ОПД.Р.03 СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА
РАСЧЕТ ПЛОСКОЙ РАМЫ
МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Методические указания

Указания составлены в соответствии с программой курса «Строительная механика» и предназначены для студентов строительных специальностей.

Приведенный материал может быть использован для выполнения студентами соответствующей расчетно-графической работы, а также инженерами, работающими в области расчета стержневых систем.

Работа подготовлена на кафедре «ТиПМ».

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ РАСЧЕТА

Рассматриваются основные этапы расчета плоской рамы методом перемещений.

1.1. Кинематический анализ

Степенью или числом кинематической неопределимости стержневой системы (рамы) называется число перемещений, которые определяют деформированное состояние системы и, следовательно, все внутренние силовые факторы в ней.

Принимая перемещения за известные, пренебрегаем влиянием продольных и поперечных сил на деформацию стержней рамы, учитывая лишь их деформацию изгиба.

Кроме того, считаем, что углы сопряжения стержней до и после деформации не изменяются.

Эти допущения, принятые при расчете рамы методом перемещений, аналогичны допущениям при расчете методом сил, в связи с чем, результаты расчета одной и той же рамы методами перемещений и сил полностью совпадают.

За неизвестные в методе перемещений принимаются углы поворота узлов (сечения сопряжения стержней) и линейные перемещения вдоль оси стержней. При этом линейные перемещения вдоль оси стержня в начале и конце его равны между собой и принимаются за одно, согласно допущению отсутствия продольной деформации.

Степень кинематической неопределимости n задачи равна сумме числа неизвестных углов поворота $n_у$ узлов и неизвестных линейных перемещений $n_л$, т. е. определяется по формуле

$$n = n_у + n_л\,. \qquad (1.1)$$

Число неизвестных углов поворота $n_у$ узлов равно числу только жестких узлов рамы.

«Жестким» узлом считается:

сечение сопряжения двух или нескольких стержней, в котором нет сквозного (полного) шарнира (рис. 1.1, а, соответственно узлы *1, 2, 3, 4; 1, 2, 3; 1, 2*);

– сечение сопряжения двух или нескольких стержней, в котором расположен присоединенный шарнир (рис. 1.1, б, узлы *1, 2; 1, 2, 3*).

Очевидно, в число подсчета «жестких» узлов не входят узлы, в которых известны угловые перемещения (жесткие закрепления) и заданные (при расчете по заданным перемещениям).

Число неизвестных линейных перемещений определяется с помощью шарнирной схемы (*ШС*).

Шарнирная схема рамы строится путем введения сквозных шарниров во все узлы и жесткие опоры.

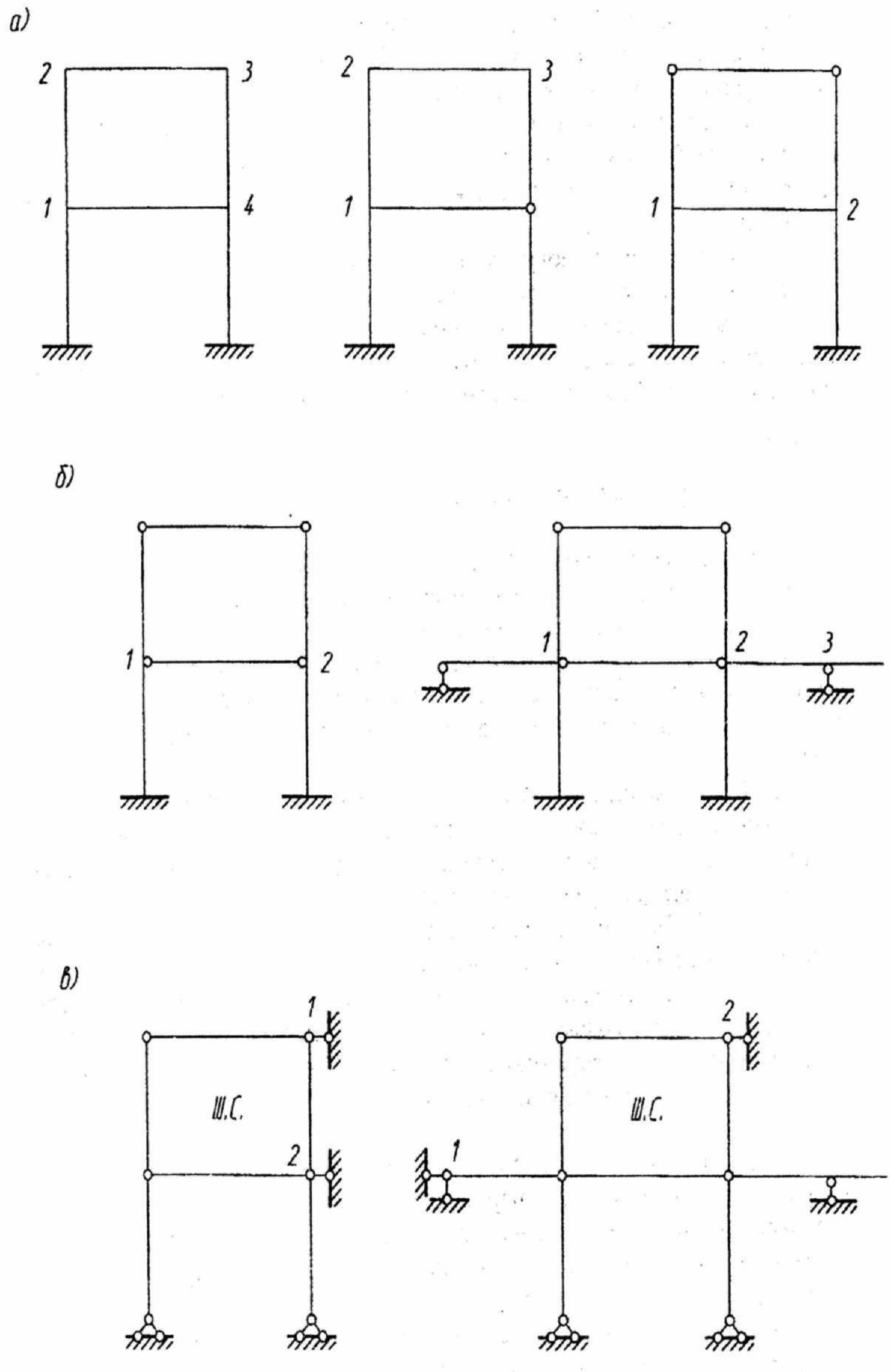


Рис. 1.1. Примеры узлов и линейных связей

Степень, или число геометрической изменяемости шарнирной схемы рамы, и определяет число неизвестных линейных перемещений. Т. е. число линейных перемещений рамы равно числу стержней (связей), которое необходимо ввести в шарнирную схему рамы, чтобы превратить ее из геометрически изменяемой в геометрически неизменяемую.

Очевидно, в силу допущения: длина стержней до и после деформации не изменяется, на шарнирной схеме определяется число независимых неизвестных линейных перемещений. На рис. 1.1, в представлены шарнирные схемы рассмотренных выше рам и определены линейные перемещения (введены линейные связи 1, 2).

1.2. Построение основной системы

Основной системой (*ОС*) называется такая стержневая система, которая кинематически определимая, геометрически неизменяемая и эквивалентная заданной системе (*ЗС*).

В отличие от метода сил, где основная система строится путем отбрасывания «лишних» связей, в методе перемещений в заданную стержневую систему (раму) вводится $n_у$ угловых и $n_л$ линейных связей.

Действие введенных связей компенсируется соответствующими угловыми и линейными перемещениями и, следовательно, к основной системе, кроме заданной нагрузки, прикладываются искомые перемещения, число которых равно числу введенных связей (рис. 1.2). Основная система рамы метода перемещений имеет единственный вариант в отличие от метода сил.

Отсутствие моментов и сил во введенных связях основной системы по направлениям неизвестных перемещений лежит в основе уравнений равновесия метода перемещений, подобно тому, как в основе уравнений неразрывности деформаций метода сил, лежит отсутствие перемещений по направлениям неизвестных сил.

Далее необходимо сформировать систему уравнений равновесия метода перемещений. Неизвестные перемещения должны быть такими, чтобы в основной системе моменты и силы во введенных связях были равны нулю. Только в этом случае перемещения узлов будут равны действительным, а напряженное и деформированное состояния основной системы равно напряженному и деформированному состоянию заданной системы.

Система уравнений равновесия метода представляет собой систему линейных алгебраических неоднородных уравнений и носит стандартный характер для процедуры метода перемещений.

Матрица коэффициентов при неизвестных системы алгебраических уравнений равновесия метода перемещений всегда симметричная и положительно определенная.

Для задачи n раз кинематически неопределимой, согласно линейной связи между нагрузкой и деформацией и принципу независимости действия сил, система уравнений равновесия будет:

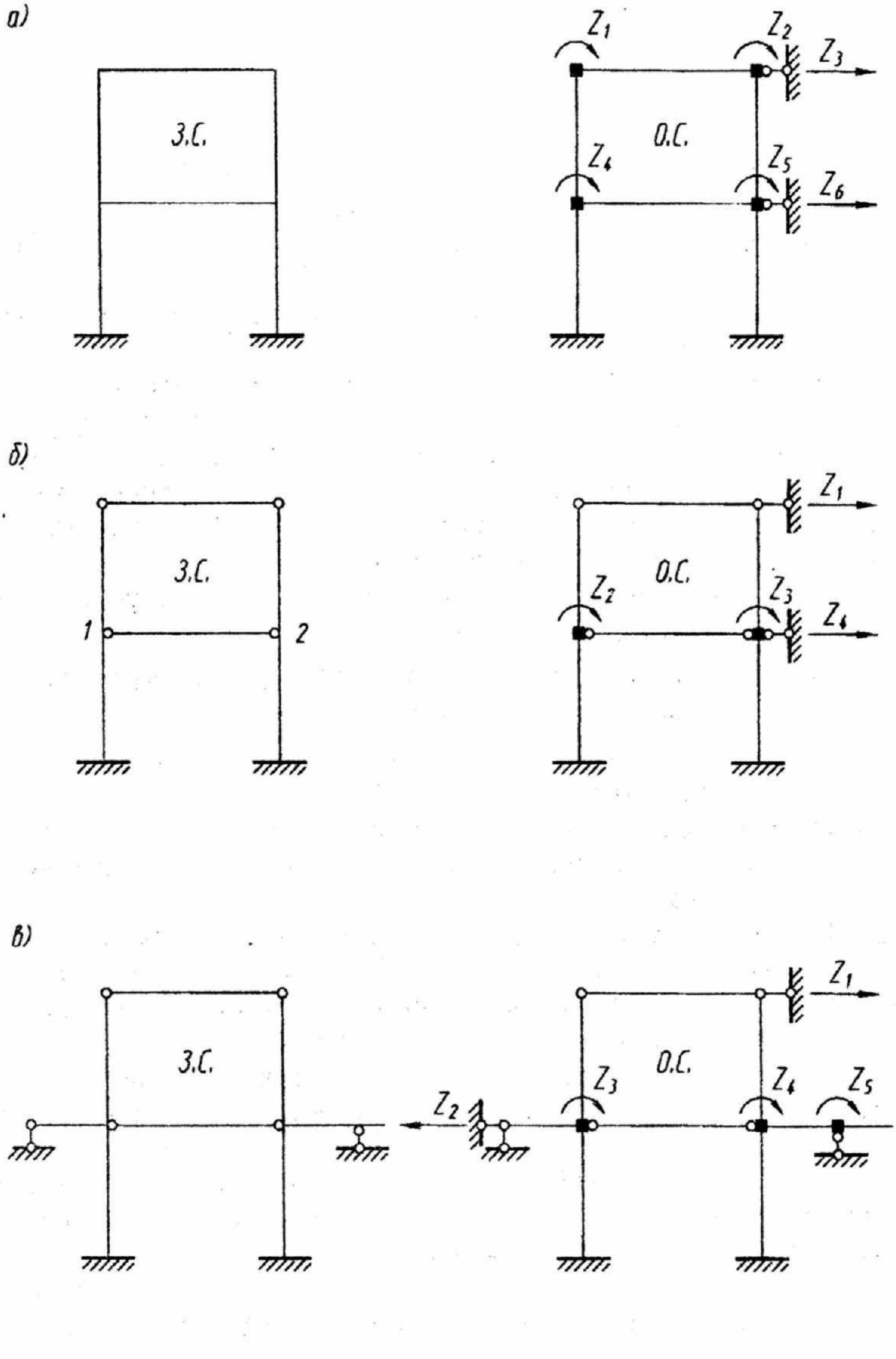


Рис. 1.2. Примеры заданных схем рам и их основных систем

$$
\begin{cases}
r_{11}z_1 + r_{12}z_2 + \ldots + r_{1n}z_n + R_{1P} = 0, \\
r_{21}z_1 + r_{22}z_2 + \ldots + r_{2n}z_n + R_{2P} = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
r_{n1}z_1 + r_{n2}z_2 + \ldots + r_{nn}z_n + R_{nP} = 0,
\end{cases} \tag{1.2}
$$

где $z_1 \div z_n$ – искомые перемещения или неизвестные системы линейных алгебраических уравнений равновесия;

$r_{11} - r_{nn}$ – реакции во введенных связях от единичных перемещений или коэффициенты при неизвестных системы линейных алгебраических уравнений равновесия;

R_{1P} R_{nP} – реакции во введенных связях от заданной нагрузки или свободные члены системы линейных алгебраических уравнений.

Реакции в системе уравнений равновесия метода перемещений имеют два индекса. Первый индекс реакции указывает номер связи и ее направление, а второй – номер единичного перемещения (нагрузку), которое вызывает эту реакцию, т. е. второй индекс реакции соответствует обозначению (номеру) эпюры вспомогательных изгибающих моментов, на которой расположена данная реакция, например:

r_{11} – реакция в связи z_1 по ее направлению от перемещения z_1=1, расположенная на эпюре $\overline{M}_1$,

r_{23} – реакция в связи z_2 по ее направлению от перемещения z_3=1, расположенная на эпюре $\overline{M}_3$,

R_{2P} – реакция в связи z_2 по ее направлению от заданной нагрузки, расположенная на эпюре M_p.

Реакции во введенных связях от единичных перемещений можно трактовать как соответствующие угловые и линейные жесткости.

Побочные реакции во введенных связях (с одинаковыми индексами) равны между собой r_{12}=r_{21}, r_{13}=r_{31}, … , r_{1n}=r_{n1}, а главные реакции r_{11}, r_{22}, … , r_{nn} всегда больше нуля.

Таким образом, дальнейший расчет заданной системы заменяется расчетом ее основной системы, эквивалентность которой обоснована выше.

Метод перемещений является обратной задачей по отношению к методу сил: в методе сил податливости и искомые силы, а в методе перемещений – жесткости и искомые перемещения.

1.3. Построение вспомогательных эпюр изгибающих моментов

Грузовая эпюра M_p от заданной нагрузки определяет единицы измерений длины и силы, принятые в расчете.

Единичные эпюры изгибающего момента строятся от поочередного действия искомых перемещений, равных безразмерной единице, по выбранному направлению, а грузовая эпюра – от заданной нагрузки. Эпюры строятся на основной системе рамы.

Построение этих эпюр выполняется с помощью табл. 1 и табл. 2, где приведены эпюры изгибающих моментов от различных единичных перемещений и нагрузки для вариантов однопролетных статически неопределимых балок, из которых состоит основная система метода перемещений.

1.4. Формирование системы уравнений и ее решение

Чтобы получить систему уравнений равновесия метода перемещений (1.2) необходимо вычислить все реакции во введенных связях, которые, как отмечалось, входят в уравнения как коэффициенты при неизвестных или как свободные члены.

Прежде, чем приступить к определению реакций, необходимо их нанести на соответствующие эпюры изгибающих моментов. При этом, согласно определению, второй индекс реакции соответствует индексу эпюры моментов, а первый – номеру связи и ее направлению.

Далее, вырезаются поочередно все узлы рамы и с помощью следующих уравнений статики:

$$\sum X = 0,$$
$$\sum Y = 0,$$
$$\sum M = 0$$

определяются в узлах реакции силы и реакции моменты.

Решение системы уравнений равновесия рекомендуется выполнять методом исключения Гаусса. В результате решения системы уравнений определяются искомые перемещения.

1.5. Построение эпюры изгибающего момента

На основе принципа независимости действия сил и линейной связи между нагрузкой и деформацией можно записать следующее выражение для изгибающего момента

$$M = \overline{M}_1 z_1 + \overline{M}_2 z_2 + \ldots + \overline{M}_n z_n + M_p, \tag{1.3}$$

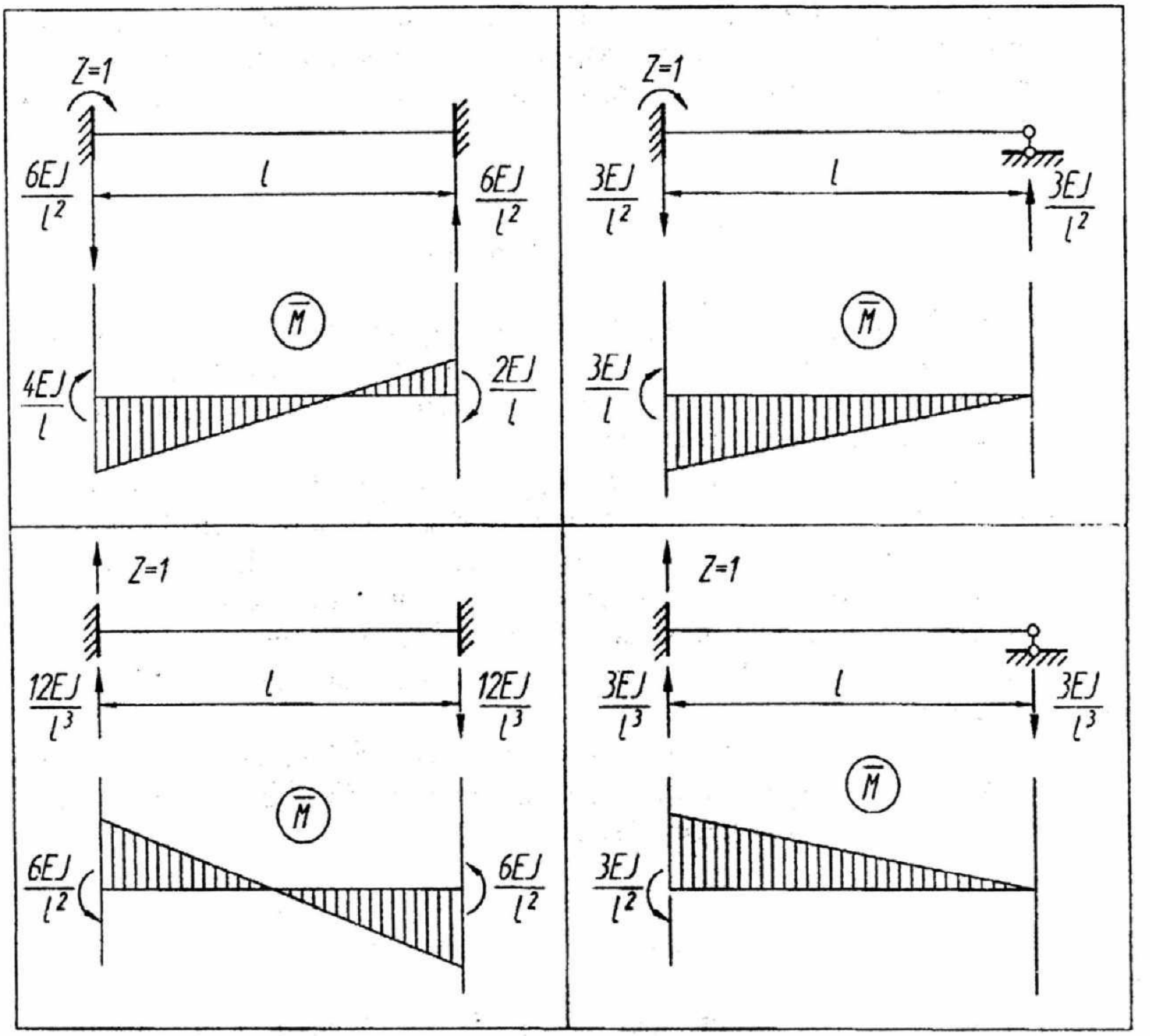
которое позволяет построить эпюру изгибающего момента для основной системы от заданной нагрузки и перемещений, что тоже для заданной схемы от нагрузки, ввиду их эквивалентности.

При построении вспомогательных эпюр изгибающих моментов от вычисленных перемещений $\overline{M}_1 z_1$, $\overline{M}_2 z_2, \ldots$, $\overline{M}_n z_n$ необходимо увеличить все ординаты соответствующих эпюр $\overline{M}_1, \overline{M}_2, \ldots, \overline{M}_n$ в $z_1, z_2, \ldots, z_n$ раз с учетом их знака.

Согласно (1.3) сложение эпюр выполнить для каждого участка по их границам.

Таблица 1

Эпюры изгибающих моментов в стержнях основной системы рамы от единичных перемещений



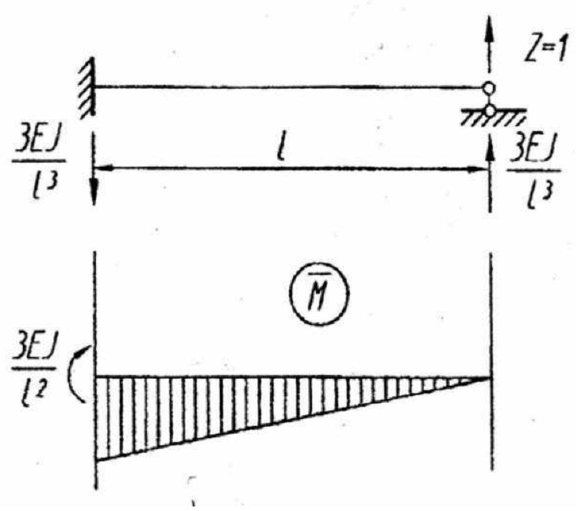
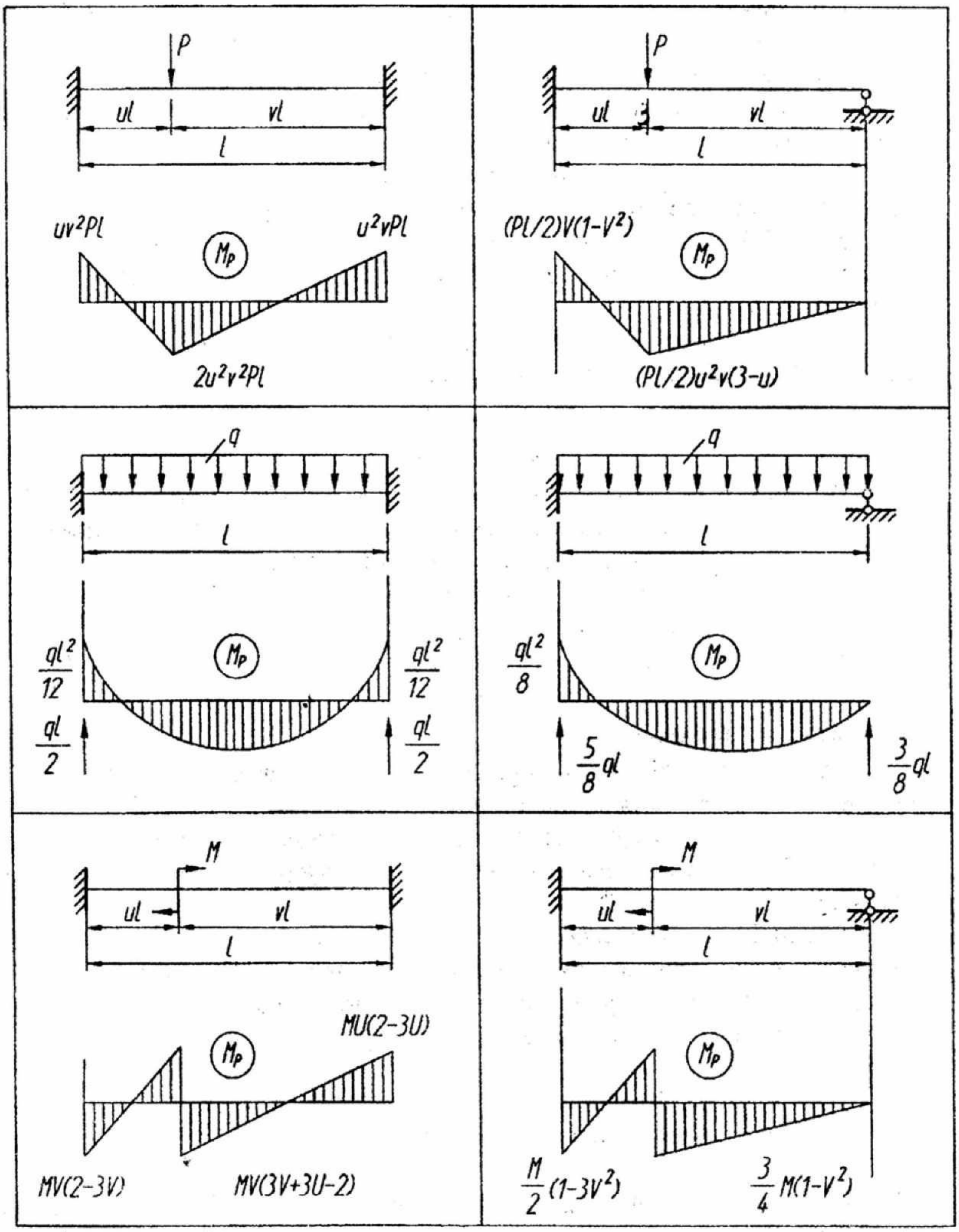


Таблица 2

Эпюры изгибающих моментов в стержнях основной системы рамы от вариантов заданной нагрузки



Примечание: если стержень загружен двумя или более вариантами нагрузок, то эпюра M_p равна сумме эпюр вариантов.

1.6. Построение эпюры поперечной силы

Эпюра поперечной силы для заданной схемы строится путем дифференцирования эпюры изгибающего момента, согласно зависимости между изгибающим моментом и поперечной силой. Дифференцирование эпюры моментов выполняется строго по участкам рамы.

На рис. 1.3 приведены примеры дифференцирования эпюр изгибающего момента и соответствующие эпюры поперечной силы.

На рис. 1.3, а рассмотрены варианты линейного изменения ординат эпюры изгибающего момента на участке длиной l (участок без нагрузки), а на рис. 1.3, б изменение ординат эпюры изгибающих моментов по квадратной параболе (участок нагружен постоянной распределенной нагрузкой q).

Значения поперечной силы на расчетном участке рамы слева $Q_л$ и справа $Q_{пр}$ вычисляются по формуле

$$Q_л = Q_л^0 + tg\alpha,$$
$$Q_{пр} = Q_{пр}^0 + tg\alpha, \qquad (1.4)$$

где $Q_л^0$, $Q_{пр}^0$ – соответственно, значения поперечной силы слева и справа от действия нагрузки на участке рамы, численно равные реакциям двух опорной балки;

$tg\alpha$ – тангенс угла наклона линейной составляющей эпюры моментов к оси стержня.

Очевидно, для участков рамы без нагрузки (рис. 1.3, а) будет

$$Q_л^0 = Q_{пр}^0 = 0,$$

а значение поперечной силы равно $tg\alpha$.

Знак поперечной силы определяется по характеру наклона эпюры моментов к оси стержня и представлен на рис. 1.3.

Для участков, нагруженных распределенной нагрузкой q (рис. 1.3, б), эпюра моментов расслаивается на линейную эпюру и эпюру от заданной нагрузки.

На линейной составляющей вычисляется тангенс угла, а от нагрузки на участке вычисляются реакции и определяются их направления, которые и определяют величину и знак поперечной силы в соответствии с правилом знаков для их построения.

1.7. Построение эпюры продольной силы

Эпюра продольной силы N строится по эпюре поперечной силы Q путем поочередного вырезания узлов и составления уравнений равновесия:

$$\sum X = 0,$$
$$\sum Y = 0.$$

Поперечные силы, действующие в стержнях узла, уравновешиваются искомыми продольными силами.

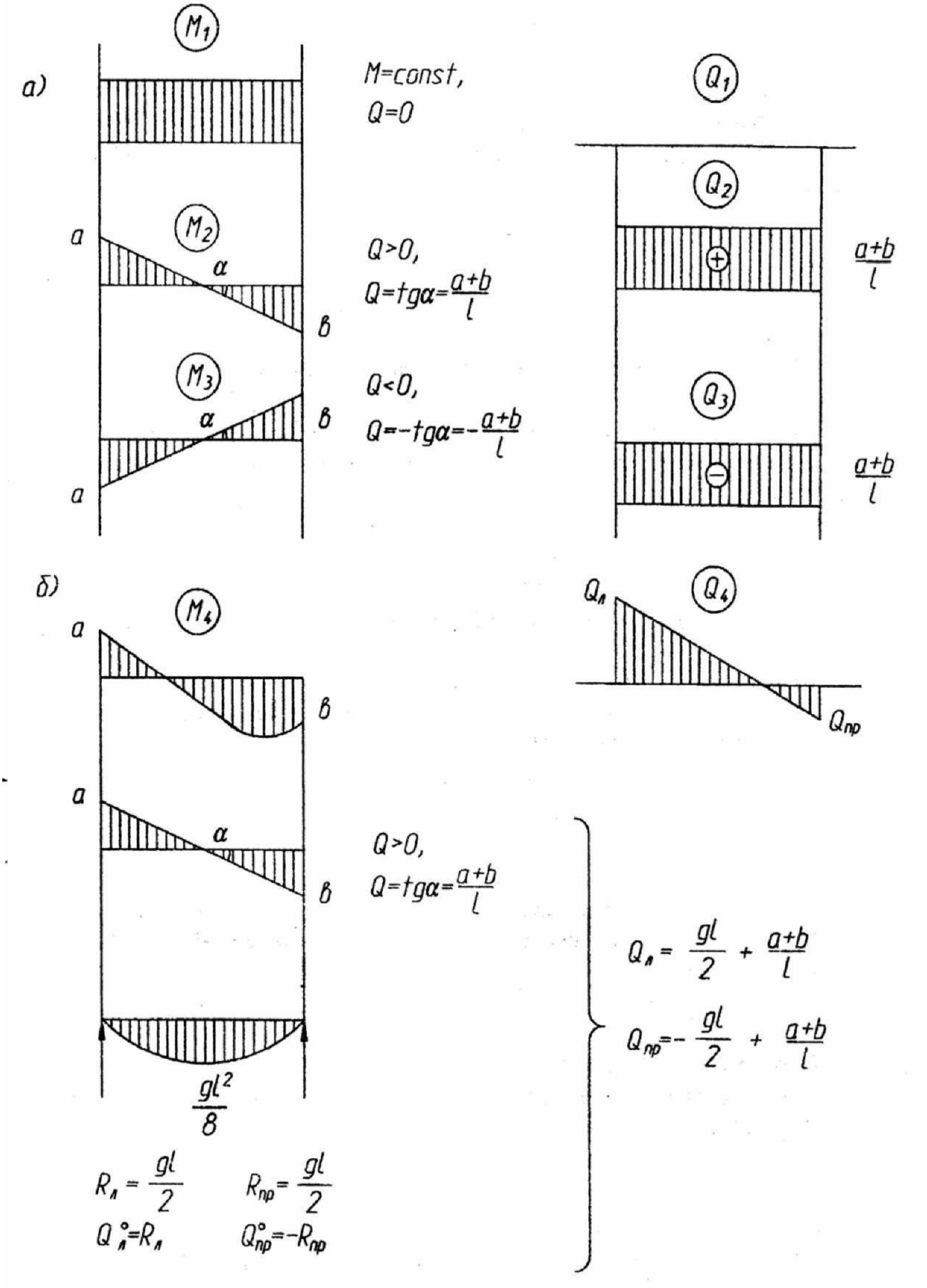


Рис. 1.3. Примеры построения эпюр поперечной силы
по эпюрам изгибающих моментов

1.8. Статическая проверка

Необходимым условием контроля решения задачи является статическая проверка: равенство нулю суммы проекций нагрузки (сил) и реакций опор на оси координат, т. е. $\sum X = 0$, $\sum Y = 0$.

Реакции опор рамы определяются непосредственно на эпюрах поперечной и продольной силы.

ПРИМЕР РАСЧЕТА

Приведен пример выполнения расчетно-графической работы.

Для заданной схемы рамы (рис. 2.1, а) построить эпюры изгибающего момента, поперечной и продольной сил методом перемещений. Выполнить статическую проверку. $EI = const.$

1. Кинематический анализ

$$n = n_{ó} + n_{ё} = 2 + 1 = 3$$

Задача трижды кинематически неопределимая.

2. Построение основной системы

Основная система образована путем введения n связей (рис. 2.1, б). Система уравнений равновесия будет:

$$\begin{cases} r_{11}z_1 + r_{12}z_2 + r_{13}z_3 + R_{1P} = 0, \\ r_{21}z_1 + r_{22}z_2 + r_{23}z_3 + R_{2P} = 0, \\ r_{31}z_1 + r_{32}z_2 + r_{33}z_3 + R_{3P} = 0. \end{cases}$$

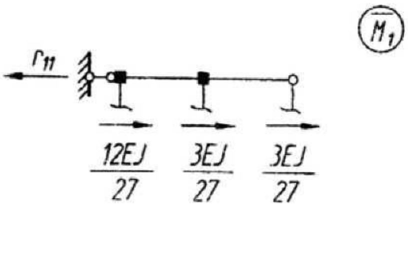
3. Построение вспомогательных эпюр изгибающих моментов

Вспомогательные эпюры построены с использованием табл. 1, табл. 2 и приведены на рис. 1.4, в.

Единицы измерений: длина – м, сила – кН.

4. Формирование системы уравнений и ее решение

Коэффициенты системы уравнений равновесия (реакции в введенных связях) определены из условий равновесия:



$r_{11} = 2/3EJ$

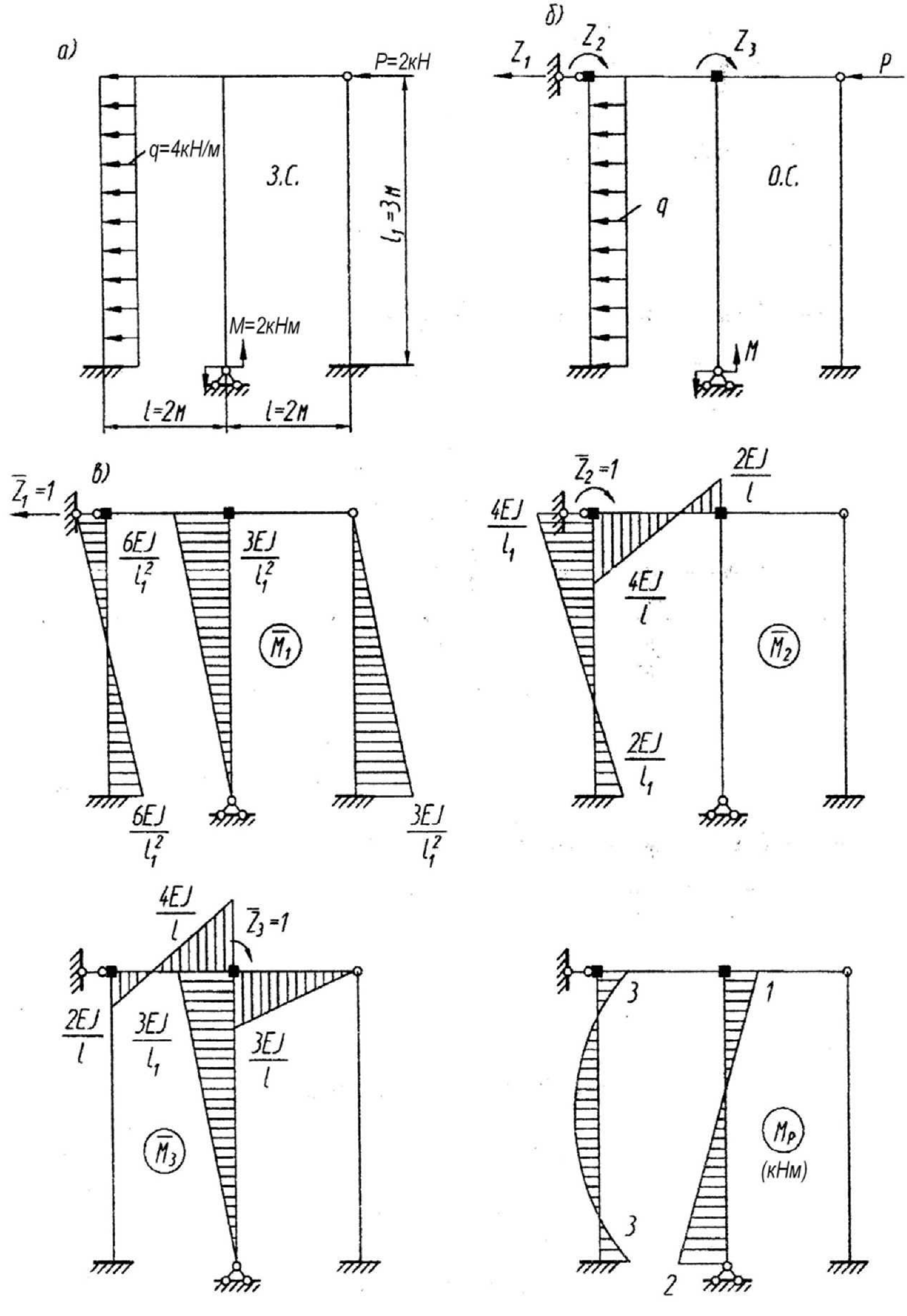
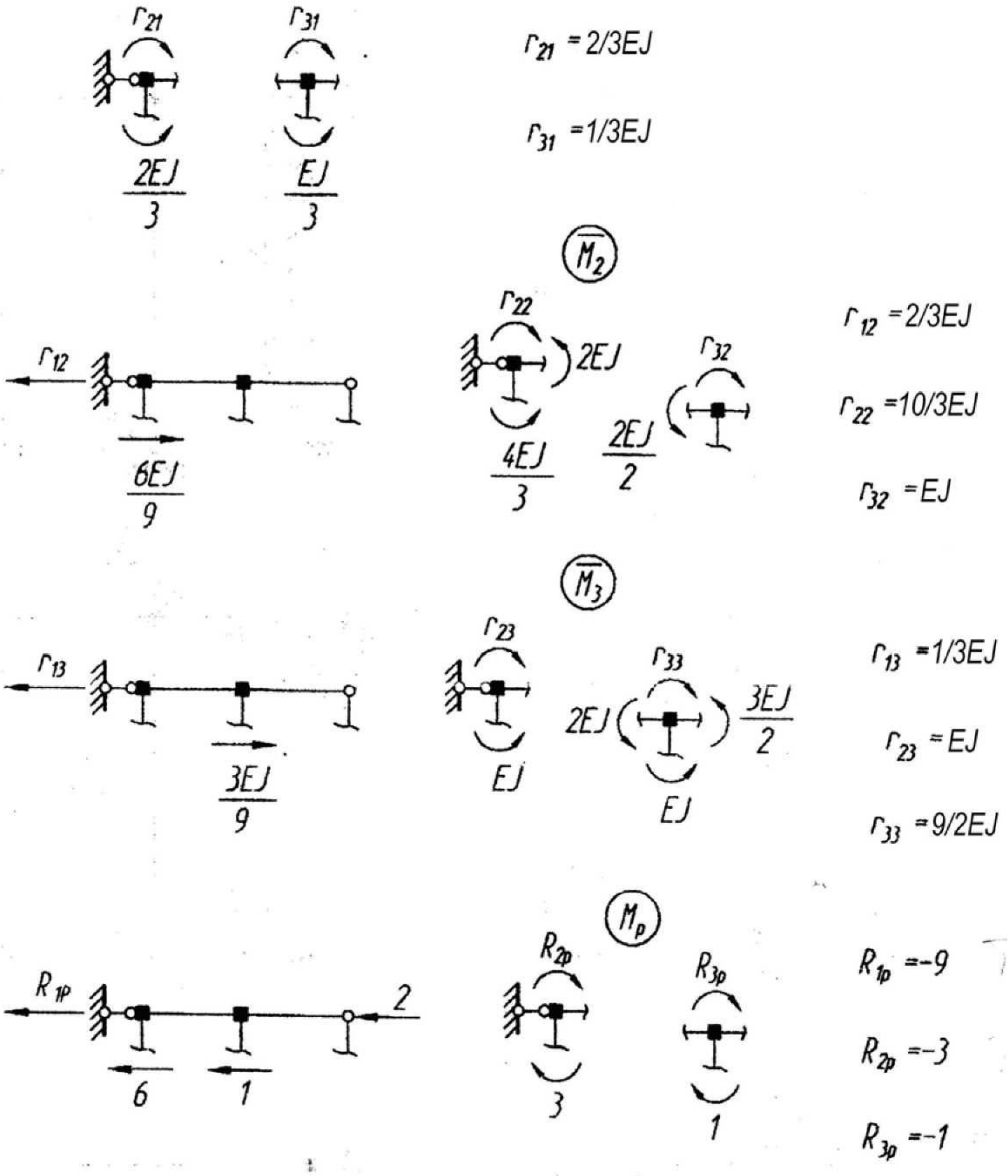


Рис. 1.4. Вспомогательные эпюры изгибающего момента



Обозначим

$$x_1 = z_1 \cdot EI,$$
$$x_2 = z_2 \cdot EI,$$
$$x_3 = z_3 \cdot EI.$$

Тогда система уравнений будет:

$$\begin{cases} 2/3 \cdot x_1 + 2/3 \cdot x_2 + 1/3 \cdot x_3 = 9, \\ 2/3 \cdot x_1 + 10/3 \cdot x_2 + x_3 = 3, \\ 1/3 \cdot x_1 + x_2 + 9/3 \cdot x_3 = 1, \end{cases}$$

решение которой и определяет искомые угловые и линейные перемещения:

$$z_1 = \frac{15{,}82}{EI}(\grave{\imath}\ ),$$

$$z_2 = \frac{2{,}13}{EI}(\ \eth\grave{a}\ddot{a}),$$

$$z_2 = -\frac{0{,}48}{EI}(\ \eth\grave{a}\ddot{a}).$$

Примечание: если жесткость стержней рамы различная, то необходимо выразить все заданные жесткости через одну (проще – через наименьшую жесткость стержня), например:

EI_1 – жесткость 1-го участка (какого-либо стержня),

EI_2 – жесткость 2-го участка,

EI_3 – жесткость 3-го участка,

кроме этого дано:

$$EI_1 = 2EI_2, EI_2 = 3EI_3\,.$$

Наименьшая жесткость 3-го участка. Введем обозначение.

Пусть $EI_3 = EI$,

тогда

$$EI_2 = 3EI_3 = 3EI,\ \mathrm{EI}_1 = 2EI_2 = 6EI.$$

Очевидно, что при формировании системы уравнений равновесия реакции (коэффициенты при неизвестных) будут выражены через одну жесткость EI.

5. Построение эпюры изгибающего момента

Эпюра изгибающего момента M для заданной схемы построена с использованием следующей зависимости (принцип независимости действия сил и линейная связь между нагрузкой и деформацией):

$$M = \overline{M}_1 z_1 + \overline{M}_2 z_2 + \overline{M}_3 z_3 + \overline{M}_p$$

и приведена на рис. 1.5, а.

6. Построение эпюры поперечной силы

Эпюра поперечной силы Q построена по эпюре изгибающего момента M путем ее дифференцирования с использованием формулы (1.4) и приведена на рис. 1.5, б.

7. Построение эпюры продольной силы

В соответствии с нумерацией узлов, представленной на эпюре поперечной силы, «вырезаны» узлы рамы, в сечениях стержней которых приложены действующие поперечные силы (рис. 1.6, а).

Искомые продольные силы в каждом узле подчеркнуты и определены из уравнений равновесия. По значениям этих сил построена эпюра продольной силы N (рис. 1.5, в).

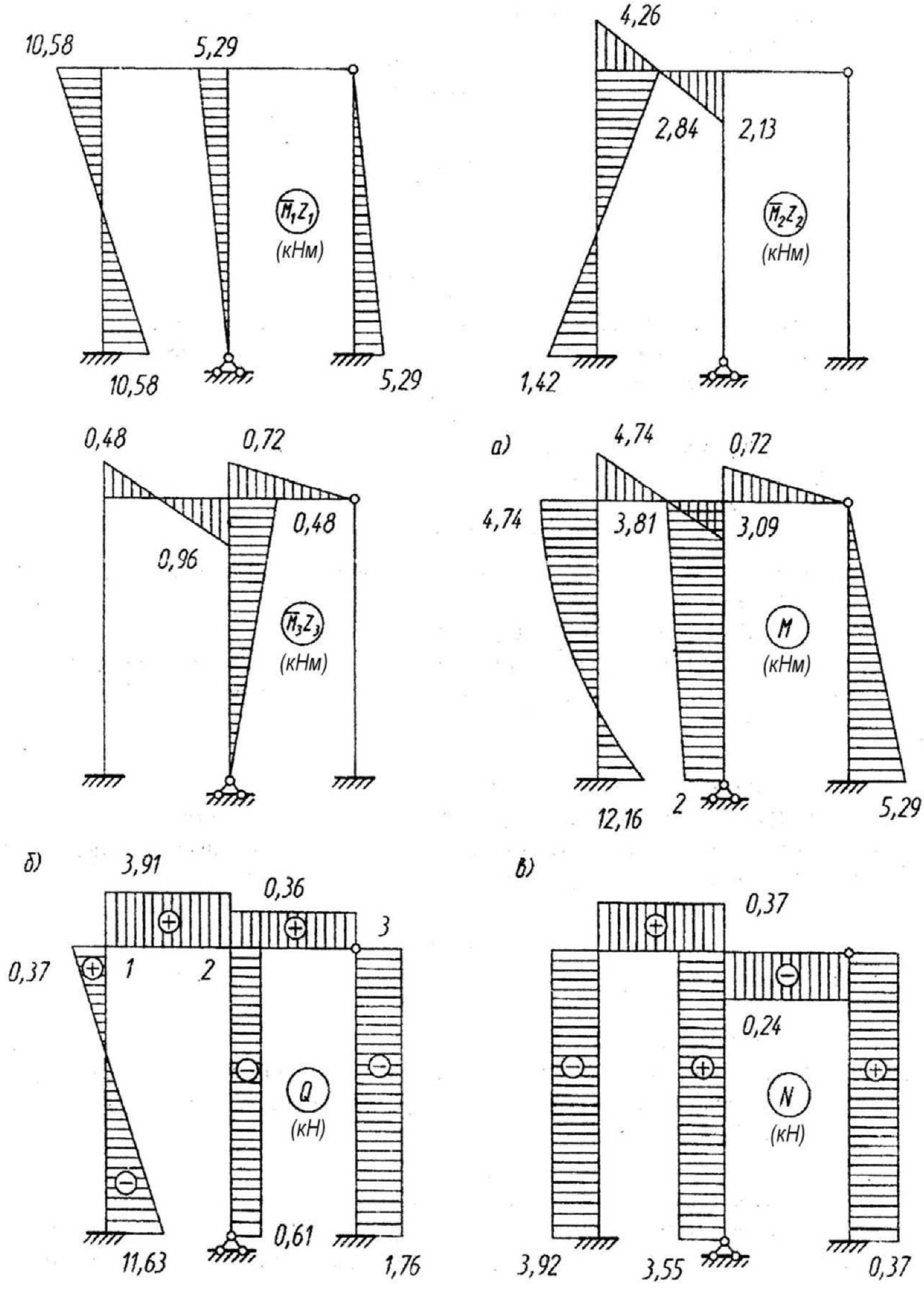


Рис. 1.5. Эпюры изгибающего момента, поперечной и продольной сил для заданной расчетной схемы рамы

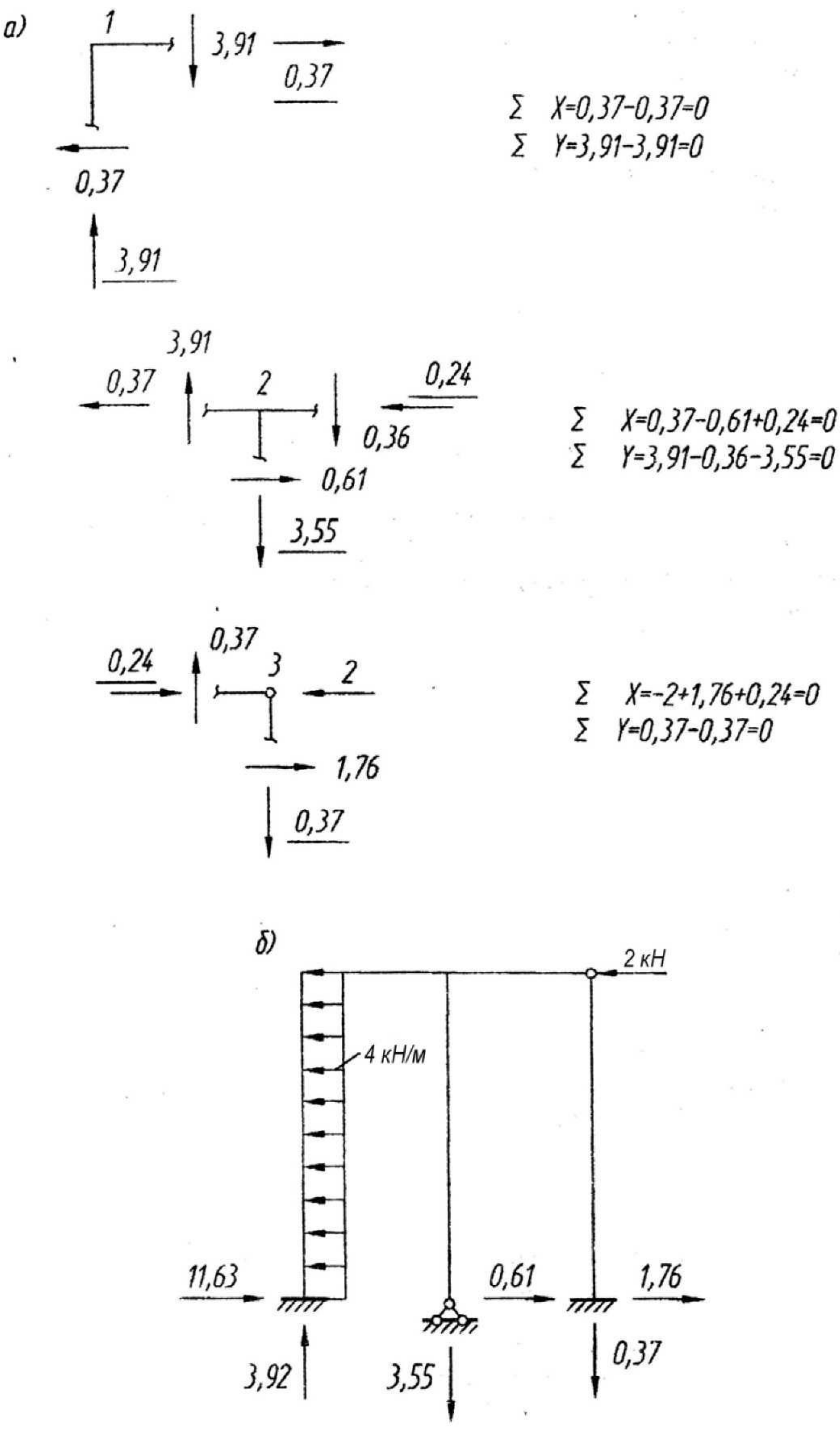


Рис. 1.6. Равновесие узлов рамы

8. Статическая проверка

Реакции опор определяются на эпюрах Q и N. Вертикальной нагрузки нет (рис. 1.6, б).

$$\sum X = -2 + 11{,}63 + 0{,}61 + 1{,}76 - 12 = 0,$$
$$\sum Y = 3{,}55 + 0{,}37 - 3{,}92 = 0.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Дарков, А. В. Строительная механика / А. В. Дарков, Н. Н. Шапошников. – М. : Высшая школа, 2000. – 630 с.

2. Манжосов, В. К. Расчет статически неопределимой рамы методом перемещений : методические указания / В. К. Манжосов. – Ульяновск : УлГТУ, 2007. – 48 с.

3. Снитко, Н. К. Строительная механика / Н. К. Снитко. – М. : Высшая школа, 1992. – 486 с.