_x$  и  $M_{кр}$  для плоско-пространственных систем.

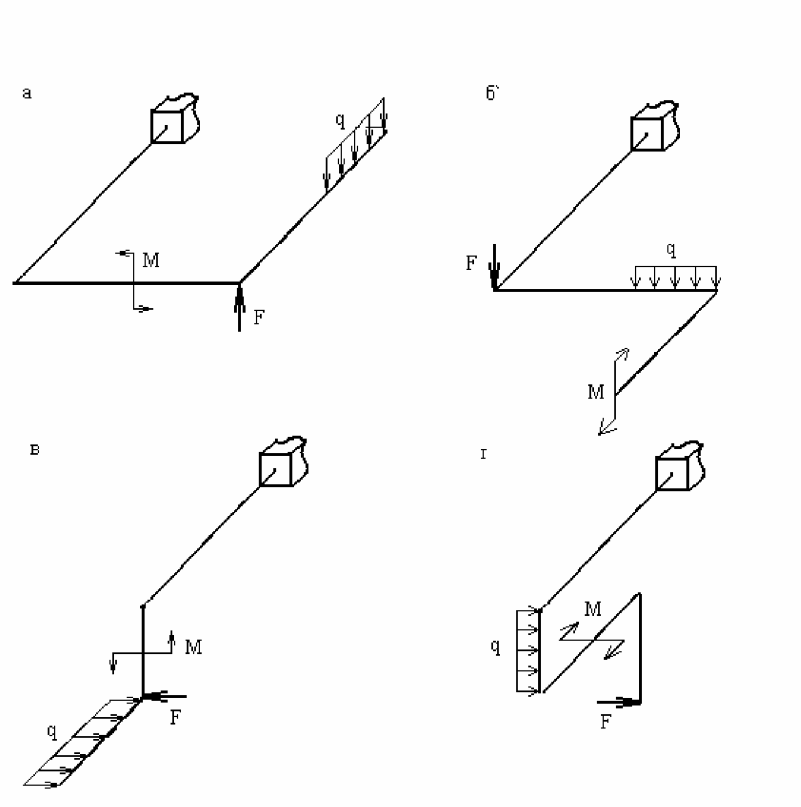
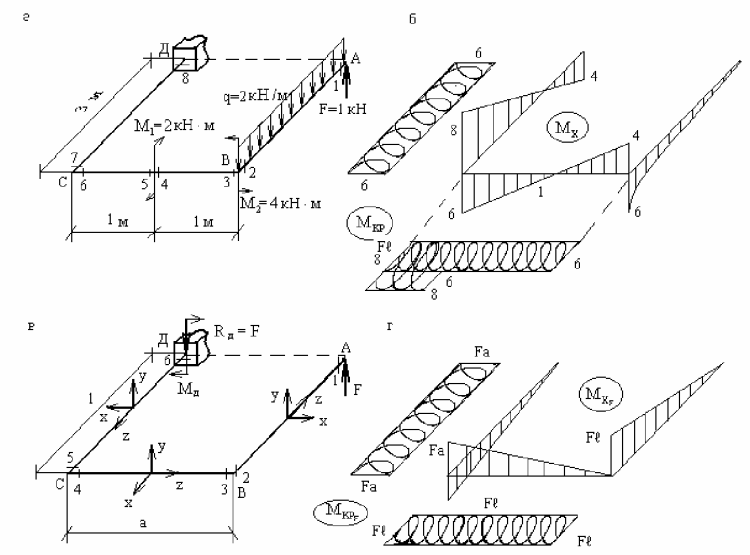


Рис.15

**Пример 11.** Рассмотрим ППС (рис.16,а). Прежде чем строить для этой системы эпюры  $M_x$  и  $M_{кр}$ , построим эпюры  $M_x$  и  $M_{кр}$  для каждой из четырех возможных нагрузок (они представлены на схеме), так как вообще говоря, любые эпюры  $M_x$  и  $M_{кр}$  в силу принципа независимости действия сил будут представлять собой алгебраическую сумму этих простейших эпюр, построенных от каждой нагрузки в отдельности, но, разумеется, с учетом места приложения нагрузок, их направлений и геометрической конфигурации системы.

Для достижения максимальной общности будем считать, что сила  $F$ , момент типа  $M_1$  и момент типа  $M_2$  (имеется в виду плоскость действия каждого из них) приложены к концевому сечению (т.А на рис.16,а), а распределенная нагрузка приложена к первому от свободного конца участку стержня (стержень АВ на рис.16,а). Причем, все построения будем выполнять в общем виде, полагая, для наглядности, что  $a < l$ .

Пусть к плоско-пространственной системе (рис.16,в) приложена только сила  $F$ . Построим эпюры  $M_{x_F}$ ,  $M_{кр_F}$  для заданной системы. Здесь, как и при любой другой внешней нагрузке, более сложным является построение эпюры изгибающих моментов  $M_x$ . В соответствии с ранее оговоренными принципами, для построения эпюры  $M_x$  в заданной ППС выделим 6 характерных сечений. Так как имеется жесткая заделка, то расчет ведем от свободного конца. При вычислении изгибающего момента очень важно правильно определить плоскость изгиба стержня, которому принадлежит рассматриваемое характерное сечение, т.к. плечо действующей нагрузки необходимо определить именно в плоскости изгиба.



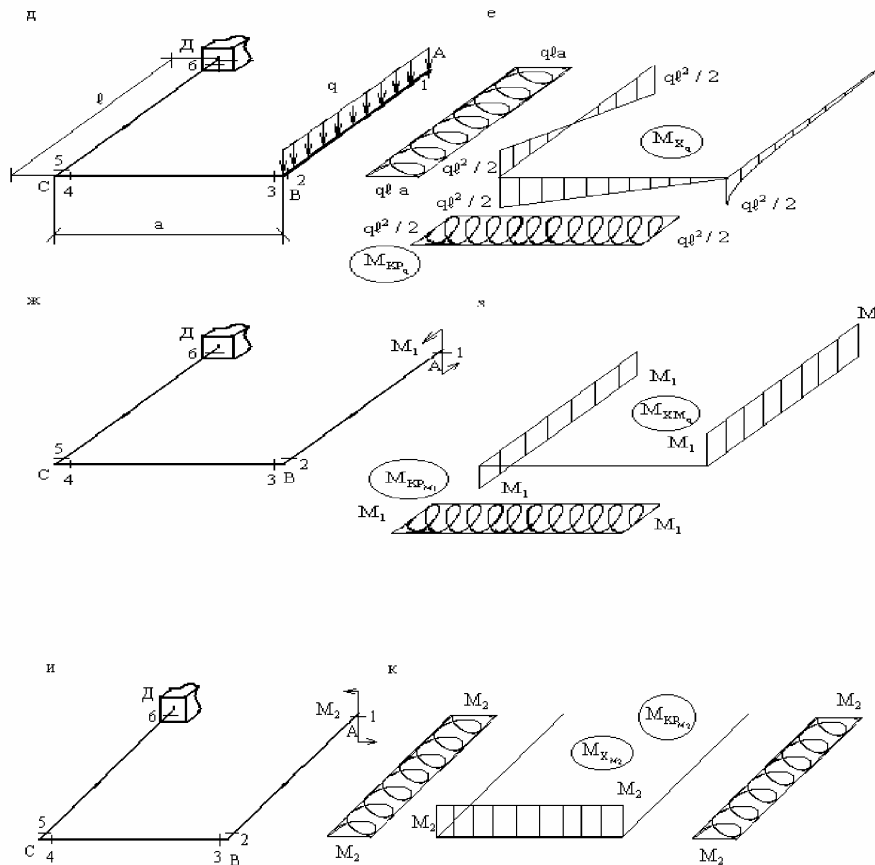


Рис.16

Стержень  $AB$  изгибается в вертикальной плоскости, перпендикулярной плоскости чертежа;

$$M_{x,1} = 0; \quad (\text{сжаты верхние волокна}).$$

$$M_{x,2} = FL$$

Стержень  $BC$  изгибается в вертикальной плоскости, параллельной плоскости чертежа:

$$M_{x,3} = 0 \quad (\text{сила } F \text{ не имеет плеча в плоскости изгиба!});$$

$$M_{x,4} = Fa \quad (\text{сжаты верхние волокна}).$$

Стержень  $CD$ , как и стержень  $AB$ , изгибается в вертикальной плоскости, перпендикулярной плоскости чертежа.

$$M_{x,5} = Fl \quad (\text{сжаты нижние волокна}).$$

$$M_{x,6} = 0 \quad (\text{сила } F \text{ не имеет плеча в плоскости изгиба}).$$

Остановимся подробнее на определении изгибающего момента  $M_{x,5}$ . Как видно из приведенных выше значений:  $M_{x,5} = -M_{x,2}$ , то есть моменты в сечениях 2 и 5 (обратим внимание на их расположение, а не на нумерацию, которая, естественно, может быть совершенно произвольной) одинаковы по величине, но противоположны по направлению. Это утверждение можно доказать.

Причем, возможно как строгое доказательство, так и некоторые "нестрогие" рассуждения, приводящие к тому же факту. Начнем с последних. Под действием приложенной силы  $F$  (рис.16,в) происходит "перекос" системы: точка В смещается вверх, а точка С - вниз; при этом обе точки располагаются на одинаковом расстоянии (в вертикальной плоскости, перпендикулярной плоскости чертежа) от линии действия силы  $F$ , следовательно, моменты в сечениях 2 и 5 одинаковы, но противоположны по знаку.

Для иллюстрации другого подхода к "нестрогому" доказательству утверждения о том, что  $M_{x,5} = -M_{x,2}$  введем в рассмотрение так называемую скользящую систему координат (рис.16,в). Такое название связано с тем, что координатные оси как бы скользят вдоль ломаной продольной оси системы, не поворачиваясь вокруг нее. При этом на каждом участке плоско-пространственной системы ось  $z$  направлена вдоль продольной оси соответствующего стержня, ось  $y$  - вверх (или вниз) при расположении системы в горизонтальной плоскости, а ось  $x$  остается перпендикулярной к плоскости  $yoz$ . Как следует из чертежа, на участках АВ и СД ось  $x$  имеет противоположное направление, следовательно, моменты  $M_x$  имеют на этих участках разные знаки, а так как сечения 2 и 5 равноудалены от линии действия силы  $F$ , то очевидно равенство моментов в этих сечениях по абсолютной величине.

И, наконец, рассмотрим более строгое доказательство. Двигаясь от свободного конца при выборе отсеченной части, мы получили:  $M_{x,2} = F\ell$  (сжаты верхние волокна). Определим момент  $M_x$  в сечении 5, двигаясь при выборе отсеченной части со стороны жесткой заделки. Для определения



момента таким способом необходимо знать реакции заделки. При действии на систему силы  $F$  из всех возможных в общем случае нагружения реакций в жесткой заделке возникают реакция  $R_D$  и опорный момент  $M_D$ , определяемые из условий равновесия:

$$1) \sum F_{y_i} = 0: F - R_D = 0; \quad R_D = F;$$

$$2) \sum M_{D_i} = 0: M_D - F \cdot a = 0; \quad M_D = Fa;$$

Теперь, двигаясь со стороны жесткой заделки, для сечения 5 получим:

$$M_{x,5} = R_D \cdot L = FL \quad (\text{сжаты нижние волокна}), \text{ то есть } M_{x,5} = -M_{x,2} \quad (\text{момент } M_D$$

не влияет на величину  $M_{x,5}$ , так как его плоскость действия перпендикулярна плоскости изгиба).

Очевидно, что подобные рассуждения можно провести при любой внешней нагрузке, поэтому в дальнейшем при построении эпюры  $M_x$  всегда будем руководствоваться правилом: изгибающий момент в сечении 5 равен изгибающему моменту в сечении 2 (опять-таки, имеется в виду положение сечений, а не их порядковые номера) и противоположен ему по знаку, при условии, что на участке 2-5 не приложен сосредоточенный момент, который для сечения 5 является изгибающим, то есть момент типа  $M_1$  (рис.16,а). При наличии на участке 2-5 такого момента равенство ординат по модулю в сечениях 2 и 5 "искажается" на величину  $M_1$  в соответствующую направлению  $M_1$  сторону.

Теперь построим эпюру  $M_{KPF}$ .

Участок АВ не подвержен кручению, так как сила  $F$  приложена к продольной оси стержня АВ. Участок ВС закручивается силой  $F$  с плечом  $\ell$ , следовательно:

$$M_{KP,3} = M_{KP,4} = F\ell.$$

Участок СД также закручивается силой  $F$ , но с плечом  $a$ , то есть:

$$M_{KP,5} = M_{KP,6} = Fa.$$

Эпюры  $M_{x_F}$  и  $M_{KPF}$  представлены на рис.16,г.

Аналогичным образом строятся эпюры изгибающих и крутящих моментов от распределенной нагрузки  $q$  (рис.16,д), сосредоточенного момента типа  $M_1$  (рис.16,ж) и сосредоточенного момента типа  $M_2$  (рис.16,и).

Не останавливаясь детально на построении этих эпюр, отметим некоторые особенности. Эпюра  $M_x$  на участке под распределенной нагрузкой (и только на этом участке!)- квадратная парабола, направленная выпуклостью навстречу нагрузке. На участке СД - противоположном тому, где приложена нагрузка  $q$ - эпюра  $M_x$  пересекает ось в точке, расположенной напротив равнодействующей распределенной нагрузки (рис.16,д).

Анализ эпюр от сосредоточенных моментов  $M_1$  (рис.16,з) и  $M_2$  (рис.16,к) позволяет сделать очевидный вывод о том, что если момент приводит к изгибу какого-либо стержня, то кручение на этом участке отсутствует и наоборот.

Теперь, учитывая накопленный опыт при построении эпюр от раздельного действия каждой из четырех нагрузок, рассмотрим более сложное нагружение (рис.16,а).

При указанных на этом рисунке нагрузках для построения эпюры  $M_x$  необходимо выделить 8 характерных сечений. Двигаясь от свободного конца, получим по участкам:

*Участок АВ* изгибается в вертикальной плоскости, перпендикулярной плоскости чертежа:

$$M_{x,1} = 0;$$

$$M_{x,2} = F \cdot 3 - q \cdot 3 \cdot 1,5 = 3 - 9 = -6 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

(сжаты нижние волокна).

Кручение на участке АВ отсутствует, так как сила  $F$  и нагрузка  $q$  имеют нулевые плечи относительно продольной оси участка АВ.

*Участок ВС* изгибается в вертикальной плоскости, параллельной плоскости чертежа.

$$M_{x,3} = M_2 = 4 \text{ кН} \cdot \text{м} \text{ (сжаты верхние волокна);}$$

$$M_{x,4} = M_2 + F \cdot 1 - q \cdot 3 \cdot 1 = 4 + 1 - 6 = -1 \text{ кН} \cdot \text{м} \text{ (сжаты нижние волокна);}$$

$M_{x,5} = M_{x,4}$ , так как момент  $M_1$ , приложенный к отсеченной части для сечения 5, действует в плоскости, перпендикулярной ВС и на изгиб участка ВС не влияет;

$$M_{x,6} = M_2 + F \cdot 2 - q \cdot 3 \cdot 2 = 4 + 2 - 12 = -6 \text{ кН} \cdot \text{м} \text{ (сжаты нижние волокна)}.$$

Для построения эпюры крутящих моментов на участке ВС рассмотрим отдельно участки 3-4 и 5-6, так как между сечениями 4 и 5 приложен момент  $M_1$ . Участок 3-4 закручивается силой  $F$  с плечом 3м и в противоположную сторону - нагрузкой  $q$  с плечом 1,5м:

$M_{кр,3} = M_{кр,4} = F \cdot 3 - q \cdot 3 \cdot 1,5 = 3 - 9 = -6 \text{ кН} \cdot \text{м}$  (здесь знак "-" носит сугубо условный характер и может служить только для обозначения направления кручения). Участок 5-6 помимо силы  $F$  и нагрузки  $q$  закручивается еще и моментом  $M_1$ , причем, в том же направлении, что и нагрузкой  $q$ , поэтому:

$$M_{кр,5} = M_{кр,6} = F \cdot 3 - q \cdot 3 \cdot 1,5 - M_1 = 3 - 9 - 2 = -8 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Участок 7-8 закручивается нагрузкой  $q$  с плечом 2м и в противоположную сторону - силой  $F$  с плечом 2м и моментом  $M_2$ , следовательно:

$$M_{кр,7} = M_{кр,8} = q \cdot 3 \cdot 2 - F \cdot 2 - M_2 = 12 - 2 - 4 = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

По вычисленным значениям строим эпюры  $M_x$  и  $M_{кр}$  (рис.16,б).

## 1.18 ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР В ЛОМАНЫХ СТЕРЖНЯХ

Систему, состоящую из жестко соединенных между собой стержней, оси которых не лежат в одной плоскости, будем называть ломаным стержнем. При этом ограничимся рассмотрением только таких ломаных стержней, отдельные элементы которых стыкуются друг с другом под прямыми углами, а внешние нагрузки приложены перпендикулярно к осям стержней (рис.17,а,б).

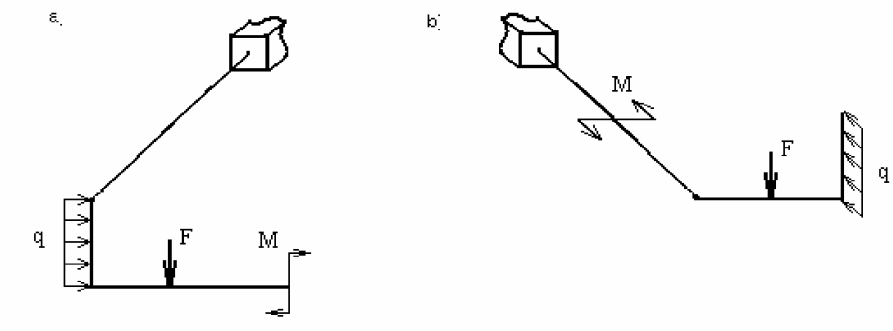


Рис.17

В общем случае нагружения в поперечных сечениях ломаных стержней могут возникать все 6 известных внутренних силовых факторов: продольная сила  $N_z$ , поперечные силы  $Q_x, Q_y$ , изгибающие моменты  $M_x, M_y$ , крутящий момент  $M_{кр} (M_z)$ . Очень часто, особенно в машиностроительных конструкциях, отдельные элементы ломаного стержня имеют незначительную длину, иногда соизмеримую с размерами поперечного сечения, то есть являются "короткими" стержнями. В этом случае не только внутренние моменты  $M_x, M_y, M_{кр} (M_z)$ , но и внутренние силы ( $N_z, Q_x, Q_y$ ) существенно влияют на напряженно-деформированное состояние конструкции, поэтому для ломаных стержней будем строить эпюры всех шести внутренних силовых факторов.

Для правильного построения эпюр здесь обязательным является использование скользящей системы координат, о которой уже говорилось при рассмотрении плоско-пространственных систем (см.1.17).

**Пример 12.** Рассмотрим простейший случай нагружения ломанного стержня - двумя взаимноперпендикулярными сосредоточенными силами, приложенными на свободном конце (рис.18,а).

Выбираем скользящую систему координат (рис.18,б). Ось  $z$  всегда направлена вдоль продольной оси того или иного участка ломаного стержня, а при переходе с одного участка на другой координатные оси поворачиваются на 90 градусов, но никогда не вращаются вокруг оси  $z$ . Удобнее всего начинать выбор скользящей системы координат с горизонтального участка ломаного

стержня, который параллелен плоскости чертежа или лежит в этой плоскости (участок ВС на рис.18,б).

На этом участке (а он аналогичен обычной балке) ось  $y$  направляется вертикально (вверх или вниз), ось  $z$  - вдоль продольной оси участка, а ось  $x$  - перпендикулярно плоскости  $yoz$ , после чего система координат передвигается на остальные участки ломаного стержня.

*Построение эпюры  $N_z$ .*

Построение этой и всех последующих эпюр ведем от свободного конца. Правило знаков для  $N_z$  остается таким же, как и для других систем, а именно: растяжению соответствует знак "+", сжатию - "-".

Участок АВ имеет нулевую продольную силу, так как  $F_1, F_2$  перпендикулярны продольной оси этого участка:

$$N_{z,1} = N_{z,2} = 0.$$

Участок ВС растягивается силой  $F_2$ :

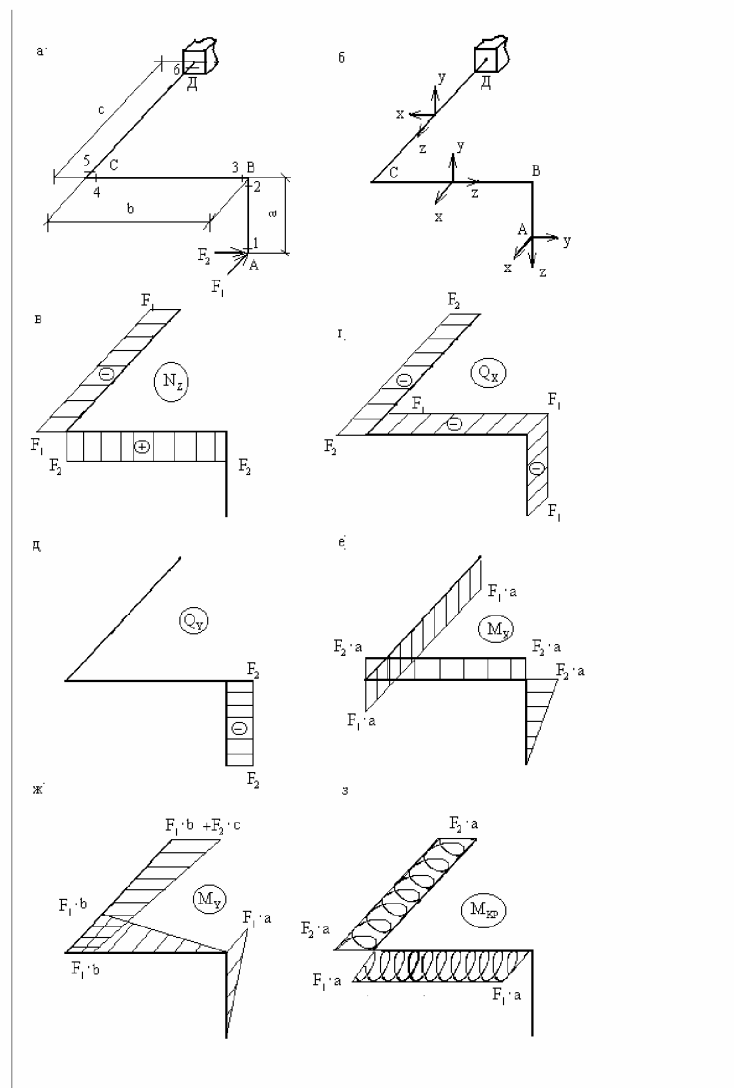
$$N_{z,3} = N_{z,4} = F_2.$$

Участок СД сжимается силой  $F_1$ :

$$N_{z,5} = N_{z,6} = -F_1.$$

*Построение эпюр  $Q_x$  и  $Q_y$ .*

Поперечную силу  $Q_x$  формируют только те силы, которые параллельны оси  $x$  на данном участке, а поперечную силу  $Q_y$  - силы, параллельные оси  $y$ . Здесь также сохраняется обычное для  $Q$  правило знаков:  $Q_x > 0$  ( $Q_y > 0$ ), если внешняя сила, приложенная к отсеченной части, стремится повернуть рассматриваемое сечение по часовой стрелке и  $Q_x < 0$  ( $Q_y < 0$ ) - в противоположном случае. С учетом сказанного в характерных сечениях имеем:



**Рис.18**

$$\begin{aligned}
 Q_{x,1} &= Q_{x,2} = -F_1; \\
 Q_{x,3} &= Q_{x,4} = -F_1; \\
 Q_{x,5} &= Q_{x,6} = -F_2; \\
 Q_{y,1} &= Q_{y,2} = -F_2; \\
 Q_{y,3} &= Q_{y,4} = Q_{y,5} = Q_{y,6} = 0
 \end{aligned}$$

*Построение эпюр  $M_x, M_y$ .*

Ординаты эпюр изгибающих моментов будем, как обычно, откладывать со стороны сжатых волокон, не указывая знаков, причем ориентировать эпюры нужно так, чтобы плоскость эпюры совпадала с плоскостью действия пары того

изгибающего момента, для которого она построена. Иначе говоря, эпюра  $M_x$  на всех участках ломаного стержня располагается в плоскости  $uoz$ , а эпюра  $M_y$  - в плоскости  $xoz$ .

Начнем с построения эпюры  $M_x$ . Здесь нас будет интересовать изгиб каждого участка в плоскости  $uoz$  (см. скользящую систему координат на рис.18,б) и, соответственно, плечо каждой действующей на отсеченную часть нагрузки нужно измерять в этой плоскости.

На участке АВ плоскость  $uoz$  - вертикальная плоскость, параллельная плоскости чертежа. В этой плоскости стержень АВ изгибается только силой  $F_2$ , так как  $F_1$  перпендикулярна плоскости  $uoz$  :

$$M_{x,1} = 0;$$

$$M_{x,2} = F_2 \cdot a \text{ (сжаты правые волокна).}$$

На участке ВС плоскость  $uoz$  ориентирована так же, как и на участке АВ, причем, все точки ВС равноудалены от линии действия силы  $F_2$ , поэтому:

$$M_{x,3} = M_{x,4} = F_2 \cdot a \text{ (сжаты верхние волокна).}$$

На участке СД плоскость  $uoz$  - вертикальная плоскость, перпендикулярная плоскости чертежа. В этой плоскости стержень СД изгибается только силой  $F_1$ , так как  $F_2$  перпендикулярна  $uoz$ ; все точки участка СД равноудалены (в рассматриваемой плоскости) от линии действия силы  $F_1$ , следовательно:

$$M_{x,5} = M_{x,6} = F_1 \cdot a \text{ (сжаты нижние волокна).}$$

Рассуждая аналогичным образом, будем строить эпюру  $M_y$ , но теперь нужно рассматривать изгиб каждого участка ломаного стержня в плоскости  $xoz$ .

На участке АВ плоскость  $xoz$  - вертикальная плоскость, перпендикулярная плоскости чертежа. В этой плоскости стержень АВ изгибается только силой  $F_1$ , так как  $F_2$  перпендикулярна плоскости  $xoz$ :

$$M_{y,1} = 0;$$

$$M_{y,2} = F_1 \cdot a \text{ (сжаты дальние от наблюдателя волокна).}$$

На участке ВС плоскость  $хоz$  - горизонтальная плоскость. В этой плоскости сила  $F_2$  приложена вдоль продольной оси стержня ВС и к изгибу привести не может, поэтому:

$$M_{y,3} = 0;$$

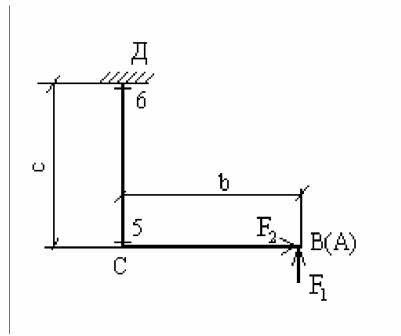
$$M_{y,4} = F_1 \cdot b \text{ (сжаты дальние от наблюдателя волокна).}$$

На участке СД плоскость  $хоz$  - это так же горизонтальная плоскость. Здесь к изгибу стержня СД приводят обе силы: плечо силы  $F_1$  постоянно и равно  $b$ , а плечо силы  $F_2$  равно нулю в сечении 5 и равно  $c$  в сечении 6:

$$\left. \begin{array}{l} M_{y,5} = F_1 \cdot b \\ M_{y,6} = F_1 \cdot b + F_2 \cdot c \end{array} \right\} \text{ (сжаты правые волокна).}$$

Иногда при построении эпюр изгибающих моментов в ломанных стержнях возникают затруднения в определении участия той или иной нагрузки в изгибе стержня или в определении плеча той или иной нагрузки. В этих случаях всегда можно использовать простой, но эффективный прием: спроектировать конструкцию и действующие нагрузки на ту плоскость в которой изгибается стержень, переходя тем самым от пространственной конструкции к ее проекции, что позволяет легко определить плечи каждой из нагрузок и их "вклад" в изгиб рассматриваемого участка. Проследим использование этого приема например, при построении эпюры  $M_y$  на участке СД (рис.18,а,б). На этом участке плоскость  $хоz$ , в которой нужно рассматривать изгиб стержня при построении  $M_y$  - горизонтальная плоскость, следовательно, для реализации описываемого приема необходимо спроектировать конструкцию на горизонтальную плоскость, то есть изобразить вид сверху (рис.19).





**Рис.19**

При этом сила  $F_2$  будет видна направленной вдоль стержня BC, сила  $F_1$  - перпендикулярно BC, а стержень BA проектируется в точку. Теперь совершенно очевидно, что все точки стержня CD равноудалены от линии действия силы  $F_1$ , что приводит к постоянному моменту  $F_1 \cdot b$ , а сила  $F_2$  имеет нулевое плечо в сечении 5 и плечо, равное  $c$ , - в сечении 6:

$$M_{y,5} = F_1 \cdot b$$

$$M_{y,6} = F_1 \cdot b + F_2 \cdot c$$

В обоих сечениях сжаты правые волокна, то есть получен тот же результат, что и ранее, но в более наглядном виде.

## ГЛАВА 2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В УПРУГИХ СИСТЕМАХ

Любая конструкция под действием приложенных внешних нагрузок изменяет в той или иной степени свою форму и размеры – деформируется. Для проверки жесткости и устойчивости конструкции необходимо уметь определять перемещения, вызванные деформацией ее элементов. Кроме того, определение перемещений конструкции является важнейшей вспомогательной задачей при расчете статически неопределимых систем.

Методы определения этих перемещений весьма разнообразны. Они отличаются друг от друга главным образом степенью сложности и областью применения.

Исторически первым предложенным методом определения перемещений можно считать метод непосредственного интегрирования дифференциального уравнения упругой линии балки. Однако в случае балок с большим количеством участков реализация этого метода сопряжена со значительными трудностями, которые заключаются не в интегрировании дифференциальных уравнений, а в технике определения произвольных постоянных интегрирования – составлении и решении систем линейных алгебраических уравнений.

Если по условиям нагружения балка разбивается на  $n$  участков, то задача становится очень трудоемкой уже при  $n=3$ . Для уменьшения большого объема вычислительной работы, связанной с определением произвольных постоянных интегрирования, разработан ряд методов, из которых, прежде всего, отметим метод начальных параметров, позволяющий при любом числе участков свести решение к отысканию только двух постоянных – прогиба и угла поворота в начале координат.

Указанные методы, как и некоторые другие, носят частный характер. С некоторой натяжкой их можно признать удобными при решении ограниченного круга простейших задач.

Наиболее общим методом определения перемещений в стержневых системах является *метод Мора* (иногда говорят: *Максвелла – Мора*), в основе которого лежат два основных принципа механики: *начало возможных перемещений* и *закон сохранения энергии*. Прежде чем перейти к изложению метода, остановимся на его основных теоретических предпосылках.

## 2.1 ОБОБЩЕННЫЕ СИЛЫ И ОБОБЩЕННЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Работа постоянной силы  $F$  на перемещений  $\Delta$  по ее направлению равна произведению величины силы на указанное перемещение:  $\tilde{A} = F \cdot \Delta$ .

В задачах механики внешняя нагрузка отличается большим разнообразием и обычно представляет собой группы сил. Выражения для какой-либо группы постоянных сил можно представить в виде произведения двух величин:

$$\tilde{A} = F \cdot \Delta_F, \quad (2.1)$$

одна из которых –  $F$  – зависит только от сил группы и называется *обобщенной силой*, а другая –  $\Delta_F$  – зависит от перемещений и называется *обобщенным перемещением*.

Таким образом, под обобщенной силой будем понимать любую нагрузку (сосредоточенные силы, сосредоточенные пары, распределенную линейную нагрузку, распределенную моментную нагрузку), а под обобщенным перемещением – тот вид перемещения, на котором обобщенная сила производит работу.

Обобщенные перемещения принято обозначать буквами  $\delta$  или  $\Delta$  с двумя индексами. Первый индекс обозначает точку и направление перемещения, а второй указывает причину, вызвавшую искомое перемещение. Например,  $\Delta_{FF}$  обозначает перемещение точки приложения силы  $F$  по направлению ее действия, вызванное этой же силой.

Для обозначения полного перемещения точки, вызванного несколькими обобщенными силами, при  $\Delta$  сохраняется только первый индекс.

Перемещение, вызванное безразмерной единичной силой  $\bar{F}=1$  или безразмерной единичной парой  $\bar{M}=1$ , обозначается символом  $\delta$  и называется *удельным*.

## 2.2 РАБОТА ВНЕШНИХ СИЛ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ

Определим работу силы  $F$ , статически приложенной к некоторой упругой системе (рис.20, а), материал которой следует закону Гука.

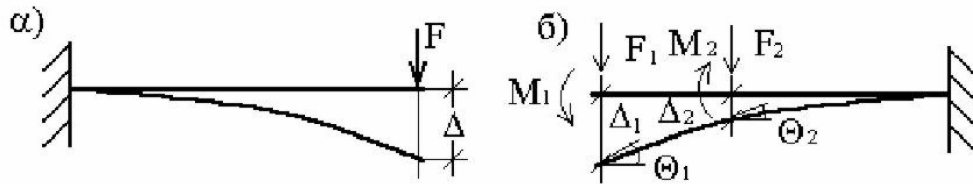


Рис. 20

При малых деформациях к этой системе применим принцип независимости действия сил, следовательно, перемещения отдельных точек и сечений конструкции прямо пропорциональны вызывающей их нагрузке:

$$\Delta = \alpha \cdot F, \quad (2.2)$$

где  $\Delta$  - перемещение по направлению силы  $F$ ;  $\alpha$  - некоторый коэффициент, зависящий от материала, схемы и размеров сооружения. Увеличение силы  $F$  на бесконечно малую величину  $dF$  вызовет увеличение перемещения на  $d\Delta$ .

Составим выражение элементарной работы внешней силы на перемещении  $d\Delta$ , отбрасывая при этом бесконечно малые величины второго порядка малости:  $d\tilde{A} = F \cdot d\Delta$ .

Заменим  $d\Delta$ , используя (2.2):

$$d\tilde{A} = F \cdot d\Delta = \alpha F dF.$$

Интегрируя это выражение в пределах полного изменения силы от нуля до ее конечного значения, получим формулу для определения работы, совершаемой статически приложенной внешней силой  $F$ :

$$\tilde{A} = \alpha \int_0^F F dF = \frac{\alpha F^2}{2}$$

или, с учетом(2.2):

$$\tilde{A} = \frac{F\Delta}{2}, \quad (2.3)$$

то есть работа внешней силы при статическом действии ее на любое упругое сооружение равна половине произведения значения этой силы на величину соответствующего ей перемещения.

Для обобщения полученного вывода под силой понимают любое воздействие, приложенное к упругой системе, то есть не только сосредоточенную силу, но и момент или равномерно распределенную нагрузку; под перемещением понимают тот его вид, на котором данная сила производит работу: сосредоточенной силе соответствует линейное перемещение, сосредоточенному моменту – угловое, равномерно распределенной нагрузке – площадь эпюры перемещений на участке действия нагрузки.

При статическим действии на конструкцию группы внешних сил работа этих сил равна половине суммы произведений каждой силы на величину соответствующего ей перемещения, вызванного действием всей группы сил. Например, при действии на балку (рис.20,б) сосредоточенных сил  $F_1$ ,  $F_2$  и сосредоточенных моментов  $M_1$  и  $M_2$  работа внешних сил:

$$\tilde{A} = \sum_{i=1}^2 \frac{F_i \Delta_i}{2} + \sum_{i=1}^2 \frac{M_i \Theta_i}{2} \quad (2.4)$$

Работу внешних сил на вызванных ими перемещения можно выразить и иначе – через внутренние силовые факторы (изгибающие моменты, продольные и поперечные силы), возникающие в поперечных сечениях системы.

Выделим из прямолинейного стержня двумя сечениями, перпендикулярными его оси (рис.21, а), бесконечно малый элемент  $dz$ .

Стержень состоит из бесконечно большого числа таких элементов. К каждому элементу  $dz$  в общем случае плоской задачи приложены продольная сила  $N_z$ , изгибающий момент  $M_x$  и поперечная сила  $Q_y$ .

Для выделенного элемента  $dz$  усилия  $N, M, Q$  являются внешними силами, поэтому работу  $\tilde{A}$  можно получить как сумму работ, совершенных статически возрастающими усилиями  $N, M, Q$  на соответствующих деформациях элементов  $dz$ .

Рассмотрим элемент  $dz$ , находящийся только под действием продольных сил  $N$  (рис.21,б). Если его левое сечение считать неподвижным, то правое сечение под влиянием продольной силы переместится вправо на величину  $\Delta z = NdZ/EA$ . На этом перемещении сила  $N$  совершит работу:

$$d\tilde{A}_N = \frac{N\Delta z}{2} = \frac{N}{2} \cdot \frac{Ndz}{EA} \quad (2.5)$$

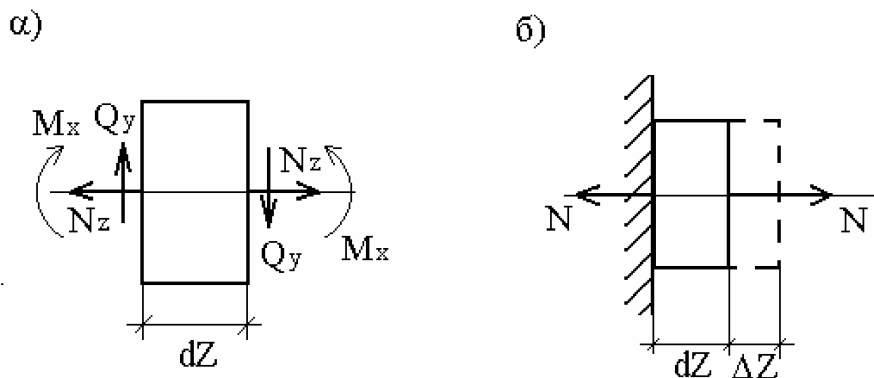


Рис. 21

Если неподвижно закрепить левое сечение элемента  $dz$ , находящегося под действием только изгибающих моментов  $M$  (рис.22,а), то взаимный угол поворота торцевых сечений элемента будет равен углу поворота  $\Delta_\Theta$  его правого сечения:

$$\Delta_\Theta = \frac{Mdz}{EI}$$

На этом перемещении момент  $M$  совершит работу:

$$d\tilde{A}_M = \frac{M\Delta_\theta}{2} = \frac{M}{2} \cdot \frac{Mdz}{EI} \quad (2.6)$$

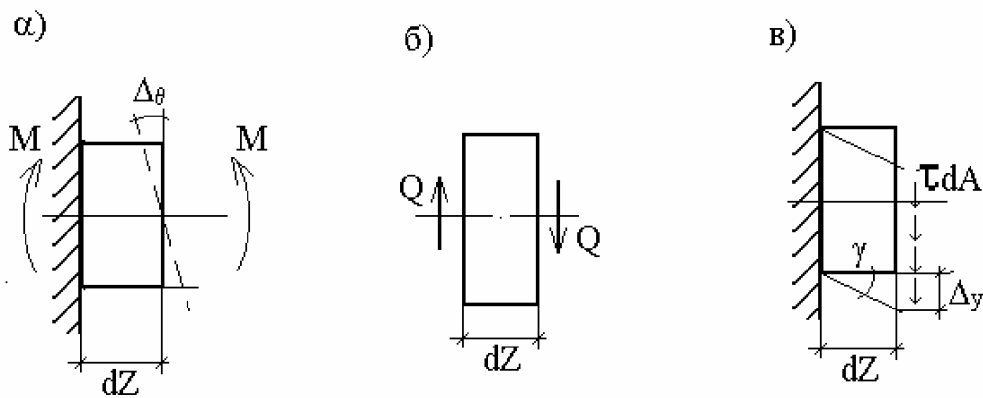


Рис. 22

Закрепим левое сечение элемента  $dz$ , находящегося под действием только поперечных сил  $Q$  (рис.22,б,в), а к правому приложим касательные усилия  $\tau dA$ , равнодействующей которых является поперечная сила  $Q$ . Предположим, что касательные напряжения  $\tau$  равномерно распределены по всей площади  $A$  поперечного сечения, то есть  $\tau = Q/A$ , тогда перемещение  $\Delta_y$  определяется в виде:

$$\Delta_y = \gamma dz = \frac{\tau}{G} dz = \frac{Qdz}{GA},$$

а работа силы  $Q$  на этом перемещении будет:

$$d\tilde{A}_Q = \frac{1}{2} Q\Delta_y = \frac{Q}{2} \cdot \frac{Qdz}{GA} \quad (2.7)$$

В действительности касательные напряжения  $\tau$  распределены по площади поперечного сечения неравномерно, что учитывается введением в (2.7) поправочного коэффициента  $\eta$ .

Суммируя (2.5) – (2.7), получим полное значение работы:

$$d\tilde{A} = \frac{1}{2} \left( N \frac{Ndz}{EA} + M \frac{Mdz}{EI} + Q\eta \frac{Qdz}{GA} \right) \quad (2.8)$$

Интегрируя выражение  $d\tilde{A}$  в пределах длины  $L$  каждого участка всех стержней и суммируя результаты, получим:

$$\tilde{A} = \sum \int_0^L \frac{M^2 dz}{2EI} + \sum \int_0^L \frac{N^2 dz}{2EA} + \sum \int_0^L \eta \frac{Q^2 dz}{GA} \quad (2.9)$$

Из формулы (2.9) следует, что работа внешних сил на вызванных ими перемещениях всегда положительна.

На основании закона сохранения энергии работа  $\tilde{A}$  внешних сил переходит в потенциальную энергию деформации, то есть  $\Pi = \tilde{A}$ .

### 2.3 ТЕОРЕМА О ВЗАИМНОСТИ РАБОТ

Рассмотрим два состояния упругой системы, находящейся в равновесии. В каждом из этих состояний на систему действует некоторая статическая нагрузка (рис.23,а). Обозначим перемещения по направлениям сил  $F_1$  и  $F_2$  через  $\Delta_{ij}$ , где индекс “i” показывает направление перемещения, а индекс “j” – вызвавшую его причину.

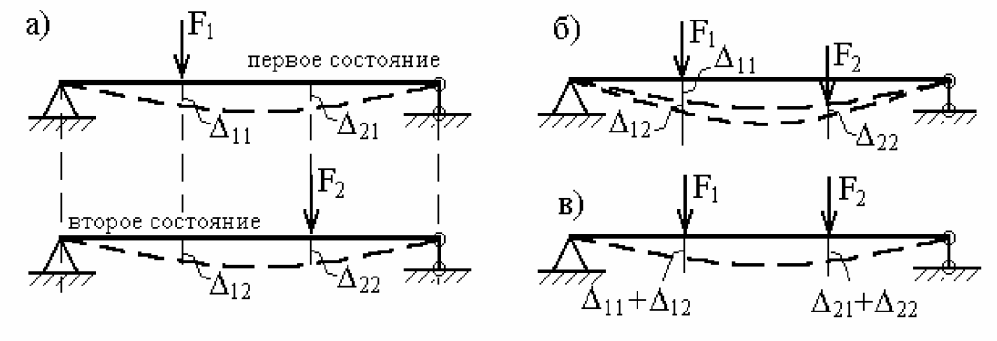


Рис. 23

Обозначим работу нагрузки первого состояния (сила  $F_1$ ) на перемещениях первого состояния через  $A_{11}$ , а работу силы  $F_2$  на вызванных ею перемещениях –  $A_{22}$ :

$$A_{11} = \frac{F_1 \Delta_{11}}{2}; A_{22} = \frac{F_2 \Delta_{22}}{2}.$$



Используя (2.9), работы  $A_{11}$  и  $A_{22}$  можно выразить через внутренние силовые факторы:

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= \int_0^{\ell} \frac{M_1^2 dz}{2EI} + \int_0^{\ell} \frac{N_1^2 dz}{2EA} + \int_0^{\ell} \frac{Q_1^2 dz}{2GA} \eta_p \\ A_{22} &= \int_0^{\ell} \frac{M_2^2 dz}{2EI} + \int_0^{\ell} \frac{N_2^2 dz}{2EA} + \int_0^{\ell} \frac{Q_2^2 dz}{2GA} \eta_1 \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

Рассмотрим случай статического нагружения той же системы (рис.23,а) в такой последовательности. Сначала к системе прикладывается статически возрастающая сила  $F_1$  (рис.23,б); когда процесс ее статического нарастания закончен, деформация системы и действующие в ней внутренние усилия становятся такими же, как и первом состоянии (рис.23,а). Работа силы  $F_1$  составит:

$$A_{11} = \frac{F_1 \Delta_{11}}{2}$$

Затем на систему начинает действовать статически нарастающая сила  $F_2$  (рис.23,б). В результате этого система получает дополнительные деформации и в ней возникают дополнительные внутренние усилия, такие же, как и во втором состоянии (рис.23,а). В процессе нарастания силы  $F_2$  от нуля до ее конечного значения сила  $F_1$ , оставаясь неизменной, перемещается вниз на величину дополнительного прогиба  $\Delta_{12}$  и, следовательно, совершает дополнительную работу:

$$A_{12} = F_1 \cdot \Delta_{12}$$

Сила  $F_2$  при этом совершает работу:

$$A_{22} = \frac{F_2 \Delta_{22}}{2}$$

Полная работа  $A$  при последовательном нагружении системы силами  $F_1, F_2$  равна:

$$A = A_{11} + A_{12} + A_{22} = \frac{F_1 \Delta_{11}}{2} + F_1 \Delta_{12} + \frac{F_2 \Delta_{22}}{2} \quad (2.11)$$

С другой стороны, в соответствии с (2.4) полную работу можно определить в виде:

$$A = \frac{F_1 (\Delta_{11} + \Delta_{12})}{2} + \frac{F_2 (\Delta_{21} + \Delta_{22})}{2} \quad (2.12)$$

Приравнявая друг к другу выражения (2.11) и (2.12), получим:

$$F_1 \Delta_{12} = F_2 \Delta_{21} \quad (2.13)$$

или

$$A_{12} = A_{21} \quad (2.14)$$

Равенство (2.14) носит название *теоремы о взаимности работ*, или *теоремы Бетти*: работа сил первого состояния на перемещениях по их направлениям, вызванных силами второго состояния, равна работе сил второго состояния на перемещениях по их направлениям, вызванных силами первого состояния.

Опуская промежуточные выкладки, выразим работу  $A_{12}$  через изгибающие моменты, продольные и поперечные силы, возникающие в первом и втором состояниях:

$$A_{12} = \sum_0^{\ell} \int_0^{\ell} M_1 \frac{M_2 dz}{EI} + \sum_0^{\ell} \int_0^{\ell} N_1 \frac{N_2 dz}{EA} + \sum_0^{\ell} \int_0^{\ell} Q_1 \frac{Q_2 dz}{GA} \eta \quad (2.15)$$

Каждое подинтегральное выражение в правой части этого равенства можно рассматривать как произведение внутреннего усилия, возникающего в сечении стержня от сил первого состояния, на деформацию элемента  $dz$ , вызванную силами второго состояния.

## 2.4 ТЕОРЕМА О ВЗАИМНОСТИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Пусть в первом состоянии к системе приложена сила  $\bar{F}_1 = 1$ , а во втором -  $\bar{F}_2 = 1$  (рис.24). Обозначим перемещения, вызванные единичными силами (или

единичными моментами ( $\bar{M}=1$ ) символом  $\delta$ . Тогда перемещение рассматриваемой системы по направлению единичной силы  $\bar{F}_2$  в первом состоянии (то есть вызванное силой  $\bar{F}_1=1$ ) -  $\delta_{21}$ , а перемещение по направлению силы  $\bar{F}_1=1$  во втором состоянии -  $\delta_{12}$ .

На основании теоремы о взаимности работ:

$\bar{F}_1\delta_{12} = \bar{F}_2\delta_{21}$ , но  $\bar{F}_1 = \bar{F}_2 = 1$ , поэтому  $\delta_{12} = \delta_{21}$ , или в общем случае действия любых единичных сил:

$$\delta_{mn} = \delta_{nm} \quad (2.16)$$

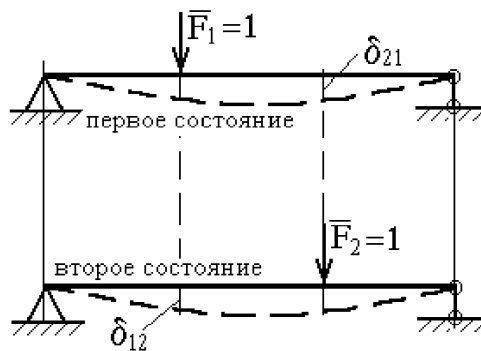


Рис. 24

Полученное равенство (2.16) носит название *теоремы о взаимности перемещений* (или *теоремы Максвелла*): для двух единичных состояний упругой системы перемещение по направлению первой единичной силы, вызванное второй единичной силой, равно перемещению по направлению второй силы, вызванному первой силой.

## 2.5 ВЫЧИСЛЕНИЙ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ МЕТОДОМ МОРА

Излагаемый ниже метод является универсальным методом определения перемещений (как линейных так и угловых), возникающих в любой стержневой системе от произвольной нагрузки.

Рассмотрим два состояния системы. Пусть в первом из них (грузовое состояние) к балке приложена любая произвольная нагрузка, а во втором (единичное состояние) – сосредоточенная сила  $\bar{F}_2 = 1$  (рис.25).

Работа  $A_{21}$  силы  $\bar{F}_2 = 1$  на перемещении  $\Delta_{21}$ , возникающем от сил первого состояния:

$$A_{21} = \bar{F}_2 \Delta_{21} = 1 \cdot \Delta_{21} = \Delta_{21}.$$

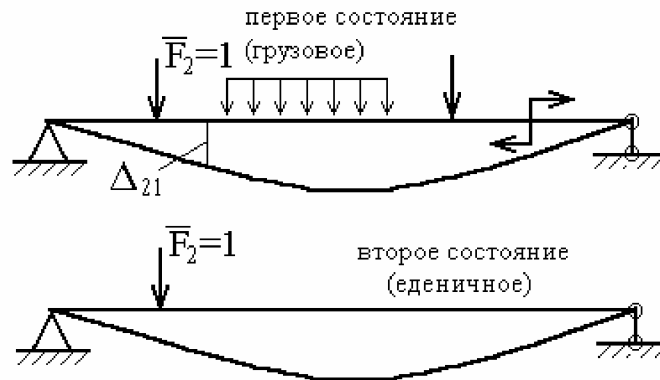


Рис.25

Используя (2.14) и (2.15), выразим  $A_{21}$  (а, значит, и  $\Delta_{21}$ ) через внутренние силовые факторы:

$$A_{21} = \Delta_{21} = \sum \int_0^{\ell} \bar{M}_2 \frac{M_1 dz}{EI} + \sum \int_0^{\ell} \bar{N}_2 \frac{N_1 dz}{EA} + \sum \int_0^{\ell} \bar{Q}_2 \frac{Q_1 dz}{GA} \eta. \quad (2.17)$$

Знак “+”, полученный при определении  $\Delta_{21}$ , означает, что направление искомого перемещения совпадает с направлением единичной силы. Если определяется линейное смещение, то обобщенная единичная сила представляет собой безразмерную сосредоточенную единичную силу, приложенную в рассматриваемой точке; а если определяется угол поворота сечения, то обобщенная единичная сила – это безразмерный сосредоточенный единичный момент.

Иногда (2.17) записывается в виде:

$$\Delta_{mn} = \sum \int_0^L \overline{M}_m \frac{M_n dz}{EI} + \sum \int_0^L \overline{N}_m \frac{N_n dz}{EA} + \sum \int_0^L \overline{Q}_m \frac{Q_n dz}{GA} \eta \quad (2.18)$$

где  $\Delta_{mn}$  - перемещение по направлению силы  $\vec{F}_m = 1$ , вызванное действием группы сил  $\eta$ . Произведения, стоящие в знаменателе формулы (2.18), называются соответственно жесткостями при изгибе, растяжении (сжатии) и сдвиге; при постоянных по длине размерах сечения и одинаковом материале эти величины можно выносить за знак интеграла. Выражения (2.17) и (2.18) называются *интегралами (или формулами) Мора*.

Наиболее общий вид интеграл Мора имеет в том случае, когда в поперечных сечениях стержней системы возникают все шесть внутренних силовых факторов:

$$\Delta_{mn} = \sum \int_0^{\ell} \left( \frac{\overline{M}_m^x M_n^x}{EI_x} + \frac{\overline{M}_m^y M_n^y}{EI_y} + \frac{\overline{M}_m^{kp} M_n^{kp}}{GI_{kp}} + \frac{\overline{N}_m^z N_n^z}{EA} + \eta_x \frac{\overline{Q}_m^x Q_n^x}{GA} + \eta_y \frac{\overline{Q}_m^y Q_n^y}{GA} \right) dz \quad (2.19)$$

*Алгоритм вычисления перемещения* методом Мора состоит в следующем:

1. Определяют выражения внутренних усилий от заданной нагрузки как функций координаты  $Z$  произвольного сечения.
2. По направлению искомого перемещения прикладывается обобщенная единичная сила (сосредоточенная сила – при вычислении линейного перемещения; сосредоточенный момент – при вычислении угла поворота).
3. Определяют выражения внутренних усилий от обобщенной единичной силы как функций координаты  $Z$  произвольного сечения.
4. Подставляют выражение внутренних усилий, найденные в п.п.1,3 в (2.18) или (2.19) и интегрированием по участкам в пределах всей длины конструкции определяют искомое перемещение.

Формулы Мора пригодны и для элементов, представляющих собой стержни малой кривизны, с заменой элемента длины  $dz$  в подынтегральном выражении элементом дуги  $ds$ .

В большинстве случаев плоской задачи используется только один член формулы (2.18). Так, если рассматриваются конструкции, работающие

преимущественно на изгиб (балки, рамы, а частично и арки), то в формуле перемещений с соблюдением достаточной точности можно оставить только интеграл, зависящий от изгибающих моментов; при расчете конструкций, элементы которых работают, в основном, на центральное растяжение (сжатие), например, ферм, можно не учитывать деформации изгиба и сдвига, то есть в формуле перемещений останется только член, содержащий продольные силы.

Аналогично, в большинстве случаев пространственной задачи существенно упрощается формула Мора (2.19). Так, когда элементы системы работают преимущественно на изгиб и кручение (например, при расчете плоско-пространственных систем, ломаных стержней и пространственных рам) в (2.19) остаются только первые три члена; а при расчете пространственных ферм – только четвертый член.

### ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ

**Пример 13.** Определить прогиб в середине пролета и угол поворота левого опорного сечения балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой (рис.26,а), методом Мора.

Рассмотрим три состояния балки: первое (грузовое) – при действии заданной распределенной нагрузки  $q$ ; ему соответствует эпюра моментов  $M_q$  (рис.26,б). Второе состояние (единичное) – при действии сосредоточенной силы  $\bar{F}=1$ , приложенной в точке С; ему соответствует эпюра моментов  $\bar{M}_i$  (рис.26,в). Третье состояние (также единичное) – при действии сосредоточенного момента  $\bar{M}=1$ , приложенного в точке В; ему соответствует эпюра моментов  $\bar{M}_k$  (рис.26,г). Примем начало координат на левой опоре; тогда ординаты указанных эпюр в сечении с координатой  $z$  соответственно равны:

$$M_q(z) = \frac{qL}{2}z - \frac{qz^2}{2} = \frac{qz}{2}(L - z);$$

$$\bar{M}_i(z) = \frac{1}{2}z;$$

$$\bar{M}_k(z) = 1 - \frac{z}{L}.$$

Вычисляем прогиб балки в точке С:

$$y_c = 2 \int_0^{l/2} \frac{M_q \bar{M}_1 dz}{EI_x} = 2 \int_0^{l/2} \frac{\frac{qz}{2}(L-z) \cdot \frac{z}{2} dz}{EI_x} = \frac{q}{2EI_x} \int_0^{l/2} z^2(L-z) dz =$$

$$= \frac{q}{2EI_x} \left( \frac{\ell^4}{24} - \frac{\ell^4}{64} \right) = \frac{5q\ell^4}{384EI_x}.$$

Знак "+" означает, что точка С переместится в направлении действия силы.

$$\vec{F} = 1.$$

Вычисляем угол поворота сечения В:

$$\Theta_B = \int_0^L \frac{M_q \bar{M}_k dz}{EI_x} = \int_0^L \frac{\frac{qz}{2}(L-z) \cdot \left(1 - \frac{z}{L}\right) dz}{EI_x} = \frac{q}{2LEI_x} \int_0^L z(L-z)^2 dz =$$

$$= \frac{q}{2LEI_x} \int_0^L (zL^2 - 2Lz^2 + z^3) dz = \frac{q}{2LEI_x} \left( \frac{1}{2}L^2z^2 - \frac{2}{3}Lz^3 + \frac{1}{4}z^4 \right) \Big|_0^L = \frac{qL^3}{24EI_x}.$$

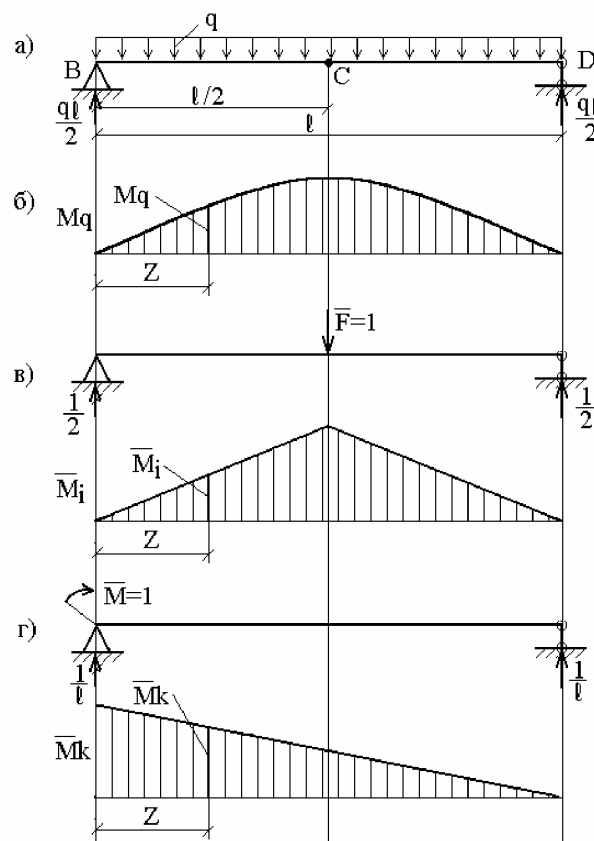


Рис. 26

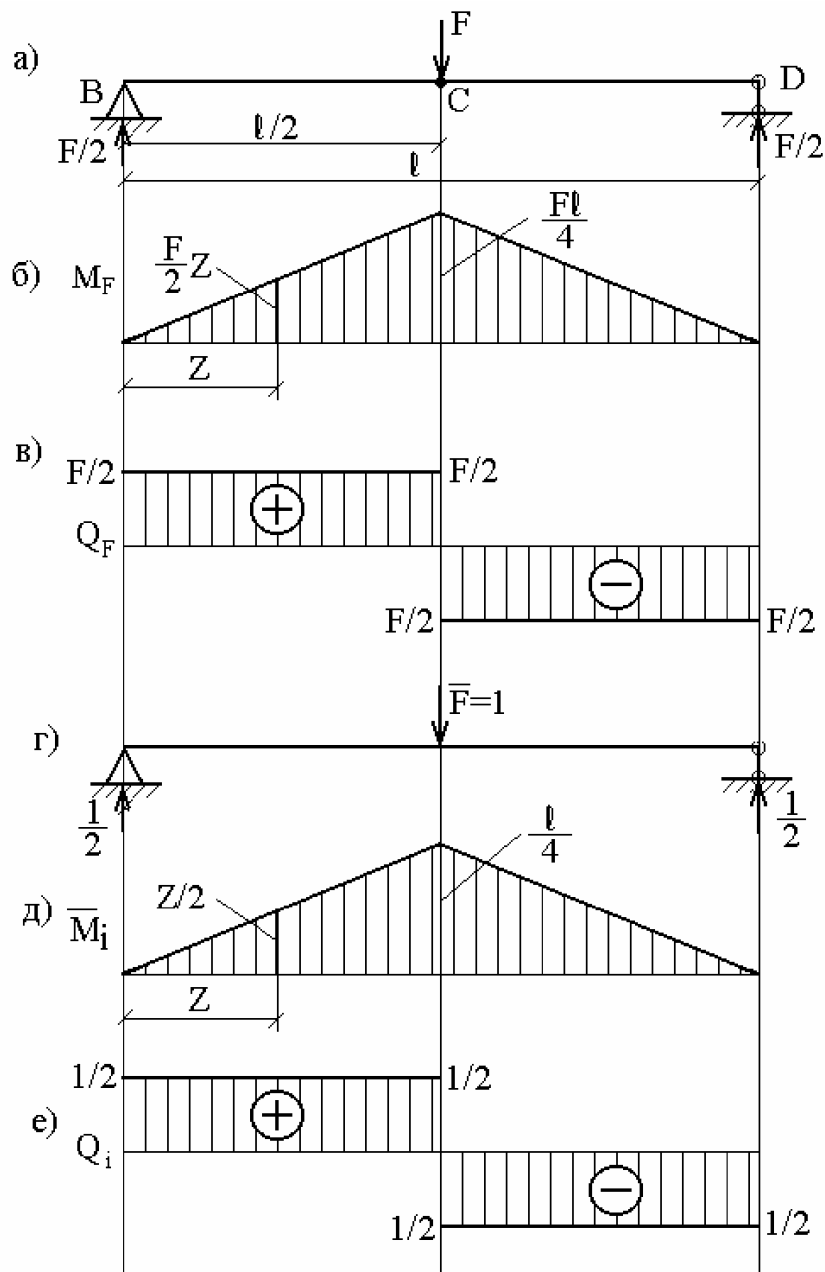


Рис. 27

Знак "+" означает, что сечение В поворачивается в направлении действия момента  $\bar{M} = 1$ , то есть по часовой стрелке.

**Пример 14.** Определить прогиб балки в середине пролета (рис.27,а) методом Мора. Оценить влияние поперечной силы на общую величину прогиба.



Рассмотрим два состояния балки. Первое состояние (грузовое) – при действии силы  $F$  (рис.27,а); ему соответствует эпюры изгибающих моментов  $M_F$  (рис.27,б) и поперечных сил  $Q_F$  (рис.27,в).

Второе состояние (единичное) – при действии силы  $\vec{F} = 1$  (рис.27,г); ему соответствуют эпюры изгибающих моментов  $\vec{M}_i$  (рис.27,д) и поперечных сил  $\vec{Q}_i$  (рис.27,е).

В связи с отсутствием продольных сил в поперечных сечениях балки интеграл Мора (2.18) принимает вид:

$$y_c = \sum \frac{1}{EI_x} \int_0^\ell M_F \vec{M}_i dz + \sum \frac{\eta}{GA} \int_0^\ell Q_F \vec{Q}_i dz = y_c(M) + y_c(Q)$$

Подставляя значения изгибающих моментов и поперечных сил в сечении с координатой  $z$  (рис.27) для составляющих полного перемещения получим:

$$y_c(M) = \frac{2}{EI_x} \int_0^{\ell/2} \frac{z}{2} \cdot \frac{F}{2} dz = \frac{F\ell^3}{48EI_x};$$

$$y_c(Q) = \frac{2\eta}{GA} \int_0^{\ell/2} \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{2} dz = \frac{F\ell\eta}{4GA}.$$

Оценим влияние поперечной силы на общую величину прогиба. Пусть рассматриваемая балка имеет прямоугольное поперечное сечение со сторонами  $b$  и  $h$ , при этом  $h=0,1\ell$ .

Тогда площадь сечения и его осевой момент инерции равны:

$$A = bh = \frac{b\ell}{10}; \quad I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{b\ell^3}{12000}.$$

Будем считать, что  $\eta = 1,2$ ;  $G = 0,4E$ , тогда:

$$\frac{y_c(Q)}{y_c(M)} = \frac{F\eta L 48EI_x}{4GAFL^3} = \frac{12\eta EI_x}{GAL^2} = \frac{12 \cdot 1,2 \cdot EbL^3 \cdot 10}{12000 \cdot 0,4EbL} = \frac{3}{100},$$

то есть прогиб, обусловленный деформацией сдвига, составляет 3% от прогиба, обусловленного изгибом. Легко убедиться, что при увеличении отношения  $h/L$

влияние поперечных сил на величину прогиба становится еще менее значительным.

## 2.7 ПРАВИЛО ВЕРЕЩАГИНА

Недостатком метода Мора является необходимость получать значения внутренних силовых факторов, входящих в подинтегральные выражения формул (2.18) и (2.19), в общем виде, как функций от  $z$ , что становится достаточно трудоемким уже при двух – трех участках разбиения в балках и особенно – в рамах.

Оказывается, что от этого недостатка можно уйти, если непосредственное интегрирование в формулах Мора заменить так называемым *перемножением эпюр*. Такая замена возможна в тех случаях, когда хотя бы одна из перемножаемых эпюр является прямолинейной. Этому условию соответствуют все системы, состоящие из прямолинейных стержней. Действительно, в таких системах эпюра, построенная от обобщенной единичной силы, всегда будет прямолинейной.

Способ вычисления интеграла Мора путем замены непосредственного интегрирования перемножением соответствующих эпюр называется *способом (или правилом) Верещагина* и заключается в следующем: чтобы перемножить две эпюры, из которых хотя бы одна является прямолинейной, нужно площадь одной эпюры (если есть криволинейная эпюра, то обязательно ее площадь) умножить на ординату другой эпюры, расположенную под центром тяжести первой.

Докажем справедливость этого правила. Рассмотрим две эпюры (рис.28). Пусть одна из них ( $M_n$ ) является грузовой и имеет криволинейное очертание, а вторая  $\bar{M}_m$  соответствует единичной нагрузке и является линейной.

Из рис.28 следует, что  $\bar{M}_m = (z + a)tg\alpha$ . Подставим значения  $\bar{M}_m$  в выражение  $\int_0^L \bar{M}_m M_n dz$ :

$$\int_0^L \bar{M}_m M_n dz = \operatorname{tg} \alpha \int_0^L (z+a) M_n dz = \operatorname{tg} \alpha \int_0^L (z+a) d\omega_n,$$

где  $d\omega_n = M_n dz$  - дифференциал площади  $\omega_n$  эпюры  $M_n$ .

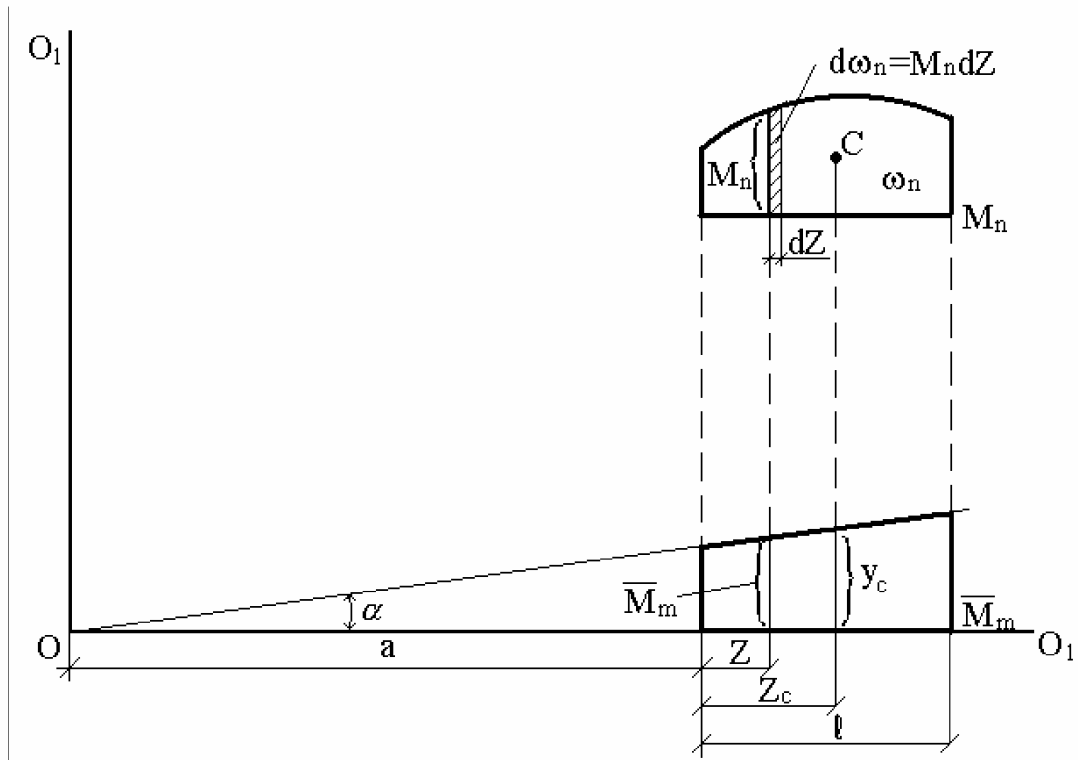


Рис. 28

Интеграл  $\int_0^L (z+a) d\omega_n$  представляет собой статический момент площади  $\omega_n$  относительно оси  $O - O_1$ , при этом:

$$\int_0^L (z+a) d\omega_n = \omega_n (z_c + a),$$

где  $z_c$  - абсцисса центра тяжести площади  $\omega_n$ , тогда:

$$\int_0^L \bar{M}_m M_n dz = (z_c + a) \omega_n \operatorname{tg} \alpha.$$

Учитывая, что  $(z_c + a) \operatorname{tg} \alpha = y_c$ , получим:

$$\int_0^L \vec{M}_m M_n dz = \omega_n y_c \quad (2.20)$$

Выражение (2.20) определяет результат перемножения двух эпюр, а не перемещения. Чтобы получить перемещение, этот результат нужно разделить на жесткость, соответствующую внутренним силовым факторам, стоящим под знаком интеграла.

## 2.8 ОСНОВНЫЕ ВАРИАНТЫ ПЕРЕМНОЖЕНИЯ ЭПЮР

Очевидно, что разнообразие приложенных нагрузок и геометрических схем конструкций приводит к различным, с точки зрения геометрии, перемножаемым эпюрам. Для реализации правила Верещагина нужно знать площади геометрических фигур и координаты их центров тяжести. На рис.29 представлены некоторые основные варианты, возникающие в практических расчетах.

Для перемножения эпюр сложной формы их необходимо разбивать на простейшие. Например, для перемножения двух эпюр, имеющих вид трапеции, нужно одну из них разбить на треугольник и прямоугольник, умножить площадь каждого из них на ординату второй эпюры, расположенную под соответствующим центром тяжести, и результаты сложить. Аналогично поступают и для умножения криволинейной трапеции на любую линейную эпюру.

Если указанные выше действия проделать в общем виде, то получим для таких сложных случаев формулы, удобные для использования в практических расчетах (рис.30). Так, результат перемножения двух трапеций (рис.30,а):

$$M_m \times M_n = \frac{L}{6}(2ac + 2bd + ad + bc) \quad (2.21)$$

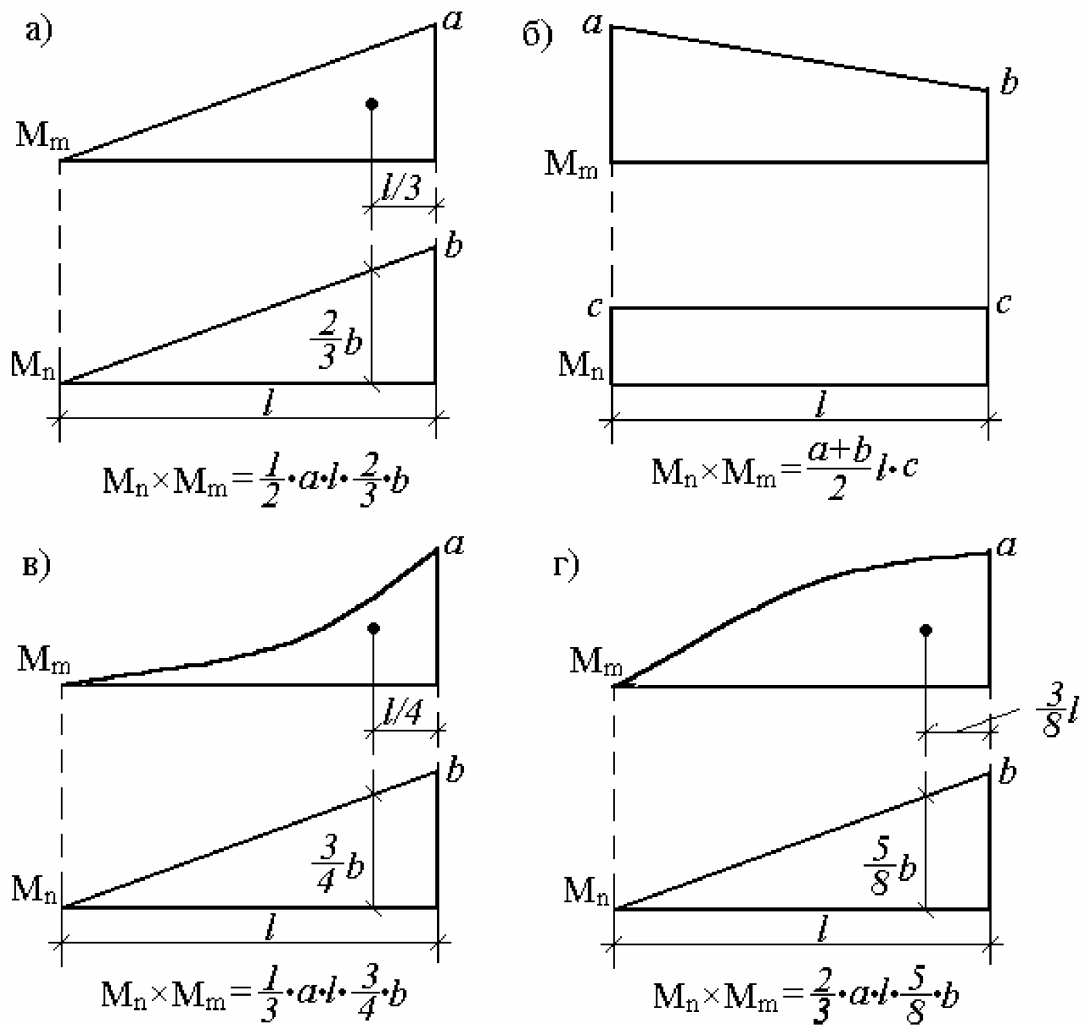


Рис. 29

По формуле (2.21) можно перемножить и эпюры, имеющих вид "перекрученных" трапеций (рис.30,б), но при этом произведение ординат, расположенных по разные стороны от осей эпюр, учитывается со знаком минус.

Если одна из перемножаемых эпюр очерчена по квадратной параболе (что соответствует нагружению равномерно распределенной нагрузкой), то для перемножения со второй (обязательно линейной) эпюрой ее рассматривают как сумму (рис.30,в) или разность (рис.30,г) трапецидальной и параболической эпюр. Результат перемножения в обоих случаях определяется формулой:

$$M_m \times M_n = \frac{L}{6}(ac + 4fg + bd), \quad (2.22)$$

но значение  $f$  при этом определяется по-разному (рис. 30, в, г).

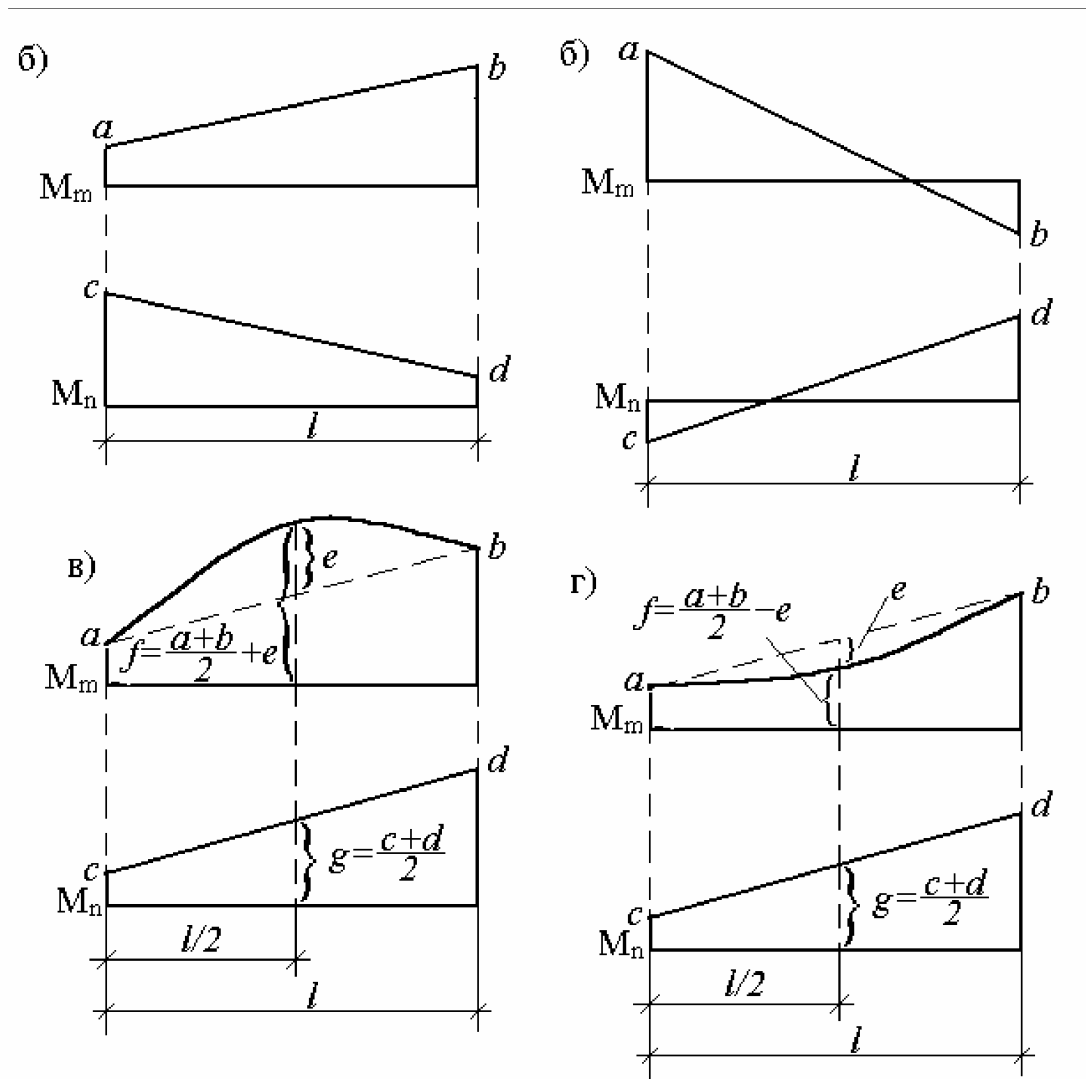


Рис. 30

Возможны случаи, когда ни одна из перемножаемых эпюр не является прямолинейной, но хотя бы одна из них ограничена ломаными прямыми линиями. Для перемножения таких эпюр их предварительно разбивают на участки, в пределах каждого из которых по крайней мере одна эпюра является прямолинейной.

Рассмотрим использование правила Верещагина на конкретных примерах.

**Пример 15.** Определить прогиб в середине пролета и угол поворота левого опорного сечения балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой (рис.31,а), способом Верещагина.

Последовательность расчета способом Верещагина – такая же, как и в методе Мора, поэтому рассмотрим три состояния балки: грузовое – при действии распределенной нагрузки  $q$ ; ему соответствует эпюра  $M_q$  (рис.31,б), и два единичных состояния - при действии силы  $\bar{F}=1$ , приложенной в точке С (эпюра  $\bar{M}_c$ , рис.31,в), и момента  $\bar{M}=1$ , приложенного в точке В (эпюра  $\bar{M}_B$ , рис.31,г).

Прогиб балки в середине пролета:

$$y_c = \frac{M_q \bar{M}_c}{EI_x} = \frac{1}{EI_x} \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{qL^2}{8} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{4} \right) \cdot 2 = \frac{5qL^4}{384EI_x}.$$

Аналогичный результат был получен ранее методом Мора (см. пример 13). Следует обратить внимание на тот факт, что перемножение эпюр выполнялось для половины балки, а затем, в силу симметрии, результат удваивался. Если же площадь всей эпюры  $M_q$  умножить на расположенную под ее центром тяжести ординату эпюры  $\bar{M}_c$  ( $L/4$  на рис.31,в), то величина перемещения будет совершенно иной и неправильной так как эпюра  $\bar{M}_c$  ограничена ломаной линией. На недопустимость такого подхода уже указывалось выше.

А при вычислении угла поворота сечения в точке В можно площадь эпюры  $M_q$  умножить на расположенную под ее центром тяжести ординату эпюры  $\bar{M}_B$  ( $1/2$ , рис.31,г), так как эпюра  $\bar{M}_B$  ограничена прямой линией:

$$\Theta = \frac{M_q \bar{M}_B}{EI_x} = \frac{1}{EI_x} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{qL^2}{8} \cdot L \cdot \frac{1}{2} = \frac{qL^3}{24EI_x}.$$

Этот результат также совпадает с результатом, полученным ранее методом Мора (см. пример 13).

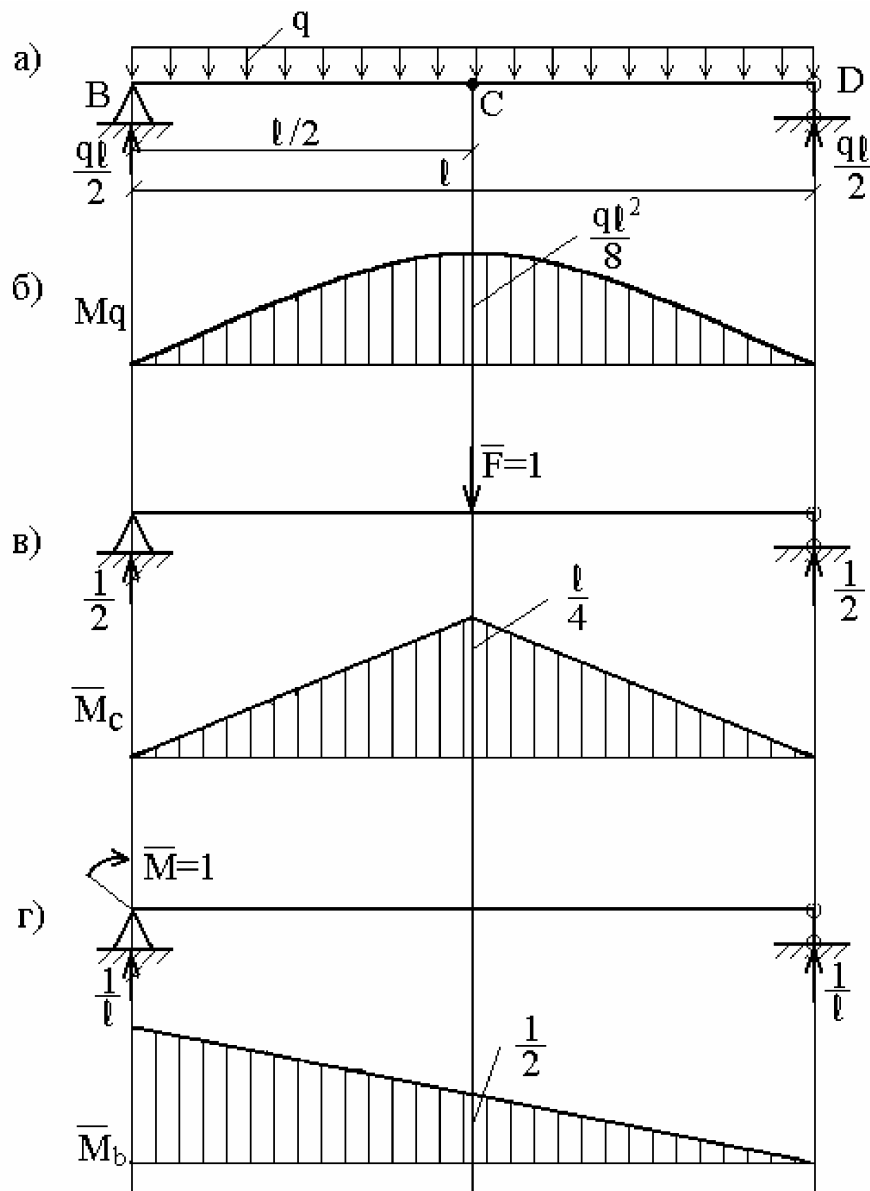


Рис. 31

**Пример 16.** Определить горизонтальное и вертикальное перемещения точки А в раме (рис.32,а).

Как и в предыдущем примере, для решения задачи необходимо рассмотреть три состояния рамы: грузовое и два единичных. Эпюра моментов  $M_F$ , соответствующая первому состоянию, представлена на рис.32,б. Для вычисления горизонтального перемещения прикладываем в точке А по направлению искомого перемещения (т.е. горизонтально) силу  $\bar{F}=1$ , а для



вычисления вертикального перемещения силу  $\bar{F}=1$  прикладываем вертикально (рис.32,в,д). Соответствующие эпюры  $\bar{M}_{гор}$  и  $\bar{M}_{верт}$  показаны на рис.32,г,е.

Горизонтальное перемещение точки А:

$$\begin{aligned}\Delta_{гор} &= \frac{M_F \bar{M}_{гор}}{EI_x} = \\ &= \frac{1}{EI_x} \left[ -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 60 + 40 \right) - \frac{2}{3} \cdot 80 \cdot 4 \cdot 2 - 20 \cdot 4 \cdot 2 + \frac{6}{6} (-2 \cdot 2 \cdot 20 - 2 \cdot 4 \cdot 160 + 20 \cdot 4 + 2 \cdot 160) \right] = \\ &= -\frac{1706,67}{EI_x}.\end{aligned}$$

При вычислении  $\Delta_{гор}$  на участке АВ трапеция (эюра  $M_F$ ) разбита на треугольник и прямоугольник, после чего треугольник с эпюры  $\bar{M}_{гор}$  "умножен" на каждую из этих фигур. На участке ВС криволинейная трапеция разделена на криволинейный треугольник и прямоугольник, а для перемножения эпюр на участке СД использована формула (2.21).

Знак " - ", полученный при вычислении  $\Delta_{гор}$ , означает, что точка А перемещается по горизонтали не влево (в этом направлении приложена сила  $\bar{F}=1$ ), а вправо.

Вертикальное перемещение точки А:

$$\begin{aligned}\Delta_{верт} &= \frac{M_F \bar{M}_{верт}}{EI_x} = \\ &= \frac{1}{EI_x} \left[ \frac{2}{3} \cdot 80 \cdot 4 \cdot \frac{3}{8} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 20 + \frac{6}{6} (2 \cdot 20 \cdot 4 - 2 \cdot 4 \cdot 160 + 20 \cdot 4 - 4 \cdot 160) \right] = \\ &= -\frac{1200}{EI_x}.\end{aligned}$$

Здесь знак " - " означает, что точка А перемещается вниз, а не вверх.

Отметим, что единичные эпюры моментов, построенные от силы  $\bar{F}=1$ , имеют размерность длины, а единичные эпюры моментов построенные от момента  $\bar{M}=1$ , являются безразмерными.

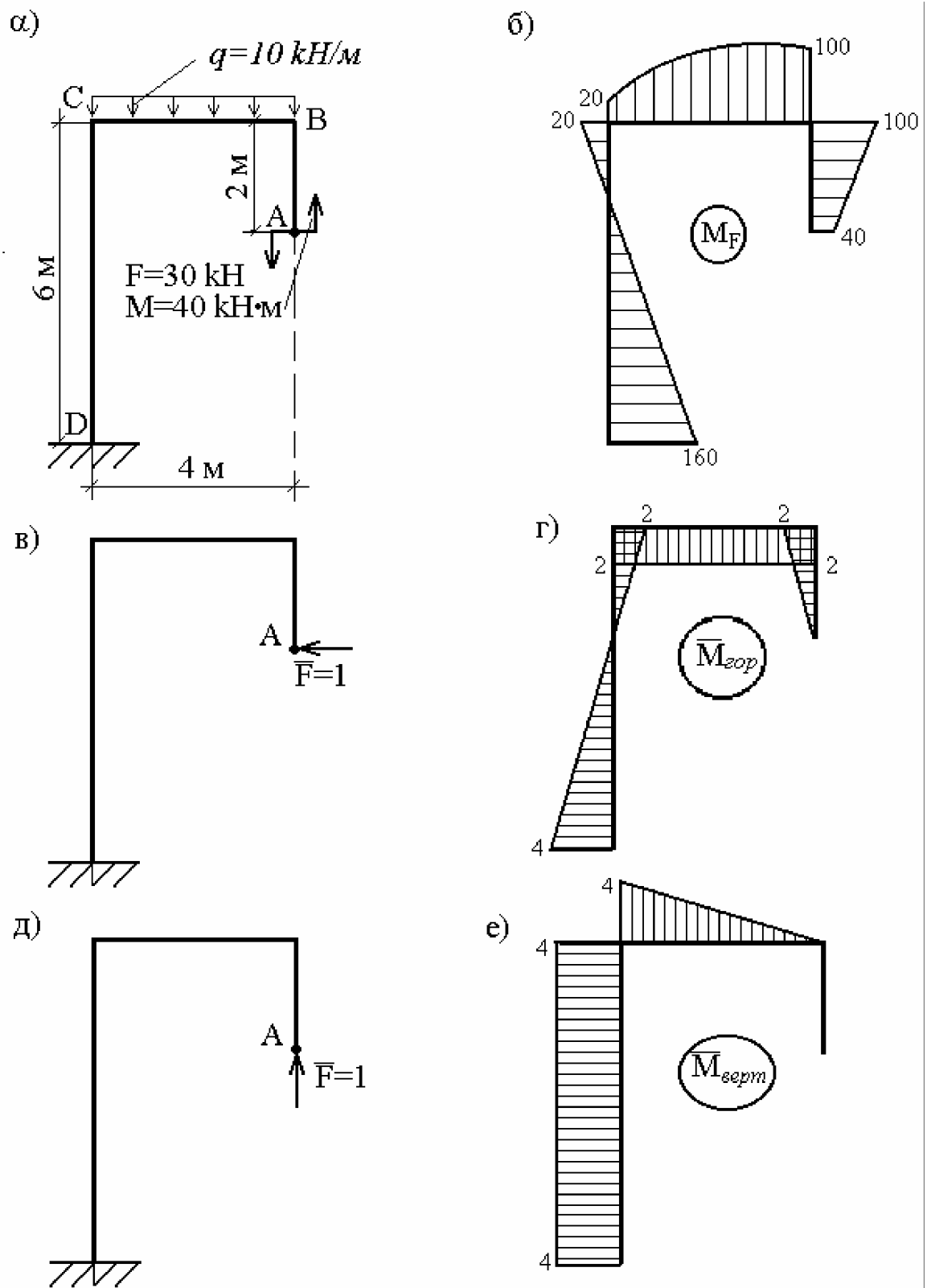
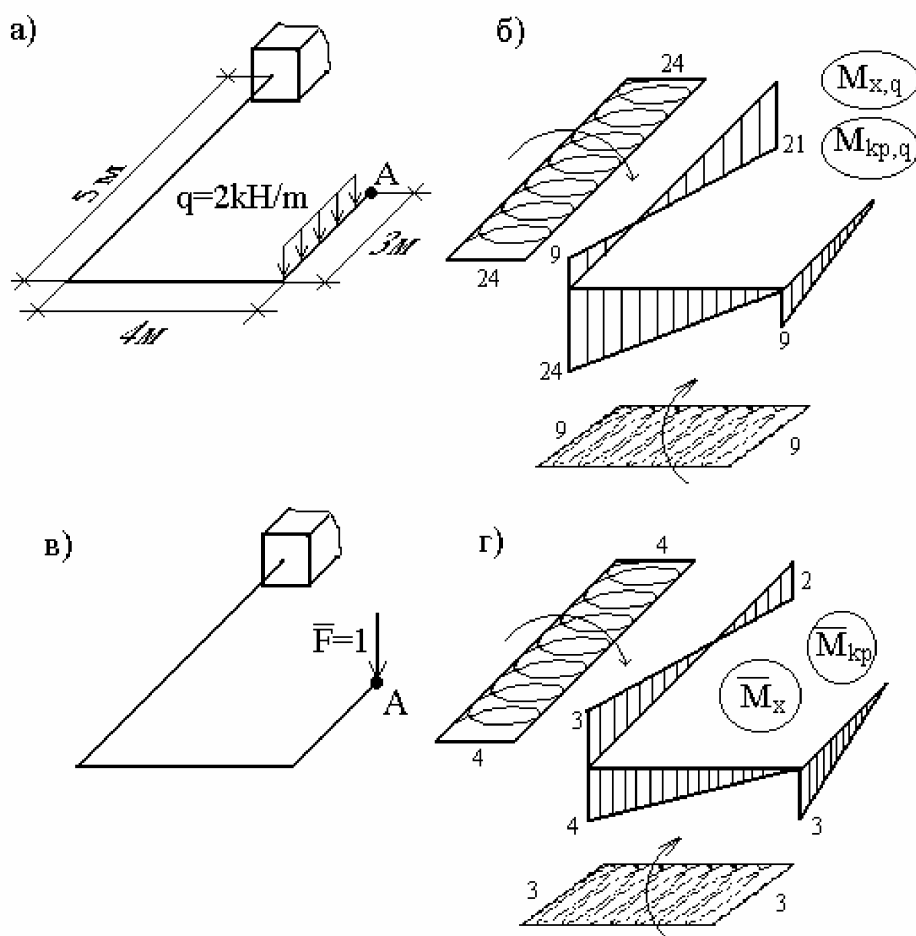


Рис.32

**Пример 17.** Определить вертикальное перемещение точки А плоско-пространственной системы (рис.33,а).



**Рис.23**

Как известно (см. гл.1), в поперечных сечениях стержней плоско-пространственной системы возникают три внутренних силовых фактора: поперечная сила  $Q_y$ , изгибающий момент  $M_x$  и крутящий момент  $M_{кр}$ . Так как влияние поперечной силы на величину перемещения незначительно (см. пример 14, рис.27), то при вычислении перемещения методом Мора и Верещагина из шести слагаемых остаются только два.

Для решения задачи построим эпюры изгибающих моментов  $M_{x,q}$  и крутящих моментов  $M_{кр,q}$  от внешней нагрузки (рис.33,б), а затем в точке А приложим силу  $\bar{F}=1$  по направлению искомого перемещения, т.е.

вертикального (рис.33,в), и построим единичные эпюры изгибающих моментов  $\bar{M}_x$  и крутящих моментов  $\bar{M}_{кр}$  (рис.33,г). Стрелками на эпюрах крутящих моментов показаны направления закручивания соответствующих участков плоско-пространственной системы.

Вертикальное перемещение точки А:

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{верт}} &= \frac{M_{x,q} \bar{M}_x}{EI_x} + \frac{M_{кр,q} \bar{M}_{кр}}{GI_{кр}} = \\ &= \frac{1}{EI_x} \left[ \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 3 \cdot \frac{3}{4} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{5}{6} (2 \cdot 9 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 21 - 3 \cdot 21 - 9 \cdot 2) \right] + \\ &+ \frac{1}{GI_{кр}} (9 \cdot 4 \cdot 3 + 24 \cdot 5 \cdot 4) = \frac{195,75}{EI_x} + \frac{588}{GI_{кр}}. \end{aligned}$$

При перемножении эпюр крутящих моментов произведение берется со знаком "+", если стрелки, указывающие направление кручения, сонаправлены, и со знаком "-" – в противном случае.

## ГЛАВА 3

### ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР В СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМАХ. МЕТОД СИЛ

#### 3.1 ОСОБЕННОСТИ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ И МЕТОДЫ ИХ РАСЧЕТА

*Статически неопределимой* называется такая система, которая не может быть рассчитана при помощи одних только уравнений статики, так как имеет лишние связи. Для расчета таких систем составляются дополнительные уравнения, учитывающие деформации системы.

Оговоримся, что здесь и далее понятие "расчет" подразумевает только построение эпюр внутренних силовых факторов, возникающих в элементах системы, а не расчет на прочность, жесткость и т.д.

Статически неопределимые системы обладают рядом характерных особенностей:

1. Статически неопределимые конструкции являются более жесткими, чем соответствующие статически определимые, так как имеют дополнительные связи.
2. В статически неопределимых системах возникают меньшие внутренние усилия, что определяет их экономичность по сравнению со статически определимыми системами при одинаковых внешних нагрузках.
3. Нарушение лишних связей в статически неопределимой системе не всегда приводит к разрушению, в то время как потеря связи в статически определимой системе делает ее геометрически изменяемой.
4. Для расчета статически неопределимых систем необходимо предварительно задаваться геометрическими характеристиками поперечных сечений элементов, т.е. фактически их формой и размерами, так как их изменение приводит к изменению усилий в связях и новому распределению усилий во всех элементах системы.
5. При расчете статически неопределимых систем необходимо заранее выбрать материал конструкции, так как необходимо знать его модули упругости.
6. В статически неопределимых системах температурное воздействие, осадка опор, неточности изготовления и монтажа вызывают появление дополнительных усилий.

Основными *методами расчета* статически неопределимых систем являются:

1. *Метод сил.* Здесь в качестве неизвестных рассматриваются усилия – силы и моменты.
2. *Метод перемещений.* Неизвестными являются деформационные факторы – углы поворотов и линейные смещения.
3. *Смешанный метод.* Здесь часть неизвестных представляет собой усилия, а другая часть – перемещения.

4. *Комбинированный метод.* Используется при расчете симметричных систем на несимметричные нагрузки. Оказывается, что на симметричную составляющую заданной нагрузки систему целесообразно рассчитывать методом перемещений, а на обратносимметричную составляющую – методом сил.

Помимо указанных аналитических методов при расчете особо сложных систем используются различные численные методы.

### 3.2 КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ МЕТОДА СИЛ

Для получения дополнительных уравнений, о которых говорилось в предыдущем параграфе, нужно прежде всего превратить заданную,  $n$  раз статически неопределимую систему, в статически определимую, удалив из нее лишние связи. Полученная статически определимая система называется *основной*. Отметим, что преобразование заданной системы в статически определимую не является обязательным. Иногда используется модификация метода сил, в которой основная система может быть статически неопределимой, однако изложение этого вопроса выходит за рамки этого пособия. Устранение каких-либо связей не изменяет внутренние усилия и деформации системы, если к ней приложить дополнительные силы и моменты, представляющие собой реакции отброшенных связей. Значит, если к основной системе приложить заданную нагрузку и реакции удаленных связей, то основная и заданная системы станут *эквивалентными*.

В заданной системе по направлениям имеющихся жестких связей, в том числе и тех связей, которые отброшены при переходе к основной системе, перемещений быть не может, поэтому и в основной системе перемещения по направлениям отброшенных связей должны равняться нулю. А для этого реакции отброшенных связей должны иметь строго определенные значения.

Условие равенства нулю перемещения по направлению любой  $i$ -ой связи из  $n$  отброшенных на основании принципа независимости действия сил имеет вид:

$$\Delta_i = \Delta_{i1} + \Delta_{i2} + \dots + \Delta_{in} + \Delta_{iF} = 0, \quad (3.1)$$

где первый индекс означает направление перемещения и номер отброшенной связи, а второй указывает на причину, вызвавшую перемещение, т.е.  $\Delta_{ik}$  - это перемещение по направлению  $i$ -ой связи, вызванное реакцией  $k$ -ой связи;  $\Delta_{iF}$  - перемещение по направлению  $i$ -ой связи, вызванное одновременным действием всей внешней нагрузки.

В методе сил реакцию  $k$ -ой связи принято обозначать через  $X_k$ . С учетом этого обозначения и в силу справедливости закона Гука перемещения  $\Delta_{ik}$  можно представить в виде:

$$\Delta_{ik} = \delta_{ik} X_k, \quad (3.2)$$

где  $\delta_{ik}$  - единичное (или удельное) перемещение по направлению  $i$ -ой связи, вызванное реакцией  $\vec{X}_k = 1$ , т.е. реакцией, совпадающей по направлению с  $X_k$ , но равной единице.

Подставляя (3.2) в (3.1), получим:

$$\Delta_i = \delta_{i1} X_1 + \delta_{i2} X_2 + \dots + \delta_{in} X_n + \Delta_{iF} = 0. \quad (3.3)$$

*Физический смысл* уравнения (3.3): перемещение в основной системе по направлению  $i$ -ой отброшенной связи равно нулю.

Записывая выражения, аналогичные (3.3), для всей совокупности отброшенных связей, получим *систему канонических уравнений* метода сил:

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \dots + \delta_{1n} X_n + \Delta_{1F} = 0; \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \dots + \delta_{2n} X_n + \Delta_{2F} = 0; \\ \dots \dots \dots \\ \delta_{n1} X_1 + \delta_{n2} X_2 + \dots + \delta_{nn} X_n + \Delta_{nF} = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Вид уравнения (3.4), т.е. количество слагаемых в каждом из них и их общее число, определяется только степенью статической неопределимости системы и не зависит от ее конкретных особенностей.

Коэффициенты системы канонических уравнений (3.4) определяются методом Мора-Верещагина путем перемножения соответствующих эпюр. Все эти коэффициенты, как указывалось выше, представляют собой перемещения; коэффициенты, стоящие при неизвестных – единичные перемещения, а свободные члены – *грузовые*. Единичные перемещения делятся на *главные*, расположенные по главной диагонали и имеющие одинаковые индексы ( $\delta_{ii}$ ), и *побочные* ( $\delta_{ik}, i \neq k$ ). Главные перемещения всегда положительные, в отличие от побочных. Симметрично расположенные перемещения в соответствии с теоремой о взаимности перемещений равны друг другу, т.е.  $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ .

### 3.3 АЛГОРИТМ РАСЧЕТА МЕТОДОМ СИЛ

Независимо от особенностей рассматриваемой конструкции, можно выделить следующую последовательность расчета статически неопределимых систем методом сил:

1. Определить степень статической неопределимости.
2. Выбрать основную систему.
3. Сформировать эквивалентную систему.
4. Записать систему канонических уравнений.
5. Построить единичные и грузовые эпюры внутренних силовых факторов, возникающих в элементах рассматриваемой конструкции.
6. Вычислить коэффициенты при неизвестных и свободные члены системы канонических уравнений.
7. Построить суммарную единичную эпюру.
8. Выполнить универсальную проверку коэффициентов при неизвестных и свободных членов.
9. Решить систему (3.4), т.е. определить реакции лишних связей.
10. Построить эпюры возникающих внутренних силовых факторов для заданной системы (иначе говоря, окончательные эпюры).
11. Выполнить статическую и кинематическую проверки.



Отметим, что пункты 7, 8, 11 приведенного алгоритма не являются безусловно необходимыми, хотя и позволяют контролировать правильность выполнения расчета. А для систем с одной лишней связью пункты 7 и 8 просто лишены смысла, так как в этом случае суммарная единичная эпюра совпадает с единичной.

Остановимся подробнее на некоторых из вышперечисленных этапов расчета.

### **3.4 ВЫБОР ОСНОВНОЙ СИСТЕМЫ**

Это важнейший этап расчета, так как рациональный выбор основной системы существенно упрощает вычислительную работу. Рассмотрим возможные способы удаления лишних связей, что и определяет вид основной системы.

1. Отбрасывание лишних связей осуществляется полным удалением некоторых опор или их заменой опорами с меньшим числом связей. Реакции, действующие в направлениях отброшенных связей, являются лишними неизвестными. На рис.34,б, в, г показаны различные варианты эквивалентной системы, полученные этим способом для рамы (рис.34,а).
2. Постановка шарниров в промежуточных сечениях стержней позволяет в каждом таком сечении установить связь, соответствующую изгибающему моменту. Эти моменты являются лишними неизвестными. Для рамы, имеющей степень статической неопределимости  $n=3$  (рис.35,а), при выборе основной системы необходимо поставить три шарнира. Положение этих шарниров может быть произвольным, но удовлетворяющим требованию геометрической неизменяемости системы (рис.35,б).
3. Рассечение стержня устраняет три связи, соответствующие внутренним усилиям  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  (рис.35,в). В частных случаях (рис.35,г) рассечение стержня по шарниру освобождает две связи (рис.35,д), а рассечение прямолинейного стержня с шарнирами по концам – одну связь (рис.35,е).

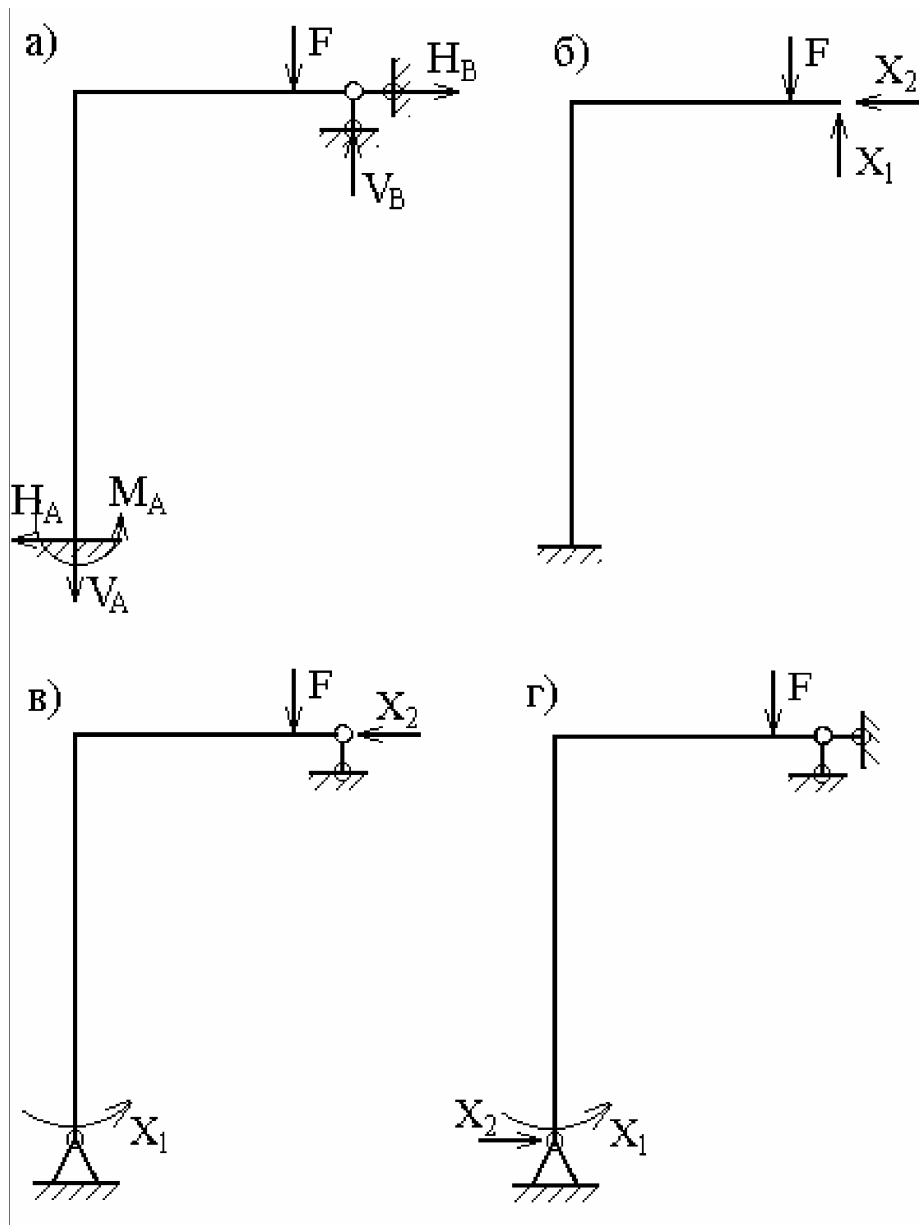


Рис. 34

Среди связей статически неопределимой системы различают абсолютно необходимые и условно необходимые. К абсолютно необходимым относятся связи, при удалении которых система становится геометрически изменяемой. Для абсолютно необходимой связи характерна статическая определимость усилия в ней, т.е. реакция такой связи может быть вычислена из условия равновесия. При выборе основной системы абсолютно необходимые связи отбрасывать нельзя.

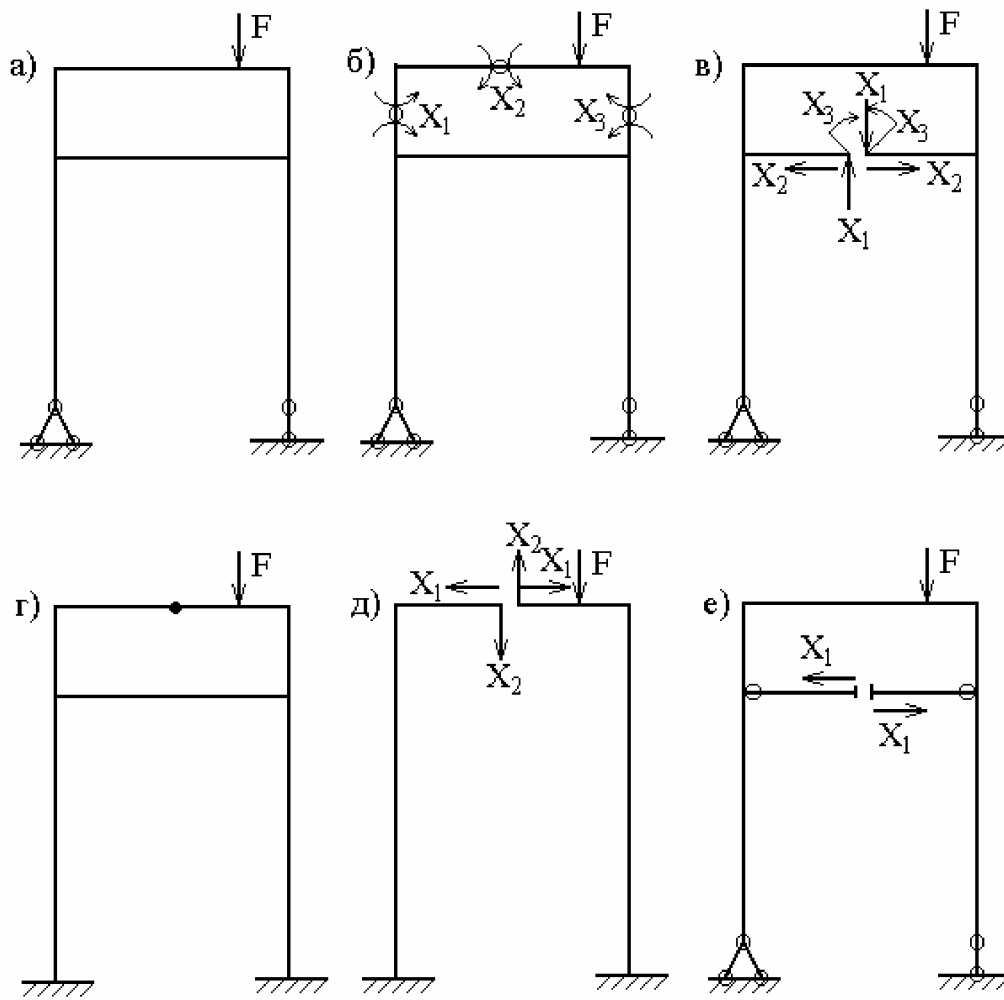


Рис. 35

Связи, при удалении которых система продолжает оставаться геометрически неизменяемой, называются условно необходимыми. Система, у которой удалили такую связь, может являться основной системой метода сил.

### 3.5 ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ И СВОБОДНЫХ ЧЛЕНОВ КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Этому этапу расчета предшествует построение единичных и грузовых эпюр внутренних силовых факторов (для балок и рам – эпюр изгибающих моментов). Единичные эпюры строятся от действия безразмерной единичной силы или безразмерного единичного момента, совпадающих по направлению с

направлением соответствующей лишней неизвестной в эквивалентной системе, и обозначаются через  $\bar{X}_i$ , а единичная эпюра – через  $\bar{M}_i$ .

Грузовая эпюра строится от внешней нагрузки, приложенной к основной системе. При этом можно строить одну эпюру от одновременного действия всех внешних нагрузок или несколько эпюр, отдельно от каждой из приложенных нагрузок. Такое разбиение одной грузовой эпюры на несколько более простых, как правило, целесообразно только тогда, когда среди действующих нагрузок есть равномерно распределенная, и эпюра моментов на соответствующем участке под ней является знакопеременной. При этом в каждом каноническом уравнении число свободных членов будет равно числу построенных грузовых эпюр.

Единичные и грузовые перемещения (коэффициенты и свободные члены канонических уравнений) в общем случае можно вычислить методом Мора. Для балок и рам это можно сделать при помощи правила Верещагина.

### 3.6 УНИВЕРСАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА КОЭФФИЦИЕНТОВ И СВОБОДНЫХ ЧЛЕНОВ КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Для выполнения универсальной проверки необходимо построить суммарную единичную эпюру  $\bar{M}_s$  - эпюру моментов от одновременного действия всех единичных сил, приложенных к основной системе:

$$\bar{M}_s = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n = \sum_{i=1}^n \bar{M}_i$$

Перемножим суммарную единичную эпюру с эпюрой  $\bar{M}_i$ :

$$\begin{aligned} \int_s \frac{\bar{M}_i \cdot \bar{M}_s}{EI} ds &= \int_s \frac{1}{EI} \bar{M}_i (\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n) ds = \\ &= \int_s \frac{1}{EI} \bar{M}_i \bar{M}_1 ds + \int_s \frac{1}{EI} \bar{M}_i \bar{M}_2 ds + \dots + \int_s \frac{1}{EI} \bar{M}_i \bar{M}_n ds = \delta_{i1} + \delta_{i2} + \dots + \delta_{in}. \end{aligned}$$

Таким образом результат перемножения суммарной и  $i$ -ой единичной эпюр - это перемещение по направлению  $i$ -ой связи от совместного действия

единичных лишних неизвестных. Это перемещение равно сумме коэффициентов  $i$ -го канонического уравнения:

$$\delta_{is} = \int_s \frac{\bar{M}_i \bar{M}_s}{EI} ds = \sum_{i=1}^n \delta_{ik}.$$

Такая проверка называется *построчной* и выполняется для каждого канонического уравнения.

Вместо  $n$  построчных проверок чаще всего выполняется одна – *универсальная проверка*, которая состоит в перемножении суммарной единичной эпюры самой на себя и проверке условия:

$$\delta_{ss} = \int_s \frac{\bar{M}_s \bar{M}_s}{EI} ds = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \delta_{ik}. \quad (3.6)$$

Если универсальная проверка выполняется, значит единичные перемещения вычислены правильно; если нет – необходимо выполнить построчные проверки, что позволит уточнить перемещение, при вычислении которого допущена ошибка.

Для выполнения проверки грузовых перемещений необходимо перемножить суммарную единичную и грузовую эпюры изгибающих моментов:

$$\begin{aligned} \int_s \frac{\bar{M}_s M_F}{EI} ds &= \int_s \frac{M_F}{EI} (\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n) ds = \\ &= \int_s \frac{\bar{M}_1 M_F}{EI} ds + \int_s \frac{\bar{M}_2 M_F}{EI} ds + \dots + \int_s \frac{\bar{M}_n M_F}{EI} ds = \\ &\Delta_{1F} + \Delta_{2F} + \dots + \Delta_{nF}. \end{aligned}$$

Таким образом, проверка свободных членов системы канонических уравнений (3.4) состоит в выполнении условия:

$$\Delta_{SF} = \int_s \frac{\bar{M}_s M_F}{EI} ds = \sum_{i=1}^n \Delta_{iF} \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (3.7)$$

### 3.7 ПОСТРОЕНИЕ ОКОНЧАТЕЛЬНЫХ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ

Окончательные эпюры можно построить двумя способами.

Так как при найденных значениях лишних неизвестных  $X_i$  выполняются условия совместности деформаций, то из расчета основной системы можно получить все искомые внутренние усилия заданной системы. На основании принципа независимости действия сил для изгибающих моментов получим:

$$M = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n + M_F,$$

или, учитывая, что

$$M_1 = \bar{M}_1 X_1; M_2 = \bar{M}_2 X_2, \dots, M_n = \bar{M}_n X_n,$$

приходим к выражению:

$$M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_n X_n + M_F = \sum_{i=1}^n \bar{M}_i X_i + M_F. \quad (3.8)$$

Аналогично определяется продольные и поперечные силы:

$$Q = \bar{Q}_1 X_1 + \bar{Q}_2 X_2 + \dots + \bar{Q}_n X_n + Q_F = \sum_{i=1}^n \bar{Q}_i X_i + Q_F, \quad (3.9)$$

$$N = \bar{N}_1 X_1 + \bar{N}_2 X_2 + \dots + \bar{N}_n X_n + N_F = \sum_{i=1}^n \bar{N}_i X_i + N_F. \quad (3.10)$$

Второй способ основан на том, что в результате вычисления реакций лишних связей  $X_i$  исходная статически неопределимая система приведена к статически определимой системе, загруженной внешними нагрузками и реакциями лишних связей. Поэтому окончательные эпюры внутренних силовых факторов можно построить для эквивалентной системы, вычислив предварительно (и то не всегда) из условий равновесия опорные реакции последней.

Недостатком первого способа является то обстоятельство, что для его реализации необходимо дополнительно построить эпюры  $\bar{Q}_i, \bar{N}_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ),

$Q_F$ ,  $N_F$ , которые не используются в расчете методом сил и поэтому не были построены ранее.

В связи с этим для построения окончательных эпюр более рациональным представляется второй способ, а условие (3.8) можно использовать в качестве дополнительной проверки.

### 3.8 ПРОВЕРКА ОКОНЧАТЕЛЬНОЙ ЭПЮРЫ ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ

Эта проверка выполняется в двух вариантах: *статическая* и *кинематическая*.

При статической проверке, выполняемой обычно для рам, вырезаются узлы и записываются условия их равновесия под действием узловых сосредоточенных моментов и изгибающих моментов на концах стержней. Эта проверка является вспомогательной и выполняется автоматически при правильных эпюрах изгибающих моментов в основной системе и при выполнении кинематической проверки.

Статическая проверка эпюр  $Q$  и  $N$  состоит в том, что для любой отсеченной части рамы сумма проекций на две оси всех действующих сил – внешних нагрузок и внутренних усилий – должна быть равна нулю.

Основной проверкой окончательной эпюры моментов в методе сил является кинематическая проверка, которая может быть *построчной* или *универсальной*.

При построчной проверке каждая единичная эпюра моментов  $\bar{M}_i$  перемножается с окончательной эпюрой моментов  $M$ :

$$\begin{aligned} \int_s \frac{\bar{M}_i M}{EI} ds &= \int_s \frac{\bar{M}_i}{EI} (\bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_n X_n + M_F) ds = \\ &= \int_s \frac{\bar{M}_i \bar{M}_1 X_1}{EI} ds + \int_s \frac{\bar{M}_i \bar{M}_2 X_2}{EI} ds + \dots + \int_s \frac{\bar{M}_i \bar{M}_n X_n}{EI} ds + \int_s \frac{\bar{M}_i M_F}{EI} ds = \\ \delta_{i1} X_1 + \delta_{i2} X_2 + \dots + \delta_{in} X_n + \Delta_{iF} &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в результате перемножения каждой единичной эпюры с окончательной эпюрой моментов получим ноль:

$$\Delta_i = \int_s \frac{\bar{M}_i M}{EI} ds = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.11)$$

Вариантом построчной проверки является *проверка по замкнутому контуру*, состоящая в том, что сумма приведенных (т.е. деленных на жесткость соответствующего стержня или его участка) площадей эпюры  $M$ , находящихся внутри каждого замкнутого бесшарнирного контура, должна быть равна сумме приведенных площадей, находящихся снаружи этого контура.

Суммируя выражения типа (3.11) для всех  $n$ , получим выражение, служащее для *универсальной кинематической проверки* окончательной эпюры изгибающих моментов:

$$\Delta_s = \int_s \frac{\bar{M}_s M}{EI} ds = 0, \quad (3.12)$$

т.е. результат перемножения суммарной единичной и окончательной эпюр моментов должен быть равен нулю.

Формулу (3.12) можно интерпретировать следующим образом: условное перемещение эквивалентной, или, что то же самое, заданной системы по направлению всех неизвестных от действия всех неизвестных и внешних нагрузок, равно нулю.

### **3.9 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМАХ**

Для определения перемещения в статически неопределимой системе используется тождественность заданной и эквивалентной систем в том смысле, что если условия совместности деформаций выполняются, т.е. справедливы уравнения (3.4), то перемещения в эквивалентной системе соответствуют перемещениям заданной системы. Тогда, построив для *основной системы* эпюру изгибающих моментов  $\bar{M}$  от единичной силы (или единичного момента)



приложенной в направлении искомого перемещения, величину перемещения находим по формуле:

$$\Delta = \int_s \frac{\overline{MM}}{EI} ds, \quad (3.13)$$

где  $M$  – эпюра изгибающих моментов от внешней нагрузки, построенная для статически неопределимой системы.

Отметим, что при вычислении перемещения  $\Delta$  можно поступить и наоборот: единичную эпюру моментов  $\overline{M}$  построить в статически неопределимой заданной системе, а эпюру моментов от внешних нагрузок  $M$  – в основной (статически определимой) системе.

### 3.10 РАСЧЕТ СИММЕТРИЧНЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ

Использование метода сил для расчета систем с высокой степенью статической неопределимости связано с решением совместной системы большого количества линейных уравнений. Даже самый экономичный метод решения таких систем – алгоритм Гаусса – требует  $n^3$  вычислительных операций (где  $n$  – число уравнений, т.е. степень статической неопределимости системы), при условии, что все коэффициенты системы отличны от нуля. В связи с этим нужно стремиться так выбрать основную систему, чтобы возможно большее число побочных единичных перемещений  $\delta_{ik}, (i \neq k)$  и свободных членов  $\Delta_{iF}$  обратилось в ноль.

Основным средством для достижения этой цели является использование симметрии. Стержневая система является симметричной, если симметричны не только оси и опорные закрепления (геометрическая симметрия), но и жесткости (упругая симметрия). При этом внешняя нагрузка может быть и несимметричной.

При выборе основной системы лишние неизвестные следует выбирать в виде симметричных и обратно симметричных усилий. Симметричные неизвестные создают симметричные эпюры моментов, а обратно симметричные

неизвестные – кососимметричные эпюры. Такие эпюры обладают свойством взаимной ортогональности, т.е. результат их перемножения равен нулю:

$$\delta_{ik} = \sum_1^n \int_{s_0}^{s_i} \frac{\overline{M}_i \overline{M}_k}{EI} ds = 0. \quad (3.14)$$

Ортогонализация эпюр может достигаться различными способами:

1) выбор симметричной основной системы; 2) выбор симметричных и обратносимметричных неизвестных; 3) группировка неизвестных; 4) устройство жестких консолей (способ упругого центра); 5) использование статически неопределимой основной системы; 6) разложение произвольной нагрузки на симметричную и обратносимметричную составляющие.

Использование большинства этих способов будет рассмотрено ниже на конкретных примерах, здесь же охарактеризуем только *способ*, заключающийся в применении *статически неопределимой основной системы*. Для расчета статически неопределимой системы можно отбрасывать не все лишние неизвестные, а одно или несколько. При этом уменьшается число канонических уравнений. Так, рассчитывая  $n$  раз статически неопределимую систему, можно не решать  $n$  уравнений, если в качестве основной системы применять систему со степенью статической неопределимости  $n - 1$ . Для определения усилия в  $i$ -ой удаленной связи достаточно решить лишь одно уравнение:

$$\delta_{ii} X_i + \Delta_{iF} = 0,$$

где  $\delta_{ii}$  и  $\Delta_{iF}$  - перемещения по направлению  $X_i$  в основной,  $(n-1)$  раз статически неопределимой системе, вызываемые усилием  $\overline{X}_i = 1$  и внешней нагрузкой соответственно.

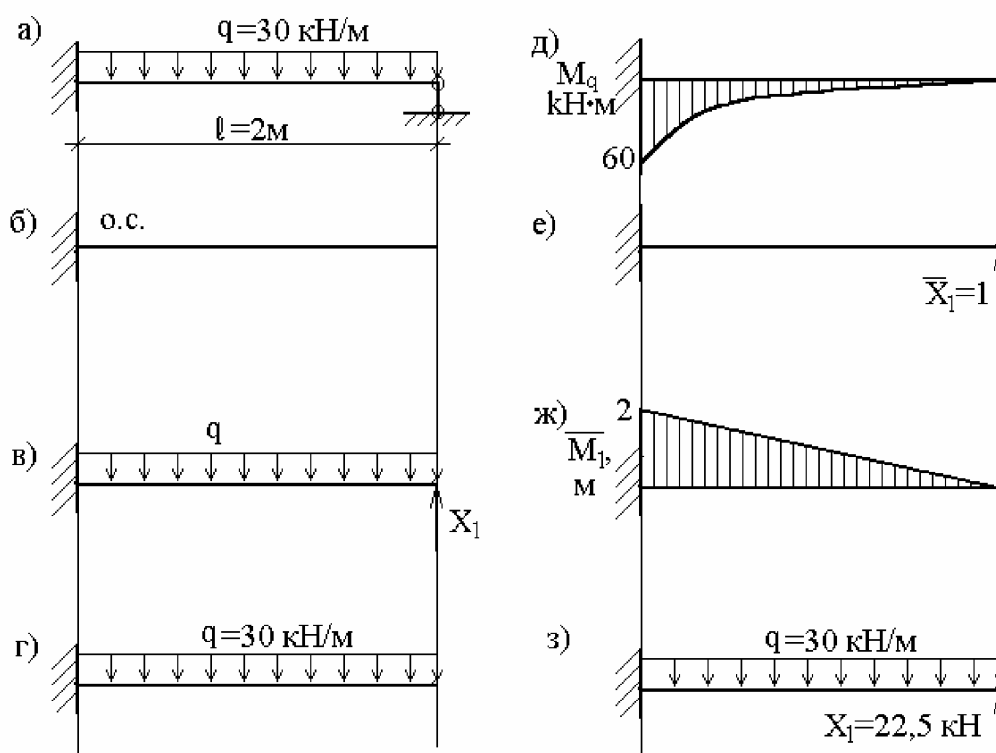
Следовательно, рассматриваемый способ требует, чтобы предварительно были вычислены все необходимые перемещения в статически неопределимой основной системе. Для этого необходимо заранее иметь эпюры внутренних усилий от действия на статически неопределимую основную систему единичных неизвестных и заданной внешней нагрузки. Если же таких эпюр нет,

то расчет не только не упростится, но даже может усложниться. Это обстоятельство резко ограничивает практическую область применения рассмотренного способа.

### 3.10 ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ

Рассмотрим приведенный выше алгоритм расчета различных систем методом сил на конкретных примерах статически неопределимых балок и плоских рам.

**Пример 18.** Построить эпюру изгибающих моментов для статически неопределимой балки (рис.36,а).



**Рис. 36**

Степень статической неопределимости балки:

$$n = r - s = 3 - 2 = 1.$$

Основная и эквивалентная система приведены на рис.36,б,в. Так выбор основной системы является наиболее рациональным, но не единственным. Можно было, например, заменить жесткую заделку на шарнирнонеподвижную опору; тогда основная система представляла бы собой статически определимую шарнирную балку, а лишняя неизвестная – сосредоточенный момент  $X$ , приложенный к левой опоре.

Эпюра изгибающих моментов от внешней нагрузки  $M_q$  (рис.36,д) имеет размерность Кн·м, а единичная эпюра моментов  $\overline{M}_1$  (рис.36,ж) - м.

Каноническое уравнение метода сил:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1q} = 0.$$

Вычисляем коэффициенты  $\delta_{11}$  и  $\Delta_{1q}$ , перемножая соответствующие эпюры по правилу Верещагина:

$$\delta_{11} = \int_0^l \frac{\overline{M}_1}{EI} ds = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{8}{3EI};$$

$$\Delta_{1q} = \int_0^l \frac{\overline{M}_1 M_q}{EI} dz = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot 60 \cdot 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot 2 = -\frac{60}{EI}.$$

Реакция лишней связи:

$$\frac{8}{3EI} X_1 - \frac{60}{EI} = 0;$$

$$X_1 = 22,5 \text{ кН}.$$

Таким образом, исходная статически неопределимая система, нагруженная распределенной нагрузкой  $q$ , приведена к статически определимой системе (жестко защемленная балка), нагруженной распределенной нагрузкой  $q$  и сосредоточенной силой  $X_1$  (рис.36, з).

На рис.37,а,б представлены эпюры поперечных сил  $Q_y$  и изгибающих моментов  $M_x$  для заданной системы.

Отметим, что эпюры  $Q_y$  и  $M_x$  (рис.37) построены непосредственно методом сечений, причем по условиям задачи построение эпюры  $Q_y$  не является обязательным. Тем не менее эта эпюра позволила определить сечение, в котором будет экстремум на эпюре  $M_x$ .

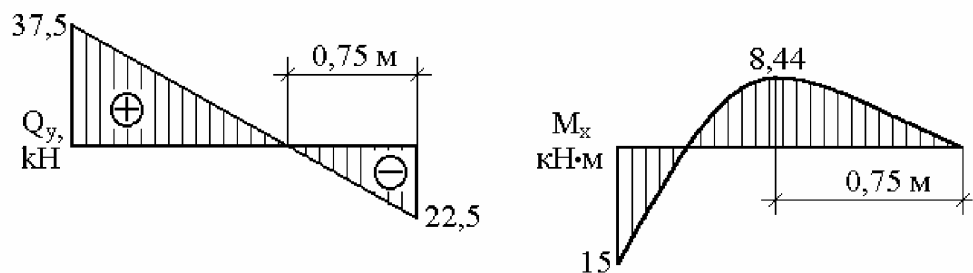


Рис. 37

Использование формулы (3.8) в виде:

$$M_x = \bar{M}_1 X_1 + M_q \quad (3.8)$$

не дает ответа на вопрос о месте нахождения экстремума и делает правильное построение эпюры  $M_x$  более сложной задачей, требующей определенных навыков.

**Пример 19.** Построить эпюры продольных, поперечных сил и изгибающих моментов для плоской рамы (рис.38,а).

Степень статической неопределимости рамы:

$$n = r - s = 4 - 3 = 1$$

Выбираем основную систему, отбрасывая на правой опоре горизонтальный стержень (рис.38,б), т.е. заменяем шарнирно-неподвижную опору на шарнирно-подвижную. На базе основной системы формируем эквивалентную систему (рис.38,в).

Заменяя реакцию лишней связи соответствующей единичной силой, (рис. 38,г) строим эпюру моментов  $\bar{M}_1$  (рис.38,д).

Грузовая эпюра моментов  $M_F^0$  (рис.38,ж), построенная от одновременного действия всех внешних нагрузок (рис.38,е), является знакопеременной на участке, где действует нагрузка  $q$ . Это создает определенные трудности (хотя и не непреодолимые!) при ее перемножении с единичной эпюрой  $\bar{M}_1$ . В связи с этим целесообразно построить две грузовых эпюры – отдельно от нагрузки  $q$  (эпюра  $M_q$ ) и от совместного действия  $F$  и  $M$  (эпюра  $M_F$ ). Эти варианты нагружения и эпюры представлены на рис.38,з и рис.39,а,б,в.

При таком разбиении внешней нагрузки каноническое уравнение метода сил содержит два грузовых перемещения и имеет вид:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1q} + \Delta_{1F} = 0.$$

Вычислим коэффициенты канонического уравнения:

$$\delta_{11} = \frac{\bar{M}_1^2}{EI} = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 \right) = \frac{75}{EI};$$

$$\Delta_{1q} = \frac{M_q \bar{M}_1}{EI} = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot 20 \cdot 4 \cdot 2,5 = -\frac{133,33}{EI};$$

$$\Delta_{1F} = \frac{M_F \bar{M}_1}{EI} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{4}{6} (2 \cdot 5 \cdot 60 - 40 \cdot 5) + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 60 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{5+3}{2} \cdot 2 \cdot 60 \right] = \frac{926,66}{EI}.$$

Реакция лишних связи:

$$75X_1 = -926,66 + 133,33;$$

$$X_1 = -10,58 \text{ кН}$$

Эпюры  $N_z$ ,  $Q_y$ ,  $M_x$  для заданной системы, загруженной нагрузками  $F$ ,  $M$ ,  $q$  и  $X_1$  (рис.39,г) представлены на рис.39,д,е,ж.

Как уже говорилось в гл.1, при построении эпюр  $N_z$  и  $Q$  в рамках ординаты можно откладывать в любую сторону, но обязательно указывать знаки; а при построении эпюр  $M_x$  знаки можно не указывать, но обязательно откладывать ординаты со стороны сжатых волокон соответствующих элементов.

В обоих рассмотренных примерах универсальная проверка правильности вычисления коэффициентов канонического уравнения и свободных членов не

выполнялась, так как балка (пример 18) и рама (пример 19) имеют степень статической неопределенности  $n = 1$ , а, значит, суммарная единичная эпюра  $\overline{\overline{M}}_s$  (если ее построить) совпадет с единичной эпюрой  $\overline{\overline{M}}_1$ . В этом случае можно (и желательно!) проверить правильность выполнения расчета при помощи универсальной кинематической проверки окончательной эпюры моментов  $M_x$ .

Выполним эту проверку для рамы, рассмотренной в последнем примере (рис.38,а). Должно выполняться условие:

$$\Delta = \frac{\overrightarrow{\overline{\overline{M}}_1 M_x}}{EI} = 0.$$

Покажем отдельно фрагменты перемножаемых эпюр (рис.38,д и рис.39,ж) для ригеля (рис.40,а,б) и стойки (рис.40,в,г) с указанием всех характерных размеров и соответствующих им ординат. Причем стойка (на рис.40,в,г) показана в горизонтальном положении.

Точка пересечения кривой на ригеле эпюры  $M_x$  с осью (рис.40,б) определяется следующим образом. Обозначим координату произвольного сечения, отсчитываемую от правого конца ригеля, через  $z$ , тогда момент  $M_x$  определяется в виде:

$$M_x(z) = M + R_B \cdot z - q \frac{z^2}{2}.$$

Пересечение с осью означает, что в этом сечении  $M_x(z) = 0$ , поэтому подставляя числовые значения, для определения  $z$  при  $M_x = 0$  получим квадратное уравнение:

$$40 + 8,22 \cdot z - 10 \cdot \frac{z^2}{2} = 0,$$

откуда  $z = 3,77 м$  (второй корень этого уравнения лишен физического смысла).

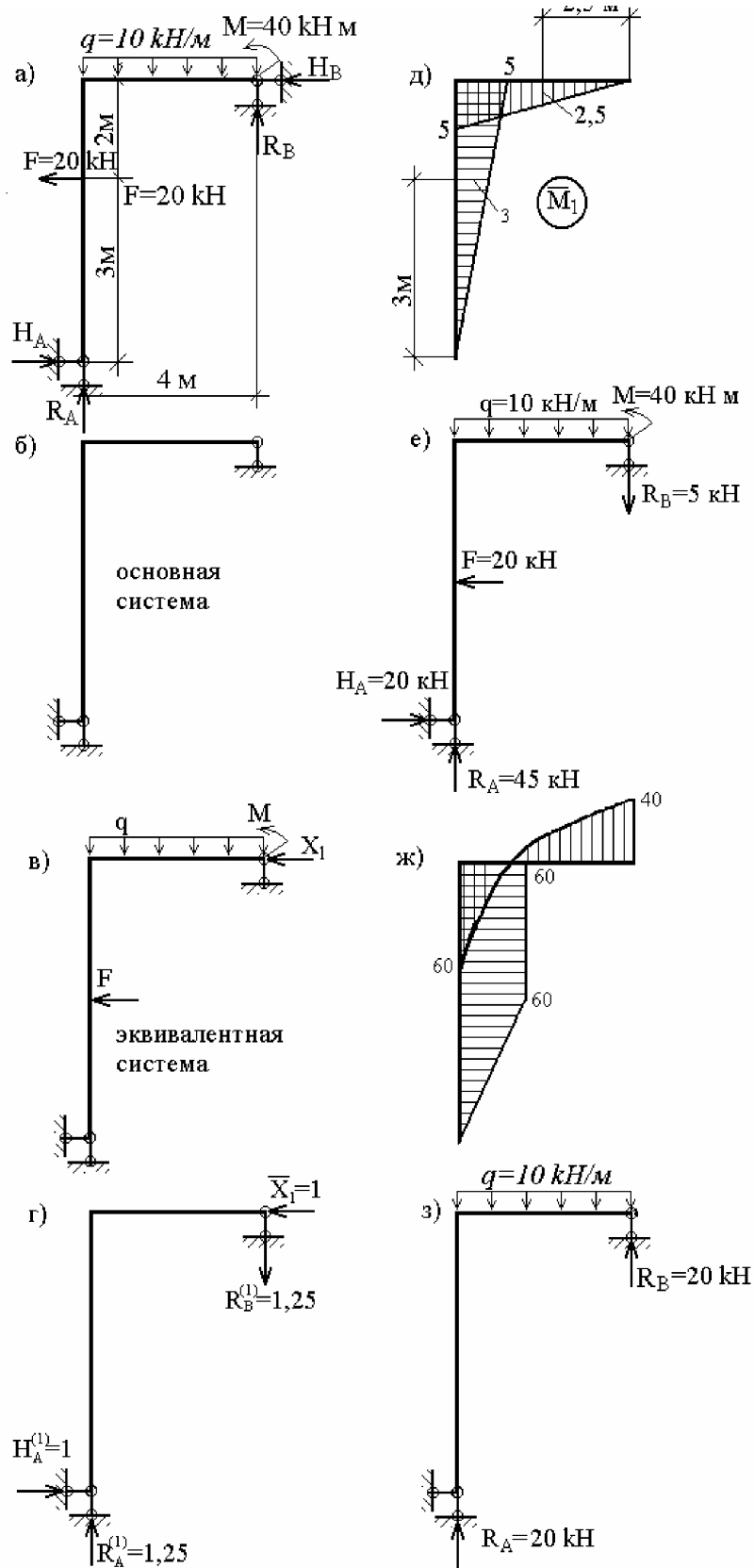


Рис. 38



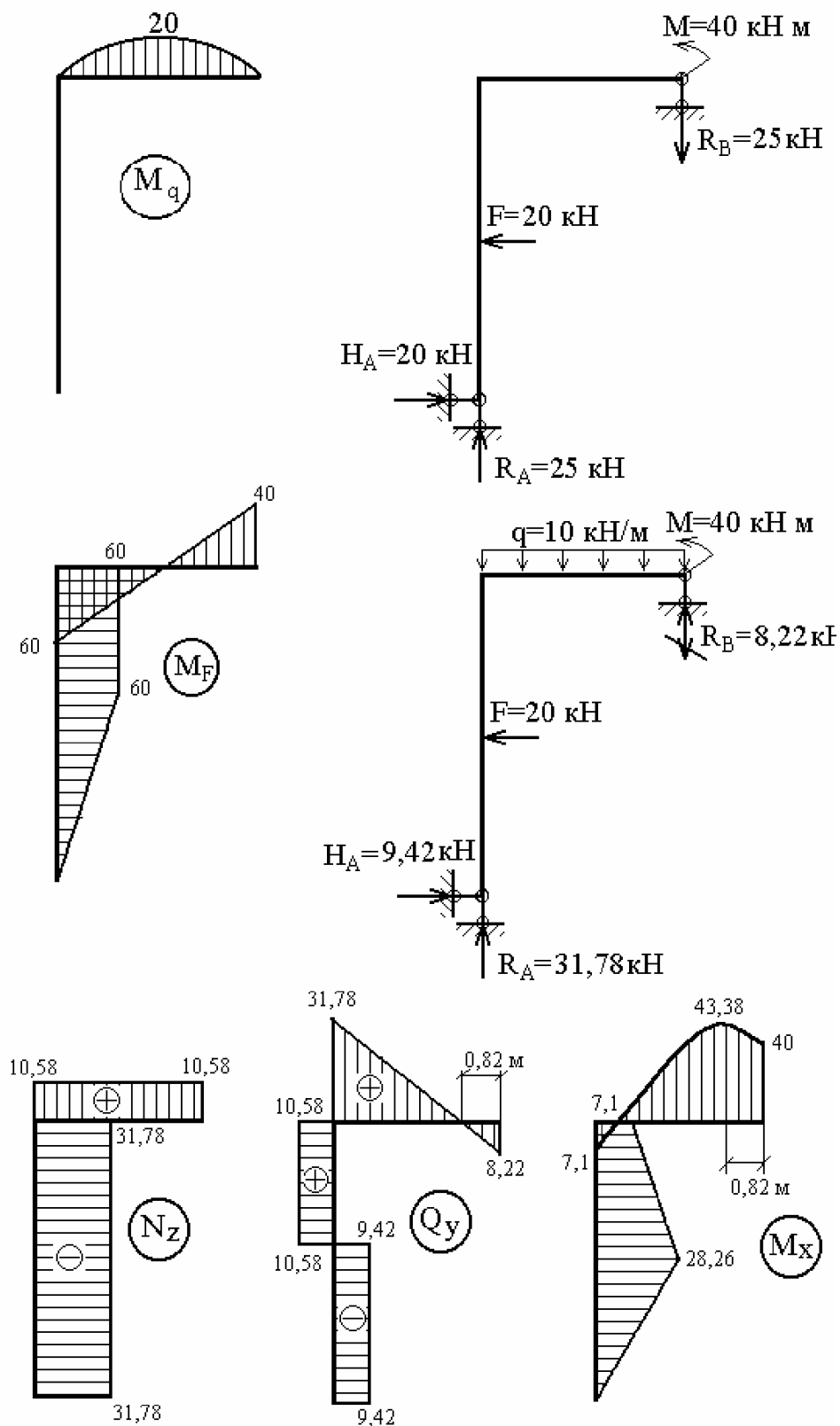


Рис. 39

$$\Delta = \left[ \frac{1}{3} \cdot 7,1 \cdot 0,23 \cdot \left( \frac{3}{4} \cdot 0,29 + 4,71 \right) - \frac{2}{3} \cdot 43,38 \cdot 2,95 \cdot \left( \frac{3}{8} \cdot 3,69 + 1,02 \right) - \frac{2}{3} \cdot 3,38 \cdot 0,82 \cdot \frac{5}{8} \cdot 1,02 - \frac{1}{2} \cdot 1,02 \cdot 0,82 \cdot 40 + \frac{2}{6} (2 \cdot 7,1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \cdot 28,26 + 7,1 \cdot 3 + 5 \cdot 28,26) + \frac{1}{2} \cdot 28,26 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right] \cdot \frac{1}{EI} = -\frac{0,1}{EI} \approx 0,$$

следовательно, расчет выполнен правильно.

Перейдем к рассмотрению более сложной системы – рамы с двумя лишними связями, для которой алгоритм расчета, приведенный в параграфе 3.3, можно реализовать в полном объеме.

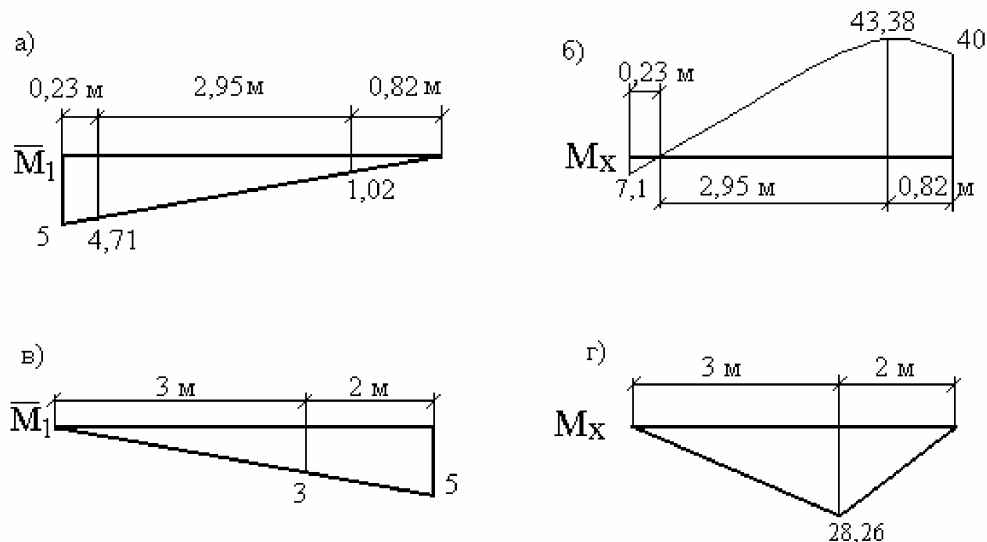


Рис. 40

**Пример 20.** Для рамы (рис.41,а) построить эпюры  $N_z, Q_y, M_x$ . Выполнить промежуточные и окончательные проверки в соответствии с алгоритмом расчета, указанным в параграфе 3.3.

Заданная рама имеет в опорных закреплениях пять связей: две в опоре 1 и три в опоре 2, следовательно, система дважды статически неопределима:

$$n = r - s = 5 - 3 = 2$$

Основную систему целесообразно выбрать путем удаления шарнирной опоры (рис.41,б). Соответствующая эквивалентная система изображена на рис.41,в.

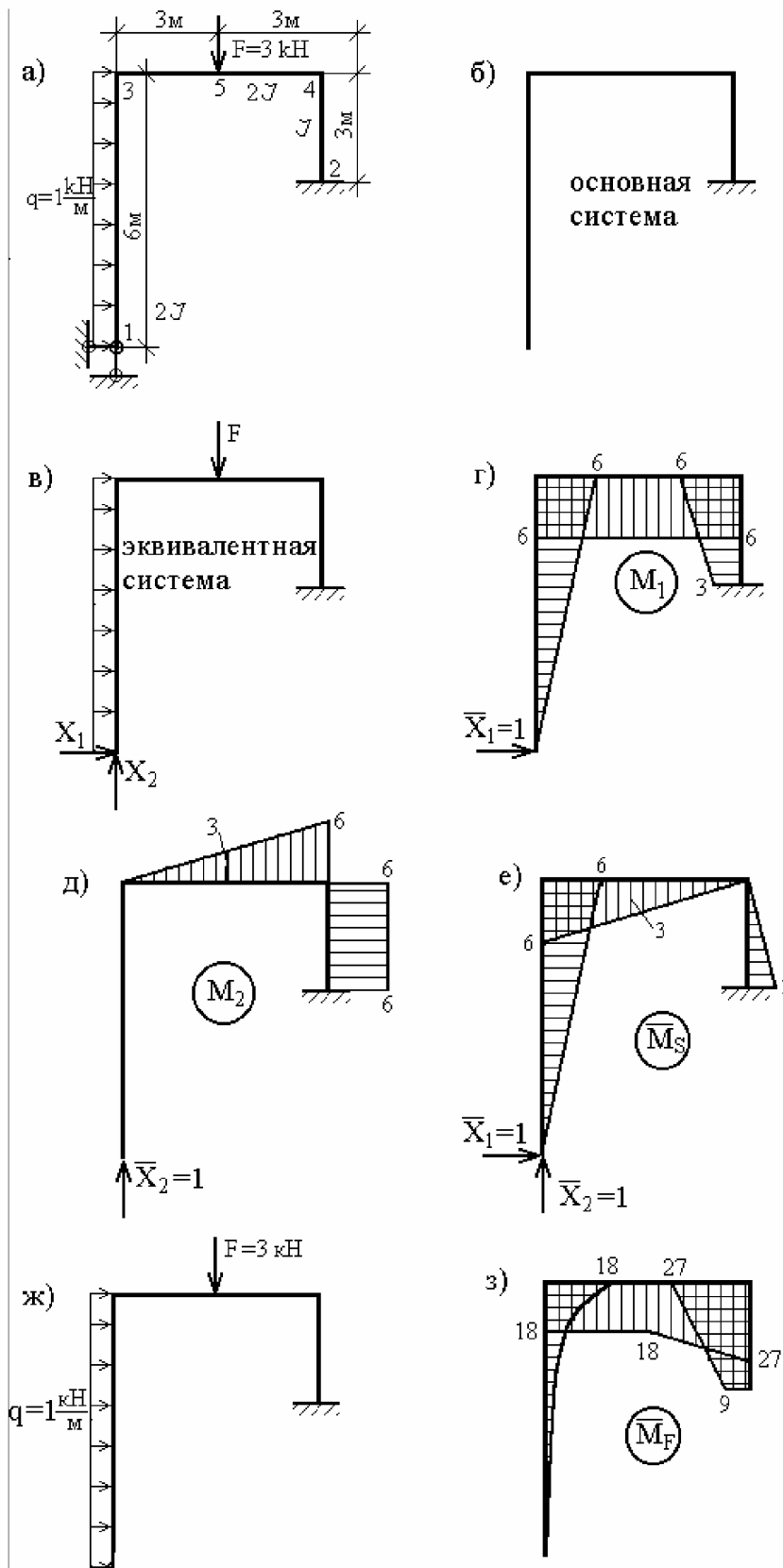


Рис. 41

Система канонических уравнений:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0. \end{cases}$$

Для вычисления коэффициентов и свободных членов канонических уравнений строим единичные ( $\bar{M}_1$ ,  $\bar{M}_2$ , рис.41,г,д) и грузовую ( $M_F$ , рис.41, ж,з) эпюры изгибающих моментов, а для выполнения проверок – суммарную единичную эпюру  $\bar{M}_s$  (рис.41,е).

Коэффициенты системы канонических уравнений вычисляем путем перемножения соответствующих эпюр по правилу Верещагина. При этом обязательно учитываем разную жесткость элементов рамы ( $E2I$  – на левой стойке ригеля;  $EI$  – на правой стойке).

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \sum \int_s \frac{\bar{M}_1^2}{EI} ds = \frac{1}{E2I} \left( \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + 6 \cdot 6 \cdot 6 \right) + \\ &+ \frac{1}{EI} \cdot \frac{3}{6} (2 \cdot 6 \cdot 6 + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 6 \cdot 3 + 3 \cdot 6) = \frac{207}{EI}; \\ \delta_{12} = \delta_{21} &= \sum \int_s \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{EI} ds = -\frac{1}{E2I} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 - \frac{1}{EI} \cdot \frac{6+3}{2} \cdot 3 \cdot 6 = -\frac{135}{EI}; \\ \delta_{22} &= \sum \int_s \frac{\bar{M}_2^3}{EI} ds = \frac{1}{E2I} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{EI} \cdot 6 \cdot 3 \cdot 6 = \frac{144}{EI} \\ \Delta_{1F} &= \sum \int_s \frac{M_F \bar{M}_1}{EI} ds = \frac{1}{E2I} \left( \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 6 \cdot \frac{3}{4} \cdot 6 + 18 \cdot 3 \cdot 6 + \frac{18+27}{2} \cdot 3 \cdot 6 \right) + \\ &+ \frac{1}{EI} \cdot \frac{3}{6} (2 \cdot 3 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 27 + 6 \cdot 9 + 3 \cdot 27) = \frac{702}{EI}; \\ \Delta_{2F} &= \sum \int_s \frac{M_F \bar{M}_2}{EI} ds = -\frac{1}{E2I} \left[ \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 18 + \frac{3}{6} (2 \cdot 3 \cdot 18 + 2 \cdot 6 \cdot 27 + 3 \cdot 27 + 6 \cdot 18) \right] - \\ &- \frac{1}{EI} \cdot \frac{27+9}{2} \cdot 3 \cdot 6 = -\frac{520}{EI}. \end{aligned}$$

Для проверки вычисленных коэффициентов при неизвестных и свободных членов канонических уравнений используем суммарную единичную эпюру  $\bar{M}_s$  (рис. 41,е).

Должны выполняться два условия:

$$1) \delta_{11} + 2\delta_{12} + \delta_{22} = \delta_{ss};$$

$$2) \Delta_{1F} + \Delta_{2F} = \Delta_{SF}.$$

Вычисляем величины  $\delta_{ss}$  и  $\Delta_{SF}$ .

$$\delta_{ss} = \sum \int_s \frac{\bar{M}_s^2}{EI} ds = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 2 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{81}{EI};$$

$$\Delta_{SF} = \sum \int_s \frac{M_F \bar{M}_s}{EI} ds = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 6 \cdot \frac{3}{4} \cdot 6 + \frac{6+3}{2} \cdot 3 \cdot 18 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \left( \frac{1}{3} \cdot 9 + 18 \right) \right] - \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \left( \frac{1}{3} \cdot 18 + 9 \right) = \frac{182}{EI}.$$

$$1) \delta_{11} + 2\delta_{12} + \delta_{22} = \frac{1}{EI} (207 - 2 \cdot 135 + 144) = \frac{81}{EI} = \delta_{ss}$$

$$2) \Delta_{1F} + \Delta_{2F} = \frac{1}{EI} (702 - 520) = \frac{182}{EI} = \Delta_{SF},$$

таким образом, коэффициенты при неизвестных и свободные члены канонических уравнений вычислены правильно.

Вычисляем реакции лишних связей:

$$\begin{cases} 207X_1 - 135X_2 + 702 = 0; \\ -135X_1 + 144X_2 - 520 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = -2.67 \text{ кН} \\ X_2 = 1.11 \text{ кН} \end{cases}$$

Строим эпюры продольных ( $N_z$ ) и поперечных ( $Q_y$ ) сил и изгибающих моментов ( $M_x$ ) для заданной системы с учетом вычисленных реакций лишних связей (рис.43,а-г).

Для выполнения статической проверки необходимо вырезать жесткие узлы рамы 3 и 4 (рис.43,а) и убедиться в справедливости условий равновесия для каждого из них.

Условия равновесия для узла 3 (рис.42,а):

- 1)  $\sum X = 3,33 - 3,33 = 0;$
- 2)  $\sum Y = -1,11 + 1,11 = 0;$
- 3)  $\sum M_3 = 2 - 2 = 0.$

Условия равновесия для узла 4 (рис.42,б):

- 1)  $\sum X = 3,33 - 3,33 = 0;$
- 2)  $\sum Y = 1,89 - 1,89 = 0;$
- 3)  $\sum M_4 = 4,4 - 4,4 = 0.$

Таким образом, статическая проверка выполняется.

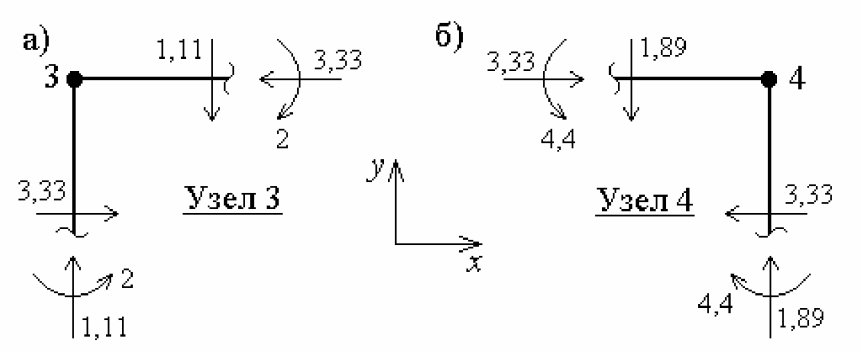


Рис. 42

Для выполнения кинематической проверки перемножим суммарную единичную эпюру  $\bar{M}_s$  (рис.41,е) и окончательную эпюру изгибающих моментов  $M_x$  (рис.43,г):

$$\Delta_s = \sum \int_s \frac{M_x \bar{M}_s}{EI} ds = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{2}{3} \cdot 3,56 \cdot 5,34 \cdot 2,67 + \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 0,66 \left( \frac{2}{3} \cdot 0,66 + 5,34 \right) + \frac{3}{6} (2 \cdot 2 \cdot 6 - 2 \cdot 1,3 \cdot 3 - 6 \cdot 1,3 + 2 \cdot 3) + \frac{3}{6} (2 \cdot 3 \cdot 5,6 - 3 \cdot 4,4) \right] = -\frac{0,08}{EI} \approx 0,$$

следовательно, все проверки метода сил выполняются, и расчет проделан правильно.



Из многих возможных вариантов выбора основной системы наиболее целесообразным, максимально упрощающим расчет, является вариант, представленный на рис.44,б, полученный путем разрезания каждого из ригелей посередине пролета. Так как разрез стержня приводит к появлению трех неизвестных факторов (двух сил и момента), то эквивалентная система (рис.44,в) будет состоять из двух жестко заземленных рам, одна из которых загружена только неизвестными реакциями, а другая – такими же (по величине) реакциями и внешней нагрузкой.

Указанный выбор основной системы позволяет не только получить простые единичные эпюры (рис.44,г-и), но, что особенно важно, при этом целый ряд побочных коэффициентов системы канонических уравнений обращается в ноль. Это те коэффициенты, которые получаются путем перемножения симметричной и кососимметричной эпюр:

$$\delta_{12} = \delta_{15} = \delta_{23} = \delta_{24} = \delta_{26} = \delta_{35} = \delta_{45} = \delta_{56} = 0.$$

В силу теоремы о взаимности перемещений число нулевых коэффициентов удваивается. В результате формально записанная система канонических уравнений распадается на две самостоятельных системы:

$$I) \begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{13} X_3 + \delta_{14} X_4 + \delta_{16} X_6 + \Delta_{1q} = 0; \\ \delta_{31} X_1 + \delta_{33} X_3 + \delta_{34} X_4 + \delta_{36} X_6 + \Delta_{3q} = 0; \\ \delta_{41} X_1 + \delta_{43} X_3 + \delta_{44} X_4 + \delta_{46} X_6 + \Delta_{4q} = 0; \\ \delta_{61} X_1 + \delta_{63} X_3 + \delta_{64} X_4 + \delta_{66} X_6 + \Delta_{6q} = 0. \end{cases}$$

$$II) \begin{cases} \delta_{22} X_2 + \delta_{25} X_5 + \Delta_{2q} = 0; \\ \delta_{52} X_2 + \delta_{55} X_5 + \Delta_{5q} = 0. \end{cases}$$

Вычисление коэффициентов этих систем уравнений (с обязательным учетом соотношения жесткостей элементов) приводит к следующим результатам:

$$\delta_{11} = \left[ \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{E2I} \cdot \frac{6}{6} (2 \cdot 4 \cdot 4 + 2 \cdot 10 \cdot 10 + 4 \cdot 10 + 10 \cdot 4) \right] \cdot 2 = \frac{354,7}{EI};$$



$$\delta_{13} = \delta_{31} = \left( \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 1 + \frac{1}{E2I} \cdot \frac{10+4}{2} \cdot 6 \cdot 1 \right) \cdot 2 = \frac{58}{EI};$$

$$\delta_{14} = \delta_{41} = \frac{1}{E2I} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 6 + 4 \right) \cdot 2 = \frac{144}{EI};$$

$$\delta_{16} = \delta_{61} = \frac{1}{E2I} \cdot \frac{10+4}{2} \cdot 6 \cdot 1 \cdot 2 = \frac{42}{EI};$$

$$\delta_{33} = \frac{1}{E2I} (1 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 6 \cdot 1) \cdot 2 + \frac{1}{EI} \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 = \frac{17}{EI};$$

$$\delta_{34} = \delta_{43} = \frac{1}{E2I} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 2 = \frac{18}{EI};$$

$$\delta_{36} = \delta_{63} = \frac{1}{E2I} \cdot 1 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 2 = \frac{6}{EI};$$

$$\delta_{44} = \frac{1}{E2I} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 2 = \frac{72}{EI};$$

$$\delta_{46} = \delta_{64} = \frac{1}{E2I} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 2 = \frac{18}{EI};$$

$$\delta_{66} = \left( \frac{1}{E2I} \cdot 1 \cdot 6 \cdot 1 + \frac{1}{E4I} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 \right) \cdot 2 = \frac{7,5}{EI};$$

$$\delta_{22} = \left[ \frac{1}{E2I} \left( 3 \cdot 6 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right) + \frac{1}{EI} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \right] \cdot 2 = \frac{135}{EI};$$

$$\delta_{25} = \delta_{52} = \frac{1}{E2I} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2 = \frac{54}{EI};$$

$$\delta_{55} = \left( \frac{1}{E2I} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 3 + \frac{1}{E4I} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right) \cdot 2 = \frac{58,5}{EI};$$

$$\Delta_{1q} = - \left( \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 9 + \frac{1}{E2I} \cdot \frac{10+4}{2} \cdot 6 \cdot 9 \right) = - \frac{261}{EI};$$

$$\Delta_{2q} = - \frac{1}{E2I} \left( \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 3 \cdot \frac{3}{4} \cdot 3 + 3 \cdot 6 \cdot 9 \right) - \frac{1}{EI} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 9 = - \frac{199,12}{EI};$$

$$\Delta_{3q} = - \frac{1}{E2I} \left( \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 3 \cdot 1 + 9 \cdot 6 \cdot 1 \right) - \frac{1}{EI} \cdot 9 \cdot 4 \cdot 1 = - \frac{67,5}{EI};$$

$$\Delta_{4q} = - \frac{1}{E2I} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 9 = - \frac{81}{EI};$$

$$\Delta_{5q} = - \frac{1}{E2I} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 9 = - \frac{81}{EI};$$

$$\Delta_{6q} = - \frac{1}{E2I} \cdot 1 \cdot 6 \cdot 9 = - \frac{27}{EI};$$

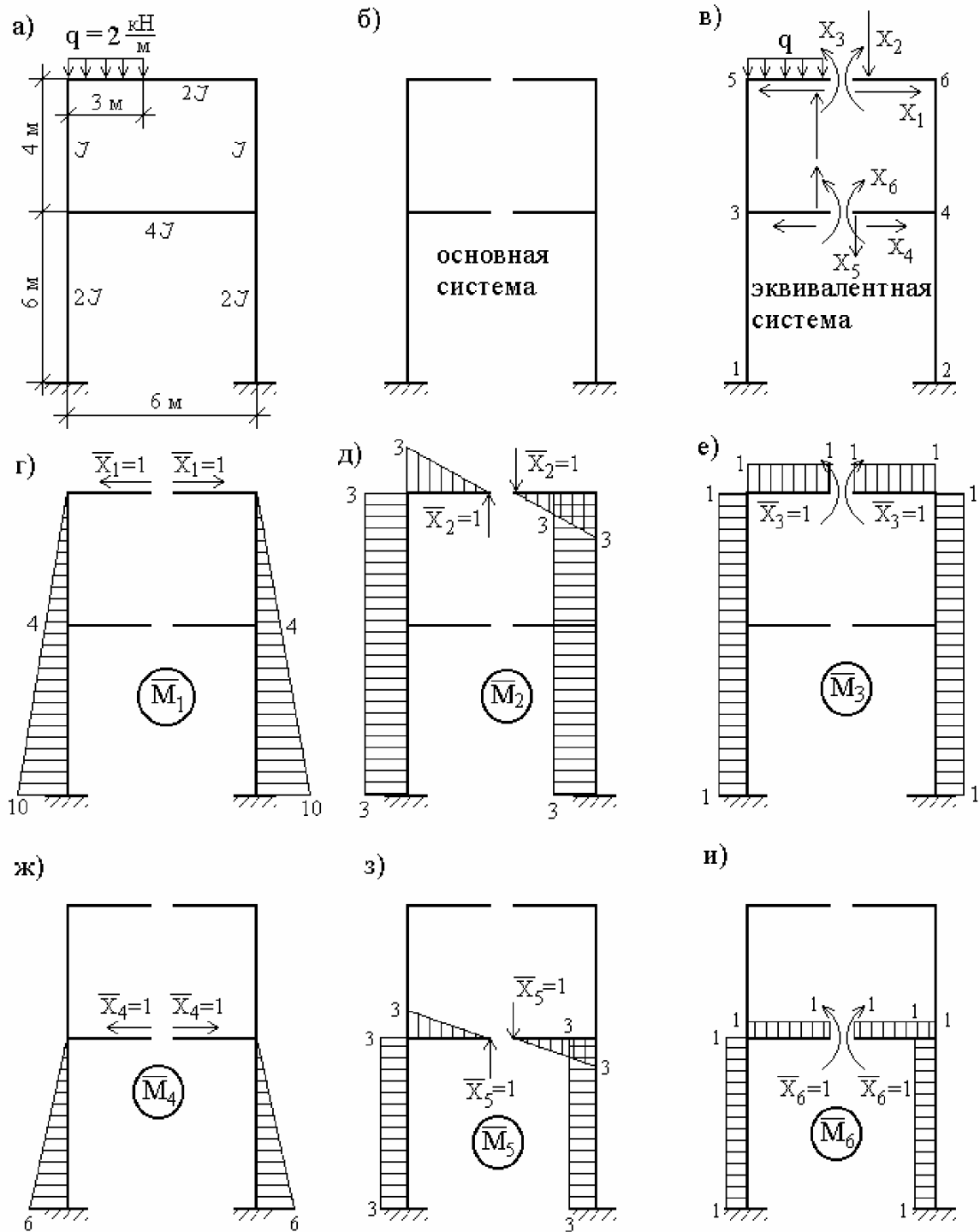


Рис. 44

Для выполнения проверки вычисленных перемещений строим суммарную единичную эпюру  $\overline{M}_s$  от одновременного действия шести единичных факторов (рис.45,б).

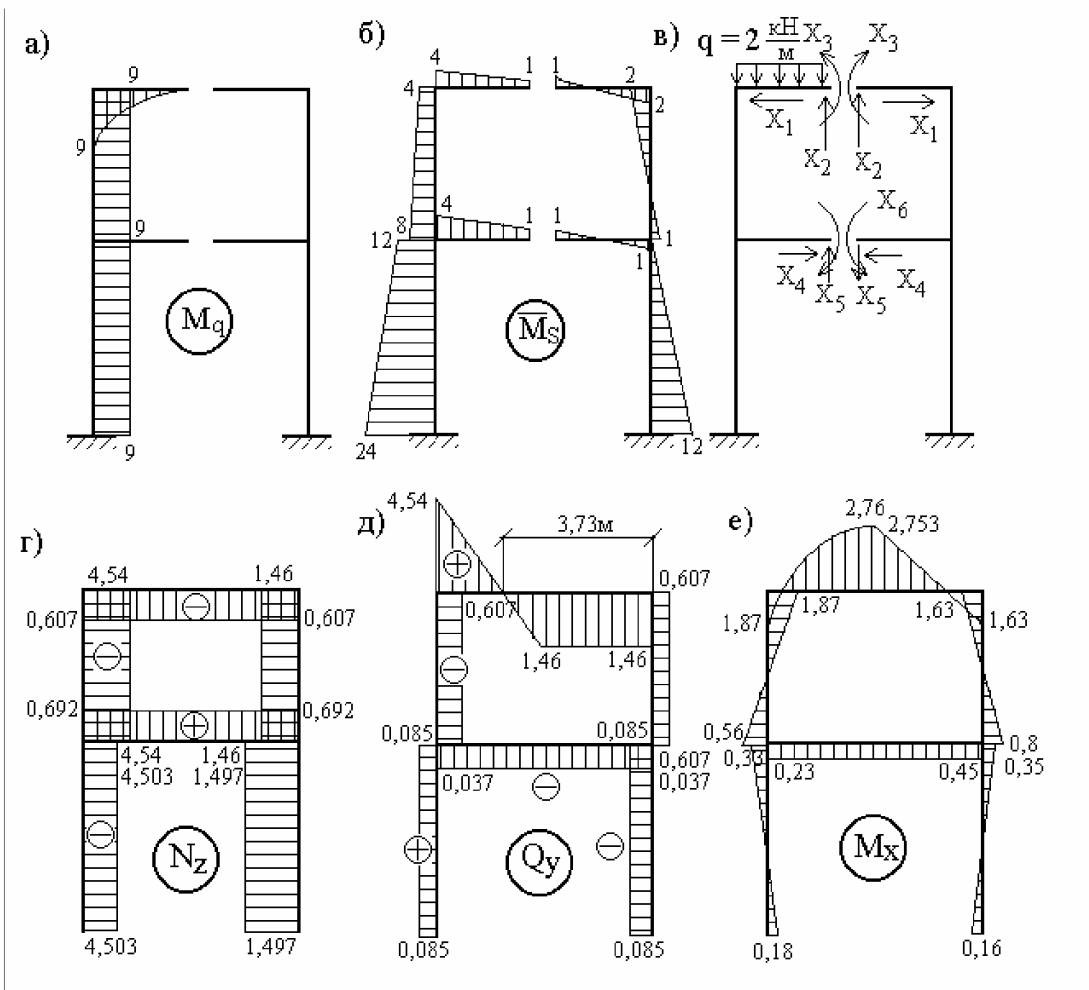
Вычисляем коэффициенты  $\delta_{ss}$  и  $\Delta_{sq}$ :

$$\begin{aligned} \delta_{ss} &= \sum_s \int_s \frac{\overline{M}_s^2}{EI} ds = \frac{1}{EI} \left[ \frac{3}{6} (2 \cdot 4 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 1) + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 2 \right] + \\ &+ \frac{1}{E2I} \left[ \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{3}{6} (2 \cdot 4 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + \right. \\ &+ 2 \cdot 4 \cdot 1) + \frac{6}{6} (2 \cdot 12 \cdot 12 + 2 \cdot 24 \cdot 24 + 2 \cdot 12 \cdot 24) \left. \right] + \frac{1}{EI} \left[ \frac{4}{6} (2 \cdot 4 \cdot 4 + 2 \cdot 8 \cdot 8 + \right. \\ &+ 2 \cdot 4 \cdot 8) + \frac{4}{6} (2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 2) \left. \right] = \frac{1324,7}{EI}; \\ \Delta_{sq} &= \sum_s \int_s \frac{M_q \overline{M}_s}{EI} ds = -\frac{1}{E2I} \left[ \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 3 \cdot \left( \frac{3}{4} \cdot 3 + 1 \right) + \frac{12 + 24}{2} \cdot 6 \cdot 9 \right] - \\ &- \frac{4 + 8}{2} \cdot 4 \cdot 9 \cdot \frac{1}{EI} = -\frac{716,62}{EI}. \end{aligned}$$

Выполняем проверку:

$$\begin{aligned} 1) \sum_{i,j=1}^6 \delta_{ij} &= \frac{1}{EI} [354,7 + 17 + 72 + 7,5 + 135 + 58,5 + 2(58 + 144 + \\ &42 + 18 + 6 + 18 + 54)] = \frac{1324,7}{EI} \delta_{ss}; \\ 2) \sum_{i=1}^6 \Delta_{iq} &= \frac{1}{EI} (-261 - 199,12 - 67,5 - 81 - 81 - 27) = \frac{716,62}{EI} = \Delta_{sq}, \end{aligned}$$

следовательно, коэффициенты и свободные члены систем канонических уравнений вычислены правильно.



**Рис. 45**

Подставляя вычисленные значения перемещений, получим системы канонических уравнений I и II в виде:

$$\text{I. } \begin{cases} 354,7X_1 + 58X_3 + 144X_4 + 42X_6 = 261; \\ 58X_1 + 17X_3 + 18X_4 + 6X_6 = 67,5; \\ 144X_1 + 18X_3 + 72X_4 + 18X_6 = 81; \\ 42X_1 + 6X_3 + 18X_4 + 7,5X_6 = 27. \end{cases}$$

$$\text{II. } \begin{cases} 135X_2 + 54X_5 = 199,12; \\ 54X_2 + 58,5X_5 = 81. \end{cases}$$

Решение системы I и II дает значения реакций лишних связей:

$$\begin{aligned}X_1 &= 0,607кН; \\X_2 &= 1,46кН; \\X_3 &= 2,753кН \cdot м; \\X_4 &= -0,692кН; \\X_5 &= 0,037кН; \\X_6 &= -0,34кН \cdot м.\end{aligned}$$

Окончательные эпюры  $N_z$ ,  $Q_y$ ,  $M_x$ , построенные от одновременного действия вычисленных реакций и внешней нагрузки  $q$  (рис.45,в) показаны на рис.45,г,д,е.

**Пример 22.** Построить эпюры  $N_z$ ,  $Q_y$ ,  $M_x$  в симметричной раме (рис.46.а).

Рама имеет два замкнутых бесшарнирных контура, поэтому она шесть раз статически неопределима. При обычном подходе в этом случае было бы необходимо решить систему шести линейных уравнений, т.е. расчет был бы весьма трудоемким. Использование симметрии, как это будет показано ниже, позволит свести задачу к решению только лишь двух линейных уравнений.

Выберем основную систему, разрезая каждый из ригелей посередине пролета (рис.46,б). Но, в отличие от предыдущего примера, сформируем две эквивалентных системы, одну из которых загрузим симметричными составляющими внешней нагрузки (рис.46,в), а другую – обратно симметричными составляющими (рис.46,г). Легко убедиться в том, что сумма внешних нагрузок, приложенных к обеим эквивалентным системам, равна внешней нагрузке, приложенной к заданной раме.

При действии симметричных самоуравновешенных сил  $F_1/2$  и  $F_2/2$  (рис.46,в), приложенных в узлах, в элементах рамы отсутствуют изгибающие моменты и поперечные силы, а продольные силы возникают только в ригелях и вычисляются непосредственно из условий равновесия узлов 3 и 5, или, что то же самое, 4 и 6:

$$\sum F_x^{(3)} = 0: F_1/2 - N_{34} = 0; N_{34} = F_1/2 = 5кН.$$

$$\sum F_x^{(5)} = 0: F_2/2 - N_{56} = 0; N_{56} = F_2/2 = 2,5кН.$$

При действии обратносимметричных сил  $F_1/2$  и  $F_2/2$  (рис.46,г) в разрезах, сделанных по оси симметрии рамы, возникают обратносимметричные неизвестные поперечные силы  $X_1, X_2$ , а продольные силы и изгибающие моменты обращаются в ноль как симметричные усилия при обратносимметричной нагрузке.

Таким образом, для расчета рамы нужно составить только два канонических уравнения метода сил:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0. \end{cases}$$

Единичные и грузовая эпюра изгибающих моментов показаны на рис.46,д,е,ж. Вычислим коэффициенты канонических уравнений путем перемножения соответствующих эпюр по правилу Верещагина:

$$\delta_{11} = \frac{2}{EI} \left( \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 3 \right) = \frac{45}{EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{2}{EI} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{36}{EI};$$

$$\delta_{22} = \frac{2}{EI} \left( \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot 4 \cdot 3 \right) + \frac{2}{EI} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{177}{EI};$$

$$\Delta_{1F} = \frac{2}{EI} \cdot \frac{10+40}{2} \cdot 4 \cdot 3 = \frac{300}{EI};$$

Единичные и грузовая эпюра изгибающих моментов показаны на рис.46,д,е,ж.

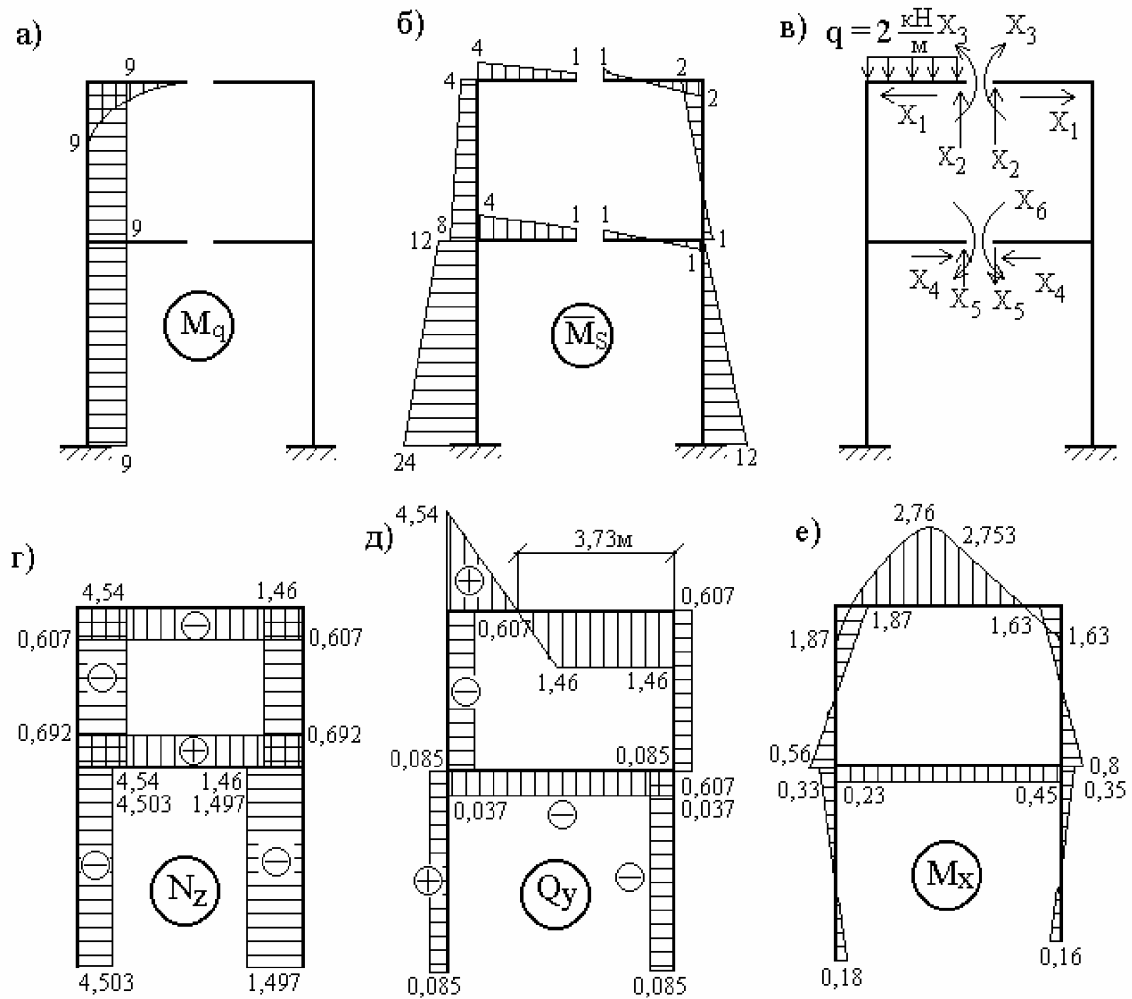


Рис. 45

Вычислим коэффициенты канонических уравнений путем перемножения соответствующих эпюр по правилу Верещагина:

$$\delta_{11} = \frac{2}{E2I} \left( \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 3 \right) = \frac{45}{EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{2}{E2I} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{36}{EI};$$

$$\delta_{22} = \frac{2}{E2I} \left( \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot 4 \cdot 3 \right) + \frac{2}{EI} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{177}{EI};$$

$$\Delta_{1F} = \frac{2}{E2I} \cdot \frac{10+40}{2} \cdot 4 \cdot 3 = \frac{300}{EI};$$

$$\Delta_{2F} = \frac{2}{E2I} \cdot \frac{10+40}{2} \cdot 4 \cdot 3 + \frac{2}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{420}{EI}.$$

Для проверки вычисленных перемещений используем суммарную единичную эпюру изгибающих моментов  $\bar{M}_s$  (рис.46,з).

$$\delta_{ss} = \sum \int_s \frac{\bar{M}_s ds}{EI} = \frac{2}{E2I} \left( \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 2 + 6 \cdot 4 \cdot 6 \right) + \frac{2}{EI} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{234}{EI};$$

$$\Delta_{sF} = \sum \int_s \frac{\bar{M}_s M_F}{EI} = \frac{2}{EI} \cdot \frac{40+10}{2} \cdot 4 \cdot 6 + \frac{2}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{720}{EI}.$$

Проверка:

$$1) \delta_{11} + 2\delta_{12} + \delta_{22} = \frac{1}{EI} (45 + 2 \cdot 36 + 117) = \frac{234}{EI} = \delta_{ss};$$

$$2) \Delta_{1F} + \Delta_{2F} = \frac{1}{EI} (300 + 420) = \frac{720}{EI} = \Delta_{sF}.$$

После подстановки найденных значений коэффициентов при неизвестных и свободных членов в канонические уравнения и умножения последних на EI получим:

$$\begin{cases} 45X_1 + 36X_2 + 300 = 0; \\ 36X_1 + 144X_2 + 420 = 0, \end{cases}$$

отсюда:

$$X_1 = -5,04кН;$$

$$X_2 = -2,04кН.$$

Таким образом, в результате раскрытия статической неопределимости исходная, шесть раз статически неопределимая система приведена к статически определимой системе (рис.46,и), загруженной внешней нагрузкой  $F_1$  и  $F_2$ , продольными усилиями  $N_{34}$  и  $N_{56}$ , а также вычисленными реакциями  $X_1$  и  $X_2$ .

Эпюры продольных, поперечных сил и изгибающих моментов для заданной рамы показаны на рис.46,к,л,м.

Для выполнения универсальной кинематической проверки эпюры  $M_x$  используем суммарную единичную эпюру  $\bar{M}_s$ :

$$\Delta_s = \sum \int_s \frac{\bar{M}_s M_x}{EI} ds = \frac{2}{E2I} \left[ -\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6,12 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 15,12 + \right. \\ \left. + \frac{4}{3} (2 \cdot 6 \cdot 18,76 - 2 \cdot 6 \cdot 11,24 - 6 \cdot 11,24 + 6 \cdot 18,76) \right] = -\frac{0,36}{EI} \approx 0,$$



следовательно, задача решена правильно.

**Пример 23.** Построить эпюру изгибающих моментов для статически неопределимой рамы (рис.47,а), используя способ введения жестких консолей.

Этот способ используется для ортогонализации эпюр (т.е. для получения нулевых перемещений – коэффициентов канонических уравнений) в пределах каждого замкнутого или открытого с защемленными концами симметричного контура. Для ортогонализации эпюр с помощью жестких консолей соответствующие неизвестных переносятся в некоторую точку, называемую *упругим центром*. Положение этой точки определяется как положение центра тяжести условного тонкостенного сечения с толщиной  $1/EI$  :

$$\begin{cases} X_c = 0 \text{ (в силу симметрии);} \\ Y_c = \frac{S_x}{A}. \end{cases}$$

Заданная рама имеет степень статической неопределенности:

$$n = r - s = 7 - 3 = 4$$

Для выбора основной системы (рис.47,б) используем то обстоятельство, что левый (П-образный) контур рамы симметричен. Разрежем его по оси симметрии, что будет эквивалентно удалению трех связей и появлению трех неизвестных реакций. Четвертую связь устраним путем удаления шарнирно-подвижной опоры. Введение в месте разреза жестких консолей с приложенными на их концах реакциями  $X_1, X_2, X_3$  совместно с реакцией  $X_4$  и внешними нагрузками приводит к эквивалентной системе (рис.47,в).

Определим положение упругого центра, т.е. фактически длину жестких консолей (рис.47,г), вычисляя координаты центра тяжести условного тонкостенного П-образного сечения:

$$X_c = 0; \quad Y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{-2 \frac{1}{E2I} \cdot 4 \cdot 2}{2 \cdot \frac{1}{E2I} \cdot 4 + \frac{1}{EI} \cdot 4} = -1,6$$

Единичные эпюры изгибающих моментов показаны на рис.47,д,е,ж,з, а эпюра моментов от внешних нагрузок – на рис.47,и.

Учитывая, что результат перемножения симметричной эпюры на кососимметричную равен нулю, систему канонических уравнений метода сил рассматриваемой рамы запишем в виде:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{14}X_4 + \Delta_{1F} = 0; \\ \delta_{22}X_2 + \delta_{24}X_4 + \Delta_{2F} = 0; \\ \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 + \Delta_{3F} = 0; \\ \delta_{41}X_1 + \delta_{42}X_2 + \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 + \Delta_{4F} = 0. \end{cases}$$

Вычислим коэффициенты уравнений, используя, как обычно, способ Верещагина:

$$\delta_{14} = \delta_{41} = \frac{1}{E2I} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 = \frac{16}{EI};$$

$$\delta_{22} = \frac{2}{E2I} \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right) + \frac{2}{EI} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = \frac{13,33}{EI};$$

$$\delta_{11} = \frac{2}{E2I} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 + \frac{22}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{21,33}{EI};$$

$$\delta_{24} = \delta_{42} = \frac{1}{E2I} \left( -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \right) = \frac{8}{EI};$$

$$\delta_{33} = \frac{2}{E2I} \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 + \frac{2}{EI} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = \frac{8}{EI};$$

$$\delta_{34} = \delta_{43} = -\frac{1}{E2I} \cdot 1 \cdot 4 \cdot 4 = -\frac{8}{EI};$$

$$\delta_{44} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{E2I} (4 \cdot 4 \cdot 4 + 4 \cdot 2 \cdot 4) = \frac{69,33}{EI};$$

$$\Delta_{1F} = -\frac{1}{E2I} \left( \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 4 \cdot 2 + 6 \cdot 4 \cdot 2 \right) = -\frac{45,33}{EI};$$

$$\Delta_{2F} = \frac{1}{E2I} \left( \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 4 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 6 \right) = \frac{9,33}{EI};$$

$$\Delta_{3F} = \frac{1}{E2I} \left( 6 \cdot 4 \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 4 \cdot 1 \right) = \frac{1,33}{EI};$$

$$\Delta_{4F} = \frac{-1}{E2I} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4 - \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 \left( \frac{2}{3} \cdot 2 + 2 \right) = -\frac{92}{EI}.$$

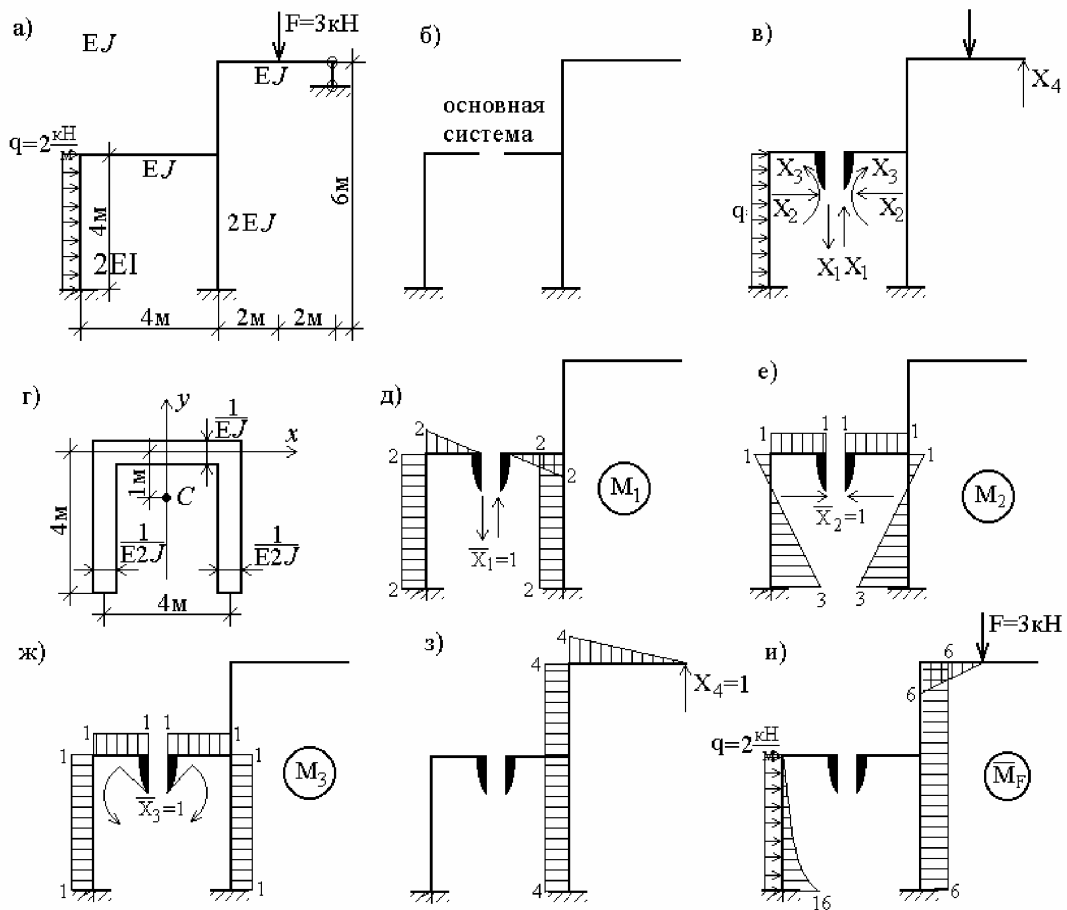


Рис. 47

Для проверки правильности вычисления коэффициентов и свободных членов канонических уравнений построим суммарную единичную эпюру изгибающих моментов  $\bar{M}_s$  (рис.48,а) и определим коэффициенты  $\delta_{ss}$  и  $\Delta_{sF}$ .

$$\delta_{ss} = \sum_s \int_s \frac{\bar{M}_s^2}{EI} ds = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{2}{6} (2 \cdot 4 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 2) \right] +$$

$$+ \frac{1}{E2I} \left[ \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + 4 \cdot 2 \cdot 4 + \frac{4}{6} (2 \cdot 4 \cdot 4 + 2 \cdot 8 \cdot 8 + 2 \cdot 4 \cdot 8) \right] = \frac{144}{EI};$$

$$\Delta_{sF} = \sum_s \int_s \frac{\bar{M}_s M_F}{EI} ds = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 \left( \frac{2}{3} \cdot 2 + 2 \right) - \frac{1}{E2I} \left[ \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 4 + 4 \cdot 2 \cdot 6 + \frac{4+8}{2} \cdot 4 \cdot 6 \right] =$$

$$= -\frac{126,67}{EI}.$$

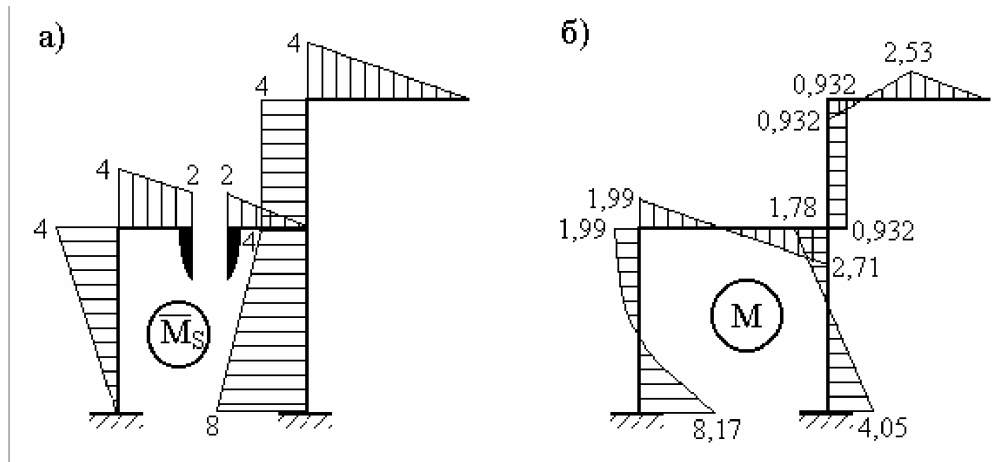


Рис. 48

Проверка:

$$1) \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} + \delta_{44} + 2(\delta_{14} + \delta_{24} + \delta_{34}) = \frac{1}{EI} [21,33 + 13,33 + 8 + 69,33 + 2(16 + 8 - 8)] = \frac{143,99}{EI} \approx \delta_{SS};$$

$$2) \Delta_{1F} + \Delta_{2F} + \Delta_{3F} + \Delta_{4F} = \frac{1}{EI} (-45,33 + 9,33 + 1,33 - 92) = -\frac{126,67}{EI} = \Delta_{SF}.$$

Следовательно, коэффициенты и свободные члены канонических уравнений вычислены правильно. Решение системы канонических уравнений дает следующие значения неизвестных:

$$\begin{cases} X_1 = 1,175 \text{ кН}; \\ X_2 = -1,46 \text{ кН}; \\ X_3 = 1,1 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ X_4 = 1,267 \text{ кН}. \end{cases}$$

Окончательная эпюра моментов для заданной рамы показана на рис.48,б.

Читатель имеет возможность самостоятельно убедиться в правильности построенной эпюры, перемножив ее с суммарной единичной эпюрой  $\bar{M}_s$  (результат, как известно, должен равняться нулю).

## ГЛАВА 4

# ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР В СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМАХ. МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

### 4.1 СУЩНОСТЬ МЕТОДА

Как уже говорилось выше, в статически неопределимых системах (в отличие от систем статически определимых) распределение внутренних сил зависит от упругих свойств элементов системы. Поэтому для определения всех усилий в конструкции одних только уравнений равновесия недостаточно, и в общем случае нужно дополнительно составлять физические и геометрические уравнения, описывающие условия деформации системы. При этом какие-то факторы выбирают в качестве основных неизвестных. Эти величины должны вполне определять напряженно-деформированное состояние системы, т.е. через них можно выразить все остальные неизвестные.

Если в *методе сил* в качестве таких основных неизвестных выбираются внутренние усилия в фиксированных сечениях конструкции, то в *методе перемещений* за основные неизвестные принимаются перемещения фиксированных сечений или узлов системы. Число неизвестных перемещений, принимаемых за основные, называется *степенью кинематической неопределимости*. Оно, вообще говоря, не связано со степенью статической неопределимости данной конструкции. Число и вид неизвестных перемещений назначают так, чтобы через них достаточно легко могли быть выражены все прочие факторы системы, в частности внутренние усилия в ее элементах.

Для иллюстрации сказанного рассмотрим абсолютно жесткий брус, поддерживаемый четырьмя одинаковыми стержнями с жесткостью на растяжение  $EA$  (рис.49,а). Такая система является трижды статически

неопределимой. В то же время удлинения, а следовательно, и усилия всех стержней вполне определяются одним перемещением, например вертикальным перемещением точки В, которое обозначим через  $Z_1$ .

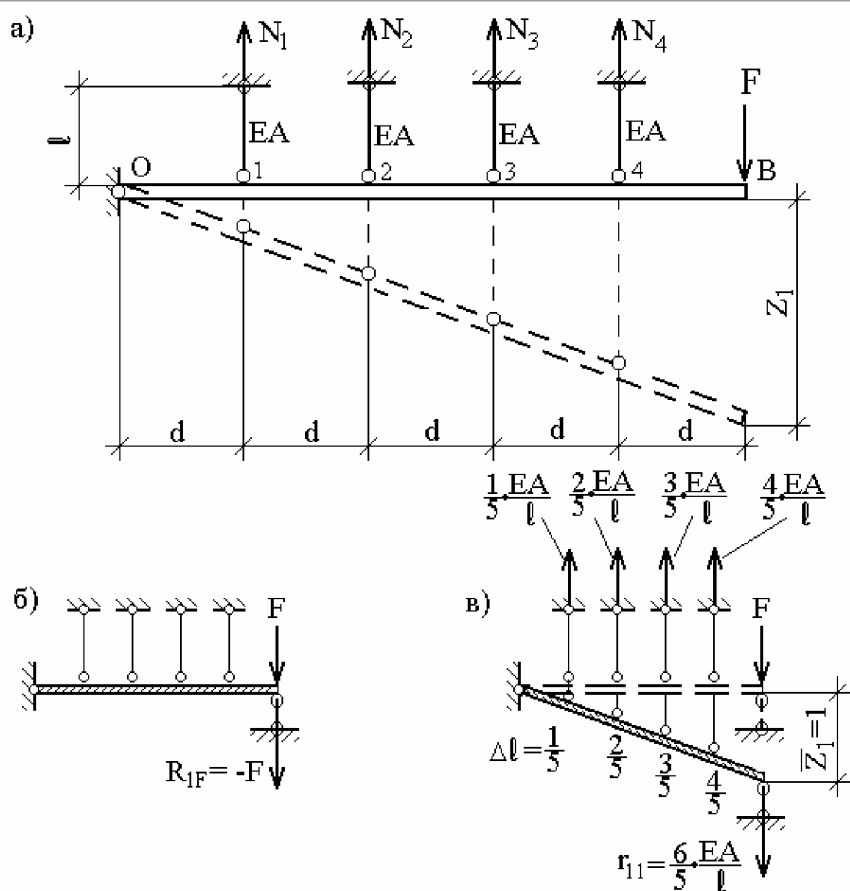


Рис. 49

Степень статической неопределимости зависит от числа вертикальных стержней, в то время как степень кинематической неопределимости такой системы остается равной единице при любом числе стержней.

Метод расчета таких систем, рассматриваемый в традиционном курсе сопротивления материалов, также предполагает использование картины деформаций системы, но не является методом перемещений. Здесь же мы рассмотрим решение в форме, характерной для метода перемещений.

Определим усилия в стержнях  $N_1, N_2, N_3, N_4$ , принимая в качестве неизвестного перемещение  $Z_1$ . Устраним перемещение  $Z_1$ , введя по его

направлению дополнительную связь (рис.49,б). Сформированную таким образом систему назовем *основной системой* метода перемещений. Сообщим введенной связи принудительное смещение  $Z_1$ , которое определим из условия равенства нулю суммарной реакции  $R_1$  в этой связи, так как в действительности сама связь отсутствует. Будем считать реакцию положительной, если ее направление совпадает с принятым направлением перемещения, и отрицательной – в противном случае.

В основной системе от нагрузки  $F$  реакция в связи  $R_{1F} = -F$  (рис.49,б). От смещения  $Z_1$  для линейно-упругой системы реакция в связи пропорциональна перемещению  $Z_1$ . Представим ее в виде:  $R_{1z_1} = r_{11}z_1$ , где  $r_{11}$  – реакция от единичного смещения  $\bar{z}_1 = 1$  (рис.49,в). Согласно принципу суперпозиции условие отсутствия полной реакции в присоединенной связи имеет вид:

$$R_1 = R_{1z_1} + R_{1F} = 0, \quad (4.1)$$

или

$$r_{11}z_1 + R_{1F} = 0. \quad (4.2)$$

Составляя сумму моментов относительно точки  $O$  (рис.49,в), находим:

$$r_{11} = \frac{5}{6} \cdot \frac{EA}{\ell}.$$

Из уравнения (4.2) получим:

$$z_1 = \frac{5}{6} \cdot \frac{F\ell}{EA}.$$

Усилия в стержнях, показанные на рис.49,в, найдены от единичного смещения  $\bar{z}_1 = 1$ ; умножая их на фактическое перемещение  $z_1$ , получим искомые значения сил:

$$N_1 = \frac{F}{6}; \quad N_2 = \frac{2F}{6}; \quad N_3 = \frac{3F}{6}; \quad N_4 = \frac{4F}{6}.$$

Разрешающее уравнение (4.2) выражает в соответствующей форме условие равновесия системы, получившей под нагрузкой  $F$  перемещение  $z_1$ ; иначе говоря, это уравнение равновесия системы, выраженное через перемещение  $z_1$ .

Аналогичные рассуждения можно провести и для рамных систем, где использование метода перемещений является особенно эффективным.

Рассмотрим плоскую раму (рис.50,а) в деформированном состоянии как совокупность отдельных стержневых элементов, объединенных в узлах. Деформированное состояние каждого элемента вполне определяется нагрузкой, непосредственно приложенной к этому элементу, и перемещениями его концевых сечений. Отдельные стержни, показанные на рис.50,а, деформированы так же как и в составе рамы, что достигается смещением концевых сечений стержней на величины, равные перемещениям узлов рамы.

Если пренебречь изменением длин стержней в процессе деформации, то в целом деформированное состояние рамы будет определено тремя перемещениями узлов:  $z_1$  – горизонтальным линейным смещением ригеля;  $z_2$  и  $z_3$  – углами поворотов узлов, т.е. степень кинематической неопределимости рамы равна трем.

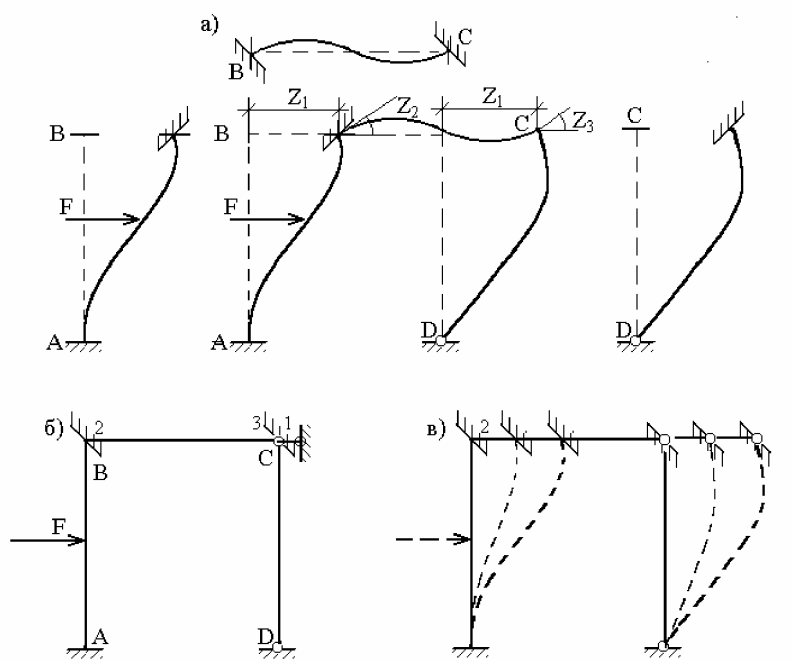
Основная система с присоединенными связями, устраняющими эти перемещения, показана на рис.50,б. Условные защемления, введенные в узлы и устраняющие их углы поворотов, называются *плавающими* заделками, так как считается, что устраняя поворот, они не препятствуют соответствующему линейному смещению узла. При устранении связи 1 рама деформируется без поворота узлов (рис.50,в).

Уравнения равновесия рамы, выраженные через перемещения  $z_1$ ,  $z_2$  и  $z_3$  получим, приравнявая нулю суммарные реакции в присоединенных связях (сосредоточенная сила в линейной связи) и моменты в угловых связях:

$$\begin{cases} R_1 = 0; \\ R_2 = 0; \\ R_3 = 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Система уравнений (4.3) является разрешающей системой для рассматриваемой рамы по методу перемещений. Для того чтобы можно было развернуть каждое из равенств (4.3), нужно предварительно изучить работу отдельных стержней, составляющих основную систему, на воздействие





**Рис. 50**

различных видов нагрузки и смещений опорных закреплений. Если предварительно вычислить реакции по концам стержней от указанных воздействий, то, используя принцип суперпозиции, каждую из полных реакций (4.3) можно записать как сумму слагаемых, выражающих каждое воздействие отдельно.

## **4.2 ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ТАБЛИЦА МЕТОДА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ**

Как было показано в предыдущем параграфе, при расчете методом перемещений исходная система путем введения дополнительных связей расчленяется на ряд однопролетных статически неопределимых балок. Очевидно, что характер нагружения таких балок и способы закрепления их концов дают определенный, постоянный "набор" возможных вариантов, к определенной совокупности которых приводит расчетная схема любой заданной системы. Поэтому целесообразно заранее рассчитать однопролетные статически неопределимые балки при разных нагрузках и использовать эти результаты по мере необходимости. Обычно такой "набор" возможных вариантов представляется в табличной форме.

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих результаты, указанных в тех или иных строках приведенной таблицы.

1. Загружение сосредоточенной силой  $F$  однопролетной балки с жестким защемлением на одном конце и шарнирно подвижным опиранием на другом (строка 1 вспомогательной таблицы).

Для решения задачи используем метод сил. Эквивалентная система, единичная и грузовая эпюры для заданной схемы (рис.51,а) представлены на рис.51,б,в,г.

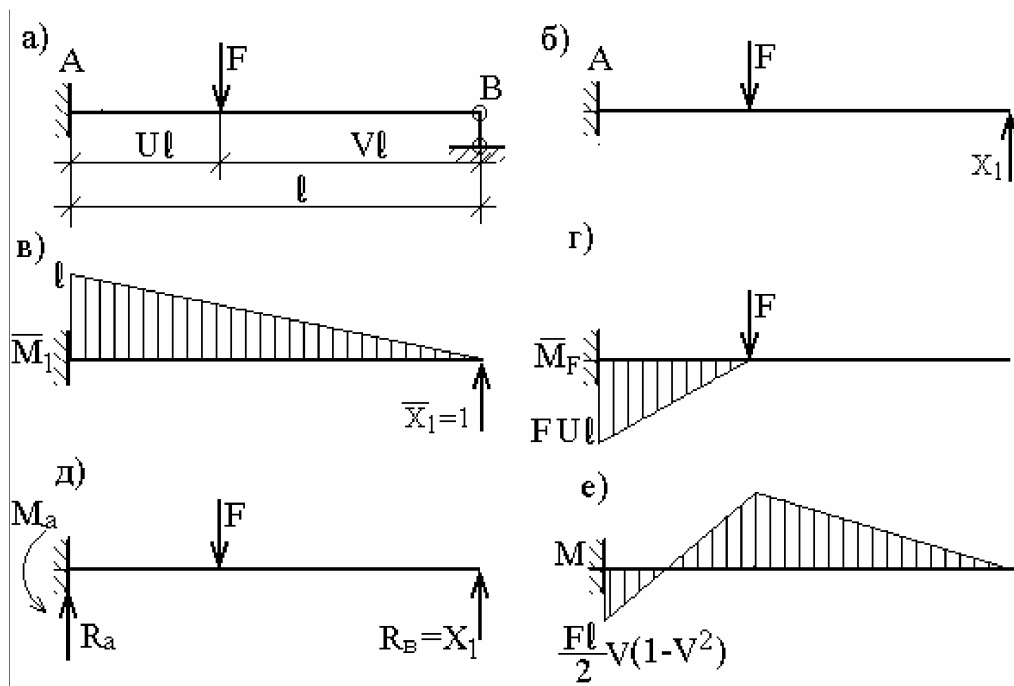


Рис. 51

Каноническое уравнение метода сил:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0.$$

Коэффициенты канонических уравнений вычислим по способу Верещагина:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot l = \frac{l^3}{3EI}.$$

Вспомогательная таблица метода перемещений.

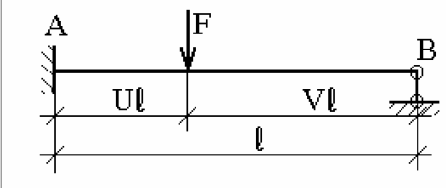
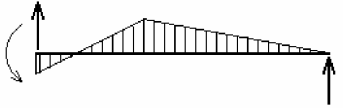
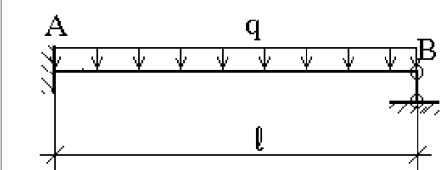
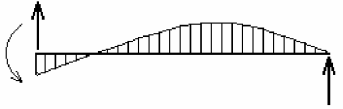
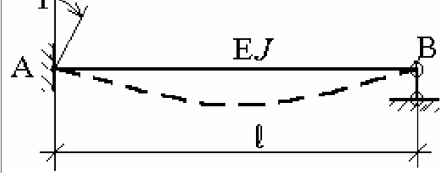
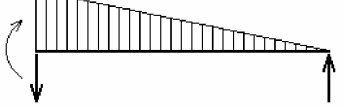
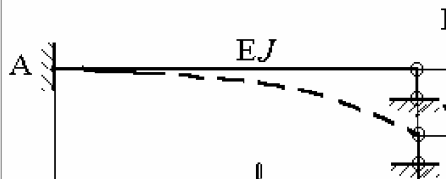
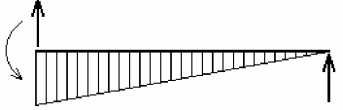
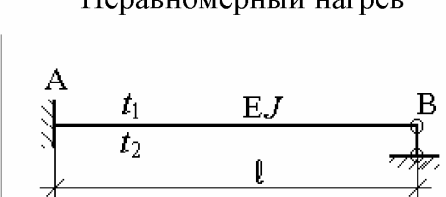
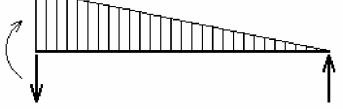
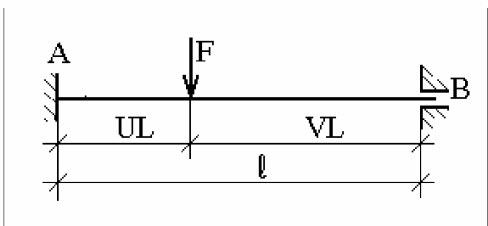

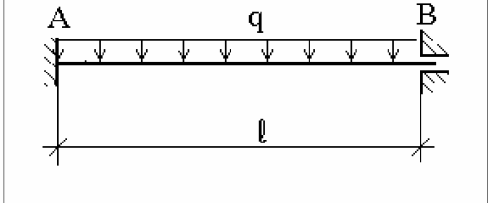
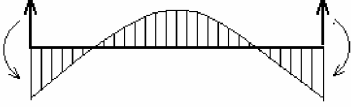
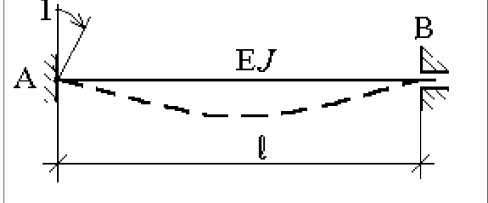

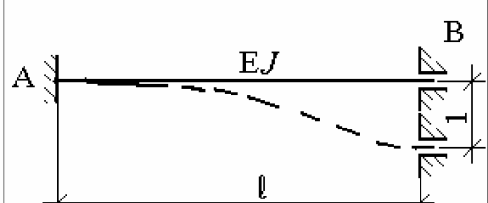
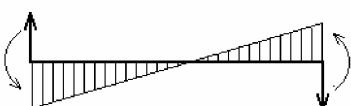
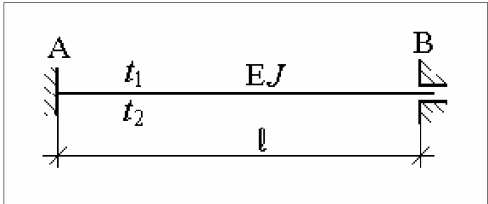
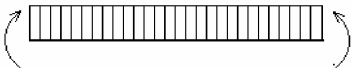
	Схема балки и воздействия на нее	Эпюра моментов и реакции
		 $M_A = \frac{F\ell}{2} V(1-V^2)$ $R_B = \frac{FU}{2}(3-U); R_A = \frac{RV}{2}(3-V^2)$
		 $M_A = \frac{q\ell^2}{8}; R_A = \frac{5}{8}q\ell; R_B = \frac{3}{8}q\ell$
		 $M_A = \frac{3EI}{\ell}; R_A = R_B = \frac{3EI}{\ell^2}$
		 $R_A = R_B = \frac{3EI}{\ell^3}; M_A = \frac{3EI}{\ell^2}$
	<p>Неравномерный нагрев</p>  <p><math>t_1 &gt; t_2 \quad \Delta t = t_1 - t_2</math></p>	 $M_A = \frac{3EI\alpha\Delta t}{2h} \quad R_A = R_B = \frac{3EI\alpha\Delta t}{2h\ell}$ <p>h – высота сечения</p>

	Схема балки и воздействия на нее	Эпюра моментов и реакции
		 $M_A = UV F \ell \quad M_B = U VF \ell$ $R_A = V^2(1+2U)F \quad R_B = U^2(1+2V)F$
		 $M_A = M_B = \frac{q\ell^2}{12} \quad R_A = R_B = \frac{q\ell}{2}$
		 $M_A = \frac{4EI}{\ell} \quad M_B = \frac{6EI}{\ell} \quad R_A = R_B = \frac{6EI}{\ell^2}$
		 $M_A = M_B = \frac{6EI}{\ell^2} \quad R_A = R_B = \frac{12EI}{\ell^3}$
0	<p data-bbox="416 1317 746 1346">Неравномерный нагрев</p>  <p data-bbox="475 1630 687 1659"><math>t_1 &gt; t_2 \quad \Delta t = t_1 - t_2</math></p>	 $M_A = M_B = \frac{EI\alpha\Delta t}{h}; \quad R_A = R_B = 0$ <p data-bbox="991 1554 1257 1583">h – высота сечения</p>

Отметим, что при указанных условиях закрепления концов балки коэффициент  $\delta_{11}$  не зависит от характера внешнего воздействия.

$$\Delta_{1F} = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot FUI \cdot UI \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot UI + VI \right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{FU^2 I^2}{EI} \cdot l \left( \frac{2}{3} U + V \right).$$

Так как  $UI + VI = l$  и, следовательно,  $V = 1 - U$ , то  $\Delta_{1F} = -\frac{FU^2 I^3}{6EI} (3 - U)$ .

Подставляя  $\delta_{11}$  и  $\Delta_{1F}$  в каноническое уравнение, находим:

$$X_1 = R_B = \frac{FU^2}{2} (3 - U).$$

Тогда реакции левой опоры и опорный момент будут:

$$R_A = F - R_B = \frac{FV}{2} (3 - V^2),$$

$$M_A = -FUI + \frac{FU^2 I}{2} (3 - U) = -\frac{FIV}{2} (1 - V^2).$$

Окончательная эпюра моментов для заданной, теперь уже статически определимой, системы, нагруженной силами  $F$  и  $X_1$  (рис.51,д), показана на рис.51,е.

2. *Загружение равномерно распределенной нагрузкой  $q$*  (рис.52,а) однопролетной статически неопределимой балки (строка 2 вспомогательной таблицы).

Для решения вновь используем метод сил. Эпюра моментов от внешней нагрузки, приложенной к основной системе, показана на рис.52,б, а единичная эпюра моментов (и, соответственно, перемещение  $\delta_{11}$ ) совпадает с построенной в предыдущем примере (рис.51,в).

Уравнение метода сил:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1q} = 0;$$

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{3EI};$$

$$\Delta_{1q} = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot l \cdot \frac{3}{4} \cdot l = -\frac{ql^4}{8EI}.$$

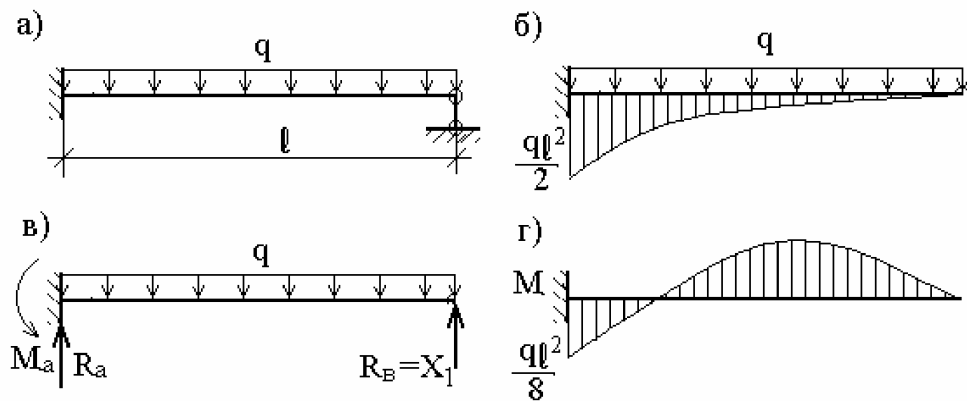


Рис. 52

Здесь при вычислении  $\Delta_{1q}$  использованы эпюры  $\bar{M}_1$  (рис.51,в) и  $M_q$  (рис.52,б).

Реакция лишней связи:

$$X_1 = R_B = \frac{3}{8}ql$$

Реакция левой опоры:

$$R_A = ql - R_B = \frac{5}{8}ql.$$

Опорный момент в левой опоре получим, просуммировав момент в этом сечении от нагрузки  $q$  с моментом от  $X_1$ :

$$M_A = -\frac{ql^2}{2} + \frac{3}{8}ql \cdot l = -\frac{ql^2}{8}.$$

Направление опорных реакций и момента в заделке показаны на рис.52,в, а окончательная эпюра моментов – на рис.52,г.

3. Перемещение заделки на величину  $\Delta$  по направлению перпендикулярному оси стержня (рис.53,а).

Эпюра изгибающих моментов в основной системе от смещения  $\Delta$  будет нулевой, поэтому нулевым будет свободный член уравнения метода сил.

А перемещение по направлению  $X_1$  (рис.53,б) будет:

$$\Delta_{1\Delta}=\Delta,$$

и уравнение метода сил принимает вид:

$$\delta_{11}X_1 = \Delta, \text{ где } \delta_{11} - \text{ то же, что и ранее.}$$

Отсюда последовательно находим реакции  $R_B = X_1$ ,  $R_A$  и опорный момент  $M_A$ :

$$R_B = X_1 = -\frac{3EI\Delta}{\ell^3};$$

$$R_A = -R_B = \frac{3EI\Delta}{\ell^3};$$

$$M_A = \frac{3EI\Delta}{\ell^2}.$$

Направление этих величин показаны на рис.53,в, а окончательная эпюра моментов на рис.53,г.

При единичном смещении  $\Delta=1$  все вычисленные величины принимают значения, указанные в строке 4 вспомогательной таблицы метода перемещений.

Аналогичным образом можно рассчитать однопролетную балку на другие виды воздействий. Предоставив читателю возможность самостоятельно проделать соответствующие расчеты, отметим только, что при рассмотрении балки с двумя защемленными концами (строки 6 – 10 вспомогательной таблицы метода перемещений) целесообразно выбирать основную систему, разрезая балку посередине пролета. Такой разрез, как известно, приводит к появлению трех лишних неизвестных в методе сил – продольной и поперечной сил, а также изгибающего момента. Однако при всех рассматриваемых видах воздействий (вертикальные нагрузки, линейные смещения заделок по нормали к оси балки, поворот заделок) продольная сила будет равна нулю, поэтому решение всех задач приводит к системе двух канонических уравнений метода сил.

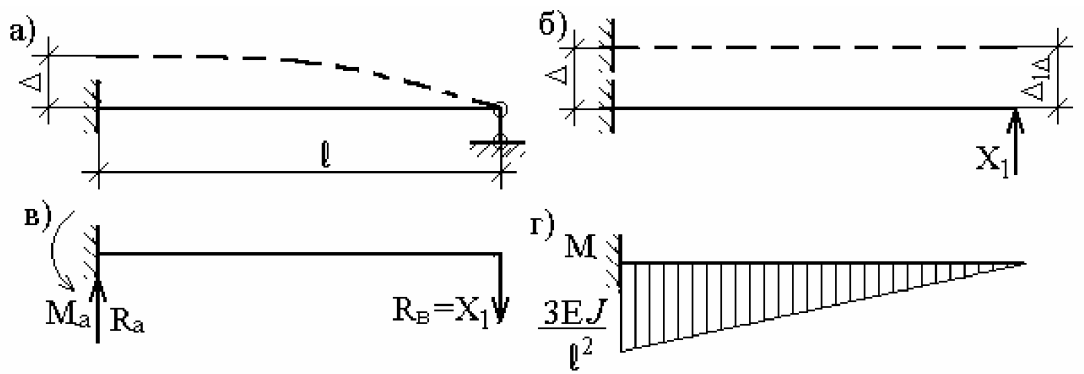


Рис. 53

### 4.3 КАНОНИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ МЕТОДА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Представим уравнение (4.3) в развернутой форме. Для этого рассмотрим конкретную систему (рис.54,а). Ее степень кинематической неопределимости  $n = n_y + n_n = 1 + 1 = 2$ , где  $n_y$  – число неизвестных углов поворота узлов;  $n_n$  – число неизвестных линейных перемещений узлов. Основную систему метода перемещений получим, вводя две дополнительные связи, одна из которых препятствует угловому перемещению узла, а другая – линейному (рис.54,б). Во введенных связях появляются реактивные усилия: момент – в заделке и сила – в стержне. Уравнения, аналогичные уравнениям (4.3), в данном случае имеют вид:

$$\begin{cases} R_1 = 0; \\ R_2 = 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Заменим реактивный момент  $R_1$  суммой:

$$R_1 = R_{11} + R_{12} + R_{1F}.$$

Второй индекс у обозначений реакций указывает на то воздействие, которое является причиной появления реакции, т.е.  $R_{1F}$  – реактивный момент во введенной заделке от действия внешней нагрузки (рис.54,в);  $R_{11}$  – реактивный момент во введенной заделке от поворота этой же заделки на угол  $Z_1$ ;  $R_{12}$  –



реактивный момент во введенной заделке от линейного смещения узлов 1 и 2 на величину  $Z_2$ .

Реактивные моменты  $R_{11}$  и  $R_{12}$  от  $Z_1$  и  $Z_2$  можно заменить выражениями:

$$R_{11} = r_{11}Z_1; \quad R_{12} = r_{12}Z_2,$$

где  $r_{11}$  – реактивный момент в заделке от поворота этой же заделки на угол  $\bar{Z}_1 = 1$  (т.е. 1 радиан);  $r_{12}$  – реактивный момент во введенной заделке от смещения по горизонтали узла на величину  $\bar{Z}_2 = 1$  (рис.54,г,д).

После этой замены первое из уравнений (4.4) получим в виде:

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1F} = 0. \quad (4.5)$$

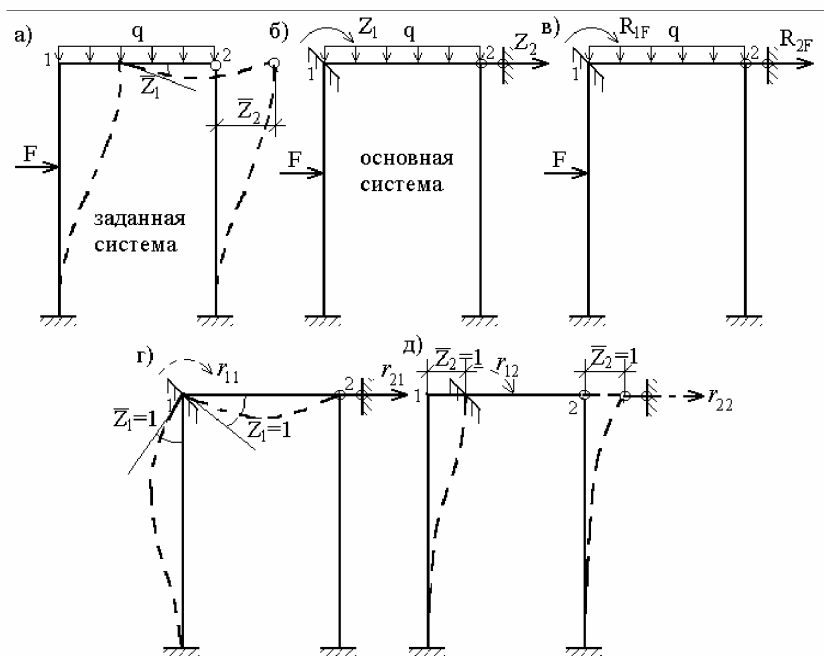


Рис. 54

Производя аналогичное преобразование второго уравнения (4.4), приведем его к виду:

$$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2F} = 0.$$

В уравнении (4.6)  $r_{21}$  – реактивное усилие во введенном стержне, возникающее от поворота заделки на угол  $\bar{Z}_1 = 1$  (рис.54,г);  $r_{22}$  – реактивное усилие в стержне от линейного смещения узлов 1 и 2 на величину  $\bar{Z}_1 = 1$  (рис.54,д);  $R_{2F}$  – реактивное усилие в стержне от действия заданной нагрузки (рис.54,в).

Физический смысл первого уравнения состоит в отрицании момента во введенной заделке, а второго – в отрицании усилия во введенном стержне. Вместе эти уравнения образуют систему канонических уравнений метода перемещений для дважды кинематически неопределимой системы. В общем случае, при  $n$  неизвестных, система канонических уравнений метода перемещений имеет вид:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1F} = 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n}Z_n + R_{2F} = 0; \\ \dots \dots \dots \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nn}Z_n + R_{nF} = 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

В уравнениях (4.7) коэффициенты (реакции)  $r_{11}, r_{22}, \dots, r_{nn}$ , расположенные на главной диагонали, называются главными; коэффициенты  $r_{ij}$  ( $i \neq j$ ) называются побочными, а свободные члены  $R_{1F}, R_{2F}, \dots, R_{nF}$  – грузовыми реакциями. В этих уравнениях, так же как и в уравнениях метода сил, коэффициенты при неизвестных, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны друг другу:

$$r_{ij} = r_{ji} \left( i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j \right).$$

Система канонических уравнений метода перемещений отличается от аналогичной системы уравнений метода сил тем, что вместо коэффициентов  $\delta_{ij}$  и  $\Delta_{iF}$ , выражающих перемещения в основной системе метода сил, в нее входят коэффициенты  $r_{ij}$  и  $R_{iF}$ , выражающие реакции дополнительных закреплений в

основной системе метода перемещений, а вместо неизвестных усилий  $X_i$  - неизвестные перемещения  $Z_i$ .

#### **4.4 АЛГОРИТМ РАСЧЕТА СИСТЕМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ**

Расчет статически неопределимых систем методом перемещений выполняется в следующей последовательности:

1. Находим степень кинематической неопределимости заданной системы.
2. Выбираем основную систему.
3. Записываем канонические уравнения метода перемещений.
4. Строим единичные и грузовые эпюры изгибающих моментов для основной системы.
5. Определяем коэффициенты и свободные члены системы канонических уравнений.
6. Проверяем правильность вычисления коэффициентов и свободных членов системы канонических уравнений.
7. Вычисляем значения неизвестных метода перемещений.
8. Строим эпюры  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  для заданной системы.
9. Проверяем правильность построения окончательных эпюр.

#### **4.5 МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ И СВОБОДНЫХ ЧЛЕНОВ КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**

В методе перемещений для вычисления коэффициентов и свободных членов канонических уравнений используются два способа: статический и способ интегрирования эпюр.

*При статическом способе* реактивные усилия во введенных связях определяют из уравнений равновесия отдельных узлов рамы или ее отсеченной части.

Коэффициенты и свободные члены, представляющие собой реактивные моменты во введенных заделках, определяются вырезанием узлов и составлением уравнений вида:

$$\sum M = 0. \quad (4.8)$$

Коэффициенты и свободные члены, представляющие собой реактивные усилия во введенных стержнях, определяются с помощью разреза элементов рамы и составления уравнений равновесия сил, действующих на отсеченную часть:

$$\sum L = 0, \quad (4.9)$$

причем, направление оси  $L$  выбирается так, чтобы уравнение получилось наиболее простым. Вычисленное реактивное усилие считается положительным, если его направление совпадает с направлением (соответственно, угловым или линейным) перемещения связи.

*Способ интегрирования эпюр* целесообразно применять при расчете рам с наклонными элементами. По этому способу коэффициенты при неизвестных определяют путем интегрирования (перемножения по правилу Верещагина) соответствующих единичных эпюр:

$$r_{ij} = \sum \int_s \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EI} ds. \quad (4.10)$$

Свободные члены канонических уравнений вычисляются в виде:

$$R_{iF} = - \sum \int_s \frac{M_F^0 \bar{M}_i}{EI} ds, \quad (4.11)$$

где  $M_F^0$  - эпюра моментов от нагрузки, построенная в любой статически определимой системе, образованной из заданной.

#### 4.6 ПРОВЕРКИ МЕТОДА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Так же как и в методе сил, в методе перемещений можно выполнять статическую и кинематическую проверки. Но поскольку основная система метода перемещений кинематически определима, то кинематическая проверка является вспомогательной и выполняется всегда при правильных эпюрах

изгибающих моментов в основной системе и при выполненной статической проверке.

*Основной проверкой* в методе перемещений является проверка равновесия узлов и других частей рамы. Количество проверяемых условий равновесия должно быть не меньше числа неизвестных метода перемещений.

Проверка правильности вычисления коэффициентов при неизвестных системы канонических уравнений метода перемещений выполняется аналогично проверке коэффициентов уравнений при расчете статически неопределимых систем методом сил. Для этого строится суммарная единичная эпюра моментов  $\bar{M}_s$ .

Умножая эту эпюру последовательно на каждую из единичных эпюр, получим сумму коэффициентов при неизвестных в соответствующем уравнении; так, умножая эпюру  $\bar{M}_s$  на эпюру  $\bar{M}_1$ , получим:

$$\begin{aligned} r_{1s} &= \sum \int_s \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_s}{EI} ds = \sum \int_s \frac{\bar{M}_1 (\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n)}{EI} ds = \\ &= \sum \int_s \frac{\bar{M}_1^2}{EI} ds + \sum \int_s \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{EI} ds + \dots + \sum \int_s \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_n}{EI} ds = \\ &= r_{11} + r_{12} + \dots + r_{1n} = \sum_{i=1}^n r_{1i}. \end{aligned}$$

Аналогично,  $r_{2s} = \sum_{i=1}^n r_{2i}$  и т.д.

Сумма коэффициентов при неизвестных  $i$ -го уравнения должна равняться значению  $r_{is}$ , где

$$r_{is} = \sum \int_s \frac{\bar{M}_i \bar{M}_s}{EI} ds. \quad (4.12)$$

Таким образом, проверка вычисленных значений коэффициентов, входящих в первое каноническое уравнение метода перемещений, состоит в проверке условия:

$$\sum_{i=1}^n r_{1i} = r_{1s}. \quad (4.13)$$

Аналогично проверяются и коэффициенты всех остальных уравнений. Как и в методе сил, такая проверка называется *построчной*.

Чаще используется *универсальная проверка*, которая состоит в том, что результат умножения эпюры  $\bar{M}_s$  на саму себя должен равняться сумме всех коэффициентов при неизвестных системы канонических уравнений. Действительно,

$$\begin{aligned} r_{ss} &= \sum \int_s \frac{\bar{M}_s^2}{EI} ds = \sum \int_s \frac{(\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n)^2}{EI} ds = \\ &= \sum \int_s \frac{\bar{M}_1^2}{EI} ds + \dots + \sum \int_s \frac{\bar{M}_n^2}{EI} ds + 2 \left( \sum \int_s \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{EI} ds + \dots + \sum \int_s \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_n}{EI} ds + \dots \right) = \\ &= r_{11} + r_{22} + \dots + r_{nn} + 2(r_{12} + \dots + r_{2n} + \dots) = \sum_{i,j=1}^n r_{ij}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Для проверки свободных членов канонических уравнений необходимо суммарную единичную эпюру моментов  $\bar{M}_s$  умножить на эпюру  $M_F^0$ , построенную от внешней нагрузки в статически определимой системе, полученной из заданной системы или основной системы метода перемещений устранением лишних связей, в том числе обязательно тех связей, реакции в которых определяются:

$$R_{sF} = - \sum \int_s \frac{\bar{M}_s M_F^0}{EI} ds. \quad (4.15)$$

Результат перемножения (4.15) должен равняться сумме всех свободных членов канонических уравнений:

$$\begin{aligned} R_{sF} &= - \sum \int_s \frac{(\bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n) \bar{M}_F^0}{EI} ds = - \sum \int_s \frac{\bar{M}_1 M_F^0}{EI} ds - \sum \int_s \frac{\bar{M}_2 M_F^0}{EI} ds - \\ &- \dots - \sum \int_s \frac{\bar{M}_n M_F^0}{EI} ds = R_{1F} + R_{2F} + \dots + R_{nF}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Достаточной проверкой правильности окончательной эпюры моментов являются, как уже отмечалось, статические проверки, суть которых будет подробно рассмотрена ниже на конкретных примерах.

Можно также выполнить дополнительную кинематическую проверку подобно тому, как это делается в методе сил. Для этого необходимо построить единичные эпюры в основной системе метода сил и перемножить их или суммарную единичную эпюру с окончательной эпюрой изгибающих моментов. При правильном расчете результат такого перемножения должен быть равен нулю. Эта проверка служит контролем правильности принятых для расчета единичных эпюр и грузовой эпюры изгибающих моментов.

#### **4.7 ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИММЕТРИИ ПРИ РАСЧЕТЕ РАМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ**

При расчете симметричных систем методом перемещений, так же как и при расчете методом сил, можно применить группировку неизвестных. В этом случае все единичные эпюры будут только симметричными или обратносимметричными. В результате такой группировки канонические уравнения распадаются на две независимые системы, в одну из которых войдут только симметричные, а в другую – обратносимметричные неизвестные.

Расчет еще более упрощается, если разложить внешнюю нагрузку на симметричную и обратносимметричную.

Другой подход состоит в том, что иногда в симметричных конструкциях вместо использования группировки неизвестных дважды рассчитывают половину конструкции. Первый раз симметричной составляющей нагрузки загружают "полуконструкцию", полученную из заданной путем удаления на оси симметрии таких связей, в которых возникают обратносимметричные внутренние силы (обозначим это состояние через С). Второй расчет делается на действие обратносимметричной составляющей внешней нагрузки на такую "полуконструкцию", в которой удалены симметричные связи на оси симметрии (состояние ОС). После этого окончательное состояние одной половины конструкции получают как сумму состояний С + ОС, а другой – как разность состояний С – ОС, найденных в результате двух указанных расчетов.

## 4.8 ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ

**Пример 24.** Для рамы (рис.55,а) построить эпюру изгибающих моментов и выполнить все необходимые проверки расчета при условии, что жесткости всех элементов рамы одинаковы и равны  $EI$ .

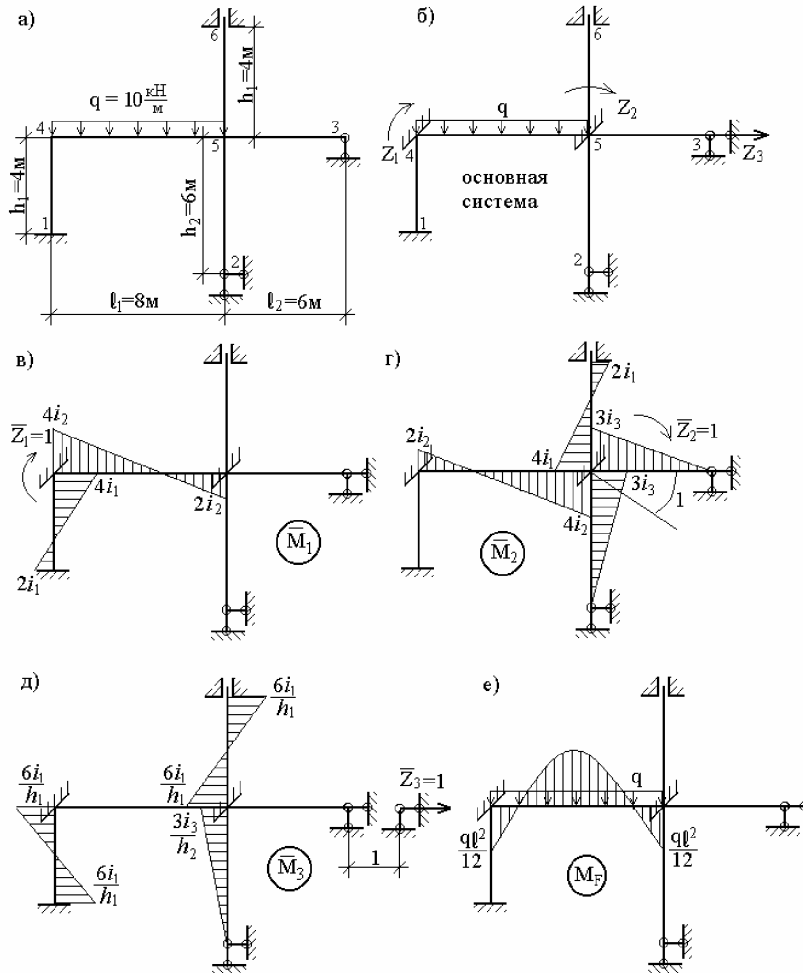


Рис. 55

Определим число основных неизвестных – степень кинематической неопределимости рамы. Так как число неизвестных угловых перемещений равно числу жестких узлов рамы, то  $n_y=2$ . Число независимых линейных смещений  $n_l=1$ . Действительно, узлы рамы 4 и 5 не могут перемещаться по вертикали из-за опорных закреплений 1 и 2 и принятой гипотезы о нерастяжимости стержней и неизменности их длины при изгибе. Для них



возможно только горизонтальное перемещение, которое будет одинаковым для узлов 4, 5 и 3 вследствие того, что они связаны между собой стержнями 4-5 и 5-3. Таким образом, степень кинематической неопределимости рамы:

$$n = n_y + n_d = 2 + 1 = 3.$$

Образуем основную систему, введя связи, препятствующие угловым и линейному смещениям, и обозначим предполагаемые направления (произвольно) трех неизвестных перемещений (рис.55,б). Используя приведенную выше вспомогательную таблицу метода перемещений, построим эпюры изгибающих моментов  $\bar{M}_1$ ,  $\bar{M}_2$ ,  $\bar{M}_3$  от единичных перемещений введенных связей по заданным направлениям и эпюру  $M_F$  от действия нагрузки на основную систему (рис.55,в-е). Для удобства на этих рисунках использованы следующие обозначения:

$$i_1 = \frac{EI}{h_1} = \frac{EI}{4}; \quad i_2 = \frac{EI}{L_1} = \frac{EI}{8}; \quad i_3 = \frac{EI}{h_2} = \frac{EI}{6}.$$

При построении всех указанных эпюр нужно четко представлять себе перемещение оси каждого стержня, вызванное заданным единичным смещением; это позволит установить положение сжатых волокон элементов рамы и правильно изобразить эпюры моментов.

Система канонических уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + R_{1F} = 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2F} = 0; \\ r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3F} = 0. \end{cases}$$

Для определения коэффициентов и свободных членов этих уравнений, которые представляют собой реактивные усилия в наложенных связях, применим статический способ. Для этого вырежем сначала узел 4 и рассмотрим условия его равновесия в случаях, представленных на рис.55,в-е, т.е. определим коэффициенты первой строки канонических уравнений.

На рис.56,а-г показан узел 4 с действующими на него моментами со стороны отброшенных частей рамы и реактивными моментами в защемлении (первой связи). Из условий равновесия этого узла получим:

$$r_{11} = 4i_1 + 4i_2 = EI + \frac{EI}{2} = \frac{3EI}{2};$$

$$r_{12} = 2i_2 = \frac{EI}{4};$$

$$r_{13} = -\frac{6i_1}{h_1} = -\frac{3EI}{8};$$

$$R_{1F} = -\frac{ql_1^2}{12} = -\frac{10 \cdot 8^2}{12} = -\frac{160}{3} \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Отрицательный знак в двух последних случаях объясняется тем, что направления реактивных моментов  $r_{13}$  и  $R_{1F}$  противоположны заданному направлению угла поворота  $Z_1$  первой связи.

Аналогично определим коэффициенты второго канонического уравнения. Для этого вырежем из рамы узел 5 и рассмотрим условия его равновесия при тех же четырех воздействиях на основную систему (рис.55,в-е).

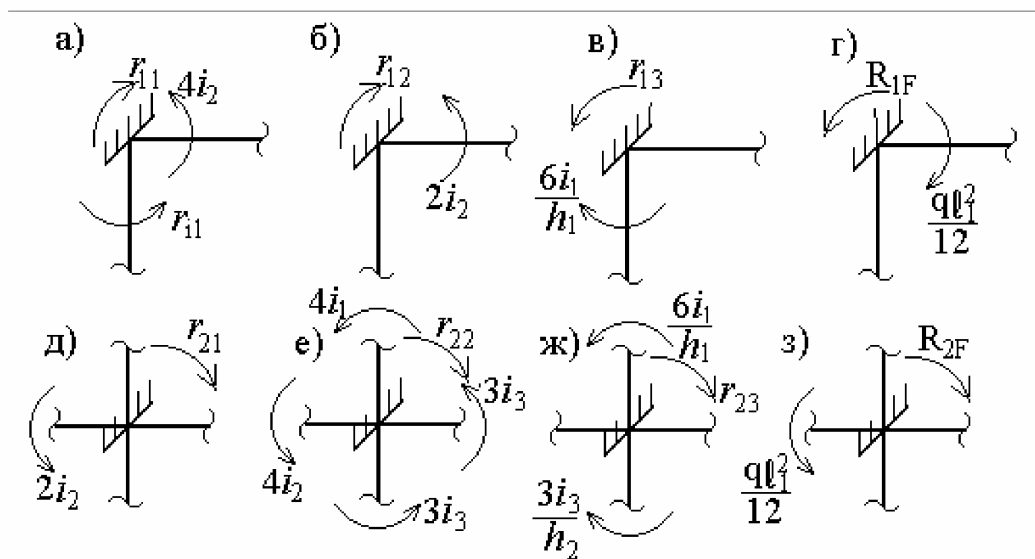


Рис. 56

Из рис.56,д-з следует:

$$r_{21} = r_{12} = \frac{EI}{4};$$

$$r_{22} = 4i_1 + 4i_2 + 3i_3 + 3i_3 = EI + \frac{EI}{2} + \frac{EI}{2} + \frac{EI}{2} = \frac{5EI}{2};$$

$$r_{23} = \frac{6i_1}{h_1} - \frac{3i_3}{h_2} = \frac{7EI}{24};$$

$$R_{2F} = \frac{q\ell^2}{12} = \frac{160}{3} \text{кН} \cdot \text{м}.$$

Для определения коэффициентов третьего уравнения, представляющих собой реакции во введенном стержне (третьей связи), рассечем стойки рамы и рассмотрим условия равновесия ее средней части, содержащей введенный стержень (рис.57,а-г). При этом под условием равновесия будем понимать равенство нулю суммы проекций всех сил, приложенных к выделенной части рамы, на горизонтальную ось:  $\sum X = 0$ . Отличные от нуля проекции дадут искомые реакции во введенном стержне и поперечные силы, приложенные в местах рассечения стоек и определяемые по эпюрам  $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3, M_F$ .

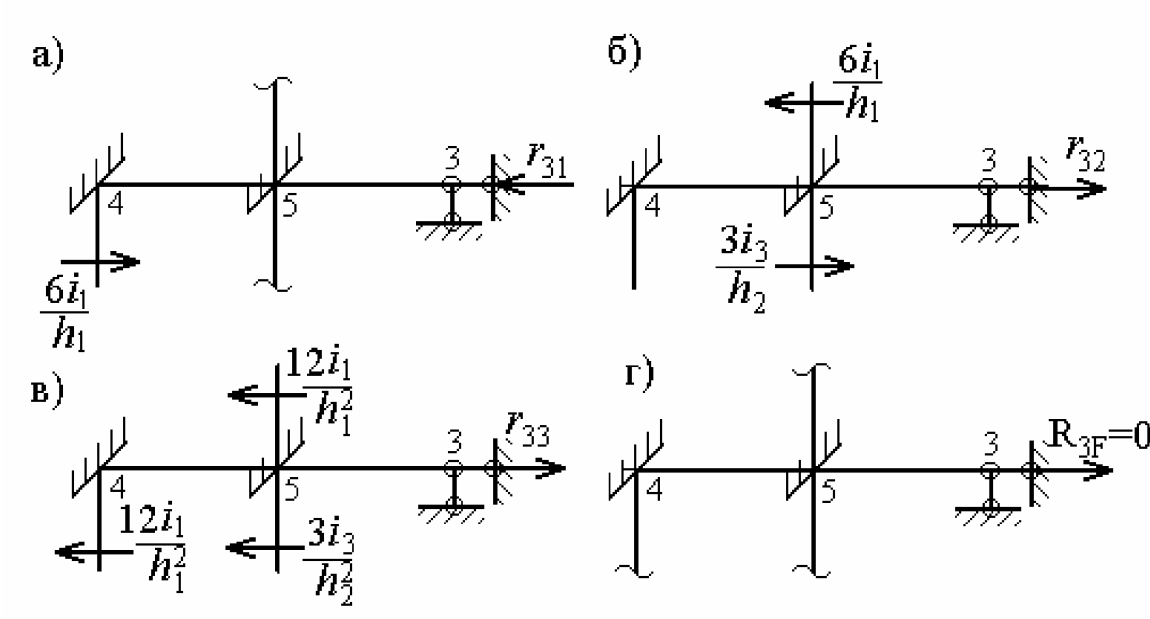


Рис. 57

Из рис.57,а-г следует:

$$r_{31} = r_{13} = -\frac{6i_1}{h_1} = -\frac{3EI}{8};$$

$$r_{32} = r_{23} = \frac{6i_1}{h_1} - \frac{3i_3}{h_2} = \frac{7EI}{24};$$

$$r_{33} = \frac{12i_1}{h_1^2} + \frac{12i_1}{h_1^2} + \frac{3i_3}{h_2^2} = \frac{7EI}{18};$$

$$R_{3F} = 0.$$

Проверку вычисленных коэффициентов и свободных членов можно осуществить способом перемножения эпюр. Для выполнения универсальной проверки построим суммарную единичную эпюру изгибающих моментов  $\bar{M}_s$ , представляющую собой сумму единичных эпюр  $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3$  (рис.58,а) и перемножим ее саму на себя:

$$r_{ss} = \sum_s \int_s \frac{\bar{M}_s^2}{EI} ds = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{4}{6} \left[ 2 \left( 4i_1 - \frac{6i_1}{h_1} \right)^2 + 2 \left( 2i_1 - \frac{6i_1}{h_1} \right)^2 - 2 \left( 4i_1 - \frac{6i_1}{h_1} \right) \left( 2i_1 - \frac{6i_1}{h_1} \right) \right] + \right.$$

$$+ 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6i_2 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6i_2 + \frac{4}{6} \left[ 2 \left( \frac{6i_1}{h_1} + 2i \right)^2 + 2 \left( \frac{6i_1}{h_1} + 4i_1 \right)^2 - 2 \left( \frac{6i_1}{h_1} + 2i_1 \right) \left( \frac{6i_1}{h_1} + 4i_1 \right) \right] +$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left( 3i_3 - \frac{3i_3}{h_2} \right) \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \left( 3i_3 - \frac{3i_3}{h_2} \right) + \frac{1}{2} \cdot 3i_3 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3i_3 \right\} = \frac{85EI}{18}.$$

Сумма коэффициентов при неизвестных составляет:

$$r_{11} + r_{22} + r_{33} + 2(r_{12} + r_{13} + r_{23}) = EI \left[ \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \frac{7}{18} + 2 \left( \frac{1}{4} - \frac{3}{8} + \frac{7}{24} \right) \right] = \frac{85EI}{18} = r_{ss}, \text{ т.е.}$$

коэффициенты вычислены правильно.

Для проверки свободных членов канонических уравнений необходимо построить эпюру изгибающих моментов  $M_F^0$  от внешней нагрузки, приложенной в любой статически определимой системе, образованной из заданной рамы, и перемножить ее с эпюрой  $\bar{M}_s$ :

$$R_{sF} = - \sum_s \int_s \frac{M_F^0 \bar{M}_s}{EI} ds.$$

Два возможных варианта эпюры  $M_F^0$  представлены на рис.58,б,в (возможны и другие варианты статически определимых рам, образованных из заданной, и, соответственно, другие варианты эпюры  $M_F^0$ ). Легко убедиться, что результат перемножения любой из этих эпюр на эпюру  $\vec{M}_s$  равен нулю, что также подтверждает правильность вычислений, так как в рассматриваемом примере

$$R_{1F} + R_{2F} + R_{3F} = -\frac{160}{3} + \frac{160}{3} + 0 = 0.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов и свободных членов в исходную систему канонических уравнений, получим:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}z_1 + \frac{1}{4}z_2 - \frac{3}{8}z_3 &= \frac{160}{3EI}; \\ \frac{1}{4}z_1 + \frac{5}{2}z_2 + \frac{7}{24}z_3 &= -\frac{160}{3EI}; \\ -\frac{3}{8}z_1 + \frac{7}{24}z_2 + \frac{7}{18}z_3 &= 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Решение системы (4.17) дает следующие значения неизвестных:

$$\begin{cases} z_1 = \frac{65,4}{EI}; \\ z_2 = -\frac{38,4}{EI}; \\ z_3 = \frac{91,8}{EI}. \end{cases}$$

Единичные эпюры моментов (рис.55,в-д) теперь можно "исправить", т.е. умножить на соответствующие значения неизвестных. При этом вторая эпюра  $\vec{M}_2$  поменяет знаки, так как  $z_2 < 0$ . Окончательную эпюру изгибающих моментов  $M$  (рис.58,г) построим согласно выражению:

$$M = \vec{M}_1 z_1 + \vec{M}_2 z_2 + \vec{M}_3 z_3 + M_F. \quad (4.18)$$

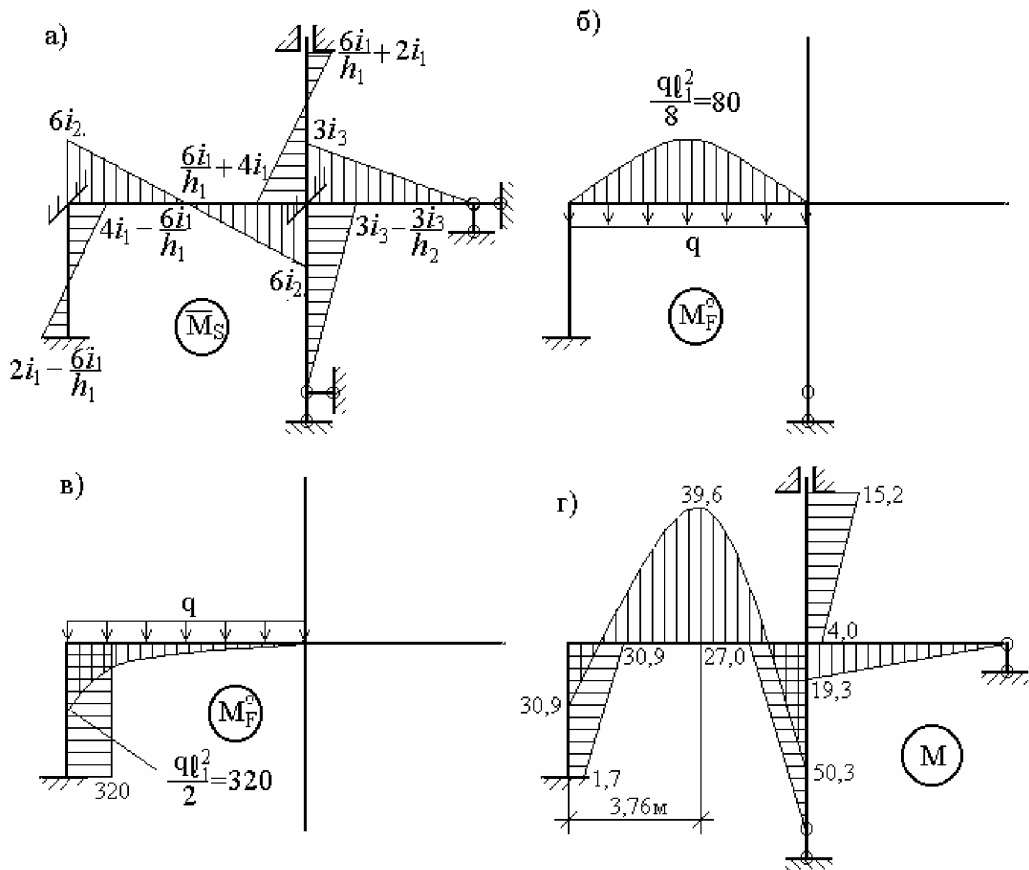


Рис. 58

Выполним статическую проверку. Для этого вырежем узлы 4 и 5, а также среднюю часть рамы (рис.59,а-в) и убедимся в выполнении условий равновесия.

Как уже говорилось, статическая проверка является достаточным критерием правильности выполненного расчета. Тем не менее, выполним дополнительно кинематическую проверку. Для этого построим суммарную единичную эпюру  $\bar{M}_s$  в основной системе *метода сил* (рис.59,г). Читателю предоставляется возможность самостоятельно убедиться в том, что результат умножения этой эпюры на окончательную эпюру моментов  $M$  (рис.58,г) равен нулю.

В заключение отметим, что *степень статической неопределенности* рассмотренной рамы равна пяти, а это означает, что трудоемкость расчета

данной системы методом сил значительно выше, чем при использовании метода перемещений.

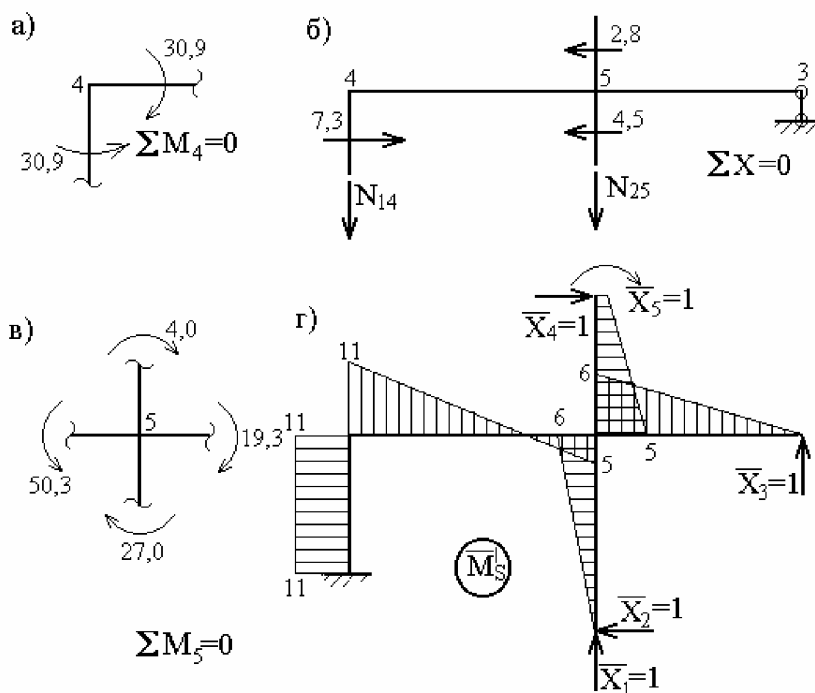


Рис. 59

**Пример 25.** Для рамы с наклонными стойками (рис.60,а) построить эпюры  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  при условии, что жесткость ригеля (2-3) в два раза больше чем жесткость наклонных стоек 1-2 и 3-4.

Определяем степень кинематической неопределимости рамы:

$$n = n_y + n_n = 1 + 1 = 2.$$

Основную систему образуем путем введения защемления в узле 2 и горизонтального опорного стержня в узле 3 (рис.60,б).

Для определения неизвестных перемещений  $z_1$  и  $z_2$  по направлениям введенных связей запишем систему канонических уравнений метода перемещений:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1F} = 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2F} = 0. \end{cases} \quad (4.19)$$

Используя вспомогательную таблицу метода перемещений, построим эпюры изгибающих моментов от единичного угла поворота  $\bar{Z}_1 = 1$  и от внешней нагрузки (рис.60,в,г).

Отметим, что узловая нагрузка  $F_1$  не вызывает изгибающих моментов в основной системе. Для построения эпюры моментов от единичного горизонтального перемещения  $\bar{Z}_2 = 1$  второй связи необходимо знать, как перемещаются в этом случае концы стержневой рамы. Перемещение узла 3 происходит по направлению, перпендикулярному линии 3-4 (искomое перемещение  $\bar{Z}_2$  является горизонтальной проекцией полного смещения узла 3, а узла 2 – по направлению, перпендикулярному линии 1-2. В результате этого происходит относительное перемещение узлов 2 и 3 по вертикали.

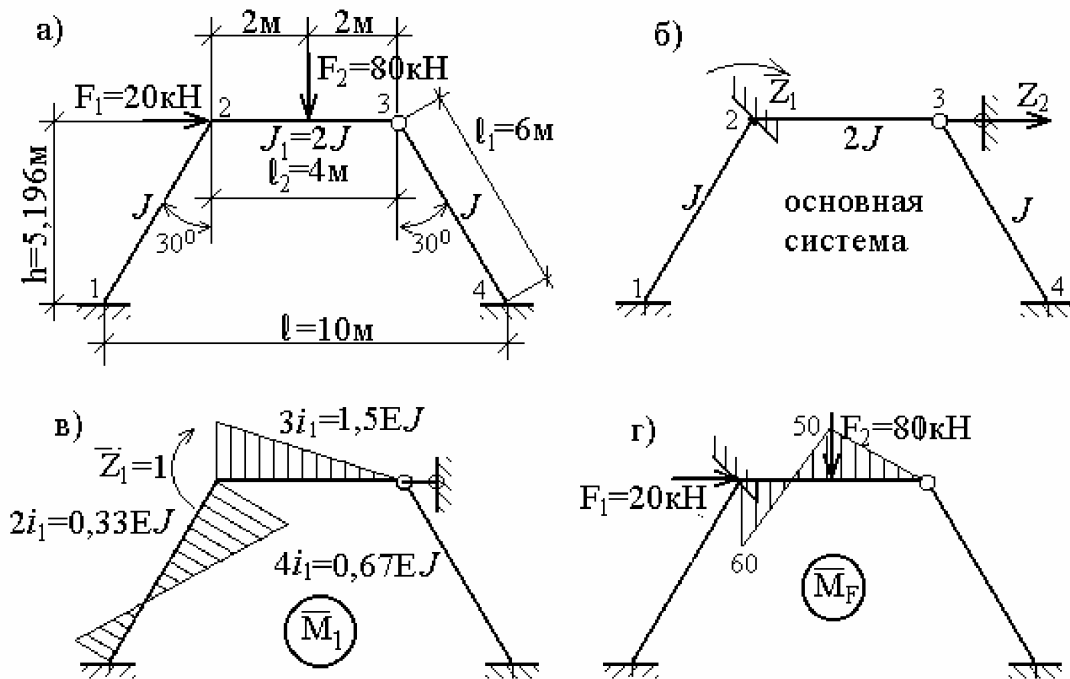


Рис. 60



Для определения указанных перемещений построим для шарнирной схемы, образованной из заданной рамы (рис.61,а), полярный план перемещений (рис.61,б). Из этого плана определим взаимное перемещение концов стержней:

$$\Delta_{12} = \Delta_{34} = \frac{1}{\cos 30^\circ} = 1,155;$$

$$\Delta_{23} = 2\text{tg}30^\circ = 1,155.$$

Так как введенное защемление препятствует повороту узла 2, то от найденных взаимных смещений произойдет изгиб стержней (рис.61,в). Эпюра моментов  $\bar{M}_2$  может быть теперь построена с помощью вспомогательной таблицы метода перемещений (рис.61,г).

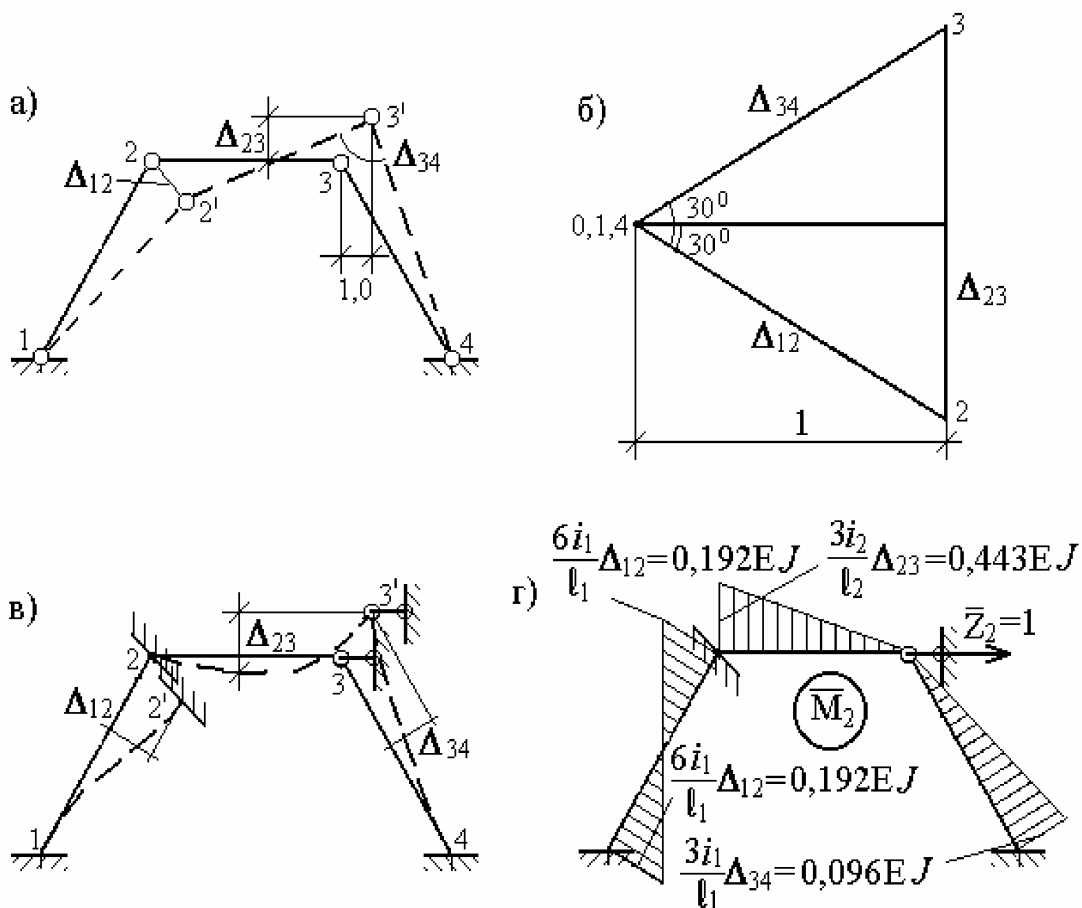


Рис. 61

Коэффициенты  $r_{11}$ ,  $r_{12}$  и свободный член  $R_{1F}$  определим из условия равновесия узла 2:

$$\begin{aligned} r_{11} &= 0,667EI + 1,5EI = 2,167EI; \\ r_{12} &= 0,433EI - 0,192EI = 0,241EI; \\ R_{1F} &= -60 \text{ кН} \cdot \text{м} \end{aligned}$$

Для определения коэффициента  $r_{22}$ , представляющего собой реакцию во введенном стержне от единичного смещения  $\bar{Z}_2 = 1$ , рассмотрим условия равновесия ригеля, отсеченного от стоек. Для этого необходимо определить поперечные и продольные силы, соответствующие эпюре  $\bar{M}_2$ , вырезав из рамы сначала узел 2, а затем узел 3. Так, условия равновесия узла 2 (рис.62,а) дают:

$$\sum Y = 0: (0,108 + 0,064 \sin 30^\circ)EI - N_{21} \cos 30^\circ = 0,$$

откуда  $N_{21} = 0,162EI$ .

$$\sum X = 0: (0,162 \sin 30^\circ + 0,064 \cos 30^\circ)EI - N_{23} = 0,$$

откуда  $N_{23} = 0,136EI$ .

Условия равновесия узла 3 (рис.62,б) позволяют получить:

$$\sum Y = 0: (-0,108 - 0,016 \sin 30^\circ)EI - N_{34} \cos 30^\circ = 0,$$

$N_{34} = -0,134EI$ .

$$\begin{aligned} \sum X &= 0: (0,136 + 0,016 \cos 30^\circ + 0,134 \sin 30^\circ)EI - r_{22} = 0, \\ r_{22} &= 0,217EI. \end{aligned}$$

Аналогично можно определить и свободный член  $R_{2F}$  по эпюре  $M_F$ , вырезая узлы 2 и 3 (рис.62,в,г):

$$R_{2F} = -37,32 \text{ кН}$$

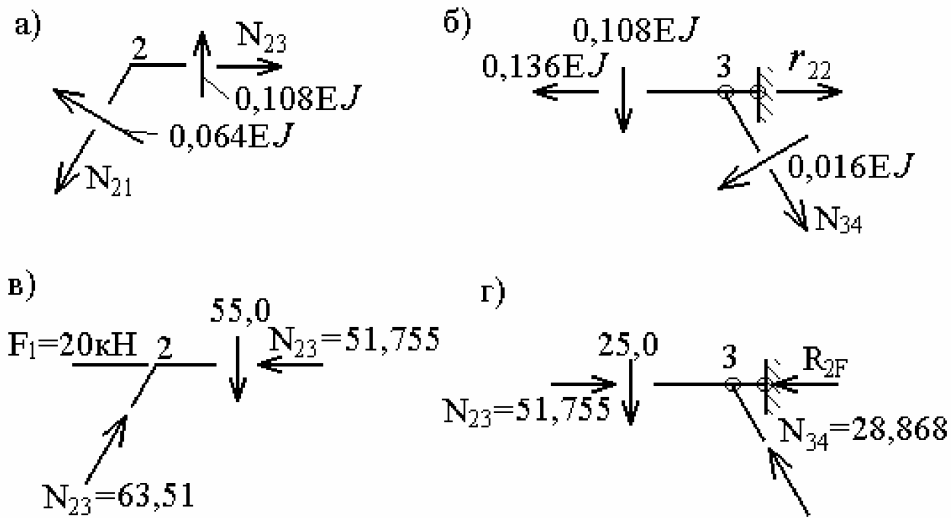


Рис. 62

Использование статического способа для вычисления коэффициентов  $R_{2F}$  и  $M_F$  для рамы с наклонными стойками приводит, как можно было убедиться из рассматриваемого примера, к усложнению расчетов. Поэтому в подобных случаях целесообразно использовать способ перемножения эпюр:

$$r_{22} = \sum \int_s \frac{\bar{M}_2^2}{EI} ds = \left( \frac{0,192 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,192 \cdot 2 + \frac{0,433 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,433 \cdot \frac{1}{2} + \frac{0,096 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,096 \right) EI = 0,217 EI.$$

Для определения свободного члена  $R_{2F}$  способом перемножения эпюр нужно построить эпюру моментов от внешней нагрузки в статически определимой системе, образованной из заданной рамы (рис.63,а):

$$R_{2F} = - \sum \int_s \frac{M_F^0 \bar{M}_2}{EI} ds = -(2 \cdot 503,92 - 2 \cdot 160 + 160 - 503,92) \cdot 0,192 + (2 \cdot 0,433 + 0,216) \cdot 160 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2} = -37,32 \text{ кН}$$

После подстановки вычисленных коэффициентов в уравнения (4.19) получим:

$$\begin{cases} 2,167Z_1 + 0,241Z_2 - \frac{60}{EI} = 0; \\ 0,241Z_1 + 0,217Z_2 - \frac{37,32}{EI} = 0, \end{cases}$$

откуда:

$$\begin{cases} Z_1 = \frac{9,768}{EI}; \\ Z_2 = \frac{161,132}{EI}. \end{cases}$$

Окончательную эпюру моментов (рис.63,б) строим по формуле:

$$M = \bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 + M_F.$$

Соответствующие ей эпюры поперечных и продольных сил показаны на рис.63,в,г.

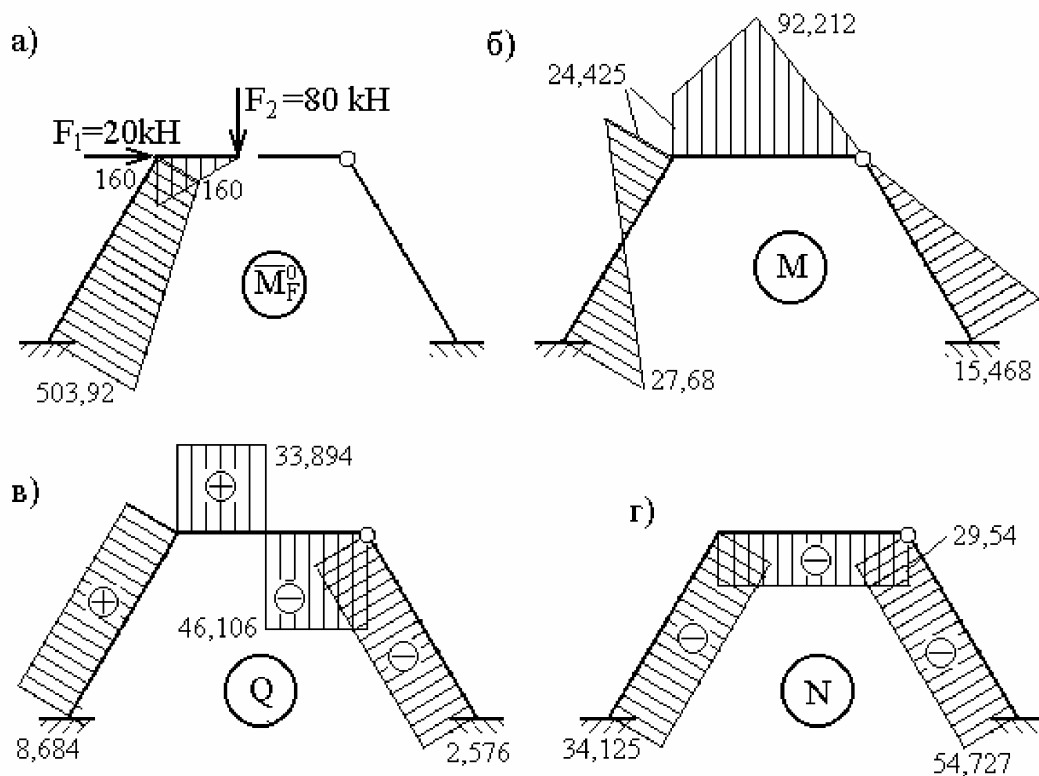


Рис. 63

Читателю предлагается самостоятельно убедиться в том, что для окончательных эпюр выполняются статические проверки: в узле 2 изгибающие моменты уравновешены; а силы, действующие на верхнюю отсеченную часть рамы, удовлетворяют условиям равновесия  $\sum X = 0$  и  $\sum Y = 0$ .

**Пример 26.** Используя упрощения, связанные с симметрией заданной рамы (рис.64,а), построить эпюру изгибающих моментов, при условии, что жесткости всех стержней одинаковы и равны  $EI$ .

Степень кинематической неопределимости рамы:

$$n = n_y + n_n = 2 + 1 = 3$$

При выборе основной системы метода перемещений (рис.64,б) используем условия симметрии. Сгруппируем неизвестные углы поворота, т.е. угол поворота узла 2 представим в виде суммы двух углов поворота  $Z_1$  и  $Z_2$ , а поворот узла 2', симметричного узлу 2, - в виде разности углов  $Z_1$  и  $Z_2$ .

Горизонтальное перемещение ригеля  $Z_3$  является обратносимметричным неизвестным, так как узел 2' при этом смещается от оси симметрии рамы, а симметричный ему узел 2 – к оси симметрии.

Для определения групповых неизвестных  $Z_1$ ,  $Z_2$  и  $Z_3$  запишем систему трех канонических уравнений метода перемещений:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + R_{1F} = 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2F} = 0; \\ r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3F} = 0. \end{cases} \quad (4.20)$$

Как видно, форма канонических уравнений при группировке неизвестных остается прежней. Но здесь все эпюры от единичных неизвестных (рис. 64, в-д) будут только симметричными или обратносимметричными, а канонические уравнения распадутся на две независимые системы, содержащие только симметричные или только обратносимметричные групповые неизвестные. При этом неизвестные перемещения узлов, расположенных на оси симметрии,

всегда обладают симметрией или обратной симметрией и поэтому не группируются.

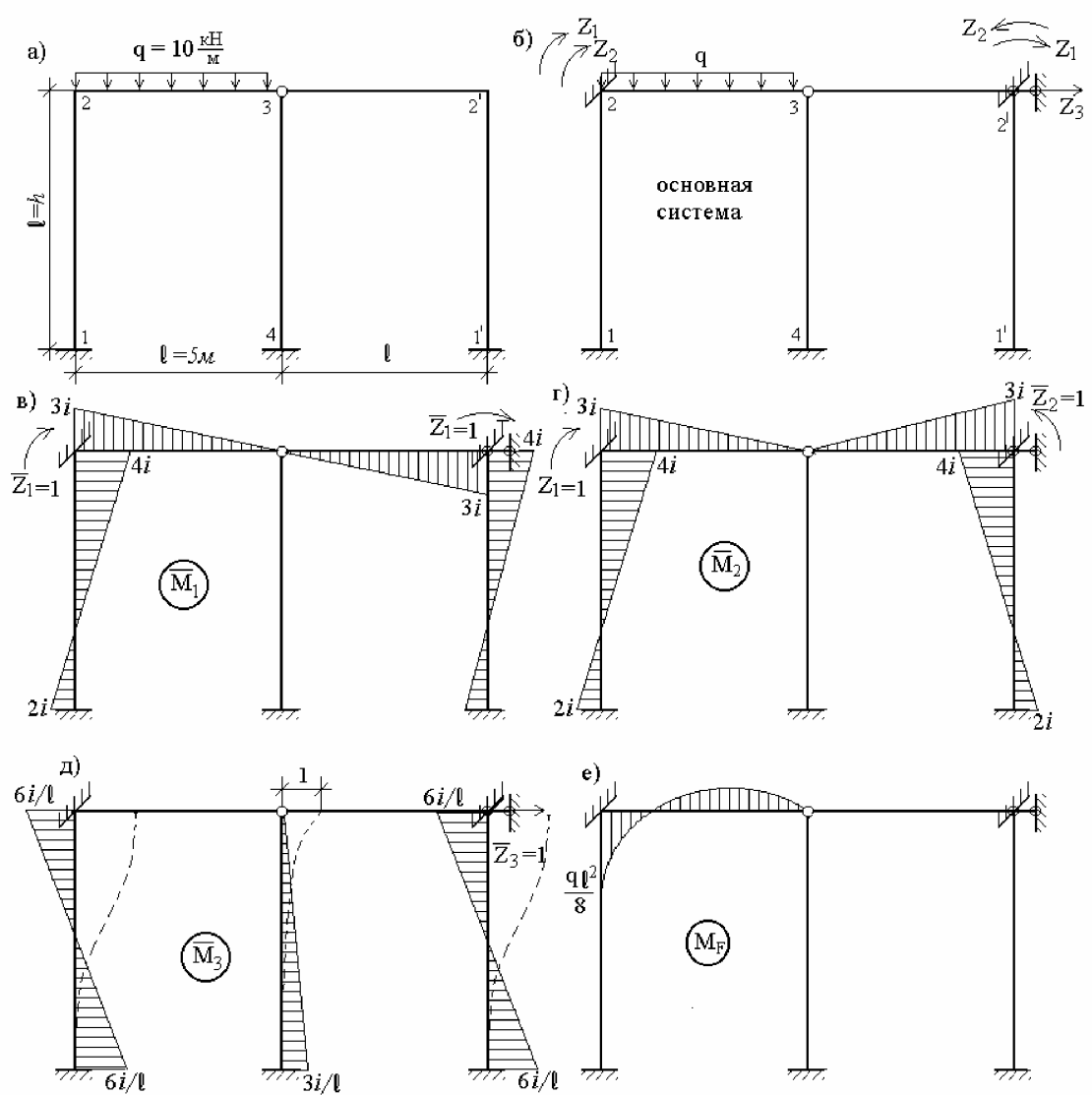


Рис. 64

Значения единичных коэффициентов и свободных членов в уравнениях (4.20) приобретают несколько иной смысл, чем ранее. Здесь  $r_{ij}$  и  $R_{iF}$  - обобщенные реакции, соответствующие обобщенному перемещению  $\bar{Z}_i$  от парного смещения  $\bar{Z}_j$  и от внешней нагрузки. Эти обобщенные реакции определяются как алгебраические суммы простых реакций в связях, которые

одновременно смещаются при групповом парном перемещении  $\overline{Z}_k$ . Положительные направления простых реакций принимаются, как и ранее, совпадающими с задаваемыми направлениями перемещений тех связей, в которых они определяются.

При использовании статического способа для коэффициентов и свободных членов канонических уравнений (4.20) получим:

$$r_{11} = r_{11}^n + r_{11}^l = 7i + 7i = 14i;$$

$$r_{12} = r_{12}^n + r_{12}^l = 7i - 7i = 0;$$

$$r_{13} = r_{13}^n + r_{13}^l = -\frac{6i}{\ell} - \frac{6i}{\ell} = \frac{12i}{\ell};$$

$$r_{22} = r_{22}^n + r_{22}^l = 7i + 7i = 14i;$$

$$r_{23} = r_{23}^n + r_{23}^l = -\frac{6i}{\ell} + \frac{6i}{\ell} = 0;$$

$$r_{33} = \frac{27i}{\ell^2};$$

$$R_{1F} = R_{2F} = R_{1F}^n + R_{1F}^l = -\frac{q\ell^2}{8} + 0 = -\frac{q\ell^2}{8};$$

$$R_{3F} = 0,$$

где индексами "л" и "n" обозначены соответственно левая (узел 2) и правая (узел 2') дополнительные заделки, в которых определяются обычные реакции (реактивные моменты). Реакции в дополнительном стержне ( $r_{33}$  и  $R_{3F}$ ) определены из условия равновесия ( $\sum X = 0$ ) отсеченного ригеля рамы.

Вследствие равенства нулю четырех коэффициентов система канонических уравнений (4.20) распадается на две системы, а точнее – на систему уравнений относительно неизвестных  $Z_1$  и  $Z_3$  и уравнение относительно  $Z_2$ :

$$\begin{cases} 14iZ_1 - \frac{12i}{\ell}Z_3 = \frac{q\ell^2}{8}; \\ -\frac{12i}{\ell}Z_1 + \frac{27i}{\ell^2}Z_3 = 0; \end{cases}$$

$$14iZ_2 = \frac{ql^2}{8}.$$

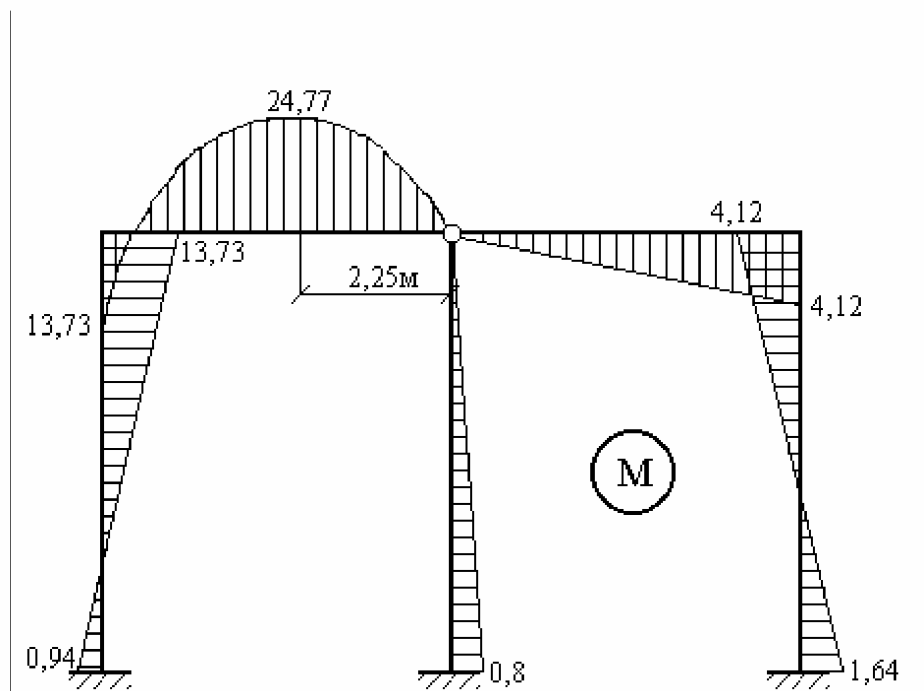
В результате решения получим следующие значения неизвестных:

$$Z_1 = \frac{3}{208} \cdot \frac{ql^2 i}{i}; \quad Z_2 = \frac{ql^2}{112i}; \quad Z_3 = \frac{ql^2}{156i}.$$

В этом примере обозначено:

$$i = \frac{EI}{l}.$$

Окончательная эпюра моментов (рис.65) имеет вид:



**Рис. 65**



## ЛИТЕРАТУРА:

1. Дарков А.В., Шапашников Н.Н. Строительная механика: Учеб. для строит. спец. вузов. – 8-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1986. – 607с.: ил.
- 2.Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики (статика стержневых систем): Учеб. пособие для студентов вузов /Г.К. Клейн, Н.Н. Леонтьев, М. Г. Ванюшенков и др.; Под ред. Г.Г. Клейна. 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа /1980. – 384с.: ил.
- 3.Справочник по сопротивлению материалов /Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В.; Отв. ред. Писаренко Г.С. – 2-е изд., перераб. и доп. – Киев: Наук. думка, 1988. – 736с.: ил.
- 4.Строительная механика: Учебник для вузов /Ю.И. Бутейко, Н.А. Засядько, С.Н. Кан и др.; Под ред. Ю.И. Бутенко. – К.: Выща шк., 1989. – 479с.; ил.
- 5.Строительная механика. Стержневые системы: Учебник для вузов /А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Я. Лащенко, Н.Н. Шапошников; Под ред. А.Ф. Смирнова. – М.: Стройиздат, 1981. – 512с; ил.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	2
Глава 1. Построение эпюр внутренних силовых факторов. ....	3
1.1 Внутренние силы упругости. Метод сечений. ....	3
1.2 Виды сопротивлений. ....	5
1.3. Виды опорных закреплений. ....	6
1.4 Построение эпюр продольных сил $N_z$ . ....	7
1.5 Построение эпюр крутящих моментов $M_{кр}$ . ....	8
1.6 Правила контроля эпюр $N_z$ и $M_{кр}$ . ....	9
1.7 Построение эпюр поперечных сил $Q_y$ и изгибающих моментов $M_x$ в балках. ....	10
1.8 Консольные балки. ....	11
1.9 Дифференциальные зависимости между $q, Q_y, M_x$ . ....	13
1.10 Балки на двух опорах. ....	15
1.11 Правила контроля эпюр $Q_y$ и $M_x$ . ....	18
1.12 Другие подходы к построению эпюр внутренних силовых факторов. ....	19
1.13 Построение эпюр для плоских рам. ....	20
1.14 Рамы с жесткой заделкой. ....	23
1.15 Рамы на двух шарнирных опорах. ....	27
1.16 Рамы на двух опорах с промежуточным шарниром. ....	33
1.17 Построение эпюр в плоско-пространственных системах. ....	36
1.18 Построение эпюр в ломаных стержнях. ....	43
Глава II Определение перемещений в упругих системах. ....	50
2.1 Обобщенные силы и обобщенные перемещения. ....	51
2.2 Работа внешних сил. Потенциальная энергия. ....	52
2.3. Теорема о взаимности работ. ....	56
2.4 Теорема о взаимности перемещений. ....	58
2.5 Вычислений перемещений методом Мора. ....	59
2.6 Примеры расчетов. ....	62
2.7 Правило Верещагина. ....	66
2.8. Основные варианты перемножения эпюр. ....	68
Глава III. Построение эпюр в статически неопределимых системах. ....	76
Метод сил. ....	76
3.1 Особенности статически неопределимых систем и методы их расчета. ....	76
3.2 Канонические уравнения метода сил. ....	78
3.3 Алгоритм расчета методом сил. ....	80
3.4. Выбор основной системы. ....	81
3.5. Вычисление коэффициентов и свободных членов канонических уравнений. ....	83
3.6. Универсальная проверка коэффициентов и свободных членов канонических уравнений. ....	84
3.7. Построение окончательных эпюр внутренних силовых факторов. ....	86
3.8. Проверка окончательной эпюры изгибающих моментов. ....	87
3.9. Определение перемещений в статически неопределимых системах. ....	88
3.10. Расчет симметричных систем методом сил. ....	89
3.11. Примеры расчетов. ....	91
Глава IV. Построение эпюр в статически неопределимых системах. ....	117
Метод перемещений. ....	117
4.1 Сущность метода. ....	117
4.2. Вспомогательная таблица метода перемещений. ....	121
4.3. Каноническое уравнение метода перемещений. ....	128
4.4. Алгоритм расчета систем методом перемещений. ....	131
4.5. Методы вычисления коэффициентов и свободных членов канонических уравнений. ....	131
4.6. Проверки метода перемещений. ....	132
4.7. Использование симметрии при расчете рам методом перемещений. ....	135
4.8. Примеры расчетов. ....	136
Литература: .....	1533