

**ОПД.Р.03 СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА
УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
ЧАСТЬ 2**

5. МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

§ 5.1. РАБОТА ВНЕШНИХ СИЛ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ

Приложение нагрузки к любому сооружению вызывает его деформацию. При этом части сооружения выходят из состояния покоя, приобретают некоторые скорости и ускорения. Если нагрузка возрастает медленно, то эти ускорения невелики, а потому можно пренебречь силами инерции, развивающимися в процессе перехода системы в деформированное состояние. Такое плавное (постепенное) приложение нагрузки называется *статическим*.

Определим работу внешней нагрузки, например силы P , статически приложенной к некоторой упругой системе (рис. 5.1), материал которой удовлетворяет закону Гука.



Рис. 5.1

При малых деформациях к этой системе применим принцип независимости действия сил, и, следовательно, перемещения отдельных точек и сечений конструкции прямо пропорциональны числовой величине вызывающей их нагрузки. В общем виде эту зависимость можно выразить равенством

$$\Delta = \alpha P. \quad (5.1)$$

Здесь Δ — перемещение по направлению действия силы P ; α — некоторый коэффициент, зависящий от материала, схемы и размеров сооружения.

Увеличим силу P на бесконечно малую величину dP . Это приращение вызовет возрастание перемещения на $d\Delta$.

Составим выражение элементарной работы внешней силы на перемещении $d\Delta$, отбрасывая при этом бесконечно малые величины второго порядка малости:

$$dA = P d\Delta.$$

Заменяем значение $d\Delta$ на основании формулы (5.1) выражением

$$dA = P d\Delta = \alpha P dP.$$

Интегрируя это выражение в пределах полного изменения силы от нуля до ее конечного значения, получаем формулу для определения работы, совершенной статически приложенной внешней

силой P :

$$A = \alpha \int_0^P P \, dP = \alpha P^2 / 2.$$

Так как $\Delta = \alpha P$, то полученную формулу можно представить в виде

$$A = P\Delta / 2. \quad (5.2)$$

В общем случае направление силы P может не совпадать с направлением вызванного ею перемещения. Так как числовая величина работы определяется произведением силы на путь, пройденный по направлению этой силы, то под величиной Δ надо понимать проекцию действительного (полного) перемещения точки приложения силы на направление силы. Например, при действии силы P под углом β к горизонтальной оси (рис. 5.2) перемещение Δ измеряется отрезком ab (представляющим собой проекцию действительного перемещения aa_1 на направление силы P).

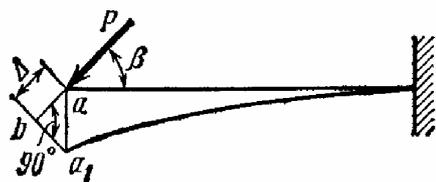


Рис. 5.2

В случае, когда к системе приложена пара сил с моментом M (сосредоточенный момент), выражение работы можно получить аналогичным образом. При этом необходимо выбрать соответствующий сосредоточенному моменту вид перемещения; это будет угол поворота того поперечного сечения бруса, к которому приложен момент.

Например, работа момента, статически приложенного к балке, изображенной на рис. 5.3,

$$A = M\vartheta / 2, \quad (5.3)$$

где ϑ — угол поворота (в радианах) того сечения балки, к которому приложен момент M .

Итак, работа внешней силы при статическом действии ее на любое упругое сооружение равна половине произведения значения этой силы на величину соответствующего ей перемещения.

Для обобщения полученного вывода под силой понимаем любое воздействие, приложенное к упругой системе, т. е. не только сосредоточенную силу, но и момент, равномерно распределенную нагрузку и т. п.; под перемещением понимаем тот вид перемещения, на котором данная сила производит работу. Сосредоточенной силе P соответствует линейное перемещение, моменту M — угловое, а равномерно распределенной нагрузке — площадь эпюры перемещений на участке действия нагрузки.

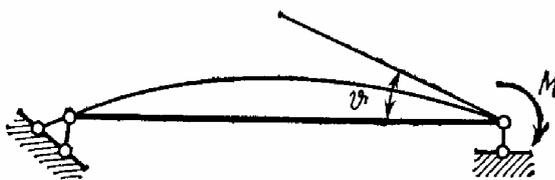


Рис. 5.3

При статическом действии на сооружение группы внешних сил работа этих сил равна половине суммы произведений каждой силы на величину соответствующего ей перемещения, вызванного действием всей группы сил. Так, например, при действии на балку, изображенную на рис. 5.4, сосредоточенных сил P_1 , P_2 и сосредоточенных моментов M_1 , M_2 работа внешних сил

$$A = P_1 \Delta_1 / 2 + P_2 \Delta_2 / 2 + M_1 \vartheta_1 / 2 - M_2 \vartheta_2 / 2.$$

Знак минус перед последним членом выражения принят потому, что направление угла поворота ϑ_2 поперечного сечения балки, в котором приложен момент M_2 , противоположно направлению этого момента.

Итак,

$$A = \sum (P_i \Delta_i / 2) + \sum (M_i \vartheta_i / 2). \quad (5.4)$$

Работу внешних сил на вызванных ими перемещениях можно выразить и иначе, а именно: через изгибающие моменты, продольные и поперечные силы, возникающие в поперечных сечениях стержней конструкции.

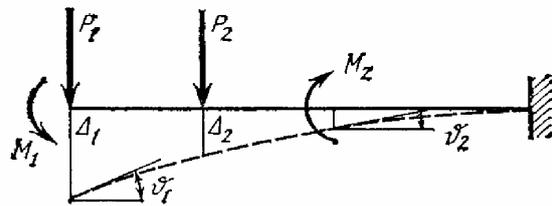


Рис. 5.4

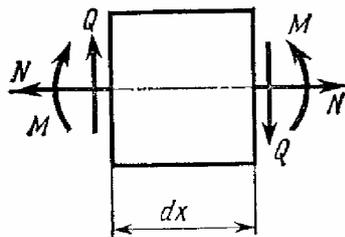


Рис. 5.5

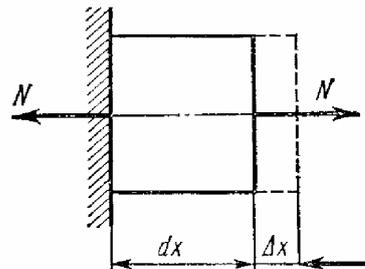


Рис. 5.6

Выделим из прямолинейного стержня двумя сечениями, перпендикулярными его оси (рис. 5.5), бесконечно малый элемент длиной dx (элемент dx). Стержень состоит из бесконечно большого числа таких элементов. К элементу dx в общем случае плоской задачи¹ приложены продольная сила N , изгибающий момент M и поперечная сила Q .

Усилия N , M , Q являются внутренними усилиями по отношению к целому стержню. Однако для выделенного элемента они являются внешними силами, а потому работу A можно получить как сумму работ, совершенных статически возрастающими усилиями N , M , Q

¹ При плоской задаче продольные оси всех элементов системы, одна из главных осей инерции каждого поперечного сечения любого элемента, а также и все действующие на систему нагрузки (силовые и моментные) расположены в одной плоскости; эта плоскость называется расчетной и при изображении системы совмещается с плоскостью чертежа.

на соответствующих деформациях элементов dx . Рассмотрим отдельно влияние каждого из этих усилий на элемент dx .

Элемент dx , находящийся под действием только продольных сил N , изображен на рис. 5.6. Если левое его сечение считать неподвижным, то правое сечение под влиянием продольной силы переместится вправо на величину $\Delta_x = Ndx/(EF)$. На этом перемещении статически возрастающая сила N совершит работу

$$dA_N = N\Delta_x/2 = (N/2) Ndx/(EF). \quad (5.5)$$

Элемент dx , находящийся под действием только изгибающих моментов M , изображен на рис. 5.7. Если левое его сечение неподвижно закрепить, то взаимный угол поворота торцовых сечений элемента будет равен углу поворота Δ_ϕ его правого сечения:

$$\Delta_\phi = Mdx/(EJ).$$

На этом угловом перемещении статически возрастающий момент M совершит работу

$$dA_M = M\Delta_\phi/2 = (M/2) Mdx/(EJ). \quad (5.6)$$

Элемент dx , находящийся под действием только поперечных сил Q , изображен на рис. 5.8, а. Закрепив левое его сечение (рис. 5.8, б), приложим к правому касательные усилия τdF , равнодействующей которых является поперечная сила Q .

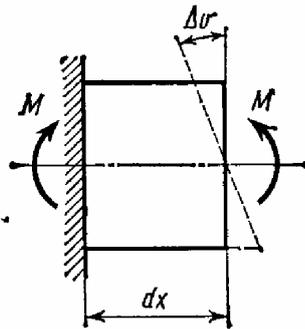


Рис. 5.7

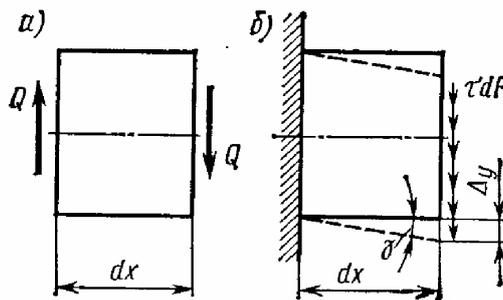


Рис. 5.8

Предположим, что касательные напряжения τ равномерно распределены по всей площади F поперечного сечения, т. е. $\tau = Q/F$; тогда перемещение Δ_y (рис. 5.8, б), вызванное действием поперечной силы Q , представляющее собой сдвиг торцовых сечений элемента dx друг относительно друга, определится из выражения

$$\Delta_y = \gamma dx = (\tau/G) dx = Qdx/(GF),$$

а работа статически возрастающей силы Q на этом перемещении

$$dA_Q = \frac{1}{2} Q\Delta_y = \frac{1}{2} Q \frac{Q dx}{GF}.$$

В действительности касательные напряжения τ распределены по площади поперечного сечения неравномерно, что учитывается

путем введения поправочного коэффициента η . Следовательно,

$$dA_Q = \frac{1}{2} Q \frac{Q dx}{GF} \eta. \quad (5.7)$$

При одновременном действии на выделенный элемент dx продольной силы N , изгибающего момента M и поперечной силы Q работа каждой из этих сил на перемещениях, вызываемых остальными силами, равна нулю. Так, например, при действии продольных сил N не происходит взаимный поворот и сдвиг торцовых сечений элемента dx (см. рис. 5.6), и, следовательно, работа изгибающего момента M и поперечной силы Q на деформациях элемента dx от силы N равна нулю. Поэтому полная работа

$$dA = dA_N + dA_M + dA_Q = \frac{1}{2} \left(N \frac{N dx}{EF} + M \frac{M dx}{EJ} + Q \frac{Q dx}{GF} \eta \right). \quad (5.8)$$

В формуле (5.8) множители N , M и Q представляют собой внутренние усилия в поперечном сечении, а множители $Ndx/(EF)$, $Mdx/(EJ)$ и $[Qdx/(GF)] \eta$ — соответствующие им деформации элемента dx стержня.

Интегрируя выражение dA в пределах длины l каждого участка всех стержней и производя суммирование по всем участкам системы, получаем следующую формулу для вычисления работы внешних сил на вызванных ими перемещениях (в случае плоской задачи):

$$A = \sum \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ} + \sum \int_0^l \frac{N^2 dx}{2EF} + \sum \int_0^l \frac{Q^2 dx}{2GF} \eta. \quad (5.9)$$

Из формулы (5.9) видно, что работа внешних сил на вызванных ими перемещениях всегда положительна.

На основании закона сохранения энергии работа A внешних сил переходит в потенциальную энергию U деформации, т. е.

$$A = U. \quad (5.10)$$

Подставим в равенство (5.10) выражение A по формуле (5.9):

$$U = \sum \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ} + \sum \int_0^l \frac{N^2 dx}{2EF} + \sum \int_0^l \frac{Q^2 dx}{2GF} \eta. \quad (5.11)$$

Полученные в настоящем параграфе формулы применимы не только для прямых стержней, но и для стержней малой кривизны.

§ 5.2. ТЕОРЕМА О ВЗАИМНОСТИ РАБОТ

Перемещения (прогибы и углы поворота) системы в результате ее деформации условимся обозначать Δ_{mn} , где индекс m указывает направление перемещения, а n — причину, вызвавшую его. Таким образом, Δ_{mn} — перемещение по направлению «силы» m , вызванное «силой» n . Перемещение Δ_{mn} может представлять собой либо линейное смещение, либо угол поворота (в радианах) в зависимости от того, является сила m сосредоточенной силой или сосредоточенным

моментом. Под силой n понимается любая нагрузка, действующая на сооружение, например нагрузка, состоящая из нескольких сосредоточенных сил и моментов и какой угодно распределенной нагрузки.

Рассмотрим два состояния упругой системы, находящейся в равновесии. В каждом из этих состояний на систему (сооружение) действует некоторая статическая нагрузка, например в первом состоянии сила P_1 , а во втором — сила P_2 (рис. 5.9).

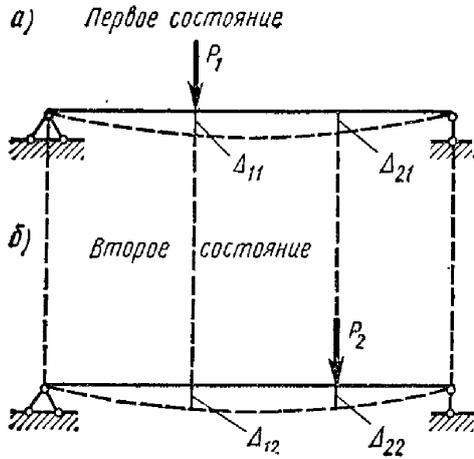


Рис. 5.9

На рис. 5.9 показаны перемещения Δ_{11} , Δ_{12} , Δ_{21} и Δ_{22} , которые представляют собой:

Δ_{11} — перемещение по направлению силы P_1 от действия силы P_1 ;

Δ_{12} — перемещение по направлению силы P_1 от действия силы P_2 ;

Δ_{21} — перемещение по направлению силы P_2 от действия силы P_1 ;

Δ_{22} — перемещение по направлению силы P_2 от действия силы P_2 .

Работу силы P_1 (т. е. нагрузки первого состояния) на вызванных ею перемещениях (т. е. на перемещениях первого же состояния) обозначим A_{11} , а работу силы P_2 на вызванных ею перемещениях — A_{22} .

Числовые величины этих работ при статическом действии сил равны [(см. выражение (5.4)]:

$$A_{11} = P_1 \Delta_{11} / 2; \quad A_{22} = P_2 \Delta_{22} / 2. \quad (5.12)$$

Работы A_{11} и A_{22} (в случае плоской задачи) с помощью формулы (5.9) можно выразить через внутренние усилия, возникающие в поперечных сечениях стержней системы:

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= \sum \int_0^l \frac{M_1^2 dx}{2EJ} + \sum \int_0^l \frac{N_1^2 dx}{2EF} + \sum \int_0^l \frac{Q_1^2 dx}{2GF} \eta; \\ A_{22} &= \sum \int_0^l \frac{M_2^2 dx}{2EJ} + \sum \int_0^l \frac{N_2^2 dx}{2EF} + \sum \int_0^l \frac{Q_2^2 dx}{2GF} \eta. \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

Рассмотрим теперь случай статического нагружения той же системы (см. рис. 5.9) силами P_1 и P_2 в такой последовательности. Сначала к системе прикладывается статически нарастающая сила P_1 (рис. 5.10). Когда процесс ее статического нарастания закончен, деформация системы и внутренние усилия, действующие в ней, становятся такими же, как и в первом состоянии, изображенном на рис. 5.9, а. Работа силы P_1 в процессе ее нарастания от нуля до ее конечного значения равна $A_{11} = P_1 \Delta_{11} / 2$. Затем на систему начинает действовать также статически нарастающая сила P_2 (рис. 5.10).

В результате этого система получает дополнительные деформации и в ней возникают дополнительные внутренние усилия, равные деформациям и усилиям во втором состоянии, изображенном на рис. 5.9, б. В процессе нарастания силы P_2 от нуля до ее конечного значения сила P_1 , оставаясь постоянной, перемещается вниз на величину дополнительного прогиба Δ_{12} и, следовательно, совершает дополнительную работу, равную $A_{12} = P_1 \Delta_{12}$; сила P_2 при этом совершает работу $A_{22} = P_2 \Delta_{22} / 2$. Таким образом, полная работа A при последовательном нагружении системы силами P_1 и P_2 равна:

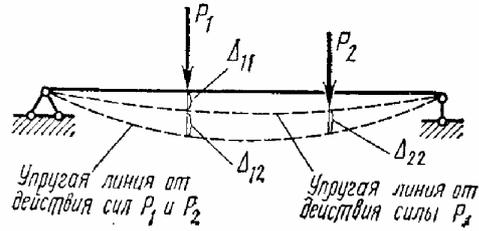


Рис. 5.10

$$A = A_{11} + A_{12} + A_{22} = P_1 \Delta_{11} / 2 + P_1 \Delta_{12} + P_2 \Delta_{22} / 2. \quad (5.14)$$

С другой стороны, работу A сил P_1 и P_2 можно определить по формуле (5.4) как полусумму произведений каждой из этих сил на соответствующее ей полное перемещение, вызванное обеими силами (рис. 5.11):

$$A = \frac{P_1 (\Delta_{11} + \Delta_{12})}{2} + \frac{P_2 (\Delta_{21} + \Delta_{22})}{2}. \quad (5.15)$$

Приравниваем друг другу выражения (5.14) и (5.15):

$$\frac{P_1 \Delta_{11}}{2} + P_1 \Delta_{12} + \frac{P_2 \Delta_{22}}{2} = \frac{P_1 (\Delta_{11} + \Delta_{12})}{2} + \frac{P_2 (\Delta_{21} + \Delta_{22})}{2},$$

откуда

$$P_1 \Delta_{12} = P_2 \Delta_{21}. \quad (5.16)$$

Значение $P_1 \Delta_{12}$ представляет собой работу A_{12} силы P_1 первого состояния (см. рис. 5.9, а) на перемещении по ее направлению, вызванном силой P_2 второго состояния (см. рис. 5.9, б). Аналогично, $P_2 \Delta_{21}$ представляет собой работу A_{21} силы P_2 второго состояния на перемещении по ее направлению, вызванном силой P_1 первого состояния.

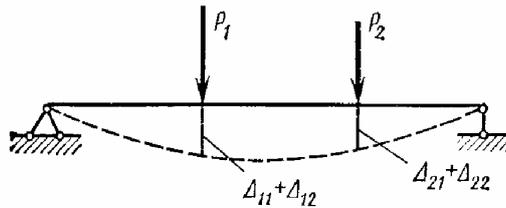


Рис. 5.11

Следовательно,

$$A_{12} = A_{21}. \quad (5.17)$$

Такой же результат был бы получен, если бы в каждом из рассмотренных состояний

(см. рис. 5.9, а, б) к системе прикладывалась не одна сила, а любое число сил и моментов.

Таким образом, работа сил первого состояния на перемещениях по их направлениям, вызванных силами второго состояния, равна работе сил второго состояния на перемещениях по их направлениям, вызванных силами первого состояния.

Этот вывод носит название теоремы о взаимности работ или теоремы Бетти.

Выразим работу A_{12} через изгибающие моменты, продольные и поперечные силы, возникающие в первом и втором состояниях.

Из выражения (5.14)

$$A_{12} = A - A_{11} - A_{22}. \quad (5.18)$$

Здесь A — полная работа, совершаемая силами P_1 и P_2 на перемещениях, вызванных этими же силами. На основании формулы (5.11)

$$A = \sum \int_0^l \frac{(M_1 + M_2)^2 dx}{2EJ} + \sum \int_0^l \frac{(N_1 + N_2)^2 dx}{2EF} + \sum \int_0^l \frac{(Q_1 + Q_2)^2 dx}{2GF} \eta, \quad (5.19)$$

где суммы $M_1 + M_2$, $N_1 + N_2$ и $Q_1 + Q_2$ представляют собой полные значения внутренних усилий в поперечных сечениях стержней от суммарного действия сил P_1 и P_2 .

Подставим в правую часть формулы (5.18) выражения A , A_{11} и A_{22} по формулам (5.19) и (5.13):

$$A_{12} = \sum \int_0^l \frac{(M_1 + M_2)^2 - M_1^2 - M_2^2}{2EJ} dx + \sum \int_0^l \frac{(N_1 + N_2)^2 - N_1^2 - N_2^2}{2EF} dx + \\ + \sum \int_0^l \frac{(Q_1 + Q_2)^2 - Q_1^2 - Q_2^2}{2GF} dx \eta,$$

или

$$A_{12} = \sum \int_0^l M_1 \frac{M_2 dx}{EJ} + \sum \int_0^l N_1 \frac{N_2 dx}{EF} + \sum \int_0^l Q_1 \frac{Q_2 dx}{GF} \eta. \quad (5.20)$$

Каждое подынтегральное выражение в правой части равенства (5.20) можно рассматривать как произведение внутреннего усилия (например, изгибающего момента M_1), возникающего в сечении стержня от сил первого состояния, на деформацию [например, $M_2 dx / (EJ)$] элемента dx , вызванную силами второго состояния.

§ 5.3. ТЕОРЕМА О ВЗАИМНОСТИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Рассмотрим два состояния системы. В первом состоянии к системе приложена сила $P_1 = 1$, а во втором — сила $P_2 = 1$ (рис. 5.12).

Обозначим перемещения, вызванные единичными силами или моментами (т. е. силами $P = 1$ или моментами $M = 1$), знаком δ в отличие от перемещений, вызванных силами и моментами, не равными единице, обозначаемых знаком Δ . В соответствии с этим перемещение рассматриваемой системы по направлению единичной силы P_2 в первом состоянии (т. е. вызванное силой $P_1 = 1$) обозначим δ_{21} , а перемещение по направлению единичной силы P_1 во втором состоянии обозначим δ_{12} (рис. 5.12).

На основании теоремы о взаимности работ [см. формулу (5.16)] для рассматриваемых двух состояний

$$P_1 \delta_{12} = P_2 \delta_{21},$$

но так как

$$P_1 = P_2 = 1,$$

то

$$\delta_{12} = \delta_{21},$$

или в общем случае действия любых единичных сил

$$\delta_{mn} = \delta_{nm}. \quad (5.21)$$

Полученное равенство носит название теоремы о взаимности перемещений (теоремы, или принципа, Максвелла): для двух единичных состояний упругой системы перемещение по направлению

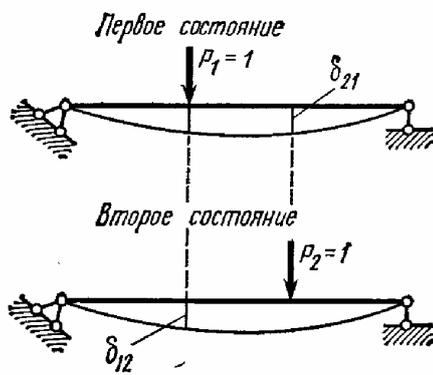


Рис. 5.12

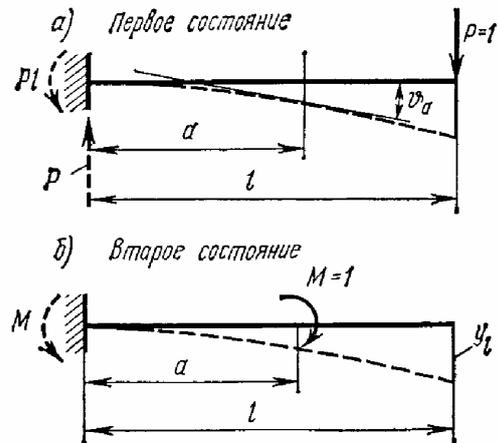


Рис. 5.13

первой единичной силы, вызванное второй единичной силой, равно перемещению по направлению второй силы, вызванному первой силой.

Для иллюстрации теоремы Максвелла в качестве примера рассмотрим два состояния балки, изображенной на рис. 5.13. В первом состоянии на балку действует сила $P=1$, а во втором — момент $M=1$.

Угол поворота ϑ_a , вызванный силой $P=1$, на основании формулы (5.21) должен быть численно равен прогибу y_l , вызванному моментом $M=1$, т. е. $\vartheta_a = y_l$.

Определим значения ϑ_a и y_l методом начальных параметров. В первом состоянии (рис. 5.13, а)

$$\vartheta_a = \frac{1}{EJ} \left(-Pla + \frac{Pa^2}{2} \right) = -\frac{Pa}{EJ} \left(l - \frac{a}{2} \right);$$

во втором состоянии (рис. 5.13, б)

$$y_l = \frac{1}{EJ} \left[-M \frac{l^2}{2} + M \frac{(l-a)^2}{2} \right] = -\frac{Ma}{EJ} \left(l - \frac{a}{2} \right).$$

При $M = P = 1$

$$\vartheta_a = -\frac{a}{EJ} \left(l - \frac{a}{2} \right) \text{ и } y_l = -\frac{a}{EJ} \left(l - \frac{a}{2} \right),$$

т. е.

$$\vartheta_a = y_l.$$

Единичные перемещения (например, перемещения, вызванные отвлеченной единичной силой $P=1$ или отвлеченным единичным моментом $M=1$) имеют размерности, отличные от обычных размерностей перемещений. Размерность единичного перемещения представляет собой размерность отношения перемещения (не единичного) к вызвавшей его нагрузке. Так, например, в рассмотренном примере единичный угол поворота ϑ_a , вызванный силой $P=1$, выражен в $1/\text{кН}$, единичный прогиб y_l , вызванный моментом $M=1$, выражен в $\text{м}/\text{кН}\cdot\text{м}$, или $1/\text{кН}$, т. е. в тех же функциях, что и угол ϑ_a .

§ 5.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ. ИНТЕГРАЛ МОРА

Универсальный метод определения перемещений (линейных перемещений и углов поворота), возникающих в любой стержневой системе от произвольной нагрузки, имеет особенно большое значение для расчета статически неопределимых систем.

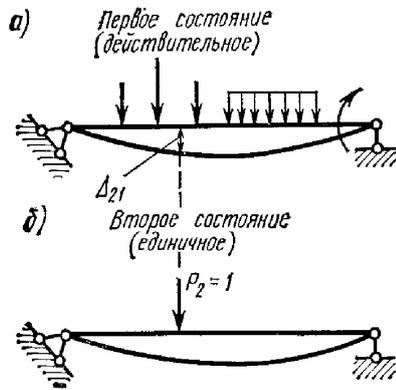


Рис. 5.14

Рассмотрим два состояния системы. В первом состоянии на нее действует любое число каких угодно сил и моментов (рис. 5.14, а). Во втором состоянии к системе приложена одна лишь сосредоточенная сила $P_2=1$ (рис. 5.14, б).

Составим выражение работы A_{21} силы $P_2=1$ на перемещении Δ_{21} , возникающем от сил первого состояния:

$$A_{21} = P_2 \Delta_{21} = 1 \cdot \Delta_{21} = \Delta_{21}.$$

Выразим A_{21} (в случае плоской задачи) через внутренние усилия в стержнях системы [с помощью формул (5.17) и (5.20)]:

$$A_{21} = \Delta_{21} = \sum \int_0^l \bar{M}_2 \frac{M_1 dx}{EJ} + \sum \int_0^l \bar{N}_2 \frac{N_1 dx}{EF} + \sum \int_0^l \bar{Q}_2 \frac{Q_1 dx}{GF} \eta. \quad (5.22)$$

Условимся, что черточки над M_2 , N_2 и Q_2 указывают на то, что эти внутренние усилия вызваны действием силы, равной единице.

Таким образом, перемещение от любой нагрузки с помощью формулы (5.22) можно выразить через внутренние усилия, возникающие в заданной системе от этой нагрузки и возникающие в ней от единичной силы. Направление единичной силы совпадает с направлением определяемого перемещения. Если определяется ли-

нейное смещение (например, прогиб какой-либо точки оси стержня), то единичная сила представляет собой безразмерную сосредоточенную силу, приложенную в этой точке; если же определяется угол поворота поперечного сечения в какой-либо точке оси стержня, то единичная сила представляет собой сосредоточенный момент (также безразмерный), приложенный в этой точке.

Состояние сооружения, вызванное действием единичной силы, называется *единичным состоянием* (или фиктивным). В отличие от него состояние, вызванное действием заданной нагрузки, называется *действительным* (или грузовым).

Иногда цифровые индексы 1 и 2 в формуле (5.22) заменяются буквенными, например m и n , тогда эта формула принимает вид

$$\Delta_{mn} = \sum \int_0^l \bar{M}_m \frac{M_n dx}{EJ} + \sum \int_0^l \bar{N}_m \frac{N_n dx}{EF} + \sum \int_0^l \bar{Q}_m \frac{Q_n dx}{GF} \eta, \quad (5.23)$$

где Δ_{mn} — перемещение по направлению «силы» $P_m = 1$, вызванное действием нагрузки n (группы «сил» n).

При размерах поперечных сечений каждого стержня системы, постоянных по длине этого стержня, выражение (5.23) принимает вид

$$\Delta_{mn} = \sum \frac{1}{EJ} \int_0^l \bar{M}_m M_n dx + \sum \frac{1}{EF} \int_0^l \bar{N}_m N_n dx + \sum \frac{\eta}{GF} \int_0^l \bar{Q}_m Q_n dx. \quad (5.24)$$

Каждое из равенств (5.22) — (5.24) носит название формулы перемещений (интеграла, или формулы, Мора).

Определение перемещений с помощью полученной формулы производится в следующем порядке:

1) находятся выражения усилий M_n , N_n и Q_n от заданной нагрузки как функции координаты x произвольного сечения;

2) по направлению искомого перемещения прикладывается соответствующая ему единичная сила (при линейном перемещении — сосредоточенная сила, при угле поворота — сосредоточенный момент);

3) определяются усилия \bar{M}_m , \bar{N}_m и \bar{Q}_m от единичной силы как функции координаты x произвольного сечения;

4) найденные выражения усилий M_n , N_n , Q_n , \bar{M}_m , \bar{N}_m и \bar{Q}_m подставляются в правую часть формулы (5.23) или (5.24) и интегрированием по участкам в пределах всего сооружения определяется искомое перемещение Δ_{mn} . Если Δ_{mn} положительно, то перемещение совпадает с направлением единичной силы, а если отрицательно, то противоположно этому направлению.

В случае, если элемент конструкции представляет собой брус малой кривизны, определение перемещений может выполняться по формуле Мора, полученной для прямого бруса, с заменой элемента длины dx в подынтегральном выражении элементом дуги ds .

Иногда, в частности при расчете статически неопределимых систем, приходится определять взаимные перемещения отдельных

точек или сечений сооружений. В этом случае в направлении искомого перемещения прикладывается обобщенная единичная сила (при определении линейного перемещения) или обобщенный единичный момент (при определении взаимного угла поворота). Например, если требуется определить изменение расстояния между точками C и D оси рамы, изображенной на рис. 5.15, a , то следует в точках C и D приложить единичные силы, направленные по линии CD , как показано на рис. 5.15, b . Вычисление интеграла Мора производится по изложенным выше правилам, но при этом под единичными внутренними усилиями $\bar{M}_m, \bar{N}_m, \bar{Q}_m$ понимаются их значения, соответствующие одновременному действию обеих единичных сил.

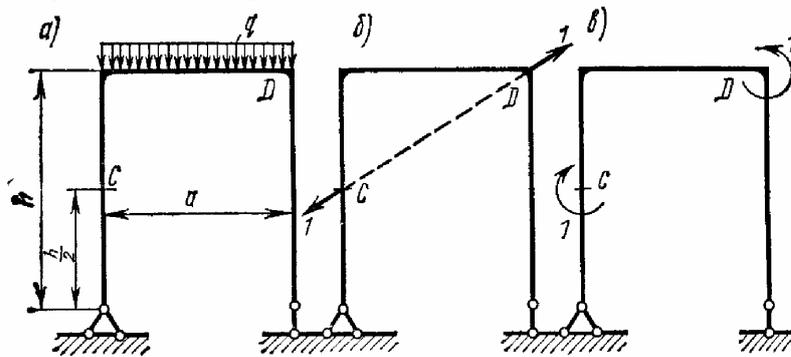


Рис. 5.15

В рассматриваемом случае, если результат вычислений интеграла Мора получится положительным, то это будет указывать на то, что направление искомого перемещения совпадает с направлением единичных сил, т. е. расстояние между точками C и D увеличивается; знак минус указывает на уменьшение этого расстояния, т. е. на сближение точек C и D .

Аналогично можно определить взаимный угол поворота любых двух сечений рамы, например сечений, соответствующих тем же точкам C и D . Для этого в указанных сечениях надо приложить единичные моменты, действующие в противоположных направлениях (рис. 5.15, в). В остальном вычисление перемещения производится обычным порядком.

Практически в большинстве случаев плоской задачи используется лишь один член формулы перемещений, а именно, если рассматриваются сооружения, преимущественно работающие на изгиб (балки, рамы, а часто и арки), то в формуле перемещений с соблюдением вполне достаточной точности можно оставить только интеграл, зависящий от изгибающих моментов. При расчете сооружений, элементы которых работают в основном на центральное растяжение и сжатие (например, фермы), можно не учитывать деформации изгиба и сдвига; в соответствии с этим в формуле перемещений остается лишь член, содержащий продольные силы. В случае пространственной задачи формула перемещений (интеграл Мора) содержит не три члена (как в случае плоской задачи), а шесть — в соответствии с числом внутренних усилий, которые могут возникнуть

в поперечных сечениях элементов. Эта формула имеет вид

$$\Delta_{mn} = \sum_0^l \int_0^l \bar{M}_{zm} \frac{M_{zn} dx}{EJ_z} + \sum_0^l \int_0^l \bar{M}_{ym} \frac{M_{yn} dx}{EJ_y} + \sum_0^l \int_0^l \bar{M}_{xm} \frac{M_{xn} dx}{GJ_k} + \\ + \sum_0^l \int_0^l \bar{N}_m \frac{N_n dx}{EF} + \sum_0^l \int_0^l \bar{Q}_{zm} \frac{Q_{zn} dx}{GF} \eta_z + \sum_0^l \int_0^l \bar{Q}_{ym} \frac{Q_{yn} dx}{GF} \eta_y, \quad (5.25)$$

где \bar{M}_{zm} и \bar{M}_{ym} — изгибающие моменты относительно осей z и y поперечных сечений соответственно, возникающие в единичном состоянии; M_{zn} и M_{yn} — то же, в действительном состоянии; \bar{Q}_{zm} и \bar{Q}_{ym} — поперечные силы, параллельные соответственно осям z и y поперечного сечения, возникающие в единичном состоянии; Q_{zn} и Q_{yn} — то же, в действительном состоянии; \bar{M}_{xm} и M_{xn} — крутящие моменты, возникающие в единичном и действительном состояниях соответственно; \bar{N}_m и N_n — продольные силы в этих же состояниях; J_k — геометрическая характеристика крутильной жесткости (см. § 6.6): при круглом поперечном сечении $J_k = J_p$, где J_p — полярный момент инерции.

Практически в большинстве случаев пространственной задачи используются или только три первых члена последней формулы (когда элементы системы работают преимущественно на изгиб и кручение, например при расчете пространственных рам и ломаных балок), или только четвертый член формулы (например, при расчете пространственных ферм).

В дальнейшем при расчете балок и рам влияние продольных и поперечных сил на перемещение не учитывается, за исключением особо отмеченных случаев.

Рассмотрим в качестве примера балку постоянного сечения, свободно лежащую на двух опорах (рис. 5.16, а) и нагруженную посередине силой P_n . Определим прогиб балки под силой P_n с учетом влияния всех членов формулы Мора (5.24).

Единичным состоянием является состояние, вызванное единичным грузом $P_m = 1$, действующим на балку в направлении искомого перемещения (рис. 5.16, б).

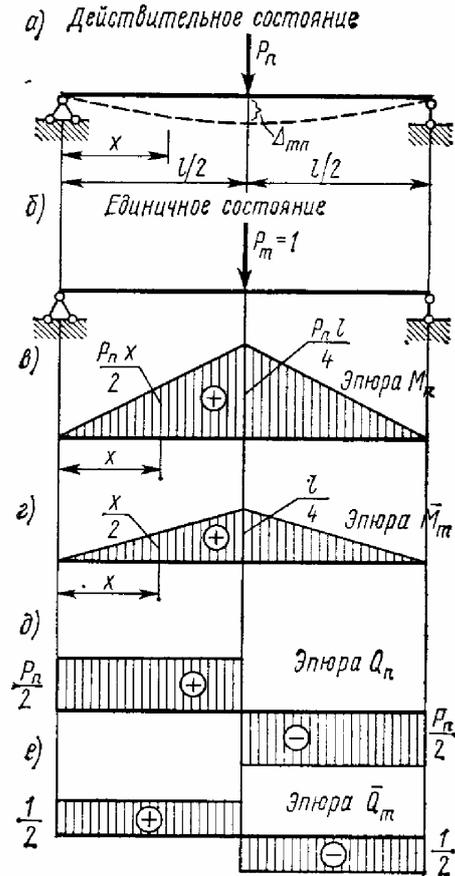


Рис. 5.16

Продольные силы, возникающие в поперечных сечениях балки от нагрузки, равны нулю. Поэтому второй интеграл формулы (5.24) равняется нулю и эта формула принимает вид

$$\Delta_{mn} = \sum \frac{1}{EJ} \int_0^l \bar{M}_m M_n dx + \sum \frac{\eta}{GF} \int_0^l \bar{Q}_m Q_n dx = \Delta_{mn}^M + \Delta_{mn}^Q,$$

где Δ_{mn}^M — прогиб, обусловленный деформацией изгиба (т. е. зависящий от изгибающих моментов):

$$\Delta_{mn}^M = \sum \frac{1}{EJ} \int_0^l \bar{M}_m M_n dx;$$

Δ_{mn}^Q — прогиб, обусловленный деформацией сдвига (т. е. зависящий от поперечных сил):

$$\Delta_{mn}^Q = \sum \frac{\eta}{GF} \int_0^l \bar{Q}_m Q_n dx.$$

Для сечений балки в пределах от левой опоры до середины балки изгибающие моменты M_n и \bar{M}_m и поперечные силы Q_n и \bar{Q}_m равны:

$$M_n = \frac{P_n}{2} x; \quad \bar{M}_m = \frac{1}{2} x; \quad Q_n = \frac{P_n}{2}; \quad \bar{Q}_m = \frac{1}{2}.$$

Эпюры M_n , \bar{M}_m , Q_n и \bar{Q}_m изображены на рис. 5.16, в, г, д, е.

Эпюры M_n и \bar{M}_m построены на сжатых волокнах балки.

Подставим значения моментов и поперечных сил в выражения для Δ_{mn}^M и Δ_{mn}^Q :

$$\Delta_{mn}^M = \frac{2}{EJ} \int_0^{l/2} \frac{x}{2} \frac{P_n}{2} x dx = \frac{P_n l^3}{48EJ}; \quad \Delta_{mn}^Q = \frac{2\eta}{GF} \int_0^{l/2} \frac{1}{2} \frac{P_n}{2} dx = \frac{P_n \eta l}{4GF}.$$

Интегрирование ведется в пределах левой половины балки; числовые коэффициенты 2 перед интегралами учитывают, что ввиду симметрии балки величина интеграла для правой ее половины такая же, как и для левой.

Полный прогиб

$$\Delta_{mn} = \Delta_{mn}^M + \Delta_{mn}^Q = \frac{P_n l^3}{48EJ} + \frac{P_n \eta l}{4GF}.$$

Знак плюс указывает на то, что направление прогиба совпадает с направлением единичной силы.

Найдем соотношение между прогибами, зависящими от поперечных сил и изгибающих моментов. Предположим при этом, что рассматриваемая балка имеет прямоугольное поперечное сечение со сторонами b и h и что $h=0,1l$:

$$\frac{\Delta_{mn}^Q}{\Delta_{mn}^M} = \frac{P_n \eta l 48EJ}{4GF P_n l^3} = \frac{12\eta EJ}{l^2 GF}.$$

Подставив в последнюю формулу значения $J = bh^3/12 = bl^3/12000$; $F = bh = bl/10$; $\eta = 1,2$ и приняв $G = 0,4E$, получим

$$\frac{\Delta_{mn}^Q}{\Delta_{mn}^M} = \frac{12 \cdot 1,2 \cdot Ebl^3 \cdot 10}{12000 \cdot l^2 \cdot 0,4Ebl} = \frac{3}{100},$$

т. е. прогиб, вызванный деформацией сдвига, составляет только 3% от прогиба, вызванного деформацией изгиба.

Влияние поперечных сил на прогиб тем меньше, чем меньше отношение h/l . Так, при $h = l/20$

$$\frac{\Delta_{mn}^Q}{\Delta_{mn}^M} = \frac{3}{400}.$$

Совершенно очевидно, что величиной Δ_{mn}^Q по сравнению с Δ_{mn}^M можно пренебречь. Тогда

$$\Delta_{mn} = \Delta_{mn}^M = P_n l^3 / (48EJ).$$

Этот результат совпадает с результатом, известным из курса сопротивления материалов.

§ 5.5. ПРАВИЛО ВЕРЕЩАГИНА

Определение перемещений в системах, состоящих из прямолинейных элементов постоянной жесткости, можно значительно упростить путем применения специального приема вычисления

интеграла вида $\int_0^l \bar{M}_m M_n dx$.

В связи с тем что в подынтегральное выражение входит произведение усилий \bar{M}_m и M_n , являющихся ординатами эпюр, построенных для единичного и действительного состояний, этот прием называют *способом перемножения эпюр*. Его можно использовать в случае, когда одна из перемножаемых эпюр, например \bar{M}_m , прямолинейна; в этом случае (рис. 5.17)

$\bar{M}_m = (x + a) \operatorname{tg} \alpha$. Вторая эпюра M_n может иметь любое очертание (прямолинейное, ломаное или криволинейное).

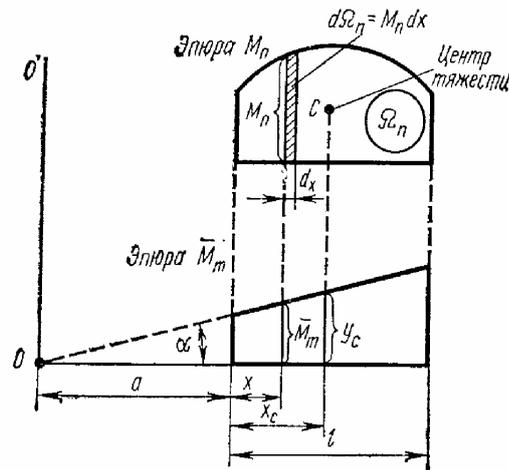


Рис. 5.17

Подставим значение \bar{M}_m в выражение $\int_0^l \bar{M}_m M_n dx$:

$$\int_0^l \bar{M}_m M_n dx = \operatorname{tg} \alpha \int_0^l (x + a) M_n dx = \operatorname{tg} \alpha \int_0^l (x + a) d\Omega_n,$$

где $M_n dx = d\Omega_n$ — дифференциал площади Ω_n эпюры M_n (рис. 5.17).

Интеграл $\int_0^l (x+a) d\Omega_n$ представляет собой статический момент площади Ω_n эпюры M_n относительно оси $O-O'$ (рис. 5.17). Этот статический момент можно выразить иначе:

$$\int_0^l (x+a) d\Omega_n = \Omega_n (x_c + a),$$

где x_c — абсцисса центра тяжести площади Ω_n эпюры M_n . Тогда

$$\int_0^l \bar{M}_m M_n dx = (x_c + a) \Omega_n \operatorname{tg} \alpha.$$

Но так как (см. рис. 5.17)

$$(x_c + a) \operatorname{tg} \alpha = y_c,$$

то

$$\int_0^l \bar{M}_m M_n dx = \Omega_n y_c. \quad (5.26)$$

Таким образом, результат перемножения двух эпюр равен произведению площади одной из них на ординату y_c другой (прямолинейной) эпюры, взятую под центром тяжести площади первой эпюры.

Способ перемножения эпюр предложен в 1925 г. студентом Московского института инженеров железнодорожного транспорта А. К. Верещагиным, а потому он называется *правилом* (или способом) *Верещагина*.

Заметим, что левая часть выражения (5.26) отличается от интеграла Мора отсутствием в ней жесткости сечения EJ . Следовательно, результат выполнения по правилу Верещагина перемножения эпюр для определения искомого перемещения надо разделить на жесткость.

Очень важно отметить, что ордината y_c должна быть взята обязательно из прямолинейной эпюры. Если обе эпюры прямолинейны, то ординату можно взять из любой эпюры. Так, если требуется перемножить прямолинейные эпюры M_i и M_k (рис. 5.18, а), то не имеет значения, что взять: произведение $\Omega_i y_k$ площади Ω_i эпюры M_i на ординату y_k под ее центром тяжести из эпюры M_k или произведение $\Omega_k y_i$ площади Ω_k эпюры M_k на ординату y_i под (или над) ее центром тяжести из эпюры M_i .

Когда перемножаются две эпюры, имеющие вид трапеции, то не надо находить положение центра тяжести площади одной из них. Следует одну из эпюр разбить на два треугольника и умножить площадь каждого из них на ординату под его центром тяжести из другой эпюры. Например, в случае, приведенном на рис. 5.18, б,

получим

$$\frac{al}{2} y_a + \frac{bl}{2} y_b = \frac{al}{2} \left(\frac{2c}{3} + \frac{d}{3} \right) + \frac{bl}{2} \left(\frac{c}{3} + \frac{2d}{3} \right) = \frac{l}{6} (2ac + 2bd + ad + bc). \quad (5.27)$$

В круглых скобках этой формулы произведение ac левых ординат обеих эпюр и произведение bd правых ординат берутся с коэффициентом, равным двум, а произведения ad и bc ординат, расположенных с разных сторон, — с коэффициентом, равным единице.

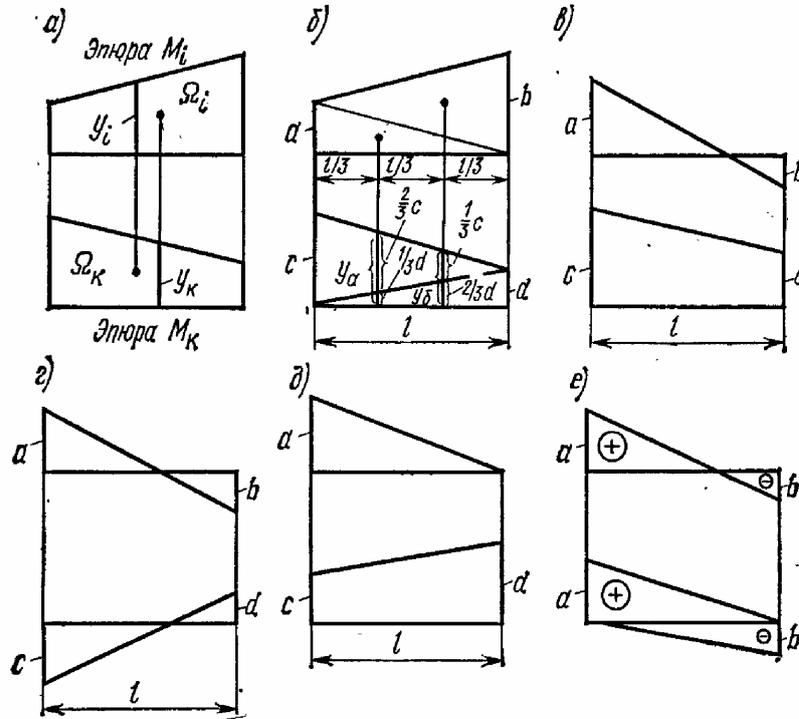


Рис. 5.18

С помощью формулы (5.27) можно перемножать эпюры, имеющие вид «перекрученных» трапеций; при этом произведения ординат, имеющих одинаковые знаки, берутся со знаком плюс, а разные — минус. В случае, например, показанном на рис. 5.18, в, результат перемножения эпюр в виде «перекрученной» и обычной трапеций равен $(l/6)(2ac - 2bd + ad - bc)$, а в случае, показанном на рис. 5.18, г, равен $(l/6)(-2ac - 2bd + ad + bc)$.

Формула (5.27) применима и тогда, когда одна или обе перемножаемые эпюры имеют вид треугольника. В этих случаях треугольник рассматривается как трапеция с одной крайней ординатой, равной нулю. Результат, например, перемножения эпюр, показанных на рис. 5.18, д, равен $(l/6)(2ac + ad)$.

Умножение эпюры в виде «перекрученной» трапеции на любую другую эпюру можно производить и расчлняя «перекрученную» трапецию на два треугольника, как показано на рис. 5.18, е.

Когда одна из эюр (рис. 5.19) очерчена по квадратной параболе (от равномерно распределенной нагрузки q), то ее для перемножения с другой эюрой рассматривают как сумму (в случае, показанном на рис. 5.19, а) или разность (в случае, показанном на рис. 5.19, б) трапецидальной и параболической эюр¹.

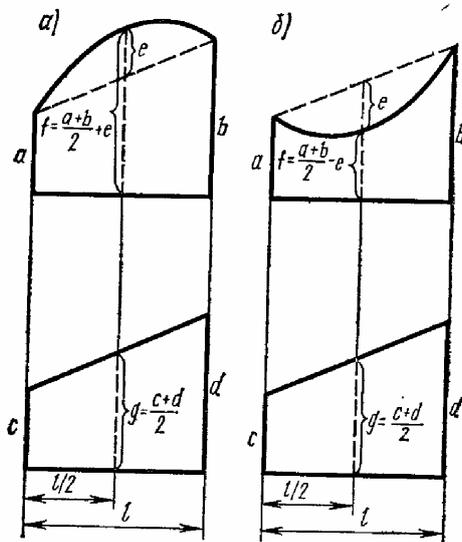


Рис. 5.19

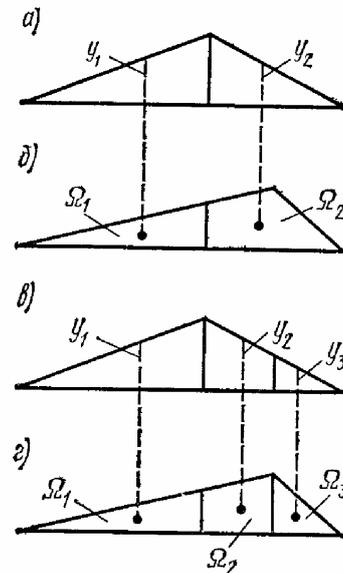


Рис. 5.20

Результат перемножения эюр, показанных на рис. 5.19, а, равен $(l/6)(2ac + 2bd + ad + bc) + (2/3)elg$; после подстановки в него $e = f - \frac{a+b}{2}$ и $g = \frac{c+d}{2}$ получаем

$$\frac{l}{6}(ac + 4fg + bd).$$

Результат перемножения эюр, показанных на рис. 5.19, б, равен $(l/6)(2ac + 2bd + ad + bc) - (2/3)elg$; после подстановки в него $e = \frac{a+b}{2} - f$ и $g = \frac{c+d}{2}$ получаем

$$(l/6)(ac + 4fg + bd). \quad (5.28)$$

В обоих полученных выражениях в скобках стоят суммы произведений крайних ординат обеих эюр с учетверенным произведением средних ординат.

Встречаются случаи, когда ни одна из перемножаемых эюр не является прямолинейной, но одна из них (или обе) ограничена ломаными прямыми линиями. В этих случаях для перемножения эюр предварительно разбивают их на такие участки, в пределах каждого из которых, по крайней мере, одна эюра прямолинейна. Так, например, при перемножении эюр, показанных на рис. 5.20, а, б, можно разбить их на два участка и представить результат пере-

¹ Средняя ордината параболической эюры $e = ql^2/8$.

множения в виде суммы $\Omega_1 y_1 + \Omega_2 y_2$. Можно, перемножая эти же эпюры, разбить их на три участка, как показано на рис. 5.20, в, г; в этом случае результат перемножения эпюр равен

$$\Omega_1 y_1 + \Omega_2 y_2 + \Omega_3 y_3.$$

При использовании правила Верещагина приходится вычислять площади различных геометрических фигур и определять положения их центров тяжести. В связи с этим в табл. 5.1 приведены значения площадей и координаты центров тяжести наиболее часто встречающихся геометрических фигур.

В качестве примера рассмотрим применение способа Верещагина для определения прогиба под силой P_n балки, изображенной на рис. 5.16, а; при этом учтем действие изгибающих моментов и поперечных сил.

Единое состояние балки, а также эпюры внутренних усилий в ней, вызванных нагрузкой P_n и единичной силой P_m , показаны на рис. 5.16, б, в, г, д, е.

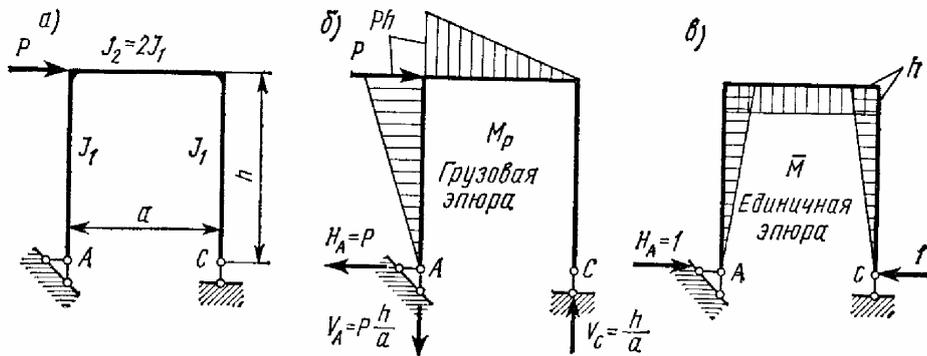


Рис. 5.21

По формуле (5.24), используя способ Верещагина при перемножении эпюр, находим

$$\Delta_{mn} = \frac{2}{EJ} \frac{P_n l}{4} \frac{1}{2} \frac{2}{2} \frac{l}{3} \frac{1}{4} + \frac{2\eta}{GF} \frac{P_n}{2} \frac{l}{2} \frac{1}{2} = \frac{P_n l^3}{48EJ} + \frac{P_n \eta l}{4GF}.$$

Этот результат совпадает с результатом, полученным путем интегрирования.

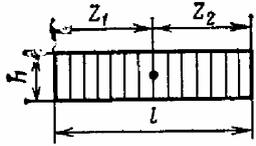
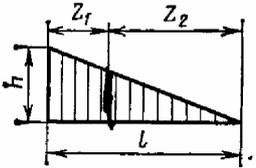
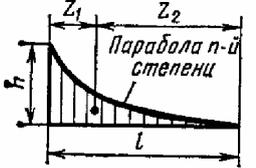
Определим теперь горизонтальное смещение точки C рамы, изображенной на рис. 5.21, а. Моменты инерции поперечных сечений стоек рамы и ригеля указаны на рисунке; $E = \text{const}$.

Действительное состояние рамы изображено на рис. 5.21, а. Эпюра изгибающих моментов M_p для этого состояния (грузовая эпюра) показана на рис. 5.21, б.

В единичном состоянии к точке C рамы приложена в направлении искомого перемещения (т. е. горизонтального) сила, равная единице. Эпюра изгибающих моментов \bar{M} для этого состояния (единая эпюра) изображена на рис. 5.21, в.

Знаки изгибающих моментов на эпюрах могут не указываться. Здесь ординаты эпюр отложены со стороны сжатых волокон, но можно строить их и со стороны растянутых волокон.

Таблица 5.1

Геометрическая фигура	Площадь Ω	Квадраты центра тяжести	
		z_1	z_2
	hl	$l/2$	$l/2$
	$hl/2$	$l/3$	$2l/3$
	$hl/3$	$l/4$	$3l/4$
	$hl/4$	$l/5$	$4l/5$
	$\frac{hl}{n+1}$	$\frac{l}{n+2}$	$\frac{(n+1)l}{n+2}$
	$2hl/3$	$3l/8$	$5l/8$

Так строят эпюры моментов в курсе «Сопротивление материалов». Можно построить эти эпюры и со стороны растянутых волокон, как обычно строят в строительной механике.

Перемножив по способу Верещагина грузовую эпюру с единичной (рис. 5.21, б, в) и учтя при этом различные значения моментов инерции поперечных сечений стоек и ригеля рамы, найдем искомое

перемещение точки С:

$$\begin{aligned}\Delta_C &= -Phh \frac{1}{2} \frac{2}{3} h \frac{1}{EJ_1} - Pha \frac{1}{2} h \frac{1}{EJ_2} = \\ &= -\frac{Ph^3}{3EJ_1} - \frac{Pah^2}{2EJ_2} = -\frac{Ph^2}{EJ_1} \left(\frac{h}{3} + \frac{a}{4} \right).\end{aligned}$$

Знак минус при перемножении эпюр взят потому, что эпюры M_p и \bar{M} расположены с различных сторон элементов рамы и, следовательно, изгибающие моменты M_p и \bar{M} имеют разные знаки. Отрицательное значение полученного перемещения точки С означает, что эта точка смещается не по направлению единичной силы (рис. 5.21, в), а в противоположную сторону, т. е. вправо.

Приведем теперь некоторые практические указания по применению интеграла Мора к различным случаям вычисления перемещений.

Определение перемещений в балках, жесткость сечений которых постоянна по всей длине или в пределах отдельных участков, целесообразно производить, вычисляя интеграл Мора по правилу Верещагина.

То же относится и к рамам из прямолинейных стержней постоянной или ступенчато-переменной жесткости.

При жесткости сечений элемента конструкции, непрерывно изменяющейся по его длине, перемещения должны определяться путем непосредственного (аналитического) вычисления интеграла Мора. Такую конструкцию можно рассчитать приближенно, заменив ее системой с элементами ступенчато-переменной жесткости, после чего для определения перемещений использовать способ Верещагина.

Способ Верещагина может применяться не только при определении перемещений, но и при определении потенциальной энергии.

5.7. ФОРМУЛА СИМПСОНА

Правило Верещагина удобно применять в тех случаях, когда площадь и положение центра тяжести криволинейной эпюры находятся достаточно просто. В общем случае более рационально воспользоваться формулой Симпсона для численного интегрирования. В соответствии с этой формулой определенный интеграл от функции $\varphi(s)$ на отрезке $0 \leq s \leq l$ можно приближенно найти следующим образом:

$$\int \varphi(s) ds \approx \frac{l}{6} \left[\varphi(0) + 4\varphi\left(\frac{l}{2}\right) + \varphi(l) \right].$$

Эта формула основана на замене подинтегральной функции квадратной параболой, поэтому в случае, если функция $\varphi(s)$ является действительно квадратной параболой, предыдущее выражение дает точный результат.

Применяя формулу Симпсона для перемножения двух эпюр на участке постоянной жесткости (рис. 5.23), получаем:

$$\int M\bar{M}_i ds = \frac{l}{6} (M_b \bar{M}_{i,b} + 4M_m \bar{M}_{i,m} + M_e \bar{M}_{i,e}).$$

Здесь индексы b , m и e обозначают начало, середину и конец участка длиной l .

Как показывает анализ, формула (1.123) оказывается точной и в случае, когда подинтегральная функция $M\bar{M}_i$ — кубическая парабола. Таким образом, в большинстве практически встречающихся эпюр, когда одна из них линейна, а вторая — парабола не более

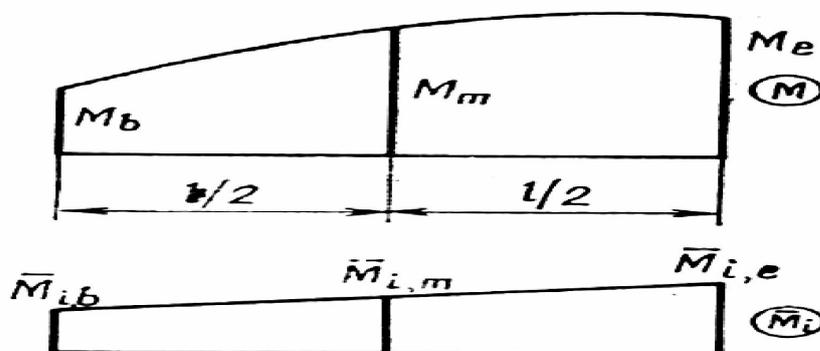


Рис. 5.23

второй степени (при $q = \text{const}$), формула (5.29) дает точное значение интеграла. В остальных случаях применение формулы Симпсона требует разбиения эпюр на участки достаточно малой длины.

5.8. ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ (ИНДИВИДУАЛЬНОЙ) РАБОТЫ

Для заданной рамы (рис. 5.24) определить перемещение (линейное или угловое) точки приложения сосредоточенной силы P , предварительно преобразовав систему опор рамы в статически определимую.

Исходные данные взять из табл. 5.2

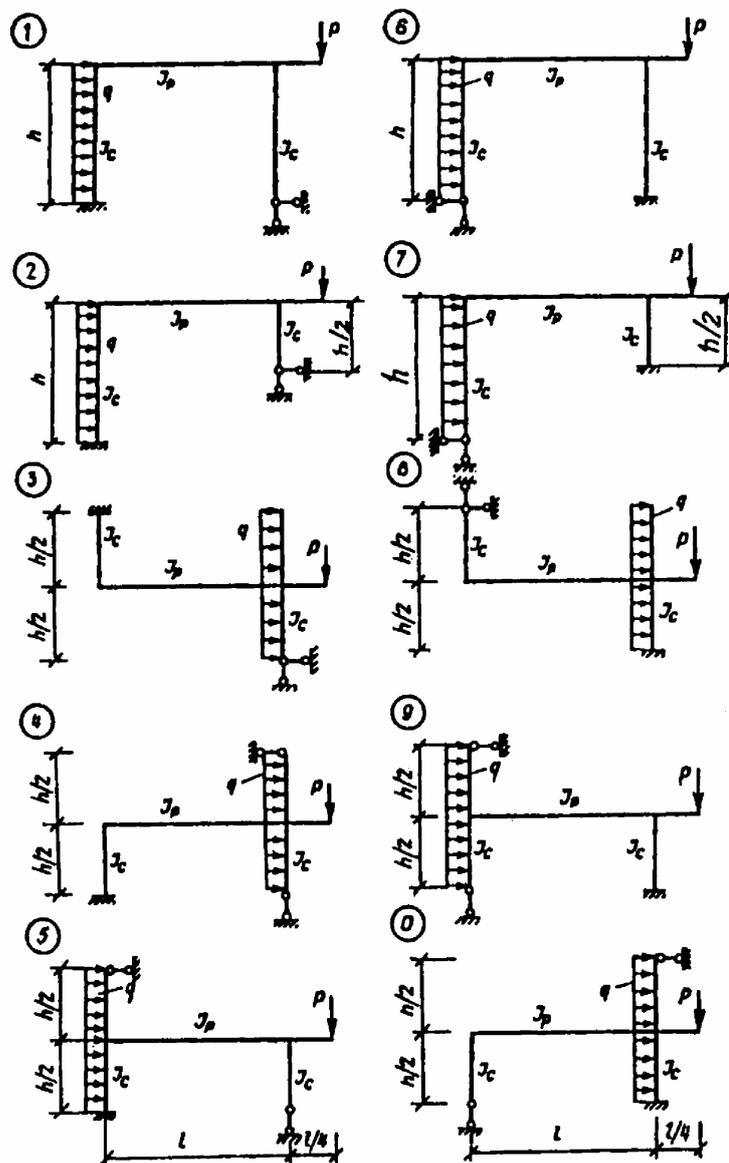


Рис. 5.24

Таблица 5.2

Номер строки	Схема (рис. 11.8)	l , м	h , м	P , кН	q , кН/м	$\frac{J_p}{J_c}$
1	1	5,0	3,0	30	8	2,00
2	2	4,5	3,2	35	10	1,80
3	3	4,2	3,4	40	12	1,60
4	4	4,0	3,5	45	14	1,50
5	5	3,8	3,6	50	15	1,25
6	6	3,6	3,8	55	16	1,20
7	7	3,5	4,0	60	18	1,00
8	8	3,4	4,2	65	20	0,80
9	9	3,2	4,5	70	22	0,75
0	0	3,0	5,0	75	24	0,50
	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>d</i>