ОПД.Р.03 СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА
РАСЧЕТ ФЕРМЫ МЕТОДОМ
КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Методические указания и задания для
расчетно-графических работ

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Расчеты сложных конструкций с достаточной точностью могут быть выполнены только с использованием высокопроизводительных численных методов расчета. Для оценки напряженно-деформированного состояния фермы наиболее приемлемы численные методы расчета на основе дискретных расчетных схем, в частности, метод конечных элементов. При этом применение метода конечных элементов позволяет выполнять расчет как статически определимых, так и статически неопределимых ферм на основе единой методики.

Наибольшее распространение получил метод конечных элементов в форме метода перемещений, при котором матричные алгоритмы наиболее универсальные.

1. Алгоритм расчета плоской фермы методом конечных элементов

1.1. Образование дискретной расчетной схемы фермы

В методе конечных элементов деформируемая система представляется совокупностью подобластей – конечных элементов, положение которых определяется конечным числом степеней свободы, называемых узловыми перемещениями.

Применительно к стержневой системе конечные элементы – это призматические стержни, выделение которых из системы узловыми сечениями осуществляется с соблюдением следующих правил:

а) узлы совпадают с сечениями, на которые действуют внешние сосредоточенные силы или моменты;

б) оси элементов – прямые линии;

в) оси координат элемента совпадают с главными осями инерции поперечного сечения;

г) если на сечение в системе наложены связи, то этому сечению соответствует узел;

д) стержни с начальной кривизной аппроксимируются системой призматических элементов.

Расчетная схема фермы представляет систему, образованную осями стержневых конечных элементов, проходящих через центры тяжести сечений и наделенных геометрическими и физическими свойствами, присущими соответствующим моделируемым участкам фермы. При этом за узлы сопряжения элементов принимаются узлы фермы.

Нумерацию узлов расчетной схемы фермы рекомендуется выполнять с левого конца фермы снизу вверх. В этой же последовательности выполняется нумерация узловых перемещений в выбранной общей системе координат X^0Y^0 и элементов.

1.2. Вычисление матрицы жесткости элемента фермы в местной системе координат

Основным в методе конечных элементов является формирование матрицы жесткости элемента, которая устанавливает связь между узловыми силами элемента и перемещениями его узлов.

Стержни фермы согласно определению работают на растяжение или сжатие. В связи с этим, в качестве конечного элемента для моделирования фермы может быть использован стержень с одной степенью свободы в узле, направленной вдоль его оси.

Для получения матрицы жесткости конечного элемента необходимо задаться направлениями его возможных узловых перемещений. При этом предполагается, чтобы выбранные направления возможных узловых перемещений в начале и в конце стержня совпадали. Далее необходимо построить эпюры внутренних силовых факторов от последовательных единичных перемещений узлов по выбранным направлениям и определить реакции в узлах конечного элемента. При этом реакция положительная, если она совпадает с выбранным (положительным) перемещением в узле. Определенные таким образом реакции в узлах от единичных перемещений определяют матрицу жесткости элемента в местной системе координат XY. Порядок матрицы жесткости элемента равен числу степеней свободы его узлов.

Абсолютная деформация стержня при растяжении-сжатии определяется выражением $\Delta\ell = \dfrac{N\ell}{EF}$, т. е. при $\Delta\ell = 1$ имеем $N = \dfrac{EF}{\ell}$.

На рис. 1, а) приведен стержневой конечный элемент в местной системе координат XY с принятыми положительными осевыми направлениями узловых перемещений Z_1 и Z_2, которые и определяют размерность матрицы жесткости элемента, равную 2×2.

Для определения матрицы жесткости K_r, компоненты которой представляют собой реакции в узлах конечного элемента от единичных перемещений, построены эпюры нормальных сил от последовательных осевых перемещений узлов: $Z_1 = 1$ и $Z_2 = 1$, приведенные на рис. 1, б), где E – модуль упругости 1-го рода, F – площадь поперечного сечения стержня.

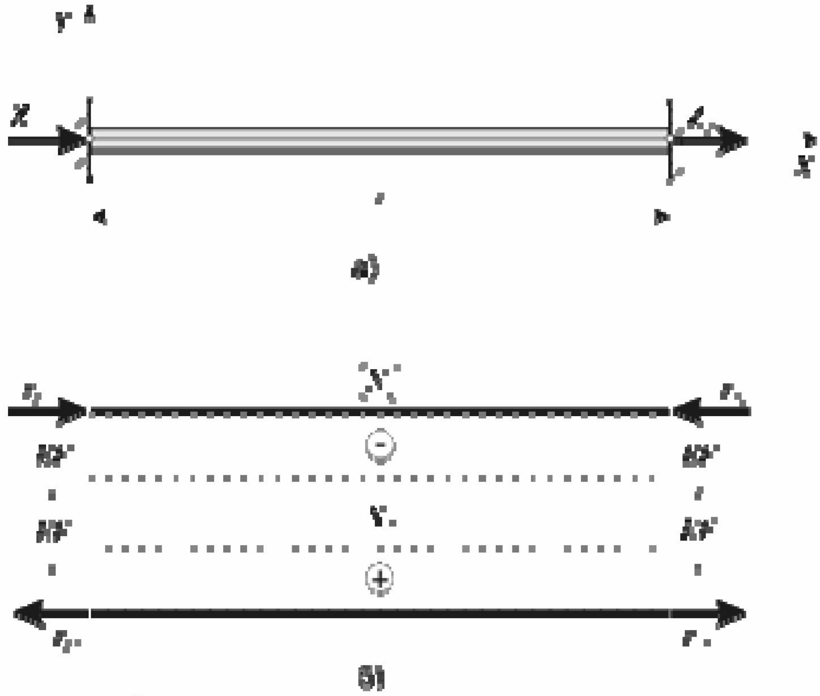

Рис. 1. Эпюра нормальных сил от принятых положительных единичных перемещений узлов элемента

Эпюры нормальных сил позволяют определить реакции в узлах элемента, направления которых также показаны на рис. 1, б). При этом реакция положительна в том случае, если ее направление совпадает с принятым положительным перемещением в узле. Определенные таким образом реакции определяют матрицу жесткости элемента в местной системе координат:

$$K_r = \begin{Vmatrix} \frac{EF}{\ell} & -\frac{EF}{\ell} \\ -\frac{EF}{\ell} & \frac{EF}{\ell} \end{Vmatrix} = \frac{EF}{\ell} \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}. \qquad (1)$$

1.3. Вычисление матрицы ортогонального преобразования координат элементов

Для каждого элемента расчетной схемы определяется угол α между осью X местной системы координат и осью X^0 общей системы координат (рис. 2). При этом местную систему координат XY необходимо помещать в узел элемента с меньшим порядковым номером в расчетной схеме фермы.

Рис. 2. Ориентация осей общей и местной систем координат

Стержни фермы ориентированы произвольно на плоскости, т.е. направления узловых сил в местной системе координат не будут совпадать с направлением осей общей системы координат, и поэтому в узле плоской фермы в общей системе координат две степени свободы. В связи с этим размерность матрицы жесткости элемента в общей системе координат 4×4. Преобразование матрицы жесткости элемента из местной системы координат в общую осуществляется с помощью матрицы ортогонального преобразования координат T_r.

Матрица ортогонального преобразования координат конечного элемента стержневого типа в блочной форме имеет вид

$$T_r = \begin{Vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{Vmatrix}, \tag{2}$$

где число матриц направляющих косинусов λ равно числу узлов конечного элемента.

Матрица направляющих косинусов осей элемента λ в общем виде для выбранной последовательности степеней свободы узла конечного элемента фермы будет

$$\lambda = \left\| \lambda_{XX^0} \quad \lambda_{XY^0} \right\|, \tag{3}$$

где λ_{XX^0} – косинус угла между осями X и X^0 и т.д.

Таким образом, число строк матрицы T_r определяется количеством степеней свободы элемента в местной системе координат, а число столбцов – количеством степеней свободы в общей системе координат, т.е. размерность матрицы ортогонального преобразования координат элемента фермы 2×4.

Из рис. 2 следует $\lambda = \left\| cos\,\alpha \quad sin\,\alpha \right\|$, следовательно, матрица ортогонального преобразования координат элемента (2) будет

$$T_r = \begin{Vmatrix} cos\,\alpha & sin\,\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & cos\,\alpha & sin\,\alpha \end{Vmatrix}. \tag{4}$$

Преобразование к общей системе координат X^0Y^0 матриц жесткости элементов необходимо для формирования матрицы жесткости конструкции и для последующего составления уравнений равновесия.

1.4. Вычисление матриц жесткости элементов в общей системе координат

Матрицы жесткости элементов в общей системе координат вычисляются по формуле:

$$K_r^0 = T_r^T K_r T_r, \tag{5}$$

где T_r^T – транспонированная матрица ортогонального преобразования координат r-го элемента.

1.5. Формирование квазидиагональной матрицы жесткости конструкции

Квазидиагональная матрица жесткости конструкции $\overline{K}^0$ формируется из матриц жесткости элементов в общей системе координат следующим образом:

$$\overline{K}^0 = \begin{Vmatrix} K_1^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_2^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_n^0 \end{Vmatrix}, \qquad (6)$$

где n – количество элементов в расчетной схеме фермы.

Матрица $\overline{K}^0$ содержит жесткостные параметры конечных элементов расчетной схемы конструкции, физический смысл которых – реакции в узлах от единичных перемещений.

1.6. Формирование матрицы соответствий конструкции и матрицы жесткости конструкции

Одной из важнейших задач при расчете конструкции методом конечных элементов является автоматическое формирование матрицы жесткости конструкции. Существуют различные алгоритмы формирования матрицы, каждый из которых имеет свои достоинства и недостатки.

Рассмотрим способ формирования матрицы жесткости конструкции на основе так называемой матрицы соответствий A, с помощью которой можно задать взаимную связь элементов конструкции. Матрица A имеет размеры $M \times L$, где M – количество перемещений для всех элементов конструкции, L – количество неизвестных (число перемещений конструкции).

Матрица соответствий A содержит топологическую информацию, указывающую адрес, по которому должны быть распределены компоненты матриц жесткости отдельных элементов K_r^0 на поле матрицы жесткости конструкции K^0 и просуммированы в соответствии с условиями совместности деформации узлов расчетной схемы конструкции.

Матрица соответствий конструкции A формируется из матриц соответствий элементов:

$$A = \begin{Vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ \dots \\ A_n \end{Vmatrix}. \tag{7}$$

Матрица соответствий элемента A_r состоит из единиц, число которых равно числу степеней свободы элемента в общей системе координат, и нулей. В блочной форме матрица соответствий элемента имеет вид:

$$\begin{array}{c} A_r = \begin{Vmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{Vmatrix} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix}\, \textit{номера узлов элемента}\,, \\ \qquad\quad i \quad\; j \\ \textit{номера узлов конструкции} \end{array} \tag{8}$$

где E – единичная матрица размерностью 2×2. Положение матриц E на поле матриц A_r определяется элементами, расположенными на пересечении однозначных номеров узлов конструкции и номеров узлов элемента.

Формирование матрицы жесткости конструкции осуществляется следующей процедурой

$$K^0 = A^T \overline{K}^0 A, \tag{9}$$

но с учетом того, что матрица A может достигать больших размеров; в ряде случаев удобнее формировать матрицу жесткости конструкции в следующем виде

$$K^0 = \sum_{r=1}^{n} A_r^T K_r^0 A_r\,. \tag{10}$$

1.7. Формирование системы уравнений равновесия

Общее количество уравнений, определяющих деформированное состояние конструкции, равно числу узлов в расчетной схеме, умноженному на число степеней свободы узла.

Система уравнений равновесия имеет вид:

$$K^0 Z^0 = P^0, \tag{11}$$

где Z^0 – вектор узловых перемещений конструкции в общей системе координат.

Число элементов в векторе нагрузки P^0 равно числу узловых перемещений в расчетной схеме фермы. При этом положительное направление сил в векторе нагрузки совпадает с выбранным положительным направлением перемещений и наоборот. Если в узле нет нагрузки, то элементы вектора с соответствующими номерами узловых перемещений равны нулю.

Для возможности обращения матрицы жесткости конструкции K^0 ее необходимо модифицировать, т.е. ввести в систему уравнений (11) кинематические закрепления задачи. При кинематическом закреплении соответствующим элементам строк столбцов матрицы K^0 присваиваются нулевые значения, а элемент главной диагонали становится единичным. Очевидно, возможно и исключение этих уравнений, определяющих зависимость нагрузки от реакции опор.

1.8. Определение узловых перемещений и внутренних силовых факторов

Решением системы уравнений равновесия определяется вектор узловых перемещений конструкции Z^0:

$$Z^0 = K^{0^{-1}} P^0, \tag{12}$$

который распределяется по элементам расчетной схемы следующим образом:

$$\overline{Z}^0 = AZ^0, \text{ или поэлементно } \overline{Z}^0_r = A_r Z^0. \tag{13}$$

Вектор внутренних силовых факторов конструкции в общей системе координат определяется следующим произведением матриц [1]:

$$\overline{S}^0 = \overline{K}^0 A\left(A^T \overline{K}^0 A\right)^{-1} P^0 = \overline{K}^0 A K^{0^{-1}} P^0 = \overline{K}^0 A Z^0 = \overline{K}^0 \overline{Z}^0, \tag{14}$$

а по элементам расчетной схемы внутренние усилия в общей системе координат распределятся

$$\overline{S}^0_r = K^0_r \overline{Z}^0_r. \tag{15}$$

Узловые силы и перемещения преобразуются из общей в местную систему координат с помощью матрицы ортогонального преобразования координат элемента T_r следующим образом:

$$S_r = T_r \overline{S}^0_r, \; Z_r = T_r Z^0_r. \tag{16}$$

2. Пример расчета фермы

Требуется выполнить расчет фермы, приведенной на рис. 3, а) методом конечных элементов. Расчетная схема фермы с нумерацией элементов, узлов и узловых перемещений в общей системе координат приведена на рис. 3, б). Модуль упругости первого рода принять равным $E = 2 \cdot 10^6 \; \dfrac{кгс}{см^2}$.

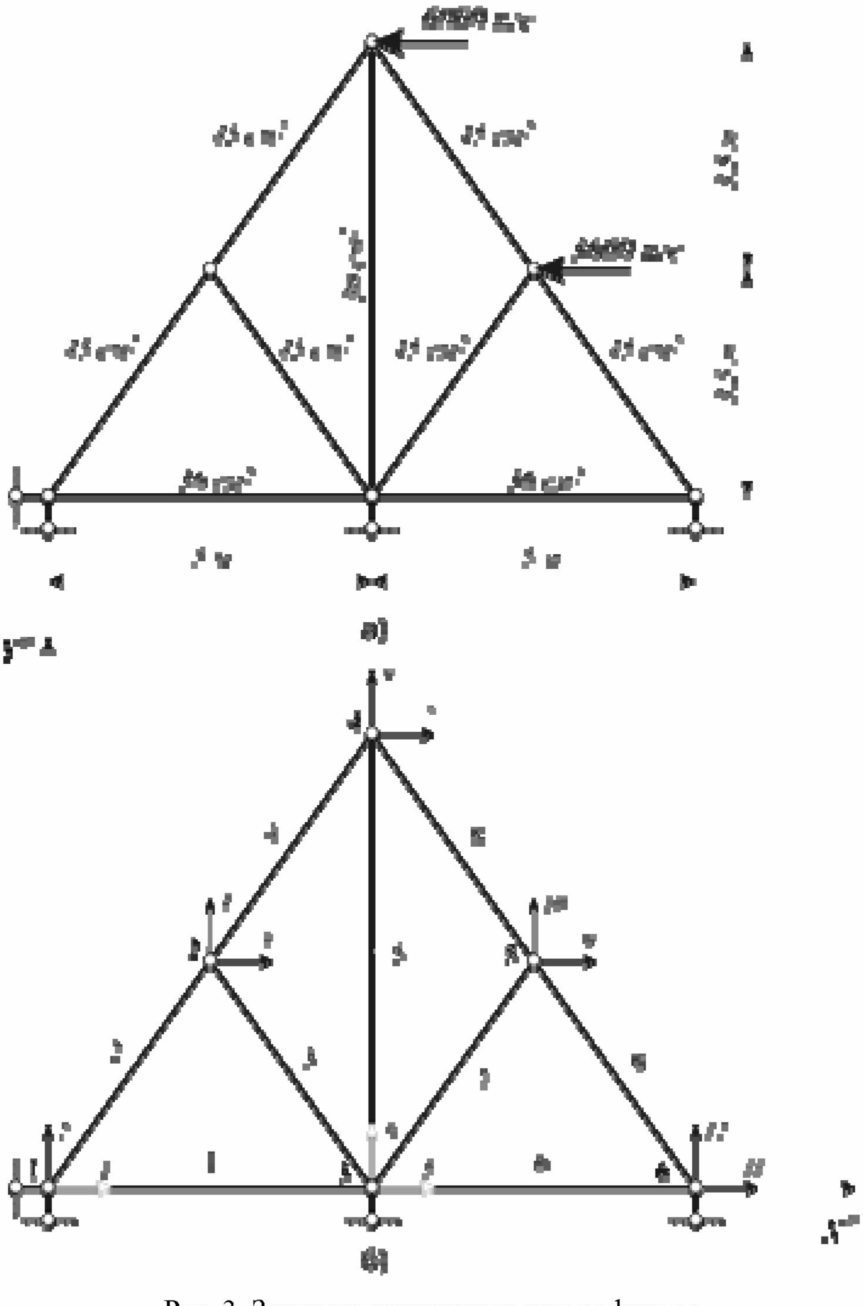

Рис. 3. Заданная и расчетная схемы фермы

Число узлов фермы равно шести, а количество конечных элементов $n = 9$.

Матрицы жесткости элементов в местной системе координат вычисляем по общему виду (1):

$$K_1 = K_6 = \begin{Vmatrix} 144000 & -144000 \\ -144000 & 144000 \end{Vmatrix},$$

$$K_2 = K_3 = K_4 = K_7 = K_8 = K_9 = \begin{Vmatrix} 209245{,}7497 & -209245{,}7497 \\ -209245{,}7497 & 209245{,}7497 \end{Vmatrix},$$

$$K_5 = \begin{Vmatrix} 85714{,}2857 & -85714{,}2857 \\ -85714{,}2857 & 85714{,}2857 \end{Vmatrix},$$

где длины элементов $\ell_1 = \ell_6 = 500\,см$, $\ell_5 = 700\,см$, $\ell_2 = \ell_3 = \ell_4 = \ell_7 = \ell_8 =$ $= \ell_9 = \sqrt{250^2 + 350^2} = 50\sqrt{74}\;см \approx 410{,}1163\,см$.

Угол между осями X и X^0 определяется для каждого элемента расчетной схемы, помещая местную систему координат XY в узел с меньшим порядковым номером. Затем по выражению (4) определяются матрицы ортогонального преобразования координат элементов:

$$T_1 = T_6 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix},\; cos\,\alpha = 1,\; sin\,\alpha = 0,$$

$$T_2 = T_4 = T_7 = \begin{Vmatrix} 0{,}5812 & 0{,}8137 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5812 & 0{,}8137 \end{Vmatrix},\; cos\,\alpha = \frac{5}{\sqrt{74}},\; sin\,\alpha = \frac{7}{\sqrt{74}},$$

$$T_5 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},\; cos\,\alpha = 0,\; sin\,\alpha = 1,$$

$$T_3 = T_8 = T_9 = \begin{Vmatrix} 0{,}5812 & -0{,}8137 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5812 & -0{,}8137 \end{Vmatrix},$$

$$cos\,\alpha = \frac{5}{\sqrt{74}},\; sin\,\alpha = -\frac{7}{\sqrt{74}},$$

Матрицы жесткости элементов в общей системе координат вычислим по формуле (5):

$$K_1^0 = K_6^0 = \begin{Vmatrix} 144000 & 0 & -144000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -144000 & 0 & 144000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$K_2^0 = K_4^0 = K_7^0 = \begin{Vmatrix} 70691{,}1317 & 98967{,}5843 & -70691{,}1317 & -98967{,}5843 \\ 98967{,}5843 & 138554{,}6181 & -98967{,}5843 & -138554{,}6181 \\ -70691{,}1317 & -98967{,}5843 & 70691{,}1317 & 98967{,}5843 \\ -98967{,}5843 & -138554{,}6181 & 98967{,}5843 & 138554{,}6181 \end{Vmatrix},$$

$$K_5^0 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 85714{,}2857 & 0 & -85714{,}2857 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 85714{,}2857 & 0 & 85714{,}2857 \end{Vmatrix},$$

$$K_3^0 = K_8^0 = K_9^0 = \begin{Vmatrix} 70691{,}1317 & -98967{,}5843 & -70691{,}1317 & 98967{,}5843 \\ -98967{,}5843 & 138554{,}6181 & 98967{,}5843 & -138554{,}6181 \\ -70691{,}1317 & 98967{,}5843 & 70691{,}1317 & -98967{,}5843 \\ 98967{,}5843 & -138554{,}6181 & -98967{,}5843 & 138554{,}6181 \end{Vmatrix}.$$

Определим матрицы соответствий элементов конструкции:

$$A_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$A_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$A_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$A_4 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$A_5 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$A_6 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$A_7 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$A_8 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$A_9 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Полученные матрицы жесткости элементов в общей системе координат K_r^0 совместно с матрицами соответствий элементов конструкции A_r дает возможность получить матрицу жесткости конструкции K^0 по выражению (10).

Из удовлетворения граничным условиям $Z_1 = 0$, $Z_2 = 0$, $Z_6 = 0$ и $Z_{12} = 0$, соответствующим элементам матрицы жесткости конструкции K^0, расположенным на главной диагонали, присваиваются единицы, а строкам и столбцам – нулевые значения. Модифицированная таким образом матрица жесткости конструкции K^0 используется в системе уравнений равновесия (11). Аналогичного результата можно достигнуть, исключив соответствующие строки и столбцы из системы уравнений равновесия.

$$K^0 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 212073,3950 & 98967,5843 & -70691,1317 & 0 & -70691,1317 & -98967,5843 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 98967,5843 & 415663,8542 & 98967,5843 & 0 & -98967,5843 & -138554,6181 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -70691,1317 & 98967,5843 & 429382,2633 & 0 & 0 & 0 & -70691,1317 & -98967,5843 & -144000,0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -70691,1317 & -98967,5843 & 0 & 0 & 141382,2633 & 0 & -70691,1317 & 98967,5843 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -98967,5843 & -138554,6181 & 0 & 0 & 0 & 362823,5219 & 98967,5843 & -138554,6181 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -70691,1317 & 0 & -70691,1317 & 98967,5843 & 212073,395 & -98967,5843 & -70691,1317 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -98967,5843 & 0 & 98967,5843 & -138554,6181 & -98967,5843 & 415663,8542 & 98967,5843 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -144000,0000 & 0 & 0 & 0 & -70691,1317 & 98967,5843 & 214691,1317 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$Z^0 = \begin{Vmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \\ Z_6 \\ Z_7 \\ Z_8 \\ Z_9 \\ Z_{10} \\ Z_{11} \\ Z_{12} \end{Vmatrix}, \quad P^0 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -6000,00 \\ 0 \\ -3600,00 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Решая систему уравнений равновесия (11), получим вектор перемещений в общей системе координат

$$Z^0 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ -0{,}0464622 \\ -0{,}0036541 \\ -0{,}0413465 \\ 0 \\ -0{,}1327042 \\ 0{,}0211060 \\ -0{,}0978819 \\ 0{,}0221946 \\ -0{,}0701931 \\ 0 \end{Vmatrix} (см).$$

Распределение перемещений в общей системе координат по элементам определим по выражению (13):

$$\overline{Z}_1^0 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ -0{,}0413465 \\ 0 \end{Vmatrix},\ \overline{Z}_2^0 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ -0{,}0464622 \\ -0{,}0036541 \end{Vmatrix},\ \overline{Z}_3^0 = \begin{Vmatrix} -0{,}0464622 \\ -0{,}0036541 \\ -0{,}0413465 \\ 0 \end{Vmatrix},$$

$$\overline{Z}_4^0 = \begin{Vmatrix} -0{,}0464622 \\ -0{,}0036541 \\ -0{,}1327042 \\ 0{,}0211060 \end{Vmatrix},\ \overline{Z}_5^0 = \begin{Vmatrix} -0{,}0413465 \\ 0 \\ -0{,}1327042 \\ 0{,}0211060 \end{Vmatrix},\ \overline{Z}_6^0 = \begin{Vmatrix} -0{,}0413465 \\ 0 \\ -0{,}0701931 \\ 0 \end{Vmatrix},$$

$$\overline{Z}_7^0 = \begin{Vmatrix} -0{,}0413465 \\ 0 \\ -0{,}0978819 \\ 0{,}0221946 \end{Vmatrix},\ \overline{Z}_8^0 = \begin{Vmatrix} -0{,}1327042 \\ 0{,}0211060 \\ -0{,}0978819 \\ 0{,}0221946 \end{Vmatrix},\ \overline{Z}_9^0 = \begin{Vmatrix} -0{,}0978819 \\ 0{,}0221946 \\ -0{,}0701931 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Векторы внутренних силовых факторов элементов конструкции в общей системе координат определяются по формуле (15), а в местной системе координат по формуле (16) (единица измерения – *кгс*):

$$\overline{S}_1^0 = \begin{Vmatrix} 5953{,}896 \\ 0 \\ -5953{,}896 \\ 0 \end{Vmatrix},\ \overline{S}_2^0 = \begin{Vmatrix} 3646{,}103 \\ 5104{,}544 \\ -3646{,}103 \\ -5104{,}544 \end{Vmatrix},\ \overline{S}_3^0 = \begin{Vmatrix} 0{,}003 \\ -0{,}004 \\ -0{,}003 \\ 0{,}004 \end{Vmatrix},$$

$$\overline{S}_4^0 = \begin{Vmatrix} 3646{,}097 \\ 5104{,}536 \\ -3646{,}097 \\ -5104{,}536 \end{Vmatrix},\ \overline{S}_5^0 = \begin{Vmatrix} 0 \\ -1809{,}086 \\ 0 \\ 1809{,}086 \end{Vmatrix},\ \overline{S}_6^0 = \begin{Vmatrix} 4153{,}910 \\ 0 \\ -4153{,}910 \\ 0 \end{Vmatrix},$$

$$\overline{S}_7^0 = \begin{Vmatrix} 1800{,}005 \\ 2520{,}008 \\ -1800{,}005 \\ -2520{,}008 \end{Vmatrix},\ \overline{S}_8^0 = \begin{Vmatrix} -2353{,}892 \\ 3295{,}448 \\ 2353{,}892 \\ -3295{,}448 \end{Vmatrix},\ \overline{S}_9^0 = \begin{Vmatrix} -4153{,}899 \\ 5815{,}458 \\ 4153{,}899 \\ -5815{,}458 \end{Vmatrix};$$

$$S_1 = \begin{Vmatrix} 5953{,}896 \\ -5953{,}896 \end{Vmatrix},\ S_2 = \begin{Vmatrix} 6272{,}993 \\ -6272{,}993 \end{Vmatrix},\ S_3 = \begin{Vmatrix} 0{,}005 \\ -0{,}005 \end{Vmatrix},$$

$$S_4 = \begin{Vmatrix} 6272{,}983 \\ -6272{,}983 \end{Vmatrix},\ S_5 = \begin{Vmatrix} -1809{,}086 \\ 1809{,}086 \end{Vmatrix},\ S_6 = \begin{Vmatrix} 4153{,}910 \\ -4153{,}910 \end{Vmatrix},$$

$$S_7 = \begin{Vmatrix} 3096{,}847 \\ -3096{,}847 \end{Vmatrix},\ S_8 = \begin{Vmatrix} -4049{,}788 \\ 4049{,}788 \end{Vmatrix},\ S_9 = \begin{Vmatrix} -7146{,}638 \\ 7146{,}638 \end{Vmatrix}.$$

Очевидно, что на результаты вычислений оказывают влияние ошибки округления, поэтому компоненты векторов $\overline{S}_3^0$ и S_3 можно принимать равными нулю.

По значениям векторов S_r построена эпюра нормальных сил (рис. 4).

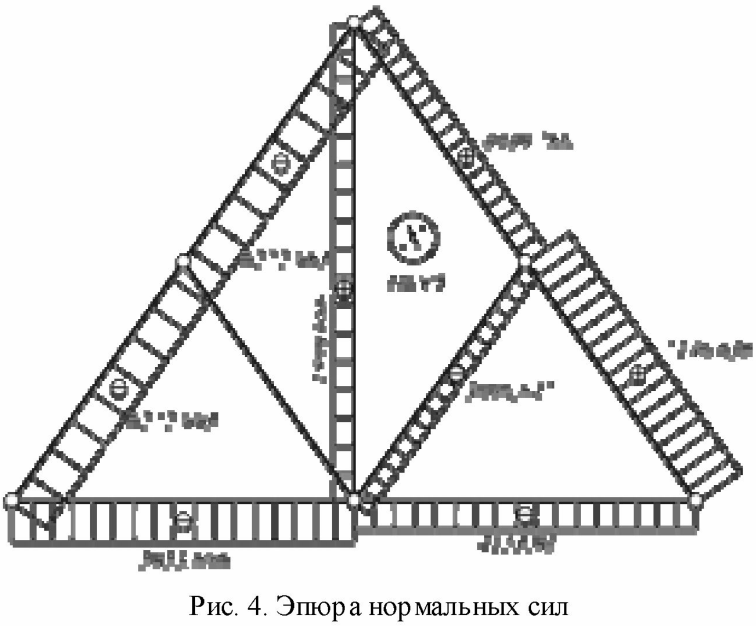

Рис. 4. Эпюра нормальных сил

Методом вырезания узлов определим реакции опор (рис. 5). Значения косинуса и синуса угла наклона α равны: $cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{74}} = 0{,}5812$, $sin\,\alpha = \frac{7}{\sqrt{74}} = 0{,}8137$.

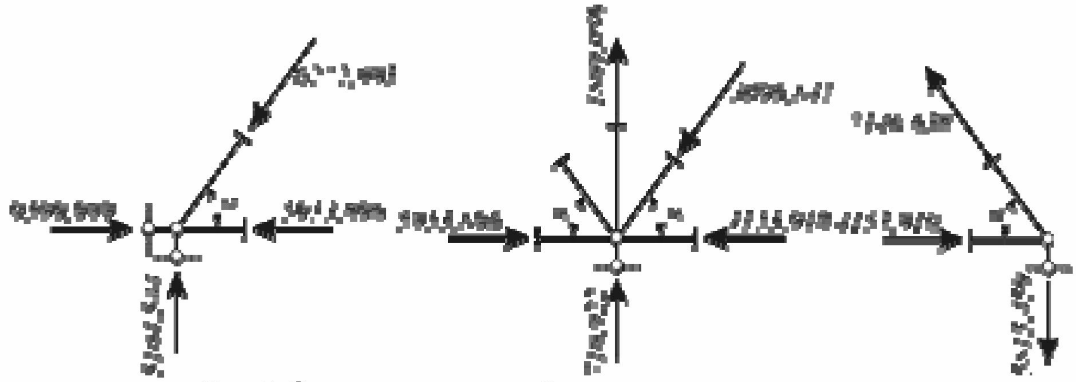

Рис. 5. Определение реакций методом вырезания узлов

В заключение расчета фермы сделаем статическую проверку (рис. 6).

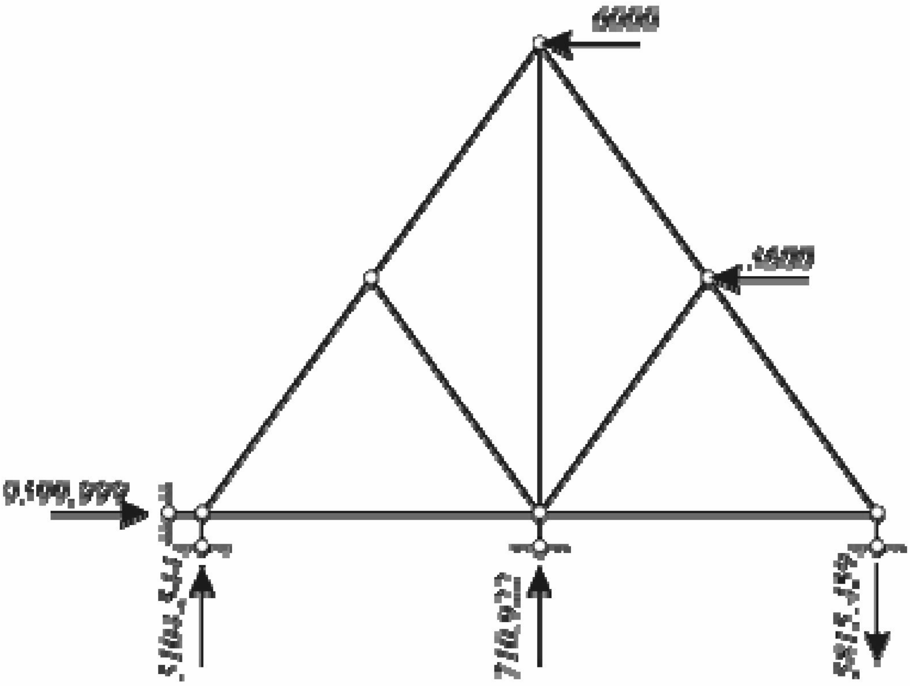

Рис. 6. Статическая проверка фермы

$$\sum X = 9599{,}999 - 6000 - 3600 = 9599{,}999 - 9600 = -0{,}001 \approx 0 .$$

$$\sum Y = 5104{,}544 + 710{,}922 - 5815{,}459 = 5815{,}466 - 5815{,}459 = 0{,}007 \approx 0 .$$

3. Требования по выполнению и оформлению расчетно-проектировочных работ

1. Студент выполняет необходимое количество заданий в соответствии с учебным планом. Номера схем и исходных данных задаются преподавателем каждому студенту индивидуально.

2. Работы выполняются на стандартных листах писчей бумаги (формат А4) на одной стороне листа или в тетради; на обложке должны быть четко написаны: фамилия, имя и отчество студента (полностью), название факультета, шифр группы (для студентов БФО – учебный шифр и почтовый адрес).

3. Задание следует выполнять чернилами, четким почерком. Рисунки выполняются карандашом или чернилами.

4. Перед выполнением каждого задания необходимо написать его тему, условие (техническое задание) с числовыми данными, составить расчетную схему в масштабе и указать на ней в числах все величины, необходимые для расчета.

5. Решение должно сопровождаться краткими, без сокращения слов, объяснениями и чертежами, на которых все входящие в расчет величины должны быть показаны в числах.

6. При вычислениях в формулы подставляются значения входящих в них параметров, а затем приводятся окончательные результаты с указанием единиц измерений найденных величин.

7. Рассчитываемый параметр не следует вычислять с большим количеством значащих чисел после запятой, вычисления должны соответствовать необходимой точности.

8. После проверки преподавателем расчетного задания студент должен исправить в нем все отмеченные ошибки и выполнить все сделанные ему указания.

Заключение

В настоящее время метод конечных элементов (МКЭ) является самым популярным методом решения практических задач механики деформируемого твердого тела. С его помощью проводят расчеты по определению напряженно-деформированного состояния и несущей способности реальных конструкций самых различных отраслей техники и строительства. МКЭ предоставляет возможность моделировать такие сложные процессы как разрушение, удар, потерю устойчивости, штамповка, вытяжка и т.д.

Причина популярности МКЭ кроется в его алгоритмичности и хорошей совместимости с системами автоматического проектирования (САПР) и их твердотельным моделированием. В результате получается средство для осуществления полного цикла проектирования – производство в электронной форме.

В настоящих методических указаниях рассмотрен вопрос построения конечно-элементных моделей стержневых ферменных систем, что является, по сути, классическим методом перемещений строительной механики. Овладев методом расчета ферменных конструкций с помощью конечных элементов, студент без излишних затруднений сможет перейти к вопросу расчета других стержневых конструкций, таких как балки, арки, плоские и пространственные рамы.

Приложение

Задание к расчетно-проектировочной работе «Расчет фермы методом конечных элементов»

Техническое задание

Плоская ферма, состоящая из стальных стержней (модуль упругости $E = 2 \cdot 10^6 \dfrac{кгс}{см^2}$), нагружена сосредоточенными силами. Плоскости нагружения совпадают с главными плоскостями стержней фермы. Схемы нагружения ферм представлены на рис. П.1–П.3, значения исходных параметров приведены в таблице П.1. Площади поперечных сечений горизонтальных и наклонных стержней зависят от площадей поперечных сечений вертикальных стержней:

$$F_г = kF_в,\ F_н = cF_в.$$

Таблица П.1

Номер строки	d, м	β	$F_в$, $см^2$	k	c	P, т	α
1	4	3/4	30	0,8	1,0	4	2,0
2	3	4/3	20	1,5	2,0	6	0,5
3	4	1	20	1,0	2,0	6	0,8
4	3	1	30	1,0	1,5	8	0,6

Требуется:

1) для заданной фермы выбрать расчетную схему, пронумеровав элементы, узлы и узловые перемещения;

2) для каждого элемента определить матрицу жесткости в местной системе координат (МСК), матрицу ортогонального преобразования и матрицу жесткости элемента в общей системе координат (ОСК), а также матрицу соответствий;

3) определить матрицу жесткости конструкции в ОСК;

4) определив узловые перемещения из решения уравнений равновесия с учетом граничных условий, определить вектора внутренних усилий для каждого элемента в ОСК и МСК;

5) построить эпюру нормальных сил;

6) определив значения реакций опор методом вырезания узлов, выполнить проверку статического равновесия фермы.

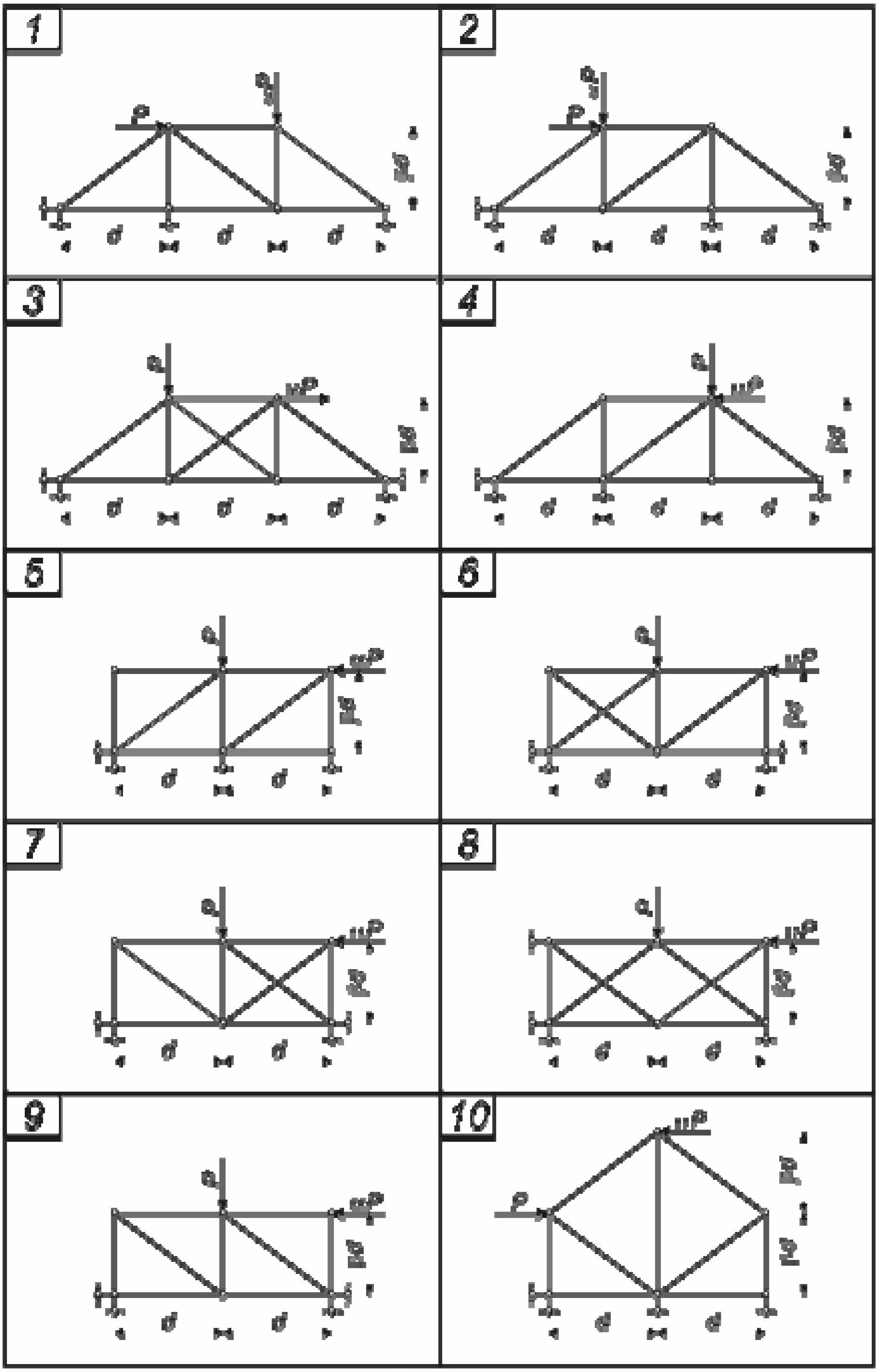

Рис. П.1

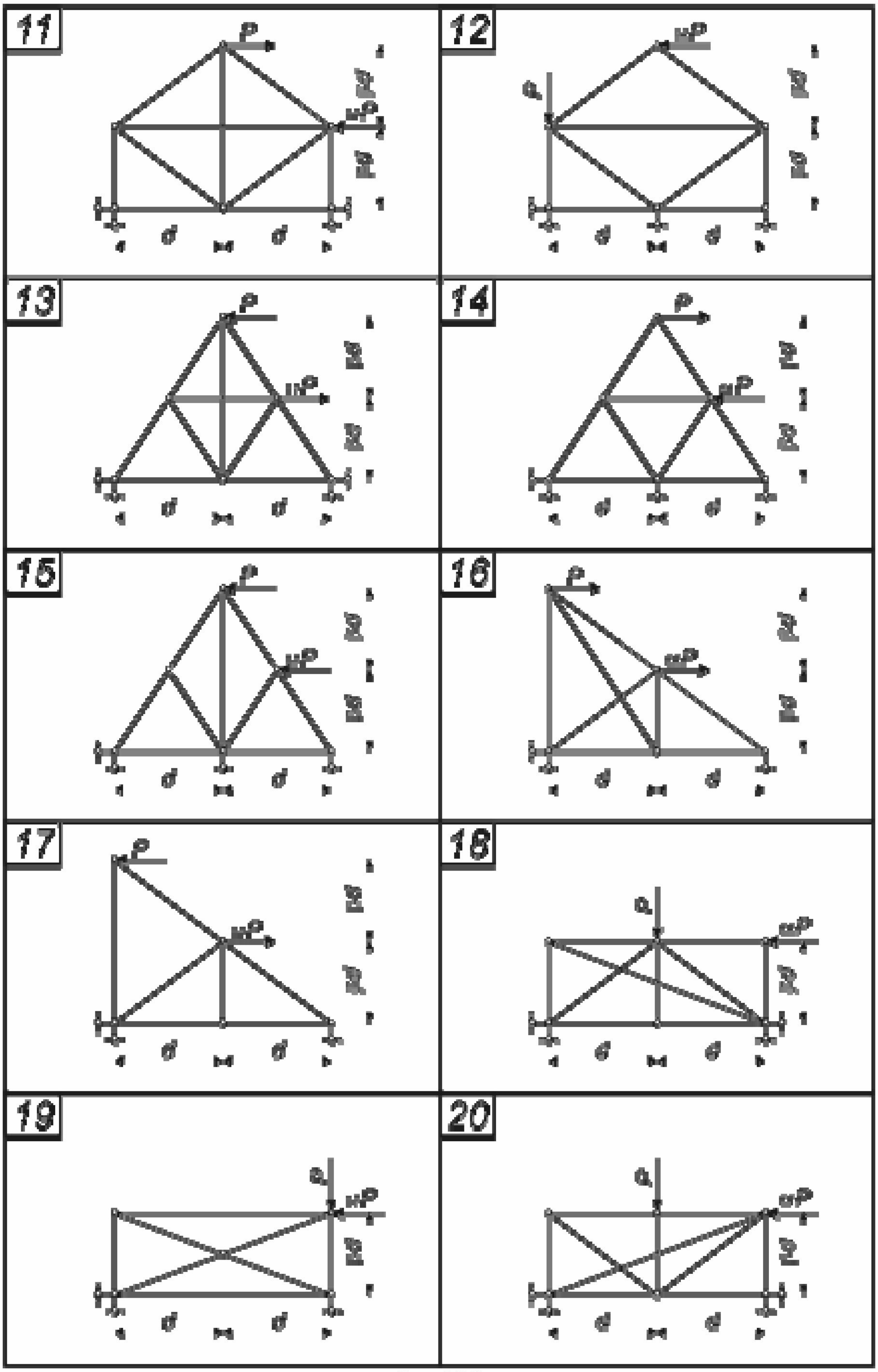

Рис. П.2

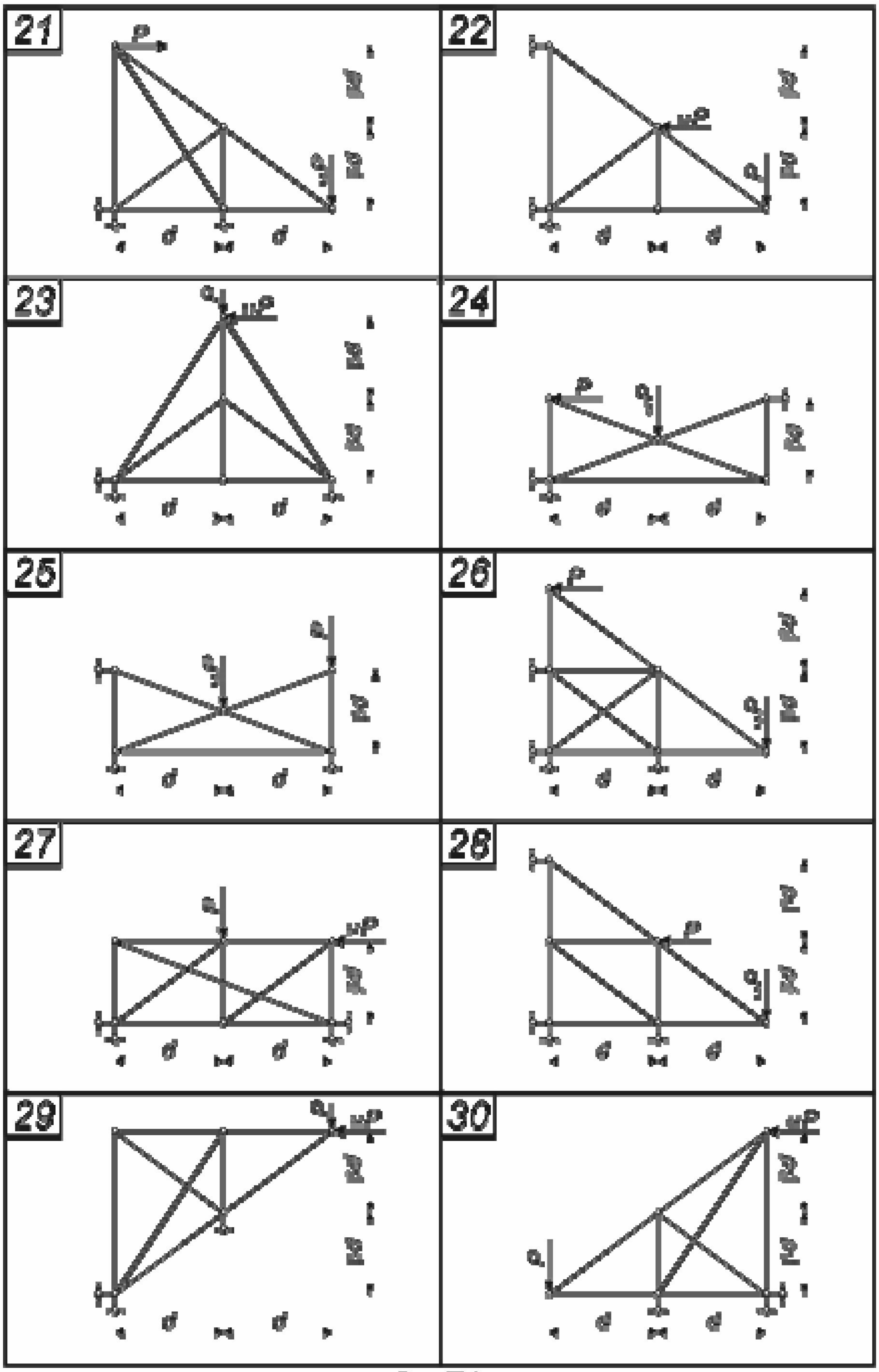

Рис. П.3

Библиографический список

1. Аргирос, Д. Современные методы расчета сложных статически неопределимых систем / Д. Аргирос. – Л.: Судпромгиз, 1961. – 873 с.
2. Дарков, А. В. Строительная механика: учебник / А. В. Дарков, Н. Н. Шапошников. – 9-е изд., испр. – СПб.: Изд-во «Лань», 2004. – 656 с.
3. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М.: Изд-во «Мир», 1975. – 541 с.