

ОПД.Р.03 СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА
РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ ПЛОСКОЙ РАМЫ МЕТОДОМ ПЕРЕ-
МЕЩЕНИЙ

Методические указания и пример расчета

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ РАСЧЕТА СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ	4
1.1. Кинематический анализ.....	5
1.2. Построение основной системы.....	7
1.3. Схемы нагружения однопролетных статически неопределимых балок.....	8
1.4. Канонические уравнения метода перемещений.....	17
1.5. Определение коэффициентов r_{ik} и свободных членов R_{ip} канонических уравнений.....	19
1.5.1. Плоская рама, степень кинематической неопределимости которой равна единице.....	19
1.5.2. Плоская рама, степень кинематической неопределимости которой равна двум.....	24
1.6. Определение внутренних силовых факторов в поперечных сечениях стержневых участков заданной системы.....	31
1.6.1. Плоская рама, степень кинематической неопределимости которой равна единице.....	31
1.6.2. Плоская рама, степень кинематической неопределимости которой равна двум.....	34
2. ПРИМЕР РАСЧЕТА СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ ПЛОСКОЙ РАМЫ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ	38
2.1. Определение степени кинематической неопределимости.....	38
2.2. Построение основной системы.....	39
2.3. Определение опорных реакций и изгибающего момента при единичном угловом перемещении дополнительной связи в узле 1 и единичном линейном перемещении дополнительной связи в узле 2.....	39
2.4. Определение опорных реакций и изгибающего момента от нагрузки.....	41
2.5. Определение действительных перемещений z_1 и z_2 узлов 1 и 2.....	41
2.6. Определение действительных значений опорных реакций в заданной стержневой системе.....	42
2.7. Определение внутренних силовых факторов в поперечных сечениях плоской рамы.....	44
2.8. Проверка решения.....	45
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	46
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	46

ВВЕДЕНИЕ

Расчет статически неопределимых стержневых систем является важным разделом при изучении дисциплины «Строительная механика». Связано это с тем, что статически неопределимые системы широко представлены в различных конструкциях. Однако если в статически определимых системах для определения внутренних силовых факторов достаточно уравнений статического равновесия, то в статически неопределимых системах найти значения внутренних силовых факторов без дополнительных уравнений уже невозможно.

Статически неопределимая система имеет определенное количество лишних связей, которые определяют степень статической неопределимости системы. Расчет статически неопределимых стержневых систем может осуществляться различными методами, суть которых заключается в поиске дополнительных уравнений, которые вместе с уравнениями статического равновесия полностью позволяют решить поставленную задачу. В практике расчета статически неопределимых систем наиболее распространены *метод сил* и *метод перемещений*.

Данные методические указания излагают основные положения расчета плоских статически неопределимых стержневых систем методом перемещений. Рассмотрены примеры расчета статически неопределимой плоской рамы.

Методические указания могут быть использованы для самостоятельной работы студентов, при выполнении расчетно-проектировочных работ, контрольных заданий, проведении практических занятий.

1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ РАСЧЕТА СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

При использовании метода сил расчет статически неопределимых систем основывается на том, что определяется степень статической неопределимости, отбрасываются «лишние» связи и их действие заменяется неизвестными реакциями связей. Далее составляются канонические уравнения метода сил, определяются коэффициенты и свободные члены канонических уравнений. Решение канонических уравнений позволяет найти неизвестные реакции отброшенных лишних связей и уже традиционным методом перейти к расчету эквивалентной статически определимой системы.

При использовании метода перемещений задача решается иначе: в заданную систему для построения основной системы вводятся дополнительные угловые и линейные связи, которые компенсируются соответствующими пока неизвестными угловыми и линейными перемещениями. Далее составляются уравнения, из которых определяются неизвестные угловые и линейные перемещения. Затем по установленным угловым и линейным перемещениям определяются соответствующее им распределение внутренних сил. Принимая перемещения за неизвестные, пренебрегают влиянием продольных и поперечных сил на деформацию стержней, учитывая лишь деформацию изгиба.

В стержневых системах (рамах) углы поворота и линейные перемещения концов стержней, жестко соединенных в узле, равны между собой. Поэтому за неизвестные при расчете статически неопределимых систем методом перемещений принимаются углы поворота жестких узлов и линейные перемещения узлов стержневой системы.

1.1. Кинематический анализ

При кинематическом анализе статически неопределимой стержневой системы устанавливается общее число n неизвестных угловых и линейных перемещений узлов стержневой системы, подлежащих определению. Общее число неизвестных угловых и линейных перемещений узлов стержневой системы n , определяет *степень кинематической неопределимости* стержневой системы.

Степень кинематической неопределимости стержневой системы равна

$$n = n_y + n_{\text{л}}, \quad (1.1)$$

где n_y – число неизвестных углов поворота жестких узлов, $n_{\text{л}}$ – число неизвестных линейных перемещений узлов.

За жесткий узел принимаются: сопряжения двух или нескольких стержней, в которых нет сквозного шарнира; сопряжения двух или нескольких стержней, в которых расположен присоединенный шарнир. В число жестких узлов не входят узлы с известными по условию задания перемещениями – жесткие закрепления и узлы с заданными перемещениями.

На рис. 1 изображены заданная схема плоской рамы (рис. 1, а) и схема для определения числа жестких узлов (рис. 1, б). Таких узлов в плоской раме шесть (на рис. 1, б жесткие узлы обозначены затененными квадратиками), т. е. $n_y = 6$. Так как линейные перемещения узла возникают из-за изгибных деформаций в стержневой системе, то, пренебрегая продольными деформациями, можно считать, что равны между собой линейные перемещения узлов 1 и 6, 2 и 5, 3 и 4, т. е. неизвестных линейных перемещений узлов всего 3 ($n_{\text{л}} = 3$).

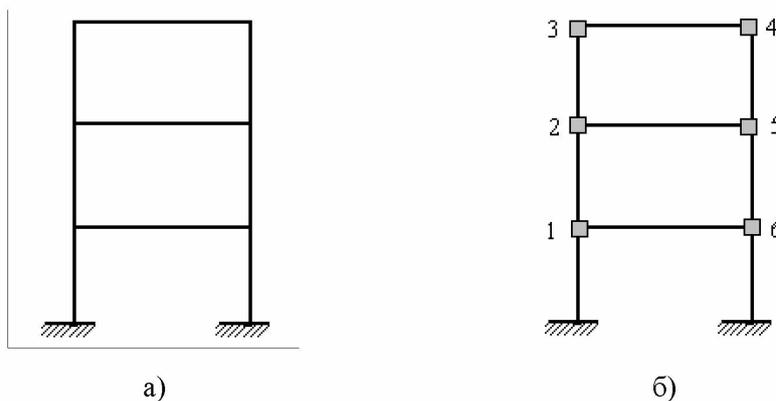


Рис. 1. Схема плоской рамы: а) заданная схема; б) схема для определения числа жестких узлов

Степень кинематической неопределимости стержневой системы равна

$$n = n_y + n_{\text{л}} = 6 + 3 = 9.$$

На рис. 2 изображены заданная схема плоской рамы со сквозными шарнирами (рис. 2, а) и схема для определения числа жестких узлов (рис. 2, б). Таких узлов в плоской раме четыре (на рис. 2, б жесткие узлы обозначены затененными квадратиками), т. е. $n_y = 4$. Так как линейные перемещения узла возникают из-за изгибных деформаций в стержневой системе, то, пренебрегая продольными деформациями, можно считать, что равны между собой линейные перемещения узлов 1 и 6, 2 и 5, 3 и 4, т. е. неизвестных линейных перемещений узлов всего 3 ($n_d = 3$).

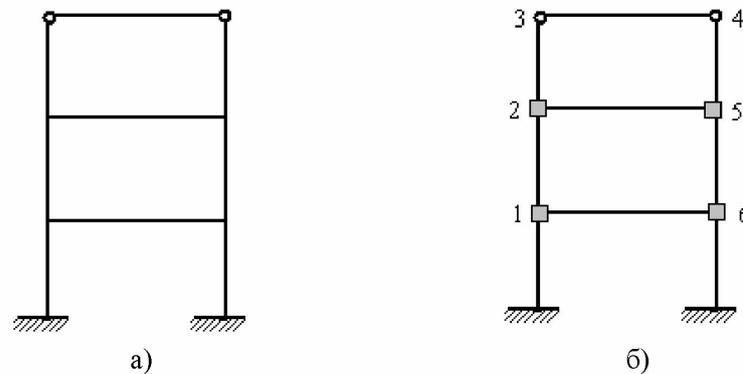


Рис. 2. Схема плоской рамы со сквозными шарнирами: а) заданная схема; б) схема для определения числа жестких узлов

Степень кинематической неопределенности стержневой системы равна

$$n = n_y + n_d = 4 + 3 = 7.$$

На рис. 3 изображены заданная схема плоской рамы со сквозными и присоединенными шарнирами (рис. 3, а) и схема для определения числа жестких узлов (рис. 3, б). Таких узлов в плоской раме четыре (на рис. 3, б жесткие узлы обозначены затененными квадратиками), т. е. $n_y = 4$. Так как линейные перемещения узла возникают из-за изгибных деформаций в стержневой системе, то, пренебрегая продольными деформациями, можно считать, что равны между собой линейные перемещения узлов 1 и 6, 2 и 5, 3 и 4, т. е. неизвестных линейных перемещений узлов всего 3 ($n_d = 3$).

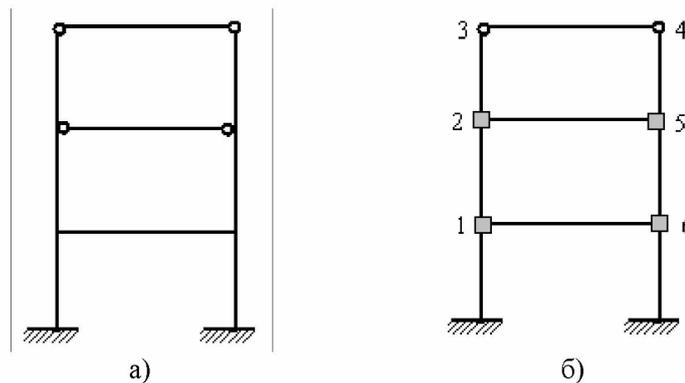


Рис. 3. Схема плоской рамы со сквозными и присоединенными шарнирами: а) заданная схема; б) схема для определения числа жестких узлов

Степень кинематической неопределимости стержневой системы равна

$$n = n_y + n_{\pi} = 4 + 3 = 7.$$

На рис. 4 изображены заданная схема плоской рамы со сквозными шарнирами (рис. 4, а) и схема для определения числа жестких узлов (рис. 4, б). Таких узлов в плоской раме четыре (на рис. 4, б жесткие узлы обозначены затененными квадратиками), т. е. $n_y = 4$. Так как линейные перемещения узла возникают из-за изгибных деформаций в стержневой системе, то, пренебрегая продольными деформациями, можно считать, что равны между собой линейные перемещения узлов 1 и 6; 7, 2, 5 и 8; 3 и 4, т. е. неизвестных линейных перемещений узлов всего 3 ($n_{\pi} = 3$).

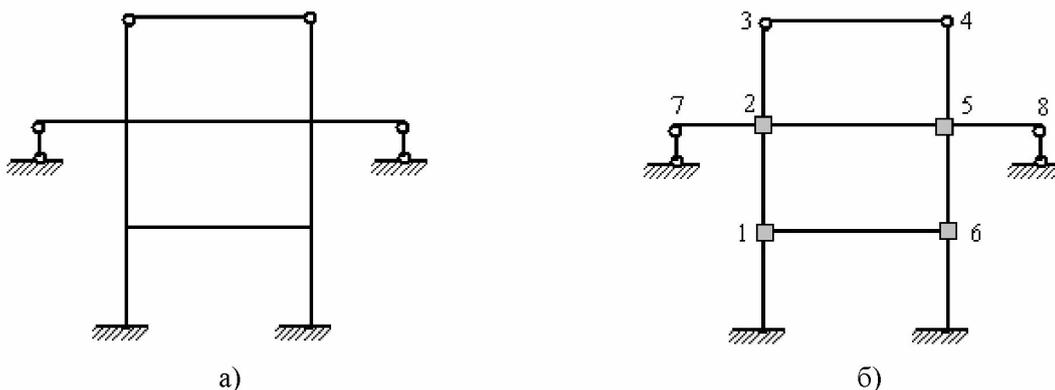


Рис. 4. Схема плоской рамы со сквозными шарнирами: а) заданная схема; б) схема для определения числа жестких узлов

Степень кинематической неопределимости стержневой системы равна

$$n = n_y + n_{\pi} = 4 + 3 = 7.$$

1.2. Построение основной системы

При расчете статически неопределимой плоской рамы методом перемещений рассматриваемая стержневая система, которую будем называть *заданной*, представляется в виде совокупности однопролетных статически неопределимых балок. Достигается это введением дополнительных угловых и линейных связей на соответствующие неизвестные угловые перемещения «жестких» узлов и неизвестные линейные перемещения узлов. Получаемая в результате этого стержневая система называется *основной системой метода перемещений*.

На рис. 5, а приведена заданная стержневая система – статически неопределимая плоская рама. Рама имеет всего один жесткий узел ($n_y = 1$). Так как линейные перемещения узла возникают из-за изгибных деформаций в стержневой системе, то, пренебрегая продольными деформациями, можно считать, что равны между собой линейные перемещения узлов 1 и 2, т. е. неизвестных линейных перемещений узлов всего 1 ($n_{\pi} = 1$).

Степень кинематической неопределимости стержневой системы равна

$$n = n_y + n_{\pi} = 1 + 1 = 2.$$

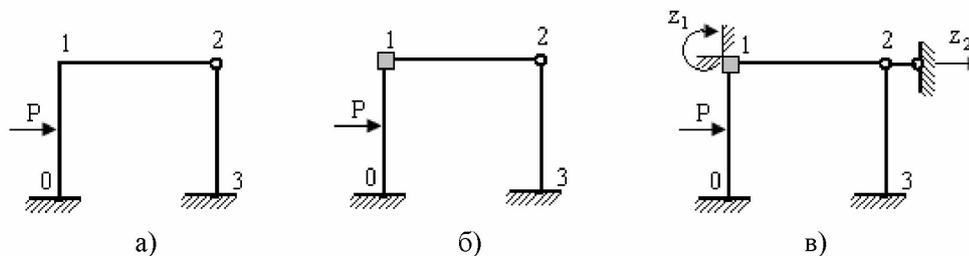


Рис. 5. Расчетные схемы плоской рамы: а) заданная система; б) схема для определения числа жестких узлов; в) основная система

На жесткий узел наложим связь типа жесткого защемления (рис. 5, в), повернув эту связь на неизвестный пока угол z_1 . На линейное перемещение узлов 1 и 2 наложим связь типа шарнирно-подвижной опоры и зададим этой опоре неизвестное пока линейное перемещение z_2 . В результате мы получим основную систему (рис. 5, в).

Неизвестные перемещения z_1 и z_2 должны быть такими, чтобы в основной системе моменты и силы во введенных связях были равны нулю:

$$R_1 = 0, \quad R_2 = 0,$$

где R_1 , R_2 – реакции введенных связей (для схемы на рис. 5 R_1 – реакция связи в виде момента, R_2 – реакция связи в виде силы).

Основная система представляет совокупность однопролетной статически неопределимой балки 0-1 с опорами типа «жесткая заделка», однопролетной статически неопределимой балки 1-2 с опорой типа «жесткая заделка» и шарнирно-неподвижной опорой, однопролетной статически неопределимой балки 3-2 с опорой типа «жесткая заделка» и шарнирно-подвижной опорой.

Рассмотрим возможные схемы нагружения однопролетных статически неопределимых балок, возникающие при этом опорные реакции и изгибающие моменты в поперечных сечениях балки.

1.3. Схемы нагружения однопролетных статически неопределимых балок

Достоинством метода перемещений является то, что при представлении основной системы в виде совокупности однопролетных статически неопределимых балок для каждой из этих балок можно воспользоваться имеющимися табличными данными для определения опорных реакций и построенными уже эпюрами изгибающих моментов в поперечных сечениях балки.

Эти сведения получены путем решения простейших схем нагружения однопролетных статически неопределимых балок на основе использования метода сил. Покажем процедуру получения таких данных на примере расчета однопролетной статически неопределимой балки с жестким защемлением и шарнирной опорой, нагруженной моментом.

Схема однопролетной статически неопределимой балки с жестким защемлением и шарнирной опорой, нагруженной моментом, представлена на рис. 6.

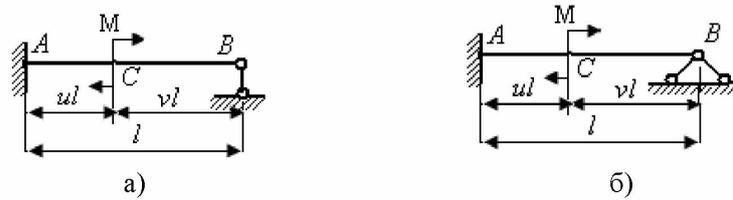


Рис. 6. Схема однопролетной статически неопределимой балки с жестким защемлением и шарнирной опорой, нагруженной моментом: а) балка с шарнирно-подвижной опорой; б) балка с шарнирно-неподвижной опорой

Однопролетная статически неопределимая балка, представленная на рис. 6, а, имеет одну лишнюю связь; а балка, представленная на рис. 6, б, имеет две лишние связи. По методу сил лишние связи отбрасываются, а их действие заменяется неизвестными реакциями связей, число которых равно числу лишних связей.

Схемы однопролетных балок с заменой лишних связей соответствующими реакциями представлены на рис. 7.



Рис. 7. Схемы однопролетных балок с заменой лишних связей соответствующими реакциями: а) схема балки с заменой шарнирно-подвижной опоры реакцией X_1 ; б) схема балки с заменой шарнирно-неподвижной опоры реакцией X_1 и X_2

Так как мы пренебрегаем продольными деформациями по сравнению с изгибными, то реакцию X_2 для балки, представленной на рис. 7, б, можно не учитывать. В дальнейшем для балок с жестким защемлением и шарнирной опорой будем ограничиваться учетом только вертикальной составляющей реакции – реакцией X_1 .

Так как в сечении B имелась связь в виде шарнирно-подвижной опоры, то значение реакции X_1 должно быть таким, чтобы перемещение точки приложения силы X_1 в направлении действия этой силы было равно нулю:

$$\Delta_1 = \delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1p} = 0, \quad (1.2)$$

где $\delta_{11} \cdot X_1$ – перемещение точки B от действия силы X_1 ; δ_{11} – перемещение точки B от действия единичной силы, приложенной к балке (рис. 8, а); Δ_{1p} – перемещение точки B от действия заданных сил, приложенных к балке (в нашем случае от действия момента M , рис. 8, б).

Из равенства $\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1p} = 0$ следует, что

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}}.$$

Значения δ_{11} и Δ_{1p} определим, построив эпюры изгибающих моментов для схем нагружения балок (эпюры представлены на рис. 8, в, г).

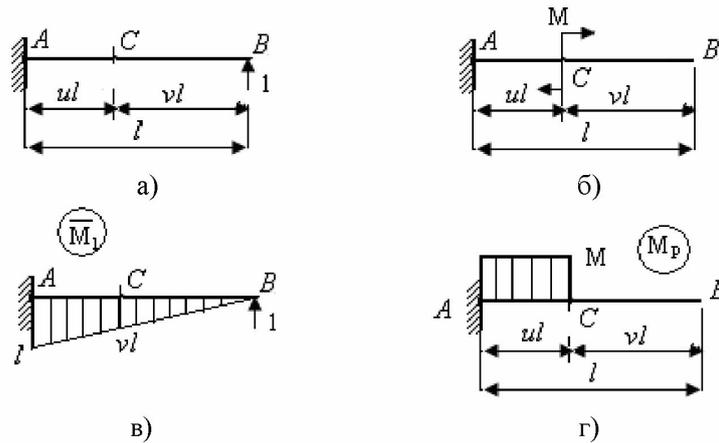


Рис. 8. Схемы нагружения балки: а) схема нагружения балки единичной силой; б) схема нагружения балки моментом M ; в) эпюра изгибающего момента \bar{M}_1 от действия на балку единичной силы; г) эпюра изгибающего момента от действия на балку момента M

Для определения δ_{11} и Δ_{1p} вычислим соответствующие интегралы Мора:

$$EJ\delta_{11} = \int_l \bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1 dx; \quad EJ\Delta_{1p} = \int_l M_p \cdot \bar{M}_1 dx, \quad (1.3)$$

где EJ – изгибная жесткость поперечных сечений балки, E – модуль упругости 1-го рода материала балки, J – главный осевой момент инерции поперечного сечения.

Используя способ Верещагина для вычисления интегралов Мора, находим

$$EJ\delta_{11} = \frac{1}{2}l \cdot l \cdot \frac{2}{3}l = \frac{1}{3}l^3; \quad EJ\Delta_{1p} = M \cdot ul \cdot \frac{l+vl}{2}.$$

Тогда $X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = -M \cdot ul \cdot \frac{l+vl}{2} \cdot \frac{3}{l^3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Mu(1+v)}{l}$. Учитывая, что $u = 1 - v$,

получим $X_1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{M(1-v^2)}{l}$. Так как $X_1 = R_B$, то можно записать, что

$$R_B = \frac{3}{2} \cdot \frac{M(1-v^2)}{l}.$$

Определим теперь опорную реакцию R_A и изгибающие моменты в поперечных сечениях для балки, схема нагружения которой представлена на рис. 9.

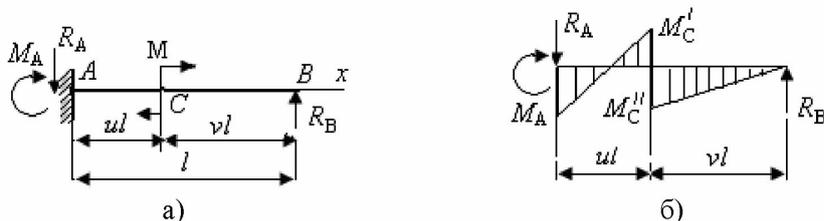


Рис. 9. Схема нагружения балки и возникающие при этом опорные реакции и изгибающие моменты в поперечных сечениях

Из условия равновесия вида $\sum Y_i = 0$, следует

$$R_B - R_A = 0, \text{ откуда } R_A = R_B = \frac{3}{2} \cdot \frac{M(1-v^2)}{l}.$$

На участке балки $0 \leq x \leq ul$ изгибающий момент M_z равен

$$M_z = R_B \cdot (l-x) - M = \frac{3}{2} \cdot \frac{M(1-v^2)}{l} \cdot (l-x) - M, \quad 0 \leq x \leq ul;$$

$$M_z = M_A = \frac{3}{2} \cdot M(1-v^2) - M = \frac{M}{2}(1-3v^2) \quad \text{при } x = 0;$$

$$M_z = M'_C = R_B \cdot vl - M = \frac{3}{2} \cdot \frac{M(1-v^2)}{l} \cdot vl - M = \frac{M}{2} [3v(1-v^2) - 2] \quad \text{при } x = ul.$$

На участке балки $ul \leq x \leq l$ изгибающий момент M_z равен

$$M_z = R_B \cdot (l-x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{M(1-v^2)}{l} \cdot (l-x), \quad ul \leq x \leq l;$$

$$M_z = M''_C = R_B \cdot vl = \frac{3}{2} \cdot \frac{M(1-v^2)}{l} \cdot vl = \frac{3}{2} Mv(1-v^2) \quad \text{при } x = ul;$$

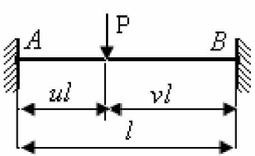
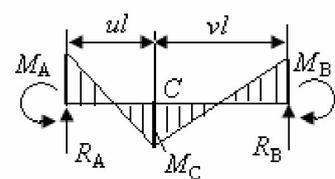
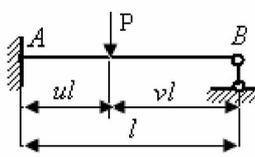
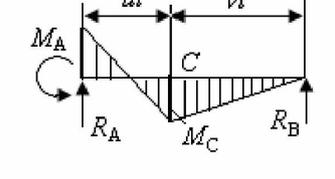
$$M_z = 0 \quad \text{при } x = l.$$

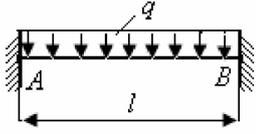
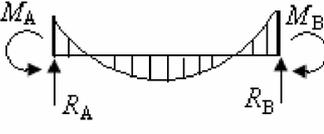
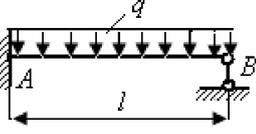
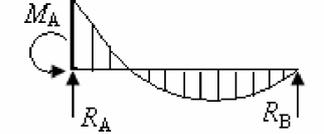
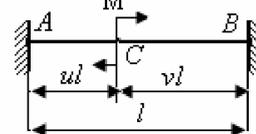
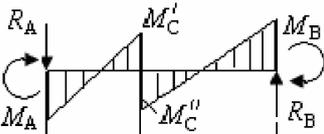
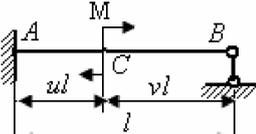
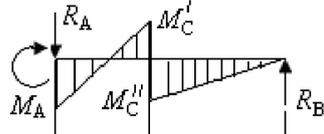
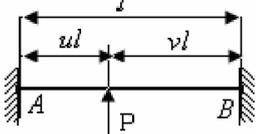
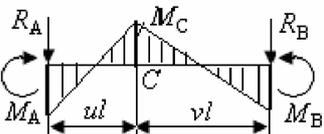
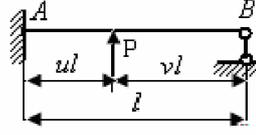
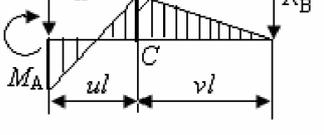
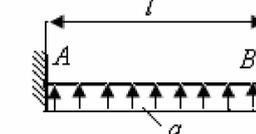
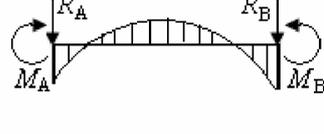
Возникающие опорные реакции и изгибающие моменты в поперечных сечениях балки показаны на рис. 9, б.

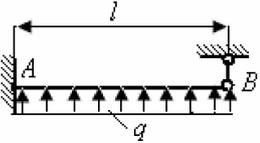
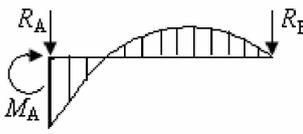
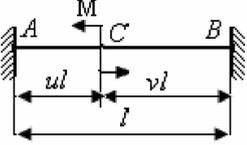
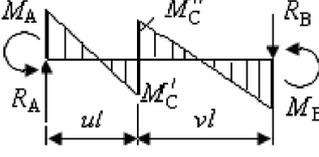
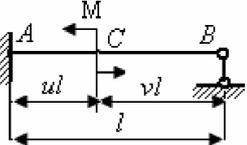
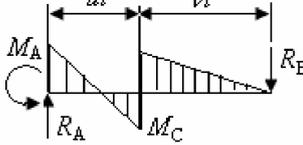
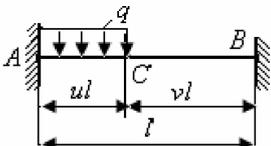
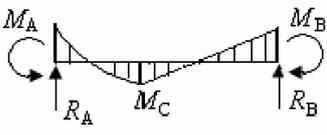
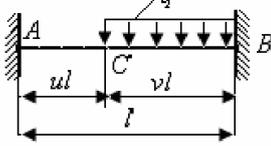
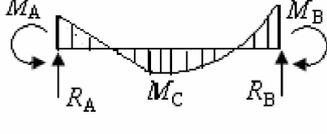
Аналогично определяются опорные реакции и изгибающие моменты в поперечных сечениях балок, испытывающих другие виды нагружения. Схемы нагружения однопролетных статически неопределимых балок и возникающие при этом опорные реакции и изгибающие моменты в поперечных сечениях приведены в таблице 1.

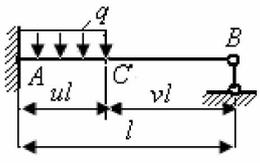
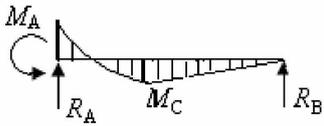
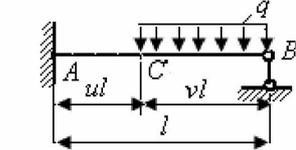
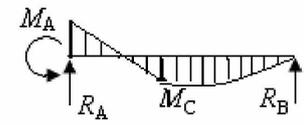
Таблица 1

Схемы нагружения однопролетных статически неопределимых балок и возникающие при этом опорные реакции и изгибающие моменты в поперечных сечениях

Схемы нагружения	Опорные реакции и эпюры изгибающих моментов	Расчетные формулы
<p>1</p> 		$M_A = Pl \cdot u v^2;$ $M_B = Pl \cdot u^2 v;$ $M_C = 2Pl \cdot u^2 v^2;$ $R_A = Pv^2 \cdot (1 + 2u);$ $R_B = Pu^2 \cdot (1 + 2v);$
<p>2</p> 		$M_A = -(Pl/2) \cdot v(1-v^2);$ $M_C = (Pl/2) \cdot uv(3-u);$ $R_A = (Pv/2) \cdot (3-v^2);$ $R_B = (Pu^2/2) \cdot (3-u);$

<p>3</p> 		$M_A = M_B = ql^2/12;$ $R_A = R_B = ql/2$
<p>4</p> 		$M_A = ql^2/8;$ $R_A = 5ql/8;$ $R_B = 3ql/8$
<p>5</p> 		$M_A = Mv(2-3u);$ $M_B = Mu(2-3u);$ $M'_C = M[1-u(6v^2+3u-2)];$ $M''_C = Mu(6v^2+3u-2);$ $R_A = R_B = 6 \frac{M}{l} v \cdot u$
<p>6</p> 		$M_A = \frac{M}{2}(1-3v^2);$ $M'_C = M[1-\frac{3}{2}v(1-v^2)];$ $M''_C = \frac{3}{2}Mv(1-v^2);$ $R_A = R_B = \frac{3}{2}M(1-v^2)/l$
<p>7</p> 		$M_A = Pl \cdot u v^2;$ $M_B = Pl \cdot u^2 v;$ $M_C = 2Pl \cdot u^2 v^2;$ $R_A = Pv^2 \cdot (1+2u);$ $R_B = Pu^2 \cdot (1+2v);$
<p>8</p> 		$M_A = -(Pl/2) \cdot v(1-v^2);$ $M_C = (Pl/2) \cdot uv(3-u);$ $R_A = (Pv/2) \cdot (3-v^2);$ $R_B = (Pu^2/2) \cdot (3-u);$
<p>9</p> 		$M_A = M_B = ql^2/12;$ $R_A = R_B = ql/2$

<p>10</p> 		$M_A = ql^2/8;$ $R_A = 5ql/8;$ $R_B = 3ql/8$
<p>11</p> 		$M_A = Mv(2 - 3u);$ $M_B = Mu(2 - 3u);$ $M'_C = M[1 - u(6v^2 + 3u - 2)];$ $M''_C = Mu(6v^2 + 3u - 2);$ $R_A = R_B = 6 \frac{M}{l} v \cdot u$
<p>12</p> 		$M_A = \frac{M}{2}(1 - 3v^2);$ $M'_C = M[1 - \frac{3}{2}v(1 - v^2)];$ $M''_C = \frac{3}{2}Mv(1 - v^2);$ $R_A = R_B = \frac{3}{2}M(1 - v^2)/l$
<p>13</p> 		$M_A = \frac{1}{12}ql^2u^2[1 + v(5 - 3u)];$ $M_B = \frac{1}{12}ql^2u^3(4 - 3u);$ $M_C = \frac{1}{12}ql^2u^3(6v^2 + 3v - 1);$ $R_A = \frac{1}{2}ql[2 - u^2(2 - u)];$ $R_B = \frac{1}{2}qlu^3(2 - u)$
<p>14</p> 		$M_B = \frac{1}{12}ql^2v^2[1 + u(5 - 3v)];$ $M_A = \frac{1}{12}ql^2v^3(4 - 3v);$ $M_C = \frac{1}{12}ql^2v^3(6u^2 + 3u - 1);$ $R_B = \frac{1}{2}ql[2 - v^2(2 - v)];$ $R_A = \frac{1}{2}qlv^3(2 - v)$

 <p>15</p>		$M_A = \frac{1}{8}ql^2u^2(4v+u^2);$ $M_C = \frac{1}{8}ql^2u^3v(4-u);$ $R_A = \frac{1}{8}ql[8-u^2(4-u)];$ $R_B = \frac{1}{8}qlu^3(4-u)$
 <p>16</p>		$M_A = \frac{1}{8}ql^2v^2[3v(3u+1) - 4\frac{u+1}{v}];$ $R_B = \frac{3}{8}qlv^2(4uv+v^2)$ $M_C = R_B \cdot l - \frac{1}{2}q(vl)^2$ $R_A = ql - R_B$

Опорные реакции и изгибающие моменты в поперечных сечениях балки могут возникнуть не только в результате нагружения балки внешними силами, но из-за угловых и линейных перемещений опор балки. Покажем это на конкретном примере балки, схема которой изображена на рис. 10, а.

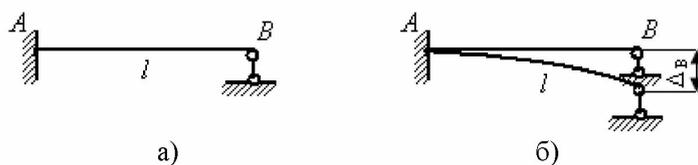


Рис. 10. Схема однопролетной балки с жестким защемлением и шарнирной опорой: а) схема балки; б) схема перемещения шарнирно-подвижной опоры

Отбросим лишнюю связь и ее действие заменим неизвестной реакцией связи X_1 (рис. 11, а).

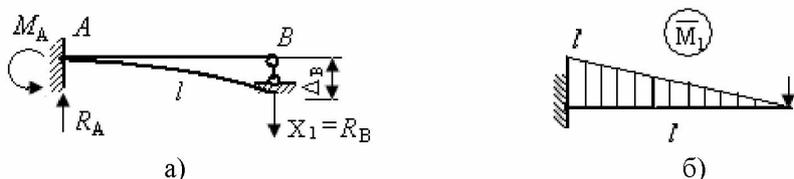


Рис. 11. Схема перемещения опоры балки и эпюра изгибающего момента: а) схема однопролетной балки с заменой лишней связи реакцией X_1 ; б) эпюра изгибающего момента \bar{M}_1 от действия на балку единичной силы

Перемещение точки B от действия заданных сил, приложенных к балке, равно нулю ($\Delta_{1p} = 0$), так как заданные силы отсутствуют. Значение реакции X_1 должно быть таким, чтобы перемещение точки B от действия силы X_1 было равно Δ_B , т. е. $\Delta_1(X_1) = \Delta_B$. Но $\Delta_1(X_1) = \delta_{11} \cdot X_1$. Тогда имеем равенство

$$\delta_{11} \cdot X_1 = \Delta_B, \text{ откуда } X_1 = \Delta_B / \delta_{11},$$

где $\delta_{11} \cdot X_1$ – перемещение точки B от действия силы X_1 ; δ_{11} – перемещение точки B от действия единичной силы, приложенной к балке (рис. 11, б).

Для определения δ_{11} вычислим соответствующий интеграл Мора:

$$EJ \delta_{11} = \int_l \bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1 dx,$$

где EJ – изгибная жесткость поперечных сечений балки, E – модуль упругости 1-го рода материала балки, J – главный осевой момент инерции поперечного сечения.

Используя способ Верещагина для вычисления интеграла Мора, находим

$$EJ \delta_{11} = \frac{1}{2} l \cdot l \cdot \frac{2}{3} l = \frac{1}{3} l^3; \quad \delta_{11} = \frac{1}{3EJ} l^3.$$

Так как $X_1 = \Delta_B / \delta_{11}$, то

$$X_1 = \frac{3EJ}{l^3} \cdot \Delta_B, \quad R_B = X_1 = \frac{3EJ}{l^3} \cdot \Delta_B.$$

Реакция R_A в опоре A (из условия равновесия в виде $\sum P_{iy} = 0$) равна R_B :

$$R_A = R_B = X_1 = \frac{3EJ}{l^3} \cdot \Delta_B.$$

Момент M_A в опоре A (из условия равновесия в виде $\sum M_A(P_i) = 0$) равен

$$M_A = R_B \cdot l = \frac{3EJ}{l^2} \cdot \Delta_B.$$

Если перемещение $\Delta_B = 1$, то имеем соответствующие значения реакций R'_A , R'_B и M'_A (рис. 12, а) от единичного перемещения:

$$R'_A = R'_B = \frac{3EJ}{l^3}, \quad M'_A = \frac{3EJ}{l^2}.$$

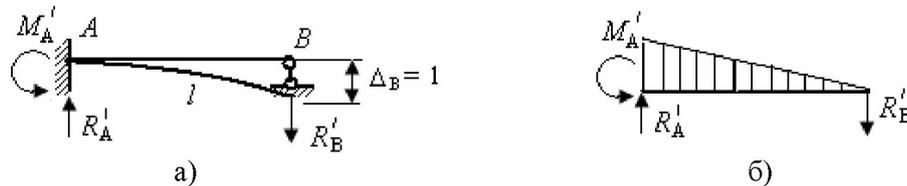


Рис. 12. Схема перемещения опоры балки и возникающие при этом опорные реакции изгибающие моменты в поперечных сечениях

Изгибающий момент в поперечных сечениях при единичном перемещении $\Delta_B = 1$ определяется как

$$M'_z = -M'_A + R'_A \cdot x = -\frac{3EJ}{l^2} \left(1 - \frac{x}{l}\right), \quad 0 \leq x \leq l.$$

Эпюра изгибающего момента M'_z в поперечных сечениях при единичном перемещении представлена на рис. 12, б.

Значения опорных реакций и момента от действительного перемещения Δ_B равны

$$R_A = R'_A \cdot \Delta_B, \quad R_B = R'_B \cdot \Delta_B, \quad M_A = M'_A \cdot \Delta_B.$$

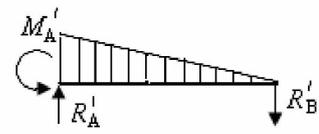
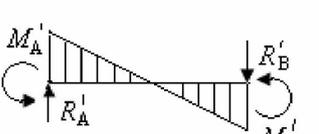
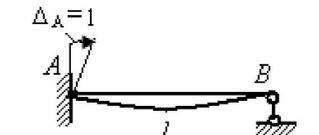
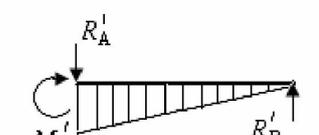
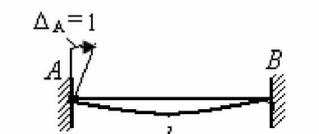
Изгибающий момент в поперечных сечениях от действительного перемещения Δ_B определяется как

$$M_z = M'_z \cdot \Delta_B = -\frac{3EJ}{l^2} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \cdot \Delta_B, \quad 0 \leq x \leq l.$$

Схемы единичных перемещений опор однопролетных статически неопределимых балок и возникающие при этом опорные реакции и изгибающие моменты в поперечных сечениях приведены в таблице 2.

Таблица 2

Схемы единичных перемещений опор однопролетных статически неопределимых балок и возникающие при этом опорные реакции и изгибающие моменты в поперечных сечениях

Схемы единичных перемещений опор	Опорные реакции и эпюры изгибающих моментов	Расчетные формулы
<p>1</p> 		$M'_A = \frac{3EJ}{l^2},$ $R'_A = R'_B = \frac{3EJ}{l^3}$
<p>2</p> 		$M'_A = M'_B = \frac{6EJ}{l^2},$ $R'_A = R'_B = \frac{12EJ}{l^3}$
<p>3</p> 		$M'_A = \frac{3EJ}{l},$ $R'_A = R'_B = \frac{3EJ}{l^2}$
<p>4</p> 		$M'_A = \frac{4EJ}{l},$ $M'_B = \frac{2EJ}{l},$ $R'_A = R'_B = \frac{6EJ}{l^2}$
<p>5</p> 		$M'_A = \frac{3EJ}{l^2},$ $R'_A = R'_B = \frac{3EJ}{l^3}$

Первый индекс указывает номер связи и ее направление. Вторым индексом указывается на то воздействие, которое является причиной появления реакции. Слагаемые $R_{1p}, R_{2p}, R_{3p}, \dots, R_{np}$ – реакции в 1-й, 2-й и т. д. связях, вызванных действием нагрузок.

По закону Гука при упругом деформировании каково перемещение, такова и сила. Поэтому

$$\begin{aligned} R_{11} &= r_{11} \cdot z_1, & R_{12} &= r_{12} \cdot z_2, & R_{13} &= r_{13} \cdot z_3, \dots, & R_{1n} &= r_{1n} \cdot z_n, \\ R_{21} &= r_{21} \cdot z_1, & R_{22} &= r_{22} \cdot z_2, & R_{23} &= r_{23} \cdot z_3, \dots, & R_{2n} &= r_{2n} \cdot z_n, \\ \dots & & & & & & & \\ R_{n1} &= r_{n1} \cdot z_1, & R_{n2} &= r_{n2} \cdot z_2, & R_{n3} &= r_{n3} \cdot z_3, \dots, & R_{nn} &= r_{nn} \cdot z_n, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ – перемещения связей 1, 2, 3, ..., n ; $r_{11}, r_{12}, r_{13}, \dots, r_{1n}$ – реакции в связи 1 от единичных перемещений связей 1, 2, 3, ..., n ; $r_{21}, r_{22}, r_{23}, \dots, r_{2n}$ – реакции в связи 2 от единичных перемещений связей 1, 2, 3, ..., n ; $r_{31}, r_{32}, r_{33}, \dots, r_{3n}$ – реакции в связи 3 от единичных перемещений связей 1, 2, 3, ..., n ; ...; $r_{n1}, r_{n2}, r_{n3}, \dots, r_{nn}$ – реакции в связи n от единичных перемещений связей 1, 2, 3, ..., n .

Учитывая равенства (1.5) в уравнениях (1.4), получим систему канонических уравнений вида

$$\begin{aligned} r_{11} \cdot z_1 + r_{12} \cdot z_2 + r_{13} \cdot z_3 + \dots + r_{1n} \cdot z_n + R_{1p} &= 0, \\ r_{21} \cdot z_1 + r_{22} \cdot z_2 + r_{23} \cdot z_3 + \dots + r_{2n} \cdot z_n + R_{2p} &= 0, \\ \dots & \\ r_{n1} \cdot z_1 + r_{n2} \cdot z_2 + r_{n3} \cdot z_3 + \dots + r_{nn} \cdot z_n + R_{np} &= 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Реакции в связи от единичного перемещения можно трактовать как соответствующую жесткость, так как ее произведение на перемещение z_i дает значение силы. Реакции $r_{11}, r_{22}, r_{33}, \dots, r_{nn}$ называются *главными*; реакции $r_{12}, r_{13}, \dots, r_{1n}$ и т. д. называются *побочными*. Побочные реакции типа r_{ik} и r_{ki} равны, т. е. $r_{ik} = r_{ki}$. Следовательно $r_{12} = r_{21}, r_{13} = r_{31}, \dots, r_{1n} = r_{n1}$.

Если в стержневую систему вводится всего лишь одна дополнительная связь, то из системы (1.6) имеем уравнение

$$r_{11} \cdot z_1 + R_{1p} = 0. \quad (1.7)$$

Если в стержневую систему введены две дополнительных связи, то из системы (1.6) имеем два уравнения

$$\begin{aligned} r_{11} \cdot z_1 + r_{12} \cdot z_2 + R_{1p} &= 0, \\ r_{21} \cdot z_1 + r_{22} \cdot z_2 + R_{2p} &= 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Как было отмечено выше, число таких уравнений соответствует степени кинематической неопределимости заданной стержневой системы, т. е. числу введенных связей или числу неизвестных перемещений введенных связей.

Приведенная система канонических уравнений (1.6) должна быть разрешена относительно неизвестных перемещений $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$. Но для решения этой системы уравнений необходимы данные о реакциях в связях от единичных перемещений (коэффициентах r_{ik}) и реакциях в связях, вызванных действием нагрузки (свободных членов R_{ip} канонических уравнений).

1.5. Определение коэффициентов r_{ik} и свободных членов R_{ip} канонических уравнений

Вначале из заданной стержневой системы строится основная система. Для определения коэффициентов и свободных членов системы канонических уравнений метода перемещений необходимо предварительно построить эпюры изгибающих моментов в основной системе от неизвестных единичных перемещений (по направлениям введенных закреплений) и от действующей на стержневую систему нагрузки. Построение их производится с помощью табличных данных для соответствующих однопролетных балок.

1.5.1. Плоская рама, степень кинематической неопределимости которой равна единице

Рассмотрим, например, плоскую раму, схема которой изображена на рис. 13, а. Рама имеет всего один жесткий узел. На рис. 13, а этот узел обозначен как узел 1. Число неизвестных угловых перемещений $n_y = 1$. Так как линейные перемещения узла возникают из-за изгибных деформаций в стержневой системе, то, пренебрегая продольными деформациями, можно считать, что линейные перемещения узлов 1 и 2 отсутствуют, т. е. неизвестных линейных перемещений узлов $n_{\text{л}} = 0$.

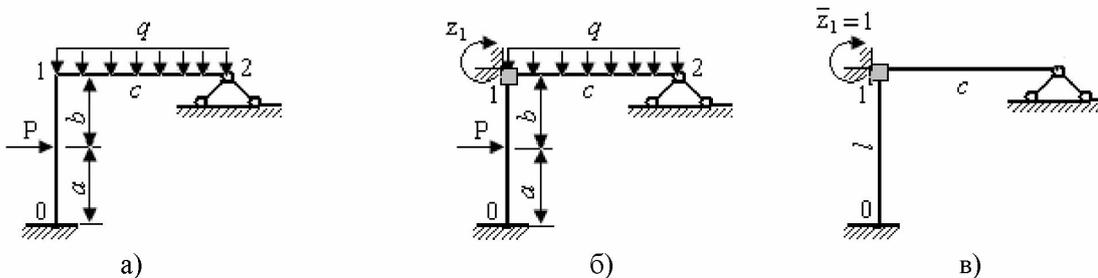


Рис. 13. Плоская рама с одной степенью кинематической неопределимости: а) заданная система; б) основная система; в) схема единичного углового перемещения введенной дополнительной связи

Степень кинематической неопределимости стержневой системы равна

$$n = n_y + n_{\text{л}} = 1 + 0 = 1.$$

На жесткий узел наложим связь типа жесткого защемления (рис. 13, б), повернув эту связь на неизвестный пока угол z_1 . В результате получим основную

систему метода перемещений (рис. 13, б), состоящую из двух однопролетных балок. Балка 0 – 1 представляет однопролетную балку с жесткими заделками, балка 1 – 2 представляет однопролетную балку с жесткой заделкой и шарнирной опорой.

Для построения эпюры изгибающего момента и определения опорных реакций при единичном перемещении узла 1 (рис. 13, в) воспользуемся схемой 8 для балки 0 – 1 и схемой 3 для балки 1 – 2 из таблицы 2.

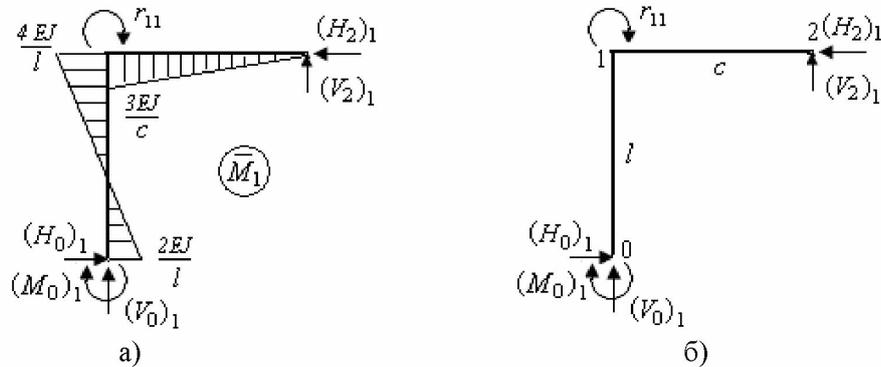


Рис. 14. Эпюра изгибающего момента и опорные реакции при единичном перемещении узла 1: а) эпюра изгибающего момента и опорные реакции; б) опорные реакции

На рис. 14, а представлена эпюра изгибающего момента \bar{M}_1 при единичном перемещении узла 1 ($\bar{z}_1 = 1$). Здесь же на схеме изображены опорные реакции в жесткой заделке (узел 0) и в шарнирно-неподвижной опоре (узел 2) при единичном перемещении узла 1.

Заметим, что для балки 0 – 1 опорный момент $(M_0)_1$ соответствует моменту $M'_A = \frac{2EJ}{l}$ на схеме 8 таблицы 2 ($l = a + b$), опорная реакция $(H_0)_1$ соответствует реакции $R'_A = \frac{6EJ}{l^2}$ на схеме 8 таблицы 2, опорная реакция $(H_2)_1$ соответствует реакции $R'_B = \frac{6EJ}{l^2}$ на схеме 8 таблицы 2. Для опорных реакций $(M_0)_1$, $(H_0)_1$, $(H_2)_1$ первый индекс обозначает узел, где возникает реакция. Вторым индексом обозначает, что опорная реакция вызвана единичным перемещением узла 1.

Для балки 1 – 2 опорная реакция $(V_2)_1$ при длине пролета равным c соответствует реакции $R'_B = \frac{3EJ}{c^2}$ на схеме 3 таблицы 2.

На рис. 14, а изображена опорная реакция r_{11} во введенной дополнительной связи на узел 1.

Таким образом для схемы на рис. 14, а опорные реакции равны:

$$(M_0)_1 = \frac{2EJ}{l}, \quad (H_0)_1 = \frac{6EJ}{l^2}, \quad (H_2)_1 = \frac{6EJ}{l^2}, \quad (V_2)_1 = \frac{3EJ}{c^2}. \quad (1.9)$$

Неизвестными опорными реакциями для схемы на рис. 14, а остались реакция $(V_0)_1$ и опорная реакция r_{11} во введенной дополнительной связи на узел 1.

На рис. 14, б представлена схема плоской рамы с действующими на нее опорными реакциями при единичном угловом перемещении узла 1. Для определения опорной реакции $(V_0)_1$ воспользуемся уравнением равновесия для плоской системы сил в виде равенства нулю суммы проекций сил на вертикальную ось (полагаем, что это ось y):

$$\sum Y_i = 0, \quad (V_2)_1 + (V_0)_1 = 0, \text{ откуда } (V_0)_1 = - (V_2)_1 = - \frac{3EJ}{c^2}. \quad (1.10)$$

Для определения опорной реакции r_{11} во введенной дополнительной связи на узел 1 можно рассмотреть либо условие равновесия плоской рамы, либо условие равновесия узла 1.

Из условия равновесия плоской рамы в виде равенства нулю суммы моментов сил относительно точки 0 следует

$$\begin{aligned} \sum M_0(P_i) = 0, \quad - (M_0)_1 - r_{11} + (H_2)_1 \cdot l + (V_2)_1 \cdot c = 0, \text{ откуда} \\ r_{11} = (H_2)_1 \cdot l + (V_2)_1 \cdot c - (M_0)_1 = \frac{6EJ}{l^2} \cdot l + \frac{3EJ}{c^2} \cdot c - \frac{2EJ}{l}, \\ r_{11} = \frac{4EJ}{l} + \frac{3EJ}{c}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Если рассмотреть равновесие узла 1, то необходимо вырезать этот узел и представить расчетную схему узла с действующими моментами сил в прилегающих к узлу сечениях и опорной реакцией r_{11} во введенной дополнительной связи на узел 1 (рис. 15).

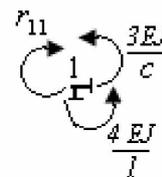


Рис. 15. Моменты сил в узле 1 при $\bar{z}_1 = 1$

При угловом перемещении узла условие его равновесия следует рассматривать в виде равенства нулю суммы моментов сил, действующих на узел. Так как в прилегающих к узлу сечениях балок продольные и поперечные силы моментов не создают, то на рис. 15 продольные и поперечные силы изображать не будем, чтобы не загромождать рисунок. Итак, из условия равновесия в виде равенства нулю суммы моментов сил, действующих на узел, следует

$$\frac{4EJ}{l} + \frac{3EJ}{c} - r_{11} = 0, \text{ откуда } r_{11} = \frac{4EJ}{l} + \frac{3EJ}{c}. \quad (1.12)$$

Обратим внимание, что значения r_{11} , полученные по формулам (1.11) и (1.12), одинаковы.

Для построения эпюры изгибающего момента и определения опорных реакций при действии на балку нагрузки (рис. 13, б) воспользуемся схемой 1 для балки 0 – 1 и схемой 4 для балки 1 – 2 из таблицы 1.

На рис. 16, а представлена эпюра изгибающего момента M_p в поперечных сечениях балок 0 – 1 и 1 – 2 от нагрузки. Здесь же на схеме изображены опор-

ные реакции в жесткой заделке (узел 0) и в шарнирно-неподвижной опоре (узел 2) при действии на балки 0 – 1 и 1 – 2 нагрузки.

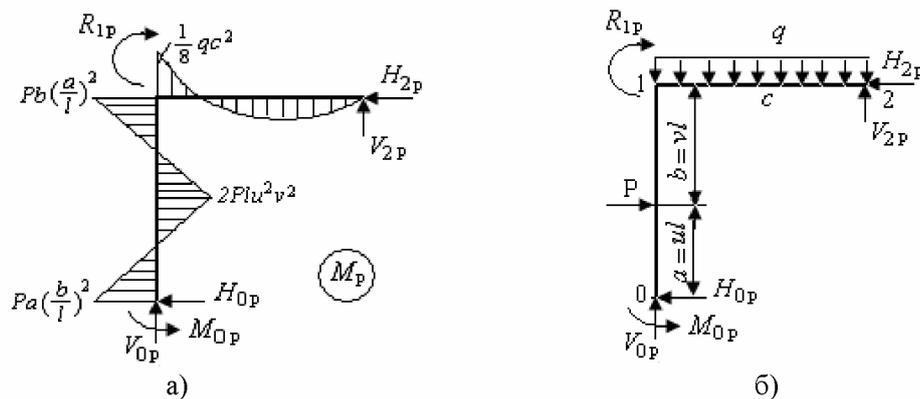


Рис. 16. Эпюры изгибающего момента и опорные реакции при действии на раму нагрузки: а) эпюры изгибающего момента и опорные реакции; б) действующая нагрузка и опорные реакции

Для балки 0 – 1 опорный момент M_{0p} соответствует моменту $M_A = Pl \cdot u \cdot v^2$ на схеме 1 таблицы 1, реакция H_{0p} соответствует опорной реакции $R_A = Pv^2 \cdot (1 + 2u)$ на схеме 1 таблицы 1, реакция H_{2p} соответствует опорной реакции $R_B = Pu^2 \cdot (1 + 2v)$ на схеме 1 таблицы 1, реакция V_{2p} соответствует опорной реакции $R_B = 3qc/8$ на схеме 4 таблицы 1. Для опорных реакций M_{0p} , H_{0p} , H_{2p} , V_{2p} первый индекс обозначает узел, где возникает реакция. Второй индекс обозначает, что опорная реакция вызвана нагрузкой.

На рис. 16, а изображена опорная реакция R_{1p} во введенной дополнительной связи на узел 1.

Таким образом для схемы на рис. 16, а опорные реакции равны:

$$M_{0p} = Pl \cdot u \cdot v^2, \quad H_{0p} = Pv^2 \cdot (1 + 2u), \quad H_{2p} = Pu^2 \cdot (1 + 2v), \quad V_{2p} = 3qc/8. \quad (1.13)$$

Неизвестными опорными реакциями для схемы на рис. 16, а остались реакция V_{0p} и опорная реакция R_{1p} во введенной дополнительной связи на узел 1.

На рис. 16, б представлена схема плоской рамы с действующими на нее нагрузкой и опорными реакциями. Для определения опорной реакции V_{0p} воспользуемся уравнением равновесия для плоской системы сил в виде равенства нулю суммы проекций сил на вертикальную ось (полагаем, что это ось y):

$$\sum Y_i = 0, \quad V_{2p} + V_{0p} - q \cdot c = 0, \quad \text{откуда} \quad V_{0p} = q \cdot c - V_{2p} = q \cdot c - 3qc/8, \\ V_{0p} = \frac{5}{8} q \cdot c. \quad (1.14)$$

Для определения опорной реакции R_{1p} во введенной дополнительной связи на узел 1 можно рассмотреть либо условие равновесия плоской рамы, либо условие равновесия узла 1.

Из условия равновесия плоской рамы в виде равенства нулю суммы моментов сил относительно точки 0 следует

$$\sum M_0(P_i) = 0, \quad M_{0p} - P \cdot a + H_{2p} \cdot l + V_{2p} \cdot c - \frac{1}{2} q \cdot c^2 - R_{1p} = 0,$$

откуда
$$R_{1p} = M_{0p} - P \cdot a + H_{2p} \cdot l + V_{2p} \cdot c - \frac{1}{2} q \cdot c^2. \quad (1.15)$$

Подставляя соответствующие значения для M_{0p} , H_{2p} и V_{2p} , получим

$$R_{1p} = Pl \cdot u \cdot v^2 - P \cdot a + Pu^2 \cdot (1 + 2v) \cdot l + \frac{3}{8} qc \cdot c - \frac{1}{2} q \cdot c^2.$$

Данное равенство можно представить в виде

$$R_{1p} = Pl \cdot (u \cdot v^2 - u + u^2 + 2u^2 \cdot v) - \frac{1}{8} qc^2.$$

Группируя и преобразовывая слагаемые $u \cdot v^2 + 2u^2 \cdot v = uv(v + 2u) = uv(1 + u)$ и $-u + u^2 = -u(1 - u) = -uv$, получим

$$R_{1p} = Pl \cdot [uv(1 + u) - uv] - \frac{1}{8} qc^2 = Pl \cdot v \cdot u^2 - \frac{1}{8} qc^2. \quad (1.16)$$

Более предпочтительным для определения R_{1p} является подход, связанный с рассмотрением условия равновесия узла 1. Если рассмотреть равновесие узла 1, то необходимо вырезать этот узел и представить расчетную схему узла с действующими моментами сил в прилегающих к узлу сечениях и опорной реакцией R_{1p} во введенной дополнительной связи на узел 1 (рис. 17).

При угловом перемещении узла условие его равновесия следует рассматривать в виде равенства нулю суммы моментов сил, действующих на узел. Так как в прилегающих к узлу сечениях балок продольные и поперечные силы моментов не создают, то на рис. 17 продольные и поперечные силы изображать не будем, чтобы не загромождать рисунок.

Итак, из условия равновесия в виде равенства нулю суммы моментов сил, действующих на узел, следует

$$Pb \left(\frac{a}{l} \right)^2 - \frac{1}{8} q \cdot c^2 - R_{1p} = 0, \quad \text{откуда} \quad R_{1p} = Pb \left(\frac{a}{l} \right)^2 - \frac{1}{8} q \cdot c^2.$$

Если учесть, что $b = vl$, $\frac{a}{l} = u$, то

$$R_{1p} = Pl \cdot v \cdot u^2 - \frac{1}{8} q \cdot c^2. \quad (1.17)$$

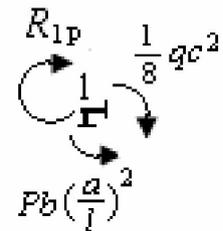


Рис. 17. Моменты сил в узле 1 при действии нагрузки

Обратим внимание, что значения R_{1p} , полученные по формулам (1.16) и (1.17), одинаковы.

Для рассматриваемой плоской рамы каноническое уравнение метода перемещений имеет вид (1.7)

$$r_{11} \cdot z_1 + R_{1p} = 0.$$

Из этого уравнения определяем угловое перемещение узла 1 и для рассматриваемой плоской рамы

$$z_1 = -\frac{R_{1p}}{r_{11}} = -\left(Pl \cdot v \cdot u^2 - \frac{1}{8}q \cdot c^2\right) \left(\frac{4EJ}{l} + \frac{3EJ}{c}\right). \quad (1.18)$$

1.5.2. Плоская рама, степень кинематической неопределенности которой равна двум

Рассмотрим, плоскую раму, схема которой изображена на рис. 18, а. Рама имеет всего один жесткий узел 1 и шарнирно-подвижную опору. Число неизвестных угловых перемещений $n_y = 1$. Так как линейные перемещения узла возникают из-за изгибных деформаций в стержневой системе, то, пренебрегая продольными деформациями, можно считать, что линейные перемещения узлов 1 и 2 одинаковы, т. е. неизвестных линейных перемещений узлов $n_{\text{л}} = 1$.

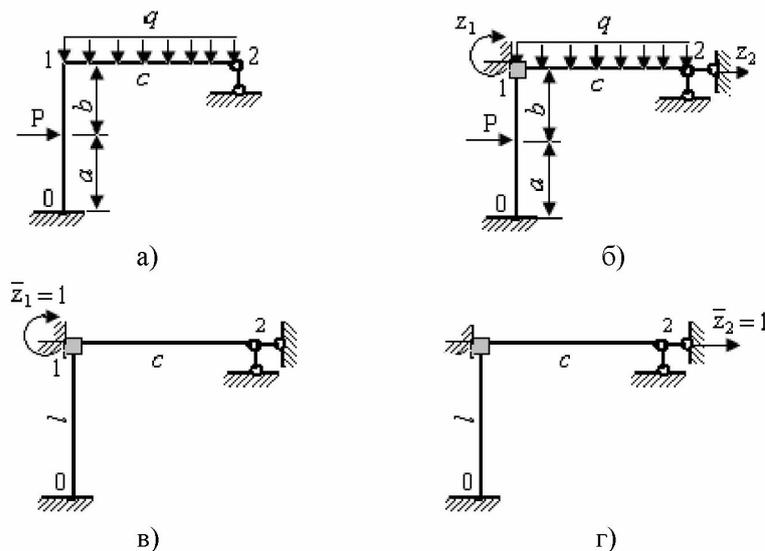


Рис. 18. Плоская рама, степень кинематической неопределенности которой равна двум: а) заданная система; б) основная система; в) схема единичного углового перемещения введенной дополнительной связи в узел 1; г) схема единичного углового перемещения введенной дополнительной связи в узел 2

Степень кинематической неопределенности стержневой системы равна

$$n = n_y + n_{\text{л}} = 1 + 1 = 2.$$

На жесткий узел наложим связь типа жесткого защемления (рис. 18, б), повернув эту связь на неизвестный пока угол z_1 . В узел 2 введем дополнительную

связь, ограничивающую линейные перемещения узлов 1 и 2. Дадим этой связи неизвестное пока линейное перемещение z_2 . В результате получим основную систему метода перемещений (рис. 18, б), состоящую из двух однопролетных балок. Балка 0 – 1 представляет однопролетную балку с жесткими заделками, балка 1 – 2 представляет однопролетную балку с жесткой заделкой и шарнирной опорой.

Для построения эпюры изгибающего момента и определения опорных реакций при единичном перемещении узла 1 (рис. 18, в) воспользуемся схемой 8 для балки 0 – 1 и схемой 3 для балки 1 – 2 из таблицы 2.

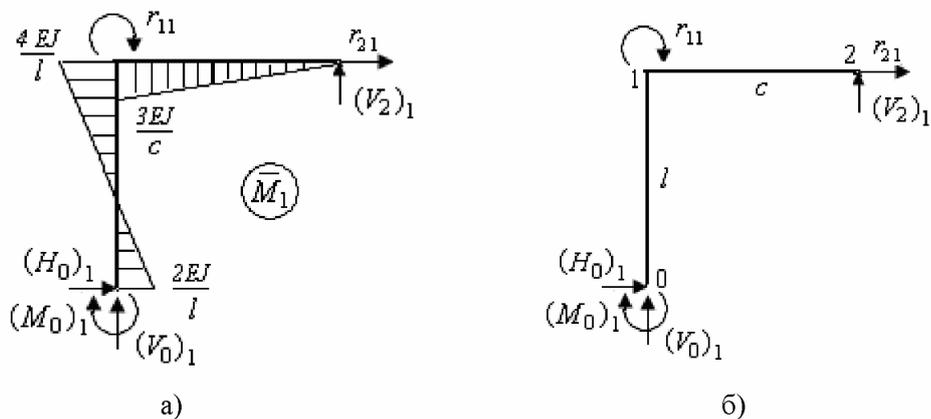


Рис. 19. Эпюра изгибающего момента и опорные реакции при единичном перемещении узла 1: а) эпюра изгибающего момента и опорные реакции; б) опорные реакции

На рис. 19, а представлена эпюра изгибающего момента \bar{M}_1 при единичном перемещении узла 1 ($\bar{z}_1 = 1$). Здесь же на схеме изображены опорные реакции в жесткой заделке (узел 0) и в шарнирной опоре (узел 2) при единичном перемещении узла 1 ($\bar{z}_1 = 1$).

Заметим, что для балки 0 – 1 опорный момент $(M_0)_1$ соответствует моменту $M'_A = \frac{2EJ}{l}$ на схеме 8 таблицы 2 ($l = a + b$), опорная реакция $(H_0)_1$ соответствует реакции $R'_A = \frac{6EJ}{l^2}$ на схеме 8 таблицы 2. Для опорных реакций $(M_0)_1$, $(H_0)_1$ первый индекс обозначает узел, где возникает реакция. Второй индекс обозначает, что опорная реакция вызвана единичным перемещением узла 1.

Для балки 1 – 2 опорная реакция $(V_2)_1$ при длине пролета c соответствует реакции $R'_B = \frac{3EJ}{c^2}$ на схеме 3 таблицы 2.

На рис. 19, а изображена опорная реакция r_{11} во введенной дополнительной связи на узел 1 и опорная реакция r_{21} во введенной дополнительной связи на узел 1.

Таким образом для схемы на рис. 19, а опорные реакции равны:

$$(M_0)_1 = \frac{2EJ}{l}, \quad (H_0)_1 = \frac{6EJ}{l^2}, \quad (V_2)_1 = \frac{3EJ}{c^2}. \quad (1.19)$$

Неизвестными опорными реакциями для схемы на рис. 19, а остались реакция $(V_0)_1$, опорная реакция r_{11} во введенной дополнительной связи на узел 1 и опорная реакция r_{21} во введенной дополнительной связи на узел 2.

На рис. 19, б представлена схема плоской рамы с действующими на нее опорными реакциями при единичном угловом перемещении узла 1. Для определения опорной реакции $(V_0)_1$ воспользуемся уравнением равновесия для плоской системы сил в виде равенства нулю суммы проекций сил на вертикальную ось (полагаем, что это ось y):

$$\sum Y_i = 0, \quad (V_2)_1 + (V_0)_1 = 0, \quad \text{откуда} \quad (V_0)_1 = -(V_2)_1 = -\frac{3EJ}{c^2}. \quad (1.20)$$

Для определения опорной реакции r_{11} во введенной дополнительной связи на узел 1 можно рассмотреть либо условие равновесия плоской рамы, либо условие равновесия узла 1.

Из условия равновесия плоской рамы в виде равенства нулю суммы моментов сил относительно точки 1 следует

$$\begin{aligned} \sum M(P_i) = 0, \quad -(M_0)_1 - r_{11} + (H_0)_1 \cdot l + (V_2)_1 \cdot c = 0, \quad \text{откуда} \\ r_{11} = (H_0)_1 \cdot l + (V_2)_1 \cdot c - (M_0)_1 = \frac{6EJ}{l^2} \cdot l + \frac{3EJ}{c^2} \cdot c - \frac{2EJ}{l}, \\ r_{11} = \frac{4EJ}{l} + \frac{3EJ}{c}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

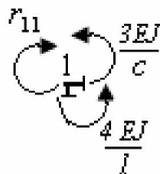


Рис. 20. Моменты сил в узле 1 при $\bar{z}_1 = 1$

Если рассмотреть равновесие узла 1, то необходимо вырезать этот узел и представить расчетную схему узла с действующими моментами сил в прилегающих к узлу сечениях и опорной реакцией r_{11} во введенной дополнительной связи на узел 1 (рис. 20).

При угловом перемещении узла условие его равновесия следует рассматривать в виде равенства нулю суммы моментов сил, действующих на узел. Так как в прилегающих к узлу сечениях балок продольные и поперечные силы моментов не создают, то на рис. 20 продольные и поперечные силы изображать не будем, чтобы не загромождать рисунок. Итак, из условия равновесия в виде равенства нулю суммы моментов сил, действующих на узел, следует

$$\frac{4EJ}{l} + \frac{3EJ}{c} - r_{11} = 0, \quad \text{откуда} \quad r_{11} = \frac{4EJ}{l} + \frac{3EJ}{c}. \quad (1.22)$$

Обратим внимание, что значения r_{11} , полученные по формулам (1.21) и (1.22), одинаковы.

Для определения опорной реакции r_{21} во введенной дополнительной связи на узел 2 воспользуемся уравнением равновесия для плоской системы сил в виде равенства нулю суммы проекций сил на горизонтальную ось (полагаем, что это ось x):

$$\sum X_i = 0, \quad r_{21} + (H_0)_1 = 0, \quad \text{откуда} \quad r_{21} = - (H_0)_1 = - \frac{6EJ}{l^2},$$

$$r_{21} = - \frac{6EJ}{l^2}. \quad (1.23)$$

Для построения эпюры изгибающего момента и определения опорных реакций при единичном перемещении узла 2 (рис. 18, г) воспользуемся схемой 2 для балки 0 – 1 из таблицы 2.

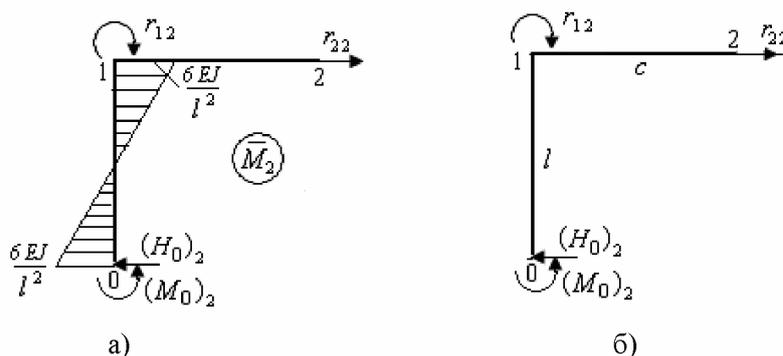


Рис. 21. Эпюра изгибающего момента и опорные реакции при единичном перемещении дополнительной связи в узле 2: а) эпюра изгибающего момента и опорные реакции; б) опорные реакции

На рис. 21, а представлена эпюра изгибающего момента \bar{M}_2 при единичном перемещении узла 2 ($\bar{z}_2 = 1$). Здесь же на схеме изображены опорные реакции в жесткой заделке (узел 0) и в шарнирной опоре (узел 2) при единичном перемещении узла 2 ($\bar{z}_2 = 1$).

Для балки 0 – 1 опорный момент $(M_0)_2$ соответствует моменту $M'_A = \frac{6EJ}{l^2}$ на схеме 2 таблицы 2 ($l = a + b$), опорная реакция $(H_0)_2$ соответствует реакции $R'_A = \frac{12EJ}{l^3}$ на схеме 2 таблицы 2. Для опорных реакций $(M_0)_2$, $(H_0)_2$ первый индекс обозначает узел, где возникает реакция. Второй индекс обозначает, что опорная реакция вызвана единичным перемещением узла 2.

На рис. 21, а изображена опорная реакция r_{12} во введенной дополнительной связи на узел 1 и опорная реакция r_{22} во введенной дополнительной связи на узел 2.

Таким образом для схемы на рис. 21, а опорные реакции равны:

$$(M_0)_2 = \frac{6EJ}{l^2}, \quad (H_0)_2 = \frac{12EJ}{l^3}. \quad (1.24)$$

Неизвестными опорными реакциями для схемы на рис. 21, а остались опорная реакция r_{12} во введенной дополнительной связи на узел 1 и опорная реакция r_{22} во введенной дополнительной связи на узел 2.

На рис. 21, б представлена схема плоской рамы с действующими на нее опорными реакциями при единичном линейном перемещении узла 2. Для определения опорной реакции r_{22} воспользуемся уравнением равновесия для плоской системы сил в виде равенства нулю суммы проекций сил на горизонтальную ось (полагаем, что это ось x):

$$\sum X_i = 0, \quad r_{22} - (H_0)_2 = 0, \quad \text{откуда} \quad r_{22} = (H_0)_2 = \frac{12EJ}{l^3},$$

$$r_{22} = \frac{12EJ}{l^3}. \quad (1.25)$$

Для определения опорной реакции r_{12} во введенной дополнительной связи на узел 1 при единичном перемещении узла 2 ($\bar{z}_2 = 1$) можно рассмотреть либо условие равновесия плоской рамы, либо условие равновесия узла 1.

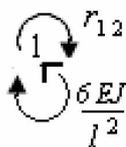


Рис. 22. Моменты сил в узле 1 при $\bar{z}_2 = 1$

Если рассмотреть равновесие узла 1, то необходимо вырезать этот узел и представить расчетную схему узла с действующими моментами сил в прилегающих к узлу сечениях и опорной реакцией r_{12} во введенной дополнительной связи на узел 1 (рис. 22).

Из условия равновесия в виде равенства нулю суммы моментов сил, действующих на узел 1, следует

$$-r_{12} - \frac{6EJ}{l^2} = 0, \quad \text{откуда} \quad r_{12} = -\frac{6EJ}{l^2}. \quad (1.26)$$

Обратим внимание, что значения r_{12} и r_{21} , полученные по формулам (1.26) и (1.23), одинаковы.

Для построения эпюры изгибающего момента и определения опорных реакций при действии на раму нагрузки (рис. 18, б) воспользуемся схемой 1 для балки 0 – 1 и схемой 4 для балки 1 – 2 из таблицы 1.

На рис. 23, а представлена эпюра изгибающего момента M_p в поперечных сечениях балок 0 – 1 и 1 – 2 от нагрузки. Здесь же на схеме изображены опорные реакции в жесткой заделке (узел 0) и в шарнирной опоре (узел 2) при действии на балки 0 – 1 и 1 – 2 нагрузки.

Для балки 0 – 1 опорный момент M_{0p} соответствует моменту $M_A = Pl \cdot u \cdot v^2$ на схеме 1 таблицы 1, реакция H_{0p} соответствует опорной реакции $R_A = Pv^2 \cdot (1 + 2u)$ на схеме 1 таблицы 1, реакция V_{2p} соответствует опорной реакции $R_B = 3qc/8$ на схеме 4 таблицы 1. Для опорных реакций M_{0p} , H_{0p} , V_{2p} первый индекс обозначает узел, где возникает реакция. Второй индекс обозначает, что опорная реакция вызвана нагрузкой.

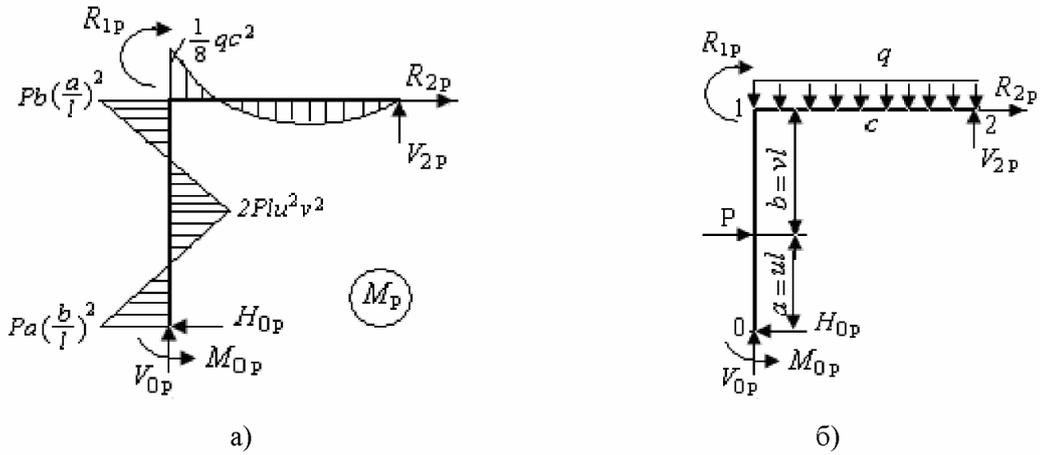


Рис. 23. Эпюры изгибающего момента и опорные реакции при действии на раму нагрузки:
 а) эпюра изгибающего момента и опорные реакции; б) действующая нагрузка и опорные реакции

На рис. 23, а изображены реакция R_{1p} во введенной дополнительной связи на узел 1 и реакция R_{2p} во введенной дополнительной связи на узел 2.

Таким образом для схемы на рис. 23, а опорные реакции равны:

$$M_{0p} = Pl \cdot u v^2, \quad H_{0p} = Pv^2 \cdot (1 + 2u), \quad V_{2p} = 3qc/8. \quad (1.27)$$

Неизвестными опорными реакциями для схемы на рис. 23, а остались реакция V_{0p} , опорная реакция R_{1p} во введенной дополнительной связи на узел 1 и реакция R_{2p} во введенной дополнительной связи на узел 2.

На рис. 23, б представлена схема плоской рамы с действующими на нее нагрузкой и опорными реакциями. Для определения опорной реакции V_{0p} воспользуемся уравнением равновесия для плоской системы сил в виде равенства нулю суммы проекций сил на вертикальную ось (полагаем, что это ось y):

$$\sum Y_i = 0, \quad V_{2p} + V_{0p} - q \cdot c = 0, \quad \text{откуда} \quad V_{0p} = q \cdot c - V_{2p} = q \cdot c - 3qc/8,$$

$$V_{0p} = \frac{5}{8} q \cdot c. \quad (1.28)$$

Для определения опорной реакции R_{2p} во введенной дополнительной связи на узел 2 воспользуемся уравнением равновесия для плоской системы сил в виде равенства нулю суммы проекций сил на горизонтальную ось (полагаем, что это ось x):

$$\sum X_i = 0, \quad R_{2p} - H_{0p} + P = 0, \quad \text{откуда} \quad R_{2p} = H_{0p} - P.$$

Учитывая, что из (1.27) $H_{0p} = Pv^2 \cdot (1 + 2u)$, получим

$$R_{2p} = Pv^2 \cdot (1 + 2u) - P = P[v^2 \cdot (1 + 2u) - 1].$$

Данное равенство преобразуется к виду

$$R_{2p} = -Pu^2(1 + 2v). \quad (1.29)$$

Для определения опорной реакции R_{1p} во введенной дополнительной связи на узел 1 можно рассмотреть либо условие равновесия плоской рамы, либо условие равновесия узла 1.

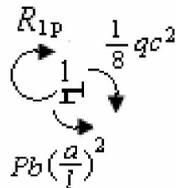


Рис. 24. Моменты сил в узле 1 при действии нагрузки

Более предпочтительным для определения R_{1p} является подход, связанный с рассмотрением условия равновесия узла 1. Если рассмотреть равновесие узла 1, то необходимо вырезать этот узел и представить расчетную схему узла с действующими моментами сил в прилегающих к узлу сечениях и опорной реакцией R_{1p} во введенной дополнительной связи на узел 1 (рис. 24).

При угловом перемещении узла условие его равновесия следует рассматривать в виде равенства нулю суммы моментов сил, действующих на узел. Так как в прилегающих к узлу сечениях балок продольные и поперечные силы моментов не создают, то на рис. 24 продольные и поперечные силы изображать не будем, чтобы не загромождать рисунок.

Итак, из условия равновесия в виде равенства нулю суммы моментов сил, действующих на узел, следует

$$Pb\left(\frac{a}{l}\right)^2 - \frac{1}{8}q \cdot c^2 - R_{1p} = 0, \text{ откуда } R_{1p} = Pb\left(\frac{a}{l}\right)^2 - \frac{1}{8}q \cdot c^2.$$

Если учесть, что $b = vl$, $\frac{a}{l} = u$, то

$$R_{1p} = Pl \cdot v \cdot u^2 - \frac{1}{8}q \cdot c^2. \quad (1.30)$$

Для рассматриваемой плоской рамы каноническое уравнение метода перемещений имеет вид (1.8):

$$r_{11} \cdot z_1 + r_{12} \cdot z_2 + R_{1p} = 0,$$

$$r_{21} \cdot z_1 + r_{22} \cdot z_2 + R_{2p} = 0.$$

Решение системы двух уравнений с двумя неизвестными z_1 и z_2 имеет вид

$$z_1 = \frac{r_{22} \cdot R_{1p} - r_{12} \cdot R_{2p}}{r_{12}^2 - r_{11} \cdot r_{22}}, \quad z_2 = \frac{r_{11} \cdot R_{2p} - r_{12} \cdot R_{1p}}{r_{12}^2 - r_{11} \cdot r_{22}}. \quad (1.31)$$

Систему уравнений большей размерности (три и более) можно решать матричным методом. Например, система трех уравнений в матричном виде

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{R},$$

где

$$\mathbf{r} = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{vmatrix} -R_{1p} \\ -R_{2p} \\ -R_{3p} \end{vmatrix},$$

\mathbf{r} – матрица жесткостей, \mathbf{z} – матрица неизвестных перемещений, \mathbf{R} – матрица грузовых реакций во введенных дополнительных связях в узлах.

Решение матричного уравнения

$$\mathbf{z} = \mathbf{r}^{-1} \cdot \mathbf{R},$$

где \mathbf{r}^{-1} – обратная матрица для матрицы \mathbf{r} .

1.6. Определение внутренних силовых факторов в поперечных сечениях стержневых участков заданной системы

Если нагружение происходит в плоскости $y - x$, то в поперечных сечениях стержневых участков заданной статически неопределимой плоской рамы определяются продольные силы N , поперечные силы Q_y и изгибающие моменты M_z . Последовательность их расчета изложим на примере плоских рам, рассмотренных выше.

1.6.1. Плоская рама, степень кинематической неопределимости которой равна единице

Рассмотрим, плоскую раму, схема которой изображена на рис. 25, а. Рама имеет всего один жесткий узел. На рис. 25, а этот узел обозначен как узел 1.

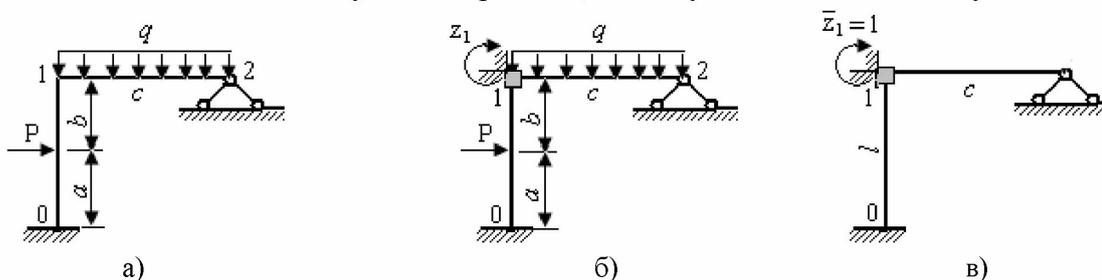


Рис. 25. Плоская рама с одной степенью кинематической неопределимости: а) заданная система; б) основная система; в) схема единичного углового перемещения введенной дополнительной связи

Степень кинематической неопределимости стержневой системы равна

$$n = n_y + n_{\pi} = 1 + 0 = 1.$$

На жесткий узел наложим связь типа жесткого защемления (рис. 25, б), повернув эту связь на неизвестный пока угол z_1 . В результате получим основную систему метода перемещений (рис. 25, б), состоящую из двух однопролетных балок. Балка 0 – 1 представляет однопролетную балку с жесткими заделками,

балка 1 – 2 представляет однопролетную балку с жесткой заделкой и шарнирной опорой.

На рис. 26 представлены эпюры изгибающих моментов в поперечных сечениях рамы при единичном угловом перемещении узла 1 ($\bar{z}_1=1$) и от нагрузки. Здесь же изображены опорные реакции в узлах рамы, включая и моменты r_{11} и R_{1p} во введенной дополнительной связи на узел 1.

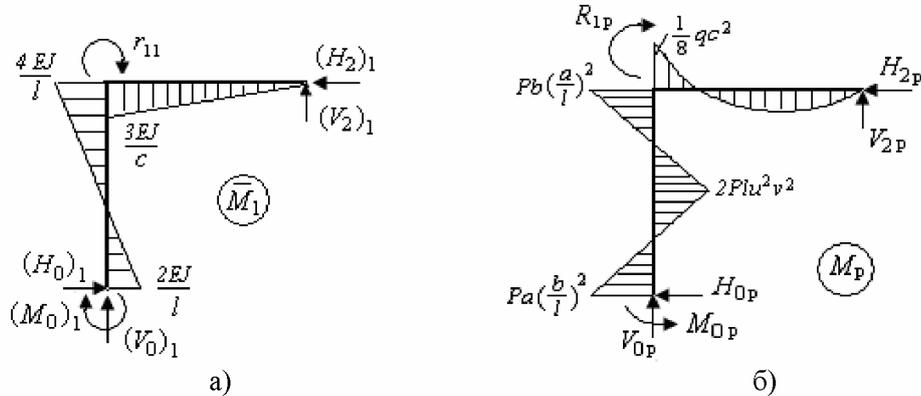


Рис. 26. Эпюры изгибающего момента и опорные реакции: а) эпюры изгибающего момента и опорные реакции при единичном угловом перемещении узла 1 ($\bar{z}_1=1$); б) эпюры изгибающего момента и опорные реакции при действии нагрузки

Опорные реакции для рассматриваемой схемы нагружения плоской рамы (рис. 25, б) ранее в разделе 1.5.1 нами были уже определены: при единичном угловом перемещении узла 1 ($\bar{z}_1=1$) по формулам (1.9), (1.10) и (1.12)

$$(M_0)_1 = \frac{2EJ}{l}, \quad (H_0)_1 = \frac{6EJ}{l^2}, \quad (H_2)_1 = \frac{6EJ}{l^2}, \quad (V_2)_1 = \frac{3EJ}{c^2},$$

$$(V_0)_1 = -(V_2)_1 = -\frac{3EJ}{c^2}, \quad r_{11} = \frac{4EJ}{l} + \frac{3EJ}{c};$$

при действии на плоскую раму нагрузки по формулам (1.13), (1.14) и (1.17)

$$M_{0p} = Pl \cdot u \cdot v^2, \quad H_{0p} = Pv^2 \cdot (1 + 2u), \quad H_{2p} = Pu^2 \cdot (1 + 2v),$$

$$V_{2p} = 3qc/8, \quad V_{0p} = 5qc/8, \quad R_{1p} = Pl \cdot v \cdot u^2 - \frac{1}{8} q \cdot c^2.$$

Для рассматриваемой схемы нагружения плоской рамы по формуле (1.18) определяем действительное угловое перемещение узла 1

$$z_1 = -\frac{R_{1p}}{r_{11}} = -\left(Pl \cdot v \cdot u^2 - \frac{1}{8} q \cdot c^2\right) / \left(\frac{4EJ}{l} + \frac{3EJ}{c}\right).$$

Действительные значения опорных реакций при угловом перемещении узла 1, равным z_1 , определяются как

$$(M_0)_1 \cdot z_1 = \frac{2EJ}{l} \cdot z_1, \quad (H_0)_1 \cdot z_1 = \frac{6EJ}{l^2} \cdot z_1, \quad (H_2)_1 \cdot z_1 = \frac{6EJ}{l^2} \cdot z_1,$$

$$(V_2)_1 \cdot z_1 = \frac{3EJ}{c^2} \cdot z_1, \quad (V_0)_1 \cdot z_1 = -\frac{3EJ}{c^2} \cdot z_1, \quad r_{11} \cdot z_1 = \left(\frac{4EJ}{l} + \frac{3EJ}{c}\right) \cdot z_1.$$

На рис. 27, а представим заданную расчетную схему плоской рамы. На рис. 27, б изобразим нагрузку и опорные реакции в узлах 0 и 2.

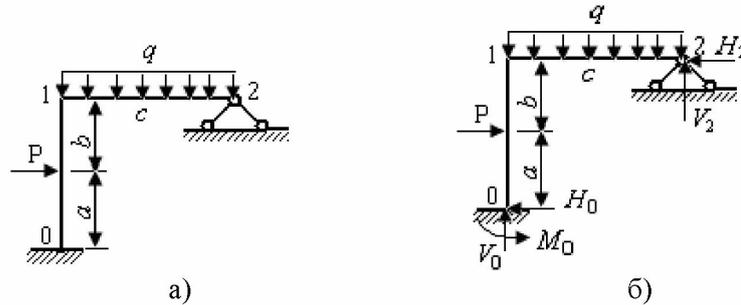


Рис. 27. Схемы плоской рамы: а) заданная схема; б) заданная схема с опорными реакциями

Действительные значения опорных реакций M_0, H_0, V_0, H_2, V_2 (рис. 27, б) складываются из опорных реакций, возникающих при угловом перемещении узла 1 равным z_1 и опорных реакций от действующей нагрузки. При сложении учитываем направления опорных реакций от единичного перемещения \bar{z}_1 , а также от действующей нагрузки (рис. 26). За положительное направление для каждой реакции примем направление соответствующей опорной реакции от действующей нагрузки.

Действительные значения опорных реакций определяются как

$$M_0 = M_{0p} - (M_0)_1 \cdot z_1, \quad H_0 = H_{0p} - (H_0)_1 \cdot z_1, \quad V_0 = V_{0p} + (V_0)_1 \cdot z_1,$$

$$H_2 = H_{2p} + (H_2)_1 \cdot z_1, \quad V_2 = V_{2p} + (V_2)_1 \cdot z_1.$$

Зная заданную нагрузку и опорные реакции, традиционным способом определяем внутренние силовые факторы в поперечных сечениях стержневых участков плоской рамы.

Продольная сила в поперечных сечениях плоской рамы определяется как

$$N = -V_0, \quad 0 \leq x_1 \leq a; \quad N = -V_0, \quad 0 \leq x_2 \leq b; \quad N = -H_2, \quad 0 \leq x_3 \leq c,$$

где x_1, x_2, x_3 – координаты поперечных сечений на участках a, b и c (положение сечения определяется от начала соответствующего участка).

Поперечная сила в поперечных сечениях плоской рамы определяется как

$$Q_y = H_0, \quad 0 \leq x_1 \leq a; \quad Q_y = H_0 - P, \quad 0 \leq x_2 \leq b; \quad Q_y = V_0 - q \cdot x_3, \quad 0 \leq x_3 \leq c.$$

Изгибающий момент в поперечных сечениях плоской рамы определяется как

$$M_z = -M_0 + H_0 \cdot x_1, \quad 0 \leq x_1 \leq a; \quad M_z = -M_0 + H_0 \cdot (a + x_2) - P \cdot x_2, \quad 0 \leq x_2 \leq b,$$

$$M_z = V_2 \cdot (c - x_3) - \frac{1}{2} q (c - x_3)^2, \quad 0 \leq x_3 \leq c.$$

Изгибающий момент в поперечных сечениях плоской рамы можно также определить, складывая значения

$$M_z = \bar{M}_1 \cdot z_1 + M_p.$$

1.6.2. Плоская рама, степень кинематической неопределимости которой равна двум

Рассмотрим, плоскую раму, схема которой изображена на рис. 29, а. Рама имеет один жесткий узел 1 и шарнирно-подвижную опору (узел 2). Число неизвестных угловых перемещений $n_y = 1$. Так как линейные перемещения узла возникают из-за изгибных деформаций в стержневой системе, то, пренебрегая продольными деформациями, можно считать, что линейные перемещения узлов 1 и 2 одинаковы, т. е. неизвестных линейных перемещений узлов $n_{\pi} = 1$.

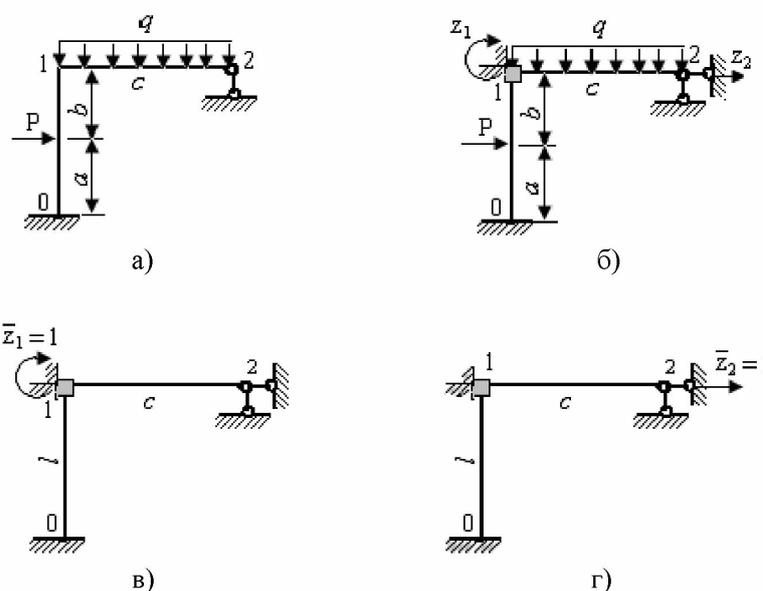


Рис. 28. Плоская рама, степень кинематической неопределимости которой равна двум: а) заданная система; б) основная система; в) схема единичного углового перемещения введенной дополнительной связи в узел 1; г) схема единичного линейного перемещения введенной дополнительной связи в узел 2

Степень кинематической неопределимости стержневой системы равна

$$n = n_y + n_{\pi} = 1 + 1 = 2.$$

На жесткий узел наложим связь типа жесткого защемления (рис. 28, б), повернув эту связь на неизвестный пока угол z_1 . В узел 2 введем дополнительную связь, ограничивающую линейные перемещения узлов 1 и 2. Дадим этой связи неизвестное пока линейное перемещение z_2 . В результате получим основную систему метода перемещений (рис. 28, б), состоящую из двух однопролетных балок. Балка 0 – 1 представляет однопролетную балку с жесткими заделками,

балка 1 – 2 представляет однопролетную балку с жесткой заделкой и шарнирной опорой.

На рис. 29 представлены эпюры изгибающих моментов в поперечных сечениях рамы при единичном угловом перемещении узла 1 ($\bar{z}_1=1$), при единичном линейном перемещении узла 2 ($\bar{z}_2=1$) и от нагрузки. Здесь же изображены опорные реакции в узлах рамы, включая моменты r_{11} , r_{12} и R_{1p} во введенной дополнительной связи на узел 1, а также опорные реакции r_{21} , r_{22} и R_{2p} во введенной дополнительной связи на узел 2.

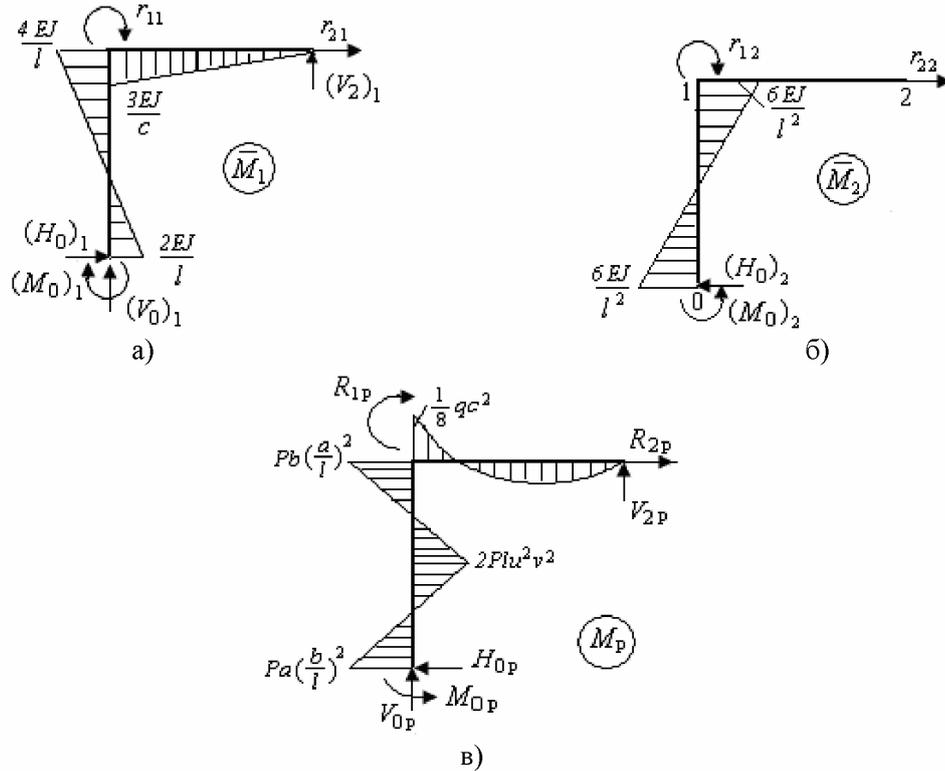


Рис. 29. Эпюры изгибающего момента и опорные реакции: а) эпюры изгибающего момента и опорные реакции при единичном угловом перемещении узла 1 ($\bar{z}_1=1$); б) эпюры изгибающего момента и опорные реакции при единичном линейном перемещении узла 2 ($\bar{z}_2=1$); в) эпюры изгибающего момента и опорные реакции при действии нагрузки

Опорные реакции для рассматриваемой схемы нагружения плоской рамы (рис. 28, б) ранее в разделе 1.5.2 нами были уже определены: при единичном угловом перемещении узла 1 ($\bar{z}_1=1$) по формулам (1.19), (1.20), (1.22) и (1.23)

$$(M_0)_1 = \frac{2EJ}{l}, \quad (H_0)_1 = \frac{6EJ}{l^2}, \quad (V_2)_1 = \frac{3EJ}{c^2},$$

$$(V_0)_1 = -(V_2)_1 = -\frac{3EJ}{c^2}, \quad r_{11} = \frac{4EJ}{l} + \frac{3EJ}{c}, \quad r_{21} = -\frac{6EJ}{l^2};$$

при единичном линейном перемещении узла 2 ($\bar{z}_2=1$) по формулам (1.24), (1.25), и (1.26)

$$(M_0)_2 = \frac{6EJ}{l^2}, \quad (H_0)_2 = \frac{12EJ}{l^3}, \quad r_{22} = \frac{12EJ}{l^3}, \quad r_{12} = -\frac{6EJ}{l^2};$$

при действии на плоскую раму нагрузки по формулам (1.27), (1.28), (1.29) и (1.30)

$$M_{0p} = Pl \cdot u \cdot v^2, \quad H_{0p} = Pv^2 \cdot (1 + 2u), \quad V_{2p} = 3qc/8, \quad V_{0p} = 5qc/8,$$

$$R_{2p} = -Pu^2 \cdot (1 + 2v), \quad R_{1p} = Pl \cdot v \cdot u^2 - \frac{1}{8}q \cdot c^2.$$

Для рассматриваемой схемы нагружения плоской рамы по формулам (1.31) определяем действительное угловое перемещение узла 1 и действительное линейное перемещение узла 2:

$$z_1 = \frac{r_{22} \cdot R_{1p} - r_{12} \cdot R_{2p}}{r_{12}^2 - r_{11} \cdot r_{22}}, \quad z_2 = \frac{r_{11} \cdot R_{2p} - r_{12} \cdot R_{1p}}{r_{12}^2 - r_{11} \cdot r_{22}}.$$

Действительные значения опорных реакций при угловом перемещении узла 1, равным z_1 , определяются как

$$(M_0)_1 \cdot z_1 = \frac{2EJ}{l} \cdot z_1, \quad (H_0)_1 \cdot z_1 = \frac{6EJ}{l^2} \cdot z_1, \quad r_{21} \cdot z_1 = -\frac{6EJ}{l^2} \cdot z_1,$$

$$(V_2)_1 \cdot z_1 = \frac{3EJ}{c^2} \cdot z_1, \quad (V_0)_1 \cdot z_1 = -\frac{3EJ}{c^2} \cdot z_1, \quad r_{11} \cdot z_1 = \left(\frac{4EJ}{l} + \frac{3EJ}{c}\right) \cdot z_1.$$

Действительные значения опорных реакций при линейном перемещении узла 2, равным z_2 , определяются как

$$(M_0)_2 \cdot z_2 = \frac{6EJ}{l^2} \cdot z_2, \quad (H_0)_2 \cdot z_2 = \frac{12EJ}{l^3} \cdot z_2,$$

$$r_{22} \cdot z_2 = \frac{12EJ}{l^3} \cdot z_2, \quad r_{12} \cdot z_2 = -\frac{6EJ}{l^2} \cdot z_2.$$

На рис. 30, а представим заданную расчетную схему плоской рамы. На рис. 30, б изобразим нагрузку и опорные реакции в узлах 0 и 2.

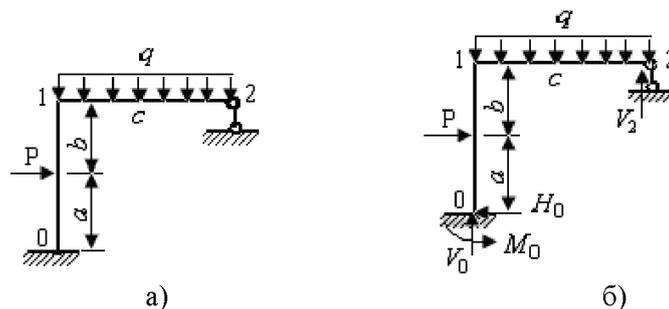


Рис. 30. Схемы плоской рамы: а) заданная схема; б) заданная схема с опорными реакциями

Действительные значения опорных реакций складываются из опорных реакций, возникающих при угловом перемещении узла 1 равным z_1 , из опорных реакций, возникающих при линейном перемещении узла 2 равным z_2 , и опорных реакций от действующей нагрузки. При сложении учитываем направления опорных реакций от единичных перемещений \bar{z}_1 и \bar{z}_2 , а также от действующей нагрузки (рис. 31). За положительное направление для каждой реакции примем направление соответствующей опорной реакции от действующей нагрузки.

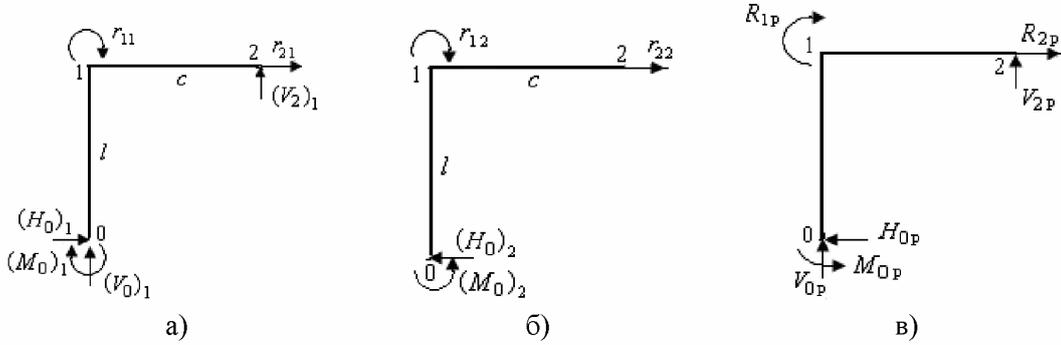


Рис. 31. Схемы опорных реакций в узлах рамы при различных нагружениях: а) схема опорных реакций при единичном угловом перемещении узла 1; б) схема опорных реакций при единичном линейном перемещении узла 2; в) схема опорных реакций от нагрузки

Действительные значения опорных реакций для схемы нагружения плоской рамы, представленной на рис. 30, б, могут быть найдены из выражений

$$M_0 = M_{0p} - (M_0)_1 \cdot z_1 + (M_0)_2 \cdot z_2, \quad H_0 = H_{0p} - (H_0)_1 \cdot z_1 + (H_0)_2 \cdot z_2, \\ V_0 = V_{0p} + (V_0)_1 \cdot z_1, \quad V_2 = V_{2p} + (V_2)_1 \cdot z_1.$$

Зная заданную нагрузку и опорные реакции, традиционным способом определяем внутренние силовые факторы в поперечных сечениях стержневых участков плоской рамы, схема нагружения которой изображена на рис. 30, б.

Продольная сила в поперечных сечениях плоской рамы определяется как

$$N = -V_0, \quad 0 \leq x_1 \leq a; \quad N = -V_0, \quad 0 \leq x_2 \leq b; \quad N = 0, \quad 0 \leq x_3 \leq c,$$

где x_1, x_2, x_3 – координаты поперечных сечений на участках a, b и c (положение сечения определяется от начала соответствующего участка).

Поперечная сила в поперечных сечениях плоской рамы определяется как

$$Q_y = H_0, \quad 0 \leq x_1 \leq a; \quad Q_y = H_0 - P, \quad 0 \leq x_2 \leq b; \quad Q_y = V_0 - q \cdot x_3, \quad 0 \leq x_3 \leq c.$$

Изгибающий момент в поперечных сечениях плоской рамы определяется как

$$M_z = -M_0 + H_0 \cdot x_1, \quad 0 \leq x_1 \leq a; \quad M_z = -M_0 + H_0 \cdot (a + x_2) - P \cdot x_2, \quad 0 \leq x_2 \leq b, \\ M_z = V_2 \cdot (c - x_3) - \frac{1}{2} q (c - x_3)^2, \quad 0 \leq x_3 \leq c.$$

Изгибающий момент в поперечных сечениях плоской рамы можно также определить, складывая значения

$$M_z = \bar{M}_1 \cdot z_1 + \bar{M}_2 \cdot z_2 + M_p.$$

2. ПРИМЕР РАСЧЕТА СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ ПЛОСКОЙ РАМЫ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Техническое задание

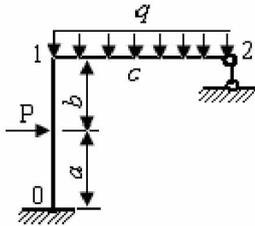


Рис. 32. Заданная система

Для заданной статически неопределимой плоской рамы, схема нагружения которой приведена на рис. 32, требуется:

1. Определить степень кинематической неопределимости заданной системы.
2. Построить основную систему.
3. Определить опорные реакции при единичных перемещениях дополнительно введенных в узлы связей.

4. Определить опорные реакции от нагрузки.

5. Определить действительные перемещения узлов, на которые были наложены дополнительные связи.

6. Определить действительные значения опорных реакций в заданной стержневой системе.

7. Определить внутренние силовые факторы (продольные силы, поперечные силы, изгибающие моменты) в поперечных сечениях стержневых участков плоской рамы и построить их эпюры.

8. Произвести проверку решения.

Исходные данные: сила $P = 20$ кН, интенсивность распределенных сил $q = 20$ кН/м, длина участков $a = 1$ м, $b = 1$ м, $c = 2$ м.

Исходные данные: сила $P = 20$ кН, интенсивность распределенных сил $q = 20$ кН/м, длина участков $a = 1$ м, $b = 1$ м, $c = 2$ м.

Решение

2.1. Определение степени кинематической неопределимости

Рассмотрим, плоскую раму, схема которой изображена на рис. 32. Рама имеет один жесткий узел 1 и шарнирно-подвижную опору (узел 2). Жесткий узел 1 может иметь угловое и линейное перемещение. Узел 2 может иметь лишь линейное перемещение, равное линейному перемещению узла 1.

Число неизвестных угловых перемещений $n_y = 1$. Так как линейные перемещения узла возникают из-за изгибных деформаций в стержневой системе, то, пренебрегая продольными деформациями, можно считать, что линейные перемещения узлов 1 и 2 одинаковы, т. е. неизвестных линейных перемещений узлов $n_{\text{л}} = 1$.

Степень кинематической неопределимости стержневой системы равна

$$n = n_y + n_{\text{л}} = 1 + 1 = 2.$$

2.2. Построение основной системы

На жесткий узел 1 наложим дополнительную связь типа жесткого защемления (рис. 33), повернув эту связь на неизвестный пока угол z_1 . В узел 2 введем дополнительную связь, ограничивающую линейные перемещения узлов 1 и 2. Дадим этой связи неизвестное пока линейное перемещение z_2 . В результате получим *основную систему метода перемещений* (рис. 33), состоящую из двух однопролетных балок. Балка 0 – 1 представляет однопролетную балку с жесткими заделками, балка 1 – 2 представляет однопролетную балку с жесткой заделкой и шарнирной опорой.

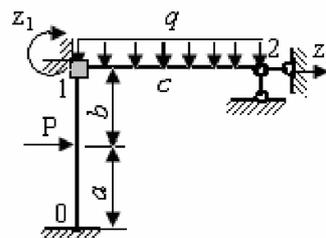


Рис. 33. Основная система

2.3. Определение опорных реакций и изгибающего момента при единичном угловом перемещении дополнительной связи в узле 1 и единичном линейном перемещении дополнительной связи в узле 2

Для построения эпюры изгибающего момента и определения опорных реакций при единичном угловом перемещении дополнительной связи в узле 1 (рис. 34, а) воспользуемся схемой 8 для балки 0 – 1 и схемой 3 для балки 1 – 2 из таблицы 2.

На рис. 34, б представлена эпюра изгибающего момента \bar{M}_1 при единичном угловом перемещении дополнительной связи в узле 1 ($\bar{z}_1 = 1$). Здесь же на схеме изображены опорные реакции в жесткой заделке (узел 0) и в шарнирной опоре (узел 2) при единичном перемещении узла 1 ($\bar{z}_1 = 1$), в том числе и опорные реакции r_{11} и r_{21} в дополнительных связях в узле 1 и в узле 2.

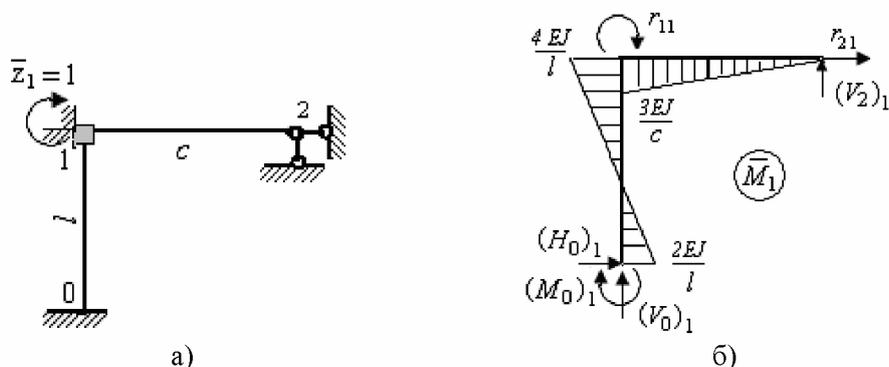


Рис. 34. Основная схема и эпюра изгибающего момента при $\bar{z}_1=1$:

а) схема поворота связи в узле 1 на угол $\bar{z}_1=1$; б) эпюра изгибающего момента и опорные реакции при $\bar{z}_1=1$

Процедура определения опорных реакций для рассматриваемой схемы нагружения плоской рамы (рис. 34, а) ранее в разделе 1.5.2 подробно описана.

При единичном угловом перемещении узла 1 ($\bar{z}_1=1$) по формулам (1.19), (1.20), (1.22) и (1.23) с учетом, что по исходным данным $l = a + b = 2$ м, $c = 2$ м, имеем

$$(M_0)_1 = \frac{2EJ}{l} = EJ, \quad (H_0)_1 = \frac{6EJ}{l^2} = 1,5EJ; \quad (V_2)_1 = \frac{3EJ}{c^2} = 0,75EJ;$$

$$(V_0)_1 = -\frac{3EJ}{c^2} = -0,75EJ; \quad r_{11} = \frac{4EJ}{l} + \frac{3EJ}{c} = 3,5EJ;$$

$$r_{21} = -\frac{6EJ}{l^2} = -1,5EJ.$$

Для построения эпюры изгибающего момента и определения опорных реакций при единичном линейном перемещении дополнительной связи в узле 2 (рис. 35, а) воспользуемся схемой 2 для балки 0 – 1 из таблицы 2.

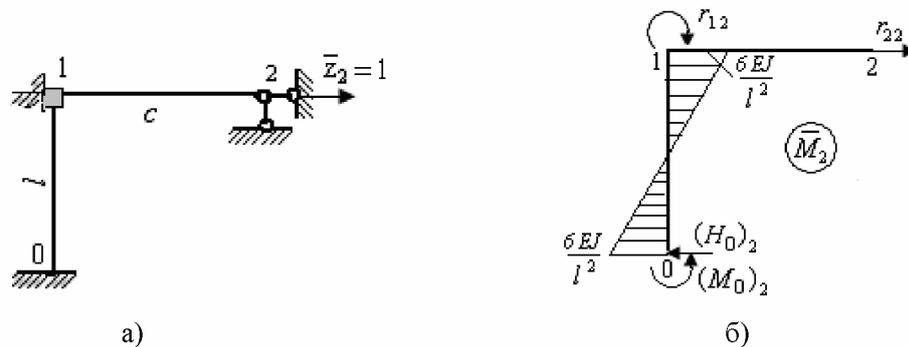


Рис. 35. Основная схема и эпюра изгибающего момента при $\bar{z}_2=1$: а) схема линейного перемещения узлов 2 и 1 при перемещении дополнительной связи $\bar{z}_2=1$; б) эпюра изгибающего момента и опорные реакции при единичном линейном перемещении узлов 2 и 1 ($\bar{z}_2=1$)

На рис. 35, б представлена эпюра изгибающего момента \bar{M}_2 при единичном линейном перемещении дополнительной связи в узле 2 ($\bar{z}_2 = 1$). Здесь же на схеме изображены опорные реакции в жесткой заделке (узел 0) и в шарнирной опоре (узел 2) при $\bar{z}_2 = 1$, в том числе и опорные реакции r_{12} и r_{22} в дополнительных связях в узле 1 и в узле 2.

Процедура определения опорных реакций для рассматриваемой схемы нагружения плоской рамы (рис. 35, а) ранее в разделе 1.5.2 подробно описана.

При единичном линейном перемещении узла 2 ($\bar{z}_2=1$) по формулам (1.24), (1.25) и (1.26) с учетом, что по исходным данным $l = a + b = 2$ м, $c = 2$ м, имеем

$$(M_0)_2 = \frac{6EJ}{l^2} = 1,5 EJ; \quad (H_0)_2 = \frac{12EJ}{l^3} = 1,5EJ;$$

$$r_{22} = \frac{12EJ}{l^3} = 1,5 EJ; \quad r_{12} = -\frac{6EJ}{l^2} = -1,5EJ.$$

2.4. Определение опорных реакций и изгибающего момента от нагрузки

Для построения эпюры изгибающего момента и определения опорных реакций при действии на раму нагрузки (рис. 36, а) воспользуемся схемой 1 для балки 0 – 1 и схемой 4 для балки 1 – 2 из таблицы 1.

На рис. 36, б представлена эпюра изгибающего момента M_p в поперечных сечениях балок 0 – 1 и 1 – 2 от нагрузки. Здесь же на схеме изображены опорные реакции в жесткой заделке (узел 0) и в шарнирной опоре (узел 2) при действии на балки 0 – 1 и 1 – 2 нагрузки.

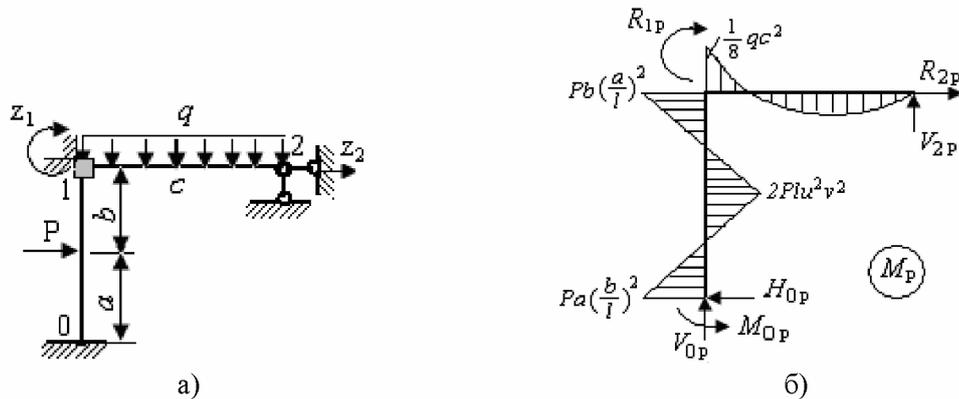


Рис. 36. Схема плоской рамы и эпюра изгибающего момента от нагрузки: а) основная система; б) эпюра изгибающего момента и опорные реакции в узлах

Процедура определения опорных реакций для рассматриваемой схемы нагружения плоской рамы (рис. 36, а) ранее в разделе 1.5.2 подробно описана.

При действии на плоскую раму нагрузки по формулам (1.27), (1.28), (1.29) и (1.30) с учетом, что по исходным данным $a = 1$ м, $b = 1$ м, $l = a + b = 2$ м, $c = 2$ м, $P = 20$ кН, $q = 20$ кН/м, $u = a/l = 0,5$ м; $v = b/l = 0,5$ м, имеем

$$M_{0p} = Pl \cdot u v^2 = 20 \cdot 2 \cdot 0,5 \cdot 0,5^2 = 5 \text{ кНм};$$

$$H_{0p} = Pv^2 \cdot (1 + 2u) = 20 \cdot 0,5^2 (1 + 2 \cdot 0,5) = 10 \text{ кН};$$

$$V_{2p} = 3qc/8 = 3 \cdot 20 \cdot 2/8 = 15 \text{ кН}; \quad V_{0p} = 5qc/8 = 5 \cdot 20 \cdot 2/8 = 25 \text{ кН};$$

$$R_{2p} = -Pu^2 \cdot (1 + 2v) = -20 \cdot 0,5^2 (1 + 2 \cdot 0,5) = -10 \text{ кН};$$

$$R_{1p} = Pl \cdot v \cdot u^2 - \frac{1}{8} q \cdot c^2 = 20 \cdot 2 \cdot 0,5 \cdot 0,5^2 - \frac{20 \cdot 2^2}{8} = -5 \text{ кНм}.$$

2.5. Определение действительных перемещений z_1 и z_2 узлов 1 и 2

Если в стержневую систему введены две дополнительные связи, то канонические уравнения метода перемещений из системы (1.6) принимают вид (1.8)

$$r_{11} \cdot z_1 + r_{12} \cdot z_2 + R_{1p} = 0,$$

$$r_{21} \cdot z_1 + r_{22} \cdot z_2 + R_{2p} = 0.$$

Решение системы двух уравнений с двумя неизвестными z_1 и z_2 имеет вид

$$z_1 = \frac{r_{22} \cdot R_{1p} - r_{12} \cdot R_{2p}}{r_{12}^2 - r_{11} \cdot r_{22}} = \frac{-1,5 \cdot 5 - 1,5 \cdot 10}{(1,5^2 - 3,5 \cdot 1,5)EJ} = \frac{7,5}{EJ},$$

$$z_2 = \frac{r_{11} \cdot R_{2p} - r_{12} \cdot R_{1p}}{r_{12}^2 - r_{11} \cdot r_{22}} = \frac{-3,5 \cdot 10 - 1,5 \cdot 5}{(1,5^2 - 3,5 \cdot 1,5)EJ} = \frac{42,5}{3EJ}.$$

2.6. Определение действительных значений опорных реакций в заданной стержневой системе

Действительные значения опорных реакций при угловом перемещении узла 1, равным z_1 , определяются как

$$(M_0)_1 \cdot z_1 = \frac{2EJ}{l} \cdot z_1 = EJ \cdot \frac{7,5}{EJ} = 7,5 \text{ кНм};$$

$$(H_0)_1 \cdot z_1 = \frac{6EJ}{l^2} \cdot z_1 = 1,5 EJ \cdot \frac{7,5}{EJ} = 11,25 \text{ кН};$$

$$r_{21} \cdot z_1 = -\frac{6EJ}{l^2} \cdot z_1 = -1,5 EJ \cdot \frac{7,5}{EJ} = -11,25 \text{ кН};$$

$$(V_2)_1 \cdot z_1 = \frac{3EJ}{c^2} \cdot z_1 = 0,75 EJ \cdot \frac{7,5}{EJ} = 5,625 \text{ кН};$$

$$(V_0)_1 \cdot z_1 = -\frac{3EJ}{c^2} \cdot z_1 = -0,75 EJ \cdot \frac{7,5}{EJ} = -5,625 \text{ кН};$$

$$r_{11} \cdot z_1 = \left(\frac{4EJ}{l} + \frac{3EJ}{c}\right) \cdot z_1 = 3,5 EJ \cdot \frac{7,5}{EJ} = 26,25 \text{ кНм}.$$

Действительные значения опорных реакций при линейном перемещении узла 2, равным z_2 , определяются как

$$(M_0)_2 \cdot z_2 = \frac{6EJ}{l^2} \cdot z_2 = 1,5 EJ \cdot \frac{42,5}{3EJ} = 21,25 \text{ кНм};$$

$$(H_0)_2 \cdot z_2 = \frac{12EJ}{l^3} \cdot z_2 = 1,5 EJ \cdot \frac{42,5}{3EJ} = 21,25 \text{ кН};$$

$$r_{22} \cdot z_2 = \frac{12EJ}{l^3} \cdot z_2 = 1,5 EJ \cdot \frac{42,5}{3EJ} = 21,25 \text{ кН};$$

$$r_{12} \cdot z_2 = -\frac{6EJ}{l^2} \cdot z_2 = -1,5 EJ \cdot \frac{42,5}{3EJ} = -21,25 \text{ кНм}.$$

Значения опорных реакций от нагрузки

$$M_{0p} = Pl \cdot u \cdot v^2 = 20 \cdot 2 \cdot 0,5 \cdot 0,5^2 = 5 \text{ кНм};$$

$$H_{0p} = Pv^2 \cdot (1 + 2u) = 20 \cdot 0,5^2 (1 + 2 \cdot 0,5) = 10 \text{ кН};$$

$$V_{2p} = 3qc/8 = 3 \cdot 20 \cdot 2/8 = 15 \text{ кН}; \quad V_{0p} = 5qc/8 = 5 \cdot 20 \cdot 2/8 = 25 \text{ кН};$$

$$R_{2p} = -Pu^2 \cdot (1 + 2v) = -20 \cdot 0,5^2 (1 + 2 \cdot 0,5) = -10 \text{ кН};$$

$$R_{1p} = Pl \cdot v \cdot u^2 - \frac{1}{8} q \cdot c^2 = 20 \cdot 2 \cdot 0,5 \cdot 0,5^2 - \frac{20 \cdot 2^2}{8} = -5 \text{ кНм}.$$

Действительные значения опорных реакций складываются из опорных реакций, возникающих при угловом перемещении узла 1 равным z_1 , из опорных реакций, возникающих при линейном перемещении узла 2 равным z_2 , и опорных реакций от действующей нагрузки. При сложении учитываем направления опорных реакций от единичных перемещений \bar{z}_1 и \bar{z}_2 , а также от действующей нагрузки (рис. 37). За положительное направление для каждой реакции примем направление соответствующей опорной реакции от действующей нагрузки.

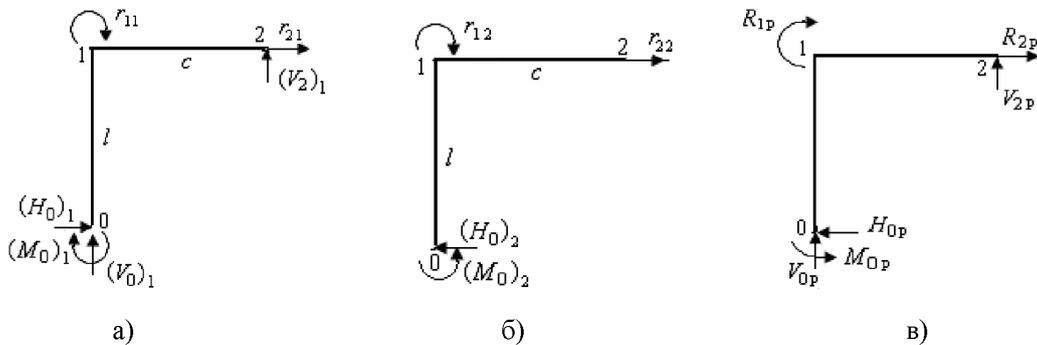


Рис. 37. Схемы опорных реакций в узлах рамы при различных нагружениях: а) схема опорных реакций при единичном угловом перемещении узла 1; б) схема опорных реакций при единичном линейном перемещении узла 2; в) схема опорных реакций от нагрузки

Действительные значения опорных реакций для схемы нагружения плоской рамы, представленной на рис. 38, могут быть найдены из выражений

$$M_0 = M_{0p} - (M_0)_1 \cdot z_1 + (M_0)_2 \cdot z_2 = 5 - 7,5 + 21,25 = 18,75 \text{ кНм};$$

$$H_0 = H_{0p} - (H_0)_1 \cdot z_1 + (H_0)_2 \cdot z_2 = 10 - 11,25 + 21,25 = 20 \text{ кН};$$

$$V_0 = V_{0p} + (V_0)_1 \cdot z_1 = 25 - 5,625 = 19,375 \text{ кН};$$

$$V_2 = V_{2p} + (V_2)_1 \cdot z_1 = 15 + 5,625 = 20,625 \text{ кН}.$$

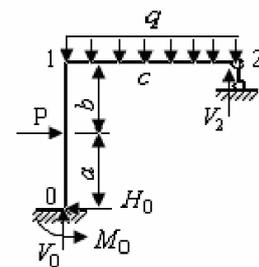


Рис. 38. Схема нагружения и опорные реакции

2.7. Определение внутренних силовых факторов в поперечных сечениях плоской рамы

Представим заданную расчетную схему плоской рамы (рис. 39, а). На рис. 39, б изобразим нагрузку и опорные реакции в узлах 0 и 2.

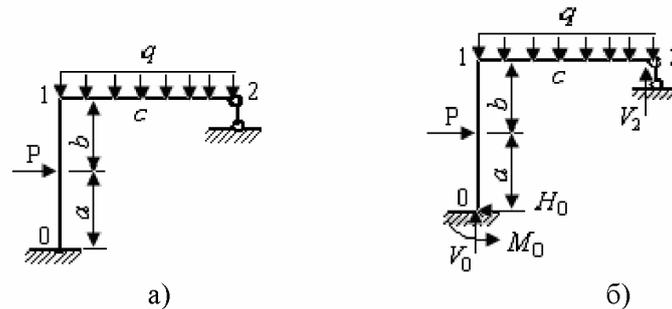


Рис. 39. Схемы плоской рамы: а) заданная схема; б) заданная схема с опорными реакциями

Зная заданную нагрузку и опорные реакции, традиционным способом определяем внутренние силовые факторы в поперечных сечениях стержневых участков плоской рамы.

Продольная сила в поперечных сечениях плоской рамы определяется как

$$N = -V_0 = -19,375 \text{ кН}, \quad 0 \leq x_1 \leq a; \quad N = -V_0 = -19,375 \text{ кН}, \quad 0 \leq x_2 \leq b;$$

$$N = 0, \quad 0 \leq x_3 \leq c,$$

где x_1 , x_2 , x_3 – координаты поперечных сечений на участках a , b и c (положение сечения определяется от начала соответствующего участка).

Поперечная сила в поперечных сечениях плоской рамы определяется как

$$Q_y = H_0 = 20 \text{ кН}, \quad 0 \leq x_1 \leq a; \quad Q_y = H_0 - P = 20 - 20 = 0, \quad 0 \leq x_2 \leq b;$$

$$Q_y = V_0 - q \cdot x_3 = 19,375 - 20 \cdot x_3, \quad 0 \leq x_3 \leq c;$$

$$Q_y = 19,375 \text{ кН} \text{ при } x_3 = 0; \quad Q_y = -20,625 \text{ кН} \text{ при } x_3 = c = 2 \text{ м.}$$

Изгибающий момент в поперечных сечениях плоской рамы определяется как

$$M_z = -M_0 + H_0 \cdot x_1 = -18,75 + 20 \cdot x_1, \quad 0 \leq x_1 \leq a;$$

$$M_z = -18,75 \text{ кНм} \text{ при } x_1 = 0; \quad M_z = 1,25 \text{ кНм} \text{ при } x_1 = a = 1 \text{ м};$$

$$M_z = -M_0 + H_0 \cdot (a + x_2) - P \cdot x_2 = -18,75 + 20 \cdot (1 + x_2) - 20 \cdot x_2, \quad 0 \leq x_2 \leq b;$$

$$M_z = 1,25 \text{ кНм}, \quad 0 \leq x_2 \leq b;$$

$$M_z = V_2 \cdot (c - x_3) - \frac{1}{2} q (c - x_3)^2 = 20,625 \cdot (2 - x_3) - \frac{1}{2} \cdot 20 (2 - x_3)^2, \quad 0 \leq x_3 \leq c;$$

$$M_z = 1,25 \text{ кНм} \text{ при } x_3 = 0; \quad M_z = 10,625 \text{ кНм} \text{ при } x_3 = 1 \text{ м}; \quad M_z = 0 \text{ при } x_3 = 2 \text{ м.}$$

Эпюры внутренних силовых факторов в поперечных сечениях плоской рамы представлены на рис. 40.

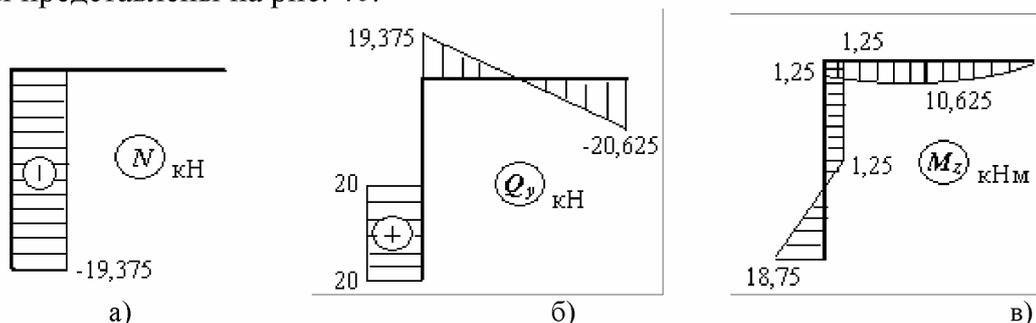


Рис. 40. Эпюры внутренних силовых факторов: а) эпюра продольной силы N ; б) эпюра поперечной силы Q_y ; в) эпюра изгибающего момента M_z

2.8. Проверка решения

Выполним статическую проверку, рассмотрев равновесие системы сил, действующих на плоскую раму, включая и опорные реакции. Схема нагружения рамы представлена на рис. 41.

Для плоской системы сил можем записать следующие уравнения равновесия:

- сумма проекций сил на горизонтальную ось (полагаем, что это ось x) равна нулю

$$\sum X_i = 0, \quad P - H_0 = 0, \quad 20 - 20 = 0;$$

- сумма проекций сил на вертикальную ось (полагаем, что это ось y) равна нулю

$$\sum Y_i = 0, \quad V_0 + V_2 - q \cdot c = 0, \quad 19,375 + 20,625 - 20 \cdot 2 = 0, \quad 40 - 40 = 0;$$

- сумма моментов сил относительно точки 0 равна нулю

$$\sum M_0(P_i) = 0, \quad M_0 - P \cdot a - qc^2 / 2 + V_2 \cdot c = 0,$$

$$18,75 - 20 \cdot 1 - 20 \cdot 2^2 / 2 + 20,625 \cdot 2 = 0, \quad 18,75 - 20 - 40 + 41,25 = 0, \quad 60 - 60 = 0.$$

Можно рассмотреть равновесие узла 1. Для этого вырежем узел 1 и в прилегающих сечениях приложим внутренние силы (рис. 42). Рассмотрим равновесие сил, проецируя их на вертикальную ось:

$$\sum Y_i = 0, \quad 19,375 - 19,375 = 0.$$

Рассмотрим условие равновесия в виде суммы моментов сил относительно точки 1:

$$\sum M_i = 0, \quad 1,25 - 1,25 = 0.$$

Условия равновесия выполняются.

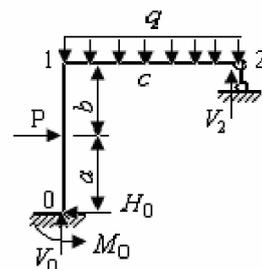


Рис. 41. Схема нагружения рамы и опорные реакции

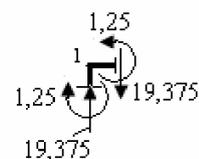


Рис. 42. Схема сил в прилегающих сечениях узла 1

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данные методические указания посвящены изложению одного из методов расчета статически неопределимых стержневых систем – метода перемещений. Материал знакомит читателя с особенностями кинематического анализа стержневой системы и построения основной системы метода перемещений.

Приведены табличные данные о различных схемах нагружения однопролетных статически неопределимых балок и соответствующие этим нагружениям эпюры изгибающих моментов и опорные реакции. Следует отметить, что представленные в методических указаниях табличные данные о различных схемах нагружения однопролетных статически неопределимых балок содержат более полную информацию, чем имеющиеся сведения в учебной литературе.

Приведены канонические уравнения метода перемещений, изложена последовательность определения коэффициентов и свободных членов канонических уравнений. Последовательность определения коэффициентов и свободных членов канонических уравнений показана на примерах анализа плоских рам.

Представлена процедура решения канонических уравнений и перехода к определению внутренних силовых факторов в поперечных сечениях стержневых участков плоской рамы.

В работе дан пример расчета статически неопределимой плоской рамы методом перемещений, начиная от формулировки задания с последовательным изложением всех этапов расчета.

Подробное изложение материала направлено на представление читателю более полной информации при самостоятельной работе по теме.

В приложении даны расчетные схемы статически неопределимых плоских рам, которые могут быть использованы для выдачи контрольных заданий.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Дарков А. В. Строительная механика / А. В. Дарков, Н. Н. Шапошников. – М.: Высш. шк., 1986. – 607 с.
2. Дарков А. В. Строительная механика / А. В. Дарков, Н. Н. Шапошников. – М.: Высш. шк., 2000. – 630 с.
3. Снитко Н. К. Строительная механика / Н. К. Снитко. – М.: Высш. шк., 1980. – 431 с.
4. Клейн Г. К. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики / Г. К. Клейн, В. Г. Рекач, Г. И. Розенблат. – М.: Высш. шк., 1978. – 318 с.