

**ОПД.Р.03 СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА**  
**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА «РАСЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФЕРМ**  
**МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В MATHCAD»**  
Методические указания и контрольные задания

Методические указания составлены на кафедре «Механика деформируемого твердого тела». Включают содержание лабораторной работы и рекомендации к ее выполнению. Приводится пример решения варианта лабораторной работы, список рекомендуемой литературы и варианты заданий для лабораторной работы.

## Общие положения

Целью лабораторной работы является усвоение алгоритма расчета пространственных ферм методом конечных элементов.

Расчет пространственных ферм методом конечных элементов (МКЭ) студенты изучают после освоения расчета плоских стержневых систем МКЭ (балки, фермы, рамы). Поэтому предполагается, что алгоритм расчета МКЭ студентам уже хорошо известен, и в данной работе основное внимание уделяется особенностям расчета МКЭ пространственных ферм. Рассматриваются прямолинейные КЭ, имеющие постоянное поперечное сечение. Стержни соединяются в узлах идеальными шаровыми шарнирами. В отличие от плоских стержневых систем КЭ пространственной фермы имеет 2 степени свободы в местной системе координат и 6 степеней свободы в глобальной системе координат.

### Особенности расчета пространственной фермы МКЭ

Конечный элемент в местной системе координат с положительным направлением узловых перемещений, узловых усилий в начале и конце КЭ и их нумерацией представлен на рис. 1.

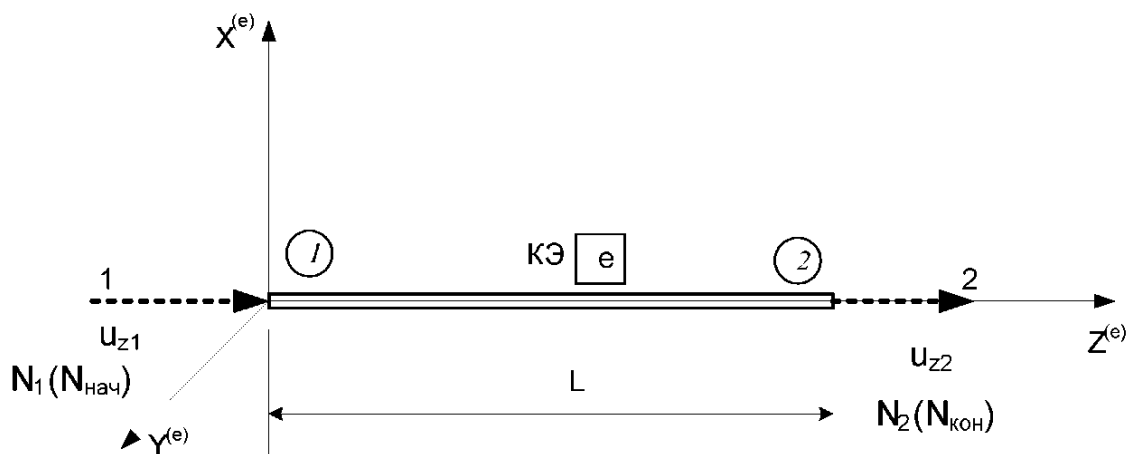


Рис. 1. КЭ в местной системе координат ( $X^{(e)}$ ,  $Y^{(e)}$ ,  $Z^{(e)}$ )

Полная потенциальная энергия прямолинейного стержневого элемента определяется как

$$\Pi^{(e)} = V^{(e)} + W^{(e)},$$

где потенциал упругой деформации элемента равен

$$V^{(e)} = \frac{1}{2} \int_0^L [EA \left( \frac{du_z^{(e)}}{dz} \right)^2] dz.$$

Потенциал внешнего воздействия  $p(z)$  имеет вид

$$W^{(e)} = - \int_0^L [p_z^{(e)} \cdot u_z^{(e)}] dz - \int_0^L [\sigma_{z1}^{(e)} \cdot \varepsilon_{z1}^{(e)}] dz - \int_0^L [\sigma_{z\Delta}^{(e)} \cdot \varepsilon_{z\Delta}^{(e)}] dz.$$

Полагается, что изменение температуры по длине КЭ постоянно и равно  $\Delta T$ . Внешнее воздействие складывается из нагрузки  $p_z$ , равномерно распределенной по длине КЭ, начальных деформаций от теплового воздействия

$$\varepsilon_{z1}^{(e)} = \alpha \cdot \Delta T,$$

где  $\alpha$  – температурный коэффициент линейного расширения материала, и начальных монтажных деформаций

$$\varepsilon_{z\Delta}^{(e)} = \frac{\Delta}{L}.$$

Под монтажным воздействием понимается сборка с натягом, когда длина элемента не соответствует номинальному значению.

Аппроксимация перемещений по области стержня проводится следующим образом: для  $u_z$  принимается линейная аппроксимация (две степени свободы). Таким образом, имеем следующие аппроксимирующие функции (функции формы):

$$u_z^{(e)}(z) = u_{z1} \frac{L-z}{L} + u_{z2} \frac{z}{L}.$$

Запишем представленные выше соотношения в матричной форме

$$U^{(e)}(z) = [B^{(e)}(z)] \{u^{(e)}\},$$

где вектор перемещений по области стержня  $U^{(e)}(z)$ , вектор узловых перемещений  $\{u^{(e)}\}$ . Матрица функций формы  $[B^{(e)}(z)]$  имеет вид

$$B^{(e)}(z) = \left[ 1 - \frac{z}{L} \quad \frac{z}{L} \right].$$

Матрица градиентов  $[B1^{(e)}]$  для конечного элемента имеет вид

$$[B1^{(e)}] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда выражение для потенциальной энергии деформации и потенциал внешней нагрузки можно представить так:

$$V^{(e)} = \frac{1}{2} \{u^{(e)}\}^T \cdot \int_0^L [B1^{(e)}]^T [D] [B1^{(e)}] dz \{u^{(e)}\} = \frac{1}{2} \{u^{(e)}\}^T [k^{(e)}] \{u^{(e)}\},$$

$$W^{(e)} = - \int_0^L p \{u^{(e)}\}^T [B^{(e)}] dz - \int_0^L [B1^{(e)}]^T [D] \{\varepsilon_{zt}^{(e)}\} dz - \int_0^L [B1^{(e)}]^T [D] \{\varepsilon_{z\Delta}^{(e)}\} dz$$

или

$$W^{(e)} = -\{u^{(e)}\}^T \{f^{(e)}\},$$

где

$$\{f^{(e)}\} = \{f_p^{(e)}\} + \{f_t^{(e)}\} + \{f_{\Delta}^{(e)}\}.$$

$$\{f_p^{(e)}\} = \frac{p_z \cdot L}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \{f_t^{(e)}\} = \alpha \cdot E \cdot A \cdot \Delta T \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \{f_{\Delta}^{(e)}\} = \frac{E \cdot A \cdot \Delta}{L} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

$$\{u^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} u_{z1} \\ u_{z2} \end{Bmatrix}.$$

Здесь  $[k^{(e)}]$  и  $\{f^{(e)}\}$  – матрица жесткости и грузовой вектор конечного элемента,  $[D]$  – матрица жесткости КЭ при растяжении (сжатии)

$$[D] = [EA].$$

Коэффициенты матрицы жесткости  $[k^{(e)}]$  определяются по формулам

$$k_{km}^{(e)} = \int_0^L b1_{mk} \cdot D \cdot b1_{km} \cdot dz$$

и матрица жесткости КЭ имеет вид

$$k^{(e)} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Система уравнений для КЭ в матричной форме запишется

$$[k^{(e)}] \{u^{(e)}\} - \{f^{(e)}\} = 0$$

или

$$[k^{(e)}] \{u^{(e)}\} = \{f^{(e)}\}.$$

Конечный элемент пространственной фермы в глобальной системе координат имеет шесть степеней свободы (по три в каждом узле) и представлен на рис. 2.

В глобальной системе координат основные матрицы для КЭ получаются так:

$$[kk^{(e)}] = [\lambda^{(e)}] [k^{(e)}] [\lambda^{(e)}]^T, \quad \{ff^{(e)}\} = [\lambda^{(e)}] \{f^{(e)}\},$$

где матрица направляющих косинусов  $[\lambda^{(e)}]$

$$\lambda^{(e)} = \begin{bmatrix} l^{(e)} & 0 \\ m^{(e)} & 0 \\ n^{(e)} & 0 \\ 0 & l^{(e)} \\ 0 & m^{(e)} \\ 0 & n^{(e)} \end{bmatrix}$$

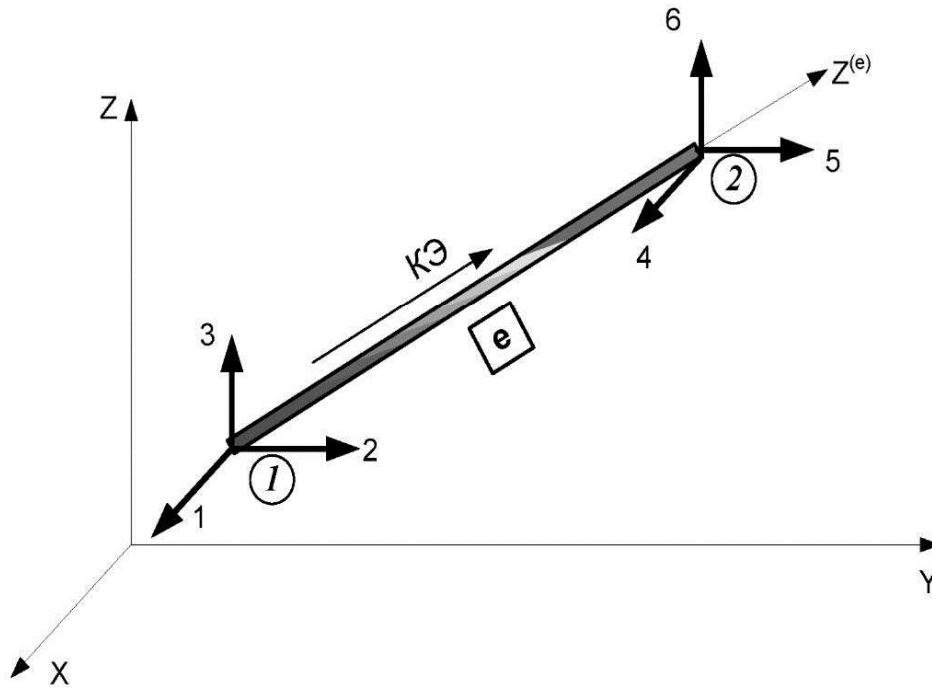


Рис. 2. КЭ в глобальной системе координат (X, Y, Z)

При определении направляющих косинусов, устанавливающих связь координат глобальных осей и местной оси  $Z^{(e)}$ , используются следующие известные соотношения:

$$l^{(e)} = \cos(\widehat{Z^{(e)}, X}) = \frac{x_2 - x_1}{L},$$

$$m^{(e)} = \cos(\widehat{Z^{(e)}, Y}) = \frac{y_2 - y_1}{L},$$

$$n^{(e)} = \cos(\widehat{Z^{(e)}, Z}) = \frac{z_2 - z_1}{L},$$

где  $L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$  — длина конечного элемента;  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$  — координаты начального и конечного узлов конечного элемента.

Используя матрицу индексов, получим матрицу жесткости и грузовой вектор для всей системы в целом. Пусть часть силовых нагрузок задана вектором

узловых сил в глобальной системе координат  $\{F\}$ . Тогда система уравнений для всей фермы в глобальной системе координат запишется так:

$$[K]\{U\} = \{F\} + \{ff\}.$$

Если некоторые жесткие опоры фермы испытывают смещение  $\Delta u_j$  по направлению  $j$ -й опорной связи, то необходимо сформировать вектор  $\{\Delta U\}$ , элементы которого равны нулю, если опорная связь не смещается, и равны  $\Delta u_j$ , если связь смещается. В исходной ферме убирается опорная связь  $j$ , по направлению которой имеется смещение. Тогда система разрешающих уравнений для фермы примет вид

$$[K1]\{U1\} = \{F\} + \{ff\} - [K]\{\Delta U\}.$$

В матрице  $[K1]$  необходимо положить все элементы в  $j$ -й строке и  $j$ -м столбце равными нулю, кроме главного, который полагаем  $K1_{j,j} = -K_{j,j}$ . В векторе  $\{U1\}$  элемент  $U1_j$  полагаем равным нулю.

Вектор усилий в локальной системе для каждого КЭ с номером  $j$  получаем по известной зависимости

$$\{N^{(e)}\}_j = [k^{(e)}]_j [\lambda^{(e)}]_j \{u^{(e)}\}_j.$$

Если КЭ испытывает начальные деформации (температурные или монтажные), то окончательные величины усилий получим так:

$$\{N^{(e)}\}_j = [k^{(e)}]_j [\lambda^{(e)}]_j \{u^{(e)}\}_j - \{f_t^{(e)}\}_j - \{f_N^{(e)}\}_j.$$

### Порядок расчета пространственной фермы МКЭ

1. Проводятся глобальные оси для всей конструкции ( $X, Y, Z$ ). Используется правая система координат.
2. Ферма разбивается на конечные элементы (прямолинейные стержни постоянного поперечного сечения). Проводится нумерация конечных элементов (КЭ) и узлов КЭ.
3. Задаются геометрические характеристики КЭ.
4. Для каждого КЭ вводится местная система координат ( $X^{(e)}, Y^{(e)}, Z^{(e)}$ ), где  $e$  – номер КЭ.
5. Формируется вектор узловых перемещений системы для учета граничных условий.
6. Формируется вектор узловых нагрузок и матрицы температурных и монтажных воздействий на КЭ.
7. Составляется матрица индексов – матрица соответствия узловых перемещений в местной и глобальной системах координат для каждого КЭ.
8. Для каждого КЭ составляется геометрическая матрица, содержащая направляющие – косинусы каждого КЭ в местной и глобальной системах координат.

9. Составляется матрица жесткости в местной системе координат для каждого КЭ.
10. Формируются матрицы жесткости КЭ в глобальной системе координат.
11. Формируется матрица жесткости для всей системы.
12. Решается матричное уравнение МКЭ и определяются узловые перемещения системы в глобальной системе координат.
13. Определяются узловые усилия в КЭ в местной системе координат.
14. Строится эпюра продольных сил и схема деформации стержневой системы.
15. Из условия равновесия опорных узлов определяются опорные реакции фермы.
16. Проводится проверка равновесия узлов фермы и всей фермы в целом.

### Кинематический анализ пространственной фермы

Как известно, необходимым, но недостаточным признаком геометрической неизменяемости пространственной фермы является соотношение

$$W = 3V - C - C_{on} \leq 0,$$

где  $W$  – число степеней свободы фермы;  $V$  – число узлов фермы;  $C$  – число стержней фермы;  $C_{on}$  – число опорных стержней фермы.

Окончательное заключение о геометрической неизменяемости фермы дает анализ структуры фермы. Рассматриваются только линейные перемещения узлов. Для этого в случае простых ферм можно использовать следующие приемы:

а) Для образования статически определимого геометрически неизменяемого присоединения узла к диску необходимо узел присоединить тремя стержнями – шаровой шарнир (рис.3);

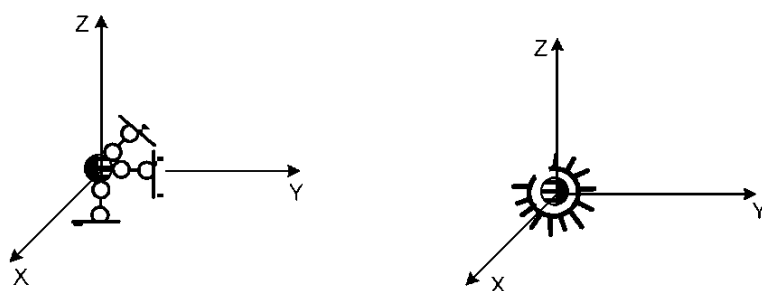


Рис. 3. Изображение шарового шарнира в расчетной схеме фермы

б) Стержень фермы закреплен шаровым шарниром, и свободный узел имеет две степени свободы (необходима постановка двух стержней, препятствующих линейному смещению узла в этих направлениях) (рис. 4);

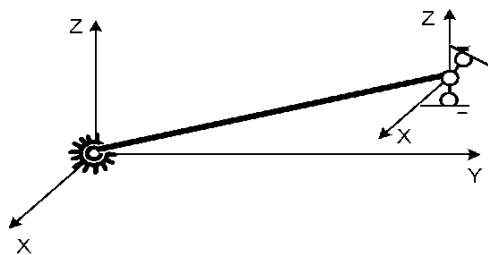


Рис. 4. Схема неизменяемого закрепления стержня минимальным количеством связей

в) Три стержня, соединенных шаровыми шарнирами, образуют жесткий диск, узлы которого имеют шесть степеней свободы, для обеспечения неизменяемости, например, можно поставить в одном узле шаровой шарнир и три связи, препятствующие линейным смещениям узлов (рис. 5).

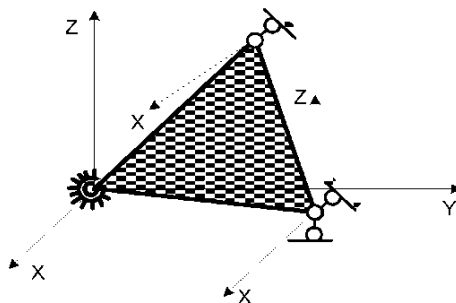


Рис. 5. Неизменяемое статически определимое закрепление жесткого диска фермы в пространстве

Для выявления мгновенно изменяемых систем можно использовать следующие признаки:

1. При рассечении пространственной фермы на две части рассеченные стержни можно пересечь одной прямой.
2. Часть рассеченных стержней можно пересечь одной прямой, остальные рассеченные стержни параллельны этой прямой.
3. Все рассеченные стержни параллельны одной плоскости.

В общем случае геометрическая и мгновенная изменяемость фермы определяется вырожденностью матрицы разрешающей системы уравнений фермы. В этом случае в Mathcad выдается сообщение о сингулярности матрицы жесткости.

### Нагрузки

Нагрузки задаются в глобальной системе координат. Сосредоточенные нагрузки учитываются вектором  $F$ .



*Правило знаков:*

$F$  – сосредоточенная сила учитывается со знаком плюс, если ее направление совпадает с положительным направлением соответствующей глобальной оси.

Температурные нагрузки: изменение средней температуры в КЭ  $\Delta T$  учитывается по знаку температуры.

Монтажные нагрузки: если стержень длиннее номинального размера, принимается  $\Delta > 0$ , если короче, то  $\Delta < 0$ .

### Чтение результатов расчета

$N_z$  – продольная сила считается положительной, если КЭ растянут, и отрицательной, если КЭ сжат.

*Построение эпюры внутренних сил*

Эпюра  $N_z$  – ординаты эпюры откладываются на КЭ произвольно с обязательным проставлением знака усилия.

### Пример решения задачи лабораторной работы

Для заданной пространственной фермы (рис. 6), выполненной из стальных труб (ст. 3) постоянного поперечного сечения с наружным диаметром  $D = 20$  см и внутренним диаметром  $d = 16$  см ( $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $\alpha = 125 \cdot 10^{-7}$  град), требуется:

1. Построить эпюру продольных сил:
  - а) от заданной узловой нагрузки;
  - б) смещения опоры 5 вниз по оси  $Z$  (рис. 6) на  $\Delta = 8$  мм;
  - в) сборки с натягом (3-й стержень короче номинального размера на  $\Delta = 2$  мм);
  - г) нагрева 4-го стержня на  $\Delta = 25^\circ \text{C}$ .
2. Определить опорные реакции фермы. Выполнить проверку равновесия узлов фермы.
3. Проверить равновесие всей фермы.
4. Проверить прочность фермы, если  $[\sigma] = 160$  МПа.

### Решение

1. Проводим глобальные оси  $X, Y, Z$  (рис. 7).
2. Разбиваем систему на КЭ и проводим их нумерацию ( в квадратах).
3. Проводим нумерацию узлов КЭ ( в кругах) и выбираем начало и конец КЭ ( указываем направление местной оси  $Z^{(e)}$ ).
4. В каждом узле показываем положительные направления узловых перемещений в глобальной системе координат.
5. Задаем число КЭ  $n = 7$  и число степеней свободы системы  $N_{sv} = 18$ .

6. Задаем граничные условия: узел 1 – шаровой шарнир (все 3 линейных перемещения в узле равны 0); узел 2 – по оси Y – жесткая связь (линейное перемещение по оси Y равно 0); узлы 3, 5, 6 – шаровой шарнир (все 3 линейных перемещения в узле равны 0). Дальнейший расчет системы приведен в распечатке решения задачи в Mathcad. Результаты расчета приведены на рис. 8 и 9.

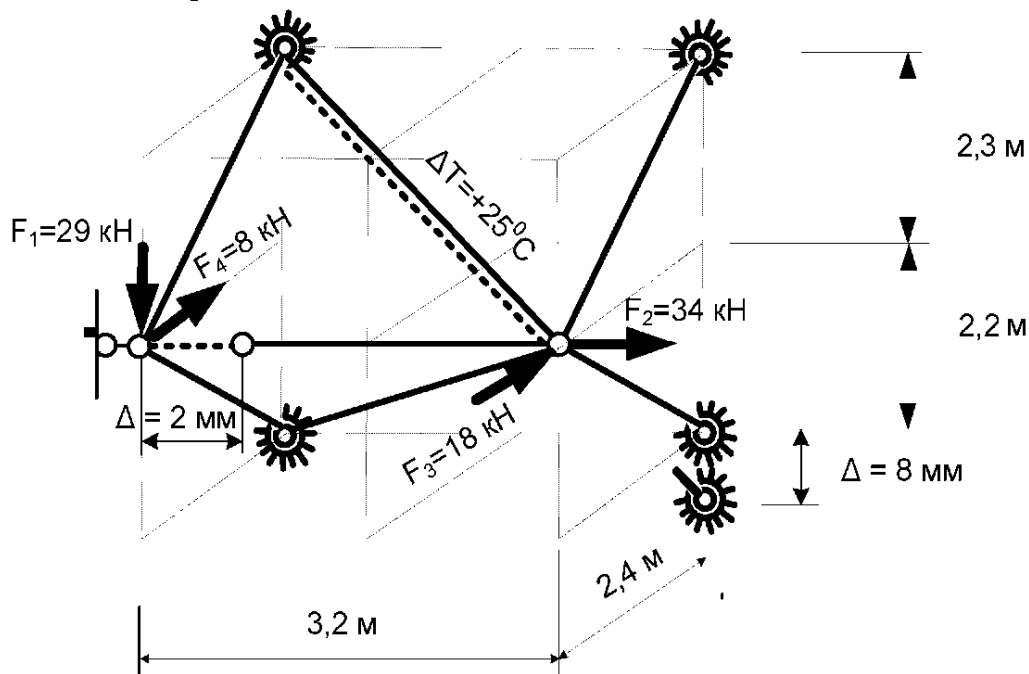


Рис. 6. Расчетная схема фермы

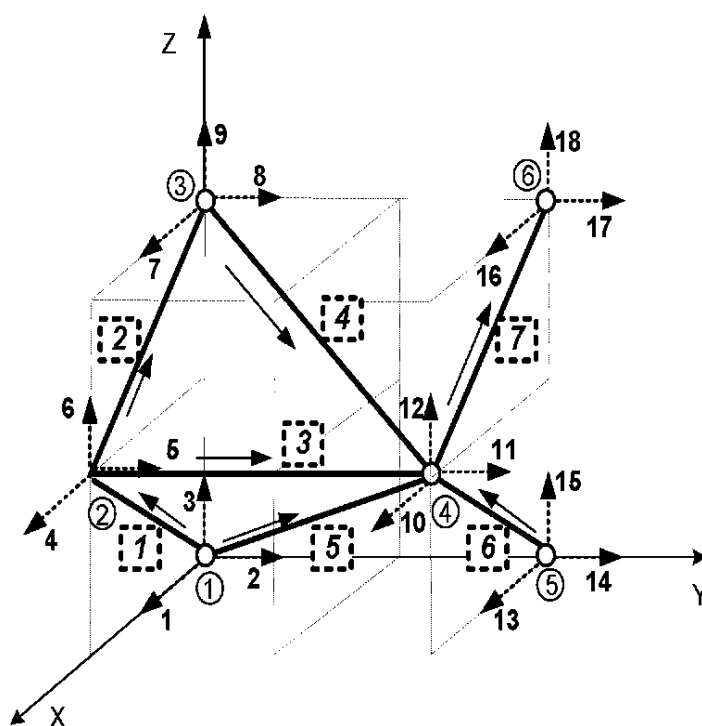


Рис. 7. Подготовка расчетной схемы фермы к расчету МКЭ

## Распечатка программы расчета пространственной фермы в Mathcad 14

$n = 7$  Число КЭ

$Nsv := 18$  Число степеней свободы системы

$E := 2 \cdot 10^8$  кПа Модуль упругости материала

$\alpha_T := 125 \cdot 10^{-7}$  1/градус Температурный коэффициент линейного расширения материала

Площади сечений КЭ в  $m^2$

$A :=$

	1
1	0.0113
2	0.0113
3	0.0113
4	0.0113
5	0.0113
6	0.0113
7	0.0113

**Элементы и узлы**  
Номера элементов

Elem :=

Начальный узел  
Конечный узел

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	2	3	1	5	4
2	2	3	4	4	4	4	6

**Координаты узлов**

Номера узлов

Koord :=

	1	2	3	4	5	6
X	0	2.4	0	2.4	0	0
Y	0	0	0	3.2	3.2	3.2
Z	0	2.2	4.5	2.2	0	4.5

**Матрица индексов**

Степени свободы в местной системе координат

MatInd :=

Степени свободы  
в глобальной системе  
координат

№ КЭ	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	4	5	6	7	8	9
3	4	5	6	10	11	12
4	7	8	9	10	11	12
5	1	2	3	10	11	12
6	13	14	15	10	11	12
7	10	11	12	16	17	18

**Граничные условия**

U :=

	1
1	0
2	0
3	0
4	1
5	0
6	1
7	0
8	0
9	0
10	1
11	1
12	1
13	0
14	0
15	1
16	0
17	0
18	0

**Смещение жестких опор (в м)**

U $\Delta$  :=

	1
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0
6	0
7	0
8	0
9	0
10	0
11	0
12	0
13	0
14	0
15	$-8 \cdot 10^{-3}$
16	0
17	0
18	0

**Вектор узловой нагрузки (в кН)**

F :=

	1
1	0
2	0
3	0
4	-8
5	0
6	-29
7	0
8	0
9	0
10	-18
11	34
12	0
13	0
14	0
15	0
16	0
17	0
18	0

**Неточности изготовления стержней (в м)**

$\Delta U$  :=

	1
1	0
2	0
3	$-2 \cdot 10^{-3}$
4	0
5	0
6	0
7	0

**Изменение температуры  $\Delta T$  в стержнях (в °C)**

$\Delta T$  :=

	1
1	0
2	0
3	0
4	25
5	0
6	0
7	0

Mind:=MatInd<sup>T</sup>

### Матрица узловых сил в узлах фермы

$$\begin{aligned}
 &FF := \text{for } jk \in 1..3 \\
 &\quad \text{for } jg \in 1..2 \\
 &\quad \quad \text{for } jj \in 1..n \\
 &\quad \quad \quad Fw_{jk, Elem_{jg, jj}}^0 \leftarrow \text{if } [jg = 1, F_{(Mind^{(jj)})_{jk}}, F_{(Mind^{(jj)})_{jk+3}}]
 \end{aligned}$$

### Геометрия сечения элементов

$$EA := E \cdot A$$

### Построение геометрических матриц КЭ

$$\begin{aligned}
 &k := 1..r \\
 &(Geom^{(k)}) := \text{stack} \left[ \text{Koord} \left[ \left( Elem^{(k)} \right)_1 \right], \text{Koord} \left[ \left( Elem^{(k)} \right)_2 \right] \right] \\
 &L_k := \sqrt{\sum_{kk=1}^3 \left[ (Geom^{(k)})_{kk+3} - (Geom^{(k)})_{kk} \right]^2} \\
 &\lambda_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_{k0, k} := \frac{(Geom^{(k)})_{k0+3} - (Geom^{(k)})_{k0}}{L_k} \\
 &\Lambda_k := \text{augmen} \left( \text{stack} (\lambda^{(k)}, \lambda_0), \text{stack} (\lambda_0, \lambda^{(k)}) \right) \\
 &i := 1..r
 \end{aligned}$$

### Матрица жесткости КЭ при действии силовой нагрузки

$$Ke_i := \frac{EA_i}{L_i} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

### Температурный грузовой член в местной системе координат

$$FT_{\theta} := \alpha T \cdot EA_i \cdot \Delta T_i \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

### Монтажный грузовой член в местной системе координат

$$F\Delta e_i := \frac{EA_i}{L_i} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \Delta U_i$$

## Матрицы КЭ в глобальной системе координат

$$Ft_j := \Lambda_j \cdot FT \varphi$$

$$F\Delta g_j := \Lambda_j \cdot F\Delta e_j$$

$$Kg_j := \Lambda_j \cdot Ke_j \cdot \Lambda_j^T$$

## Глобальная матрица жесткости и глобальные грузовые матрицы

$$\begin{pmatrix} Ft \\ F\Delta \\ \underline{K} \end{pmatrix} := \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..Nsv \\ \quad \underline{ss}_i \leftarrow 0 \\ \quad \underline{se}_i \leftarrow 0 \\ \quad \underline{se1}_i \leftarrow 0 \\ \quad \text{for } j \in 1..Nsv \\ \quad \quad s_{i,j} \leftarrow 0 \\ \text{for } i1 \in 1..n \\ \quad \text{for } j1 \in 1..6 \\ \quad \quad \underline{(ss)} \left[ \langle \text{Mind}^{i1} \rangle_{j1} \right] \leftarrow \underline{(ss)} \left[ \langle \text{Mind}^{i1} \rangle_{j1} \right] + (Ftg_{i1})_{j1} \\ \quad \quad \underline{(se)} \left[ \langle \text{Mind}^{i1} \rangle_{j1} \right] \leftarrow \underline{(se)} \left[ \langle \text{Mind}^{i1} \rangle_{j1} \right] + (F\Delta g_{i1})_{j1} \\ \quad \quad \text{for } k1 \in 1..6 \\ \quad \quad \quad \left[ \begin{array}{c} \langle \text{Mind}^{i1} \rangle \\ \underline{s} \end{array} \right]_{\langle \text{Mind}^{i1} \rangle_{j1}} \left( \text{Mind}^{i1} \right)_{k1} \leftarrow \left[ \begin{array}{c} \langle \text{Mind}^{i1} \rangle \\ \underline{s} \end{array} \right]_{\langle \text{Mind}^{i1} \rangle_{j1}} \left( \text{Mind}^{i1} \right)_{k1} + (Kg_{i1})_{j1,k1} \\ \text{return } \begin{pmatrix} \underline{ss} \\ \underline{se} \\ \underline{s} \end{pmatrix} \end{array}$$

## Учет закрепления фермы и осадки жестких связей

$$\begin{pmatrix} Ft \\ F\Delta \\ \underline{K1} \\ K \end{pmatrix} := \begin{array}{l} \text{for } i \in 1.. Nsv \\ \quad \underline{ss}_i \leftarrow \text{if}(U_i = 0, 0, Ft_i) \\ \quad su_i \leftarrow \text{if}(U_i = 0, 0, F\Delta_i) \\ \quad \text{for } j \in 1.. Nsv \\ \quad \quad s_{i,j} \leftarrow \text{if}[(U_j = 0 \vee U_i = 0) \wedge i \neq j, 0, K_{i,j}] \\ \quad \quad s_{j,j} \leftarrow \text{if}(U_j = 0, 1, K_{j,j}) \\ \quad \quad s1_{i,j} \leftarrow \text{if}[(U_j = 0 \vee U_i = 0) \wedge i \neq j, 0, K_{i,j}] \\ \quad \quad s1_{j,j} \leftarrow \text{if}(U_j = 0, 1, K_{j,j}) \\ \quad \quad s_{i,j} \leftarrow \text{if}(U\Delta_i = 0 \wedge U\Delta_j = 0, s1_{i,j}, 0) \\ \quad \quad s_{j,j} \leftarrow \text{if}(U\Delta_j \neq 0, -s1_{j,j}, s1_{j,j}) \\ \text{return} \begin{pmatrix} \underline{ss} \\ su \\ s1 \\ s \end{pmatrix} \end{array}$$

## Грузовой вектор от смещения жестких связей

$$F0\Delta := -K1 \cdot U\Delta$$

## Решение основного уравнения МКЭ

$$UU := K^{-1} \cdot (Ft + F\Delta + F0\Delta + F)$$

$$\underline{U} := \begin{array}{l} \text{for } k \in 1.. n \\ \quad \text{for } j \in 1.. 6 \\ \quad \quad s_j \leftarrow UU_{(Mind^{(k)})_j} \\ \quad \quad w^{(k)} \leftarrow s \\ \text{return } w \end{array}$$

### Узловые перемещения КЭ в глобальной системе координат в метрах

$$U^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.00001055 \\ 0 \\ -0.000045 \end{pmatrix} \quad U^{(2)} = \begin{pmatrix} -0.00001055 \\ 0 \\ -0.000045 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad U^{(3)} = \begin{pmatrix} -0.00001055 \\ 0 \\ -0.000045 \\ -0.00238806 \\ -0.00003201 \\ -0.00327242 \end{pmatrix}$$

$$U^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.00238806 \\ -0.00003201 \\ -0.00327242 \end{pmatrix} \quad U^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.00238806 \\ -0.00003201 \\ -0.00327242 \end{pmatrix} \quad U^{(6)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.008 \\ -0.00238806 \\ -0.00003201 \\ -0.00327242 \end{pmatrix}$$

$$U^{(7)} = \begin{pmatrix} -0.00238806 \\ -0.00003201 \\ -0.00327242 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

### Определение усилий в КЭ в местной системе координат

$$Se^{(k)} := Ke_k \cdot \Lambda_k^T \cdot U^{(k)}$$

### Учет начальных (температурных и монтажных) усилий на КЭ

$$Se^{(k)} := Se^{(k)} - FTe_k - F\Delta e_k$$

### Усилия в узлах КЭ с учетом знака деформации

$$N_k := -\text{stack} \left[ \left( Se^{(k)} \right)_1, \left[ - \left( Se^{(k)} \right) \right]_2 \right]$$



## ДЛИНЫ СТЕРЖНЕЙ (в м)

$$L^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3.26 & 3.32 & 3.2 & 4.61 & 4.57 & 3.26 & 3.32 \end{pmatrix}$$

## ПЕРЕМЕЩЕНИЯ УЗЛОВ СИСТЕМЫ (в мм)

### Перемещения в узлах фермы

Uzel := for jj ∈ 1..n

for k0 ∈ 1..3

$$\begin{cases} Uz_{k0, (Elem^{(jj)})_1} \leftarrow (U^{(jj)})_{k0} \\ Uz_{k0, (Elem^{(jj)})_2} \leftarrow (U^{(jj)})_{k0+3} \\ Uz \cdot 1000 \end{cases}$$

$$Uzel^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Uzel^{(2)} = \begin{pmatrix} -0.01054801 \\ 0 \\ -0.04500144 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} X \\ Y \\ Z \end{matrix}$$

$$Uzel^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Uzel^{(4)} = \begin{pmatrix} -2.38805899 \\ -0.03201315 \\ -3.27242282 \end{pmatrix}$$

$$Uzel^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} \quad Uzel^{(6)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## УСИЛИЯ В СТЕРЖНЯХ (в кН)

$$N_1 = \begin{pmatrix} -26.53 \\ -26.53 \end{pmatrix} \quad N_2 = \begin{pmatrix} 16.01 \\ 16.01 \end{pmatrix}$$

$$N_3 = \begin{pmatrix} 1391.09 \\ 1391.09 \end{pmatrix} \quad N_4 = \begin{pmatrix} -527.01 \\ -527.01 \end{pmatrix}$$

$$N_5 = \begin{pmatrix} -1414.6 \\ -1414.6 \end{pmatrix} \quad N_6 = \begin{pmatrix} 996.39 \\ 996.39 \end{pmatrix}$$

$$N_7 = \begin{pmatrix} 367.49 \\ 367.49 \end{pmatrix}$$

### Узловые усилия в КЭ в глобальной системе координат

$$SSe_k := \Lambda_k \cdot Se^{(k)}$$

### Опорные реакции и равновесие узлов фермы

$$R^{(1)} := \text{submatrix}(SSe_1, 1, 3, 1, 1) \dots = \begin{pmatrix} 763.25 \\ 991.59 \\ 699.65 \end{pmatrix} \begin{matrix} R1x \\ R1y \\ R1z \end{matrix}$$

$$R^{(2)} := \text{submatrix}(SSe_1, 4, 6, 1, 1) - FF^{(2)} \dots = \begin{pmatrix} 0 \\ -1391.09 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R2x \\ R2y \\ R2z \end{matrix}$$

$$+ \text{submatrix}(SSe_2, 1, 3, 1, 1) \dots$$

$$+ \text{submatrix}(SSe_3, 1, 3, 1, 1)$$

$$R^{(3)} := \text{submatrix}(SSe_2, 4, 6, 1, 1) \dots = \begin{pmatrix} 262.56 \\ 365.49 \\ -251.62 \end{pmatrix} \begin{matrix} R3x \\ R3y \\ R3z \end{matrix}$$

$$+ \text{submatrix}(SSe_4, 1, 3, 1, 1)$$

$$R^{(4)} := \text{submatrix}(SSe_3, 4, 6, 1, 1) \dots = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R4x \\ R4y \\ R4z \end{matrix}$$

$$+ \text{submatrix}(SSe_4, 4, 6, 1, 1) \dots$$

$$+ \text{submatrix}(SSe_5, 4, 6, 1, 1) \dots$$

$$+ \text{submatrix}(SSe_6, 4, 6, 1, 1) \dots$$

$$+ \text{submatrix}(SSe_7, 1, 3, 1, 1) - FF^{(4)}$$

$$R^{(5)} := \text{submatrix}(SSe_6, 1, 3, 1, 1) = \begin{pmatrix} -734.5 \\ 0 \\ -673.29 \end{pmatrix} \begin{matrix} R5x \\ R5y \\ R5z \end{matrix}$$

$$R^{(6)} := \text{submatrix}(SSe_7, 4, 6, 1, 1) = \begin{pmatrix} -265.32 & R6x \\ 0 & R6y \\ 254.27 & R6z \end{pmatrix}$$

### Статическая проверка равновесия фермы

$$\begin{aligned} \Sigma X = 0 & \quad \sum_{k=1}^6 [(R)^{(k)}]_1 + (FF^{(2)})_1 + (FF^{(4)})_1 = 0 \\ \Sigma Y = 0 & \quad \sum_{k=1}^6 [(R)^{(k)}]_2 + (FF^{(2)})_2 + (FF^{(4)})_2 = -0 \\ \Sigma Z = 0 & \quad \sum_{k=1}^6 [(R)^{(k)}]_3 + (FF^{(2)})_3 + (FF^{(4)})_3 = -0 \end{aligned}$$

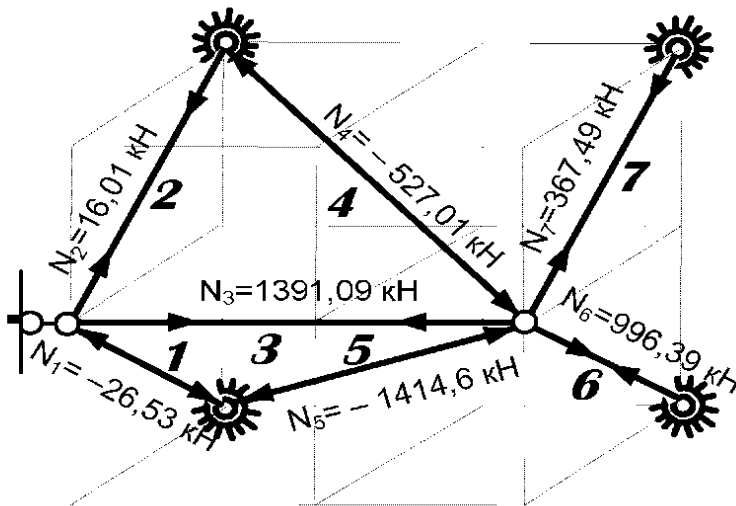


Рис. 8. Расчетные усилия в стержнях фермы

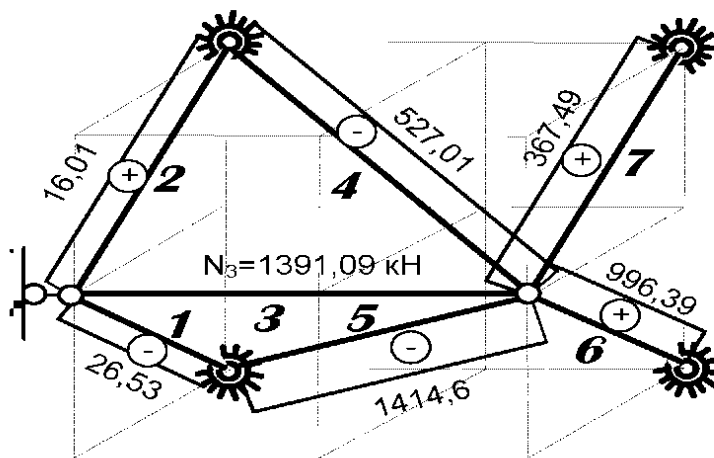


Рис. 9. Эпюра продольных сил в стержнях фермы

## Проверка прочности фермы

Наибольшее усилие в стержне 5  $N_5 = 1414,6$  кН. Длина стержня 4,57 м. Стержень сжат. Необходима проверка устойчивости стержня.

Площадь сечения

$$A = \frac{\pi l^2}{4} (1 - \alpha^2) = \frac{3,14 \cdot 0,2^2}{4} (1 - 0,8^2) = 0,0113 \text{ м}^2.$$

Радиус инерции сечения

$$i = \frac{D}{4} \sqrt{1 + \alpha^2} = \frac{20}{4} \sqrt{1 + 0,8^2} = 6,4 \text{ см.}$$

Гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu \cdot L}{i} = \frac{1 \cdot 457}{6,4} = 71,4.$$

Коэффициент продольного изгиба  $\varphi = 0,802$ .

Проверка условия устойчивости

$$\sigma = \frac{N_5}{\varphi \cdot A} = \frac{1414,6}{0,802 \cdot 0,0113} = 156,1 \text{ МПа.}$$

$$\sigma < [\sigma] = 160 \text{ МПа.}$$

Прочность и устойчивость стержней фермы обеспечена.

## Контрольные задания для лабораторной работы

Для заданной пространственной фермы (рис. 10), выполненной из стальных труб постоянного поперечного сечения с наружным диаметром  $D = 20$  см и внутренним диаметром  $d = 16$  см ( $[\sigma] = 160$  МПа,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,

$\alpha = 125 \cdot 10^{-7}$  град), требуется:

1. Построить эпюру продольных сил:
  - а) от заданной узловой нагрузки;
  - б) смещения одной из опор по оси, указанной преподавателем на  $\Delta$ ;
  - в) сборки с натягом одного из стержней фермы, если его длина отличается от номинального размера на  $\Delta$  (стержень указывается преподавателем);
  - г) изменения средней температуры одного из стержней на  $\Delta T$  (стержень указывается преподавателем).
2. Определить опорные реакции фермы. Выполнить проверку равновесия узлов фермы.
3. Проверить равновесие всей фермы.

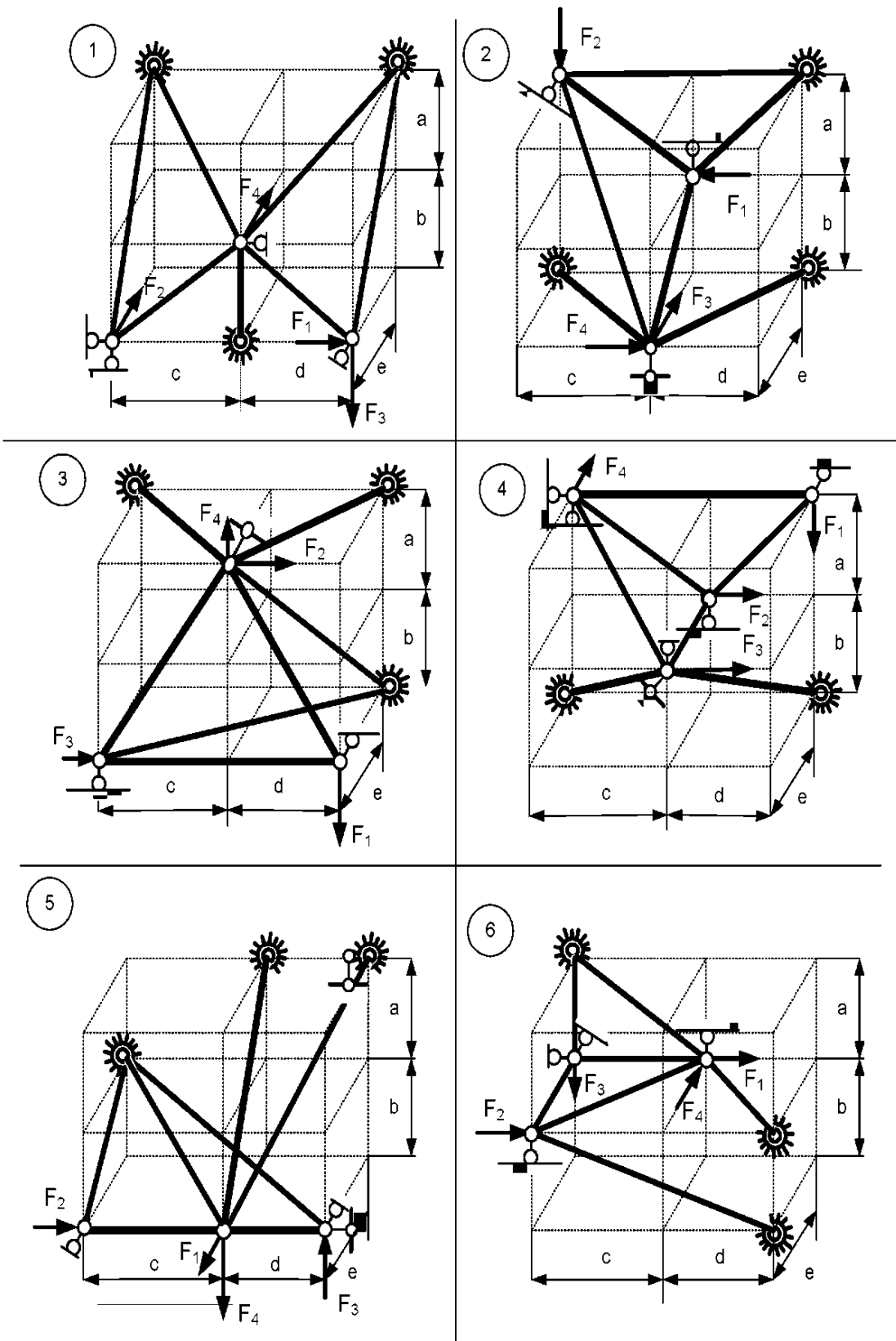
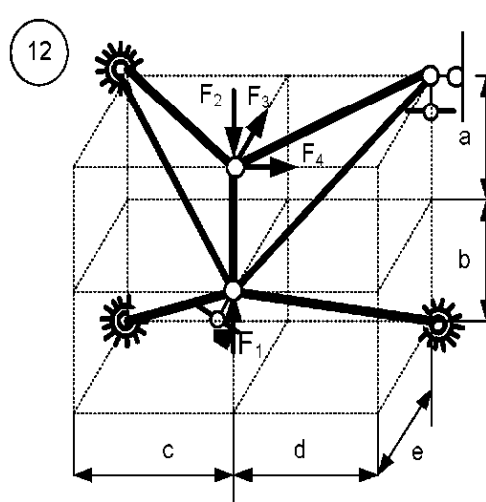
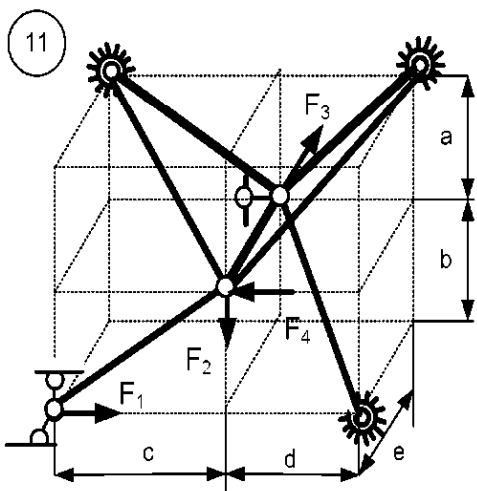
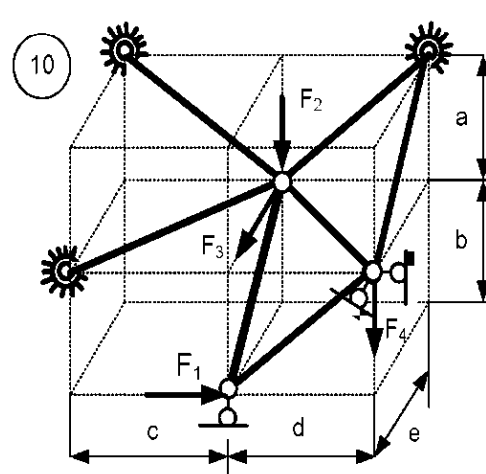
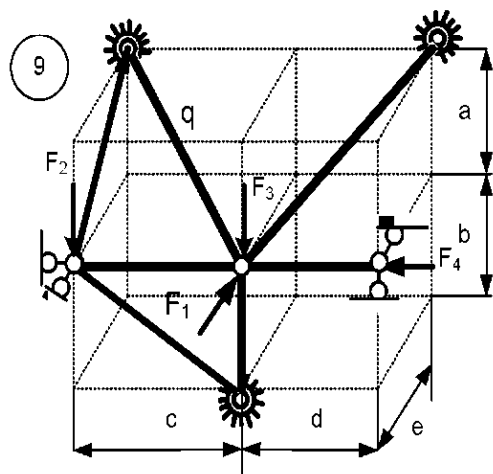
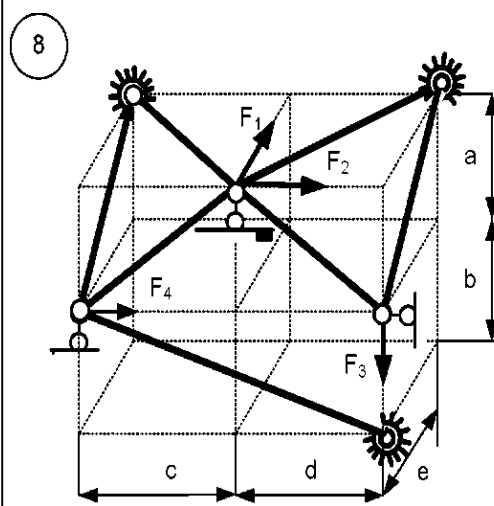
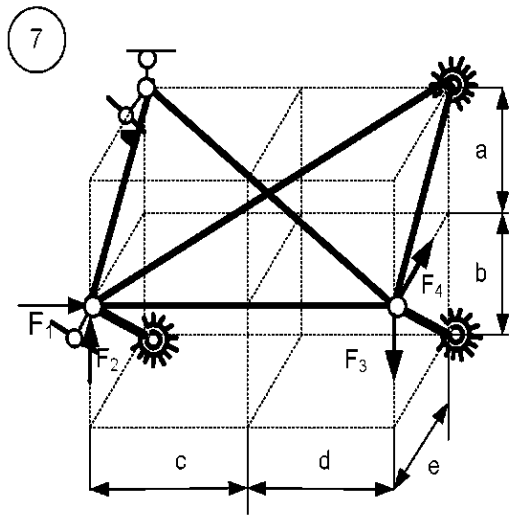
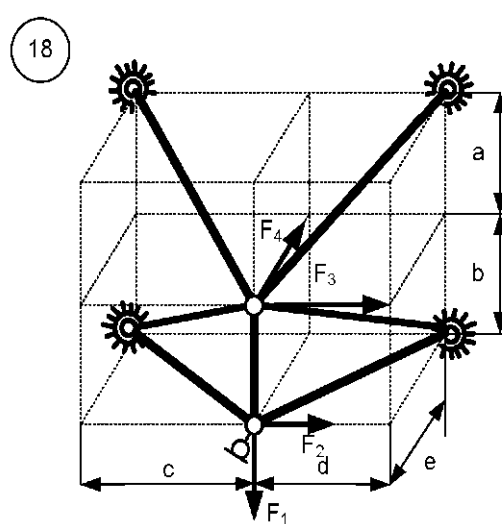
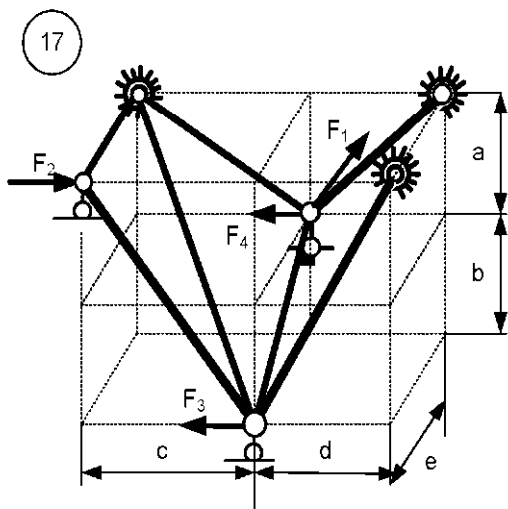
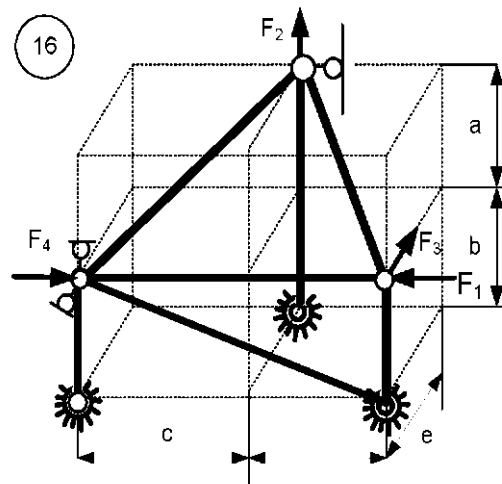
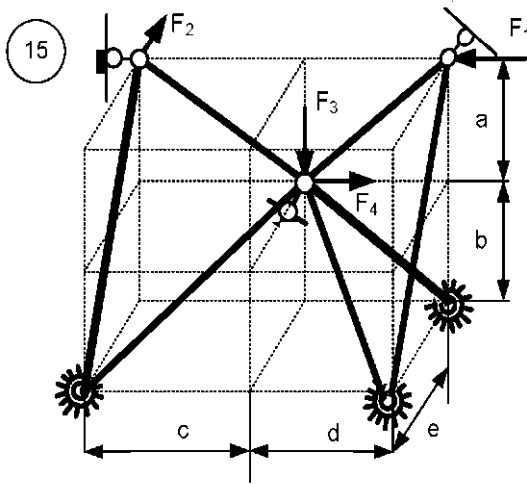
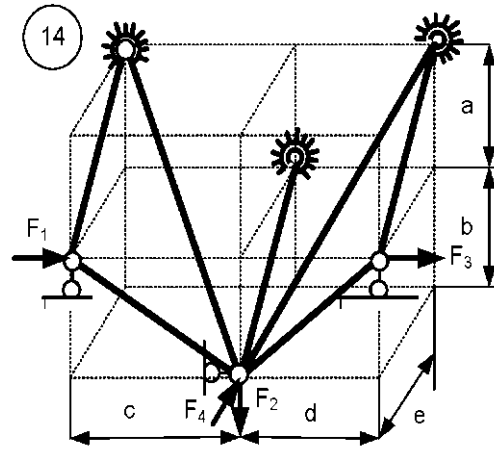
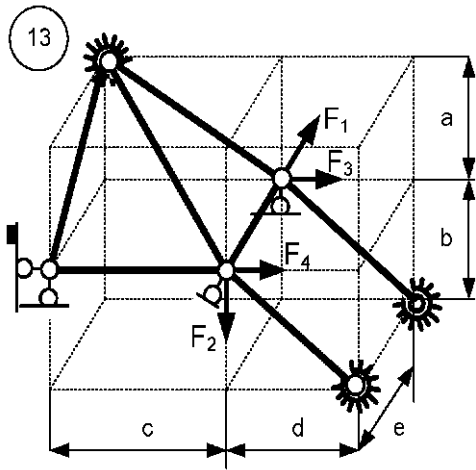


Рис.10. Схемы заданий по вариантам



Продолжение рис. 10



Окончание рис. 10

Исходные данные для выполнения лабораторной работы приводятся в таблице.

Исходные данные для выполнения лабораторной работы

Номер варианта	a, м	b, м	c, м	d, м	e, м	F <sub>1</sub> , кН	F <sub>2</sub> , кН	F <sub>3</sub> , кН
1	2,2	2,6	1,2	2,1	1,7	11	15	7
2	2,4	2,4	1,4	2,2	1,8	14	17	8
3	2,6	2,2	1,6	2,3	1,9	17	19	11
4	2,8	2,0	1,8	2,4	2,1	21	21	14
5	2,0	1,1	2,0	2,5	1,9	24	23	16
6	2,2	1,4	2,2	2,4	1,8	25	25	17
7	2,4	1,6	2,4	2,3	1,7	28	23	12
8	2,6	1,8	2,6	2,2	1,6	31	21	10
9	2,3	1,1	2,5	2,1	1,5	32	19	9
10	2,4	1,2	2,4	1,9	1,4	36	17	8

Окончание таблицы

Номер варианта	F <sub>4</sub> , кН	Смещение опорного стержня		ΔT, °C	Отклонение длины стержня от номинального размера Δ, мм
		Δ, мм	Ось		
1	21	3	X	10	1,2
2	32	4	Y	15	-1,4
3	23	5	Z	20	1,6
4	34	3	X	25	1,8
5	9	1	Y	-20	2,0
6	10	2	Z	-15	-2,2
7	11	1	X	-10	2,4
8	12	2	Y	-5	2,6
9	13	5	Z	12	-2,5
10	14	4	Z	14	2,4

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Как назначаются конечные элементы (КЭ) при расчете пространственной фермы (ПФ)?



2. Запишите полный функционал потенциальной энергии для пространственного стержня.
3. Какие функции формы используются для аппроксимации перемещений?
4. Каков физический смысл элемента матрицы жесткости КЭ?
5. Подсчитайте степень статической неопределимости заданной вам системы.
6. Зачем нужны глобальная и местная системы координат? Как они выбираются?
7. Как определяется число степеней свободы ПФ?
8. Сколько степеней свободы имеет КЭ ПФ?
9. Изобразите КЭ ПФ в местной системе координат и покажите узловые усилия.
10. Какие виды опорных устройств используются в расчетных схемах ПФ?
11. Какие статические и кинематические характеристики имеют опорные устройства ПФ?
12. Как проводится учет граничных условий при расчете ПФ?
13. Как формируется вектор узловых нагрузок? Какое используется правило знаков?
14. В чем отличие формирования вектора узловых нагрузок в местной и глобальной системах координат?
15. Какую функцию выполняет геометрическая матрица? Каков смысл коэффициентов геометрической матрицы?
16. Как формируется матрица жесткости (МЖ) КЭ в местной системе координат? Каков смысл ее коэффициентов?
17. Какова размерность МЖ КЭ в местной системе координат?
18. Как формируется МЖ КЭ в глобальной системе координат?
19. Зачем нужна матрица индексов при расчете ПФ?
20. Как формируется матрица индексов?
21. Как формируется МЖ всей системы в глобальной системе координат?
22. Какова размерность МЖ всей системы?
23. Запишите основное матричное уравнение МКЭ для расчета ПФ.
24. Что получается в результате решения основного уравнения МКЭ?
25. Как построить деформированную схему рассчитываемой системы?
26. Как получить узловые усилия КЭ в местной системе координат?
27. Какие узловые усилия считаются положительными? Приведите правило знаков для внутренних сил.
28. Как по полученным узловым усилиям строятся эпюры внутренних сил?
29. Как получить узловые усилия КЭ в глобальной системе координат?
30. Как проверить равновесие узлов ПФ?
31. Как определить опорные реакции ПФ?

## Библиографический список

### *Основной*

1. Дарков А. В. Строительная механика / А. В. Дарков, Н. Н. Шапошников. – М. : Высш. шк., 1986. – 607 с.
2. Киселев В. А. Строительная механика. Общий курс / В. А. Киселев. – М. : Стройиздат, 1986. – 520 с.
3. Ржаницын А. Р. Строительная механика / А. Р. Ржаницын. – М. : Высш. шк., 1991. – 439 с.
4. Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов / В. И. Мяченков [и др.]. – М. : Машиностроение, 1989. – 520 с.
5. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики (Статика стержневых систем) / Г. К. Клейн [и др.]. – М. : Высш. шк., 1980. – 384 с.

### *Дополнительный*

1. Леонтьев Н.Н. Основы строительной механики стержневых систем / Н. Н. Леонтьев, Д. Н. Соболев, А. А. Амосов. – М. : Изд-во Ассоциации строительных вузов, 1996. – 542 с.
2. Метод конечных элементов : методические указания и варианты заданий к выполнению лабораторных работ № 3 и 4 для студентов строительных специальностей / сост. А. Д. Ловцов. – Хабаровск : Изд-во Хабар. гос. техн. ун-та, 2000. – 12 с.
3. Решение задач строительной механики на ПЭВМ : методические указания к выполнению курсовых и расчетно-проектировочных работ для студентов строительных и механических специальностей : в 2 ч. / сост. Л. М. Иванников, В. В. Иовенко, А. Д. Ловцов, А. А. Лукашевич. – Хабаровск : Изд-во Хабар. гос. техн. ун-та, 1996. – ч. 2. – 44 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Общие положения.....	3
Особенности расчета пространственной фермы МКЭ.....	3
Порядок расчета пространственной фермы МКЭ.....	7
Кинематический анализ пространственной фермы.....	8
Нагрузки.....	9
Чтение результатов расчета.....	10
Пример решения задачи лабораторной работы.....	10
Распечатка программы расчета пространственной фермы в Mathcad 14.....	12
Контрольные задания для лабораторной работы.....	21
Контрольные вопросы.....	25
Библиографический список.....	27