

ОПД.Р.03 СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА
РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ
МЕТОДОМ СИЛ
Учебное издание

Оглавление

1. Общие понятия	3
2. Расчет статически неопределимых стержневых систем методом сил	7
3. Особенности расчета методом сил многопролетных неразрезных балок.....	17
4. Использование свойств симметрии при раскрытии статической неопределимости стержневых систем	30
5. Расчет методом сил статически неопределимых систем, работающих на растяжение или сжатие	34
6. Расчет статически неопределимых стержневых систем методом сил в матричной форме	44
Библиографический список.....	57

1. Общие понятия

Для того чтобы стержневые системы (балки, рамы и т. п.) могли служить сооружениями и выдерживать внешние нагрузки, необходимо наложить на них определенные связи, которые делят на связи внешние и связи внутренние.

Под связью обычно понимают тела (препятствия), ограничивающие перемещение другим телам, точкам или сечениям конструкции. На практике такие тела называют опорными устройствами, фундаментами и т. п. В инженерных расчетах вводится понятие идеальных связей. Если, например, на левый торец бруса (рис. 1.1, а) наложено условие, запрещающее вертикальное перемещение, то говорят, что в этой точке имеется одна внешняя связь. Условно она изображается в виде стержня с двумя шарнирами. Если запрещено вертикальное и горизонтальное смещения, то на систему наложены две внешние связи (рис. 1.1, б). Заделка в плоской системе дает три внешние связи (рис. 1.1, в), препятствующие вертикальному, горизонтальному смещениям и повороту сечения заделки.

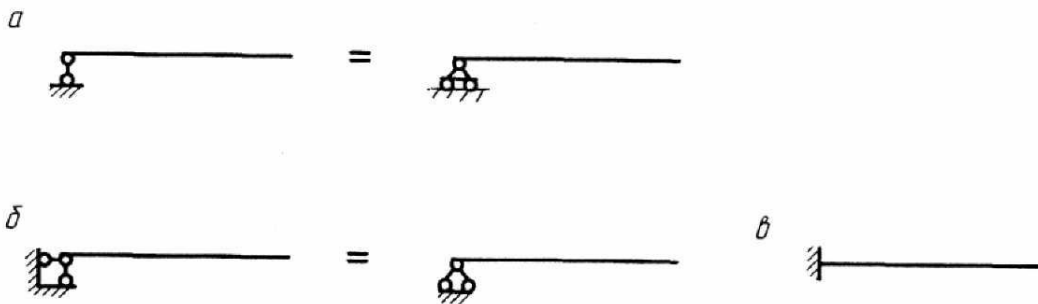


Рис. 1.1

Для того чтобы закрепить тело (стержень) на плоскости и обеспечить ему геометрическую неизменяемость, необходимо и достаточно наложить на него три связи (рис. 1.2), причем все три связи не должны быть взаимно параллельными и не должны пересекаться в одной точке.

В дальнейшем связи, обеспечивающие геометрическую неизменяемость системы и ее статическую определимость, будем понимать как необходимые связи.

Геометрически неизменяемой системой называют такую систему, которая может изменять свою форму только за счет деформации ее элементов (рис. 1.2), в то время как геометрически изменяемая система может допускать перемещения и при отсутствии деформации (рис. 1.3), Такая система является механизмом (рис. 1.3, а).

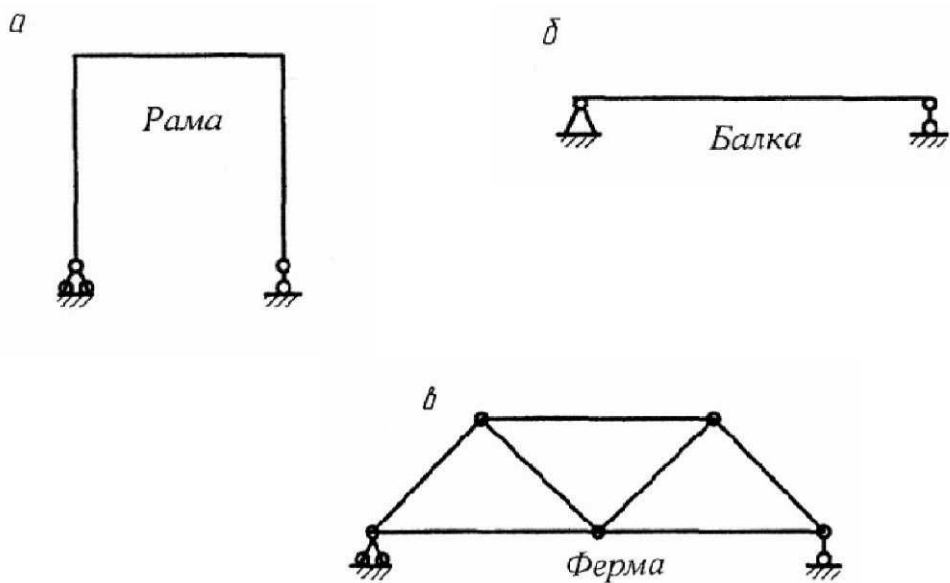


Рис. 1.2

Наряду с отмеченными различают еще мгновенно изменяемые системы, под которыми понимают системы, допускающие бесконечно малые перемещения без деформации ее элементов (рис. 1.4).

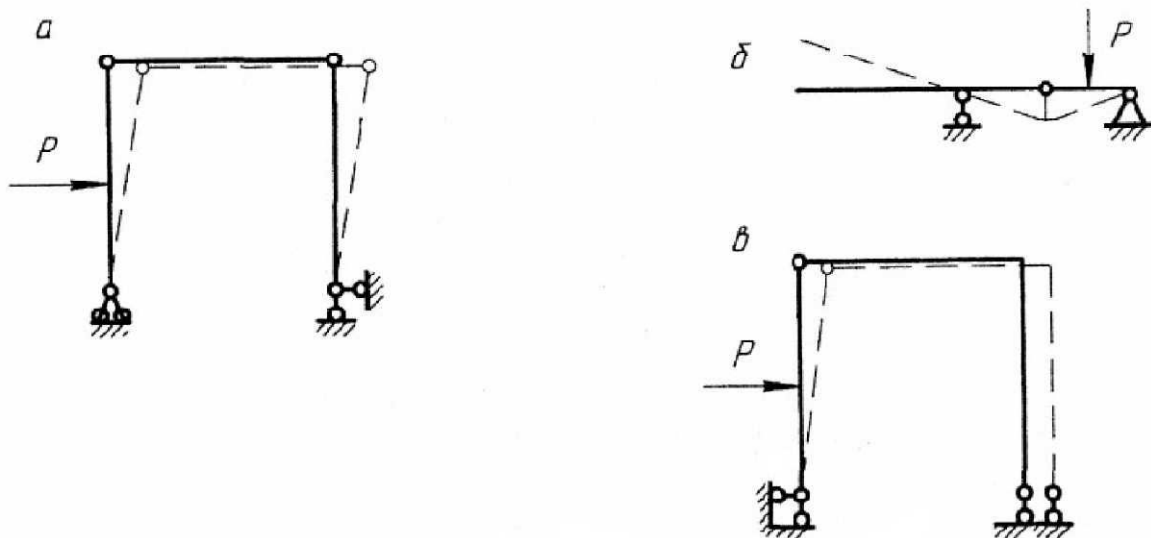


Рис. 1.3

Так, например, под действием силы P , приложенной в шарнире Д (рис. 1.4, а), стержни ДВ и ДС без деформации повернутся относительно шарниров В и С на бесконечно малый угол $d\alpha$. Тогда из условия равновесия вырезанного ($\sum Y = 0$) при малом значении величины силы P усилия в стержнях ДВ и ДС будут стремиться к бесконечности, вызывая осевую деформацию стержней и изменяя положение системы.

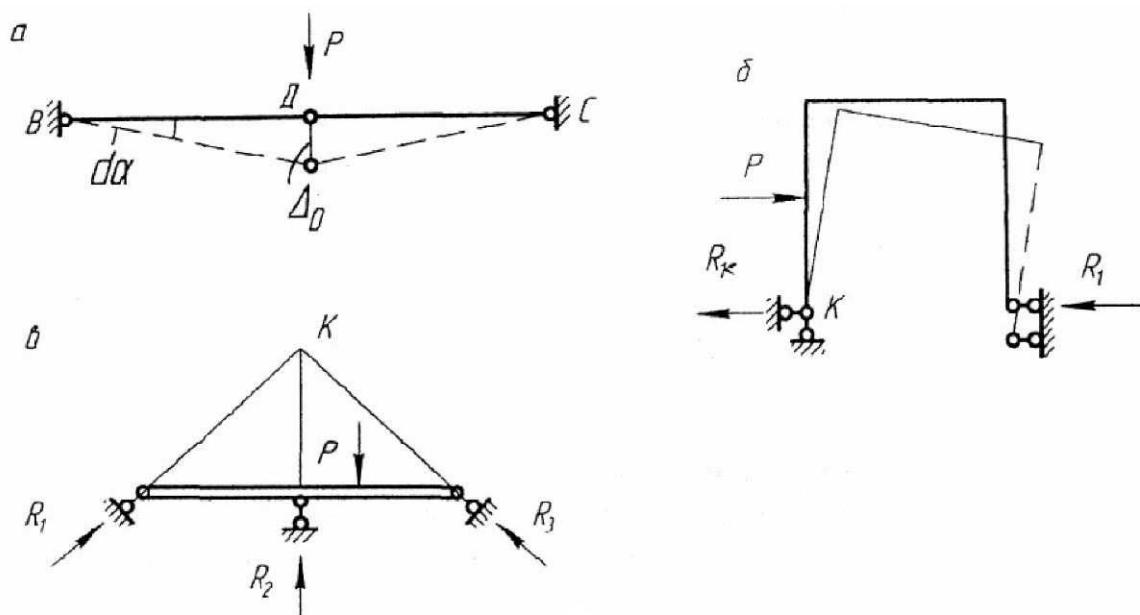


Рис. 1.4

Для рамы на рис. 1.4, б при рассмотрении уравнения статики $\sum m_k = 0$ момент силы P не уравнивается (реакция R_1 , не может вызывать момента относительно рассматриваемой точки, так как линия ее действия проходит через эту точку).

Аналогичная особенность проявляется и для системы, показанной на рис. 1.4, в. Момент силы P относительно точки k не уравнивается.

Таким образом, эти системы также допускают бесконечно малые перемещения (относительно моментной точки) без деформации их элементов. В сооружениях и конструкциях такие системы недопустимы.

Если геометрически неизменяемая система имеет помимо необходимых еще и дополнительные связи, то независимых уравнений статики оказывается недостаточно для определения неизвестных усилий (реакций связей) и такая система называется статически неопределимой. Разница между числом неизвестных усилий, подлежащих определению, и числом независимых уравнений статики характеризует степень статической неопределимости, которую принято обозначать символом n . Так, балка и рама, представленные на рис. 1.5, являются два раза (дважды) статически неопределимыми. В этих схемах число неизвестных реакций равно пяти, а число независимых уравнений статики, которые можно составить для каждой из них, равно трем.

Всякий замкнутый контур представляет собой систему трижды статически неопределимую (рис. 1.6).

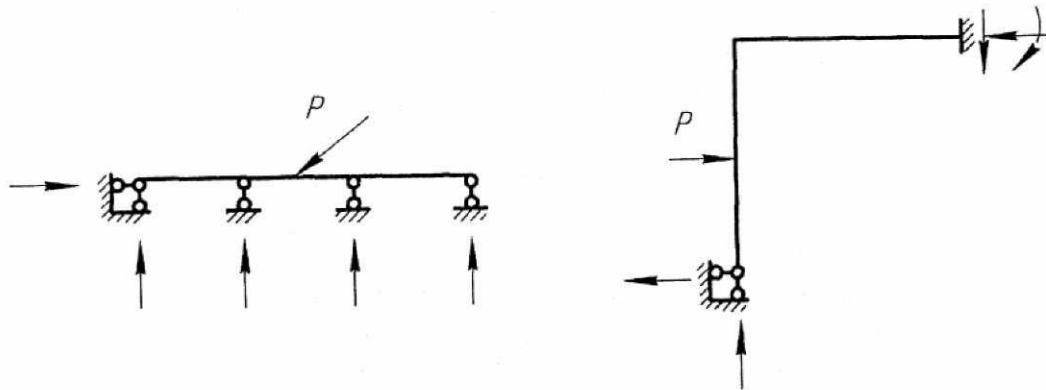


Рис. 1.5

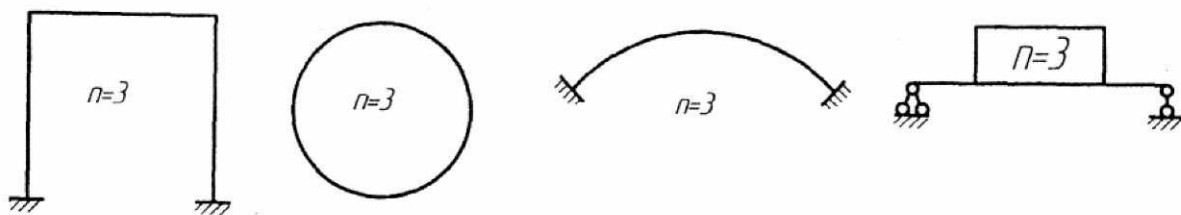


Рис. 1.6

Постановка одиночного шарнира снижает степень статической неопределимости системы на единицу (рис. 1.7, а), поскольку изгибающий момент в шарнире отсутствует. Под одиночным шарниром понимают шарнир, соединяющий концы двух стержней.

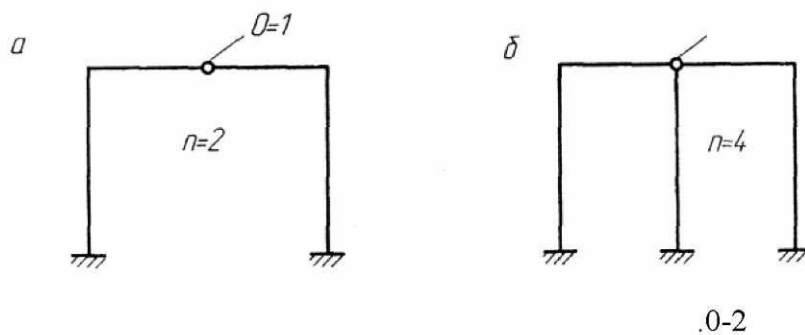


Рис. 1.7

Шарнир, включенный в узел, где сходятся концы нескольких стержней, понижает степень статической неопределимости системы на число одиночных шарниров, определяемых по формуле $O = C - 1$.

Здесь под C понимают число стержней, сходящихся в узле. Например, в раме (рис. 1.7, б) число одиночных шарниров $O = C - 1 = 3 - 1 = 2$, поэтому степень статической неопределимости понижается на две единицы и становится равной $n = 4$.

2. Расчет статически неопределимых стержневых систем методом сил

Наиболее широко применяемым методом раскрытия статической неопределимости стержневых систем является метод сил. Он заключается в том, что заданная статически неопределимая система освобождается от дополнительных (лишних) связей как внешних, так и внутренних, а их действие заменяется силами и моментами. Величина их в дальнейшем опреде-

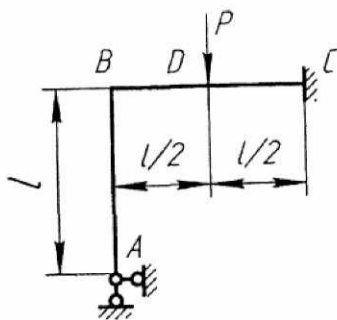


Рис. 2.1

ляется так, чтобы перемещения соответствовали тем ограничениям, которые накладываются на систему отброшенными связями. Таким образом при указанном способе решения неизвестными оказываются силы или моменты, действующие в местах отброшенных или рассеченных связей. Отсюда и название «метод сил».

Сущность метода сил рассмотрим на примере расчета статически неопределимой рамы, изображенной на рис. 2.1.

Считаем, что внешняя нагрузка, размеры и жесткости стержней известны.

Порядок расчета.

2.1. Устанавливаем степень статической неопределимости, для чего используем выражение $n = X - Y$, где X – число неизвестных (имеется 5 внешних связей); Y – число независимых уравнений статики, которые можно составить для рассматриваемой системы.

Для заданной рамы число неизвестных реакций равно пяти, а число независимых уравнений трем, так как система сил плоская и произвольно расположенная, поэтому $n = 5 - 3 = 2$. Система два раза статически неопределима.

2.2. Преобразуем заданную систему в статически определимую, геометрически неизменяемую и эквивалентную заданной системе, т. е. образуем основную систему. Для этого удаляем лишние связи путем их отбрасывания или перерезания.

На рис. 2.2 изображена основная система, полученная путем отбрасывания лишних опорных связей, а на рис. 2.3 основные системы образованы путем отбрасывания и перерезания связей. Например, в схеме рис. 2.3, а в опоре А отброшена горизонтальная связь и в опоре С перерезана связь, препятствующая повороту сечения.

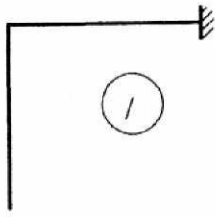


Рис. 2.2

Желательно, чтобы основная система была рациональной, т. е. такой, для которой легче строить эпюры внутренних силовых факторов и объем вычислений был наименьшим. Такая система показана на рис. 2.2 (вариант I). Здесь нет необходимости определять опорные реакции, если строить эпюры со свободного (незакрепленного) конца рамы.

Таким образом, для каждой статически неопределимой стержневой системы можно подобрать несколько вариантов основных систем (рис. 2.2, 2.3).

Необходимо особо обратить внимание на то, что при образовании основной системы метода сил недопустимо введение новых связей.

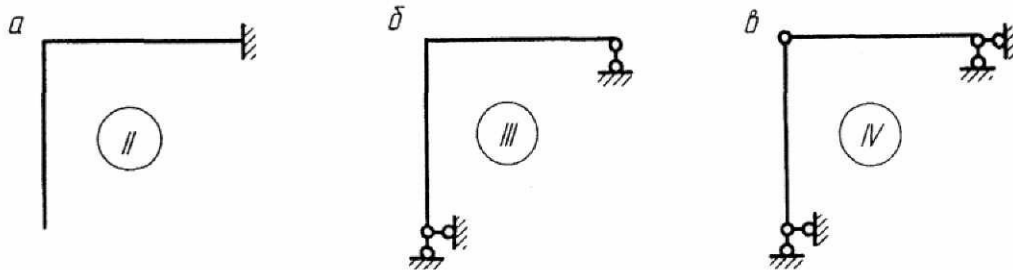


Рис. 2.3

2.3. Образует эквивалентную систему путем нагружения основной системы внешними силами и усилиями отброшенных (перерезанных) связей (рис. 2.4).

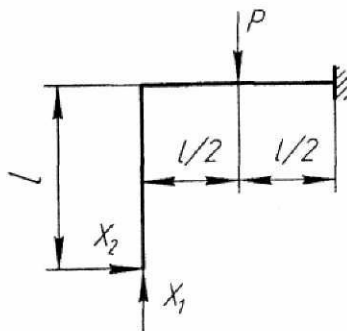


Рис. 2.4

Неизвестные силовые факторы будем обозначать символом X_i , где i – номер неизвестного.

Если отброшенные связи запрещают линейные перемещения, то неизвестными являются силы, при запрете угловых смещений – моменты.

Если же основная система была получена путем перерезания лишних связей, то равные и противоположные друг другу силы и моменты прикладываются как к правой, так и к левой частям рассеченной системы в местах перерезания.

В рассматриваемом примере X_1 и X_2 представляют собой вертикальную и горизонтальную составляющие реакции шарнирной опоры А.

2.4. Составляем канонические уравнения метода сил, которые выражают в математической форме условия эквивалентности основной и заданной систем. Иначе, они выражают условия, обозначающие, что относительные

перемещения по направлению удаленных лишних связей от совместного действия внешней нагрузки и неизвестных усилий должны быть равны нулю.

Для эквивалентной системы рассматриваемого примера на основании принципа независимости действия сил и рис. 2.5 канонические уравнения запишутся в форме:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{1P} &= 0, \\ \Delta_{21} + \Delta_{22} + \Delta_{2P} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

где Δ_{11} – относительное перемещение в основной системе по направлению лишней неизвестной X_1 , вызванное этим же усилием;

Δ_{12} – относительное перемещение по направлению лишней неизвестной X_1 , вызванное усилием X_2 ;

Δ_{1P} – относительное перемещение по направлению действия неизвестной X_1 , вызванное заданной нагрузкой.

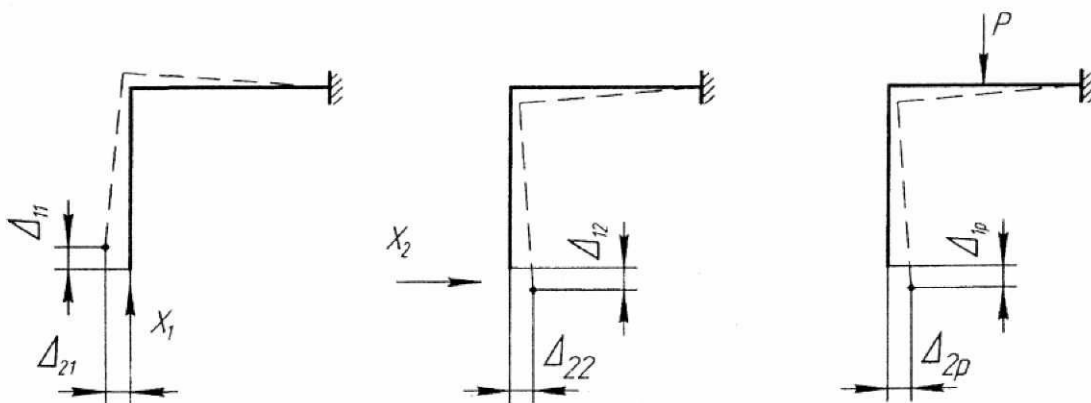


Рис. 2.5

Физический смысл этих уравнений

Первое уравнение отрицает возможность вертикального перемещения опорного сечения А по направлению лишнего неизвестного X_1 от совместного действия заданной нагрузки P и полных значений неизвестных X_1 и X_2 .

Аналогичный смысл имеет и второе уравнение.

В указанной форме (2.1) использование уравнений при инженерных расчетах затруднительно, поэтому преобразуем их к новому виду. С учетом того что для линейных систем справедливо выражение

$$\Delta_{ik} = \delta_{ik} \cdot X_k$$

можно записать:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{11} &= \delta_{11} \cdot X_1, \\ \Delta_{12} &= \delta_{12} \cdot X_2, \\ \Delta_{21} &= \delta_{21} \cdot X_1, \\ \Delta_{22} &= \delta_{22} \cdot X_2, \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

где δ_{11} – относительное перемещение в основной системе по направлению действия силы X_1 от действия силы $X_1 = 1$ (рис. 2.6);

δ_{21} – относительное перемещение в основной системе по направлению действия силы X_2 от действия силы $X_1 = 1$.

Здесь X_1 и X_2 – действительные значения реакций отброшенных связей. Тогда канонические уравнения метода сил (2.1) запишутся в виде:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P}, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P}. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

По аналогии для n раз статически неопределимых систем канонические уравнения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1P} &= 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2P} &= 0, \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \dots + \delta_{3n}X_n + \Delta_{3P} &= 0, \\ \dots & \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \delta_{n3}X_3 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nP} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

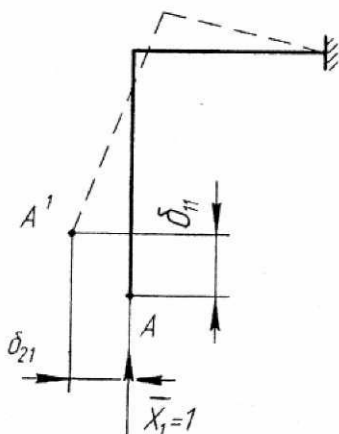


Рис. 2.6

Здесь коэффициенты с одинаковыми индексами $\delta_{11}, \dots, \delta_{ii}$ называют главными, а $\delta_{12}, \delta_{21}, \dots, \delta_{ij}, \delta_{ji}$ называют побочными коэффициентами.

Главные коэффициенты всегда положительны. Побочные коэффициенты могут быть положительными, отрицательными и равными нулю.

Δ_{1P} – называются свободными или грузовыми коэффициентами.

2.5. Определяем коэффициенты канонических уравнений.

Эти коэффициенты представляют собой перемещения точек системы в направлении отброшенных связей, следовательно, их можно найти посредством интеграла Мора:

$$\delta_{ik} = \delta_{ki} = \sum \int \frac{\bar{M}_i \cdot \bar{M}_k}{EI} dx; \quad \delta_{iP} = \delta_{ki} = \sum \int \frac{M_i \cdot \bar{M}_P}{EI} dx. \quad (2.5)$$

Порядок определения коэффициентов:

а) строим эпюры изгибающих моментов для основной системы от заданной внешней нагрузки P и от единичных усилий отброшенных связей $\bar{X}_1 = 1$ и $\bar{X}_2 = 1$ (рис. 2.7);

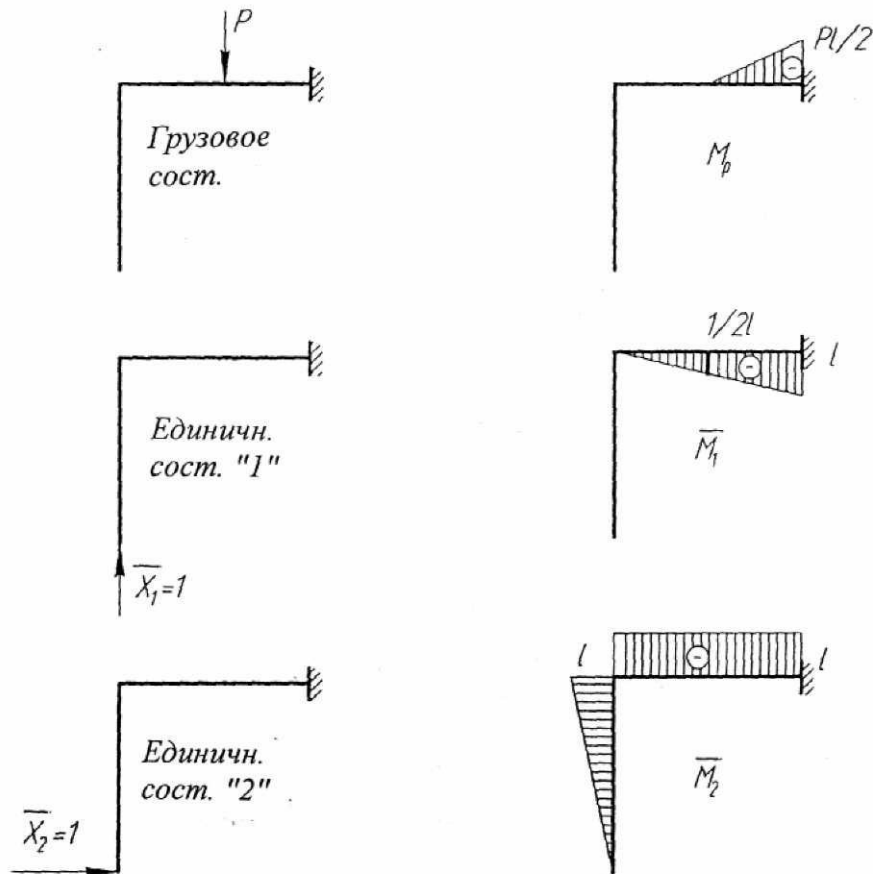


Рис. 2.7

б) вычисляем коэффициенты канонических уравнений.

Поскольку рассматриваемая система состоит только из прямолинейных стержней и жесткости стержней в пределах их длин постоянны ($EI = \text{const}$), то вычисления интеграла Мора производим по способу А.Н. Верещагина путем перемножения соответствующих эпюр с использованием формул Симпсона и трапеций:

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1^2}{EI} dx; \quad \delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot l = \frac{l^3}{3EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_2}{EI} dx; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot l \cdot l = -\frac{l^3}{2EI};$$

$$\delta_{22} = \delta_{21} = \sum \int \frac{\overline{M}_2^2}{EI} dx; \quad \delta = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot l + \frac{1}{EI} \cdot l \cdot l \cdot l = \frac{4l^3}{3EI};$$

$$\Delta_{1P} = \sum \int \frac{\overline{M}_1 \cdot M_P}{EI} dx;$$

$$\Delta_{1P} = -\frac{1}{6EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(0 + 2 \cdot \frac{Pl}{2} \cdot l + 0 + \frac{Pl}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) = -\frac{5l^3}{48EI};$$

$$\Delta_{2P} = \sum \int \frac{\overline{M}_2 \cdot M_P}{EI} dx; \quad \Delta_{2P} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{Pl}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot l = \frac{Pl^3}{8EI}.$$

2.6. Записываем систему канонических уравнений. После подстановки найденных коэффициентов в уравнение (2.3) получаем:

$$\frac{1}{3} \cdot X_1 - \frac{1}{2} \cdot X_2 - \frac{5}{48} \cdot P = 0;$$

$$-\frac{1}{2} \cdot X_1 + \frac{4}{3} \cdot X_2 + \frac{1}{8} \cdot P = 0.$$

Решаем систему уравнений и находим неизвестные усилия, кН:

$$X_1 = \frac{11}{28} \cdot P, \quad X_2 = \frac{3}{56} \cdot P.$$

Примечание. Если знак усилия получился отрицательный, то это означает, что действительное усилие (реакция) направлено в противоположную сторону, чем усилие X_i , принятое в эквивалентной системе.

Таким образом, раскрывается статическая неопределимость системы.

2.7. Строим окончательные (действительные) эпюры внутренних силовых факторов для заданной системы. Построение эпюр можно выполнить двумя способами.

▪ Первый способ

Загружаем основную систему заданной нагрузкой и найденными усилиями X_1 и X_2 (рис. 2.4, а), после чего строим эпюры M , Q , и N также, как для обычной статически определимой системы. Построенные таким способом эпюры показаны на рис. 2.8, где ординаты эпюры изгибающих моментов отложены со стороны растянутых волокон.

Такой метод наиболее удобен для простых систем.

▪ Второй способ

Вычисляем значения изгибающих моментов в любом (обычно характерном) сечении на основании принципа независимости действия сил по формуле:

$$M^k = M_P^k + \overline{M}_1^k \cdot X_1 + \overline{M}_2^k \cdot X_2 + \dots + \overline{M}_n^k \cdot X_n, \quad (2.6)$$

где k – номер сечения, для которого определяется значение изгибающего момента;

n – степень статической неопределимости системы.

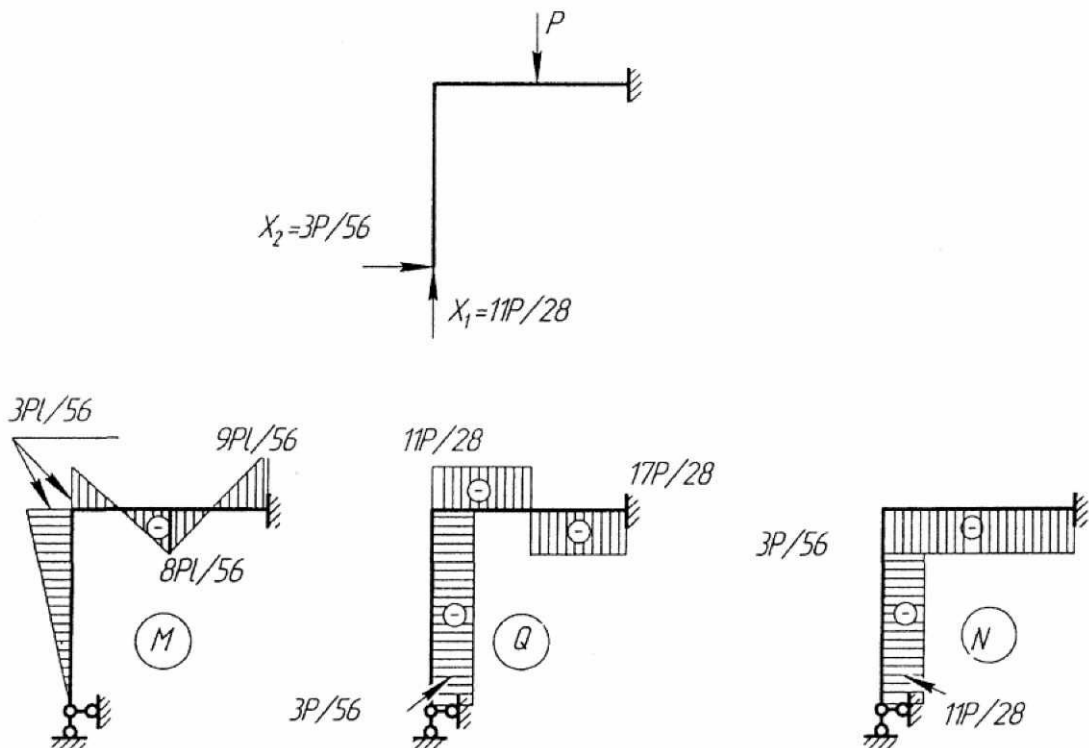


Рис. 2.8

При этом, если найденное усилие X_i имеет отрицательный знак, то соответствующую эпюру M_i , необходимо зеркально отобразить относительно осей стержней.

При определении действительных значений изгибающих моментов ординаты моментов в расчетных сечениях берутся из эпюр M_1 , M_2 и M_P с учетом их знаков. Знаки моментов в рассматриваемом сечении определяются в зависимости от того, с какой стороны от базовой линии расположены ординаты моментов и от положения точки наблюдателя.

В нашем случае принимаем, что точка наблюдателя расположена внутри контура, поэтому за положительные значения моментов принимаются моменты, которые вызывают в расчетном сечении растяжение внутренних волокон, а отрицательные – внешних волокон контура.

Например, для сечения Д рамы получаем:

$$M^D = 0 + \frac{1}{2} \ell \cdot \frac{11}{28} P - \ell \cdot \frac{3}{56} P = \frac{8}{56} P.$$

Аналогично и для других сечений. Окончательная эпюра изгибающих моментов для заданной системы показана на рис. 2.8, а.

2.8. Проводим деформационную проверку правильности построения действительной эпюры изгибающих моментов.

Смысл деформационной проверки состоит в подтверждении отсутствия перемещений в основной системе в направлении отброшенных (перерезанных) связей при найденных значениях неизвестных усилий. Так, если неизвестные усилия найдены правильно, то для рассматриваемого примера должны удовлетворяться равенства:

$$\Delta_{1M} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \cdot M}{EI} dx \cong 0; \quad (2.7)$$

$$\Delta_{2M} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 \cdot M}{EI} dx \cong 0.$$

Если построить эпюру единичных моментов $\bar{M}_S = \bar{M}_1 + \bar{M}_2$, то проверку

$\Delta_{SM} = \sum \int \frac{\bar{M}_S \cdot M}{EI} dx = 0$ называют проверкой на групповое перемещение (рис. 2.9):

$$\Delta_{SM} = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{\ell}{6} \cdot 2 \cdot \frac{3}{56} \cdot P\ell \cdot \ell + \frac{\ell}{2 \cdot 6} \cdot \left(2 \cdot \frac{3}{56} \cdot P\ell \cdot \ell - 2 \cdot \frac{8}{56} \cdot P\ell \cdot \frac{1}{2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3}{56} \cdot P\ell \cdot \frac{1}{2} - \frac{8}{56} \cdot P\ell \cdot \ell \right) + \right. \\ \left. + \frac{\ell}{2 \cdot 6} \cdot \left(-2 \cdot \frac{8}{56} \cdot P\ell \cdot \frac{\ell}{2} + \frac{9}{56} \cdot P\ell \cdot \frac{\ell}{2} \right) \right] = \\ \frac{P\ell^3}{EI} \cdot \left(\frac{2}{56} - \frac{2}{56} \right) = 0.$$

Отсутствие перемещения подтверждает правильность решения задачи.

Если выполненные расчеты не подтверждают отсутствие перемещений точек основной системы в направлении отброшенных связей, то для выявления ошибки расчета необходимо проверить правильность определения коэффициентов канонических уравнений по формуле:

$$\delta_{SS} = \sum \delta_{ik},$$

где $\delta_{SS} = \sum \int \frac{\bar{M}_S \cdot \bar{M}_S}{EI} dx;$

$$\sum \delta_{ik} = \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{22}.$$

При отсутствии равенства в этом уравнении выполняется построчная проверка коэффициентов канонических уравнений. Первая строка:

$$\delta_{S1} = \sum \int \frac{\bar{M}_S \cdot \bar{M}_1}{EI} dx;$$

$$\sum \delta_{1k} = \delta_{11} + \delta_{12}.$$

Если нет ошибки расчета в этой строке, то должно соблюдаться условие:

$$\delta_{s1} = \sum \delta_{1k}.$$

Аналогично можно выполнить проверки 2-й и других строк. При выполнении указанных проверок следует проверить правильность расчета грузовых коэффициентов:

$$\Delta_{SP} = \sum \int \frac{\overline{M}_S \cdot M_P}{EI} dx = \sum \Delta_{iP} = \Delta_{1P} + \Delta_{2P}.$$

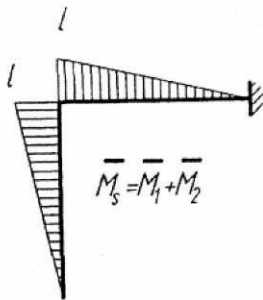


Рис. 2.9

2.9. Строим эпюру поперечных сил Q по эпюре изгибающих моментов M путем последовательного вырезания стержней из заданной системы и рассмотрением их как шарнирно опертых статически определимых балок. По концам стержней прикладываем моменты, значения и направления которых выбираем из эпюры M в соответствующих

сечениях. При наличии внешних сил прикладываем их на соответствующих участках. Определяем опорные реакции из условия статического равновесия и строим эпюру Q как обычно для статически определимых балок.

Для заданной рамы (рис. 2.1) при построении эпюры поперечных сил для стойки вырезаем участок АВ и в сечении В прикладываем момент

$$M_B = \frac{3}{56} P \ell,$$

взятый из эпюры действительных моментов M (рис. 2.8, б).

Определяем опорные реакции из рассмотрения равновесия $R_A = R_B = \frac{3}{56} P$

и строим эпюру поперечных сил Q (рис. 2.10).

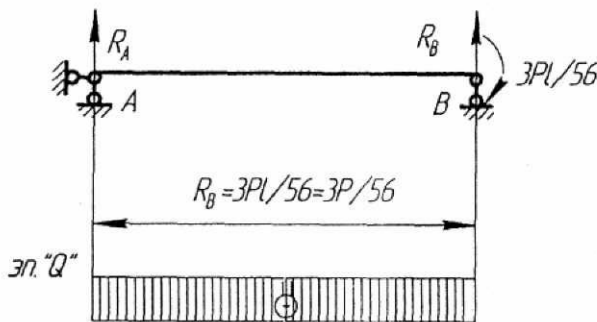


Рис. 2.10

Аналогичным образом вырезаем горизонтальный стержень (ригель) ВС, рассматриваем его равновесие и строим эпюру Q для этого участка рамы (рис. 2.11).

Переносим эпюры Q для отдельных стержней на заданную систему. Окончательная эпюра

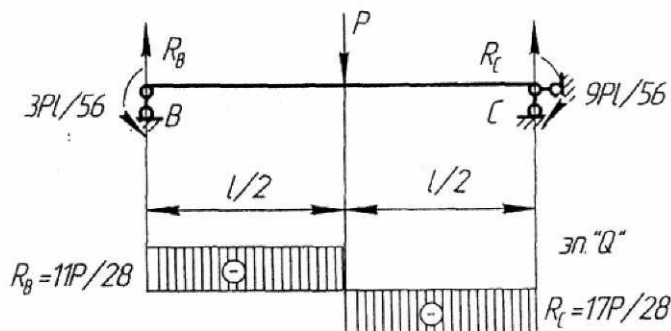


Рис. 2.11

где α – угол наклона прямой, очерчивающей эпюру изгибающих моментов, к базовой линии (оси бруса). Поперечная сила считается положительной, если изгибающий момент возрастает в направлении оси. Для рассматриваемого примера:

$$Q_{BD} = \left(\frac{3}{56} P\ell + \frac{8}{56} P\ell \right) / \frac{1}{2} \ell = \frac{11}{28} P;$$

$$Q_{DC} = - \left(\frac{8}{56} P\ell + \frac{9}{56} P\ell \right) / \frac{1}{2} \ell = - \frac{17}{28} P.$$

2.10. Производим построение эпюры продольных сил N .

Для этого используем метод вырезания узлов (вырезаем только внеопорные узлы сечениями, бесконечно близкими к узлу) и рассматриваем

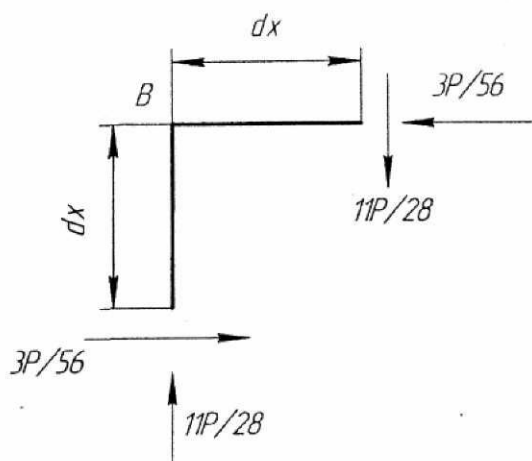


Рис. 2.12

их равновесие под действием внешней нагрузки (если такова приложена к узлам) и усилий в отброшенных (перерезанных) связях.

Вырезаем узел В. Прикладываем к нему поперечные силы, взятые в соответствующих сечениях из эпюры Q (рис. 2.8, б).

Узел должен находиться в равновесии (рис. 2.12) под действием поперечных и продольных сил (неизвестных). Определяем неизвестные

продольные силы из условия статического равновесия.

Эпюра продольных сил показана на рис. 2.8, в.

2.11. Проводим окончательную проверку правильности решения задачи.

поперечных сил для заданной рамы показана на рис 2.8, б.

Построение эпюры поперечных сил по эпюре изгибающих моментов возможно и на основании дифференциальной зависимости:

$$Q = \frac{dM}{dx} = \operatorname{tg}\alpha,$$

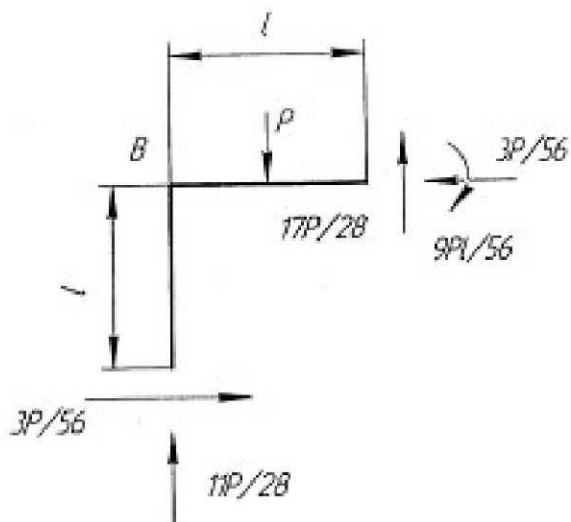


Рис. 2.13

Система (рама), внеопорный узел или какая-нибудь часть системы должны находиться в равновесии под действием внешней нагрузки и усилий отброшенных (перерезанных) связей. Для заданного примера рассматриваем равновесие рамы, используя уравнения статики (рис. 2.13):

$$\sum x = 0 : \frac{3}{56} \cdot P - \frac{3}{56} \cdot P = 0;$$

$$\sum y = 0 : \frac{11}{28} \cdot P + \frac{17}{28} \cdot P - P = 0 = P - P = 0.$$

$$\sum m_C = 0 : \frac{3}{56} P \cdot l - \frac{11}{28} P \cdot l + P \cdot \frac{l}{2} - \frac{9}{56} P l = 0,$$

$$\frac{31}{56} P l - \frac{31}{56} P l = 0.$$

Условие равновесия выполняется.

Примечания.

1. Если рама имеет несколько внеопорных узлов, то проверкой охватываются все узлы.
2. При проверке равновесия внеопорного узла необходимо кроме внутренних усилий (M, Q, N), взятых в соответствующих сечениях, приложить еще внешние усилия (сосредоточенные силу и момент), если таковые приложены в узле. В нашем случае нагрузка в узле отсутствует.

3. Особенности расчета методом сил многопролетных неразрезных балок

При конструировании строительных и мостовых сооружений, а также различного технологического оборудования возникает необходимость расчета на прочность многопролётных неразрезных балок. Под неразрезной балкой понимают статически неопределимую балку с заделкой или шарнирным опиранием по концам. Расчетная схема одной из таких балок с заделкой на левом конце представлена на рис. 3.1.

В зависимости от числа дополнительных опор система может быть один, два, три, ..., n раз статически неопределимой.

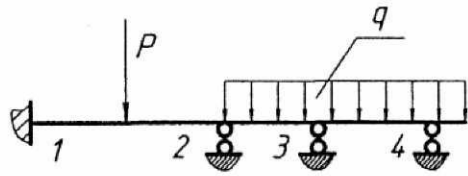


Рис. 3.1

Возможна комбинация этих двух путей (рис. 3.2, в). Эквивалентные системы для этих схем показаны на рис. 3.3, а, 3.3, б, 3.3, в соответственно.

Для расчета неразрезной балки методом сил основную систему можно получить путем отбрасывания лишних связей (рис. 3.2, а) или путем их перерезания, например введением шарниров над промежуточными опорами и в заделке (рис. 3.2, б).

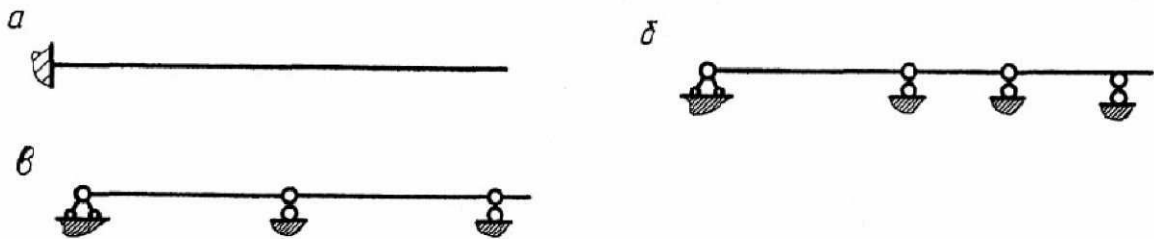


Рис. 3.2

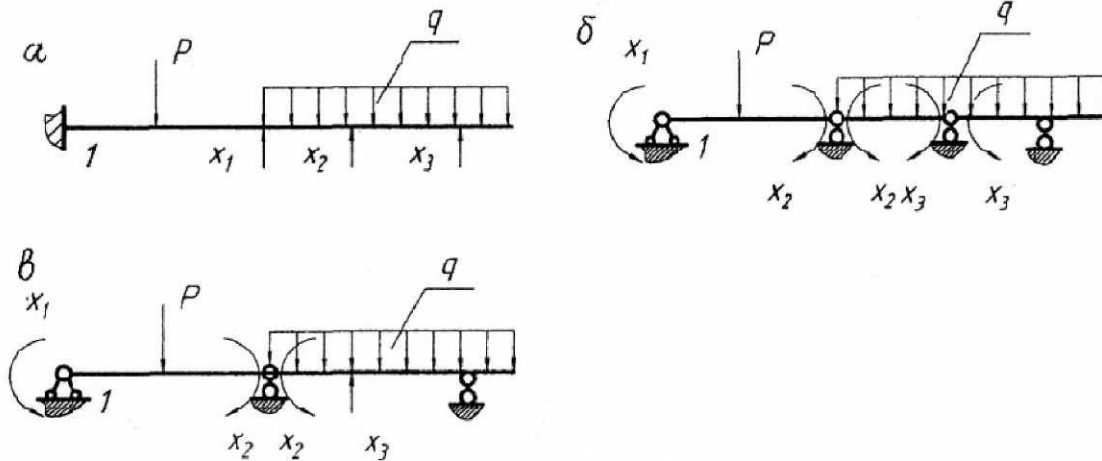


Рис. 3.3

В первом случае при раскрытии статистической неопределимости удастся установить значения реакций опор, что облегчает построение эпюры поперечных сил для заданной системы. Эпюру изгибающих моментов строят стандартным способом.

Однако при большом количестве опорных связей эпюры изгибающих моментов, построенные для основной системы метода сил от внешней нагрузки и единичных реакций отброшенных связей, получаются громоздкими, осложняющими расчет.

Решение задачи значительно упрощается, если основная система метода сил будет получена путем введения шарниров над промежуточными

опорами (рис. 3.2, б). В этом случае заданная система разбивается на ряд простейших балочек, что облегчает построение эпюр изгибающих моментов для основной системы и снижает трудоемкость дальнейшего решения.

Канонические уравнения метода сил (математическая запись эквивалентности основной и заданной систем) всегда записываются стандартным способом, однако в данном случае они могут содержать особый смысл.

На рис. 3.4, а показана заданная система, являющаяся один раз статически неопределимой. Под действием внешней нагрузки балка деформируется и сечение над средней опорой поворачивается на угол φ . Основную систему получаем путем введения шарнира над промежуточной опорой (рис. 3.4, б), тем самым разрезая балку на две простейшие балочки. Эквивалентная система представлена на рис. 3.4, в.

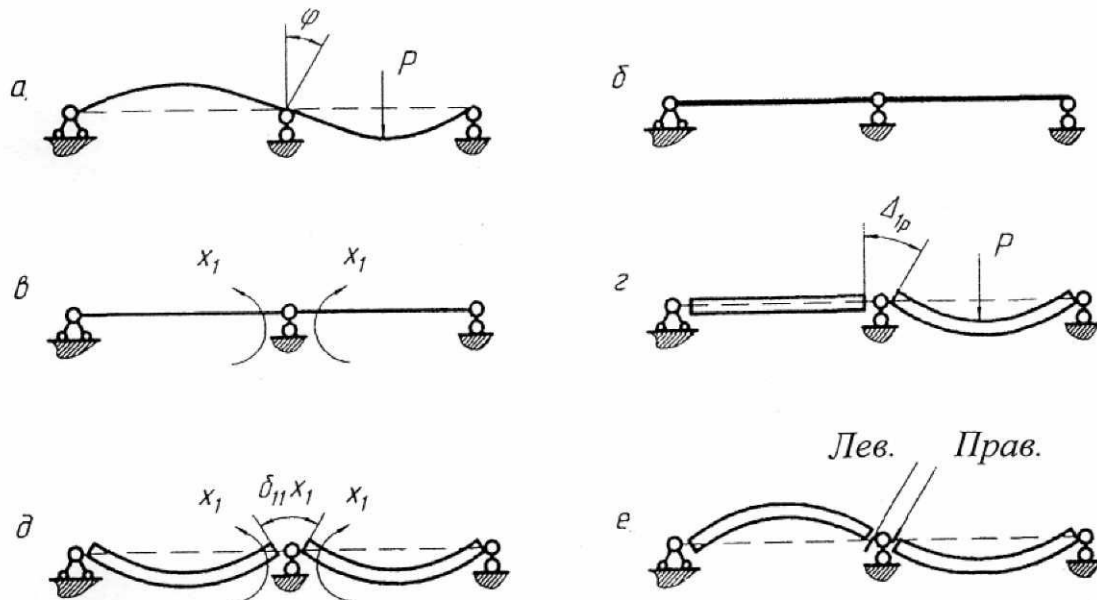


Рис. 3.4

При загрузке основной системы внешней нагрузкой балка деформируется и торцевые сечения, примыкающие к шарниру, повернутся относительно друг друга на угол Δ_{1P} (рис. 3.4, г). Поворот этих же сечений под действием моментов X_1 показан на рис. 3.4, г.

Эквивалентность основной и заданной систем подтверждается уравнением:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0, \quad (3.1)$$

где δ_{11} – угол поворота рассматриваемых сечений от действия единичного момента $\bar{X}_1 = 1$

Δ_{1P} – угол поворота рассматриваемых сечений от внешней нагрузки.

Таким образом, приведенное каноническое уравнение отрицает возможность взаимного поворота смежных сечений (левого и правого) в основной системе (рис. 3.4, е), но действительный угол поворота этих сечений (угол φ) имеет место.

В результате решения канонического уравнения (3.1) находим неизвестное усилие X_1 и строим действительную эпюру изгибающих моментов M , используя формулу (2.6). Деформационную проверку правильности решения выполняем по методике, изложенной в п. 2.8.

Эпюру поперечных сил строим по эпюре изгибающих моментов путем вырезания стержней по ранее изложенной методике.

Находим реактивные усилия во всех связях по эпюрам поперечных сил и изгибающих моментов и выполняем статическую проверку. Под действием внешних сил и найденных усилий балка должна находиться в равновесии:

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum m_0 = 0.$$

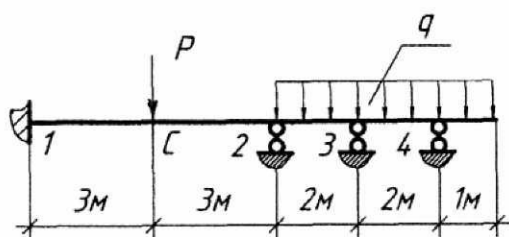


Рис. 3.5

Пример.

Для заданной балки (рис. 3.5) построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил и выполнить проверки расчета, если нагрузка, жесткость и размеры балки известны. $P = 20$ кН; $q = 40$ кН/м; $EI = \text{const}$.

Порядок расчета

3.1. Устанавливаем степень статической неопределимости:

$$n = X - 3 - \text{ш},$$

где X – число неизвестных реакций, равное 6;

3 – число независимых уравнений статики, которые можно составить для заданной системы;

ш – число одиночных шарниров ($\text{ш} = 0$).

Тогда $n = 6 - 3 - 0 = 3$. Задача три раза статически неопределима.

3.2. Преобразуем заданную систему в основную путем введения шарниров в заделке 1 и над промежуточными опорами 2 и 3. Основная система представляет собой совокупность трех статически определимых шарнирно опертых балочек (рис. 3.6, а).

3.3. Образует эквивалентную систему путем загрузки основной системы усилиями перерезанных связей X_1 , X_2 , X_3 и внешней нагрузкой P и q (рис. 3.6, б).

3.4. Записываем канонические уравнения метода сил:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1P} = 0;$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2P} = 0;$$

$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0.$$

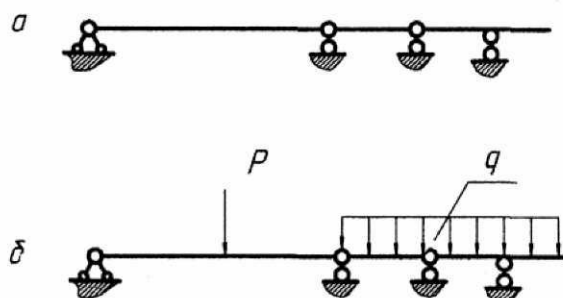


Рис. 3.6

3.5. Строим эпюры изгибающих моментов для основной системы метода сил. Для этого загружаем принятую основную систему единичными безразмерными моментами $\bar{X}_1 = 1$, $\bar{X}_2 = 1$ и $\bar{X}_3 = 1$, направление которых выбираем произвольно.

Эпюры изгибающих моментов от этого нагружения показаны на рис. 3.7.

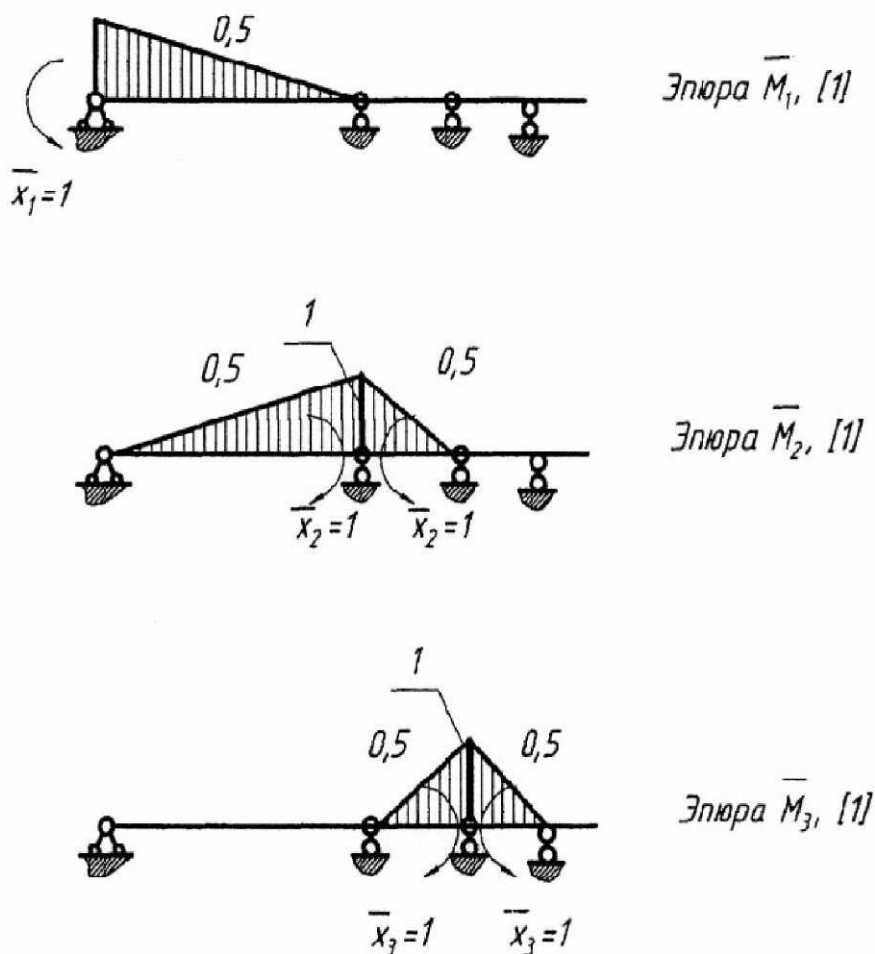


Рис. 3.7

Для построения эпюры изгибающих моментов от внешней нагрузки (M_p) рассматриваем каждый из пролетов как шарнирно опертые балочки, которые нагружаем внешней нагрузкой P и q . Строим для них эпюры изгибающих моментов и переносим на основную систему (рис. 3.8).

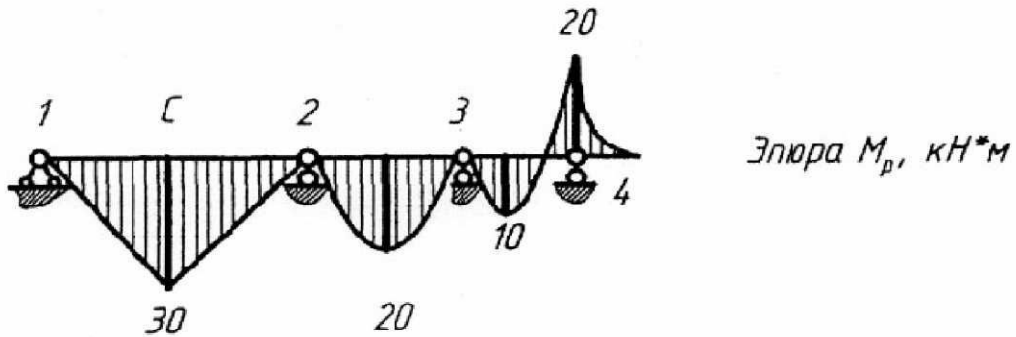


Рис. 3.8

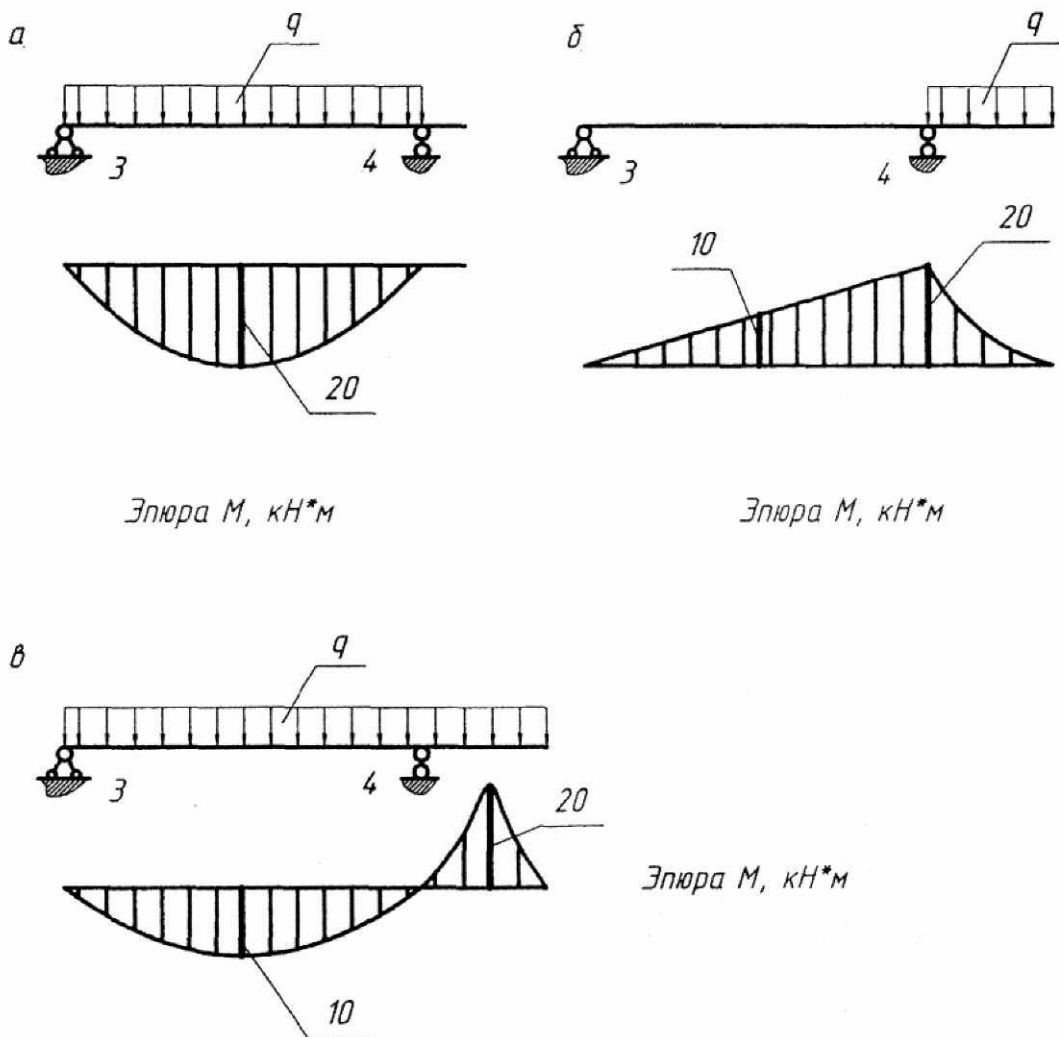


Рис. 3.9

Вычисление значений изгибающих моментов в сечениях каждой из балочек от внешней нагрузки приведены ниже:

$$- \text{ посередине 1-го пролета } M = \frac{P\ell}{4} = \frac{20 \cdot 6}{4} = 30 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$- \text{ посередине 2-го пролета } M = \frac{q \cdot \ell^2}{8} = \frac{40 \cdot 4}{8} = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

При определении изгибающих моментов в сечениях 3-й балки удобно использовать принцип независимости действия сил. Так, от распределенной нагрузки внутри пролета значение изгибающего момента посередине пролета составляет:

$$M = \frac{q \cdot \ell^2}{8} = \frac{40 \cdot 4}{8} = 20 \text{ кН} \cdot \text{м} \text{ (рис. 3.9, а)}.$$

Значение изгибающего момента в сечении балки над правой опорой от действия консольной нагрузки:

$$M = \frac{q \cdot \ell^2}{2} = \frac{40 \cdot 1}{2} = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Посередине третьего пролета значение изгибающего момента от этой же нагрузки составит:

$$M = 0,5 - 20 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м} \text{ (рис. 3.9, б)}.$$

Окончательная эпюра изгибающих моментов для балочки 3-го пролета определяется алгебраическим суммированием вышеуказанных эпюр и представлена на рис. 3.9, в.

3.6. Вычисляем значения коэффициентов канонических уравнений метода сил по формуле:

$$\delta_{ik} = \sum \int \frac{\bar{M}_i \cdot \bar{M}_k}{EI} dx:$$

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1}{EI} dx = \frac{6}{6EI} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{2}{EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_2}{EI} dx = \frac{6}{6EI} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{EI};$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_3}{EI} dx = 0;$$

$$\delta_{22} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 \cdot \bar{M}_2}{EI} dx = \frac{6}{6EI} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{2}{6EI} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{8}{3EI};$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 \cdot \bar{M}_3}{EI} dx = \frac{2}{6EI} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{3EI};$$

$$\delta_{33} = \sum \int \frac{\overline{M}_3 \cdot \overline{M}_3}{EI} dx = \frac{2}{6EI} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = \frac{4}{3EI}.$$

3.7. Грузовые коэффициенты канонических уравнений метода сил

находим по формуле $\Delta_{ip} = \sum \int \frac{M_i \cdot M_p}{EI} dx$:

$$\Delta_{1p} = \sum \int \frac{M_1 \cdot M_p}{EI} dx = -\frac{3}{6EI} (2 \cdot 30 \cdot 0,5 + 1 \cdot 30) - \frac{3}{6EI} \cdot 2 \cdot 30 \cdot 0,5 = -\frac{135}{3EI};$$

$$\Delta_{2p} = \sum \int \frac{M_2 \cdot M_p}{EI} dx = -\frac{3}{6EI} \cdot 2 \cdot 30 \cdot 0,5 - \frac{3}{6EI} \cdot (2 \cdot 30 \cdot 0,5 + 30 \cdot 1) - \frac{2}{6EI} \cdot 4 \cdot 20 \cdot 0,5 = -\frac{175}{3EI};$$

$$\Delta_{3p} = \sum \int \frac{M_3 \cdot M_p}{EI} dx = -\frac{2}{6EI} \cdot (4 \cdot 20 \cdot 0,5) + \frac{3}{6EI} \cdot (-4 \cdot 10 \cdot 0,5 + 20 \cdot 0) = -\frac{60}{3EI}.$$

3.8. Записываем систему канонических уравнений метода сил:

$$\frac{2}{EI} \cdot X_1 + \frac{1}{EI} \cdot X_2 + 0 - \frac{135}{3EI} = 0;$$

$$\frac{1}{EI} \cdot X_1 + \frac{8}{3EI} \cdot X_2 + \frac{1}{3EI} \cdot X_3 - \frac{175}{3EI} = 0;$$

$$0 + \frac{1}{3EI} \cdot X_2 + \frac{4}{3EI} \cdot X_3 - \frac{60}{3EI} = 0.$$

После сокращения канонических уравнений на величину $3EI$ получим:

$$6X_1 + 3X_2 + 0 - 135 = 0;$$

$$3X_1 + 8X_2 + X_3 - 175 = 0;$$

$$0 + X_2 + 4X_3 - 60 = 0.$$

3.9. Решаем систему уравнений известными методами и находим неизвестные усилия:

$$X_1 = 15,1 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$X_2 = 14,8 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$X_3 = 11,3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

3.10. Выполняем проверку правильности решения системы уравнений. Для этого подставляем найденные значения X_i в исходные уравнения, например во второе уравнение, и получаем:

$$3 \cdot 15,1 + 8 \cdot 14,8 + 11,3 - 175 = 175 - 175 = 0.$$

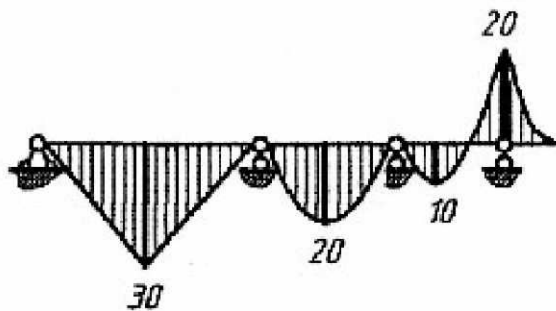
Отсюда следует, что решение системы уравнений выполнено верно.

3.11. Строим действительную эпюру изгибающих моментов для заданной системы. Для этого используем принцип независимости действия сил.

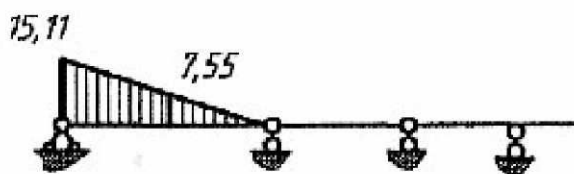
Предварительно строим эпюры $\overline{M}_i \cdot X_i$ с учетом знаков неизвестных усилий (рис. 3.10, а) и вычисляем действительные значения моментов в расчетных сечениях, как и ранее, по формуле:

$$M = M_p + \sum \bar{M}_i \cdot X_i.$$

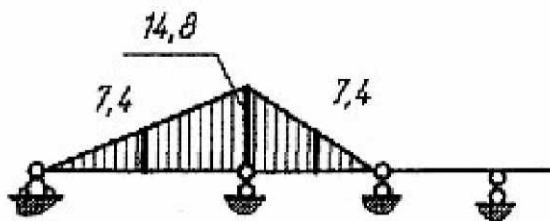
Эпюра действительных изгибающих моментов показана на рис. 3.10.



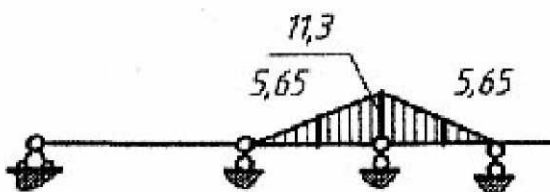
Эпюра M_p , кН*м



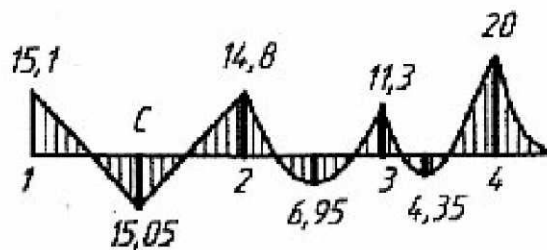
Эпюра \bar{M}_1, X_1 , кН*м



Эпюра \bar{M}_2, X_2 , кН*м



Эпюра \bar{M}_3, X_3 , кН*м



Эпюра M , кН*м

Рис. 3.10

3.12. Выполняем деформационную проверку правильности построения эпюры изгибающих моментов M по методу, изложенному в п. 2.8.

Для этого определяем перемещение по направлению отброшенных (перерезанных) связей. Например, находим перемещение сечения над 4-й опорой. Основную систему (рис. 3.11, а) нагружаем единичной силой $\bar{P} = 1$ и строим эпюру единичных моментов \bar{M}_i (рис. 3.11, б). Тогда:

$$\begin{aligned} \Delta_M &= \sum \int \frac{\bar{M}_i \cdot M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \left[\frac{3}{6} \cdot (2 \cdot 15,1 \cdot 10 - 2 \cdot 15,05 \cdot 7 - 15,05 \cdot 10 + 15,1 \cdot 7) + \right. \\ &+ \frac{3}{6} \cdot (-2 \cdot 15,05 \cdot 7 + 2 \cdot 14,8 \cdot 4 + 14,8 \cdot 7 - 15,05 \cdot 4) + \\ &+ \frac{2}{6} \cdot (14,8 \cdot 4 - 4 \cdot 6,95 \cdot 3 + 11,3 \cdot 2) + \left. \frac{2}{6} \cdot (11,3 \cdot 2 - 4,35 \cdot 1) \right] = \\ &= \frac{1}{EI} \cdot (349,9 - 345,3) \neq 0. \end{aligned}$$

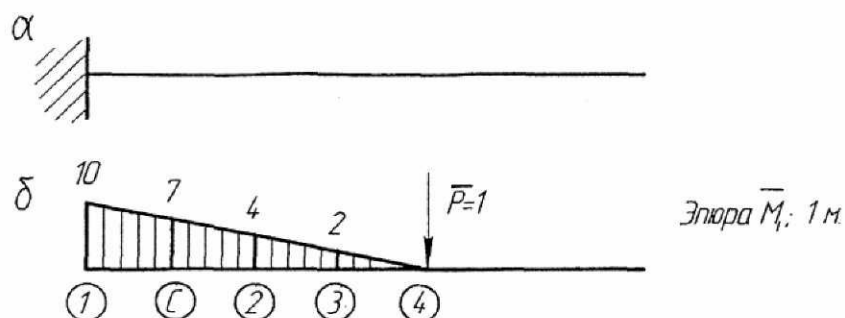


Рис. 3.11

Погрешность счета составляет $\delta = \frac{349,9 - 345,5}{349,9} \cdot 100 = 1,35\%$, что вполне допустимо.

Примечание. Для определения перемещения по методу Мора можно использовать любую основную систему, в том числе и применяемую в предыдущих расчетах.

3.13. Строим эпюру поперечных сил Q по эпюре изгибающих моментов M путем вырезания стержней по методике, изложенной в п. 2.9.

УЧАСТОК 1–С–2 (рис. 3.12). Значение поперечной силы находим по дифференциальной зависимости:

$$Q = \frac{dM}{dx} = \operatorname{tg} \alpha,$$

тогда $Q_{1-C} = \frac{15,1 + 15,05}{3} = 10,05$ кН; $Q_{C-2} = \frac{15,05 + 14,8}{3} = -9,95$ кН.

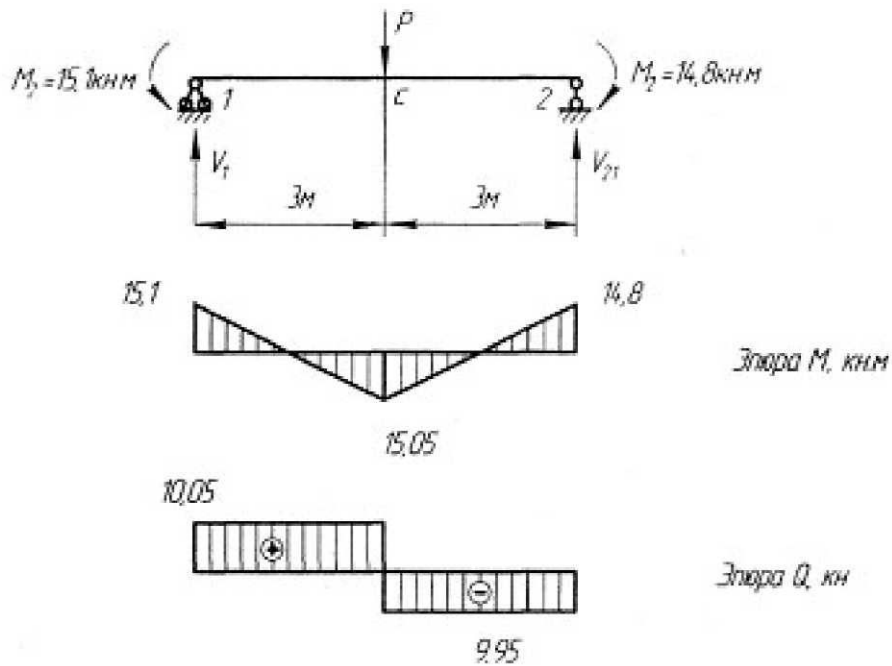


Рис. 3.12

Строим эпюру поперечных сил на участке 1–С–2:

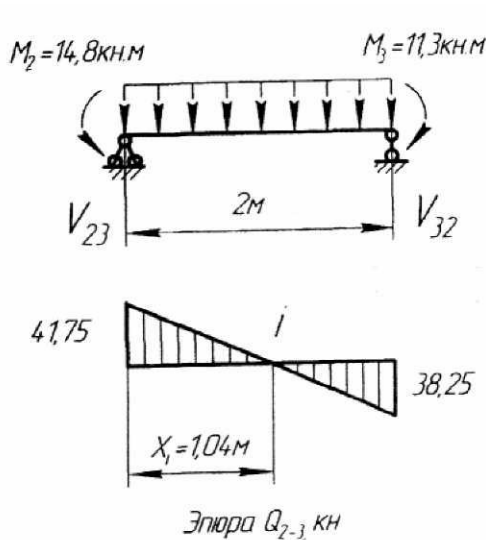


Рис. 3.13

$$\sum m_3 = 0:$$

$$M_2 - M_3 + q \cdot 2 \cdot 1 - V_{23} \cdot 2 = 0$$

$$V_{23} = \frac{14,8 - 11,3 + 40 \cdot 2 \cdot 1}{2} = 41,75 \text{ кН}$$

$$\sum m_2 = 0:$$

$$M_2 - M_3 + q \cdot 2 \cdot 1 - V_{32} \cdot 2 = 0$$

$$V_{32} = \frac{-14,8 - 11,3 + 40 \cdot 2 \cdot 1}{2} = 38,25 \text{ кН};$$

$$\sum Y = 0: V_{23} + V_{32} - q \cdot 2 =$$

$$= 41,75 + 38,25 - 40 \cdot 2 = 80 - 80 = 0.$$

Проверка подтверждает правильность определения реакций опор балочки.

Строим эпюру поперечных сил на участке 2–3 (рис. 3.13).

УЧАСТОК 2–3 (рис. 3.13).

Координата сечения где поперечная сила меняет знак:

$$X_i = \frac{41,75}{q} = \frac{41,75}{40} = 1,04 \text{ м.}$$

УЧАСТОК 3–4 (рис. 3.14)

$$\sum m_4 = 0:$$

$$M_3 - M_4 + q \cdot 2 \cdot 1 - V_{34} \cdot 2 = 0$$

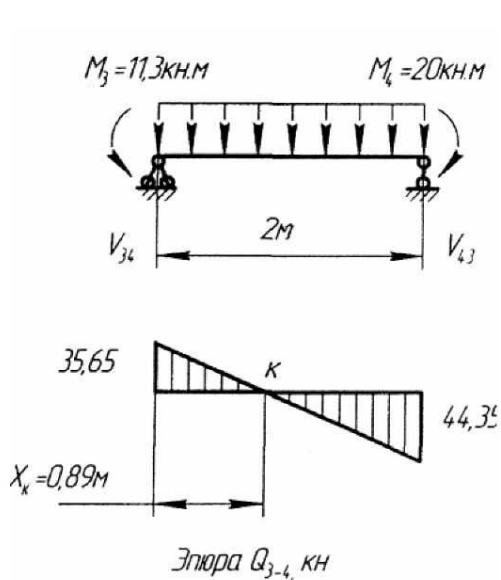


Рис. 3.14

участке 3–4.

Координата сечения, где поперечная сила меняет знак:

$$X_k = \frac{36,65}{q} = \frac{35,65}{40} = 0,89 \text{ м.}$$

Переносим эюры поперечных сил, построенные для отдельных пролетов, на заданную систему. Эюра поперечных сил для заданной системы показана на рис. 3.15.

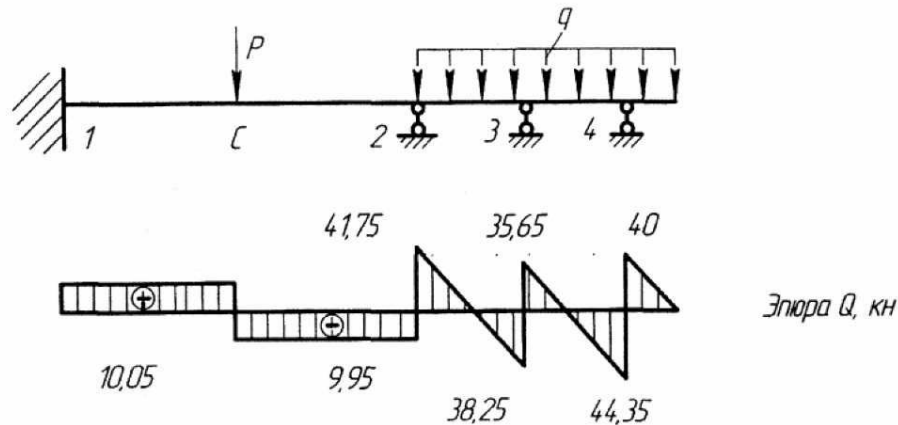


Рис. 3.15

По эюре поперечных сил производим уточнение эюры изгибающих моментов в сечениях, где $Q = 0$. Для этого вычисляем значения изгибающих моментов в этих сечениях:

$$M_i = (40 + 44,35) \cdot 2,96 + (35,65 + 38,25) \cdot 0,96 - 40 \cdot 3,96 \cdot 1,98 = 6,99 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_k = (40 + 44,35) \cdot 1,11 - 40 \cdot 2,11 \cdot 1,055 = 4,59 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Эюра действительных изгибающих моментов после уточнения показана на рис. 3.16.

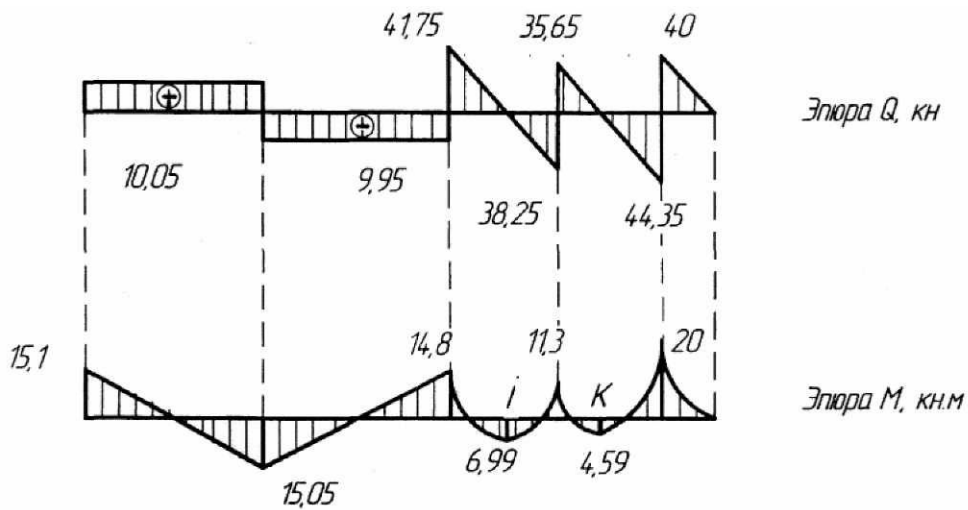


Рис. 3.16

3.14. Определяем реакции опор, для чего используем эпюру изгибающих моментов и эпюру поперечных сил (рис. 3.16).

$$V_1 = 10,05 \text{ кН}; \quad V_2 = 9,95 + 41,75 = 51,7 \text{ кН};$$

$$V_3 = 38,25 + 35,65 = 73,9 \text{ кН}; \quad V_4 = 44,35 + 40 = 84,35 \text{ кН};$$

$$m_1 = -15,1 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

3.15. Выполняем статическую проверку (рис. 3.17):

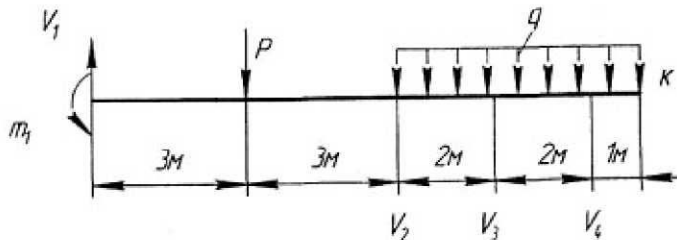


Рис. 3.17

$$\begin{aligned} \sum Y = 0: & V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - P - q \cdot 5 = \\ & = 10,05 + 51,7 + 73,9 + 84,35 - P - q \cdot 5 = 220 - 220 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum m_k = 0: & m_1 - V_1 + P \cdot 8 - V_2 \cdot 5 - V_3 \cdot 3 - V_4 \cdot 1 - q \cdot 5 \cdot 2,5 = 15,1 - \\ & - 10,05 \cdot 11 + 20 \cdot 8 - 51,7 \cdot 5 - 73,9 \cdot 3 - 84,35 \cdot 1 + 40 \cdot 5 \cdot 2,5 = \\ & = 675,1 - 675,1 = 0 \end{aligned}$$

Результаты проверки подтверждают правильность решения.

4. Использование свойств симметрии при раскрытии статической неопределимости стержневых систем

Статически неопределимые стержневые системы называют симметричными, если они имеют геометрическую ось (плоскость) симметрии, относительно которой симметрично расположены наложенные на систему связи и жесткости симметрично расположенных стержней равны (рис. 4.1, а).

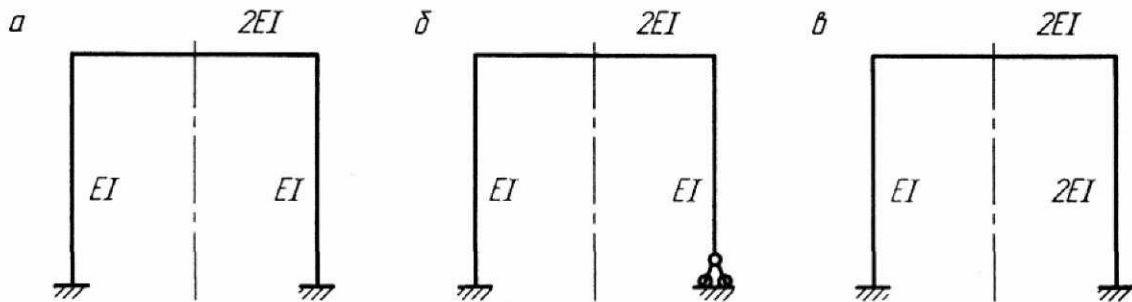


Рис. 4.1

В этом случае правая часть системы может рассматриваться как зеркальное отображение левой части относительно оси симметрии.

Рамы, представленные на рис. 4.1, б и 4.1, в, не являются симметричными. В первом случае нарушена симметрия наложенных на раму связей, а во втором случае различаются жесткости симметрично расположенных стержней.

При расчете симметричных систем оказывается возможным упростить решение задачи и снизить число искомых силовых факторов X_1, X_2, \dots, X_n .

Рассмотрим случаи нагружения симметричной трижды статически неопределимой рамы (рис. 4.1, а) симметричной и кососимметричной нагрузками. Под симметричной нагрузкой будем понимать такую, при которой все внешние силы, приложенные к правой части рамы, являются зеркальным отображением сил, приложенных к левой части (рис. 4.2, а). Под кососимметричной нагрузкой будем понимать такую, при которой силы, приложенные к правой половине рамы, также являются зеркальным отображением сил, приложенных к левой половине, но противоположны им по знаку (рис. 4.2, б). Аналогично классифицируются и внутренние силовые факторы.

Тогда у симметричной рамы в плоскости симметрии при симметричной внешней нагрузке обращаются в нуль кососимметричные внутренние силовые факторы, а при кососимметричной внешней нагрузке - симметричные силовые факторы.

Так, у рамы (рис. 4.2, а) в плоскости симметрии обращается в нуль поперечная сила (эпюра моментов симметричная и момент достигает экс-

тремального значения), а у рамы (рис. 4.2, б) в плоскости симметрии обращается в нуль изгибающий момент. Если для них выбрать основную систему путем рассечения рамы в плоскости симметрии, то степень статической неопределимости можно понизить до двух (рис. 4.3, а и 4.3, б соответственно).

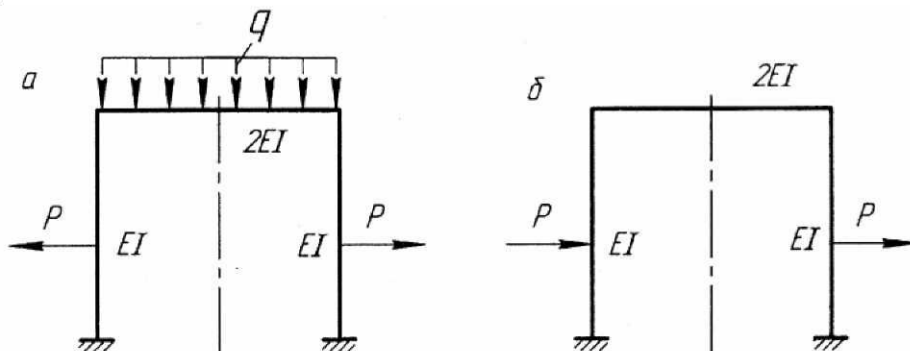


Рис. 4.2

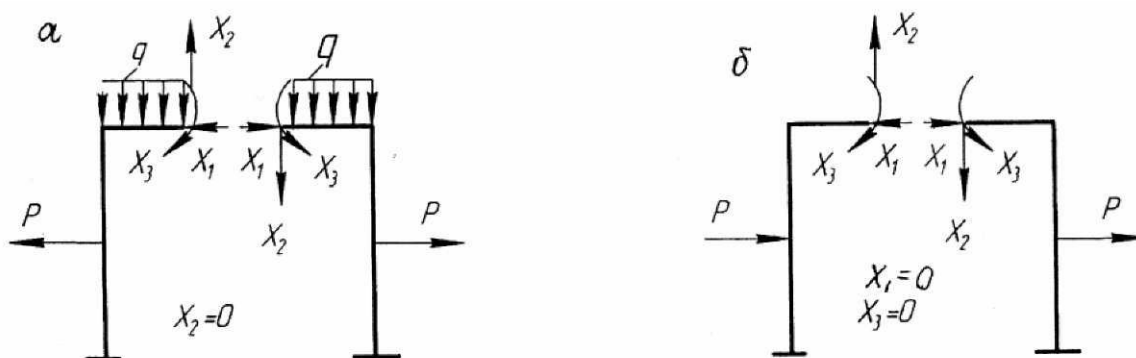


Рис. 4.3

При несимметричной основной системе (рис. 4.4, а) имеем три неизвестных усилия, для определения которых необходимо решать систему из трех канонических уравнений с тремя неизвестными. Если же выбрать симметричную основную систему (рис. 4.4, б), то при перемножении симметричных и кососимметричных единичных эпюр (рис. 4.5) получим симметричных единичных эпюр (рис. 4.5) получим

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \sum \int \frac{\overline{M}_1 \cdot \overline{M}_3}{EI} dx = 0;$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \sum \int \frac{\overline{M}_2 \cdot \overline{M}_3}{EI} dx = 0;$$

и система канонических уравнений упрощается:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0;$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0;$$

$$\delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0.$$

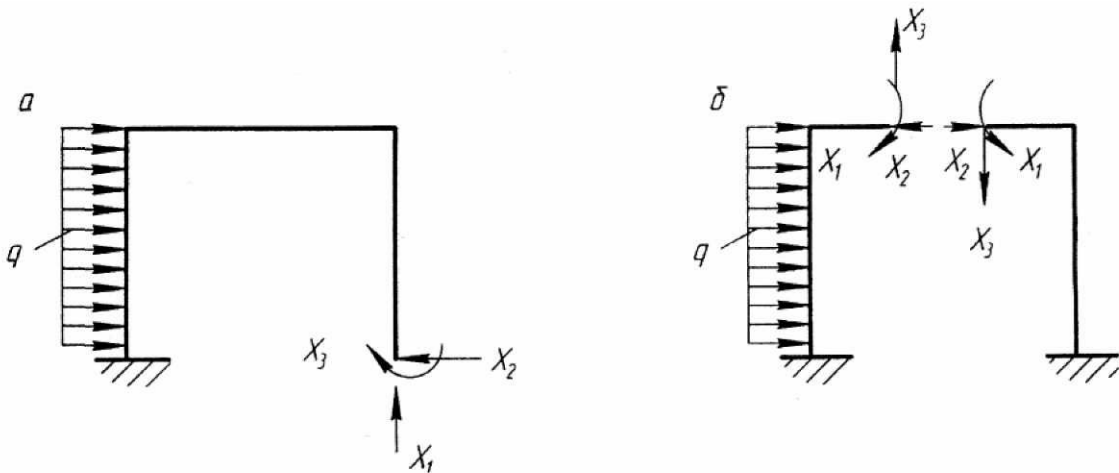


Рис. 4.4

Таким образом, если выбрать основную систему симметричную, то и при произвольной нагрузке решение задачи упрощается.

Учет свойств симметрии также используется и при решении статически неопределимых балок.

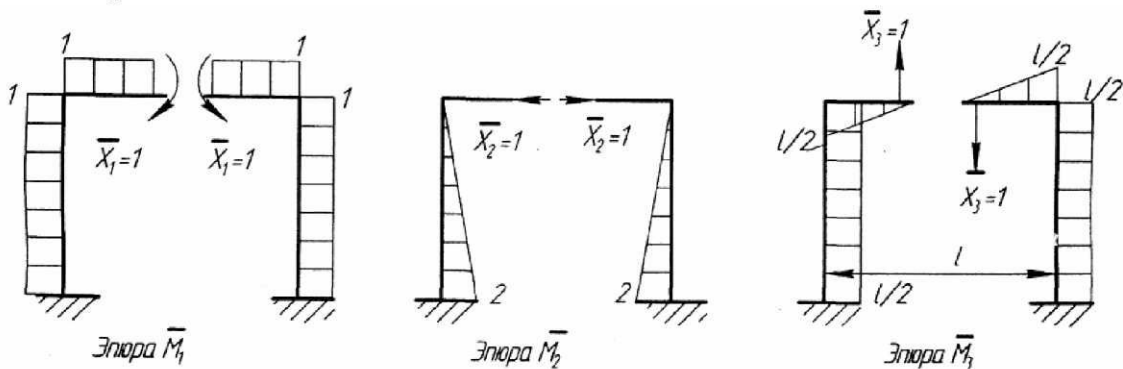


Рис. 4.5

На рис. 4.6 показаны симметричные и кососимметричные заданные системы, выбор рациональной основной системы для них и общий вид эквивалентных систем.

Заданная система (рис. 4.6, а) является симметричной, следовательно, и эпюра изгибающих моментов будет симметричной, а эпюра поперечных сил – кососимметричной. Тогда посередине 2-го пролета поперечная сила будет отсутствовать. Если в общем случае эта система дважды статически неопределима, то при выборе симметричной основной системы в сечении посередине пролета будет иметь место одно неизвестное X_1 – изгибающих момент.

При аналогичных рассуждениях систему, представленную на рис. 4.6, б, также можно привести к системе 1 раз статически неопределимой.

Для кососимметричной системы (рис. 4.6, в) эпюра изгибающих моментов будет кососимметричной, посередине пролета изгибающий момент будет отсутствовать и в рекомендуемой основной системе будет одно известное X_1 – поперечная сила.

Заданная система (рис. 4.6, г) является симметричной, в общем случае 5 раз статически неопределимой. Учитывая отсутствие продольной силы и выбирая симметричную основную систему, задачу можно привести к дважды статически неопределимой.

При аналогичных рассуждениях (но используя косую симметрию) система, представленная на рис. 4.6, д, является дважды статически неопределимой.

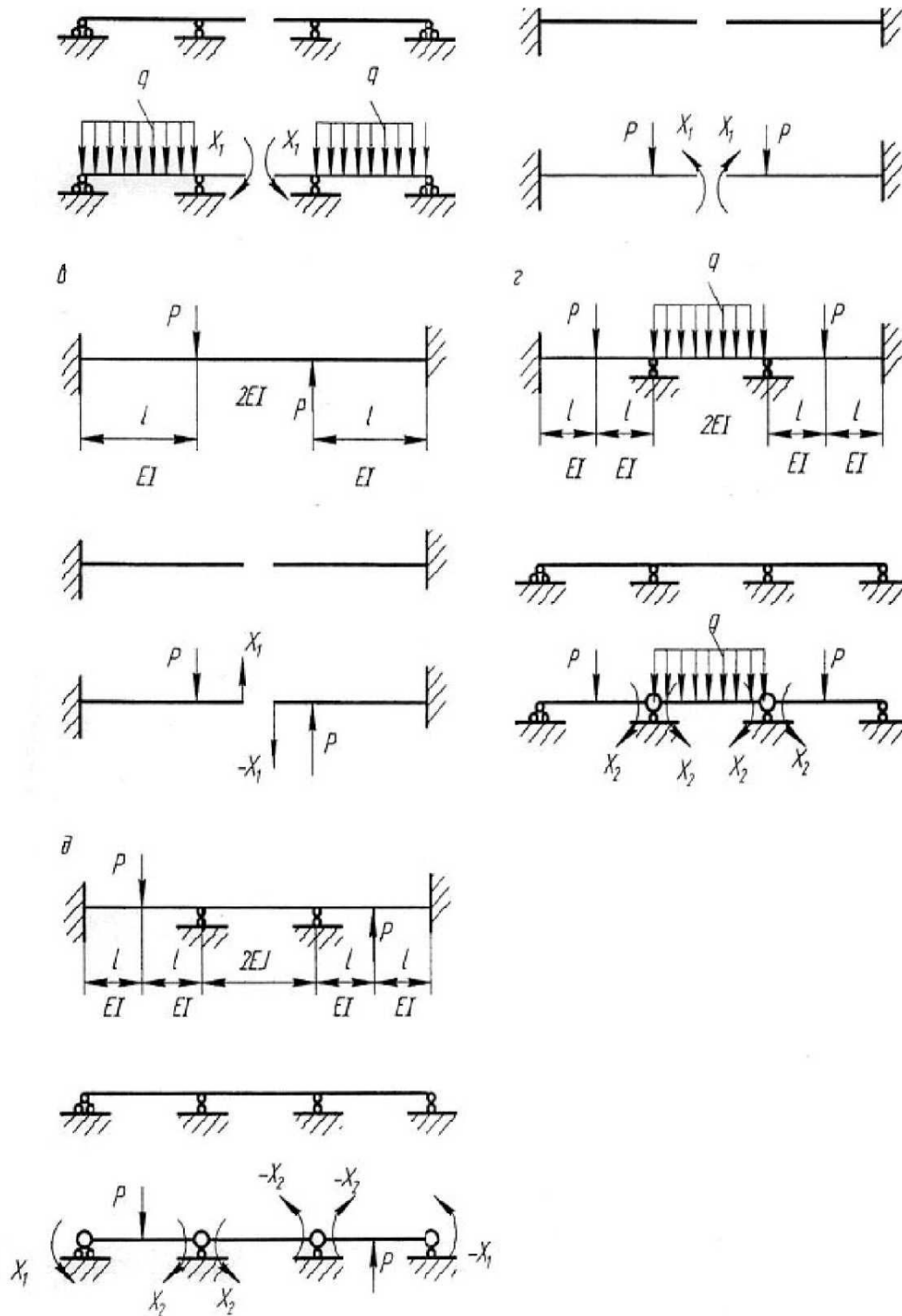


Рис. 4.6

5. Расчет методом сил статически неопределимых систем, работающих на растяжение или сжатие

Алгоритм решения таких задач аналогичен ранее рассмотренным, однако можно отметить некоторые особенности.

- Основная система метода сил выбирается, как правило, путем рассечения стержней, т. е. за неизвестные усилия принимаются внутренние силовые факторы – продольные силы.

- Поскольку стержни прямолинейные и в пределах длины одного стержня $EA = \text{const}$, то при определении коэффициентов δ_{ik} и Δ_{iP} интегрирование можно опустить и определять эти коэффициенты путем простого перемножения усилий, действующих в отдельных стержнях от разного вида нагрузок, с учетом длины и жесткости этих стержней, и суммированием результатов перемножения, например:

$$\delta_{ii} = \sum \int \frac{\bar{N}_{i1} \cdot \bar{N}_{i1}}{EA_i} dx = \sum \frac{\bar{N}_{i1} \cdot \bar{N}_{i1} \cdot \ell_i}{EA_i};$$

$$\Delta_{iP} = \sum \int \frac{N_{iP} \cdot \bar{N}_{i1}}{EA_i} dx = \sum \frac{N_{iP} \cdot \bar{N}_{i1} \cdot \ell_i}{EA_i}, \quad (5.1)$$

где N_{iP} – усилие в i -том стержне в основной системе метода сил от внешней нагрузки;

\bar{N}_{i1} – усилие в i -том стержне от силы $\bar{X}_1 = 1$;

ℓ_i – длина i -того стержня;

EA_i – жесткость i -того стержня.

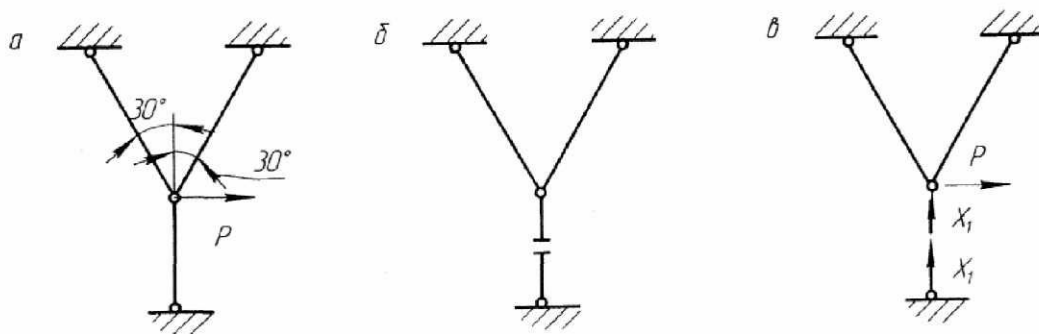


Рис. 5.1

Примеры выбора основной системы и общий вид эквивалентных систем показаны на рис. 5.1–5.4 и 5.7.

Рассмотрим примеры расчета некоторых стержневых систем.

Пример 1

Балка большой жесткости шарнирно прикреплена к стене и удерживается тремя упругими стержнями (рис. 5.2, а).

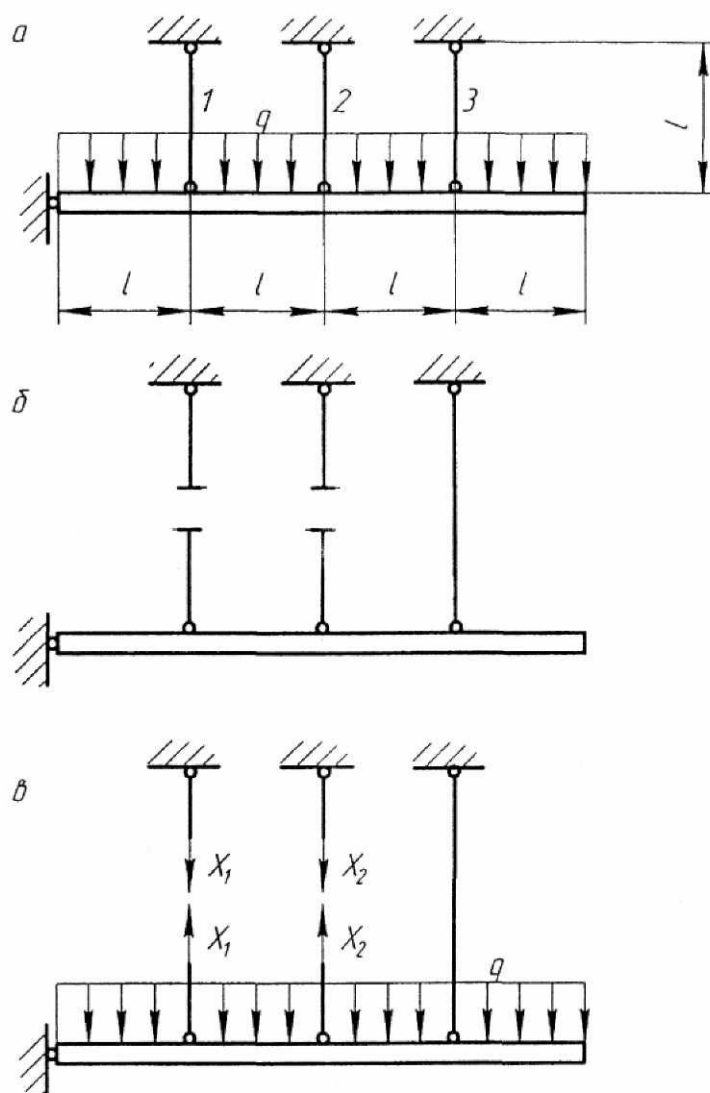


Рис. 5.2

Требуется определить усилия в упругих стержнях. Нагрузку q , размеры стержней и их жесткость считаем известными.

Решение.

5.1. Устанавливаем степень статической неопределимости n . На систему наложены две внешние связи, тогда $n = x - 3 = 5 - 3 = 2$. Система дважды статически неопределима.

5.2. Образует основную систему метода сил путем перерезания упругих стержней 1 и 2 (рис. 5.2, б). Требования к основной системе те же, что и в ранее рассмотренных примерах.

5.3. Образует эквивалентную систему путем загрузки основной системы усилиями отброшенных связей X_1, X_2 и внешней нагрузкой q (рис. 5.2, в).

5.4. Записываем канонические уравнения метода сил:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0;$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0.$$

5.5. Находим усилия в упругих стержнях от действия единичных усилий $\bar{X}_1 = 1$ и $\bar{X}_2 = 1$ и от внешней нагрузки q .

- Первое единичное состояние

Загружаем основную систему усилием $\bar{X}_1 = 1$ (рис. 5.3) и находим продольные силы во всех стержнях:

$$\bar{N}_{11} = \bar{X}_1 = 1; \quad \bar{N}_{21} = 0.$$

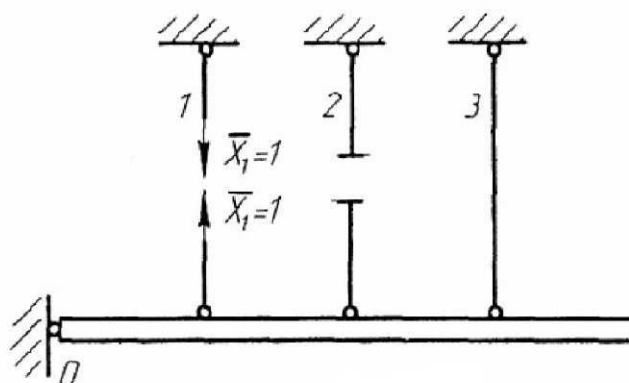


Рис. 5.3

Из условия равновесия $\sum m_0 = 0$ находим $\bar{X}_1 \cdot \ell - \bar{N}_{31} \cdot 3\ell = 0$, тогда

$$\bar{N}_{31} = -\frac{1}{3} \text{ (деформация сжатия).}$$

- Второе единичное состояние

Аналогично загружаем основную систему усилием $\bar{X}_2 = 1$ (рис. 5.4) и находим продольные силы во всех стержнях:

$$\bar{N}_{12} = 0; \quad \bar{N}_{22} = \bar{X}_2 = 1.$$

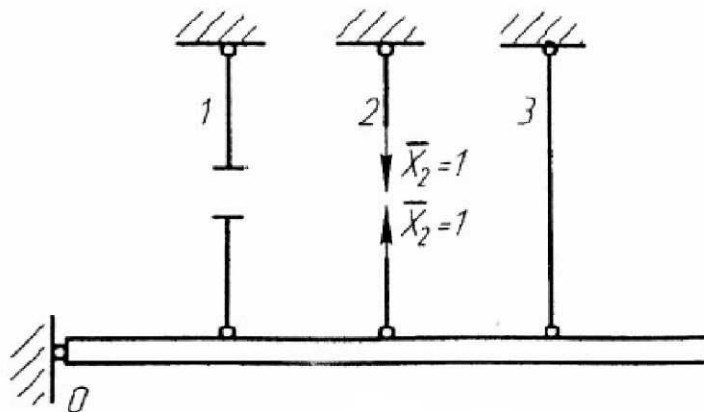


Рис. 5.4

Из условия равновесия $\sum m_0 = 0$ находим $\bar{N}_{32} = -\frac{2}{3}$ (деформация сжатия).

▪ Грузовое состояние

Загружаем основную систему внешней нагрузкой q (рис. 5.5) и находим продольные силы во всех стержнях:

$$N_{1P} = 0; \quad N_{2P} = 0.$$

Из условия равновесия $\sum m_i = 0$ находим $N_{3P} = \frac{8}{3} \cdot q\ell$.

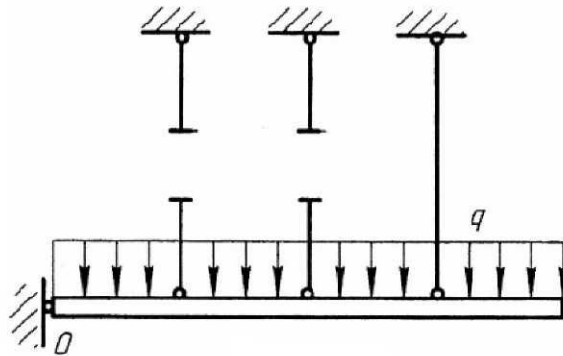


Рис. 5.5

5.6. Вычисляем коэффициенты канонических уравнений и грузовые коэффициенты по формуле (5.1).

$$\delta_{11} = \frac{\bar{N}_{11} \cdot \bar{N}_{11} \cdot \ell_1}{EA_1} + \frac{\bar{N}_{21} \cdot \bar{N}_{21} \cdot \ell_2}{EA_2} + \frac{\bar{N}_{31} \cdot \bar{N}_{31} \cdot \ell_3}{EA_3} = \frac{1 \cdot 1 \cdot \ell}{EA} +$$

$$+ \frac{\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \ell}{EA} = \frac{10 \cdot \ell}{9EA};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{\bar{N}_{11} \cdot \bar{N}_{12} \cdot \ell_1}{EA_1} + \frac{\bar{N}_{21} \cdot \bar{N}_{22} \cdot \ell_2}{EA_2} + \frac{\bar{N}_{31} \cdot \bar{N}_{32} \cdot \ell_3}{EA_3} = \frac{\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \ell}{EA} =$$

$$= \frac{2 \cdot \ell}{9EA};$$

$$\delta_{22} = \frac{\bar{N}_{12} \cdot \bar{N}_{12} \cdot \ell_1}{EA_1} + \frac{\bar{N}_{22} \cdot \bar{N}_{22} \cdot \ell_2}{EA_2} + \frac{\bar{N}_{32} \cdot \bar{N}_{32} \cdot \ell_3}{EA_3} = \frac{1 \cdot 1 \cdot \ell}{EA} +$$

$$+ \frac{\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \ell}{EA} = \frac{13 \cdot \ell}{9EA};$$

$$\begin{aligned}\delta_{1P} &= \frac{\bar{N}_{1P} \cdot \bar{N}_{11} \cdot \ell_1}{EA_1} + \frac{\bar{N}_{2P} \cdot \bar{N}_{21} \cdot \ell_2}{EA_2} + \frac{\bar{N}_{3P} \cdot \bar{N}_{31} \cdot \ell_3}{EA_3} = \\ &= \frac{\left(+\frac{8}{3} \cdot q\ell\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \ell}{EA} = \frac{10 \cdot \ell}{9EA} = -\frac{8}{9EA} \cdot q\ell^2; \\ \delta_{2P} &= \frac{\bar{N}_{1P} \cdot \bar{N}_{12} \cdot \ell_1}{EA_1} + \frac{\bar{N}_{2P} \cdot \bar{N}_{22} \cdot \ell_2}{EA_2} + \frac{\bar{N}_{3P} \cdot \bar{N}_{32} \cdot \ell_3}{EA_3} = \\ &= \frac{\left(\frac{8}{3} \cdot q\ell\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \ell}{EA} = -\frac{16}{9EA} \cdot q\ell^2.\end{aligned}$$

5.7. Записываем систему канонических уравнений. Для этого подставляем значения полученных коэффициентов в уравнение (2.3).

$$\begin{aligned}\frac{10}{9} \cdot \frac{\ell}{EA} \cdot X_1 + \frac{2}{9} \cdot \frac{\ell}{EA} \cdot X_2 - \frac{8}{9} \cdot \frac{q\ell^2}{EA} &= 0; \\ \frac{2}{9} \cdot \frac{\ell}{EA} \cdot X_1 + \frac{13}{9} \cdot \frac{\ell}{EA} \cdot X_2 - \frac{16}{9} \cdot \frac{q\ell^2}{EA} &= 0.\end{aligned}$$

После сокращения канонических уравнений на величину $\frac{\ell}{9EA}$ получаем:

$$\begin{aligned}10X_1 + 2X_2 - 8q\ell &= 0; \\ 2X_1 + 13X_2 - 16q\ell &= 0.\end{aligned}$$

5.8. Решаем систему канонических уравнений и находим неизвестные усилия:

$$\begin{aligned}X_1 &= 0,572q\ell; \\ X_2 &= 0,572q\ell.\end{aligned}$$

5.9. Находим действительные значения усилий в упругих стержнях заданной системы по формуле:

$$N_i = N_{i1} + \bar{N}_{i1} \cdot X_1 + \bar{N}_{i2} \cdot X_2. \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned}N_1 &= N_{1P} + \bar{N}_{11} \cdot X_1 + \bar{N}_{12} \cdot X_2 = 1 \cdot 0,572 \cdot q\ell = 0,572 \cdot q\ell; \\ N_2 &= N_{2P} + \bar{N}_{21} \cdot X_1 + \bar{N}_{22} \cdot X_2 = 1 \cdot 1,143 \cdot q\ell = 1,143 \cdot q\ell; \\ N_3 &= N_{3P} + \bar{N}_{31} \cdot X_1 + \bar{N}_{32} \cdot X_2 = \frac{8}{3} \cdot q\ell - \frac{1}{3} \cdot 0,572 \cdot q\ell - \frac{2}{3} \cdot 1,143 \cdot q\ell = \\ &= 1,714 \cdot q\ell.\end{aligned}$$

5.10. Выполняем деформационную проверку по формуле:

$$N_{iN} = \frac{\bar{N}_{11} \cdot N_1 \cdot \ell_1}{EA_1} + \frac{\bar{N}_{21} \cdot N_2 \cdot \ell_2}{EA_2} + \frac{\bar{N}_{31} \cdot N_3 \cdot \ell_3}{EA_3}, \quad (5.3)$$

где $\bar{N}_{11} = 0$; $\bar{N}_{21} = 0$; $\bar{N}_{31} = -\frac{1}{3}$; $N_1 = 0,572ql$; $N_2 = 1,143ql$; $N_3 = 1,714ql$;

$\ell_1 = \ell_2 = \ell_3$; $EA = \text{const}$.

Тогда

$$\frac{1 \cdot 0,572ql \cdot \ell}{EA} + \frac{0 \cdot 1,143ql \cdot \ell}{EA} + \frac{\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 1,714ql \cdot \ell}{EA} = \frac{ql^2}{EA} \cdot (0,572 - 0,572) = 0$$

условие правильности решения выполняется.

5.11. Выполняем проверку на статическое равновесие (рис. 5.6):

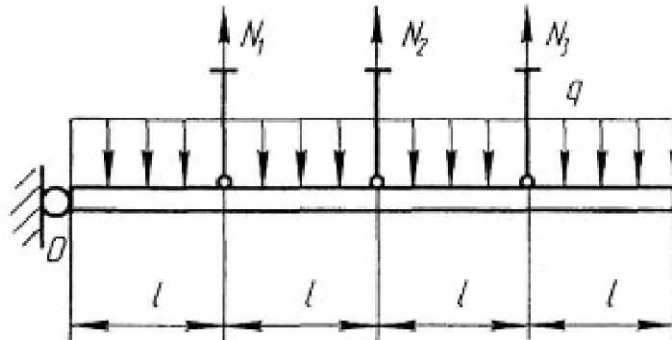


Рис. 5.6

$$\begin{aligned} \sum m_0 = 0: N_1 \cdot l + N_2 \cdot 2l + N_3 \cdot 3l - q \cdot 4l \cdot 2l = \\ = 0,572 \cdot ql^2 + 2,286 \cdot ql^2 + 5,142 \cdot ql^2 - q \cdot 4l \cdot 2l = 8 \cdot ql^2 - 8 \cdot ql^2 = 0 \end{aligned}$$

Условие равновесия выполняется.

Пример 2

Система состоит из трех стержней, соединяемых концами в шарнире С (рис. 5.7).

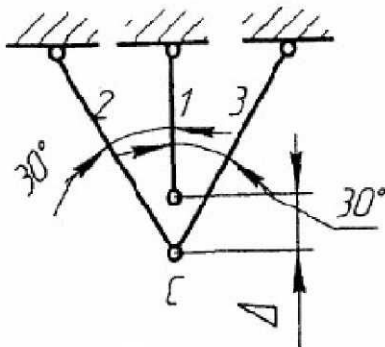


Рис. 5.7

Стержень 1 изготовлен короче требуемого размера ℓ на величину Δ . После сборки стержневой системы в стержне 1 возникают растягивающие напряжения, а в стержнях 2 и 3 – сжимающие. Такие напряжения называют монтажными.

Размеры стержней: $\ell_1 = \ell$; $\ell_2 = \ell_3 = \ell / \cos 30^\circ = 1,154\ell$. Жесткости стержней одинаковы ($EA = \text{const}$). Требуется найти усилия в стержнях.

Решение.

5.12. Заданная система показана на рис. 5.8, а. Усилия трех упругих стержней пересекаются в одной точке (шарнир С). Для такой системы можно составить только два независимых уравнения статики ($\sum X = 0$; $\sum Y = 0$).

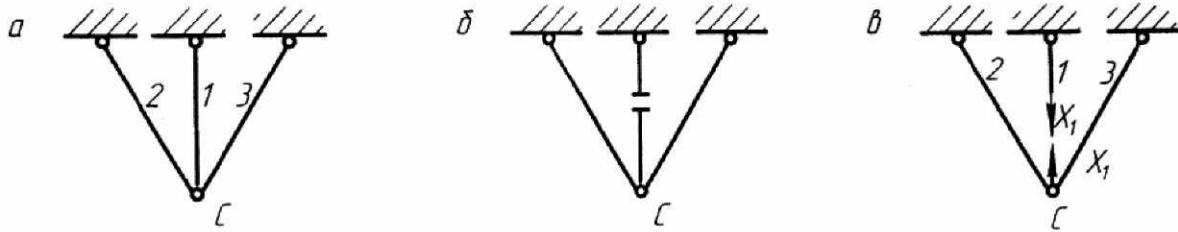


Рис. 5.8

Задача один раз статически неопределима.

5.13. Преобразуем заданную систему в эквивалентную путем перерезания стержня 1 (рис. 5.8, б).

5.14. Образует эквивалентную систему путем нагружения основной системы усилием в перерезанной связи X_1 (рис. 5.8, в).

5.15. Записываем каноническое уравнение метода сил

$$\delta_{11} \cdot X_1 = \Delta,$$

где величина Δ в правой части уравнения показывает, что перемещение в направлении неизвестного усилия X_1 , уже произошло при сборке конструкции.

5.16. Определяем усилия в упругих стержнях от единичного воздействия $\bar{X}_1 = 1$.

Рассмотрим равновесие вырезанного узла С (рис. 5.9):

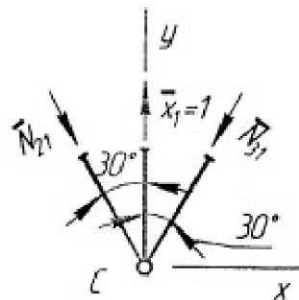


Рис. 5.9

$$\sum X = 0 \rightarrow \bar{N}_{21} = \bar{N}_{31};$$

$$\sum Y = 0: 1 - 2N_{21} \cos 30^\circ = 0; N_{21} = \frac{1}{2 \cos 30^\circ} = 0,577.$$

Таким образом, $\bar{N}_{11} = \bar{X}_1 = 1$; $\bar{N}_{21} = \bar{N}_{31} = -0,577$ (знак минус указывает на деформацию сжатия).

5.17. Определяем значение коэффициента канонического уравнения по формуле (5.1):

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{\bar{N}_{11} \cdot \bar{N}_{11} \cdot \ell_1}{EA_1} + \frac{\bar{N}_{21} \cdot \bar{N}_{21} \cdot \ell_2}{EA_2} + \frac{\bar{N}_{31} \cdot \bar{N}_{31} \cdot \ell_3}{EA_3} = \frac{1 \cdot 1 \cdot \ell}{EA} + \\ &+ \frac{(-0,577) \cdot (-0,577) \cdot 1,154\ell}{EA} + \frac{(-0,577) \cdot (-0,577) \cdot 1,154\ell}{EA} = \\ &= 1,768 \frac{\ell}{EA}. \end{aligned}$$

5.18. Записываем каноническое уравнение:

$$1,768 \frac{\ell}{EA} \cdot X_1 = \Delta.$$

5.19. Решаем уравнение и находим неизвестное усилие:

$$X_1 = \frac{\Delta \cdot EA}{1,768 \cdot \ell} = 0,566 \frac{EA}{\ell} \cdot \Delta.$$

5.20. Определяем действительные значения усилий в упругих стержнях заданной системы по формуле (5.2):

$$N_1 = \bar{N}_{11} \cdot X_1 = 1 \cdot 0,566 \frac{EA}{\ell} \cdot \Delta = 0,566 \frac{EA}{\ell} \cdot \Delta;$$

$$N_2 = \bar{N}_{21} \cdot X_1 = -0,577 \cdot 0,566 \frac{EA}{\ell} \cdot \Delta = -0,327 \frac{EA}{\ell} \cdot \Delta;$$

$$N_3 = \bar{N}_{31} \cdot X_1 = -0,577 \cdot 0,566 \frac{EA}{\ell} \cdot \Delta = -0,327 \frac{EA}{\ell} \cdot \Delta.$$

5.21. Выполняем деформационную проверку по формуле (5.4):

$$\frac{\bar{N}_{11} \cdot N_1 \cdot \ell_1}{EA_1} + \frac{\bar{N}_{21} \cdot N_2 \cdot \ell_2}{EA_2} + \frac{\bar{N}_{31} \cdot N_3 \cdot \ell_3}{EA_3} = \Delta, \quad (5.4)$$

где $\bar{N}_{11} = 1$; $\bar{N}_{21} = \bar{N}_{31} = -0,577$; $\ell_1 = \ell$; $\ell_2 = \ell_3 = 1,154\ell$; $EA = \text{const}$.

Тогда

$$\begin{aligned} &\frac{1 \cdot 0,566 \frac{EA}{\ell} \cdot \Delta \cdot \ell}{EA} + \frac{(-0,577) \cdot \left(-0,327 \frac{EA}{\ell} \cdot \Delta\right) \cdot \ell}{EA} + \\ &+ \frac{(-0,577) \cdot \left(-0,327 \frac{EA}{\ell} \cdot \Delta\right) \cdot \ell}{EA} = 0,95\Delta. \end{aligned}$$

$$0,95 \cdot \Delta \neq \Delta.$$

Погрешность счета составляет $\frac{1-0,95}{1} \cdot 100 = 5\%$, что допустимо.

5.22. Выполняем проверку на статическое равновесие вырезанного узла С (рис. 5.10):

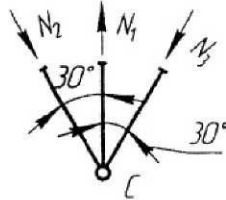


Рис. 5.10

$$\begin{aligned} \sum Y = 0: N_1 - N_2 \cdot \cos 30^\circ &= 0,566 \frac{EA}{\ell} \cdot \Delta - 0,327 \frac{EA}{\ell} \cdot \Delta \cdot 0,866 - \\ - 0,327 \frac{EA}{\ell} \cdot \Delta \cdot 0,866 &= (0,566 - 0,566) \cdot \frac{EA}{\ell} = 0. \end{aligned}$$

Условие равновесия выполняется.

Примечание. При наличии внешней узловой нагрузки дополнительно определяем усилия в стержнях N_{ip} , вычисляем грузовой коэффициент Δ_{ip} , а каноническое уравнение принимает вид:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{ip} = \Delta. \quad (5.5)$$

Пример 3.

Усилия в элементах статически неопределимой стержневой системы могут возникать при отсутствии внешней нагрузки и от изменения температуры окружающей среды (так называемые температурные напряжения).

Рассмотрим стержень, составленный из разнородных материалов и жестко защемленный по торцам (рис. 5.11).

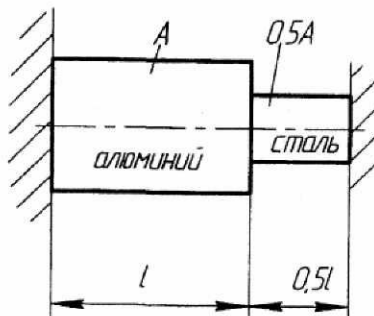


Рис. 5.11

Размеры стержня:

- Длина: $\ell_{ст} = 0,4$ м; $\ell_{алюм} = 0,8$ м.
- Площадь поперечного сечения: $A_{ст} = 2 \cdot 10^3$ мм²; $A_{алюм} = 4 \cdot 10^3$ мм².

Коэффициент продольной упругости:

$$E_{\text{ст}} = 2 \cdot 10^5 \text{ Н/мм}^2; E_{\text{алюм}} = 0,7 \cdot 10^5 \text{ Н/мм}^2.$$

Коэффициент линейного расширения: $\alpha_{\text{ст}} = 15 \cdot 10^{-6}$; $\alpha_{\text{алюм}} = 25 \cdot 10^{-6}$.

Требуется найти усилия, возникающие в стержнях при положительном температурном градиенте $\Delta t = 20 \text{ }^\circ\text{С}$.

Решение.

5.23. Задача 1 раз статически неопределима.

5.24. Преобразуем заданную систему в основную путем отбрасывания одной внешней связи (рис. 5.12, а).



Рис. 5.12

5.25. Образует эквивалентную систему. Для этого нагружаем основную систему усилием отброшенной связи X_1 (рис. 5.12, б).

5.26. Записываем каноническое уравнение метода сил:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1t} = 0.$$

5.27. Нагружаем основную систему единичным усилием $\bar{X}_1 = 1$. Тогда $\bar{N}_{11} = -1$.

5.28. Вычисляем коэффициент канонического уравнения:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{\bar{N}_{11} \cdot \bar{N}_{11} \cdot \ell_{\text{ст}}}{EA_{\text{ст}}} + \frac{\bar{N}_{11} \cdot \bar{N}_{11} \cdot \ell_{\text{алюм}}}{EA_{\text{алюм}}} = \frac{(-1) \cdot (-1) \cdot 400}{2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^3} + \frac{(-1) \cdot (-1) \cdot 800}{0,7 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^3} = \\ &= 3,86 \cdot 10^{-6} \text{ мм/Н}. \end{aligned}$$

5.29. Определяем деформацию стержня от воздействия положительного значения температурного градиента $\Delta t = 20 \text{ }^\circ\text{С}$.

$$\begin{aligned} \Delta_{1t} &= \alpha_{\text{ст}} \cdot \ell_{\text{ст}} \cdot \Delta t + \alpha_{\text{алюм}} \cdot \ell_{\text{алюм}} \cdot \Delta t = 15 \cdot 10^{-6} \cdot 0,4 \cdot 20 + 25 \cdot 10^{-6} \cdot 0,8 \cdot 20 = \\ &= 520 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 0,52 \text{ мм}. \end{aligned}$$

5.30. Записываем каноническое уравнение метода сил:

$$3,86 \cdot 10^{-6} \cdot X_1 - 0,52 = 0.$$

5.31. Решаем уравнение и находим неизвестное усилие:

$$X_1 = 0,134 \cdot 10^6 \text{ Н}.$$

5.32. Выполняем проверку правильности решения задачи по формуле (5.6):

$$\sum \left(\frac{N\ell}{EA} \right)_i = \Delta_{1t}. \quad (5.6)$$

$$\sum \left(\frac{N\ell}{EA} \right)_i = \sum \left(\frac{N\ell}{EA} \right)_{cr} + \sum \left(\frac{N\ell}{EA} \right)_{алюм} = \frac{0,134 \cdot 10^6 \cdot 400}{2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^3} +$$

$$+ \frac{0,134 \cdot 10^6 \cdot 800}{0,7 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^3} = 0,516 \text{ мм.}$$

$$0,516 \neq 0,510,$$

погрешность счета составляет $\frac{0,516 - 0,510}{0,516} \cdot 100 = 3\%$, что допустимо

6. Расчет статически неопределимых стержневых систем методом сил в матричной форме

6.1. Матричная форма определения перемещений в стержневых системах При определении перемещений в балках и рамах (без учета продольных и поперечных сил) интеграл Мора записывается в виде

$$\Delta_{iP} = \sum_{k=1}^m \int_0^{\ell_k} \frac{M_P \cdot \bar{M}_i}{EI_k} dx,$$

где EI_k , ℓ_k – жесткость сечения при изгибе и длина k -го участка соответственно;

m – число участков системы.

Вычислим интеграл Мора для k -го участка по формуле Симпсона, полагая жесткость сечения EI_k постоянной, а подынтегральные M_P и \bar{M}_i функции непрерывными и в сумме не выше третьего порядка.

В этом случае получаем точное значение интеграла Мора:

$$\int_0^{\ell_k} \frac{M_P \cdot \bar{M}_i}{EI_k} dx = \frac{\ell_k}{6EI_k} \cdot \left\| M_{kP}^a \cdot \bar{M}_{ki}^a + 4M_{kP}^c \cdot \bar{M}_{ki}^c + M_{kP}^e \cdot \bar{M}_{ki}^e \right\|, \quad (6.2)$$

где M^a , M^e , M^c – ординаты эпюр моментов в расчетных сечениях (в начале, конце и посередине) участка (рис. 6.1).

Представим правую часть выражения (6.2) в виде произведения трех матриц:

$$\int_0^{\ell_k} \frac{M_P \cdot \bar{M}_i}{EI_k} dx = \left\| \bar{M}_{ki}^a + \bar{M}_{ki}^c + \bar{M}_{ki}^e \right\| \cdot \frac{\ell_k}{6EI_k} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} M_{kP}^a \\ M_{kP}^c \\ M_{kP}^e \end{vmatrix} \quad (6.3)$$

или сокращенно:

$$\int_0^{\ell_k} \frac{M_P \cdot \bar{M}_i}{EI_k} dx = \bar{M}_{ki}^T \cdot B_k \cdot \bar{M}_{kP}, \quad (6.4)$$

где $\overline{M}_{ki}^T = \left\| \overline{M}_{ki}^a + \overline{M}_{ki}^c + \overline{M}_{ki}^e \right\|$ – матрица-строка (транспонированный столбец), состоящая из ординат единичной эпюры моментов на k -м участке от силы $\overline{P}_i = 1$;

$$B_k = \frac{\ell_k}{6EI_k} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ – матрица податливости } k\text{-го участка};$$

$\overline{M}_{kP} = \left\| M_{kP}^a \cdot M_{kP}^c \cdot M_{kP}^e \right\|$ – матрица-столбец (вектор), состоящий из ординат эпюры моментов на k -м участке от нагрузки P .

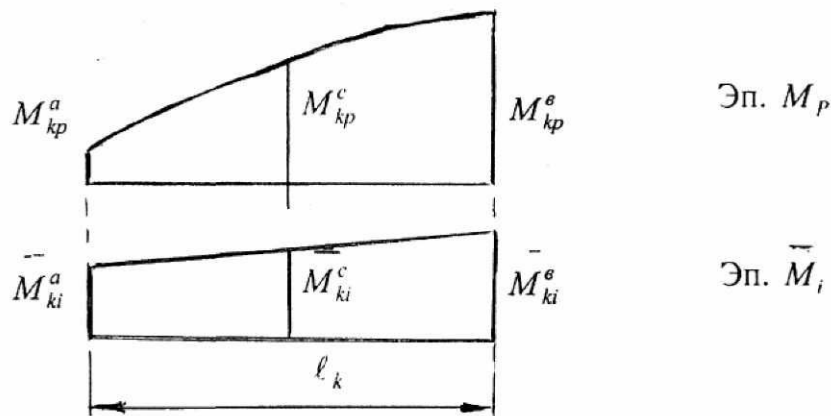


Рис. 6.1

Для получения полного перемещения Δ_{iP} просуммируем интеграл Мора в матричной форме на всех m участках системы:

$$\Delta_{iP} = \sum_{k=1}^m \left(\overline{M}_{ki}^T \cdot B_k \cdot \overline{M}_{kP} \right) = \left\| \overline{M}_{1i}^T \cdot \overline{M}_{2i}^T \cdot \dots \cdot \overline{M}_{mi}^T \right\| \cdot \begin{vmatrix} B_1 & & 0 \\ & B_2 & \\ 0 & \dots & B_m \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \overline{M}_{1P} \\ \overline{M}_{2P} \\ \vdots \\ \overline{M}_{mP} \end{vmatrix} \quad (6.5)$$

или сокращенно:

$$\Delta_{iP} = \overline{M}_i^T \cdot B \cdot \overline{M}_P, \quad (6.6)$$

где \overline{M}_i^T – матрица-строка (транспонированный столбец), состоящая из ординат единичной эпюры моментов \overline{M}_i^T в расчетных сечениях системы от силы $\overline{P}_i = 1$.

Расчетные сечения системы представляют собой совокупность расчетных сечений всех участков, занумерованных по порядку;

B – квазидиагональная матрица податливости системы, состоящая из матриц податливости отдельных участков B_k ;

\overline{M}_P – матрица-столбец (вектор), состоящая из ординат эпюры моментов M_P в расчетных сечениях системы от нагрузки P .

Формулой (6.6) определяется одно перемещение какой-либо точки по направлению i от нагрузки P .

Для вычисления полного вектора перемещений $\overline{\Delta}_P$, состоящего из совокупности перемещений $\Delta_{1P}, \Delta_{2P}, \dots, \Delta_{nP}$ нужно в формуле (6.6) вместо одной строки \overline{M}_i^T записать все n строк матриц $\overline{M}_1^T, \overline{M}_2^T, \dots, \overline{M}_n^T$.

Тогда получим:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta}_P &= \begin{Bmatrix} \Delta_{1P} \\ \Delta_{2P} \\ \vdots \\ \Delta_{nP} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overline{M}_1^T \cdot B \cdot \overline{M}_P \\ \overline{M}_2^T \cdot B \cdot \overline{M}_P \\ \dots \\ \overline{M}_n^T \cdot B \cdot \overline{M}_P \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{Bmatrix} \overline{M}_{11}^T \cdot \overline{M}_{21}^T \cdot \dots \cdot \overline{M}_{m1}^T \\ \overline{M}_{12}^T \cdot \overline{M}_{22}^T \cdot \dots \cdot \overline{M}_{m2}^T \\ \dots \\ \overline{M}_{1n}^T \cdot \overline{M}_{2n}^T \cdot \dots \cdot \overline{M}_{mn}^T \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} B_1 & & 0 \\ & B_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & B_m \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \overline{M}_{1P} \\ \overline{M}_{2P} \\ \vdots \\ \overline{M}_{nP} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (6.7)$$

или сокращенно:

$$\overline{\Delta}_P = \overline{M}^T \cdot B \cdot \overline{M}_P. \quad (6.8)$$

Перемещения в формах (с учетом постоянных продольных сил N и жесткостей сечения стержней EA_k в пределах участков) определяются по формуле:

$$\Delta_{iP} = \sum_{k=1}^m \frac{N_P \cdot \overline{N}_i}{EA_k} \cdot \ell_k. \quad (6.9)$$

По аналогии с (6.6) формула (6.9) в матричной форме записывается так:

$$\Delta_{iP} = \begin{Bmatrix} \overline{N}_{1i} \cdot \overline{N}_{2i} \cdot \dots \cdot \overline{N}_{mi} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\ell_1}{EA_1} & & 0 \\ & \frac{\ell_2}{EA_2} & \\ & & \ddots \\ & & & \frac{\ell_m}{EA_m} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} N_{1P} \\ N_{2P} \\ \vdots \\ N_{mP} \end{Bmatrix} \quad (6.10)$$

или сокращенно:

$$\Delta_{iP} = \overline{N}_i^T \cdot B_N \cdot \overline{N}_P, \quad (6.11)$$

где \overline{N}_i^T – матрица-строка (транспонированный столбец), состоящая из величин продольных сил в элементах формы от силы $\overline{P}_i = 1$;

B_N – диагональная матрица податливости системы;

\overline{N}_P – матрица-столбец (вектор), состоящая из продольных сил в элементах формы от нагрузки P .

6.2. Матричная форма расчета статически неопределимых систем методом сил.

При расчете статически неопределимых стержневых систем, имеющих большую степень статической неопределимости и значительное число участков нагружения, целесообразно перейти к матричной форме записи канонических уравнений метода сил. Такой переход позволяет не только формализовать процесс построения эпюр внутренних силовых факторов, но и эффективно использовать вычислительные машины.

Канонические уравнения метода сил, записанные в форме:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1P} = 0;$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2P} = 0;$$

.....

.....

$$\delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nP} = 0,$$

можно представить в форме:

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Delta_{1P} \\ \Delta_{2P} \\ \vdots \\ \Delta_{nP} \end{vmatrix} = 0 \quad (6.12)$$

или в компактной форме записи:

$$\Delta \cdot \overline{X} + \overline{\Delta}_P = 0, \quad (6.13)$$

где Δ – матрица единичных перемещений в основной системе;

\overline{X} – вектор лишних неизвестных;

$\overline{\Delta}_P$ – вектор перемещений в основной системе от нагрузки P ;

$$\Delta = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{vmatrix}; \quad \overline{X} = \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{vmatrix}; \quad \overline{\Delta}_P = \begin{vmatrix} \Delta_{1P} \\ \Delta_{2P} \\ \vdots \\ \Delta_{nP} \end{vmatrix}.$$

Перемещения сечений для балок и рам определяются по формуле (6.8). Для определения элементов матрицы Δ воспользуемся той же формулой (6.8). Подставив в эту формулу вместо вектора \bar{M}_P вектор \bar{M}_1 , состоящий из ординат первой единичной эпюры моментов \bar{M}_1 , получим первый столбец матрицы Δ :

$$\begin{pmatrix} \delta_{11} \\ \delta_{21} \\ \dots \\ \delta_{n1} \end{pmatrix} = \bar{M}^T \cdot B \cdot \bar{M}. \quad (6.14)$$

Аналогично подстановкой в (6.8) векторов $\bar{M}_2, \bar{M}_3, \dots, \bar{M}_n$ получим последующие столбцы матрицы Δ , т. е.:

$$\begin{aligned} \Delta &= \left\| \bar{M}^T \cdot B \cdot \bar{M}_1 \cdot \bar{M}^T \cdot B \cdot \bar{M}_2 \cdot \dots \cdot \bar{M}^T \cdot B \cdot \bar{M}_n \right\| = \\ &= \begin{pmatrix} \bar{M}_1^T \cdot B \cdot \bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1^T \cdot B \cdot \bar{M}_2 \cdot \dots \cdot \bar{M}_1^T \cdot B \cdot \bar{M}_n \\ \bar{M}_2^T \cdot B \cdot \bar{M}_1 \cdot \bar{M}_2^T \cdot B \cdot \bar{M}_2 \cdot \dots \cdot \bar{M}_2^T \cdot B \cdot \bar{M}_n \\ \dots \\ \bar{M}_n^T \cdot B \cdot \bar{M}_1 \cdot \bar{M}_n^T \cdot B \cdot \bar{M}_2 \cdot \dots \cdot \bar{M}_n^T \cdot B \cdot \bar{M}_n \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.15)$$

Или сокращенно:

$$\Delta = \bar{M}^T \cdot B \cdot \bar{M}. \quad (6.16)$$

Решение уравнения (6.12) представляется в виде:

$$\bar{X} = \Delta^{-1} \cdot \bar{\Delta}_P, \quad (6.17)$$

где Δ^{-1} – обратная матрица.

После подстановки выражений $\bar{\Delta}_P$ из (6.8) и Δ (6.16) в уравнение (6.17) получим вектор неизвестных:

$$\bar{X} = - \left(\bar{M}^T \cdot B \cdot \bar{M} \right)^{-1} \cdot \bar{M}^T \cdot B \cdot \bar{M}_P. \quad (6.18)$$

Действительные значения изгибающих моментов в заданной системе определяются по матричной формуле:

$$\bar{M} = \bar{M}_P + \bar{M} \cdot \bar{X} \quad (6.19)$$

или после подстановки выражения \bar{X} из (6.18) окончательно получим:

$$\bar{M} = \bar{M}_P + \bar{M} \cdot \left(\bar{M}^T \cdot B \cdot \bar{M} \right)^{-1} \cdot \bar{M}^T \cdot B \cdot \bar{M}_P \quad (6.20)$$

Деформационная проверка правильности расчета выполняется по формуле:

$$\bar{M}_i^T \cdot B \cdot \bar{M} = 0. \quad (6.21)$$

Пример.

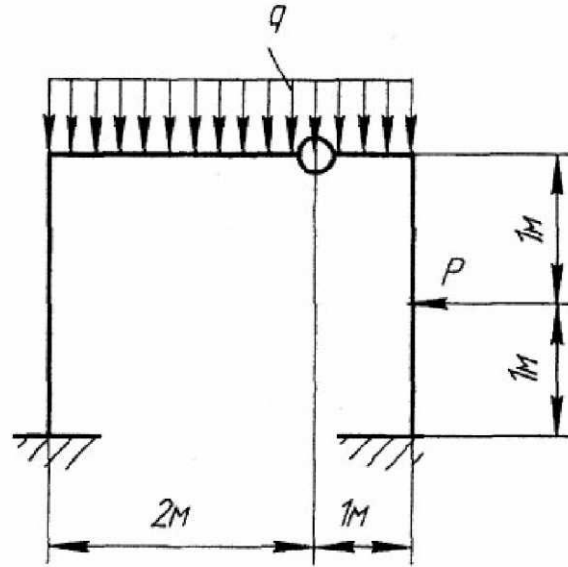


Рис. 6.2

Для рамы, представленной на рис. 6.2 построить эпюры M , Q , N .

Исходные данные: $q = 30$ кН/м, $P = 60$ кН, $EI = \text{const}$.

Решение.

1. Устанавливаем степень статической неопределимости по формуле:

$$n = X - 3 - \text{Ш},$$

где $X = 6$ (наличие внешних связей);

$\text{Ш} = 1$ (один одиночный шарнир).

Тогда $n = 6 - 3 - 1 = 2$.

2. Образует основную систему путем рассечения ригеля по шарниру (рис. 6.3, а).

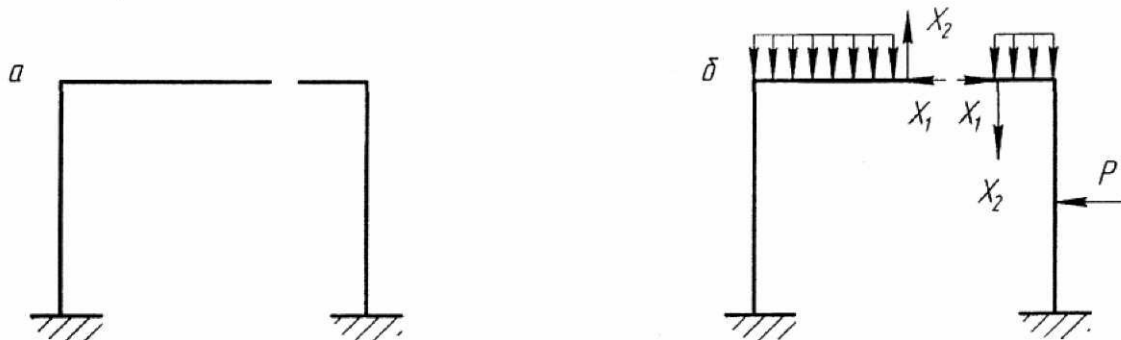


Рис. 6.3

3. Образует эквивалентную систему путем нагружения основной системы усилиями отброшенных связей X_1 , X_2 и внешней нагрузкой P и q (рис. 6.3, б).

4. Записываем каноническое уравнение метода сил:

$$\Delta \cdot \vec{X} + \vec{\Delta}_P = 0.$$

5. Намечаем и нумеруем участки и сечения, а также знаки моментов, исходя из положения точки наблюдателя (рис. 6.4).

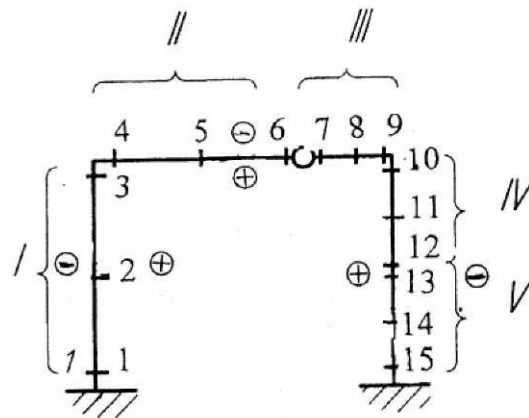


Рис. 6.4

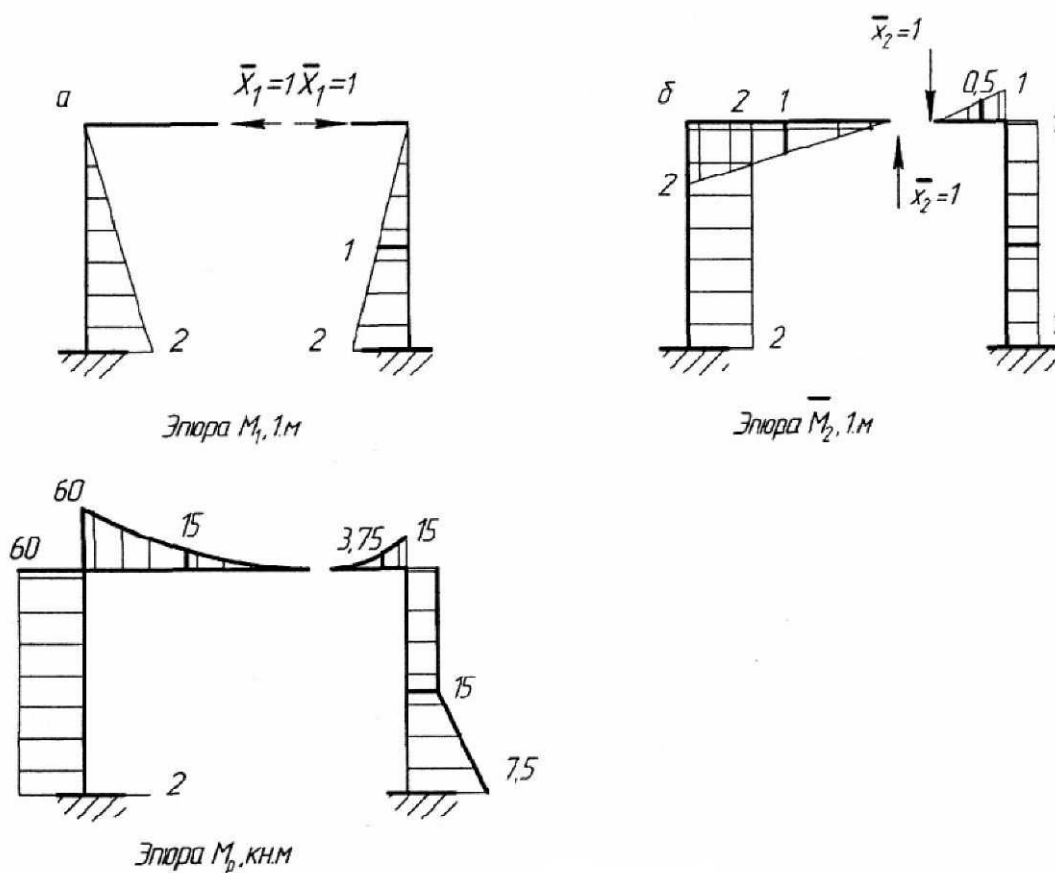


Рис. 6.5

В рассматриваемом примере принимаем, что положение точки наблюдателя расположено внутри контура, поэтому за положительные значения моментов принимаем моменты, которые вызывают в расчетном сечении растяжение внутренних волокон.

6. Строим эпюры изгибающих моментов для основной системы от действия единичных усилий отброшенных связей $\bar{X}_1 = 1$ и $\bar{X}_2 = 1$ и от внешней нагрузки P и q (рис. 6.5).

7. Формируем матрицы \overline{M}_i и \overline{M}_P из ординат полученных эпюр с учетом их знака:

$$\overline{M}_i = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -0,5 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0,5 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1,5 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (6.22)$$

$$\overline{M}_P = \begin{pmatrix} -60 \\ -60 \\ -60 \\ -60 \\ -1,5 \\ 0 \\ 0 \\ -3,75 \\ -15 \\ -15 \\ -15 \\ -15 \\ -15 \\ -45 \\ -75 \end{pmatrix} \quad (6.23)$$

8. Составляем матрицы податливости для отдельных участков системы:

$$B_1 = \frac{\ell_1}{6EI_1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{2}{6EI} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6EI} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix};$$

$$B_2 = \frac{\ell_2}{6EI_2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{2}{6EI} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6EI} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix};$$

$$B_3 = B_4 = B_5 = \frac{\ell_3}{6EI_3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6EI} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

9. Матрица податливости для всей системы принимает следующий вид:

$$\vec{M} = \vec{M}_P + \vec{M}_i \cdot \vec{X} = \begin{pmatrix} -60 \\ -60 \\ -60 \\ -60 \\ -1,5 \\ 0 \\ 0 \\ -3,75 \\ -15 \\ -15 \\ -15 \\ -15 \\ -15 \\ -45 \\ -75 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -0,5 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0,5 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1,5 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 32,5 \\ 13,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31,6 \\ -1,8 \\ -33,4 \\ -33,4 \\ -1,7 \\ 0 \\ 0 \\ -10,4 \\ -28,3 \\ -28,3 \\ -12,05 \\ 4,2 \\ 4,2 \\ -9,55 \\ -23,3 \end{pmatrix}$$

14. Строим эпюру изгибающих моментов по компонентам вектора \vec{M} (рис. 6.6):

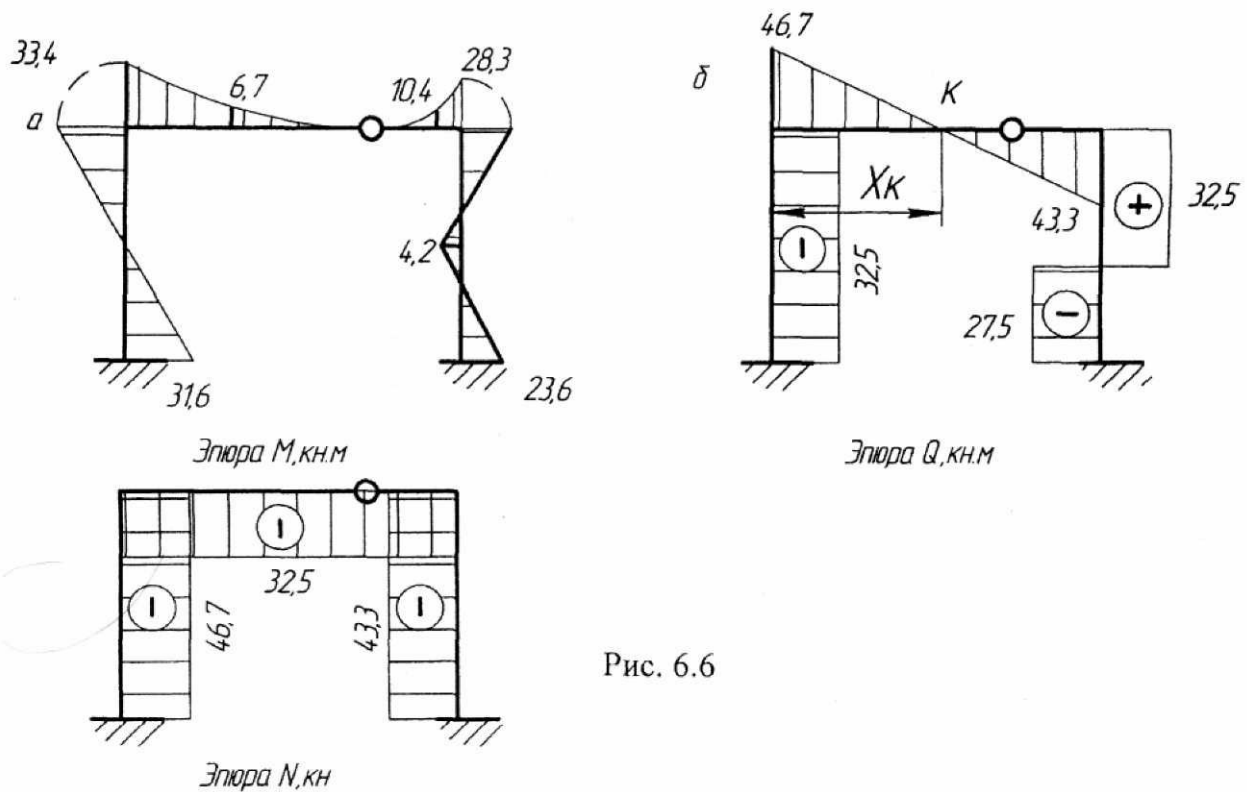


Рис. 6.6

Рис. 6.6

$$\frac{1}{6EI} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 1 & 1 & 1,5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0,5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$\cdot \frac{1}{6EI} \cdot \begin{vmatrix} 2 & & & & & & & & & & & & & & & \\ & 8 & & & & & & & & & & & & & & \\ & & 2 & & & & & & & & & & & & & \\ & & & 2 & & & & & & & & & & & & \\ & & & & 8 & & & & & & & & & & & \\ & & & & & 2 & & & & & & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\ & & & & & & & 4 & & & & & & & & \\ & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\ & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & & & & & & 4 & & & & & \\ & & & & & & & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & & & & & & & 4 & & & \\ & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & & & & & & 4 & \\ & & & & & & & & & & & & & & & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 31,6 \\ -1,8 \\ -33,4 \\ -33,4 \\ -1,7 \\ 0 \\ 0 \\ -10,4 \\ -28,3 \\ -28,3 \\ -12,05 \\ 4,2 \\ 4,2 \\ -9,55 \\ -23,3 \end{vmatrix} =$$

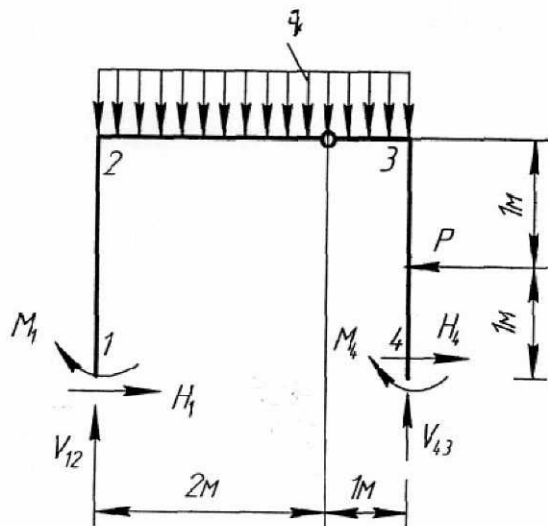
$$= \frac{1}{EI} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

15. Выполняем проверку правильности вычислений компонент вектора \vec{M} . Используем условие, что перемещение по направлению отброшенных (перерезанных) связей отсутствует:

$$\vec{M}_i^T \cdot B \cdot \vec{M} = 0;$$

Для этого рассматриваем равновесие части рамы, узлов или в целом всей рамы, как показано ниже (рис. 6.8).

Применительно к представленной схеме уравнения статики имеют вид:



$$\begin{aligned}
 P &= 60 \text{ кН}; \\
 M_1 &= 31,6 \text{ кНм}; \\
 V_{12} &= 46,7 \text{ кН}; \\
 H_1 &= 32,5 \text{ кН}; \\
 q &= 30 \text{ кН/м}; \\
 M_4 &= 23,3 \text{ кНм}; \\
 V_{43} &= 43,3 \text{ кН}; \\
 H_4 &= 27,5 \text{ кН}.
 \end{aligned}$$

Рис. 6.8

$$\sum X = 0 \rightarrow H_1 + H_2 - P = 32,5 + 27,5 - 60 = 60 - 60 = 0.$$

$$\sum Y = 0 \rightarrow V_{12} + V_{43} - q \cdot 3 = 46,7 + 43,3 - 30 \cdot 3 = 90 - 90 = 0.$$

$$\sum m_1 = 0 \rightarrow V_{43} \cdot 3 - M_4 + P \cdot 1 - q \cdot 3 \cdot 1,5 - M_1 = 43,3 \cdot 3 - 23,3 + 60 \cdot 1 - 30 \cdot 3 \cdot 1,5 - 31,6 = 189,9 - 189,9 = 0.$$

Условие равновесия выполняется, что подтверждает правильность решения.

Библиографический список

Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов : учебник для втузов / В.И. Феодосьев. – М. : МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 592 с.

Ицкович, Г.М. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов: уч. пособие для втузов / Г.М. Ицкович, А.С. Минин, А.И. Винокуров; под общ. ред. А.С. Минина. – М. : Высшая школа, 1999. 592 с.