

ОПД.Р.03 СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА
ОСНОВЫ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РАСЧЕТА
КОНСТРУКЦИЙ
Конспект лекций

Излагаются теоретические основы численных методов расчета конструкций методом конечных разностей, методом коллокаций. Приводятся примеры расчета балок и пластин рассматриваемыми методами. Показывается сходимость расчетов приближенными методами к точному решению, если оно известно, или уточнение решения при сгущении сетки или увеличении числа членом ряда. Приводятся примеры использования разностного метода для расчета балок переменного сечения на изгиб и стержней переменного сечения на устойчивость.

ЛЕКЦИЯ 1

Задачи теории упругости и методы их решения

В курсах сопротивления материалов и строительной механики стержневых систем излагаются инженерные методы расчета отдельных стержней и стержневых систем. Основной рабочей гипотезой сопротивления материалов является гипотеза плоских сечений. Именно эта гипотеза позволяет построить достаточно простые и удобные методы расчета стержневых конструкций. Однако в строительстве и машиностроении используются и более сложные – пластинчатые, оболочечные и массивные конструкции. Теория и методы расчета таких конструкций рассматриваются в курсах теории упругости, теории пластичности, теории оболочек. Однако и при расчете стержней встречаются задачи, которые не решаются методами сопротивления материалов. Например, задача о кручении стержней не круглого поперечного сечения. При кручении стержней некруглого сечения не выполняется гипотеза плоских сечений. Поперечные сечения при кручении искривляются, происходит деформация сечений. Для тонкостенных стержней была разработана в рамках сопротивления материалов теория расчета, учитывающая деформацию поперечных сечений. При расчете напряженного состояния стержней прямоугольного сечения в сопротивлении материалов используются таблицы коэффициентов, которые получены при решении задачи кручения брусков методами теории упругости.

В теории упругости, рассматривая равновесие и деформирование малого элемента, вырезанного из массивного тела, получают сложную систему 9 дифференциальных уравнений в частных производных (уравнения равновесия и геометрические уравнения) и 6 алгебраических (Закон Гука) уравнений с 15 неизвестными. Эта система приводится к системе трех дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка в перемещениях или к системе 6 уравнений в напряжениях. Напряженно деформированное состояние оболочек описывается системой уравнений в частных производных с переменными коэффициентами.

Сложность системы уравнений общей теории упругости привела к необходимости выделения класса конструкций, напряженно-деформированное состояние которых, путем введения дополнитель-

ных рабочих гипотез, описывается упрощенной системой уравнений. К таким классам конструкций относятся:

а. Теория расчета стержней и стержневых систем – сопротивление материалов и строительная механика стержневых систем.

б. Тонкие пластинки с постоянными по толщине пластики нагрузками, параллельными срединной плоскости (плоское напряженное состояние), и длинные призматические тела, нагруженные не изменяющимися по длине тела нагрузками, действующими перпендикулярно оси тела (плоская деформация) – плоская задача теории упругости.

в. Тонкие пластинки с нагрузкой, действующей перпендикулярно срединной плоскости – изгиб пластин.

Плоская задача теории упругости описывается системой 8 уравнений с 8-ю неизвестными. Из них 2 уравнения равновесия и 3 геометрические уравнения деформаций – дифференциальные уравнения в частных производных и 3 уравнения закона Гука. Общая система уравнений приводится к двум дифференциальным уравнениям в частных производных в перемещениях. При решении задачи в напряжениях к двум уравнениям равновесия добавляется уравнение неразрывности деформаций. Эта система введением функции напряжений приводится к одному разрешающему уравнению. При ограничении типа объемных сил, действующих в плоскости пластинки, разрешающее уравнение для функции напряжений является однородным бигармоническим уравнением в частных производных.

Задача изгиба пластин приводится к неоднородному бигармоническому уравнению относительно функции прогиба срединной поверхности пластинки.

Для того, чтобы получить решение задачи теории упругости необходимо удовлетворить системе уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние твердого деформируемого тела, и граничные условия заданной конструкции.

Точное решение объемной задачи теории упругости получены для довольно узкого класса задач. К ним относятся задачи центрального растяжения сжатия стержней, чистого изгиба бруса, задачи кручения стержней различного поперечного сечения. Решена задача о действии сосредоточенной силы на бесконечное твердое тело. На основе этого решения разработаны методы точного или приближенного решения напряженно-деформированного состояния тел канониче-

нической формы методом интегральных граничных уравнений, методом потенциала.

Для плоской задачи теории упругости и задач изгиба пластин, число точных решений более широко, но и здесь их число ограничено. Точное решение может быть получено в виде конечной формулы или в виде ряда, для которого доказана сходимости и решение может быть получено с любой заданной точностью. Однако для большинства задач точное решение получить не удастся, особенно для тел сложной конфигурации и при сложных граничных условиях закрепления и нагружения тела на границе.

Для решения таких задач используются приближенные аналитические, численно-аналитические и численные методы их решения. Численно-аналитические приближенные решения представляются в виде конечных формул или рядов, удовлетворяющих уравнениям задачи и граничным условиям с некоторым приближением. При решении в рядах, обычно, расчет проводят с конечным числом членов ряда, получая приближенное решение. Для уточнения решения число членов ряда увеличивают и практически заново решают задачу. Оценка точности решения в этом случае является сложной задачей. В инженерной практике часто проводят расчет с различным числом членов ряда, и, если невязка при этом незначительная, считают, что получено удовлетворительное решение. Однако, близость результатов расчета, проведенных с различным числом членов ряда, не гарантирует сходимости вычислительного процесса.

К численно-аналитическим методам расчета относятся: метод коллокаций, метод Бубнова-Галеркина, метод квадратичных отклонений, методы, основанные на вариационных принципах строительной механики – метод Ритца-Тимошенко, Метод Канторовича-Власова и др.

В численных методах расчета используются различные дискретные методы: метод конечных разностей, метод сеток, вариационно-разностный метод, метод конечных элементов, метод граничных элементов.

Численно-аналитические методы позволяют получать напряжения и деформация в любой точке тела и проводить аналитический анализ полученного решения, используя приемы математического анализа. Численные методы позволяют получить результаты расчета в конечном числе точек. В других точках тела напряженно деформированное состояние может быть определено аппроксимацией реше-

ния в опорных точках, вновь используя численные методы. Для уточнения решения необходимо увеличить число опорных точек и заново провести процедуру расчета. Аналитически и численно-аналитические методы расчета предпочтительнее численных методов. В то же численные методы более легко адаптируются к изменению условий задачи, позволяют решать задачи со сложными граничными условиями и разнообразными вариантами нагружения. Развитие вычислительной техники во второй половине XX-го века привело к широкому использованию численных методов расчета конструкций.

Отметим, что и некоторые типы задач сопротивления материалов и строительной механики стержневых систем также требуют использования численных методов расчета, например расчет перемещений в стержнях переменного сечения, и, следовательно, расчет статически неопределимых стержней и стержневых систем переменного сечения.

В настоящем курсе рассматриваются метод конечных разностей (расчет стержней) и метод сеток (расчет пластин), метод коллокаций. Эти методы используют математический аппарат, известный из курса математического анализа.

Методы, основанные на вариационных принципах механики, требуют дополнительных сведений из вариационного исчисления и рассматриваются в курсе «Аналитические и численные методы расчета конструкций», читаемого студентам магистратуры.

Разностные производные первого порядка

В первом приближении производную функции в точке представленной числовыми значениями в заданных узлах определяют как отношение приращения функции (разность значений функции в соседних узлах) к приращению аргумента (шагу – расстоянию между узлами) (рис. 1.1). Полученные значения называют разностными отношениями. Различают правые и левые разностные отношения, или разностные производные шагом вперед и шагом назад.

Правые и левые разностные отношения определяются формулами:

$$y'_{i+1} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}}; \quad y'_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}, \quad (1.1)$$

где y'_{i+1} , y'_i - правое и левое разностное отношение (разностные производные шагом вперед и шагом назад) в i -ой точке соответственно; y_i - значение функции в i -м узле; h_i, h_{i+1} - шаги (приращение аргумента) слева и справа от i -того узла соответственно.

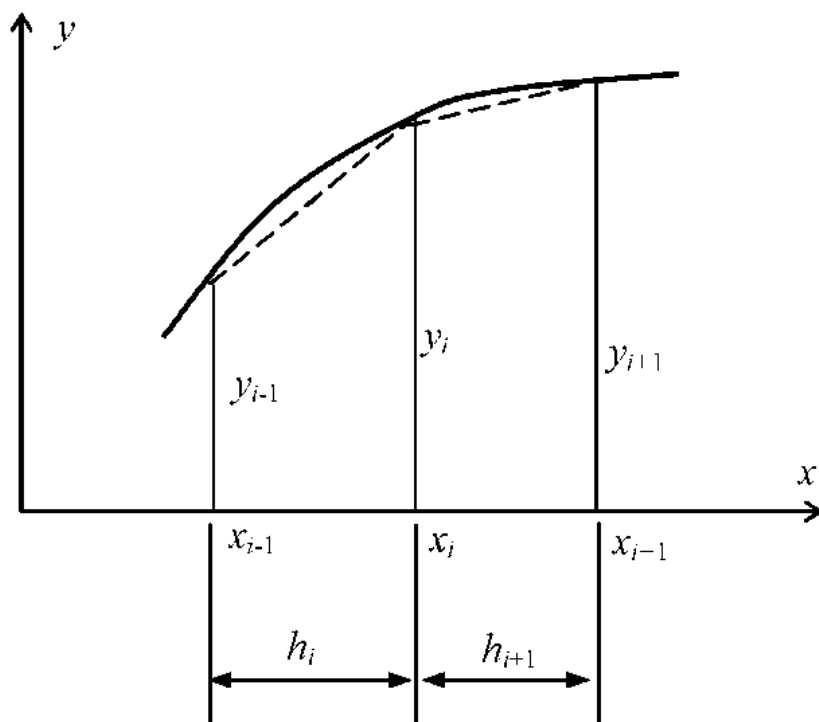


Рис. 1.1. К выводу разностных производных целочисленной функции

Формулы разностных отношений (1.1) определяют разностные производные в i -м узле. Но, очевидно, эти значения, определяемые направлением секущих линий (хорд) между узловыми значениями функций, более близки к значениям производных (определяемых направлениями касательных функции в точке) в середине узловых точек $x_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ и $x_{i+1} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ соответственно. Для i -го узла можно использовать среднее значение левых и правых разностных производных $y'_i = \frac{y'_i + y'_{i+1}}{2}$. Более точная формула разностной производной в i -том узле будет получена ниже при выводе разностных производных 2-го порядка.

ЛЕКЦИЯ 2

Разностные производные второго порядка

Для получения более точных значений производных функций заданных числовыми значениями в узлах используют аппроксимирующие функции, проходящие через заданные узловые значения функции. В качестве аппроксимирующих функций чаще всего используются алгебраические полиномы n -ой степени. Для задания полинома n -ой степени используются значения заданной функции в $n + 1$ точке.

Для вывода разностных производных второго порядка используют аппроксимацию полиномом 2-й степени – параболой, проходящей через 3 узловые точки y_{i-1}, y_i, y_{i+1} (рис. 2.1).

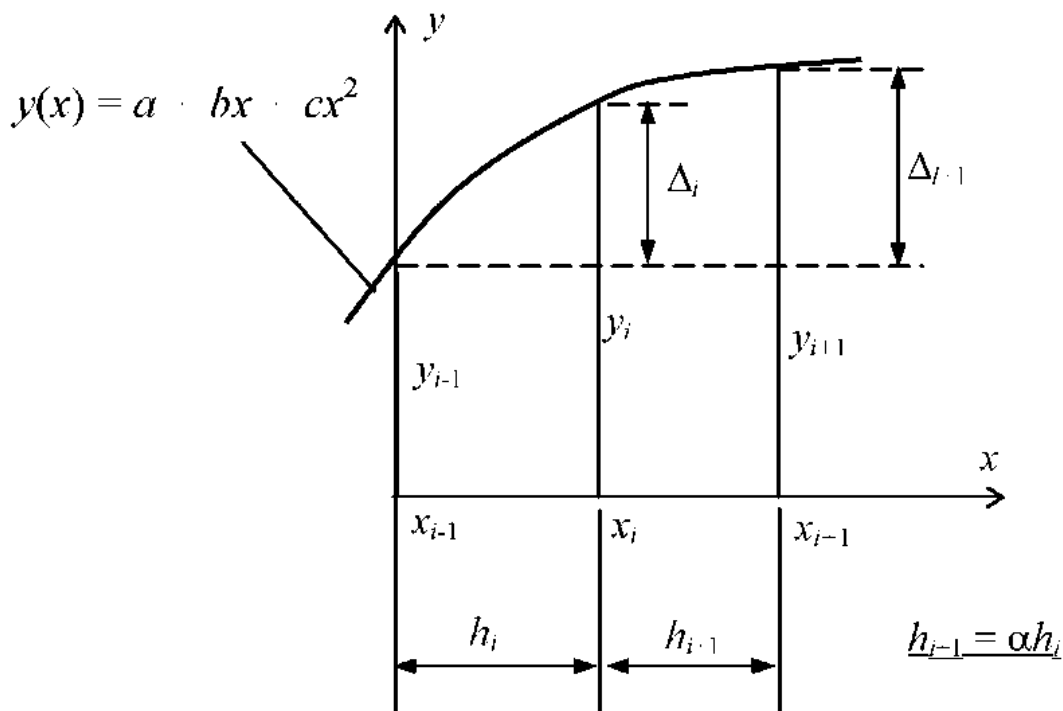


Рис. 2.1. Аппроксимация функции параболой

Проведем через три заданные значения функции параболу $y(x) = a + bx + cx^2$. Коэффициенты a, b, c определим из условия прохождения ее через узловые точки. Для удобства, используем местную систему координат, совместив начало местной системы координат с $i-1$ -й точкой. Тогда получим

$$y(0) = a = y_{i-1}; \quad y(h_i) = a + bh_i + ch_i^2 = y_i;$$

$$y[(1 + \alpha)h_i] = a + (1 + \alpha)bh_i + (1 + \alpha)^2 ch_i^2 = y_{i+1}.$$

$$y_i - a = y_i - y_{i-1} = \Delta_i; \quad y_{i+1} - a = y_{i+1} - y_{i-1} = \Delta_{i+1}; \quad \alpha = \frac{h_{i+1}}{h_i}$$

Откуда получаем систему уравнений для определения коэффициентов b , c , которую запишем в матричной форме, относительно bh_i и ch_i^2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 + \alpha & (1 + \alpha)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} bh_i \\ ch_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_i \\ \Delta_{i+1} \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

Для решения системы методом Крамера, вычислим определители:

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 + \alpha & (1 + \alpha)^2 \end{vmatrix} = (1 + \alpha)^2 - (1 + \alpha) = \alpha(1 + \alpha);$$

$$d_1 = \begin{vmatrix} \Delta_i & 1 \\ \Delta_{i+1} & (1 + \alpha)^2 \end{vmatrix} = (1 + \alpha)^2 \Delta_i - \Delta_{i+1} =$$

$$= (1 + \alpha)^2 (y_i - y_{i-1}) - (y_{i+1} - y_{i-1}) = -\alpha(2 + \alpha)y_{i-1} + (1 + \alpha)^2 y_i - y_{i+1};$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} 1 & \Delta_i \\ 1 + \alpha & \Delta_{i+1} \end{vmatrix} = \Delta_{i+1} - (1 + \alpha)\Delta_i =$$

$$= y_{i+1} - y_i - (1 + \alpha)(y_i - y_{i-1}) = \alpha y_{i-1} - (1 + \alpha)y_i + y_{i+1}. \quad (2.2)$$

На основе формул (2.2) получим:

$$d_1 + d_2 = \alpha(1 + \alpha)\Delta_i = d\Delta_i; \quad d_1 + (1 + \alpha)d_2 = \alpha\Delta_{i+1}. \quad (2.3)$$

Тогда коэффициенты b , c определяются по формулам:

$$b = \frac{d_1}{dh}; \quad c = \frac{d_2}{dh^2}. \quad (2.4)$$

Уравнение аппроксимирующей параболы, проходящие через 3 точки в окрестности i -ой точки, получаем в виде

$$y(x)_i = y_{i-1} + \frac{d_1}{d} \frac{x}{h_i} + \frac{d_2}{d} \frac{x^2}{h_i^2}, \quad (2.5)$$

Индекс i показывает, что функция аппроксимируется в окрестности i -ой точки.

Дифференцируя уравнение (2.5) по x , получим:

$$y'(x)_i = \frac{1}{dh_i} \left(d_1 + 2d_2 \frac{x}{h_i} \right); \quad (2.6)$$

$$y''(x)_i = 2 \frac{d_2}{dh_i^2} = \frac{2}{\alpha(1+\alpha)} \frac{d_2}{h_i^2}. \quad (2.7)$$

Формулы (2.5), (2.6) позволяют вычислять значение функции и ее первой производной между опорными точками при любом значении производной. Вторая производная при аппроксимации функции квадратной параболой является константой и ее обычно относят к i -ой точке.

Получим значения первой производной в опорных точках, учитывая формулы (2.2), (2.3):

$$\begin{aligned} y'_{i-1} = y'(0)_i &= \frac{d_1}{dh_i} = \frac{-\alpha(2+\alpha)y_{i-1} + (1+\alpha)^2 y_i - y_{i+1}}{\alpha(1+\alpha)h_i}; \\ y'_i = y'(h_i)_i &= \frac{1}{dh_i} (d_1 + 2d_2) = \frac{-\alpha^2 y_{i-1} + (\alpha^2 - 1)^2 y_i + y_{i+1}}{\alpha(1+\alpha)h_i}; \\ y'_{i+1} = y'[(1+\alpha)h_i]_i &= \frac{1}{dh_i} (d_1 + 2(1+\alpha)d_2) = \\ &= \frac{\alpha^2 y_{i-1} - (1+\alpha)^2 y_i + (1+2\alpha)y_{i+1}}{\alpha(1+\alpha)h_i}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Если шаг опорных точек постоянный $h_i = h_{i+1} = h$, тогда

$$\alpha = 1; \quad d = 2; \quad d_1 = -3y_{i-1} + 4y_i - y_{i+1}; \quad d_2 = y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1};$$

$$\begin{aligned} y'_{i-1} &= \frac{-3y_{i-1} + 4y_i - y_{i+1}}{2h}; & y'_i &= \frac{-y_{i-1} + y_{i+1}}{2h}; \\ y'_{i+1} &= \frac{y_{i-1} - 4y_i + 3y_{i+1}}{2h}; & y''_i &= \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

ЛЕКЦИЯ 3

Вывод разностных производных второго порядка методом последовательного численного дифференцирования

Рассмотрим функцию, задаваемую численными значениями в узловых точках. Выше были получены разностные отношения первого порядка (1.1), определяющие левую и правую производную функции в i -той точке. В тоже время отмечалось, что эти значения разностных отношения ближе к значениям производных в серединах отрезков слева и справа от i -той точки. Принимаем далее, что производная линейно изменяется между этими значениями (рис. 3.1).

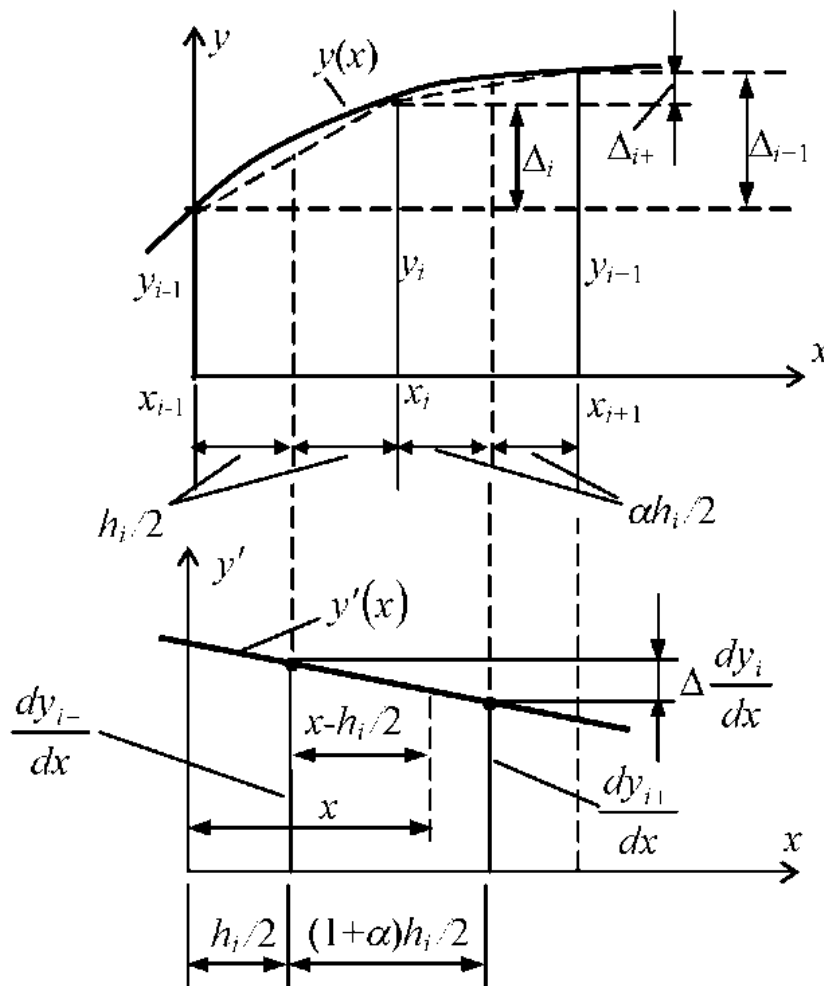


Рис. 1.1. К выводу разностных производных
последовательным дифференцированием

Введем обозначения:

$$\Delta_i = \Delta_i = y_i - y_{i-1}; \quad \Delta_{i+1} = y_{i+1} - y_{i-1}; \quad \Delta_{i+1} = \Delta_{i-1} - \Delta_i = y_{i-1} - y_i;$$

Тогда левое и правое разностные отношения получим в виде:

$$\frac{dy_i}{dx} = \frac{\Delta_i}{h_i}; \quad \frac{dy_{i+1}}{dx} = \frac{\Delta_{i+1}}{\alpha h_i}. \quad (3.1)$$

Приращение разностной производной на отрезке $dx = \frac{(1+\alpha)h}{2}$ между серединами шагов слева и справа от i -ой токи определяется по формуле:

$$\begin{aligned} \Delta \frac{dy_i}{dx} &= \frac{dy_{i+1}}{dx} - \frac{dy_i}{dx} \left(\frac{1}{\alpha} \Delta_{i+} - \Delta_{i-} \right) = \frac{1}{\alpha h_i} (\Delta_{i+1} - \Delta_i - \alpha \Delta_i) = \\ &= \frac{1}{\alpha h_i} [\Delta_{i+1} - (1+\alpha)\Delta_i] = \frac{d_2}{\alpha h_i}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Принимая линейный закон изменения первой производной целочисленной функции в рассматриваемом диапазоне, получим формулу первой производной для произвольной точки

$$\begin{aligned} y'(x)_i &= \frac{dy_i}{dx} + \frac{\Delta \frac{dy_i}{dx}}{(1+\alpha) \frac{h_i}{2}} \left(x - \frac{h_i}{2} \right) = \frac{1}{h_i} \left[\Delta_i + 2 \frac{d_2}{\alpha(1+\alpha)} \left(\frac{x}{h_i} - \frac{1}{2} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{dh_i} \left[\alpha(1+\alpha)\Delta_i - d_2 + 2d_2 \frac{x}{h_i} \right] = \\ &= \frac{1}{dh_i} \left[\alpha(1+\alpha)\Delta_i + (1+\alpha)\Delta_i - \Delta_{i+1} + 2d_2 \frac{x}{h_i} \right] = \\ &= \frac{1}{dh_i} \left[(1+\alpha)^2 \Delta_i - \Delta_{i+1} + 2d_2 \frac{x}{h_i} \right] = \frac{1}{dh_i} \left[d_1 + 2d_2 \frac{x}{h_i} \right]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

При выводе формулы (3.3) использовались соотношения (2.2), (2.3).

Дифференцируя соотношение (3.3) по x , получим вторую разностную производную:

$$y''(x)_i = 2 \frac{d_2}{\alpha(1+\alpha)h_i^2} = 2 \frac{d_2}{dh_i^2}. \quad (3.4)$$

Сравнивая формулы первой и второй разностной производной (3.3), (3.4), полученные методом последовательного разностного дифференцирования, с соответствующими формулами разностных производных (2.6), (2.7), полученных на основе квадратичной аппроксимации целочисленной функции, видим их полную идентичность.

Положив в формулах (3.3), (3.4) $h_i = h = const$ при $x = h$, получим формулы первой и второй разностной производной в i -ой точке, которые называют центральными разностными отношениями, или центральными разностными производными:

$$\begin{aligned} \text{а) } y'_i &= \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = \frac{\Delta y_i}{2h}; \\ \text{б) } y''_i &= \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} = \frac{\Delta^2 y_i}{h^2}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $\Delta y_i = y_{i+1} - y_{i-1}$; $\Delta^2 y_i = y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}$ - центральные разностные операторы первого и второго порядка соответственно.

При вычислении разностных производных на границах рассматриваемого отрезка могут использоваться центральные разностные отношения (3.5), при этом возникает необходимость использования законтурных точек, или разностные производные шагом вперед для левой границы и разностные производные шагом назад для правой границы отрезка (2.8), (2.9). При этом законтурные точки не используются.

ЛЕКЦИЯ 4

Расчет статически определимых балок методом конечных разностей

Рассмотрим использование дифференциально-разностных отношений для расчета прогибов статически определимых балок постоянного сечения. Для определения прогибов балок в сопротивлении используются методы интегрирования дифференциального упругой оси стержня:

$$y''(x) = \frac{M_x}{EJ_z}. \quad (4.1)$$

Методы сопротивления материалов для определения прогибов балок постоянного сечения достаточно просты и удобны и нет необходимости использовать численные методы для этой цели. Однако, для отработки методики решения дифференциальных уравнений методом конечных разностей эта задача удобна, как наиболее простая и позволяющая оценить решения, на основе точного решения сопротивления материалов.

В расчетах будем использовать разностную сетку с постоянным шагом $h_i = h = const$. Разностная сетка с постоянным шагом наиболее часто используется в расчетах, как наиболее простая схема. Разностная сетка с переменным шагом обычно используется для расчета двухмерных и трехмерных задач, для уточнения решения в зонах ожидаемой концентрации напряженного состояния конструкции. Введем разностный оператор второго порядка

$$\Delta^2 y_i = y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}. \quad (4.2)$$

Тогда $y_i'' = \frac{\Delta^2 y_i}{h^2}$, и разностный аналог дифференциального уравнения изгиба балки постоянного сечения получим в виде

$$\Delta^2 y_i = \frac{M_i}{EJ_z} h^2, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (4.3)$$

где n – число шагов разностной сетки; $M_i = M(x_i)$ – значения изгибающего момента балки в узлах разностной сетки.

Рассмотрим однопролетную, шарнирно опертую балку (рис 4.1). Нагрузка на балку в общем случае может быть произвольной. Шаг сетки может быть произвольным, но желательно, чтобы границы нагрузки – начало и концы распределенной нагрузки, точки приложения сосредоточенных сил совпадали с точками разностной сетки. Очевидно, при равномерной сетке $h = \frac{L}{n}$, где L - пролет балки; n – число шагов сетки. При составлении разностных уравнений предварительно определяют значения изгибающих моментов в узлах разностной сетки.

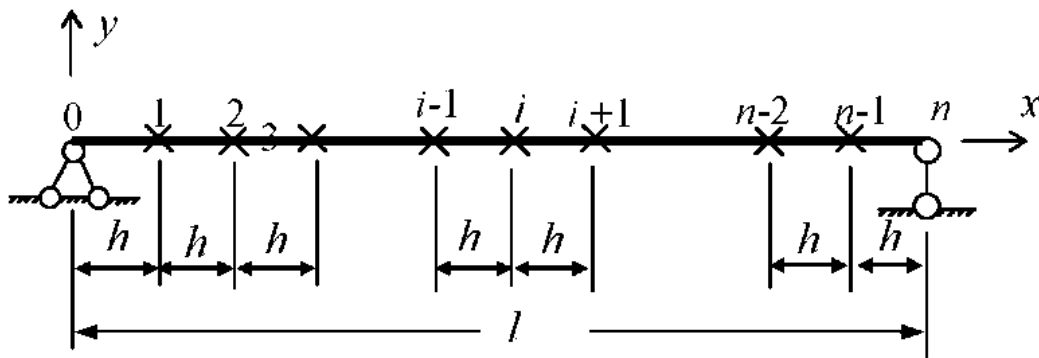


Рис. 4.1. Разностная сетка с постоянным шагом шарнирно опертой балки

Составляя разностные уравнения (4.3) для внутренних точек разностной сетки балки и учитывая граничные условия опирания балки $y(0) = y_0 = 0$, $y(L) = y_n = 0$, получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
 i = 1 & \rightarrow y_0 - 2y_1 + y_2 = -2y_1 + y_2 = \frac{M_1}{EJ_z} h^2; \\
 i = 2 & \rightarrow y_1 - 2y_2 + y_3 = \frac{M_2}{EJ_z} h^2; \\
 & \dots \dots \dots \\
 i & \rightarrow y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = \frac{M_i}{EJ_z} h^2; \\
 i = n - 2 & \rightarrow y_{n-3} - 2y_{n-2} + y_{n-1} = \frac{M_{n-2}}{EJ_z} h^2; \quad (4.4)
 \end{aligned}$$

$$i = n - 1 \rightarrow y_{n=2} - 2y_{n-1} + y_n = y_{n=2} - 2y_{n-1} = \frac{M_{n-1}}{EJ_z} h^2.$$

Решая систему алгебраических уравнений (4.4), получаем прогибы в опорных точках балки.

Рассмотрим однопролетную шарнирно опертую балку нагруженную:

а) равномерно распределенной нагрузкой

$$M_z(x) = q \frac{l}{2} x - \frac{x^2}{2} = \frac{q}{2} (lx - x^2) = \frac{q}{2} (l-x)x; \quad (4.5, a)$$

$$x_i = ih; \quad l = nh; \quad M_i = \frac{qh^2}{2} (n-i)i = M_i = \frac{ql^2}{2n^2} (n-i)i.$$

б) сосредоточенной силой в центре балки:

$$M_z(x) = \frac{P}{2} \begin{cases} x, & 0 \leq x < l/2 \\ l-x, & l/2 > x \leq l/2 \end{cases};$$

$$x_i = ih; \quad l = nh; \quad M_i = \frac{Pl}{2n} \begin{cases} i, & 0 \leq x < l/2 \\ n-i, & l/2 > x \leq l/2 \end{cases}. \quad (4.5, a)$$

1. Принимаем минимальную сетку $n = 2$, тогда $y_0 = 0$ и $y_2 = y_n = 0$, и получаем

$$-2y_1 = \frac{M_1}{EJ_z} h^2 \cdot 4 \quad y_1 = y\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{M_1}{2EJ_z} h^2.$$

а/. При равномерно распределенной нагрузке

$$y_1 = y\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{M_1}{2EJ_z} h^2 = -\frac{ql^2}{8 \cdot 2EJ_z} \cdot \frac{l^2}{n^2} = -\frac{1}{64} \frac{ql^4}{EJ_z}.$$

б/. При сосредоточенной силе:

$$y_1 = y\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{M_1}{2EJ_z} h^2 = -\frac{Pl}{4 \cdot 2EJ_z} \cdot \frac{l^2}{n^2} = -\frac{1}{32} \frac{Pl^3}{EJ_z}.$$

Оценим относительную точность приближенного решения

$$\delta y = \left| \frac{y_{точ} - y_{приб}}{y_{точ}} \right| 100 \%. \quad (4.6)$$

Из решения сопротивления материалов для равномерно распределенной нагрузки прогиб в центре однопролетной шарнирно опертой балки

$$y_c^{точ} = -\frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ_z} = -\frac{1}{76,8} \frac{ql^4}{EJ_z}.$$

$$\delta y_c = \left| \frac{\frac{1}{76,8} - \frac{1}{64}}{\frac{1}{76,8}} \right| 100 = \left| \frac{64 - 76,8}{64} \right| 100 = 20 \%;$$

Для сосредоточенной силы $y_c^{точ} = -\frac{1}{48} \frac{3l^3}{EJ_z}$.

$$\delta y_c = \left| \frac{\frac{1}{48} - \frac{1}{32}}{\frac{1}{48}} \right| 100 = \left| \frac{32 - 48}{32} \right| 100 = 50 \%.$$

Как и следовало ожидать, точность приближенного решения при минимальном шаге не удовлетворительна, особенно для балки загруженной сосредоточенной силой. Проведем расчет, удвоив число шагов, приняв $n = 4$. Тогда получаем систему разностных уравнений (4.4), которую запишем для удобства в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} \cdot \frac{h^2}{EJ_z}.$$

Решая систему уравнений, получим:

$$y_1 = y_3 = \frac{M_1 + 2M_2 + 3M_3}{4} \frac{l^2}{16EJ_z}; \quad y_2 = \frac{M_1 + 2M_2 + M_3}{2} \frac{l^2}{16EJ_z}.$$

Вычислим и оценим точность приближенного значения прогиба в центре балки.

a/. Для равномерно распределенной нагрузки

$$M_1 = M_3 = \frac{3}{32} ql^2; \quad M_2 = \frac{ql^2}{8};$$

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = y_2 = -\left(\frac{3}{32} + 2\frac{1}{8} + \frac{3}{32}\right) \frac{ql^2}{2} \frac{l^2}{16EJ_z} = -\frac{7}{512} \frac{l^2}{EJ_z} = -\frac{1}{73,1} \frac{ql^4}{EJ_z};$$

$$\delta y_c = \frac{76,8 - 73,1}{73,1} 100 = 4,9\%.$$

б/. Для сосредоточенной силы:

$$M_1 = M_3 = \frac{Pl}{8}; \quad M_2 = \frac{Pl}{4};$$

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = y_2 = -\left(\frac{1}{8} + 2\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) \frac{Pl}{2} \frac{l^2}{16EJ_z} = -\frac{3}{128} \frac{Pl^3}{EJ_z} = -\frac{1}{42,7} \frac{Pl^3}{EJ_z};$$

$$\delta y_c = \frac{48 - 42,7}{42,7} 100 = 12,5\%.$$

Таким образом, видно, что при уменьшении шага разностной сетки точность расчета увеличивается. Для равномерно распределенной нагрузки результаты расчета с шагом $l/4$ можно считать удовлетворительными. Для сосредоточенной силы точность расчета недостаточна. Для увеличения точности проведем расчет с шагом $l/6$, $n=6$. Для шести шагом число шагов возрастает до 5. Однако, учитывая симметрию конструкции и нагрузки, число неизвестных можно уменьшить. Условиями симметрии для прогибов, очевидно, являются соотношения $y_i = y_{n-i}$. При этом разностные уравнения составляются для $i = 1, 2, \dots, n/2$ (при n четном). В системе разностных уравнений первые $\frac{n}{2} - 1$ не меняются. При $i = \frac{n}{2}$ с учетом симметрии получим

$$y_{\frac{n}{2}-1} - 2y_{\frac{n}{2}} + y_{\frac{n}{2}-1} = 2y_{\frac{n}{2}-1} - 2y_{\frac{n}{2}}. \quad (4.7)$$

При $n=6$ имеем $h = \frac{l}{6}$ $y_1 = y_5$, $y_2 = y_4$, и, с учетом формулы (4.7), получаем систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} \frac{h^2}{EJ_z};$$

Решая систему уравнений, находим:

$$y_1 = -\frac{2M_1 + 2M_2 + M_3}{2} \frac{l^2}{36EJ_z}; \quad y_2 = -(M_1 + 2M_2 + M_3) \frac{l^2}{36EJ_z};$$

$$y_3 = -\frac{2M_1 + 4M_2 + 3M_3}{2} \frac{l^2}{36EJ_z}.$$

При равномерно распределенной нагрузке получим:

$$M_1 = \frac{5}{2} qh^2 = \frac{5}{72} ql^2; \quad M_2 = 4qh^2 = \frac{1}{9} ql^2; \quad M_3 = \frac{9}{2} qh^2 = \frac{1}{8} ql^2;$$

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = y_3 = -\left(\frac{5}{36} + 4\frac{1}{9} + 3\frac{1}{8}\right) \frac{ql^2}{2} \frac{l^2}{36EJ_z} = -\frac{23}{1728} \frac{ql^4}{EJ_z} = -\frac{1}{75,1} \frac{ql^4}{EJ_z};$$

$$\delta y_c = \frac{76,8 - 75,1}{73,1} 100 = 2,3.$$

При сосредоточенной силе имеем:

$$M_1 = \frac{1}{12} Pl; \quad M_1 = \frac{1}{6} Pl; \quad M_1 = \frac{1}{4} Pl;$$

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = y_3 = -\left(2\frac{1}{12} + 4\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{4}\right) \frac{Pl}{2} \frac{l^2}{36EJ_z} = -\frac{19}{864} \frac{Pl^3}{EJ_z} = -\frac{1}{45,4} \frac{Pl^3}{EJ_z};$$

$$\delta y_c = \frac{48 - 45,4}{45,4} 100 = 5,7\%.$$

Таким образом, при шести шагах разностной сетки мы получаем хорошую точность для прогиба в центре балки при равномерно распределенной нагрузке и удовлетворительную точность при действии сосредоточенной силы в центре пролета шарнирно опертой балки.

ЛЕКЦИЯ 5

Разностные производные произвольного порядка на сетке с постоянным шагом

Разностные производные высокого порядка с переменным шагом разностной сетки могут быть получены с помощью интерполяционных полиномов Лагранжа [4, 5, 6]. При постоянном шаге их можно получить методом последовательного разностного дифференцирования, так, как были получены выше разностные отношения первого и второго порядка.

Разностные производные четного порядка

Считая, что в точках $i-1, i, i+1$ (шаг $h = const$) заданы (вычислены) значения вторых производных, вычислим с помощью разностного отношения (3.5,б) четвертую разностную производную в i -той точке

$$\begin{aligned} y_i^{(4)} &= \frac{\Delta^2 y_i''}{h^2} = \frac{\Delta^2}{h^2} \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} = \frac{\Delta^2 y_{i-1} - 2\Delta^2 y_i + \Delta^2 y_{i+1}}{h^4} = \\ &= \frac{y_{i-2} - 2y_{i-1} + y_i - 2(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) + y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}}{h^4} = \\ &= \frac{y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}}{h^4} = \frac{\Delta^4 y_i}{h^4}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Применяя вновь к соотношению (5.1) формулу (3.5,б), получим, очевидно, формулу шестой разностной производной

$$\begin{aligned} y_i^{(6)} &= \frac{\Delta^2}{h^2} \frac{\Delta^4 y_i}{h^4} = \frac{1}{h^6} [y_{i-3} - 2y_{i-2} + y_{i-1} - 4(y_{i-2} - 2y_{i-1} + y_i) + \\ &+ 6(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) - 4(y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}) + y_{i+1} - 2y_{i+2} + y_{i+3}] = \\ &= \frac{1}{h^6} (y_{i-3} - 6y_{i-2} + 15y_{i-1} - 20y_i + 15y_{i+1} - 6y_{i+2} + y_{i+3}) = \frac{\Delta^6 y_i}{h^6}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Анализируя формулы четных разностных производных (3.5), (5.1), (5.2), заметим, что коэффициенты при узловых точках совпа-

дают с коэффициентами биномов Ньютона разностного двучлена, соответствующей степени:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2; \quad (a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4;$$

$$(a-b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6.$$

Бином k -й степени определяется по формуле

$$(a-b)^k = \sum_{m=0}^k (-1)^m C_m^k a^{k-m} b^m, \quad C_m^k = \frac{k!}{m!(k-m)!}. \quad (5.3)$$

Тогда для разностной производной четного порядка $2k$ в i -ой точке, получим по аналогии с биномом Ньютона:

$$y_i^{(2k)} = \frac{\Delta^{2k} y_i}{h^{2k}}, \quad (5.4)$$

$$\Delta^{2k} y_i = \sum_{m=0}^{2k} (-1)^m C_m^{2k} y_{i-k+m} \quad (5.5)$$

- разностный оператор порядка $2k$.

Формула (5.4) может быть строго доказана методом математической индукции: если некоторое свойство справедливо при $k=1, 2$, то предположив, что оно справедливо при произвольном k , докажем, что оно справедливо при $k+1$, то это свойство справедливо при любом k .

Для вычисления коэффициентов бинома Ньютона, кроме формулы $C_m^k = \frac{k!}{m!(k-m)!}$, может использоваться так называемый треугольник Паскаля, дающий наглядные значения коэффициентов

(продолжение)

k	$m=0$	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	k
0	1							1	7	21	35	35	21	7	1				7
1	1	1						1	8	28	56	70	56	28	8	1			8
2	1	2	1					1	9	36	84	126	126	84	36	9	1		9
3	1	3	3	1				1	10	45	120	210	252	210	120	45	10		10
4	1	4	6	4	1														11
5	1	5	10	10	5	1													12
6	1	6	15	20	15	6	1												

Коэффициенты в треугольнике Паскаля получаются последовательным сложением двух соседних чисел в вышележащей строчке. Нетрудно убедиться, что значениям чисел в треугольнике Паскаля соответствуют коэффициентам бинома Ньютона. Например, число в треугольнике Паскаля при $k = 10$, $m = 4$ равно 210; $C_4^{10} = \frac{10!}{4!6!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210$. Значения совпали.

Получим разностный оператор 8-го, используя формулу (5.5) и коэффициенты треугольника Паскаля:

$$\Delta^8 y_i = y_{i-4} - 8y_{i-3} + 28y_{i-2} - 56y_{i-1} + 70y_i - 56y_{i+1} + 28y_{i+2} - 8y_{i+3} + y_{i+4}.$$

Разностный оператор нечетного порядка

Разностный оператор нечетного порядка $2k + 1$ определим, применяя разностный оператор первого порядка (3.5,а) к разностному оператору четного порядка $2k$

$$\Delta^{2k+1} y_i = \Delta(\Delta^{2k} y_i) = -\Delta^{2k} y_{i-1} + \Delta^{2k} y_{i+1}. \quad (5.5)$$

Разностная производная нечетного порядка определяется по формуле

$$y_i^{(2k+1)} = \frac{\Delta^{2k+1} y_i}{2h^{2k+1}}. \quad (5.6)$$

Используя формулу разностного оператора 8-го порядка, получим разностный оператор 9-го порядка

$$\begin{aligned} \Delta^9 y_i &= \Delta \Delta^8 y_i = -\Delta^8 y_{i-1} + \Delta^8 y_{i+1} = \\ &= -[y_{i-5} - 8y_{i-4} + 28y_{i-3} - 56y_{i-2} + 70y_{i-1} - 56y_i + 28y_{i+1} - \\ &\quad - 8y_{i+2} + y_{i+3}] + \\ &\quad + y_{i-3} - 8y_{i-2} + 28y_{i-1} - 56y_i + 70y_{i+1} - \\ &\quad - 56y_{i+2} + 28y_{i+3} - 8y_{i+4} + y_{i+5} = \\ &= -y_{i-5} + 8y_{i-4} - 27y_{i-3} + 48y_{i-2} - 42y_{i-1} + \\ &\quad + 42y_{i+1} - 48y_{i+2} + 27y_{i+3} - 8y_{i+4} + y_{i+5}. \end{aligned}$$

ЛЕКЦИЯ 6

Расчет статически неопределимых балок разностным методом

Дифференциальное уравнение изгиба балок (4.1) приводится к дифференциальному уравнению 4-го порядка с учетом формул Журавского $\frac{dM_z}{dx} = Q_y$, $\frac{d^2M_z}{dx^2} = \frac{dQ_y}{dx} = q$:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EJ_z \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = q, \quad J_z = J_z(x), \quad (6.1, a)$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{q}{EJ_z}, \quad J_z = const. \quad (6.1, б)$$

Разностное уравнение изгиба балки постоянного сечения получим в виде:

$$\Delta^4 y_i = y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} = \frac{q_i}{EJ_z} h^4. \quad (6.2)$$

Рассмотрим однопролетную балку, жестко защемленную с обоих концов (рис. 6.1)

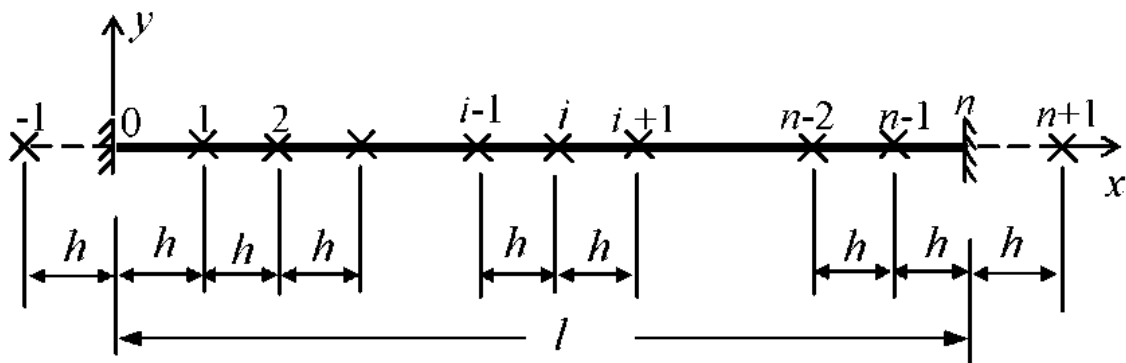


Рис. 6.1. Разностная сетка с постоянным шагом
статически неопределимой балки

При использовании разностного оператора 4-го порядка вводятся контурные точки: -1 и $n+1$. Перемещения в этих точках обычно определяются из граничных условий опирания балки. Для балки с жестким защемлением опор имеем:

$$y'(0) = y'_0 = \frac{\Delta y_0}{2h} = 0 \rightarrow \Delta y_0 = y_1 - y_{-1} = 0 \rightarrow y_{-1} = y_1;$$

$$y'(l) = y'_n = \frac{\Delta y_n}{2h} = 0 \rightarrow \Delta y_n = y_{n+1} - y_{n-1} = 0 \rightarrow y_{n+1} = y_{n-1}; \quad (6.2)$$

Таким образом, для жестко заземленных концов балки перемещения в законтурных точках равны перемещениям в предконтурных точках.

Составляя систему разностных уравнений для балки с заземленными краями с учетом граничных условий, получим:

$$i = 1, \quad y_{-1} - 4y_0 + 6y_1 - 4y_2 + y_3 = 7y_1 - 4y_2 + y_3 = q_1 \frac{h^4}{EJ_z};$$

$$i = 2, \quad y_0 - 4y_1 + 6y_2 - 4y_3 + y_4 = -4y_1 + 6y_2 - 4y_3 + y_4 = q_2 \frac{h^4}{EJ_z};$$

$$i = 3, 4, \dots, n-3, \quad y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} = q_i \frac{h^4}{EJ_z};$$

$$i = n-2, \quad y_{n-4} - 4y_{n-3} + 6y_{n-2} - 4y_{n-1} + y_n =$$

$$= y_{n-4} - 4y_{n-3} + 6y_{n-2} - 4y_{n-1} = q_{n-2} \frac{h^4}{EJ_z};$$

$$i = n-1, \quad y_{n-3} - 4y_{n-2} + 6y_{n-1} - 4y_n + y_{n+1} =$$

$$y_{n-3} - 4y_{n-2} + 7y_{n-1} = q_{n-1} \frac{h^4}{EJ_z}. \quad (6.3)$$

При симметричной нагрузке $y_i = y_{n-i}$. Положив $m = n/2$ (n – четное), условие симметрии – условие симметрии получим в виде $y_{m-i} = y_{m+i}$. Для балки с симметричными граничными условиями и симметричной нагрузке разностные уравнения составляются для $i = 1, 2, \dots, m$.

Для балки с заземленными концами при симметричной нагрузке для $i = 1, 2, \dots, m-2$ система (6.3) остается неизменной. При $i = m-1, m$ получим:

$$\begin{aligned}
i = m - 1, \quad y_{m-3} - 4y_{m-2} + 6y_{m-1} - 4y_m + y_{m+1} &= \\
&= y_{m-3} - 4y_{m-2} + 7y_{m-1} - 4y_m = q_{m-1} \frac{h^4}{EJ_z}; \\
i = m, \quad y_{m-2} - 4y_{m-1} + 6y_m - 4y_{m+1} + y_{m+2} &= \\
2y_{m-2} - 8y_{m-1} + 6y_m &= q_m \frac{h^4}{EJ_z}. \quad (6.3,a)
\end{aligned}$$

Значение момента в точках разностной сетки получаем, используя формулу второй разностной производной.

$$M_i = EJ_z y_i'' = \Delta^2 y_i \frac{EJ_z}{h^2}. \quad (6.4)$$

Опорные моменты с учетом граничных условий определяется по формулам:

$$\begin{aligned}
M(0) = M_0 &= (y_{-1} - 2y_0 + y_1) \frac{EJ_z}{h^2} = 2y_1 n^2 \frac{EJ_z}{l^2}; \\
M(l) = M_n &= (y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}) \frac{EJ_z}{h^2} = 2y_{n-1} n^2 \frac{EJ_z}{l^2}. \quad (6.5)
\end{aligned}$$

При симметричной нагрузке с учетом условий симметрии момент в середине пролета определяем по формуле

$$M\left(\frac{l}{2}\right) = M_m = (y_{m-1} - 2y_m + y_{m+1}) \frac{EJ_z}{h^2} = 2(y_{m-1} - y_m) n^2 \frac{EJ_z}{l^2}.$$

Проведем расчет балок с жестко зашеченными концами на действие равномерно распределенной нагрузки q и центрально приложенной силы P при $n = 4$. В соответствии с уравнениями (6.3), (6.3,a) получаем систему двух уравнений:

$$\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \frac{h^4}{EJ_z} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \frac{1}{n^4} \frac{l^4}{EJ_z}.$$

Решая систему, получаем:

$$y_1 = -\frac{3q_1 + 2q_2}{8 \cdot 256} \frac{l^4}{EJ_z}; \quad y_2 = -\frac{q_1 + q_2}{2 \cdot 256} \frac{l^4}{EJ_z}.$$

Значение моментов в середине пролета и на опоре:

$$M\left(\frac{l}{2}\right) = M_2 = 2 \frac{q_1 + 2q_2}{8 \cdot 256} \cdot 16 \frac{l^2}{EJ_z} = \frac{q_1 + 2q_2}{64} \frac{l^2}{EJ_z};$$

$$M_0 = -\frac{3q_1 + 2q_2}{64} \frac{l^2}{EJ_z}.$$

a/. Равномерно распределенная нагрузка:

$$q_1 = q_2 = q_3 = -q; \quad y\left(\frac{l}{2}\right) = y_2 = -\frac{1}{256} \frac{ql^4}{EJ_z}; \quad y_1 = -\frac{5}{8 \cdot 256} \frac{ql^4}{EJ_z};$$

$$M(0) = M(l) = M_0 = -\frac{5}{64} ql^2 = -0,078ql^2;$$

$$M\left(\frac{l}{2}\right) = M_2 = \frac{3}{64} ql^2 = 0,0468ql^2;$$

Согласно решения сопротивления материалов для однопролетной балки с жестко защемленными концами от равномерно распределенной нагрузки имеем:

$$y_c^{точ} = \frac{1}{384} \frac{ql^4}{EJ_z}, \quad M_0^{точ} = \frac{ql^2}{12} = -0,0833; \quad M_c^{точ} = \frac{ql^2}{24} = 0,0417.$$

$$\delta y_c = \frac{384 - 256}{256} 100 = 50\%; \quad \delta M_0 = \frac{0,0833 - 0,0781}{0,0833} = 6,2\%;$$

$$\delta M_c = \left| \frac{0,0417 - 0,0468}{0,0417} \right| = 12,2\%.$$

б/. Сосредоточенная сила в центр пролета:

Так как в уравнениях (6.3) участвует распределенная нагрузка, то сосредоточенные силы в узлах разностной сетки заменяются эквивалентной распределенной нагрузкой $q_i = \frac{P_i}{h}$. Тогда, при $n = 4$,

получим $q_1 = q_3 = 0$, $q_2 = -\frac{P}{h} = -\frac{P}{l}n = -4\frac{P}{l}$.

$$y_1 = -\frac{3q_1 + 2q_2}{8 \cdot 256} \frac{l^4}{EJ_z} = -\frac{1}{256} \frac{Pl^3}{EJ_z}; \quad y_2 = -\frac{q_1 + q_2}{2 \cdot 256} \frac{l^4}{EJ_z} = -\frac{1}{128} \frac{Pl^3}{EJ_z};$$

$$M(0) = M(l) = M_0 = -\frac{1}{8} Pl; \quad M\left(\frac{l}{2}\right) = M_2 = M_0 = \frac{1}{8} Pl.$$

Решение сопротивления материалов:

$$y_c = -\frac{1}{192} \frac{Pl^3}{EJ_z}; \quad M_0 = -\frac{Pl}{8}; \quad M_c = \frac{Pl}{8}.$$

$$\delta y_c = \frac{384 - 256}{256} = 50\%; \quad \delta M_0 = \delta M_1 = 0\%.$$

Результаты расчета по прогибам при $n=4$ неудовлетворительны. Принимая $n=6$, получим систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 \\ -4 & 7 & -4 \\ 2 & -8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \frac{h^4}{EJ_z}.$$

Решая систему, находим:

$$y_1 = \frac{70q_1 + 112q_2 + 63q_3}{168 \cdot 6^4} \frac{l^4}{EJ_z}; \quad y_2 = \frac{2q_1 + 5q_2 + 3q_3}{3 \cdot 6^4} \frac{l^4}{EJ_z};$$

$$y_3 = \frac{12q_1 + 32q_2 + 22q_3}{16 \cdot 6^4} \frac{l^4}{EJ_z};$$

а). Равномерно распределенная нагрузка:

$$q_i = -q; \quad y_1 = -\frac{1}{889} \frac{ql^4}{EJ_z}; \quad y_2 = -\frac{1}{389} \frac{ql^4}{EJ_z}; \quad y_3 = -\frac{1}{314} \frac{ql^4}{EJ_z};$$

$$M_0 = -0,081ql^2; \quad M_c = M_3 = 0,0440ql^2.$$

$$\delta y_c = \frac{384 - 314}{314} 100 = 22\%; \quad \delta M_0 = \frac{0,081 - 0,0833}{0,0833} 100 = 2,7\%;$$

$$\delta M_c = \frac{0,0440 - 0,0417}{0,0417} 100 = 5,5\%.$$

а). Сосредоточенная сила в середине пролета:

$$q_1 = q_2 = q_4 = q_5 = 0; \quad q_3 = -6 \frac{P}{l}; \quad y_1 = -\frac{1}{576} \frac{Pl^3}{EJ_z}; \quad y_2 = -\frac{1}{216} \frac{Pl^3}{EJ_z};$$

$$y_3 = -\frac{1}{157} \frac{Pl^3}{EJ_z}; \quad M_0 = -0,125Pl; \quad M_c = M_3 = 0,125Pl.$$

$$\delta y_c = \frac{192 - 157}{157} 100 = 22\%.$$

ЛЕКЦИЯ 7

Расчет балок переменного сечения разностным методом

Если для расчета прогибов балок постоянного сечения и расчета статически неопределимых стержней постоянного сечения разработаны достаточно простые инженерные методы расчета, то в случае стержней переменного сечения задача значительно усложняется. Даже в случае простого нагружения статически определимых балок интегрирование дифференциального уравнения в большинстве случаев может быть осуществлено только численным методом. Для сложных прерывистых нагрузок это процедура превращается в сложную задачу. В этом случае применение конечных разностей становится наиболее удобным подходом к решению задачи. Использование дифференциального уравнения 4-го порядка (6.1,а) также не очень удобно, так как требует использования не только функции момента инерции, но и 1-й и второй производных этой функции. Более удобным оказывается уравнение 2-го порядка (4.1) в сочетании методом сил расчета статически неопределимых балок.

Рассмотрим однопролетную балку переменного сечения ($J_z(x) = J_0 \cdot f(x)$) жестко защемленную по концам и нагруженную произвольной нагрузкой (рис. 7.1,а).

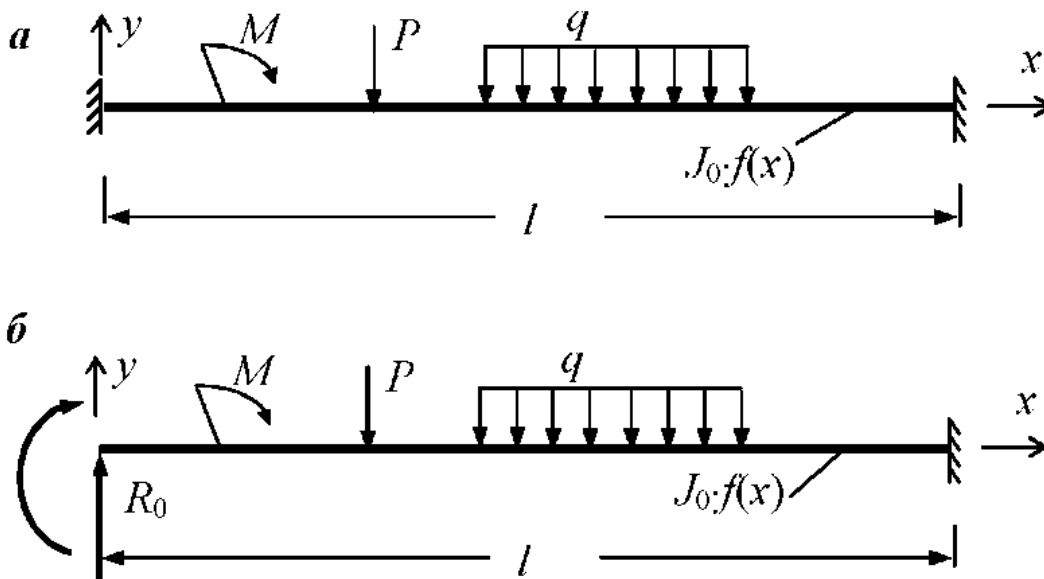


Рис. 7.1. Статически неопределимая балка переменного сечения

Для решения задачи рассмотрим основную систему, отбросив защемление и левую опору и заменив их неизвестными реакциями M_0 и R_0 (рис. 7.1,б).

Дифференциальное уравнение изгиба балки запишем в виде

$$y'' = \frac{1}{EJ_0 f(x)} (M_0 + R_0 x + Mq(x)), \quad (7.1)$$

где $Mq(x)$ - функция моментов в основной системе (консольной балке) от заданной нагрузки.

Заменяя производную в равенстве (7.1) разностным отношением с постоянным шагом $h = \frac{l}{n}$ (4.2) (n - число шагов разностной сетки), получим разностное уравнение балки переменной жесткости

$$\frac{\Delta^2 y_i}{h^2} = \frac{1}{EJ_0 f(x_i)} (M_0 + R_0 x_i + Mq(x_i)). \quad (7.2)$$

Умножая равенство (7.2) на EJ_0 , вводя обозначения:

$$\tilde{y}_i = \frac{EJ_0}{h^2} y_i; \quad \tilde{R}_0 = R_0 h; \quad Mq_i = Mq(x_i), \quad f_i = f(x_i)$$

и перенося неизвестные реакции в левую часть, получаем разностное уравнение (7.2) в виде

$$\Delta^2 \tilde{y}_i - \frac{i}{f_i} \tilde{R}_0 - \frac{1}{f_i} \tilde{M}_0 = \frac{Mq_i}{f_i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (7.3)$$

Кроме основных точек разностной сетки в пролете вводим дополнительные законтурные точки $i = -1$ и $i = n + 1$ с прогибами y_{-1} и y_{n+1} . Задаваясь последовательно значениями $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1, n$ и учитывая условия опирания балки $y_0 = y_n = 0$, $y'_0 = y'_n = 0 \rightarrow y_{-1} = y_1, y_{n+1} = y_{n-1}$, имеем:

$$i = 0 \rightarrow 2\tilde{y}_1 - \frac{1}{f_0} M_0 = 0;$$

$$i = 1 \rightarrow -2\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 - \frac{1}{f_1} \tilde{R}_0 - \frac{1}{f_1} M_0 = \frac{Mq_1}{f_1};$$

$$i = 2 \rightarrow \tilde{y}_2 - 2\tilde{y}_2 + \tilde{y}_2 - \frac{2}{f_2} \tilde{R}_0 - \frac{1}{f_2} M_0 = \frac{Mq_2}{f_2};$$

.....

$$\begin{aligned}
i &\rightarrow \tilde{y}_{i-1} - 2\tilde{y}_i + \tilde{y}_{i+1} - \frac{i}{f_i} \tilde{R}_0 - \frac{1}{f_i} M_0 = \frac{Mq_i}{f_i}; \\
&\dots\dots\dots \\
i = n-1 &\rightarrow \tilde{y}_{n-2} - 2\tilde{y}_{n-1} - \frac{n-1}{f_{n-1}} \tilde{R}_0 - \frac{1}{f_{n-1}} M_0 = \frac{Mq_{n-1}}{f_{n-1}} \\
i = n &\rightarrow 2\tilde{y}_{n-1} - \frac{n}{f_n} \tilde{R}_0 - \frac{1}{f_n} M_0 = \frac{Mq_n}{f_n}. \quad (7.4)
\end{aligned}$$

Таким образом мы получили систему $n+1$ разностных уравнений с неизвестными $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_{n-1}, \tilde{R}_0, M_0$. Решая систему, определяем прогибы $y_i = \tilde{y} \frac{h^2}{EJ_0}$ и реакции $R_0 = \frac{\tilde{R}_0}{h}$, M_0 .

Поперечные силы и изгибающие моменты в сечениях балки определяются методом сечений от заданной нагрузки и опорных реакций R_0, M_0 . Для точек разностной сетки для определения изгибающих моментов получаем формулу:

$$M_i = M_0 + \tilde{R}_0 \cdot i + Mq_i. \quad (7.5)$$

Если момент инерции балки не задан J_0 , то для его определения необходимо его найти самое слабое сечение балки из условий прочности $\sigma_x = \left| \frac{M_z}{EJ_z} \right| = \left| \frac{M_z}{EJ_0 f(x)} \right| \leq [\sigma]$. В отличие от балки постоянного сечения, наиболее напряженное сечение может не соответствовать сечению с наибольшим значением изгибающего момента. Ограничиваясь сечениями разностной сетки, имеем

$$J_{0i} = \frac{M_i}{[\sigma] f_i}; \quad J_0 = \max J_{0i}. \quad (7.6)$$

Если левый конец балки шарнирно оперт, то $M_0 = 0$. Тогда $y_{-1} = y_1$ и первое уравнение системы (7.4) удовлетворяется тождественно. Следовательно, в системе отбрасывается первое уравнение и слагаемые с неизвестным $M_0 = 0$.

Если шарнирно оперт правый конец балки, то $M_n = 0$, $y_{n-1} = y_{n+1}$, и последнее уравнение системы (7.4) получаем в виде

$$\frac{n}{f_n} \tilde{R}_0 + \frac{1}{f_n} M_0 = Mq_n \frac{1}{f_n}, \text{ или } n\tilde{R}_0 + M_0 = Mq_n. \quad (7.6)$$

Пример расчета

Рассмотрим балку с жестко зашечленными концами (рис. 7.2).

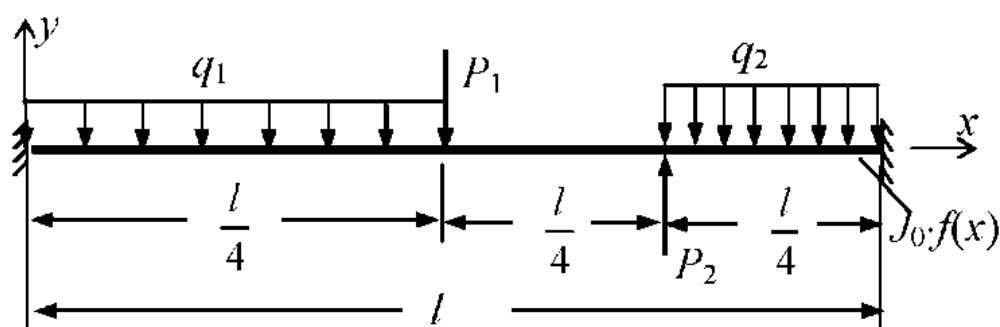


Рис. 7.2. Балка переменного сечения
с жестко зашечленными концами

Исходные данные: $q_1 = 20$ кН/м; $q_2 = 40$ кН/м;

$P_1 = 40$ кН; $P_2 = 20$ кН; $l = 8$ м; $f(x) = 2(1 - 0,5 \frac{x}{l})$;

В первом приближении принимаем $n = 4$; $h = \frac{l}{n} = \frac{8}{4} = 2$ м.

Вычисляем функцию изменения момента инерции f и моменты от нагрузки Mq в узлах разностной сетки:

$f_0 = 2,0$; $f_1 = 1,75$; $f_2 = 1,5$; $f_3 = 1,25$; $f_4 = 1,0$;

$$Mq_1 = -q_1 \frac{h^2}{2} = -20 \frac{4}{2} = -40 \quad Mq_2 = -q_1 \frac{(2h)^2}{2} = -20 \frac{16}{2} = -160 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$Mq_3 = -q_1 2h \cdot 2h - P_1 h = -20 \cdot 16 - 40 \cdot 2 = -400 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\begin{aligned} Mq_2 &= -q_1 2h \cdot 3h - P_1 \cdot 2h + P_2 h - q_2 \frac{h^2}{2} = \\ &= -20 \cdot 24 - 40 \cdot 4 + 20 \cdot 2 - 40 \cdot 2 = -680 \text{ кН}\cdot\text{м}; \end{aligned}$$

Получаем систему разностных уравнений, которую запишем в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -0,5 \\ -2 & 1 & 0 & -0,571 & -0,571 \\ 1 & -2 & 1 & -1,333 & -0,667 \\ 0 & 1 & -2 & -2,4 & -0,8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_3 \\ \tilde{R}_0 \\ M_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -22,86 \\ -106,67 \\ -320 \\ -680 \end{pmatrix}.$$

Решая систему уравнений, определяем:

$$\tilde{y}_1 = -33,431; \tilde{y}_2 = -60,784; \tilde{y}_3 = -38,137; \tilde{R}_0 = 184,36; M_0 = -133,7.$$

Умножая значения \tilde{y}_i на h^2 , получаем значения приведенных прогибов $\hat{y}_i = EJ_0 \cdot y_i$ и реакцию $R_0 = \frac{\tilde{R}}{h}$:

$$\hat{y}_1 = -133,7; \hat{y}_2 = -243,1; \hat{y}_3 = -152,5; R_0 = 92,2 \text{ кН};$$

По формуле (7.5) вычисляем значения изгибающих моментов в узловых точках:

$$M_0 = -133,7; M_1 = 10,6; M_2 = 75,0; M_3 = 19,4; M_4 = -76,3 \text{ (кН·м)}.$$

Для выявления точности расчета и сходимости процесса проведем расчеты с различным числом шагов разностной сетки кратной 4.

При увеличении числа шагов решение системы становится трудосложным, поэтому их целесообразно проводить на ЭВМ. В частности можно использовать систему MathCad. Ниже приведены результаты расчета с числом шагов $n = 4, 8, 12, 16, 20$. В табл. 7.1 приведены значения опорных реакций для различного числа шагов, в табл. 7.2 и 7.3. - значения прогибов и изгибающих моментов. Для сравнения результаты приводятся только в точках совпадающих с точками сетки при $n = 4$.

Опорные реакции R_0 (кН), M_0 (кН·м) таблица 7.1

n	4	8	12	16	20
R_0	92,2	90,45	90,3	90,2	90,1
M_0	-133,7	-132,6	-132,1	-131,9	-131,8

Как видно из табл. 7.1 опорные реакции лишь незначительно изменяются с увеличением числа шагов.

Приведенные прогибы $EJ_0 \cdot y$

таблица 7.2

$x \backslash n$	4	8	12	16	20
0	0	0	0	0	0
$\frac{1}{4} l$	-133,7	-94,0	-86,6	-84,0	-82,8
$\frac{1}{2} l$	-243,1	-175,4	-162,5	-158,0	-155,9
$\frac{3}{4} l$	-152,5	-103,5	-93,8	-90,4	-88,8
l	0	0	0	0	0

Изгибающие моменты M_z (кН·м)

таблица 7.3

$x \backslash n$	4	8	12	16	20
0	-133,7	-132,6	-132,1	-131,9	-131,8
$\frac{1}{4} l$	10,6	8,7	8,5	8,4	8,4
$\frac{1}{2} l$	75,0	70,0	69,1	68,8	68,6
$\frac{3}{4} l$	19,4	11,3	9,7	9,1	8,8
l	-76,3	-87,4	-89,7	-90,6	-91,0

Из результатов расчета видно, что разностный метод в сочетании с методом сил даст неплохие результаты расчета для изгибающих моментов. Даже при $n = 4$ относительная невязка на правой опоре не превышает 20 % по сравнению с сеткой при $n = 20$. Значительным различием изгибающего момента в сечении $x = 0,75l$ можно пренебречь, так как величина момента в этом сечении незначительна по сравнению с наибольшим по модулю изгибающим моментом на левой опоре. При $n = 8$ невязки изгибающих моментов по сравнению с их значениями на более мелкой сетке при $n = 20$ не превышают 8 %.

Более медленная сходимость наблюдается для значений прогибов. При $n = 4$ результаты расчета неудовлетворительны. Здесь невязки превышают 50 % по сравнению с сеткой при $n = 20$. Невязка по прогибу в центре пролета при $n = 8$ составляет 12,5 %. Однако при $n = 12$ невязки прогибов не превышают 5 % по сравнению с результатами при сетке $n = 20$.

ЛЕКЦИЯ 8

Расчет стержней переменного сечения на устойчивость

Определение сжимающей силы, при которой стержень переменного сечения теряет устойчивость, аналитическими методами представляет собой весьма сложную задачу. Метод конечных разностей, так же как и в случае расчета балок переменного сечения на изгиб, позволяет решить эту задачу. Рассмотрим стержень переменной жесткости $J_z(x) = J_0 f(x)$, на который действует продольная сжимающая сила. Концы стержня предполагаем жестко заземленными (рис. 8.1, а).

Для решения задачи применяем метод сил, отбрасывая верхнюю заделку и опору и заменяя их неизвестными реакциями R_0 и M_0 . Дифференциальное уравнение изгиба стержня в момент потери устойчивости получаем в виде

$$EJ_z y'' = -M_0 - R_0 x - P_{кр} y \quad (8.1)$$

На стержень наносим разностную сетку с постоянным шагом $h = \frac{l}{n}$.

Заменяя производную разностным отношением второго порядка с постоянным шагом, получим:

$$EJ_0 f_i \frac{\Delta^2 y_i}{h^2} = -M_0 - R_0 x_i - P_{кр} y_i \quad (8.2)$$

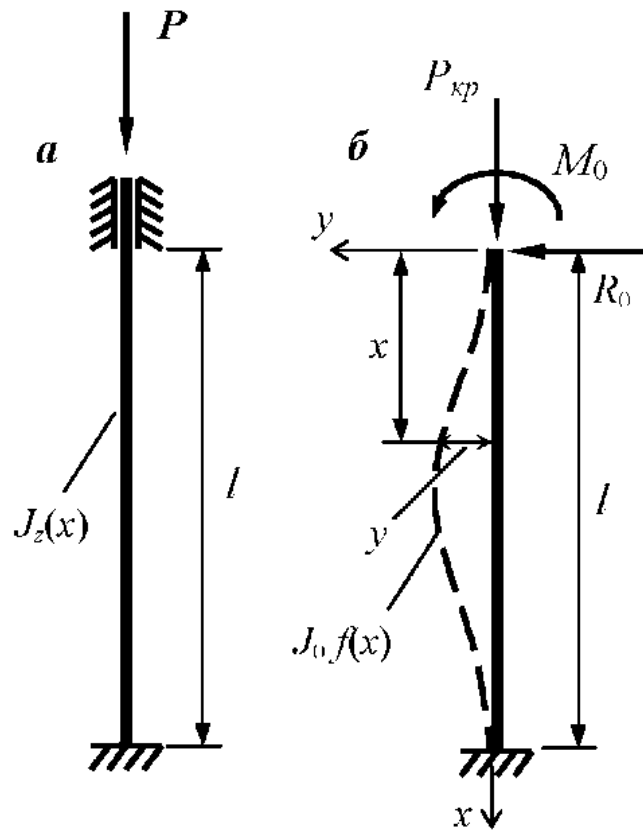


Рис. 8.1. Устойчивость стержня переменного сечения

Умножая равенство (8.2) на $\frac{h^2}{EJ_0}$, имеем

$$f_i \Delta^2 y_i - \beta y_i + \tilde{R}_0 \cdot i + \tilde{M}_0 = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (8.3)$$

где $\tilde{R}_0 = \frac{R_0}{EJ_0} h^3$; $\tilde{M}_0 = \frac{M_0}{EJ_0} h^2$; $\beta = \frac{P_{kp}}{EJ_0} h^2$.

Чтобы вычислить значение критической силы, очевидно, необходимо определить значение параметра β , удовлетворяющего системе (8.3). Тогда, критическая сила определяется по формуле

$$P_{kp} = \beta \frac{EJ_0}{h^2} = \beta \frac{EJ_0}{l^2} n^2. \quad (8.4)$$

Раскрывая разностный оператор Δ^2 , уравнение (8.3) запишем в виде

$$f_i y_{i-1} + (-2f_i + \beta) y_i + f_i y_{i+1} + \tilde{R}_0 \cdot i + \tilde{M}_0 = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (8.5)$$

На основе соотношений (8.5) получаем систему однородных алгебраических уравнений относительно прогибов y_i и опорных реакций R_0, M_0 . Для того чтобы система однородных уравнений имела ненулевое решение, определитель системы должен быть равным нулю.

Задаваясь значениями $i = 0, 1, 2, \dots, n$, получаем определитель системы уравнений:

$$d = \begin{vmatrix} 2f_0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 1 \\ -2f_1 + \beta & f_1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 & 1 \\ f_2 & -2f_2 + \beta & f_2 & 0 & \cdot & 0 & 2 & 1 \\ 0 & f_3 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 3 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & f_{n-2} & -f_{n-2} + \beta & f_{n-2} & n-2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & -f_{n-1} + \beta & n-1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 2f_n & n & 1 \end{vmatrix} \quad (8.6)$$

При составлении системы (8.5) использовались законтурные точки y_{-1}, y_{n-1} и учитывались условия закрепления стержня $y_0 = y_n = 0, y'_0 = y'_n = 0$. Последние два условия определяют равенства $y_{-1} = y_1, y_{n+1} = y_{n-1}$. Точками в определителе показаны повторяющиеся по диагонали компоненты $f_i - 2f_i - \beta f_i$, либо нули справа и слева. Число строк определителя для стержня с жестко зашкеленными концами равно $n + 1$.

При раскрытии определителя получаем полином $n - 1$ степени относительно параметра β . Минимальное значение корня полинома определяет значение критической силы (по формуле (8.4)), при которой происходит потеря устойчивости стержня.

В случае других условий закрепления в определитель (8.6) вносятся изменения. Рассмотрим стандартные закрепления концов стержня:

а/. Верхний конец стержня шарнирно оперт, нижний жестко зашкелен. В этом случае $M_0 = 0$ и в определителе (8.6) отбрасываются верхняя строчка и последний столбец (столбец единиц).

б/. Оба конца стержня шарнирно оперты. Тогда обе опорные реакции M_0 и R_0 равны нулю. В определителе отбрасывается первая и последняя строки и последние два столбца.

в/. Верхний конец свободен, нижний – зашкелен – консольный стержень. В этом случае условно рассматривается шарнирно опертый стержень двойной длины (аналогично рассматривается в сопротивлении материалов консольный стержень постоянной жесткости) с симметричным распределением момента инерции относительно середины стержня двойной длины. Начало координат совмещается с верхним концом изогнутого (потерявшего устойчивость стержня) а перемещение среднего сечения считается неравным нулю. Деформации условного стержня симметричны относительно середины (зашкеленного конца заданного стержня) стержня двойной длины. Так как опорные реакции в этом случае равны нулю, то первая строка и два крайних столбца в определителе (8.5) отбрасываются, а последние две строки строка заменяется на

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & f_{n-1} & -2f_{n-1} + \beta & f_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 2f_n & -2f_n + \beta \end{vmatrix} \quad (8.7)$$

Если условия закрепления концов стержня симметричные и функция изменения момента инерции также симметрична, в разностных уравнениях можно использовать условия симметрии $y_i = y_{n-1}$. В этом случае разностные уравнения составляются для $i = 0$ ($i = 1$ для шарнирно опертого стержня), $i = 1, 2, \dots, n/2 - 1, n/2$. При этом, в определителе, составляемом для соответствующих условий опирания заменяются две последние строки при $i = n/2 - 1$ и $i = n/2$ на строки, определяемые формулой (8.7), если заменить n на $n/2$.

Пример расчета стержня переменной жесткости на устойчивость

Рассмотрим стержень, жестко защемленный на нижнем конце и шарнирно опертый на верхнем конце (рис. 8.2).

Дано: $l = 6$ м; $J_0 = 8500$ см⁴; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $f(x) = 1 + 0,8 \cos\left(\frac{\pi x}{2l}\right)$.

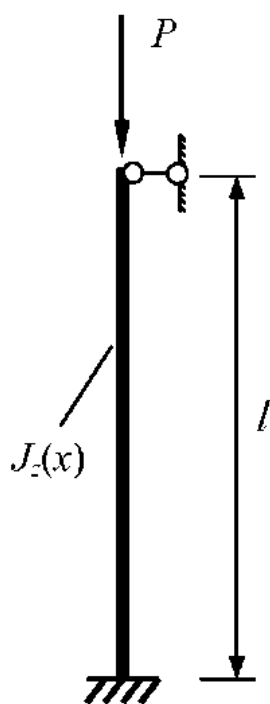


Рис. 8.2

Принимаем $n = 4$. Вычисляем значение функции изменения момента инерции в узлах разностной сетки:

$$f_0 = 1,8; f_1 = 1,739; f_2 = 1,566;$$

$$f_3 = 1,306; f_4 = 1;$$

Вычисляем компоненты определителя системы разностных уравнений

$$d(\beta) = \begin{vmatrix} -3,478 - \beta & 1,739 & 0 & 1 \\ 1,566 & -3,132 - \beta & 1,566 & 2 \\ 0 & 1,306 & -2,612 - \beta & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Значение параметра β , при котором определитель обращается в ноль, можно определить:

1. Раскрыв определитель, получить полином и найти его корни.
2. Вычисляя определитель при различных значениях β , найти точки изменения знака определителя, и далее уточняя значение β , найти точку, где определитель равен нулю (близок нулю с заданной точностью).

При втором методе, желательно знать интервал значений параметра β , в котором нужно искать решение. Очевидно, предельными можно считать значения параметра, соответствующие критической силе стержня постоянного сечения для максимального и минимального значений момента инерции: $J_{\min} = J_0 f_{\min}$; $J_{\max} = J_0 f_{\max}$.

Для стержня постоянного сечения критическая сила определяется по формуле Эйлера:

$$P_{\text{э}} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}, \quad (8.8)$$

где μ - коэффициент приведенной длины, зависящий от условий опирания стержня. Для стержня с защемленным и шарнирно опертым концами $\mu = 0,7$. Сравнивая формулу критической силы по Эйлеру с формулой критической силы переменного сечения (8.4), находим

$$\beta_{\max(\min)} = \frac{\pi^2}{\mu^2 n^2} \frac{J_{\max(\min)}}{J_0} = \frac{\pi^2}{\mu^2 n^2} f_{\max(\min)}. \quad (8.9)$$

Максимальное (минимальное) значение функции f либо соответствует максимуму (минимуму) функции (в точке $f'(x) = 0$), либо значениям функции на концах стержня.

Для рассчитываемого стержня $f_{\max} = 1,8$, $f_{\min} = 1$. Тогда

$$\beta_{\max} = \frac{\pi^2}{0,7^2 4^2} 1,8 = 2,266; \quad \beta_{\min} = \frac{\pi^2}{0,7^2 4^2} 1,0 = 1,259.$$

Задавая шаг равным $1/8$ интервала β , вычисляем на компьютере в системе MathCad значение определителя:

β	1.259	1.38	1.51	1.63	1.76	1.88	2.014	2.14	2.26
		5	1	7	2	8			6
d	-13.884	-8.088	-3.124	1.05	4.49	7.25	9.36	10.8	11.8
				5	7		2	8	5

Из результатов расчета видно, что знак определяется между значениями $\beta = 1.511$ и $\beta = 1.637$. Принимая эти значения за β_{\min} и β_{\max} соответственно, повторяем вычисление определителя с шагом $1/8$.

β	1.511	1.526	1.542	1.558	1.574	1.589	1.605	1.621	1.637
---------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

d	-3.124	-2.56	-2.008	-1.467	-0.939	-0.423	0.081	0.574	1.055
-----	--------	-------	--------	--------	--------	--------	-------	-------	-------

Теперь знак определителя меняется при значениях $\beta = 1.589$ и $\beta = 1.605$. При этом значение определителя при $\beta = 1.605$ приближается к нулю. Поэтому это значение принимаем за искомое значение параметра β . При необходимости процесс уточнения параметра β можно продолжить, пока разница между значениями параметра β , при которых меняется знак определителя, не будет превышать заданного значения, например, различие параметров β в третьем или четвертом знаке.

Вычисляем значение критической силы

$$P_{kp} = \beta \frac{EJ_0}{l^2} n^2 = 1,605 \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 8500 \cdot 10^{-8}}{6^2} 4^2 = 12,1 \text{ мН.}$$

Чтобы уточнить значение критической силы и оценить сходимость, проведем аналогичные вычисления с числом шагов разностной сетки $n = 6$ и $n = 8$.

В результате расчета получаем:

$$\text{При } n = 6 \quad \beta = 0,776; \quad P_{kp} = 13,2 \text{ мН.}$$

$$\text{При } n = 8 \quad \beta = 0,451; \quad P_{kp} = 13,6 \text{ мН.}$$

Определим относительную ошибку значения критической силы при числе шагов разностной сетке $n = 4$ и $n = 6$, относительно расчета с числом шагов $n = 8$ - $\delta_n = \frac{P_8 - P_n}{P_8} 100\%$:

$$\delta_4 = \frac{13,6 - 12,1}{13,6} 100 = 11\%; \quad \delta_6 = \frac{13,6 - 13,2}{13,6} 100 = 2,9\%.$$

Таким образом, мы видим, что при числе шагов разностной сетки $n = 4$ точность значения критической силы не удовлетворительна, то различие критической силы при $n = 6$ и $n = 8$ около 3%, т.е. в пределах требуемой точности инженерных расчетов.

Если при заданной разностной сетке, определитель в диапазоне заданных изменений β не меняет знак, значит разностная сетка не позволяет провести расчет с необходимой точностью. Следовательно, надо уменьшить шаг разностной сетки и повторить расчет.

ЛЕКЦИЯ 9

Метод сеток. Бигармонический разностный оператор

При решении двумерных задач теории упругости - плоская задача теории упругости, изгиб пластин, вычисляются производные по двум координатам, в том числе и смешанные производные. При этом плоская задача теории упругости в функции напряжений и уравнение равновесия изгиба пластин описываются бигармоническим оператором

$$\nabla^4 \dots = \frac{\partial^4 \dots}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \dots}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \dots}{\partial y^4}. \quad (9.1)$$

При решении задачи методом сеток на область пластинки наносится сетка с равномерным или переменным шагом в направлении каждой из координат (рис. 9.1). Нумерация узлов сетки с двумя индексами: i - в направлении оси x , j - в направлении оси y ; h_{xi} , h_{yj} - шаги сетки, n_x, n_y - число шагов в направлении координат x, y соответственно.

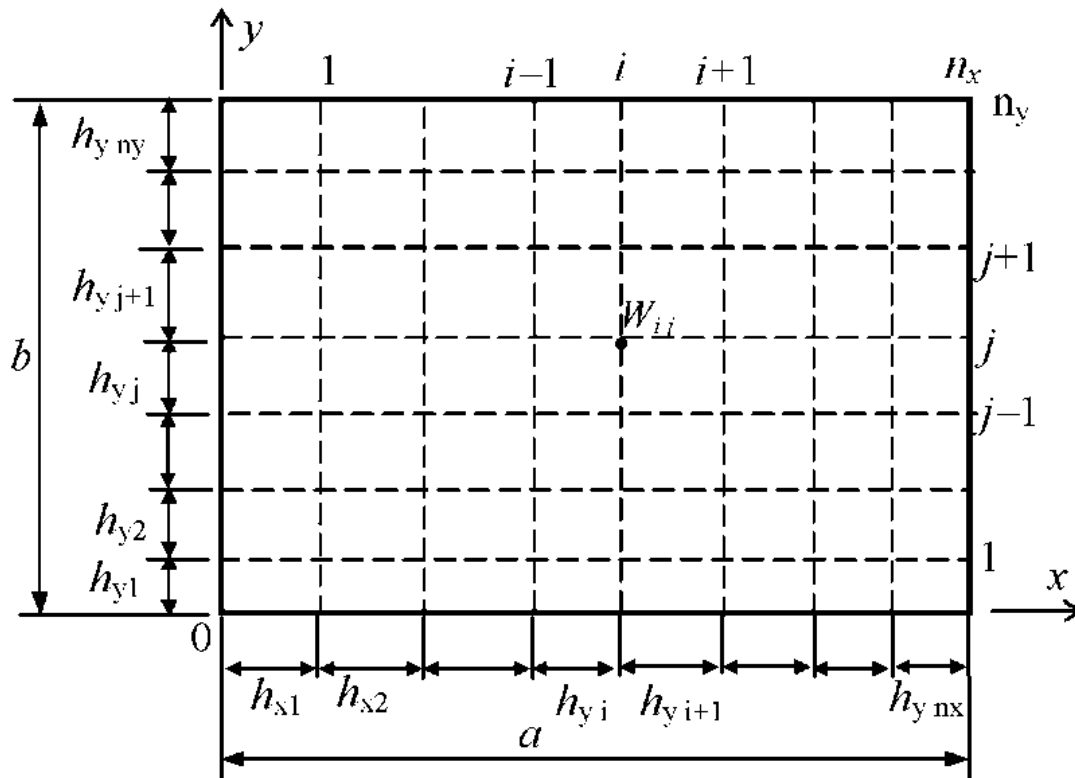


Рис. 9.1. Разностная сетка для двумерных задач

Далее будем рассматривать равномерную сетку в каждом из направлений $h_x = \frac{a}{n_x}$; $h_y = \frac{b}{n_y}$. Для определенности далее будем использовать функцию прогиба W . В двумерных задачах кроме основной сетки, используется один (или два) ряд законтурных точек.

Так как производные в двумерных задачах вычисляются по двум направлениям, то при переходе к разностным операторам необходимо указывать направление дифференцирования. Для этого при символе разностного оператора указывается индекс (i или j) направления дифференцирования. Для четных производных имеем:

$$\frac{\partial^{2k} W_{ij}}{\partial x^{2k}} = \frac{\Delta_i^{2k} W_{ij}}{h_x^{2k}}; \quad \frac{\partial^{2k} W_{ij}}{\partial y^{2k}} = \frac{\Delta_j^{2k} W_{ij}}{h_y^{2k}}, \quad (9.2, a)$$

для нечетных производных:

$$\frac{\partial^{2k-1} W_{ij}}{\partial x^{2k}} = \frac{\Delta_i^{2k-1} W_{ij}}{2h_x^{2k-1}}; \quad \frac{\partial^{2k+1} W_{ij}}{\partial y^{2k}} = \frac{\Delta_j^{2k-1} W_{ij}}{2h_y^{2k-1}}. \quad (9.2, б)$$

Таким образом, индекс при разностном операторе указывает индекс разностной функции, который должен меняться при применении оператора, другой индекс не меняется. Например,

$$\Delta_i^2 W_{ij} = W_{i-1,j} - 2W_{ij} + W_{i+1,j}; \quad \Delta_j^2 W_{ij} = W_{i,j-1} - 2W_{ij} + W_{i,j+1}.$$

Для смешанной производной последовательно применяются разностные операторы по обоим направлениям, причем результат не зависит от порядка применения операторов.

$$\frac{\partial^{2(k+m)} W_{ij}}{\partial x^{2k} \partial y^{2m}} = \frac{1}{h_x^{2k} h_y^{2m}} \Delta_i^{2k} (\Delta_j^{2m} W_{ij}) = \frac{1}{h_x^{2k} h_y^{2m}} \Delta_j^{2m} (\Delta_i^{2k} W_{ij}). \quad (9.3)$$

Например:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 W_{ij}}{\partial x^2 \partial y^2} &= \frac{1}{h_x^2 h_y^2} \Delta_i^2 (\Delta_j^2 W_{ij}) = \frac{1}{h_x^2 h_y^2} \Delta_i^2 (W_{i,j-1} - 2W_{ij} + W_{i,j+1}) = \\ &= \frac{1}{h_x^2 h_y^2} [W_{i-1,j-1} - 2W_{i,j-1} + W_{i+1,j-1} + 2(W_{i-1,j} - 2W_{ij} + W_{i+1,j}) + \\ &\quad + W_{i-1,j+1} - 2W_{i,j+1} + W_{i+1,j+1}]. \quad (9.4) \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что применение разностных операторов в другом порядке не изменит результат.

Получим разностный аналог бигармонического оператора (9.1):

$$\nabla^4 W_{ij} = \frac{1}{h_x^4} \Delta_i^4 W_{ij} + \frac{2}{h_x^2 h_y^4} \Delta_i^2 \Delta_j^2 W_{ij} + \frac{1}{h_x^4} \Delta_j^4 W_{ij}. \quad (9.5)$$

$$\Delta_i^4 W_{ij} = W_{i-2,j} - 4W_{i-1,j} + 6W_{i,j} - 4W_{i+1,j} + W_{i,j+2};$$

$$2\Delta_i^2 \Delta_j^2 W_{ij} = 2[W_{i-1,j-1} - 2W_{i,j-1} + W_{i+1,j-1} - 2(W_{i-1,j} - 2W_{i,j} + W_{i+1,j}) + W_{i-1,j+1} - 2W_{i,j+1} + W_{i+1,j+1}];$$

$$\Delta_j^4 W_{ij} = W_{i,j-2} - 4W_{i,j-1} + 6W_{i,j} - 4W_{i,j+1} + W_{i,j+2}.$$

Умножая на h_x^4 и суммируя операторы, получаем бигармонический разностный оператор:

$$h_x^4 \nabla^4 W_{ij} = \tilde{\Delta}_{ij}^4 W_{ij} = \Delta_i^4 W_{ij} + 2\lambda^2 \Delta_i^2 \Delta_j^2 W_{ij} + \lambda^4 \Delta_j^4 W_{ij}, \quad (9.6)$$

где $\lambda = h_x / h_y$

Результат представим в форме таблицы коэффициентов при узловых функциях $W_{i,j}$ (табл. 9.1)

Коэффициенты бигармонического разностного оператора

Таблица 9.1.

	i-2	i-1	i	I+1	I+2
j+2	0	0	λ^4	0	0
j+1	0	$2\lambda^2$	$-4(1+\lambda^2)\lambda^2$	$2\lambda^2$	0
j	1	$-4(1+\lambda^2)$	$6+8\lambda^2+6\lambda^4$	$-4(1+\lambda^2)$	1
j-1	0	$2\lambda^2$	$-4(1+\lambda^2)\lambda^2$	$2\lambda^2$	0
j-2	0	0	λ^4	0	0

Коэффициенты таблицы являются множителями при узловых функциях с индексами (верхняя строка и левый столбец), указанных в столбце и строке расположения коэффициента.

ЛЕКЦИЯ 10

Расчет пластин на изгиб методом сеток

При действии поперечной нагрузки q внутренние усилия определяются через функцию прогибов срединной поверхности w , которая удовлетворяет бигармоническому уравнению

$$\nabla^4 w(x, y) = \frac{q(x, y)}{D}, \quad (10.1)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ - изгибная жесткость пластинки; h - толщина пластинки; E, ν - модуль упругости и коэффициент Пуассона материала пластинки.

Внутренние усилия определяются через функцию прогибов по формулам:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right);$$
$$H = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \quad Q_x = -D \frac{\partial \nabla^2 w}{\partial x}; \quad Q_y = -D \frac{\partial \nabla^2 w}{\partial y}. \quad (10.2)$$

M_x, M_y - изгибающие моменты; H - крутящий момент;

Q_x, Q_y - поперечные силы.

Применяя для решения задачи изгиба пластин метод сеток с постоянным шагом разностной сетки по каждой из координат, получим разностное уравнение:

$$\tilde{\Delta}_{ij}^4 w_{ij} = \frac{q_{ij}}{D} h_x^4 = \frac{q_{ij}}{n_x^4} \frac{a^4}{D}. \quad (10.3)$$

Внутренние усилия в узлах сетки определяются по формулам:

$$M_{xij} = -\frac{D}{h_x^2} \left(\Delta_i^2 w_{ij} + \nu \lambda^2 \Delta_j^2 w_{ij} \right) =$$
$$= -\frac{D}{h_x^2} \left[w_{i-1,j} + w_{i+1,j} + \nu \lambda^2 (w_{i,j-1} + w_{i,j+2}) - 2(1 + \nu \lambda^2) w_{i,j} \right];$$

$$\begin{aligned}
M_{yij} &= -\frac{D}{h_x^2} (\lambda^2 \Delta_j^2 w_{ij} + \nu \Delta_j^2 w_{ij}) = \\
&= -\frac{D}{h_x^2} [\lambda^2 (w_{i,j-1} + w_{i,j+2}) + \nu (w_{i-1,j} + w_{i+1,j}) - 2(\lambda^2 + \nu) w_{i,j}]; \\
H_{ij} &= -\frac{D}{h_x^2} (1-\nu) \Delta_i \Delta_j w_{ij} = -\frac{D\lambda}{4h_x^2} (1-\nu) \Delta_i (-w_{i,j-1} + w_{i,j+1}) = \\
&= -\frac{D\lambda}{4h_x^2} (1-\nu) (w_{i-1,j-1} - w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j+1} + w_{i+1,j+1}); \\
\nabla^2 w_{ij} &= \frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial y^2} = \frac{1}{h_x^2} (\Delta_i^2 w_{ij} + \lambda^2 \Delta_j^2 w_{ij}) = \\
&= \frac{1}{h_x^2} [w_{i-1,j} + w_{i+1,j} + \lambda^2 (w_{i,j-1} + w_{i,j+1}) - 2(1 + \lambda^2) w_{i,j}]; \\
Q_{xij} &= -\frac{D}{h_x^3} \Delta_i \nabla^2 w_{ij} = \frac{D}{h_x^3} [w_{i-2,j} - w_{i+2,j} + \\
&+ \lambda^2 (w_{i-1,j-1} - w_{i+1,j-1} + w_{i-1,j+1} - w_{i+1,j+1}) - 2(1 + \lambda^2) (w_{i-1,j} - w_{i+1,j})]; \\
Q_{yij} &= -\frac{D\lambda}{h_x^3} \Delta_j \nabla^2 w_{ij} = \frac{D\lambda}{h_x^3} [w_{i-1,j-1} - w_{i-1,j+1} + w_{i+1,j-1} - w_{i+1,j+1} + \\
&+ \lambda^2 (w_{i,j-2} - w_{i,j+2}) - 2(1 + \lambda^2) (w_{i,j-1} - w_{i,j+1})]. \quad (10.4)
\end{aligned}$$

Рассмотрим два типа граничных условий опирания сторон пластинки - шарнирное опирание и жесткое защемление.

В случае шарнирного опирания края $x = x_0$ ($x_0 = 0$ или $x = a$):

$$w(x_0, y) = 0, \quad M_x(x_0, y) = 0. \quad \text{Из 2-го условия следует } \frac{\partial^2 w(x_0, y)}{\partial x^2} = 0.$$

Тогда, при $x_0 = 0$ имеем: $i = 0$, $w_{0,j} = 0$, $\Delta_i^2 w_{0,j} = w_{-1,j} + w_{1,j} = 0$, или $w_{-1,j} = -w_{1,j}$. При $x_0 = a$: $i = n_x$, $w_{n_x,j} = 0$, $w_{n_x+1,j} = -w_{n_x-1,j}$.

Аналогично, при шарнирном опирании края $y = 0$ получим: $j = 0$, $w_{i,0} = 0$, $w_{i,-1} = -w_{i,1}$, при $y = b$: $j = n_y$, $w_{i,n_y} = 0$, $w_{i,n_y+1} = -w_{i,n_y-1}$.

Таким образом, при шарнирном опирании края прямоугольной пластинки перемещение в законтурной точке равно перемещению в соответствующей предконтурной точке с противоположным знаком.

В случае жесткого защемления края $x = x_0$: $w(x_0, y) = 0$ и $\frac{\partial w(x_0, y)}{\partial x} = 0$. Тогда при $x_0 = 0$: $i = 0$, $w_{0,j} = 0$, $\Delta_i w_{0,j} = -w_{-1,j} + w_{1,j} = 0$, или $w_{-1,j} = w_{1,j}$. При $x_0 = a$: $i = n_x$, $w_{n_x,j} = 0$, $w_{n_x+1,j} = w_{n_x-1,j}$. При жестком защемлении края $y = 0$, $j = 0$, $w_{i,0} = 0$, $w_{i,-1} = w_{i,1}$; при $y = b$: $j = n_y$, $w_{i,n_y} = 0$, $w_{i,n_y-1} = w_{i,n_y+1}$. В случае жесткого защемления, перемещение в законтурной точке равно перемещению в соответствующей предконтурной точке.

Таким образом при шарнирном опирании или жестком защемлении краев прямоугольной пластинки используется ряд законтурных точек с каждой стороны пластинки, однако в число неизвестных узловых перемещений входят только внутриконтурные точки, для которых и составляются разностные уравнения.

Для свободных краев пластинки вводят два ряда законтурных точек и граничные условия равенства нулю изгибающих моментов и обобщенных поперечных сил описываются более сложными разностными операторами. С реализацией граничных условий свободного края можно ознакомиться, например, в работе [7].

Изгибающий момент в прямоугольной пластинке в случае жестко защемленного края $x = 0$ в сечении $y = y_j$:

$$M_{x0,j} = -2 \frac{D}{h_x^2} w_{0,j}.$$

Изгибающие моменты в центре прямоугольной пластинки $m = \frac{n_x}{2}$, $k = \frac{n_y}{2}$: в случае двух осей симметрии пластинки по граничным условиям и нагрузке

$$\begin{aligned} M_{xm,k} &= -2 \frac{D}{h_x^2} \left[w_{m-1,k} + \nu \lambda^2 w_{m,k-1} - (1 + \nu \lambda^2) w_{m,k} \right]; \\ M_{ym,k} &= -2 \frac{D}{h_x^2} \left[\nu w_{m-1,k} + \lambda^2 w_{m,k-1} - (\nu + \lambda^2) w_{m,k} \right]; \end{aligned} \quad (10.5)$$

ЛЕКЦИЯ 11

Примеры расчета пластин методом сеток

Рассмотрим квадратную пластинку, жестко защемленную по контуру.

На пластинку нанесем сетку с шагом $h_x = h_y = h = \frac{a}{n}$, принимая в первом приближении $n = 2$. Кроме основной сетки с каждой стороны пластинки наносим по одному ряду законтурных точек (рис. 11.1, б).

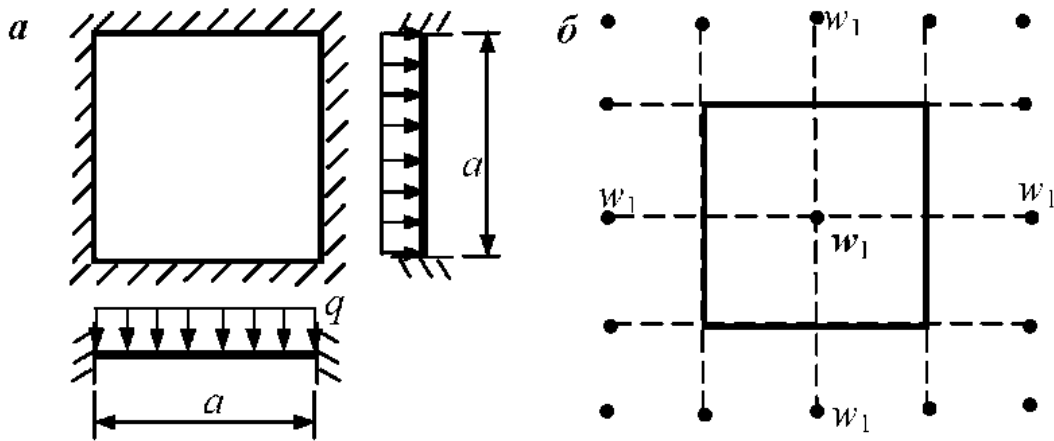


Рис. 11. К расчету жестко защемленной пластинки методом сеток ($n_x = n_y = 2$)

На рис. 11.1, б в узлах сетки обозначены перемещения с учетом граничных условий. В узлах сетки, где нет обозначения перемещения, перемещения равны нулю. Так как $n_x = n_y$, то $\lambda = 1$. Вычисляем коэффициенты табл. 10.1:

$$0, 0, 1, 0 \ 0; \ 0, 2, -8, 2, 0; \ 1, -8, 20, -8, 1; \ 0, 2, -8, 2, 0; \ 0, 0, 1, 0 \ 0. \quad (11.1)$$

Строки таблицы разделены точкой с запятой (;).

Аналогично составляем таблицу перемещений в соответствии с рис. 11.1, б, совместив центральную клетку таблицы с опорной точкой разностной сетки:

$$0, 0 \ w_1, 0, 0; \ 0, 0, 0, 0, 0; \ w_1, 0 \ 20w_1, 0, w_1; \ 0, 0, 0, 0, 0; \ 0, 0 \ w_1, 0, 0.$$

Перемножая построчно таблицу коэффициентов с таблицей перемещений и суммируя, получаем разностное уравнение (10.3)

$$24w_1 = \frac{q_{11}}{16} \frac{a^4}{D}. \text{ При равномерно распределенной нагрузке } q_{11} = q,$$

получаем прогиб в центре квадратной пластинки

$$w_1 = \frac{q}{16 \cdot 24} \frac{a^4}{D} = 0,0026 \frac{q a^4}{D}.$$

По формулам (10.4) вычисляем изгибающие моменты в центре пластинки и в середине опорных сторон ($\nu = 0,3$):

$$\begin{aligned} M_{xc} = M_{yc} &= 2(1 + \nu\lambda^2) \frac{D}{h_x^2} w_1 = 2(1 + \nu\lambda^2) \frac{D n_{xz}^2}{a^2} w_1 = \\ &= 2 \cdot (1 + 0,3) \frac{4}{24 \cdot 16} q a^2 = 0,027 q a^2; \end{aligned}$$

$$M_{x0} = M_{y0} = -2 \frac{D n_x^2}{a^2} w_1 = -2 \frac{4}{24 \cdot 16} q a^2 = 0,0208 q a^2.$$

Точное решение для квадратной пластинки, защемленной по контуру от равномерно распределенной нагрузки [3]:

$$w_c^{точ} = 0,00126 \frac{q a^4}{D}; \quad M_c^{точ} = 0,0231 q a^2; \quad M_{on}^{точ} = 0,0513 q a^2.$$

Как и можно было ожидать при минимальном числе шагов $n = 2$, точность решения неудовлетворительна:

$$\delta w_c = \frac{0,26 - 0,126}{0,126} 100 = 106\%; \quad \delta M_{on} = \frac{0,27 - 0,231}{0,231} 100 = 17\%;$$

$$\delta M_{om} = \frac{0,531 - 0,208}{0,513} 100 = 63\%.$$

Уточним расчет, приняв $n_x = n_y = 4$ (рис. 11.2)

Защемленная на контуре квадратная в плане пластинка при симметричной по обеим координатам нагрузке обладает кроме осевой симметрии относительно центральных осей, также диагональной симметрией. Поэтому при $n_x = n_y = 4$ мы имеем только 3 независимых узловых перемещения. На рис 11.2 показана нумерация неизвестных с учетом симметрии и граничных условий. Разностные

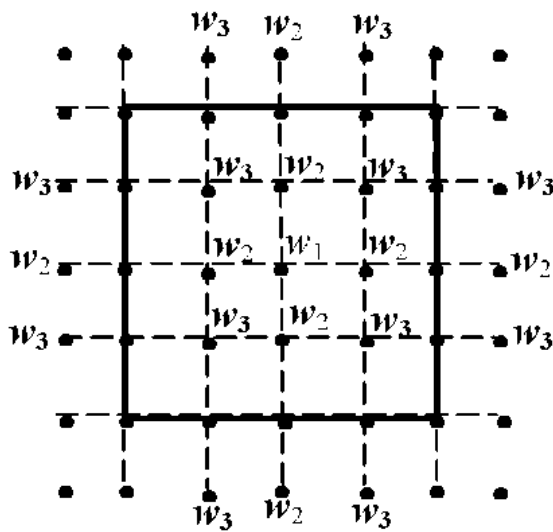


Рис. 11.2. Разностная сетка
($n_x = n_y = 4$)

w_3 , составляем таблицу переменных, объединяя ее с таблицей коэффициентов-множителей

Множители					Опорные точки														
					w_1					w_2					w_3				
					Узловые перемещения														
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	w_3	0	w_3	w_2	w_3
0	2	-8	2	0	0	w_3	w_2	w_3	0	w_3	0	w_3	w_2	w_3	w_2	0	w_2	w_1	w_2
1	-8	20	-8	1	0	w_2	w_1	w_2	0	w_2	0	w_2	w_1	w_2	w_3	0	w_3	w_2	w_3
0	2	-8	2	0	0	w_3	w_2	w_3	0	w_3	0	w_3	w_2	w_3	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	w_3	w_2	w_3

Умножая переменные опорной точки на соответствующие коэффициенты-множители, складывая и суммируя множители общих переменных, получаем систему разностных уравнений:

$$\begin{pmatrix} 20 & -32 & 8 \\ -8 & 26 & -16 \\ 2 & -16 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \frac{h_x^4}{D},$$

где q_i - распределенная нагрузка в опорной точке.

уравнения (10.3) составляются для трех положений центральной узловой (опорной) точки уравнения внутри контура в соответствии с неизвестными перемещениями. Для каждой опорной точки составляется таблица неизвестных узловых перемещений от второй сетки ниже опорной до второй сетки выше и от второй сетки слева до второй сетки справа от опорной точки.

Для опорных точек: центральной w_1 , левой от центральной w_2 и нижней по диагонали

Для равномерно распределенной нагрузки $q_1 = q_2 = q_3 = q$.
 При сосредоточенной силе P в центре пластинки:

$$q_1 = \frac{P}{h^2}, \quad q_2 = q_3 = 0.$$

Решая систему уравнений, находим:

$$w_1 = \frac{23q_1 + 40q_2 + 19q_3}{178 \cdot 256} \frac{a^4}{D}; \quad w_2 = \frac{10q_1 + 29q_2 + 16q_3}{178 \cdot 256} \frac{a^4}{D};$$

$$w_3 = \frac{29q_1 + 64q_2 + 66q_3}{712 \cdot 256} \frac{a^4}{D}.$$

a/. При равномерно распределенной нагрузке:

$$w_1 = \frac{81}{89 \cdot 256} \frac{qa^4}{D} = 0,0018 \frac{qa^4}{D}; \quad w_2 = \frac{55}{178 \cdot 256} \frac{qa^4}{D} = 0,00121 \frac{qa^4}{D};$$

$$w_3 = \frac{159}{712 \cdot 256} \frac{qa^4}{D} = 0,000872 \frac{qa^4}{D}.$$

Изгибающие моменты в центре пластинки с учетом симметрии:

$$\begin{aligned} M_{x1} = M_{y1} &= 2 \frac{D}{h_x^2} (1 + \nu)(w_1 - w_2) = 2(1 + \nu)n^2 (w_1 - w_2) \frac{D}{a^2} = \\ &= 2(1 + 0,3) \cdot 16 \cdot (0,0018 - 0,00121) qa^2 = 0,0245 qa^2. \end{aligned}$$

Изгибающий момент в середине опорного края

$$M_{xon} = M_{yon} = 2 \frac{D}{h_x^2} w_2 = 2n_x^2 \frac{D}{a^2} w_2 = 32 \cdot 0,00121 qa^2 = 0,0387 qa^2.$$

Точность решения при $n_x = n_y = 4$:

$$\delta w_c = \frac{0,18 - 0,126}{0,126} 100 = 43\%; \quad \delta M_c = \frac{0,245 - 0,231}{0,231} 100 = 6\%;$$

$$\delta M_{on} = \frac{0,531 - 0,387}{0,513} 100 = 27\%.$$

Проводя расчет на ЭВМ при $n = 6$, получим при равномерно распределенной нагрузке:

$$w_c = 0,001534 \frac{qa^4}{D}; \quad M_{xc} = 0,0238qa^2; \quad M_{xon} = -0,0447qa^2;$$

$$\delta w_c = 22\%; \quad \delta M_c = 6,7\%; \quad \delta M_{on} = 16\%.$$

Результаты расчета квадратной пластинки жестко защемленной на контуре показывают постепенную сходимость решения метода сеток к известному точному решению.

Рассмотрим более общую задачу – прямоугольную пластинку с различными граничными условиями опирания пластинки (рис. 11.3).

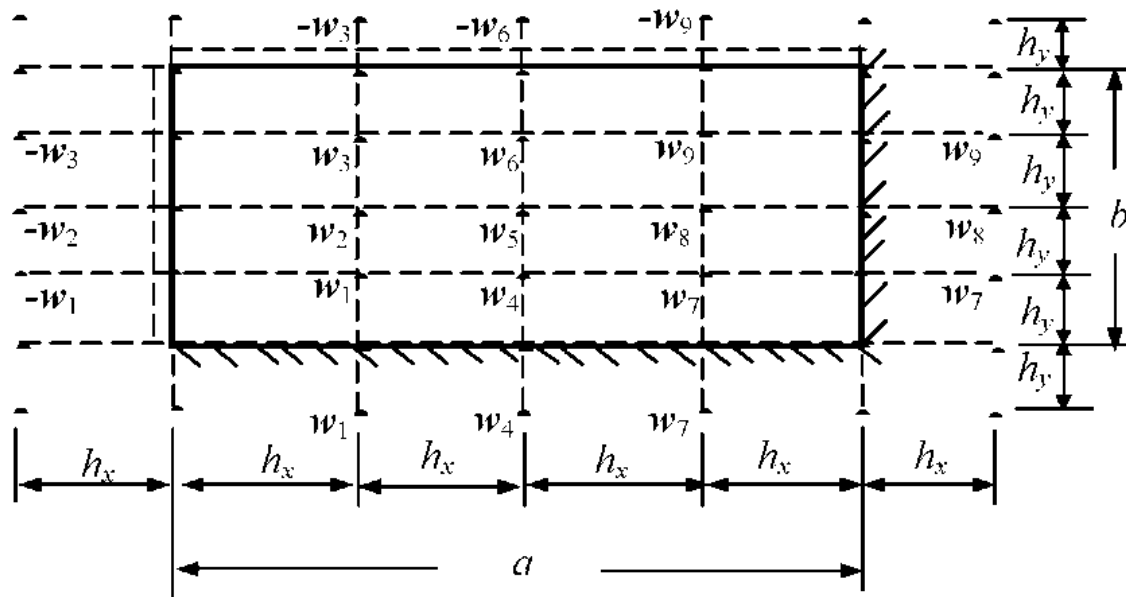


Рис. 11.3. Разностная сетка прямоугольной пластинки
($h_x = a/n_x$; $h_y = b/n_y$)

В случае прямоугольной пластинки с произвольными граничными условиями нумерацию неизвестных обычно принимают последовательно по рядам в поперечном или продольном направлении (в направлении наименьшего числа шагов, если $n_x \neq n_y$).

Стороны пластинки $x = 0$ и $y = b$ шарнирно оперты, стороны $x = a$ и $y = 0$ - жестко защемлены. Перемещения законтурных точек на рис 11.3 (знаки и номер перемещения) приведены с учетом граничных условий. Перемещения законтурных точек без номера не входят в систему разностных уравнений и принимаются равными нулю.

Принимаем $b = a/2$, $n_x = n_y = 4$; $h_x = a/4$; $h_y = b/4 = a/8$;
 $\lambda = \frac{h_x}{h_y} = \frac{a}{b} = 2$. Получаем таблицу коэффициентов бигармонического разностного уравнения (см. табл. 9.1) при $\lambda = 2$.

Таблица коэффициентов бигармонического разностного уравнения при $\lambda = 2$

0	0	16	0	0
0	32	-80	32	0
1	-20	134	-20	1
0	32	-80	32	0
0	0	16	0	0

Становясь последовательно на опорные внутренние точки разностной сетки пластинки w_1, w_2, \dots, w_9 , используя таблицу коэффициентов разностного уравнения и учитывая граничные условия, получаем систему алгебраических уравнений.

$$\begin{pmatrix} 149 & -80 & 16 & -20 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -80 & 133 & -80 & 8 & -20 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 16 & -80 & 117 & 0 & 8 & -20 & 0 & 0 & 1 \\ -20 & 8 & 0 & 150 & -80 & 16 & -20 & 8 & 0 \\ 8 & -20 & 8 & -80 & 134 & -80 & 8 & -20 & 8 \\ 0 & 8 & -20 & 16 & -80 & 118 & 0 & 8 & -20 \\ 1 & 0 & 0 & -20 & 8 & 0 & 151 & -80 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & -20 & 8 & -80 & 135 & -80 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8 & -20 & 16 & -80 & 119 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ w_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \\ q_9 \end{pmatrix} \frac{h_x^2}{D}.$$

Здесь q_i интенсивность распределенной нагрузки в i -том узле (в узле с перемещением w_i).

На основе этого примера разрабатывается алгоритм формирования системы разностных уравнений прямоугольной пластинки с произвольным опиранием сторон пластинки, который может быть реализован на ЭВМ. Отметим, что возможны смешанные условия опирания сторон – частично шарнирное опирание, частично жесткое защемленное каждого края пластинки.

ЛЕКЦИЯ 12

Метод коллокаций решения дифференциальных уравнений

Метод конечных разностей (метод сеток) относится численным приближенным методом решения дифференциальных уравнений.

Метод коллокаций является численно-аналитическим приближенным методом решения дифференциального уравнения

$$L[y(x)] = f(x), \quad (12.1)$$

где L - дифференциальный оператор; $y(x)$ - функция, удовлетворяющая заданным граничным условиям на границах интервала (a, b) определения функции.

Решения ищется в виде конечного ряда

$$y(x) = \sum_{m=1}^M A_m \varphi_m(x). \quad (12.2)$$

Здесь $\varphi_m(x)$ - функции, удовлетворяющие заданным граничным условиям; A_m - неизвестные коэффициенты; M - число членов ряда.

Для определения коэффициентов A_m решение (12.1) подставляется в дифференциальное уравнение (12.1), которое удовлетворяется в точках x_i ($i = 1, 2, \dots, M$) - точках коллокаций, задаваемых в интервале (a, b) :

$$Ly(x_i) = \sum_{m=1}^M A_m L\varphi_m(x_i) = f(x_i). \quad (12.3)$$

В результате получаем систему M алгебраических уравнений, решая которую, определяем неизвестные коэффициенты A_m . После определения коэффициентов вычисляется функция $y(x)$ и необходимые производные функции в любой точке интервала (a, b) , а также за пределами интервала. Точность решения зависит как от выбора функций $\varphi_m(x)$, так и от выбора точек коллокаций. Метод коллокаций относится к наиболее простым приближенным методам решения дифференциальных уравнений, требующих только дифференцирования, вычисления функций и решения системы уравнений. В отличие от метода сеток численно-аналитические методы позволяют после определения неизвестных коэффициентов, пользоваться метода-

ми математического анализа, дифференцировать, интегрировать, определять точки максимума-минимума и т.д.

Расчет балок методом коллокаций

Рассмотрим однопролетную шарнирно опертую балку, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой q .

Граничные условия:

$$y(0) = y(l) = 0; \quad M_x(0) = M_x(l) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 y(0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y(l)}{\partial x^2} = 0.$$

Решение принимаем в виде ряда:

$$y(x) = \sum_{m=1}^M A_m \sin(2m-1)\pi \frac{x}{l}. \quad (12.4)$$

Нетрудно убедиться, что каждый член ряда удовлетворяет граничным условиям шарнирного опирания балки. Нечетные множители $(2m-1)$, обеспечивают симметричность решения при симметричной нагрузке.

Решение должно удовлетворять дифференциальному уравнению изгиба балки $y^{IV} = \frac{q}{EJ_z}$ в задаваемых точках коллокаций..

Рассмотрим решение с одним членом ряда (12.4),, приняв $x = l/2$ за точку коллокации. Тогда

$$y(x) = A_1 \sin \pi \frac{x}{l}; \quad y^{IV}\left(\frac{l}{2}\right) = A_1 \frac{\pi^4}{l^4} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{q}{EJ_z};$$

$$A_1 = \frac{1}{\pi^4} \frac{ql^4}{EJ_z} = 0,01027 \frac{ql^4}{EJ_z}; \quad y(x) = 0,01027 \frac{ql^4}{EJ_z} \sin \pi \frac{x}{l}.$$

Определим изгибающий момент

$$M_x(x) = EJ_z y''(x) = -A_1 \frac{\pi^2}{l^2} EJ_z \sin \pi \frac{x}{l} = -\frac{1}{\pi^2} ql^2 \sin \pi \frac{x}{l}.$$

В середине пролета $y\left(\frac{l}{2}\right) = 0,01027 \frac{ql^4}{EJ_z}$. $M_x\left(\frac{l}{2}\right) = -0,1013ql^2$

Точное решение $y_c = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ_z} = 0,01302 \frac{ql^4}{EJ_z}$; $M_c = 0,125ql^2$.

Относительная точность приближенного решения:

$$\delta y_c = \frac{0,01302 - 0,01027}{0,1302} 100 = 21\%, \quad \delta M_c = \frac{0,1013 - 0,125}{0,125} 100 = 19\%.$$

Проведем расчет с 2-мя членами ряда:

$$y(x) = A_1 \sin \pi \frac{x}{l} + A_2 \sin 3\pi \frac{x}{l};$$

$$y^{IV}(x) = \frac{\pi^4}{l^4} \left(A_1 \sin \pi \frac{x}{l} + 81A_2 \sin 3\pi \frac{x}{l} \right).$$

Приняв за точки коллокации $x_1 = \frac{l}{2}$ и $x_2 = \frac{l}{4}$, получим систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} 1 & -81 \\ 0,7071 & 81 \cdot 0,7071 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\pi^4} \frac{ql^4}{EJ_z}.$$

Решая систему, получаем

$$A_1 = \frac{1,7071}{1,4142} \frac{1}{\pi^4} \frac{ql^4}{EJ_z} = 0,01239 \frac{ql^4}{EJ_z}; \quad A_2 = 0,26 \cdot 10^{-4} \frac{ql^4}{EJ_z};$$

$$y(x) = \left(1,239 \sin \pi \frac{x}{l} + 0,0026 \sin 3\pi \frac{x}{l} \right) \cdot 10^{-2} \frac{ql^4}{EJ_z};$$

$$M_z(x) = \left(1,223 \sin \pi \frac{x}{l} + 0,023 \sin 3\pi \frac{x}{l} \right) qa^2.$$

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = (1,239 - 0,0026) \cdot 10^{-2} \frac{ql^4}{EJ_z} = 1,236 \frac{ql^4}{EJ_z};$$

$$M_z(x) = -\left(1,223 - 0,023 \sin 3\pi \frac{x}{l} \right) qa^2 = -0,120 qa^2.$$

$$\delta y_c = \frac{0,01302 - 0,01236}{0,1302} 100 = 5\%; \quad \delta M_c = \frac{0,125 - 0,120}{0,125} 100 = 4\%.$$

Таким образом, решение с двумя членами ряда для шарнирно опертой балки дает невязки по прогибу и изгибающему моменту в пределах 5%.

ЛЕКЦИЯ 13

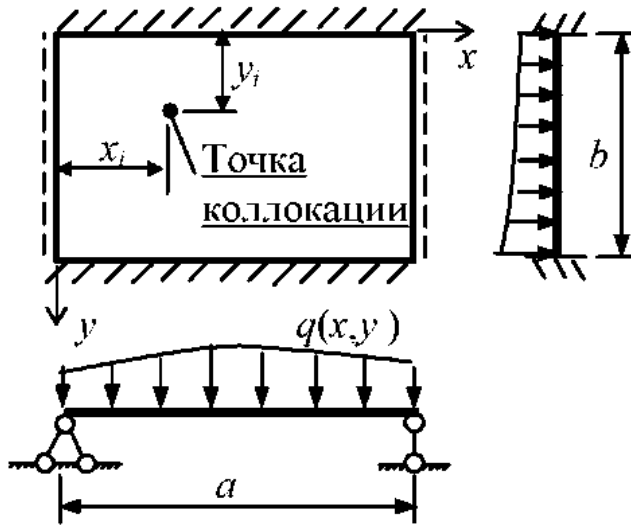
Расчет прямоугольных пластин на изгиб методом коллокаций

Рассмотрим прямоугольную пластинку (рис. 13.1).

Задаемся функцией прогиба пластинки

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} X_m(x) Y_n(y), \quad (13.1)$$

где $X_m(x)$, $Y_n(y)$ - функции, удовлетворяющие граничным услови-



ям опирания пластинки на краях $x = 0$, $x = a$ и $y = 0$, $y = b$ соответственно; A_{mn} - неизвестные коэффициенты.

Задаемся точками коллокаций x_i, y_i , $i = 1, 2, \dots, K$; $K = M \times N$ - количество точек коллокаций равно числу членов ряда.

Удовлетворяем уравнение равновесия пластинки в точках коллокаций:

Рис. 13.1. К расчету пластинки методом коллокаций

$$\nabla^4 w(x_i, y_i) = \frac{q(x_i, y_i)}{D}, \text{ или подставляя решение (13.1)}$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \left(\frac{\partial^4 w_{mn}(x_i, y_i)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_{mn}(x_i, y_i)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_{mn}(x_i, y_i)}{\partial y^4} \right) = \\ = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \left[X_m^{IV}(x_i) Y_n(y_j) + 2 X_m''(x_i) Y_n''(y_j) + X_m(x_i) Y_n^{IV}(y_j) \right] = \\ = \frac{q(x_i, y_i)}{D}. \end{aligned} \quad (13.2)$$

Рассмотрим прямоугольную пластинку, шарнирно опертую на контуре, с размерами в плане $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$.

Граничные условия опирания пластинки:

$$\begin{aligned} w(0, y) = w(a, y) = 0; \quad M_x(0, y) = M_x(a, y) = 0; \\ w(x, 0) = w(x, b) = 0; \quad M_y(x, 0) = M_y(x, b) = 0. \end{aligned} \quad (13.3)$$

Из условия равенства нулю изгибающих моментов на контуре, имеем

$$\frac{\partial^2 w(0, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w(a, y)}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 w(x, 0)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w(x, b)}{\partial y^2} = 0. \quad (13.3, a)$$

Учитывая граничные условия, принимаем $X_m = \sin m\pi \frac{x}{a}$,

$Y_n = \sin n\pi \frac{y}{b}$, и решение получаем в виде двойного ряда:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}. \quad (13.4)$$

Очевидно, граничные условия (13.3) удовлетворяются

Изгибающие моменты определяются по формулам:

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \\ &= D \frac{\pi^2}{a^2} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} (m^2 + \nu \lambda^2 n^2) \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}; \\ M_y &= -D \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \\ &= D \frac{\pi^2}{a^2} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} (\nu m^2 + \lambda^2 n^2) \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b}, \quad \lambda = \frac{a}{b}. \end{aligned} \quad (13.5)$$

Систему уравнений метода коллокаций (13.2) получаем в виде:

$$\frac{\pi^4}{a^4} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} [m^4 + 2\lambda^2 m^2 n^2 + \lambda^4 n^4] \sin m\pi \frac{x_i}{a} \sin n\pi \frac{y_i}{b} = \frac{q(x_i, y_i)}{D},$$

$$i = 1, 2, 3 \dots K; \quad \lambda = \frac{a}{b}, \text{ или}$$

$$\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} C_{mn} \sin m\pi \frac{x_i}{a} \sin n\pi \frac{y_i}{b} = \frac{q(x_i, y_i) a^4}{D \pi^4}, \quad (13.6)$$

где $C_{mn} = m^4 + 2\lambda^2 m^2 n^2 + \lambda^4 n^4$.

Проведем расчет с одним членом ряда. За точку коллокации принимаем центр пластинки ($x_1 = a/2$, $y_1 = b/2$). Тогда получим:

$$C_{11} = 1 + 2\lambda^2 + \lambda^4; \quad \sin \pi \frac{x_1}{a} = \sin \pi \frac{y_1}{b} = \sin \frac{\pi}{2} = 1;$$

$$A_{1,1} = \frac{q(a/2, b/2) a^4}{D(1 + 2\lambda^2 + \lambda^4) \pi^4}.$$

При равномерно распределенной нагрузке получим прогиб и изгибающий момент в центре квадратной пластинки:

$$a = b, \quad \lambda = 1, \quad \nu = 0,3;$$

$$w\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = \frac{1}{4\pi^4} \frac{qa^4}{D} = 0,00257 \frac{qa^4}{D};$$

$$M_x\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = M_y\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = qa^2 \frac{1,3}{4\pi^2} = 0,0329 qa^2.$$

Из результатов расчета в первом приближении видно, что и прогиб и изгибающие моменты существенно отличаются от точного

решения: $w_c^{точ} = 0,00406 \frac{qa^4}{D}$; $M_c^{точ} = 0,0479 qa^2$.

$$\delta w_c = \frac{0,00406 - 0,00257}{0,00406} 100 = 32,4\%;$$

$$\delta M_c = \frac{0,0479 - 0,0329}{0,0479} 100 = 31,3\%.$$

Для прямоугольной пластинки $\lambda = 1,5$ получаем:

$$C_{11} = 1 + 1,5^2 + 1,5^4 = 10,5625;$$

$$w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = \frac{1}{10,5625\pi^4} \frac{qa^4}{D} = 0,972 \cdot 10^{-3} \frac{qa^4}{D};$$

$$M_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = \frac{1 + 0,3 \cdot 1,5^2}{10,625\pi^2} qa^2 = 0,0160 qa^2;$$

$$M_y \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right) = \frac{0,3 + 1,5^2}{10,625\pi^2} qa^2 = 0,0243qa^2;$$

Точное решение при $\lambda = 1,5$ [3]:

$$w_c^{точ} |_{\lambda=1,5} = 1,525 \cdot 10^{-3} \frac{qa^4}{D};$$

$$M_{xc}^{точ} |_{\lambda=1,5} = 0,0360qa^2; \quad M_{yc}^{точ} |_{\lambda=1,5} = 0,0546qa^2.$$

Определяем относительную точность решения с одним членом ряда для прямоугольной пластинки $\lambda = 1,5$:

$$\delta w_c |_{\lambda=1,5} = \frac{1,525 - 0,972}{1,525} 100 = 36 \%;$$

$$\delta M_{xc} |_{\lambda=1,5} = \frac{0,360 - 0,160}{0,360} 100 = 55 \%;$$

$$\delta M_{yc} |_{\lambda=1,5} = \frac{0,546 - 0,243}{0,546} 100 = 55 \%.$$

Точность расчета методом коллокаций с одним членом ряда не удовлетворительна.

Проведем расчет с 3-я членами ряда: при симметричной нагрузке относительно центральных сечений пластинки:

$$w(x, y) = A_{11} X_1(x) Y_1(y) + A_{13} X_1(x) Y_3(y) + A_{31} X_3(x) Y_1(y);$$

$$X_1(x) = \sin \pi \frac{x}{a}; \quad Y_1(y) = \sin \pi \frac{y}{b}; \quad X_3(x) = \sin 3\pi \frac{x}{a}; \quad Y_3(y) = \sin 3\pi \frac{y}{b}.$$

Нечетные члены ряда обеспечивают симметричность решения относительно центра пластинки.

За точки коллокаций принимаем:

$$1) \quad x_1 = \frac{a}{2}, \quad y_1 = \frac{b}{2}; \quad 2) \quad x_2 = \frac{a}{2}, \quad y_2 = \frac{b}{4}; \quad 3) \quad x_3 = \frac{a}{4}, \quad y_3 = \frac{b}{2}.$$

Тогда имеем:

$$C_{11} = 1 + \lambda^2 + \lambda^4; \quad C_{13} = 1 + 18\lambda^2 + 81\lambda^4; \quad C_{31} = 81 + 18\lambda^2 + \lambda^4;$$

$$X_1(x_1) = X_1(x_2) = Y_1(y_1) = Y_1(y_3) = \sin \frac{\pi}{2} = 1;$$

$$X_3(x_1) = X_3(x_2) = Y_3(y_1) = Y_3(y_3) = \sin \frac{3}{2} \pi = -1;$$

$$X_1(x_3) = Y_1(y_3) = \sin \frac{\pi}{4} = 0,7071; \quad X_3(x_3) = Y_3(y_2) = \sin \frac{3}{4} \pi = 0,7071.$$

Для квадратной пластинки $\lambda = 1$ ($C_{11} = 4$, $C_{13} = C_{31} = 100$) при равномерно распределенной нагрузке $q(x_1, y_1) = q(x_2, y_2) = q(x_3, y_3) = q$ получим систему уравнений, разделив 2-е и 3-е уравнения на $\sin \frac{\pi}{4} = \sin \frac{3\pi}{4} = 0,7071$:

$$\begin{pmatrix} 4 & -100 & -100 \\ 4 & 100 & -100 \\ 4 & -100 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1,1} \\ A_{1,3} \\ A_{3,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1,4142 \\ 1,4142 \end{pmatrix} \cdot \frac{q_2 a^4}{\pi^4 D}$$

Решая систему уравнений, определяем коэффициенты:

$$A_{1,1} = 3,63 \cdot 10^{-3} \frac{qa^4}{D}; \quad A_{1,3} = 0,0213 \cdot 10^{-3} \frac{qa^4}{D};$$

$$A_{3,1} = 0,0212 \cdot 10^{-3} \frac{qa^4}{D}.$$

Вычисляем прогиб в центре пластинки:

$$\begin{aligned} w\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) &= (A_{1,1} - A_{1,3} - A_{3,1}) \frac{qa^4}{D} = \\ &= (3,63 - 2 \cdot 0,0212) \cdot 10^{-3} \frac{qa^4}{D} = 0,00359 \frac{qa^4}{D}. \end{aligned}$$

$$\delta w_c = \frac{0,00406 - 0,00359}{0,00406} 100 = 11,6 \%$$

Изгибающие моменты в центре пластинки при: $\nu = 0,3$

$$\begin{aligned} M_x\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) &= M_y\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = qa^2 \pi^2 [(1 + 0,3) \cdot 3,63 - \\ &- (1 + 0,3 \cdot 9) \cdot 0,0212 - (9 + 0,3) \cdot 0,0212] \cdot 10^{-3} = 0,0438 qa^2; \end{aligned}$$

$$\delta M_c = \frac{0,0479 - 0,0438}{0,0479} 100 = 8,6 \%$$

Для прямоугольной пластинки $\lambda = 1,5$, принимая за точки коллокации $x_1 = \frac{a}{2}$, $y_1 = \frac{b}{2}$; $x_2 = \frac{a}{2}$, $y_2 = \frac{b}{4}$; $x_3 = \frac{a}{4}$, $y_3 = \frac{b}{2}$, получим:

$$C_{11} = 1 + 1,5^2 + 1,5^4 = 10,56; \quad C_{13} = 1 + 18 \cdot 1,5^2 + 81 \cdot 1,5^4 = 451,56;$$

$$C_{31} = 81 + 18 \cdot 1,5^2 + 1,5^4 = 126,56;$$

$$X_1(x_1) = X_1(x_2) = Y_1(y_1) = Y_1(y_3) = \sin \frac{\pi}{2} = 1;$$

$$X_3(x_1) = X_3(x_2) = Y_3(y_1) = Y_3(y_3) = \sin \frac{3}{2} \pi = -1;$$

$$X_1(x_3) = Y_1(y_3) = \sin \frac{\pi}{4} = 0,7071; \quad X_3(x_3) = Y_3(y_2) = \sin \frac{3}{4} \pi = 0,7071.$$

$$\begin{pmatrix} 10,56 & -451,56 & -125,56 \\ 10,56 & 451,56 & -125,56 \\ 10,56 & -451,56 & 125,56 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1,1} \\ A_{1,3} \\ A_{3,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1,4142 \\ 1,4142 \end{pmatrix} \cdot \frac{q_2 a^4}{\pi^4 D}.$$

Решая систему уравнений, находим:

$$A_{11} = 1,374 \cdot 10^{-3} \frac{q_2 a^4}{D}; \quad A_{13} = -0,00471 \cdot 10^{-3} \frac{q_2 a^4}{D};$$

$$A_{31} = 0,0169 \cdot 10^{-3} \frac{q_2 a^4}{D};$$

Вычисляем прогиб и изгибающий момент в центре пластинки:

$$\begin{aligned} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) &= (A_{1,1} - A_{1,3} - A_{3,1}) \frac{q a^4}{D} = \\ &= (1,374 - 0,00471 - 0,0169) \cdot 10^{-3} \frac{q a^4}{D} = 1,352 \frac{q a^4}{D}. \end{aligned}$$

$$\delta w_c = \frac{1,525 - 1,374}{1,525} 100 = 11,3 \%$$

Изгибающие моменты в центре пластинки при: $\nu = 0,3$

$$\begin{aligned} M_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) &= q a^2 \pi^2 \left[(1 + 0,3 \cdot 1,5^2) \cdot 1,374 - (1 + 0,3 \cdot 1,5^2 \cdot 9) \cdot 0,00471 - \right. \\ &\quad \left. - (9 + 0,3 \cdot 1,5^2) \cdot 0,0169 \right] \cdot 10^{-3} = 0,02105 q a^2; \end{aligned}$$

$$M_y\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = qa^2 \pi^2 \left[(0,3 + 1,5^2) \cdot 1,374 - (0,3 + 1,5^2 \cdot 9) \cdot 0,00471 - \right. \\ \left. - (0,3 \cdot 9 + 1,5^2) \cdot 0,0169 \right] \cdot 10^{-3} = 0,0328qa^2;$$

$$\delta M_{xc} = \frac{0,036 - 0,02105}{0,036} 100 = 41,5 \%;$$

$$\delta M_{yc} = \frac{0,0546 - 0,0328}{0,0546} 100 = 40 \%.$$

Как видно из приведенных примеров точность расчета зависит не только от числа членов ряда, но и от соотношения сторон пластинки. Для квадратной пластинки точность при расчете 3 членами ряда по сравнению с расчетом с одним членом ряда увеличилась примерно в 3 раза как для прогибов, так и для изгибающих моментов. Для прямоугольной пластинки при $\lambda = 1,5$ существенно увеличилась точность только для прогибов, для изгибающих моментов точность изменилась незначительно.

Покажем, что точность результатов расчета зависит и от выбора точек коллокации. Для трех членов ряда заменим точки коллокаций:

$$x_1 = \frac{a}{2}, \quad y_1 = \frac{b}{2}; \quad x_2 = \frac{a}{2}, \quad y_2 = 0,15b; \quad x_3 = 0,15a, \quad y_3 = \frac{b}{2}.$$

Тогда, проводя расчет методом коллокаций, получим для квадратной пластинки $\lambda = 1$:

$$w\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = 0,00443 \frac{qa^4}{D}; \quad M_x\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = M_y\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = 0,0529qa^2;$$

$$\delta w_c = \left| \frac{0,00406 - 0,00443}{0,00406} \right| 100 = 9,2 \%;$$

$$\delta M_c = \left| \frac{0,0479 - 0,0529}{0,0479} \right| 100 = 10,4 \%;$$

Для прямоугольной пластинки $\lambda = 1,5$:

$$w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = 0,00167 \frac{qa^4}{D}; \quad M_x\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = 0,0247qa^2; \quad M_y\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = 0,0397qa^2$$

$$\delta w_c = \frac{1,525 - 1,67}{1,525} 100 = 9,4 \%;$$

$$\delta M_{xc} = \frac{0,036 - 0,0247}{0,036} 100 = 31,4 \ %;$$

$$\delta M_{yc} = \frac{0,0546 - 0,0397}{0,0546} 100 = 27,2 \ %.$$

Из приведенных результатов видно, что для квадратной пластинки изменение точек коллокаций привело к некоторому увеличению точности по прогибам, и уменьшению точности изгибающих моментов. При этом, значения и прогиба и изгибающих моментов оказались больше точных значений, в то время как в предыдущем расчете их значения были меньше соответствующих точных значений.

Для прямоугольной пластинки изменение точек коллокаций привело к некоторому увеличению точности прогиба и к более значительному увеличению точности изгибающих моментов.

Метод коллокаций является наиболее простым методом решения дифференциальных уравнений. Однако зависимость точности решения от выбора точек коллокаций делает его недостаточно надежным. Неправильный выбор точек коллокаций даже при увеличении числа членов ряда может привести к снижению точности расчета. Это связано с тем, что удовлетворение уравнения в точках коллокаций не гарантирует удовлетворение дифференциального уравнения в промежуточных точках, что в свою очередь может приводить к неверным значениям производных искомой функций.

Более надежными являются численно-аналитические методы, основанные на методах функционального анализа, в частности на вариационных принципах теории упругости и строительной механики.

Л и т е р а т у р а

1. Александров А.В., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности. – М.: «Высшая школа», 2004. – 380 с.
2. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. – М.: 1978. - 288 с.
3. Тимошенко С.П., Войтовский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: Физматиздат, 1966. – 636 с.
4. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский В.И. Вычислительные методы. – М.: «Наука». – Т. 1. – 1974. – 304 с. – Т. 2. – 1977. – 400 с.
5. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы анализа. – М.: Гостехиздат, 1952. – 692 с.
6. Фильчаков П.Ф. Численные и графические методы прикладной математики. – М.: «Наукова Думка», 1970. – 800 с.
7. Варвак П.М., Варвак Л.П. Метод сеток в задачах расчета строительных конструкций. – М.: Стройиздат, 1977. – 160 с.
8. Иванов В.Н. Вариационные принципы и методы решения задач теории упругости. – М.: Изд-во РУДН, 2001. – 176 с.

Содержание

<u>Лекция 1.</u> Задачи теории упругости и методы их решения.....	3
Разностные производные первого порядка	6
<u>Лекция 2.</u> Разностные производные второго порядка.....	8
<u>Лекция 3.</u> Вывод разностных производных второго порядка методом последовательного численного дифференцирования	11
<u>Лекция 4.</u> Расчет статически определимых балок методом конечных разностей.....	14
<u>Лекция 5.</u> Разностные производные произвольного порядка на сетке с постоянным шагом.....	20
Разностные производные четного порядка.....	20
Разностный оператор нечетного порядка.....	22

<u>Лекция 6.</u> Расчет статически неопределимых балок разностным методом.....	
<u>Лекция 7.</u> Расчет балок переменного сечения разностным методом.....	
Пример расчета.....	
<u>Лекция 8.</u> Расчет стержней переменного сечения на устойчивость.....	
Пример расчета стержня переменной жесткости на устойчивость.....	
<u>Лекция 9.</u> Метод сеток. Бигармонический разностный оператор.....	
<u>Лекция 10.</u> Расчет пластин на изгиб методом сеток.....	
<u>Лекция 11.</u> Примеры расчета пластин методом сеток.....	
<u>Лекция 12.</u> Метод коллокаций решения дифференциальных уравнений.....	
Расчет балок методом коллокаций.....	
<u>Лекция 12.</u> Расчет прямоугольных пластин на изгиб методом коллокаций.....	
Литература.....	