

ОПД.Р.03 СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА
РАСЧЕТ ОБОЛОЧЕК
Учебное пособие

ВВЕДЕНИЕ

В конструкциях современных машин и аппаратов химических и пищевых производств широко используются оболочки вращения, круглые и прямоугольные пластины, диски, расчет которых имеет ряд специфических особенностей. В настоящем пособии подробно рассмотрены основные теоретические аспекты расчета указанных элементов конструкций, приведены упрощенные методики проведения прочностного расчета. Основой для проведения данных расчетов служат знания, полученные обучающимися при изучении "Теоретической механики" и "Сопротивления материалов". Применение основных расчетных формул иллюстрируется примерами, интересными и с познавательной стороны, и со стороны будущей профессиональной деятельности. После каждой темы есть вопросы и ряд заданий для индивидуальной работы.

1 ЭЛЕМЕНТЫ МЕМБРАННОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

Для расчета оболочек вращения (цилиндров, конусов, элементов, сфер) используют две теории: моментную и безмоментную (мембранную). Моментная теория является более строгой, более полно учитывает напряженное состояние аппарата и дает более точные результаты, расчеты по ней обычно трудоемки и громоздки. В большинстве случаев результаты, полученные в мембранной теории, оказываются достаточно точными для инженерного расчета. Поэтому простые уравнения, основанные на мембранной теории, широко применяются для прочностного расчета аппаратов.

1.1 ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ МЕМБРАННОЙ ТЕОРИИ

Согласно мембранной теории стенки сосуда рассматриваются как весьма тонкие оболочки (мембраны), не воспринимающие изгибающих усилий и сил среза. Сосуды, рассчитываемые по мембранной теории, должны удовлетворять нескольким обязательным условиям:

1 Толщина стенок должна быть весьма малой по сравнению со всеми другими размерами сосуда. Например, для цилиндрических оболочек тонкостенность оценивается отношением толщины стенки δ к внутреннему радиусу цилиндра R :

$$\delta / R \leq 0,1 \dots 0,2.$$

Вследствие малой толщины стенки можно считать, что нормальные напряжения растяжения (сжатия) в ней не изменяются по толщине, причем величина их в R/δ раз больше нормальных напряжений от изгиба, а это и определяет безмоментное состояние.

2 По форме сосуд обязательно должен представлять собой тело вращения.

3 Нагрузка (давление на стенки) должна быть симметрична относительно оси вращения.

Рассмотрим равновесие элемента оболочки вращения, выделенного с помощью двух меридиональных плоскостей и двух плоскостей, перпендикулярных меридиану (рис. 1).

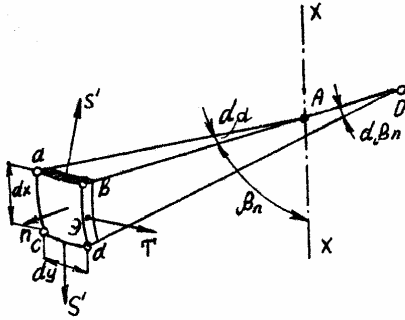
На выделенный элемент действует давление p (внешняя нагрузка) и внутренние силы упругости: S - меридиональная сила, действующая на единицу длины параллельного круга и на всю толщину стенки; T - кольцевая сила, действующая на единицу длины меридиана и на всю толщину стенки. Радиус кривизны меридиана в какой-либо точке поверхности называется первым главным радиусом кривизны R_1 , а радиус кривизны линии, полученной от пересечения поверхности плоскостью, перпендикулярной меридиану, - вторым главным радиусом кривизны R_2 .

Запишем уравнение равновесия элемента в проекциях на нормаль n к срединной поверхности оболочки

$$Sdyd\varphi + Tdxda - p dxdy = 0, \quad (1)$$

так как $d\alpha = \frac{dy}{R_2}$, а $d\varphi = \frac{dx}{R_1}$, то после подстановки значений этих углов уравнение равновесия элемента примет вид

$$Sdy \frac{dx}{R_1} + Tdx \frac{dy}{R_2} = p dxdy. \quad (2)$$



После преобразования имеем уравнение

$$\frac{S}{R_1} + \frac{T}{R_2} = p, \quad (3)$$

которое называется уравнением равновесия элемента или уравнением Лапласа. Выразив S и T через напряжения, получим

$$\frac{\sigma_s}{R_1} + \frac{\sigma_t}{R_2} = \frac{p}{\delta} \quad (4)$$

где σ_s - меридиональное напряжение, σ_t - кольцевое напряжение.

Формулы (3) и (4) можно получить из формул моментной теории (25), допустив $M = K = 0$.

Неизвестными, подлежащими определению из уравнения (3), являются меридиональная и кольцевая силы. Очевидно, для нахождения этих двух неизвестных одного уравнения равновесия элемента недостаточно.

Рассмотрим условие равновесия зоны оболочки (рис. 2). Кольцевым сечением выделим зону на произвольном уровне. На зону оболочки действуют следующие силы: p - интенсивность давления среды на данном уровне mn , G - вес содержимого в зоне, S - сила упругости - меридиональная сила.

На рис. 2 радиус кривизны кольцевого сечения $AB = AC = R_2$. Величина $A'B = A'C = r$. Значение r выражается зависимостью $r = R_2 \sin \beta$.

Для равновесия выделенной зоны необходимо, чтобы алгебраическая сумма проекций всех сил на ось симметрии оболочки была равна нулю. Тогда уравнение равновесия зоны можно записать в виде

$$S2\pi r \sin \beta - p\pi r^2 - G = 0.$$

Отсюда находим значение меридиональной силы S :

$$S = \frac{G + p\pi r^2}{2\pi r \sin \beta}. \quad (5)$$

Подставляя значение этой силы в уравнение равновесия элементов (3), получим величину кольцевой силы T .

Итак, для определения напряжений в любом сечении тонкостенной оболочки по безмоментной теории надо решить два уравнения: уравнение равновесия зоны и уравнение равновесия элемента.

Деформации элемента оболочки определяются по формулам:

$$\Delta = -\frac{R_2 \sin \varphi}{\delta E} (T - \mu S); \quad (6)$$

$$\vartheta = \left(\varepsilon_1 - \frac{R_2}{R_1} \varepsilon_2 \right) \operatorname{ctg} \varphi - \frac{1}{R_1} \frac{dR_2 \varepsilon_2}{d\varphi}; \quad (7)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\delta E} (S - \mu T); \quad (8)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{\delta E} (T - \mu S), \quad (9)$$

где Δ - радиальное перемещение; ϑ - поворот меридиана; ε_1 - меридиональное удельное удлинение срединной поверхности оболочки; ε_2 - кольцевое удельное удлинение элемента средней поверхности оболочки; E - модуль упругости материала; μ - коэффициент Пуассона для материала конструкции.

1.2 ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕМБРАННОЙ ТЕОРИИ

1.2.1 Цилиндрическая оболочка

В случае цилиндрической оболочки имеем

$$R_1 = \infty; R_2 = r = \text{const}; \quad \varphi = \pi/2; \sin \varphi = 1.$$

Цилиндр, нагруженный газовым давлением (рис. 3). Уравнение Лапласа и уравнение равновесия зоны примут вид

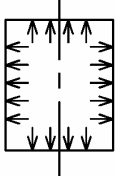


Рис. 3

$$\frac{T}{r} = p; \quad T = pr; \quad S = pr/2.$$

Значения напряжений и деформаций:

$$\sigma_s = \frac{pr}{2\delta}; \quad \sigma_t = \frac{pr}{\delta}; \quad \Delta = -\frac{2-\mu}{2\delta E} pr^2; \quad \vartheta = 0. \quad (10)$$

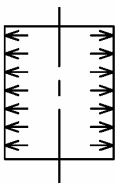


Рис. 4

Если цилиндр не имеет дна и его края не нагружены, получим (рис. 4):

$$S = 0; \quad T = pr; \quad \Delta = -\frac{pr^2}{\delta E}; \quad \vartheta = 0. \quad (11)$$

*ЦИЛИНДР, ИМЕЮЩИЙ ПРОИЗВОЛЬНОЕ ДНИЩЕ, НАПОЛНЕННЫЙ ЖИДКОСТЬЮ
С УДЕЛЬНЫМ ВЕСОМ γ .*

**НАЛИЧИЕ ДНИЩА (ЛЮБЫХ РАЗМЕРОВ И ФОРМЫ) НА СИЛЫ И
ДЕФОРМАЦИИ В ЦИЛИНДРЕ НЕ ВЛИЯЕТ.**

Давление жидкости в точке, расположенной на расстоянии x от дна, равно $p_{ж} = \gamma (H - x)$, где H – высота цилиндра.

Цилиндр оперт по нижнему краю (рис. 5). В этом случае на свободный (верхний) край цилиндра никакие нагрузки не действуют:

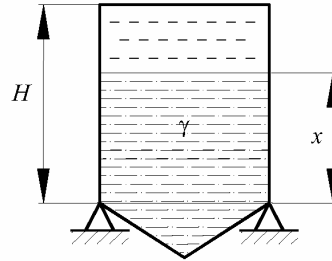


Рис. 5

$$S = 0; T = \gamma r(H - x);$$

$$\Delta = -\frac{\gamma r^2}{\delta E}(H - x);$$

$$\vartheta = \frac{\gamma r^2}{\delta E} = \text{const}, \quad (12)$$

Цилиндр принимает вид усеченного конуса, образующая которого наклонена под углом к оси сосуда.

Цилиндр закреплен в произвольном нормальном сечении (рис.6).

В сечениях цилиндра между дном и сечением подвеса ($0 \leq x \leq h$) получим:

$$S = \frac{\gamma}{2} \left(rH + \frac{V}{\pi r} \right);$$

$$T = \gamma r(H - x);$$

$$\Delta = -\frac{\gamma r^2}{\delta E} \left[(H - x) - \frac{\mu}{2} \left(H - \frac{V}{\pi r^2} \right) \right]; \quad \vartheta = \frac{\gamma r^2}{\delta E}, \quad (13)$$

где V - объем дна.

На нижнем крае цилиндра ($x = 0$) будет

$$\Delta_0 = -\frac{\gamma r^2}{2\delta E} \left[(2 - \mu)H + \mu \frac{V}{\pi r^2} \right]; \quad \vartheta_0 = \frac{\gamma r^2}{\delta E}. \quad (14)$$

Остальная часть цилиндра, лежащая выше закрепленного сечения, рассчитывается как цилиндр с высотой $h_1 = H - h$ опертый по нижнему краю.

Цилиндр, находящийся под действием центробежной силы от собственной массы (рис. 7).

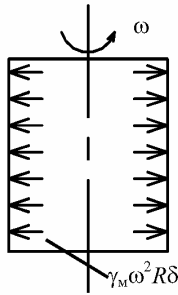


Рис. 7

Цилиндр вращается вокруг своей оси с

угловой скоростью ω .

На него действуют центробежные силы инерции

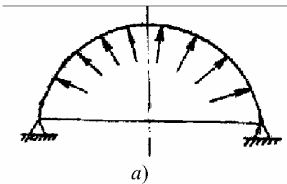
$$f_{\text{ин}} = \gamma_m \omega^2 R \delta,$$

где γ_m - удельный вес материала сосуда.

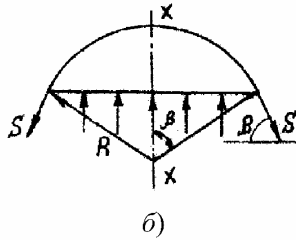
Тогда силы и деформации будут равны:

$$S = 0; \quad T = \frac{\gamma_m \delta}{g} \omega^2 R^2; \quad \Delta = -\frac{\gamma_m \omega^2 R^3}{gE}; \quad \vartheta = 0. \quad (15)$$

1.2.2 Сферические оболочки



а)



б)

Рис. 8

В случае сферы имеем $R_1 = R_2 = R = \text{const}$. Для сферического сегмента, нагруженного внутри газовым давлением (рис. 8, а), закрепленного по нижнему краю, определим меридиональную и кольцевую силы.

Уравнение равновесия зоны для произвольного сечения в проекции на ось xx (рис. 8, б)

$$S2\pi r \sin \beta - p\pi r^2 = 0; \quad r = R \sin \beta;$$

$$S = \frac{pR}{2}. \quad (16)$$

Из уравнения Лапласа $T = \frac{pR}{2}$.

Для сферического сегмента, наполненного жидкостью удельным весом γ и закрепленного по нижнему краю, уравнение равновесия зоны в проекции на

ось xx (рис. 9) примет вид:

$$S2\pi r \sin \beta - p\pi r^2 + G = 0,$$

где G - вес жидкости в сферическом сегменте; p_p - давление жидкости в данном сечении.

$$G = \gamma V_{\text{сегм}};$$

$$p_p = p + \gamma R(1 - \cos \beta),$$

где p - газовое давление; $V_{\text{сегм}}$ - объем сегмента.

Отсюда меридиональная сила равна

$$S = \frac{[p + \gamma R(1 - \cos \beta)]\pi R^2 \sin^2 \beta -}{2\pi R \sin^2 \beta} \quad (17)$$

Кольцевая сила из уравнения Лапласа равна $T = pR - S$.

1.2.3 Конические оболочки

Для конических оболочек имеем (рис. 10) $R_1 = \infty$, $R_2 = x \operatorname{tg} \alpha$.

В случае, если конус нагружен жидкостью с удельным весом $\gamma_{\text{ж}}$ под давлением p и закреплен по верхнему краю, меридиональные и кольцевые силы в произвольном сечении с координатой x определяются из следующих формул:

- уравнения Лапласа

$$\frac{T}{x \operatorname{tg} \alpha} = [p + (H - x \cos \alpha)] \gamma$$

где H - высота конуса.

- уравнения равновесия зоны -

$$\frac{1}{3} [\pi x \cos \alpha (x \sin \alpha)^2] \gamma + S 2 \pi x \sin \alpha \cos \alpha - [p + (H - x \cos \alpha)] \gamma = 0;$$

$$T = [p + (H - x \cos \alpha)] \gamma x \operatorname{tg} \alpha;$$

$$S = \frac{[p + (H - x \cos \alpha)] \gamma - \frac{1}{3} [\pi x \cos \alpha (x \sin \alpha)^2] \gamma}{2 \pi x \sin \alpha \cos \alpha}. \quad (18)$$

1.3 ОЦЕНКА ПРОЧНОСТИ ТОНКОСТЕННЫХ СОСУДОВ

Согласно безмоментной теории расчета на прочность, в каждом элементе тонкостенного сосуда действуют два напряжения: σ_t и σ_s . Данная методика не учитывает наличие радиального напряжения по толщине стенки σ_r , которое мало по сравнению с σ_t и σ_s .

Применяя для расчета стальных тонкостенных сосудов третью теорию прочности, запишем:

$$\sigma_{\max} - \sigma_{\min} = \sigma_{\text{экв}}, \quad \sigma_{\text{экв}} \leq [\sigma],$$

так как

$$\sigma_t > \sigma_s \quad \text{и} \quad \sigma_r = 0, \quad \text{то} \quad \sigma_{\max} = \sigma_t; \quad \sigma_{\min} = 0.$$

Условие прочности примет вид

$$\sigma_t = \sigma_{\text{экв}}; \quad \sigma_t \leq [\sigma], \quad (19)$$

где $[\sigma]$ - допускаемое напряжение на растяжение для материала сосуда.

Если принять значение $\sigma_t = [\sigma]$, то для случая тонкостенного цилиндра, работающего под внутренним давлением газа, получим формулу для определения расчетной толщины стенки

$$\delta = \frac{pR}{[\sigma]}. \quad (20)$$

Учитывая наличие сварных швов и коррозии материала, формулу для δ представим в виде

$$\delta = \frac{pR}{\varphi^*[\sigma]} + c,$$

где φ^* - коэффициент прочности сварного шва; c - прибавка на коррозию.

Заменяя средний радиус цилиндра R через внутренний диаметр D , получим:

$$R = \frac{D + \delta}{2}; \quad \delta = \frac{pD}{2\varphi^*[\sigma] - p} + c. \quad (21)$$

Аналогично можно вывести формулы для определения толщины стенки для сосуда вращения любой формы.

1.4 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- 1 Составить уравнение равновесия элемента.
- 2 Составить уравнение равновесия зоны.
- 3 Вывести формулы для определения толщины стенок конической и сферической оболочек.
- 4 Найти, в каком случае меридиональное напряжение больше кольцевого.
- 5 Найти напряжения в цилиндрической оболочке, на которую давит вращающаяся жидкость.
- 6 Объяснить, почему при проектировании раскроя листов для обечаяк рекомендуется обеспечивать минимальное количество продольных швов.

1.5 ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА АППАРАТОВ ПО МЕМБРАННОЙ ТЕОРИИ

Пример 1. Тонкостенный аппарат (рис. 11) рассчитать по мембранной теории.

Исходные данные:

$D = 2,4$ м; $D_1 = 2$ м; $h_1 = 4$ м; $h_2 = 2,5$ м; $h_{оп} = 2,5$ м; $h = 7$ м; $\alpha = 45^\circ$; $\alpha_1 = 30^\circ$; $\varphi_0 = 60^\circ$; $\gamma = 10\,000$ Н/м³; $d = 0,2$ м; $p = 0,3$ МПа; Сталь 20 к; $t = 20$ °С.

Решение

- 1 Определяем нормативное допускаемое напряжение $\sigma^* = 147$ МПа.
Допускаемое напряжение материала $[\sigma] = \eta\sigma^*$; $[\sigma] = 1 \cdot 147$; $[\sigma] = 147$ МПа.
- 2 Расчетное давление для каждого участка:

$$p_{p1} = 0,3 \text{ МПа};$$

$$p_{p2} = p + \gamma(h - h_2 - h_3 - h_5) = 0,3274 \text{ МПа};$$

$$p_{p3} = p + \gamma(h - h_2 - h_5) = 0,3294 \text{ МПа};$$

$$p_{p4} = p + \gamma(h - h_5) = 0,3294 \text{ МПа};$$

$$p_{p5} = p + \gamma h = 0,37 \text{ МПа},$$

где h_3, h_5 - высота соответствует 3 и 5 участкам.

- 3 Толщина стенки для каждого участка.
Для сферической крышки

$$\delta_{cl} = \frac{p_{p1} D_c}{4\varphi^* [\sigma] p_{p1}},$$

где D_c – диаметр сферы; $\varphi^* = 0,9$ - коэффициент прочности сварного шва. (Толщина стенки рассчитывается без учета испытаний).

$$D_c = \frac{D}{\sin \varphi_0}; \quad \delta_{cl} = 0,002 \text{ м};$$

$$\delta_{и2} = \frac{p_{p2} D}{2\varphi^* [\sigma] - p_{p2}}; \quad \delta_{и2} = 0,003 \text{ м};$$

$$\delta_{к3} = \frac{p_{p3} D}{(2\varphi^* [\sigma] - p_{p3}) \cos \alpha} \quad \delta_{к3} = 0,005 \text{ м}.$$

Аналогично находится толщина стенок для второго цилиндрического и конического участков: $\delta_{и4} = 0,003 \text{ м}$, $\delta_{и5} = 0,004 \text{ м}$.

4 Найдем меридиональные и кольцевые силы и напряжения в сферическом сегменте.

Уравнение равновесия зоны

$$p\pi(R \sin \beta)^2 - S2\pi R \sin \beta \sin \beta = 0.$$

Отсюда $S = \frac{pR}{2}$.

Из уравнения Лапласа $T = \frac{pR}{2}$.

Меридиональные и кольцевые напряжения равны:

$$\sigma_s = \frac{S}{\delta_{cl}}; \quad \sigma_T = \frac{T}{\delta_{cl}}.$$

Напряжения в сфере, нагруженной внутренним постоянным давлением, постоянны и равны между собой.

5 Чтобы найти напряжения в цилиндре, разобьем его на два участка: 1) нагруженным только внутренним газовым давлением; 2) нагруженным газовым и гидростатическим давлением.

Для первого участка $S = \frac{pR}{2}$; $T = pR$, где R - радиус цилиндра.

Для второго участка (рис. 12) уравнение равновесия зоны запишется:

$$S\pi D - p_p \frac{\pi D^2}{4} + G = 0;$$

$$p_p = p + \gamma x; \quad G = \pi \frac{D^2}{4} x \gamma.$$

После подстановки и преобразования получим $S = \frac{pR}{2}$.

Из уравнения Лапласа

$$T = p_p R; \quad T = (p + \gamma x)R.$$

Меридиональная сила не зависит от уровня жидкости в цилиндре, кольцевая - линейно возрастает с увеличением слоя жидкости.

6 Для конического участка (рис. 13) уравнение Лапласа примет вид:

$$\frac{T}{R_2} = p; \quad p_p = p + \gamma(h - h_2 - h_3 - h_5 + x); \quad R_2 = \frac{r}{\sin \alpha}; \quad r = \frac{D}{2} - x \operatorname{tg} \alpha;$$

$$T = (p + \gamma(h - h_2 - h_3 - h_5 + x)) \frac{D/2 - x \operatorname{tg} \alpha}{\sin \alpha}.$$

Из уравнения равновесия зоны

$$S2\pi r \cos \alpha + G - p_p \pi r^2 = 0;$$

$$G = \frac{\pi D^2}{4} \gamma (h - h_2 - h_3 - h_5) + 1/3 \pi \times$$

$$\times \left(\frac{D^3}{8} \operatorname{ctg} \alpha - r^3 \operatorname{ctg} \alpha \right); \quad S = \frac{P_p \pi r^2 - G}{2\pi r \cos \alpha}.$$

7 Для цилиндра диаметра D_1 рассмотрим два участка: 1) выше опоры (рис. 14), 2) ниже опоры.

Очевидно, что запись уравнения равновесия элемента для обоих участков будет тождественна, т.е. наличие реакции опоры никак не влияет на величину кольцевой силы

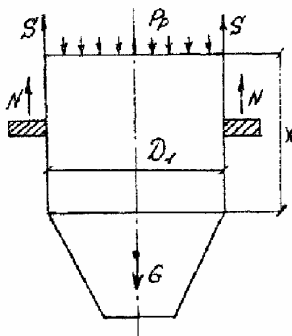


Рис. 14

$$\frac{T}{D_1/2} = p_p;$$

$$p_p = p + \gamma(h - h_5 - x);$$

$$T = p_p \frac{D_1}{2}.$$

Уравнение равновесия зоны записывается для участка выше опоры:

$$(h_2 > x > h_{\text{оп}} - h_5);$$

$$S2\pi \frac{D_1}{2} + N2\pi \frac{D_1}{2} - p_p \pi \frac{D_1^2}{4} - G = 0,$$

где G - вес жидкости в отрезанной части; N - реакция опоры, распределенная по длине окружности

$$N2\pi \frac{D_1}{2} = G_{\text{оп}},$$

где $G_{\text{оп}}$ - вес всего аппарата.

$$p_p = \gamma(h - h_5 - x),$$

$$S = \frac{G + p_p \pi \frac{D_1^2}{2} - N2\pi \frac{D_1^2}{2}}{\pi D_1}.$$

Для участка ниже опоры меридиональная сила равна

$$S = \frac{G + p_p \pi \frac{D_1^2}{2}}{\pi D_1},$$

т.е. в месте крепления опоры произойдет скачок меридиональной силы.

Аналогично находятся нагрузки и для второго конического участка.

Напряжения в стенках аппарата находятся по формулам

$$\sigma_s = \frac{S}{\delta}, \quad \sigma_t = \frac{T}{\delta}.$$

На рис. 15 и 16 показаны эпюры напряжений по высоте аппарата.

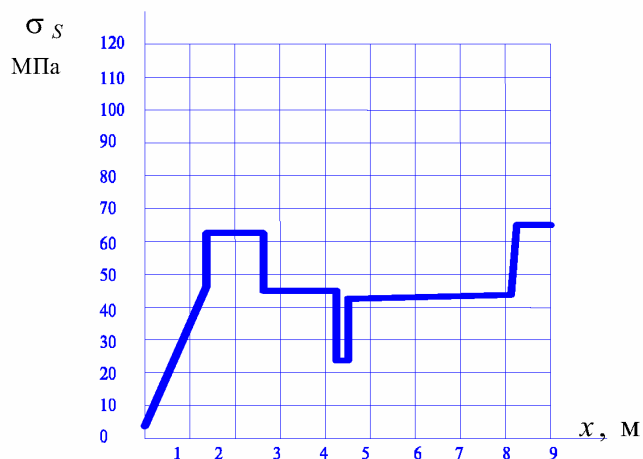


Рис. 15

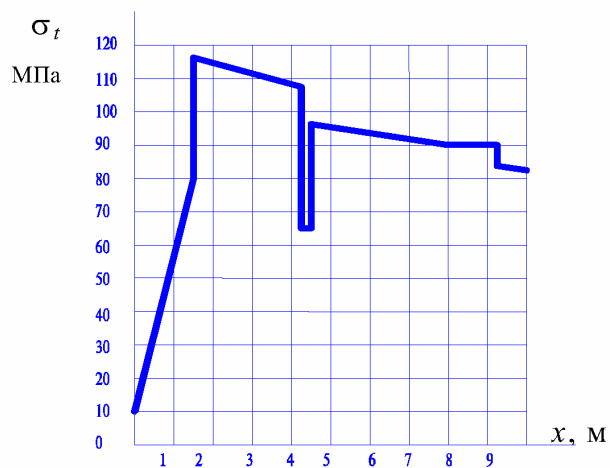


Рис. 16

Пример 2. Рассчитать толщину эллиптической крышки аппарата, нагруженной внутренним давлением p (рис. 17).

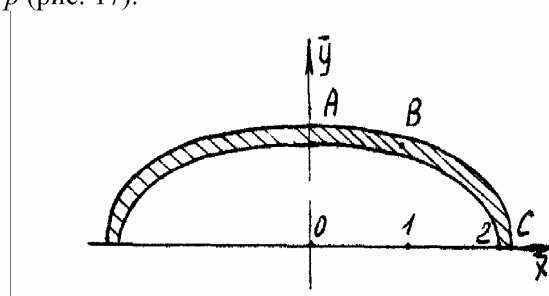


Рис. 17

Уравнение образующей эллиптической крышки AC : $y^2 + x^2/4 = 1$.

Радиус кривизны меридиана в произвольной точке $B(x_0, y_0)$ определяется по формуле

$$R_1 = \frac{(1 + (y'(x_0))^2)^{3/2}}{y''(x_0)}.$$

Для рассматриваемого случая

$$y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}; \quad y' = \frac{-x}{4\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}}; \quad y'' = \frac{1}{4\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^{3/2}}.$$

После подстановки получим $R_1 = \frac{(16 - 3x_0^2)^{3/2}}{16}$.

Для определения главного радиуса R_2 составим уравнение нормали к кривой в точке $B(x_0, y_0)$:

$$\bar{y} - y_0 = \frac{1}{-y'(x_0)}(\bar{x} - x_0);$$

$$y'(x_0) = \frac{-x_0}{4\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{4}}}; \quad \bar{y} = y_0 + \frac{4\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{4}}}{x_0}(\bar{x} - x_0).$$

Координаты точки $O_1(x_1, y_1)$ центра радиуса R_2 находим из условия $x_1 = 0$:

$$y_1 = y_0 - 4\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{4}};$$

$$R = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2};$$

$$R_2 = (16 - 3x_0^2)^{1/2}.$$

Составим уравнение равновесия зоны аппарата, отсеченной в точке B (рис. 18):

$$\sum F_{ky} = 0;$$

$$p\pi x_0^2 - S2\pi x_0 \sin \alpha = 0;$$

$$S = \frac{px_0}{2 \sin \alpha},$$

где α - угол наклона касательной к образующей в точке B .

$$\operatorname{tg} \alpha = y'(x_0) = -\frac{x_0}{4\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{4}}}; \quad \sin \alpha = \frac{x_0}{(16 - 3x_0^2)^{1/2}}; \quad S = \frac{p}{2}(16 - 3x_0^2)^{1/2}.$$

Уравнение Лапласа записывается в виде $\frac{S}{R_1} + \frac{T}{R_2} = p$. Отсюда величина кольцевой силы равна

$$T = pR_2 - S \frac{R_2}{R_1};$$

$$T = p(16 - 3x_0^2)^{1/2} - \frac{p}{2}(16 - 3x_0^2)^{1/2} \frac{(16 - 3x_0^2)^{1/2} \cdot 16}{(16 - 3x_0^2)^{3/2}} = p \frac{8 - 3x_0^2}{(16 - 3x_0^2)^{1/2}}.$$

Для определения толщины стенки воспользуемся третьей теорией прочности $\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$.
Здесь $\sigma_3 = 0$, σ_1 - наибольшее значение напряжения: меридионального или кольцевого.
Меридиональное напряжение будет максимальным в точке A ($x_0 = 0$). Здесь меридиональная сила будет иметь наибольшее значение $S_{\max} = 2p$.

Наибольшее кольцевое напряжение будет в точках A и C $T_A = 2p$; $T_C = -2p$.

Получим, что $\sigma_1 = 2p/\delta$, где δ - толщина стенки аппарата.

$$\frac{2p}{\delta} = [\sigma] \quad \delta = \frac{2p}{[\sigma]}.$$

Пример 3. Построить эпюры меридиональной и кольцевой сил для сосуда, нагруженного внутренним давлением (рис. 19).

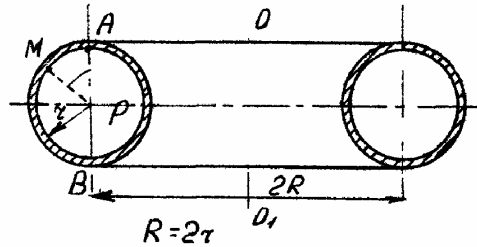


Рис. 19

Меридиональный радиус в любой точке сосуда равен r .

Кольцевой радиус в точке M , определяем углом φ ($0 \leq \varphi \leq 360^\circ$), равен

$$R_2' = \frac{R}{\sin \varphi} + r \quad \text{для } (0 \leq \varphi \leq 180^\circ) \text{ и}$$

$$R_2'' = \frac{R}{\sin(\varphi - 180)} - r \quad \text{для } 180^\circ < \varphi < 360^\circ$$

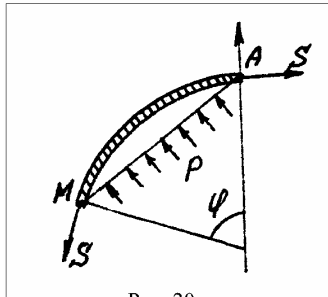


Рис. 20

Рассечем сосуд конической поверхностью, образованной путем вращения прямой MA (где A - наивысшая точка сосуда, M - произвольная точка) вокруг оси OO_1 . Составим уравнение равновесия отсеченной зоны в проекции на вертикальную ось (рис. 20):

$$-S_2 2\pi(R + r \sin \varphi) \sin \varphi + p\pi((R + r \sin \varphi)^2 - R^2) = 0.$$

Отсюда значение меридиональной силы

$$S = \frac{p}{2} \frac{2Rr \sin \varphi + r^2 \sin^2 \varphi}{(R + r \sin \varphi) \sin \varphi} = \frac{pr}{2} + \frac{pRr}{2(R + r \sin \varphi)}.$$

Для определения кольцевой силы запишем уравнения Лапласа для элемента в точке M для случая $0 \leq \varphi \leq 180^\circ$:

$$\frac{S}{r} + \frac{T'}{R_2'} = p \quad \text{и для } 180 < \varphi < 360^\circ$$

$$\frac{S}{r} + \frac{T''}{R_2''} = -p.$$

Соответственно сила T для каждого участка равна

$$T' = pR_2' - S \frac{R_2'}{r}; \quad T'' = -pR_2'' - S \frac{R_2''}{r}.$$

$$\text{Для случая } R = 2r \quad S = \frac{pr}{2} \frac{4 + \sin \varphi}{2 + \sin \varphi}; \quad T' = \frac{pr}{2}; \quad T'' = \frac{pr}{2} \left(\frac{8}{\sin \varphi} + 3 \right).$$

Эпюры кольцевой и меридиональной сил показаны на рис. 21, 22. Так как кольцевые напряжения в точках *A* и *B* очень велики, то сосуд данной формы существовать не может и в данных точках происходит искривление поверхности.

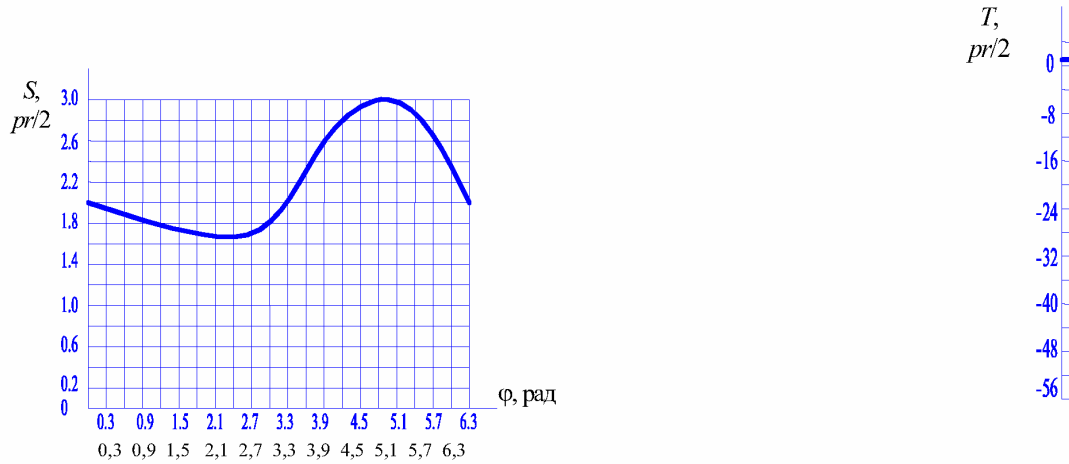


Рис. 22

1.6 ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Расчет тонкостенных аппаратов

- 1 Рассчитать толщины стенок аппарата по мембранной теории.
- 2 Составить для каждого участка уравнения равновесия элемента и зоны, определить меридиональные и кольцевые силы и напряжения. Построить эпюры.
- 3 Проанализировать эпюры напряжений, сделать вывод об опасных сечениях и продумать возможность уменьшения веса конструкции.

1 Исходные данные для расчета цилиндрического аппарата со сферической крышкой и коническим днищем (рис. 23)

№	<i>D</i> , м	<i>d</i> , м	α , град	φ , град	<i>H</i> , м	<i>h</i> ₁ , м	<i>h</i> ₂ , м	γ , кН/м ³	<i>P</i> , МПа	Марк а материал
1	1,2	0,1	30	60	4	1	2	10	0,5	20Х
2	1,4	0,1	35	65	4	0,8	2	9	0,6	20Х
3	1,6	0,1	40	70	5	0,7	4	9,6	0,7	20Х
4	1,8	0,1	35	75	6	0,6	4	8,6	0,8	ВСт 3
5	2,0	0,1	30	80	7	0,7	5	8,3	0,9	20Х
6	2,2	0,15	25	75	6	0,8	6	8,6	0,3	20Х
7	2,0	0,15	30	70	5	0,6	4	9,3	0,4	БСт3

8	2,2	0,15	35	65	4	0,5	4	9,5	0,5	БСтЗ
9	2,4	0,15	40	60	3	0,6	2	10	0,6	БСтЗ
10	2,0	0,15	35	55	5	0,7	2	10	0,7	БСтЗ

2 Исходные данные для расчета цилиндрического аппарата со сферическими крышками (рис. 24)

№	D , м	d , м	φ_0 , град	φ_1 , град	H , м	h_1 , м	h_2 , м	γ , кН/м ³	p , МПа	Марка материала
11	1,2	0,1	60	50	4	2	0,4	10	0,5	30ГХС Ш
12	1,4	0,1	60	50	4	2	0,4	10	0,5	30ГХС Ш
13	1,6	0,1	60	50	5	3	0,6	8,6	0,5	30ГХС Ш
14	1,8	0,1	70	60	5	4	0,1	7,8	0,7	15 ГС
15	2,0	0,1	70	60	6	3	0,2	10	0,7	15 ГС
16	2,2	0,2	70	60	6	4	0,3	10	0,7	15 ГС
17	2,4	0,2	75	60	7	4	0,3	8,3	0,7	X18H10 Т
18	2,2	0,2	75	65	6	5	0,4	8,4	0,4	X18H10 Т
19	2,0	0,2	75	65	5	2	0,4	8,5	0,4	X18H10 Т
20	1,8	0,2	75	65	4	1	0,4	10	0,4	X18H10 Т

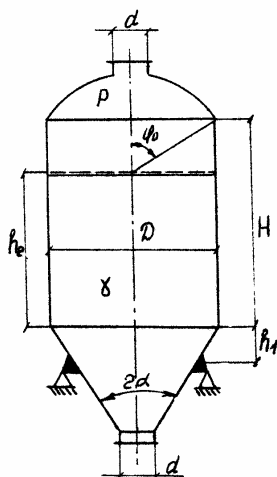


Рис. 23

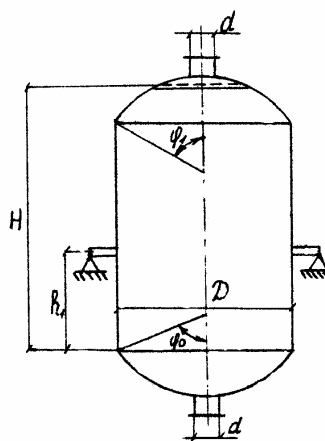


Рис. 24

3 Исходные данные для расчета цилиндрического аппарата с плоской крышкой и коническим днищем (рис. 25)

№	D , м	d , м	α , град	H , м	h_1 , м	h_2 , м	γ , кН/м ³	p , МПа	Марка материала
21	2,0	0,1	30	4,5	3	0,5	10	0,4	12Х2Н4МА
22	2,2	0,1	30	4,5	3	0,5	10	0,4	12Х2Н4МА
23	2,4	0,1	30	4,8	3	0,5	10	0,3	12Х2Н4МА
24	2,6	0,1	30	5	3	0,5	10	0,3	12Х2Н4МА
25	1,0	0,05	30	3,0	2	0,4	8,6	0,3	12Х2Н4МА
26	1,2	0,05	40	3,2	2	0,4	8,6	0,8	Ст4кп
27	1,4	0,05	40	3,6	2	0,4	8,6	0,8	Ст4кп
28	1,6	0,05	40	4	3	0,4	8,6	0,8	Ст4кп
29	1,8	0,05	40	4	3	0,4	9,0	1,0	Ст4кп
30	2,0	0,05	40	4	3	0,4	9,0	1,0	Ст4кп

4 Исходные данные для расчета цилиндрического аппарата со сферической крышкой и плоским дном (рис. 26)

№	D , м	d , м	φ_0	h_2 , м	γ , кН/м ³	p , МПа	Марка материала
31	2,0	6	0,5	60	10	0,5	Ст2сп
32	2,0	5	0,45	65	10	0,5	Ст2сп
33	1,8	5	0,4	65	10	0,5	Ст2сп
34	1,8	4	0,35	70	10	0,5	Ст2сп
35	1,6	4	0,3	70	9,6	0,9	Ст2сп
36	1,6	3	0,25	65	9,6	0,9	40Х2ГСН2ВМ
37	1,4	3	0,25	65	9,6	0,9	40Х2ГСН2ВМ
38	1,4	4	0,3	75	13,6	0,9	40Х2ГСН2ВМ
39	1,2	4	0,2	75	13,6	1,0	40Х2ГСН2ВМ
40	1,2	3	0,25	60	13,6	1,0	40Х2ГСН2ВМ

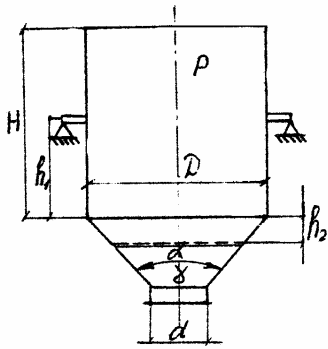


Рис. 25

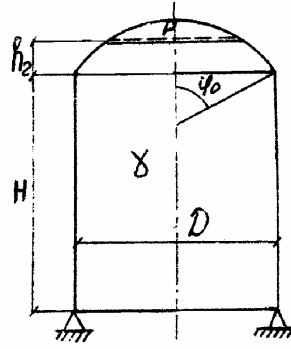


Рис. 26

2 ЭЛЕМЕНТЫ МОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

2.1 ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ МОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ

Рассмотрим основные формулы моментной теории и частные случаи ее практического применения.

Для определения напряженного состояния в оболочке вращения рассмотрим равновесие ее элемента, выделенного с помощью двух меридиональных плоскостей и двух плоскостей, перпендикулярных меридиану.

На выделенный элемент (рис. 27) действуют на единицу длины параллельного круга и на всю толщину стенки; T - кольцевая сила, действующая на единицу длины меридиана и на всю толщину стенки; K - кольцевой изгибающий момент, стремящийся повернуть элемент вокруг меридиана; M - меридиональный изгибающий момент, действующий на единицу длины параллельного круга и на всю толщину стенки, стремящийся повернуть элемент вокруг касательной к параллельному кругу; N - поперечная сила (среза), действующая на единицу длины параллельного круга и на всю толщину стенки, сила N может действовать лишь на нижней и верхней гранях элемента и будет направлена вдоль радиусов кривизны. Так как выделенный элемент должен находиться в равновесии, сумма проекций на координатные оси сил и моментов, действующих на него, равна нулю.

Запишем уравнения проекций на оси x и z (см. рис. 28, 29).

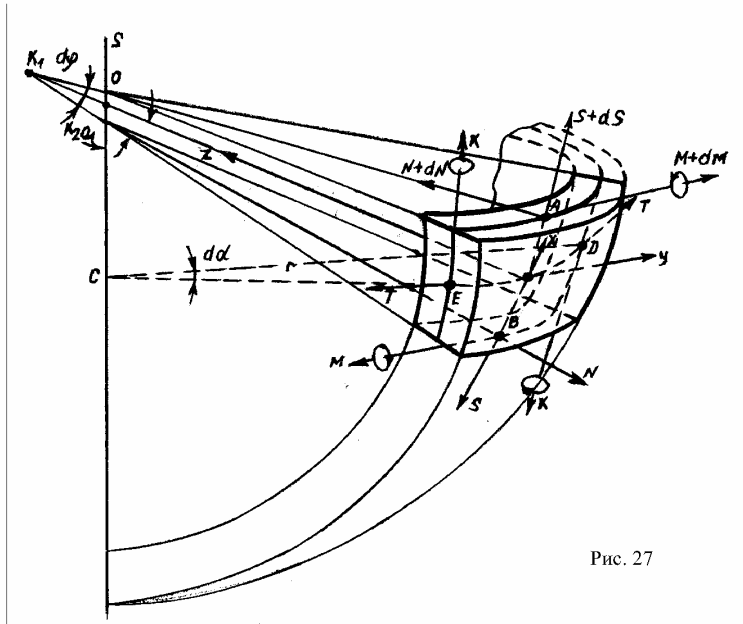


Рис. 27

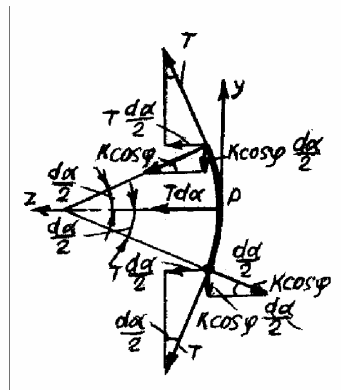


Рис. 28

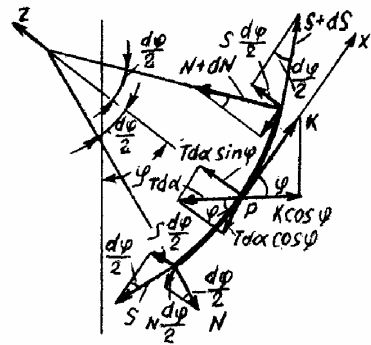


Рис. 29

Для равновесия вдоль оси x должно быть

$$\begin{aligned} (SR_2 \sin \varphi)' d\varphi d\alpha - TR_1 \cos \varphi d\varphi d\alpha - \\ - NR_2 \sin \varphi d\varphi d\alpha + XR_1 R_2 \sin \varphi d\varphi d\alpha = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

где $XR_1 R_2 \sin \varphi d\varphi d\alpha$ - проекция на ось x приложенных к элементу внешних сил. Для равновесия вдоль оси z должно выполняться

$$\begin{aligned} (NR_2 \sin \varphi)' d\varphi d\alpha + TR_1 \sin \varphi d\varphi d\alpha + SR_2 \sin \varphi d\varphi d\alpha + \\ + ZR_1 R_2 \sin \varphi d\varphi d\alpha = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

где $ZR_1 R_2 \sin \varphi d\varphi d\alpha$ - проекция на ось z внешних сил, приложенных к элементу.

Уравнение равновесия моментов вокруг оси y будет записываться

$$(MR_2 \sin \varphi)' d\varphi d\alpha - KR_1 \cos \varphi d\varphi d\alpha - NR_1 R_2 \sin \varphi d\varphi d\alpha = 0. \quad (24)$$

Сокращая уравнения (1) - (3) на $d\varphi d\alpha$ получим систему уравнений

$$\begin{cases} (SR_2 \sin \varphi)' - TR_1 \cos \varphi - NR_2 \sin \varphi + XR_1 R_2 \sin \varphi = 0; \\ (NR_2 \sin \varphi)' + TR_1 \sin \varphi + SR_2 \sin \varphi + ZR_1 R_2 \sin \varphi = 0; \\ (MR_2 \sin \varphi)' - KR_1 \cos \varphi - NR_1 R_2 \sin \varphi = 0. \end{cases} \quad (25)$$

Напряжения, вызываемые силами S , T , M , K и N определяются по следующим формулам:

$$\sigma_S = \frac{S}{\delta}; \quad \sigma_T = \frac{T}{\delta}; \quad \sigma_M = \pm \frac{6M}{\delta^2}; \quad \sigma_K = \pm \frac{6K}{\delta^2}. \quad (26)$$

Полные меридиональные и кольцевые напряжения будут

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{S}{\delta} \pm \frac{6M}{\delta^2}; \\ \sigma_2 = \frac{T}{\delta} \pm \frac{6K}{\delta^2}. \end{cases} \quad (27)$$

Касательное напряжение равно

$$\tau = \frac{N}{\delta}. \quad (28)$$

Деформации и внутренние силы связаны следующими соотношениями:

$$\begin{cases} S = \frac{E\delta}{1-\mu^2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\mu); \\ T = \frac{E\delta}{1-\mu^2}(\varepsilon_2 + \varepsilon_1\mu); \\ M = -D \left[\frac{\vartheta'}{R_1} + \mu \frac{\vartheta \operatorname{ctg} \varphi}{R_2} - \frac{1}{\delta E} \left(\frac{S - \mu T}{R_1} \right) + \mu \frac{T - \mu S}{R_2} \right]; \\ K = -D \left[\mu \frac{\vartheta'}{R_1} + \frac{\vartheta \operatorname{ctg} \varphi}{R_2} - \frac{1}{\delta E} \left(\frac{T - \mu S}{R_2} \right) + \mu \frac{S - \mu T}{R_1} \right], \end{cases} \quad (29)$$

где ε_1 - меридиональное удельное удлинение элемента срединной поверхности оболочки; ε_2 - кольцевое удельное удлинение элемента; ϑ - поворот меридиана; D - цилиндрическая жесткость:

$$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}. \quad (30)$$

Как показали исследования, напряжения получаются с погрешностью порядка (δ/R) 100 %, где R - наименьший радиус кривизны срединной поверхности оболочки. Оболочку считают тонкой, если $\delta \leq 0,1R$. Значит погрешность вычисления 10 % и ниже.

Муштари Х. М. показал, что если

$$\frac{\delta}{2R} \leq \sqrt{\varepsilon}, \quad (31)$$

где ε - максимальное относительное удлинение в пределах закона Гука, то можно при сохранении указанной точности отбросить в выражениях для M и K слагаемые в круглых скобках в формуле (29).

Для углеродистой стали с пределом пропорциональности 200 МПа и модулем упругости $2 \cdot 10^5$ МПа

$$\begin{cases} M = -D \left[\frac{\vartheta'}{R_1} + \mu \frac{\vartheta \operatorname{ctg} \varphi}{R_2} \right]; \\ K = -D \left[\mu \frac{\vartheta'}{R_1} + \frac{\vartheta \operatorname{ctg} \varphi}{R_2} \right]. \end{cases}$$

При выполнении этого соотношения можно записать

$$\begin{cases} M = -D \left[\frac{\vartheta'}{R_1} + \mu \frac{\vartheta \operatorname{ctg} \varphi}{R_2} \right]; \\ K = -D \left[\mu \frac{\vartheta'}{R_1} + \frac{\vartheta \operatorname{ctg} \varphi}{R_2} \right]. \end{cases} \quad (32)$$

Преобразуем дифференциальные уравнения моментной теории оболочек. Умножив первое уравнение (25) на \sin , второе - на $\cos \varphi$ и сложив их, получим

$$\begin{aligned} (SR_2 \sin \varphi)' \sin \varphi - NR_2 \sin^2 \varphi + (NR_2 \sin \varphi)' \cos \varphi + SR_2 \sin \varphi \cos \varphi = \\ = -XR_1 R_2 \sin^2 \varphi - ZR_1 R_2 \sin \varphi \cos \varphi. \end{aligned} \quad (33)$$

Проинтегрировав по φ , получим равенство

$$R_2 (S \sin \varphi + N \cos \varphi) \sin \varphi = - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} [x \sin \varphi + z \cos \varphi] R_1 R_2 \sin \varphi d\varphi. \quad (34)$$

Обозначим

$$I(\varphi) = \int_{\gamma_i}^{\varphi} (x \sin \varphi + z \cos \varphi) R_1 R_2 \sin \varphi d\varphi. \quad (35)$$

Тогда

$$S = -N \operatorname{ctg} \varphi - \frac{I(\varphi)}{R_2 \sin^2 \varphi}. \quad (36)$$

Подставляя выражение S во второе уравнение (25) и обозначив $V = NR_2$, получим

$$(V \sin \varphi)' + TR_1 \cos \varphi - V \cos \varphi - \frac{I(\varphi)}{\sin \varphi} + ZR_1 R_2 \sin \varphi = 0.$$

Отсюда находим

$$T = -\frac{V'}{R_1} + \frac{I(\varphi)}{R_1 \sin^2 \varphi} - ZR_2. \quad (37)$$

Деформации ε_1 и ε_2 и поворот ϑ связаны уравнением совместности

$$\vartheta R_1 = (R_1 \varepsilon_{B1} - R_2 \varepsilon_2) \operatorname{ctg} \varphi - (\varepsilon_2 R_2)'. \quad (38)$$

Подставив значения $\varepsilon_1 = \frac{1}{\delta E} (S - \mu T)$, $\varepsilon_2 = \frac{1}{\delta E} (T - \mu S)$ в уравнение совместности и заменив S и T по формулам (36) и (37), получим

$$\frac{R_1}{R_2} V'' + \left[\left(\frac{R_2}{R_1} \right)' + \frac{R_2}{R_1} \operatorname{ctg} \varphi \right] V' - \left[\frac{R_2}{R_1} \operatorname{ctg}^2 \varphi - \mu \right] V = ER_1 \vartheta \delta + \Phi(\varphi), \quad (39)$$

где $\Phi(\varphi)$ - функция, зависящая только от внешних нагрузок.

$$\Phi(\varphi) = \left[\left(\mu + \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{I(\varphi)}{\sin^2 \varphi} - R_2^2 Z \right]' + \left(\frac{R_1}{R_2} + \mu \right) \frac{I[\varphi \cos(\varphi)]}{\sin^3 \varphi} + \left(\frac{R_2}{R_1} + \mu \right) \left[\frac{I(\varphi)}{\sin^2 \varphi} - R_1 R_2 Z \right] \operatorname{ctg} \varphi. \quad (40)$$

Аналогично получается уравнение

$$\frac{R_2}{R_1} \vartheta'' + \left[\left(\frac{R_2}{R_1} \right)' + \frac{R_2}{R_1} \operatorname{ctg} \varphi \right] \vartheta' - \left(\mu + \frac{R_1}{R_2} \operatorname{ctg}^2 \varphi \right) \vartheta = -\frac{R}{D} V. \quad (41)$$

Система совместных дифференциальных уравнений (39), (41) позволяет определить V и ϑ , а затем силы T, S, N, M, K .

Значит задача сводится к решению системы из двух неоднородных дифференциальных уравнений с двумя неизвестными. Общий интеграл неоднородного уравнения состоит из двух слагаемых, первое - решение однородного уравнения член уравнения, вторым слагаемым является частное решение неоднородного уравнения.

Решение системы однородных уравнений, в которую переходят уравнения (39), (41), если положить $\Phi(\varphi) = 0$ и соответствует случаю нулевых поверхностных нагрузок на краю оболочки.

2.2 ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ПРИМЕНЕНИЯ МОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ

2.2.1 Сферическая оболочка, нагруженная постоянным давлением

$$R_1 = R_2 = R = \text{const};$$

$$\Phi(\varphi) = R^2 [(1 + \mu)X - Z']; \quad X = 0; \quad Z = -p; \quad Z' = 0; \quad \Phi(\varphi) = 0.$$

Из системы (39), (41) получим

$$\begin{cases} V'' + V' \operatorname{ctg} \varphi - (\operatorname{ctg}^2 \varphi - \mu) V = \delta E \vartheta R; \\ \vartheta'' + \vartheta' \operatorname{ctg} \varphi - (\operatorname{ctg}^2 \varphi + \mu) \vartheta = -\frac{R}{D} V. \end{cases} \quad (42)$$

Вследствие полной симметрии

$$\vartheta = 0; \quad V = 0; \quad N = 0;$$

$$I(\varphi) = R^2 \int_{\varphi_i}^{\varphi} Z \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = -p R^2 \frac{\sin^2 \varphi - \sin^2 \varphi_i}{2}. \quad (43)$$

Из уравнений (36), (37) находим

$$\begin{cases} S = \frac{pR}{2} \left(1 - \frac{\sin^2 \varphi_i}{\sin^2 \varphi} \right); \\ T = \frac{pR}{2} \left(1 + \frac{\sin^2 \varphi_i}{\sin^2 \varphi} \right). \end{cases} \quad (44)$$

Решая систему (29), получим

$$\begin{cases} M = \frac{p\delta^2}{24} \left(1 - \frac{\sin^2 \varphi_i}{\sin^2 \varphi} \right); \\ K = \frac{p\delta^2}{2} \left(1 + \frac{\sin^2 \varphi_i}{\sin^2 \varphi} \right). \end{cases} \quad (45)$$

2.2.2 Коническая оболочка

В случае конической оболочки имеем $R_1 = \infty$; $\varphi = \pi/2 - \alpha = \text{const}$. Вследствие этого φ не может служить для определения положения точки, и за независимую величину берут расстояние x от точки до вершины, измеряемое вдоль меридиана.

Для конической оболочки, нагруженной постоянным давлением имеем:

$$x = 0; \quad z = -p; \quad I(\varphi) = -p \int_{x_i}^x x dx = -p \frac{x^2 - x_i^2}{2};$$

$$\Phi(x) = -\frac{p(x^2 - x_i^2)}{2x} + 2px, \quad (46)$$

где x_i - координата свободного края.

Находим нагрузки:

$$\begin{cases} N = 0; \\ S = \frac{1}{2} px \left(1 - \frac{x_i^2}{x^2} \right) \operatorname{tg} \alpha; \\ T = px \operatorname{tg} \alpha; \\ M = -D \left[(1 + \mu) B - (1 - \mu) \frac{c}{x^2} \right]; \\ K = -D \left[(1 + \mu) B - (1 - \mu) \frac{c}{x^2} \right]. \end{cases} \quad (47)$$

2.3 КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

Практическое применение моментная теория находит при расчете оболочек, нагруженных системами симметричных сил, равномерно распределенных по всему краю оболочки. Сначала опыт, а затем и теория показали, что влияние таких сил на напряжения и деформацию может быть весьма значительно, а его неучет может привести к большим ошибкам при расчете конструкций.

Необходимо найти формулы для определения напряжений и деформаций, возникающих в оболочках под действием систем симметрических сил, равномерно распределенных по их свободному краю.

Система однородных дифференциальных уравнений для данного случая с учетом того, что внешние силы равны нулю, будет иметь вид (из системы (39), (41)):

$$\begin{cases} \frac{R_2}{R_1} V'' + \left[\left(\frac{R_2}{R_1} \right)' + \frac{R_2}{R_1} \operatorname{ctg} \varphi \right] V' - \left(\frac{R_1}{R_2} \operatorname{ctg}^2 \varphi - \mu \right) V = \delta E R_1 \vartheta; \\ \frac{R_2}{R_1} V'' + \left[\left(\frac{R_2}{R_1} \right)' + \frac{R_2}{R_1} \operatorname{ctg} \varphi \right] \vartheta' - \left(\frac{R_1}{R_2} \operatorname{ctg}^2 \varphi + \mu \right) \vartheta = -\frac{R_1}{D} V. \end{cases} \quad (48)$$

Точные решения этой системы существуют. Но эти решения оказались мало применимы из-за своей сложности. Были разработаны простые приближенные, но практически вполне достаточные методы решения краевой задачи для некоторых важных частных случаев.

2.3.1 Сферическая оболочка

$$R_1 = R_2 = R = \operatorname{const}; \quad R_1/R_2 = 1; \quad (R_1/R_2)' = 0.$$

Подставим эти значения в систему (48):

$$\begin{cases} V'' + V' \operatorname{ctg} \varphi - (\operatorname{ctg}^2 \varphi - \mu) V = \delta E R \vartheta; \\ \vartheta'' + \vartheta' \operatorname{ctg} \varphi - (\operatorname{ctg}^2 \varphi + \mu) \vartheta = -\frac{R}{D} V. \end{cases} \quad (49)$$

Согласно принципу Сен-Венана действие самоуравновешивающейся симметрично распределенной по краю радиальной или моментной нагрузки быстро затухает и оказывает влияние лишь в точках весьма близких к нагруженному краю. Строгие решения подтвердили

эту гипотезу и обнаружили, что вызванные краевыми силами напряжения имеют затухающий волнообразный характер.

Функции, имеющие такой характер, представлены в виде $e^{-kx}f(x)$, где $f(x)$ - периодическая функция. Так как k велико (функция быстро убывает), то первая производная значительно больше самой функции, а вторая производная значительно больше первой. Значит, с достаточной степенью точности в системе можно отбросить члены, содержащие саму функцию и ее первую производную:

$$\begin{cases} V'' = \delta ER \vartheta; \\ \vartheta'' = -\frac{R}{D}V. \end{cases} \quad (50)$$

Необходимо также учитывать влияние угла φ (при малых углах φ значение $\text{ctg}(\varphi)$ велико и отбрасывать слагаемые, содержащие φ уже недопустимо), рис. 30.

Практически должно выполняться условие $\varphi > 30^\circ$. Решая эту систему уравнений, получим:

$$\begin{aligned} V^4 + 4k^4V &= 0; \\ k &= \left(3(1-\mu^2)\right)^{0.25} \left(\frac{R}{\delta}\right)^{0.5}, \end{aligned} \quad (51)$$

где k - коэффициент затухания колебаний по углу сечения сферы.

Общее решение этого уравнения

$$V = Ce^{-k\omega} \cos(k\omega + \psi), \quad (52)$$

где C, ψ - постоянные интегрирования.

Для нагрузок на оболочку получим:

$$\begin{aligned} N_\omega &= \frac{V}{R} = \frac{C}{R} e^{-k\omega} \cos(k\omega + \psi); \\ S_\omega &= -N_\omega \text{ctg}\varphi = -\frac{C}{R} e^{-k\omega} \cdot \cos(k\omega + \psi) \text{ctg}\varphi; \\ T_\omega &= \frac{V'}{R} = -\frac{Ck\sqrt{2}}{R} \sin\left(k\omega + \psi + \frac{\pi}{4}\right); \\ M_\omega &= -D \frac{\vartheta'}{R} = -\frac{DV'''}{\delta ER^2} = \frac{2\sqrt{2}DCk^3}{\delta ER^2} e^{-k\omega} \cos\left(k\omega + \psi + \frac{\pi}{4}\right); \\ K_\omega &= \mu M_\omega - D \frac{\vartheta_\omega \text{ctg}\varphi}{R}. \end{aligned} \quad (53)$$

Для сферического сегмента, нагруженного по свободному краю моментами M_0 : при $\omega = 0$; $\psi = \pi/2$.

Из четвертого уравнения (53) получим:

$$M_0 = -\frac{2CDK^3}{\delta ER^2}; \quad C = -M_0 \frac{\delta ER^2}{2DK^3}. \quad (54)$$

Для сферического сегмента, к свободному краю которого приложены распределенные силы P_0 при $\omega = 0$; $\psi = \pi/4$.

Согласно первому уравнению (53):

$$N_0 = \frac{C}{\sqrt{2}R} = P_0 \sin \varphi_0; \quad C = \sqrt{2}P_0 R \sin \varphi_0. \quad (55)$$

2.4 УЗЛЫ СОПРЯЖЕНИЯ ОБОЛОЧЕК

В реальных конструкциях машин и аппаратов края оболочек прикрепляются к другим оболочкам (часто иных профилей и толщины) или к соответствующим деталям (фланцы, трубные решетки и т.п.). В таких узлах сопряжения возникают дополнительные, так называемые краевые нагрузки, вызывающие местные напряжения изгиба в материале сопрягаемых элементов.

Краевая сила P_0 и краевой момент M_0 являются реакциями заделки края оболочки, которому мешает свободно деформироваться сопрягаемая деталь с иными возможностями для перемещений под действием внешних нагрузок.

Для определения P_0 и M_0 составляются уравнения совместности деформаций (радиальной и угловой).

Решая систему этих уравнений определяем P_0 и M_0 .

Напряжения на краю оболочки

- меридиональное

$$\sigma_{m0} = \sigma^P_{m0} + \sigma^{(p_0 - p_1)}_{m0} + \sigma^{M_0}_{m0};$$

- кольцевое

$$\sigma_{t0} = \sigma^P_{t0} + \sigma^{(p_0 - p_1)}_{t0} + \sigma^{M_0}_{t0};$$

- максимальное

$$\sigma_{\max} = \max\{\sigma_{m0}; \sigma_{t0}\};$$

Для узла соединения оболочек должно выполняться условие

$$\sigma_{\max} \leq \varphi[\sigma]_{\text{кр}}, \quad (56)$$

$[\sigma]_{\text{кр}}$ - допускаемые напряжения в краевой зоне.

Для пластических материалов

$$[\sigma]_{\text{кр}} = 1,3[\sigma].$$

Для хрупких

$$[\sigma]_{\text{кр}} = [\sigma].$$

2.5 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- 1 Определение R_1 и R_2 для оболочки вращения произвольной формы.
- 2 Запишите проекцию всех сил на оси x , z , проекцию моментов на ось y (составить уравнение равновесия элемента).
- 3 Запишите значение ϑ_0 для сферической оболочки.
- 4 Запишите перемещения радиальное и угловое на краю сферической оболочки.
- 5 Чем вызваны различные возможности для деформации у сопрягаемых элементов.

3 РАСЧЕТ КРУГЛЫХ ПЛАСТИНОК

3.1 ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Рассмотрим нагруженное состояние круглой пластинки (рис. 31) постоянной толщины h , симметрично нагруженной давлением $q(r)$ в Н/м², отнесенной к единице длины нагрузки Q_i в Н/м и моментом M_j в Н·м/м. Пластика имеет центральное отверстие радиусом a , радиус пластинки b .

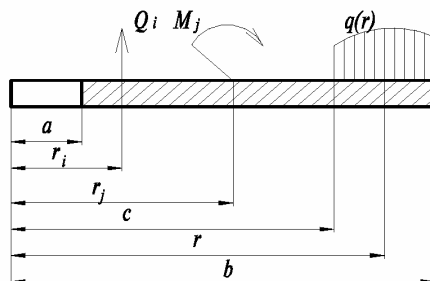


Рис. 31

Рассмотрим равновесие элементарного фрагмента пластинки (рис. 32).

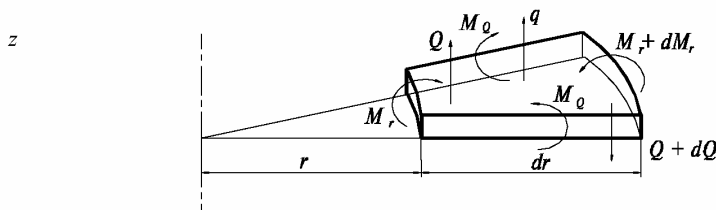


Рис. 32

В сечении пластинки действуют поперечная сила Q и изгибающие моменты M_r и M_θ . Нормальные напряжения σ_r и σ_θ меняются по линейному закону; их максимальные значения у поверхности равно

$$\sigma_r = \pm \frac{6M_r}{h^2}; \quad \sigma_\theta = \pm \frac{6M_\theta}{h^2},$$

где плюс относится к нижней стороне пластинки.

Составим уравнение равновесия элемента в проекции на ось z :

$$Qrd\varphi - (Q + dQ)(r + dr)d\varphi + q \left(\frac{r d\varphi + (r + dr)d\varphi}{2} dr \right) = 0.$$

Принимаем, что площадь действия давления рассчитывается как площадь трапеции. Сократим на $d\omega$ и раскроем скобки:

$$Qr - Qr - Qdr - dQr - dQdr + qdr + qdr^2/2 = 0.$$

Пренебрегая слагаемыми второго порядка малости $dQdr$ и $qdr^2/2$, получим

$$\begin{aligned} -Qdr + dQr + qdr &= 0; \\ Q + \frac{dQ}{dr}r &= qr \quad \text{или} \quad \frac{d}{dr}(Qr) = qr. \end{aligned} \quad (57)$$

Составим уравнение равновесия элемента - сумма моментов относительно оси x (рис. 33) равна 0.

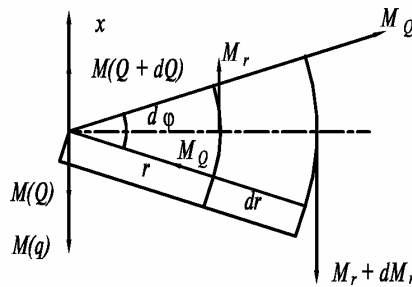


Рис. 33

$$\begin{aligned} M_\theta dr d\phi + M_r r d\phi - (M_r + dM_r)(r + dr)d\phi - \\ - Qrr d\phi + (Q + dQ)(r + dr)^2 d\phi - qdr \left(r + \frac{dr}{2} \right)^2 d\phi = 0. \end{aligned}$$

Сокращая на $d\omega dr$ и пренебрегая слагаемыми второго порядка малости, получим

$$M_\theta - M_r \frac{dr}{dr} - dM_r \frac{r}{dr} + Q2r + \frac{dQ}{dr}r^2 - qr^2 = 0.$$

Из уравнения (57)

$$qr^2 = Qr + \frac{dQ}{dr}r^2.$$

Учитывая, что $M_r \frac{dr}{dr} + \frac{dM_r}{dr}r = \frac{d}{dr}(M_r r)$;

$$M_\theta - \frac{d}{dr}(M_r r) + Q2r + \frac{dQ}{dr}r^2 - Qr - \frac{dQ}{dr}r^2 = 0;$$

$$\frac{d}{dr}(M_r r) - M_\theta = Qr. \quad (58)$$

Из условий равновесия элемента пластинки

$$\frac{d}{dr}(rQ) = qr;$$

$$\frac{d}{dr}(rM_r) - M_\theta = Qr$$

и соотношений упругости

$$\begin{aligned} M_r &= D \left(\frac{d^2 \omega}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{d\omega}{dr} \right); \\ M_\theta &= D \left(\frac{1}{r} \frac{d\omega}{dr} + \mu \frac{d^2 \omega}{dr^2} \right), \end{aligned} \quad (59)$$

получим дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\omega}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{q}{D}, \quad (60)$$

где $D = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\mu^2)}$; μ - коэффициент Пуассона; ω - прогибы пластинки (вверх).

Последовательным интегрированием уравнения (60) в пределах от $r = a$ до r находят:

$$\begin{aligned} P(r) &= P(a) + \sum_{i=1}^m \delta_i P_i + \Phi_1^*; \\ M_r(r) &= \varphi_{21} P(a) + \varphi_{22} M_r(a) + \varphi_{24} \frac{d\omega}{dr}(a) + \\ &+ \sum_{i=1}^m \delta_i \varphi_{21i} P_i + \sum_{j=1}^n \delta_j \varphi_{22j} M_j + \Phi_2^*; \\ M_\theta(r) &= \varphi_{31} P(a) + \varphi_{32} M_r(a) + \varphi_{34} \frac{d\omega}{dr}(a) + \sum_{i=1}^m \delta_i \varphi_{31i} P_i + \\ &+ \sum_{j=1}^n \delta_j \varphi_{32j} M_j + \Phi_3^*; \\ \frac{d\omega}{dr}(r) &= \varphi_{41} P(a) + \varphi_{42} M_r(a) + \varphi_{44} \frac{d\omega}{dr}(a) + \sum_{i=1}^m \delta_i \varphi_{41i} P_i + \\ &+ \sum_{j=1}^n \delta_j \varphi_{42j} M_j + \Phi_4^*; \\ \omega(r) &= \omega(a) + \varphi_{51} P(a) + \varphi_{52} M_r(a) + \varphi_{54} \frac{d\omega}{dr}(a) + \sum_{i=1}^m \delta_i \varphi_{51i} P_i + \\ &+ \sum_{j=1}^n \delta_j \varphi_{52j} M_j + \Phi_5^*, \end{aligned}$$

где $P = 2\pi r Q$.

$$\delta_i = \begin{cases} 0 & \text{при } r < r_i; \\ 1 & \text{при } r \geq r_i; \end{cases}$$

$$\delta_j = \begin{cases} 0 & \text{при } r < r_j; \\ 1 & \text{при } r \geq r_j. \end{cases}$$

Нагрузки P_i и M_j могут быть приложены на любом радиусе в пределах $a < r_i < b$ и $a < r_j < b$. Начальные параметры $P(a)$, $M_r(a)$, $d\omega/dr(a)$ и $\omega(a)$ определяются граничными условиями на краях.

Для края $r = a$:

- свободный край $P = P_a, M_r = M_{ra}$ (рис. 34, а);
- шарнирная опора $M_r = M_{ra}, \omega = 0$ (рис. 34, б);
- скользящая опора $P = P_a, d\omega/dr = 0$ (рис. 34, в);
- заделка $d\omega/dr = 0, \omega = 0$ (рис. 34, г).

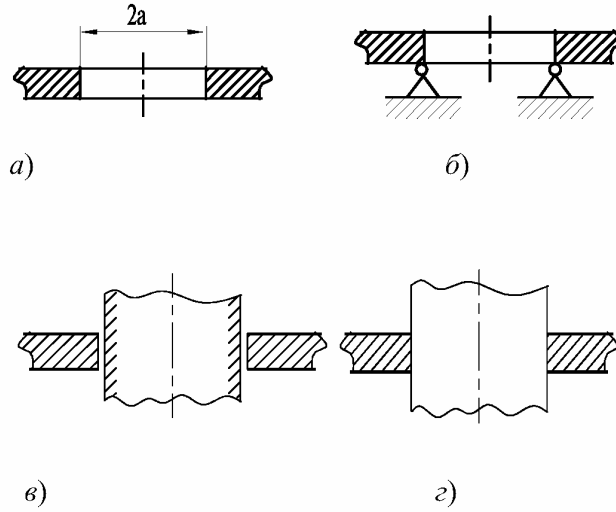


Рис. 34

Функции влияния $\varphi(r)$ определяются следующими выражениями:

а) пластинка с отверстиями, $a \neq 0$:

$$\varphi_{21} = \frac{1}{8\pi} \left\{ 2(1+\mu) \ln \frac{r}{a} + (1-\mu) \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] \right\};$$

$$\varphi_{22} = \frac{1}{2} \left[1 + \mu + (1-\mu) \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right];$$

$$\varphi_{24} = \frac{(1-\mu^2)D}{2a} \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right];$$

$$\varphi_{31} = \frac{1}{8\pi} \left\{ 2(1+\mu) \ln \frac{r}{a} - (1-\mu) \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] \right\};$$

$$\varphi_{32} = \frac{1}{2} \left[1 + \mu - (1-\mu) \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right];$$

$$\varphi_{34} = \frac{(1-\mu^2)D}{2a} \left[1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right];$$

$$\varphi_{41} = \frac{r}{8\pi D} \left[2 \ln \frac{r}{a} - 1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right];$$

$$\varphi_{42} = \frac{r}{2D} \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right];$$

$$\varphi_{44} = \frac{1}{2} \left[(1+\mu) \frac{a}{r} + (1-\mu) \frac{r}{a} \right];$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{51} &= \frac{a^2}{8\pi D} \left\{ \left[1 + \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \ln \frac{r}{a} + 1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right\}; \\
\varphi_{52} &= \frac{a^2}{4D} \left[\left(\frac{r}{a} \right)^2 - 1 - 2 \ln \frac{r}{a} \right]; \\
\varphi_{54} &= \frac{a}{4} \left\{ 2(1+\mu) \ln \frac{r}{a} + (1-\mu) \left[\left(\frac{r}{a} \right)^2 - 1 \right] \right\};
\end{aligned} \tag{61}$$

б) пластинки без отверстия, $a = 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega}{dr}(a) &= 0; \\
\varphi_{21} &= \frac{1}{4\pi} \left[1 + (1+\mu) \ln \frac{r}{l} - \frac{1-\mu}{4} \left(\frac{l}{r} \right)^2 \right]; \\
\varphi_{22} &= 1; \\
\varphi_{31} &= \frac{1}{4\pi} \left[\mu + (1+\mu) \ln \frac{r}{l} + \frac{1-\mu}{4} \left(\frac{l}{r} \right)^2 \right]; \\
\varphi_{32} &= 1; \\
\varphi_{41} &= \frac{r}{4\pi D} \left[\ln \frac{r}{l} + \frac{1}{4} \left(\frac{l}{r} \right)^2 \right]; \\
\varphi_{42} &= \frac{r}{(1+\mu)D}; \\
\varphi_{51} &= \frac{r}{16\pi D} \left\{ \left[2 + \left(\frac{l}{r} \right)^2 \right] \ln \frac{r}{l} - 1 + \frac{5}{4} \left(\frac{l}{r} \right)^2 \right\}; \\
\varphi_{52} &= \frac{r^2}{2(1+\mu)D},
\end{aligned} \tag{62}$$

где l - радиус центральной площадки, на которой действует сила $P(0)$, $l \ll b$.

Функции влияния φ_{21i} , ..., φ_{52j} определяются соответствующими формулами при замене радиуса a на радиусы r_i или r_j .

Функции $\varphi^*(r)$ для произвольной нагрузки $q(r)$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
\varphi_1^* &= 2\pi \int_a^r q(r_1) r_1 dr_1; \\
\varphi_2^* &= \Phi_1 + \Phi_2; \\
\varphi_3^* &= \Phi_1 - \Phi_2; \\
\varphi_4^* &= \frac{r}{D} \left(\frac{\Phi_1}{1+\mu} - \frac{\Phi_2}{1-\mu} \right); \\
\varphi_5^* &= \int_a^r \varphi_4^*(r_1) dr_1,
\end{aligned}$$

где $\Phi_1(r) = \frac{1+\mu}{4\pi} \int_a^r \frac{1}{r_1} \varphi_1^*(r_1) dr_1$;

$$\Phi_2(r) = \frac{1-\mu}{4\pi r^2} \int_a^r r_1 \varphi_1^*(r_1) dr_1. \tag{63}$$

Для равномерной нагрузки q , приложенной к участку пластинки от $r = c$ до $r = b$:

$$\begin{aligned}
\varphi_1^*(r) &= \pi q \delta_c (r^2 - c^2); \\
\Phi_1(r) &= \frac{1+\mu}{8} q \delta_c \left(r^2 - c^2 - 2c^2 \ln \frac{r}{c} \right);
\end{aligned}$$

$$\Phi_2(r) = \frac{1-\mu}{16r^2} q \delta_c (r^2 - c^2)^2;$$

$$\Phi_5^*(r) = \frac{1}{64D} q \delta_c \left[(r^2 - c^2)(r^2 + 5c^2) - 4c^2(2r^2 + c^2) \ln \frac{r}{c} \right],$$

где $\delta_c = \begin{cases} 0 & \text{при } r < c; \\ 1 & \text{при } r \geq c. \end{cases}$ (64)

Данные формулы позволяют рассчитывать круглые пластинки при любых условиях закрепления и нагрузки.

3.2 ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ПЛАСТИНОК

Пример 1. Рассчитать пластинку, заделанную по внутреннему контуру и нагруженную изгибающим моментом M_{rb} по внешнему контуру (рис. 35).

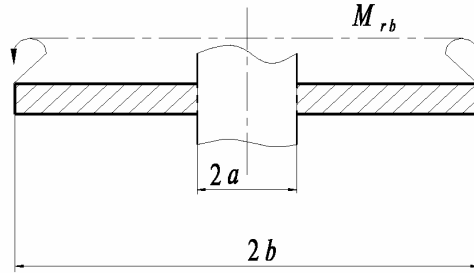


Рис. 35

Из уравнения статики сосредоточенная сила при $r = a$, $P = 0$.

Так как пластинка заделана по внутреннему контуру, то перемещение и угол поворота в точке $r = a$ также равны 0:

$$\frac{d\omega}{dr} = 0; \quad \omega = 0.$$

Распределенной нагрузки нет, поэтому $\Phi^* = 0$. В интервале $a < r < b$ никаких внешних нагрузок не действует $M_j = 0$, $P_i = 0$.

Из начальных условий:

$$M_r(b) = \Phi_{22} M_r(a) = M_{rb};$$

$$M_r(r) = \frac{\Phi_{22}(r)}{\Phi_{22}(b)} M_{rb} = \frac{1 + \mu + (1 - \mu) \left(\frac{a}{r}\right)^2}{1 + \mu + (1 - \mu) \left(\frac{a}{b}\right)^2} M_{rb};$$

$$M_\theta(r) = \frac{\Phi_{32}(r)}{\Phi_{22}(b)} M_{rb} = \frac{1 + \mu - (1 - \mu) \left(\frac{a}{r}\right)^2}{1 + \mu + (1 - \mu) \left(\frac{a}{b}\right)^2} M_{rb};$$

$$\omega(r) = \frac{\varphi_{52}(r)}{\varphi_{22}(b)} M_{rb} = - \frac{1 + 2 \ln \frac{r}{a} - \left(\frac{r}{a}\right)^2}{1 + \mu + (1 - \mu) \left(\frac{a}{b}\right)^2} \frac{a^2 M_{rb}}{2D}.$$

Эпюры M_r и ω для случая $\mu = 0,3$ и $a = 0,1b$ представлены на рис. 36.

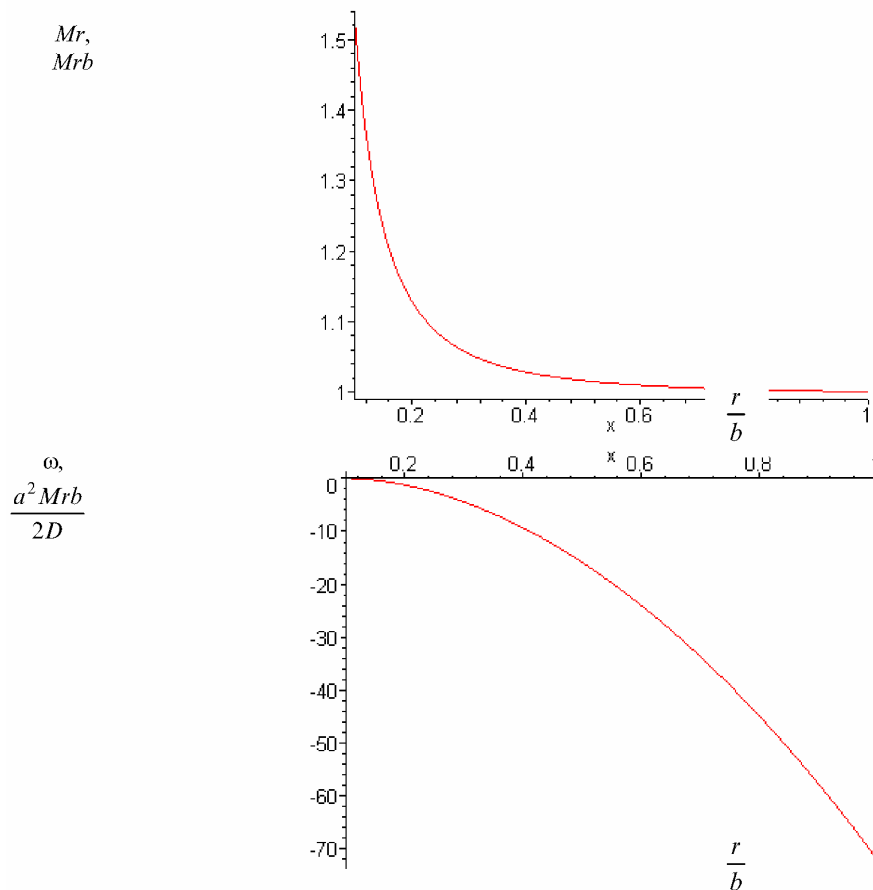


Рис. 36

Пример 2. Рассчитать пластинку без отверстия, опертую по наружному контуру и нагруженную распределенной нагрузкой, меняющейся по линейному закону $q(r) = q_0 \cdot (1 - r/b)$ (рис. 37).

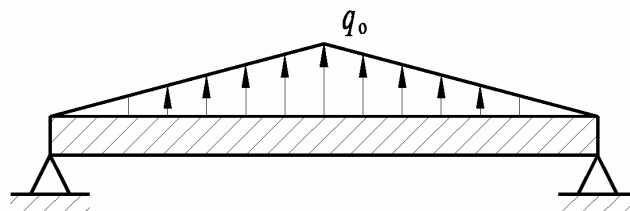


Рис. 37

По формулам (63) находим:

$$\begin{aligned}\varphi_1^*(r) &= 2\pi \int_0^r q_0 \left(1 - \frac{r_1}{b}\right) r_1 dr_1 = 2\pi q_0 \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3b}\right) = \\ &= \pi q_0 r^2 \left(1 - \frac{2r}{3b}\right);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_1(r) &= \frac{1+\mu}{4\pi} \int_0^r \frac{1}{r_1} \pi q_0 \left(1 - \frac{2r_1}{3b}\right) dr_1 = \\ &= \frac{1+\mu}{4\pi} \pi q_0 \left(\frac{r^2}{2} - \frac{2}{3b} \frac{r^3}{3}\right) = \frac{1+\mu}{4} q_0 r^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{9b} r\right);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_2(r) &= \frac{1-\mu}{4\pi r^2} \int r_1 \pi q_0 r_1^2 \left(1 - \frac{2r_1}{3b}\right) dr_1 = \\ &= \frac{1-\mu}{4\pi r^2} \pi q_0 \left(\frac{r^4}{4} - \frac{2}{3b} \frac{r^5}{5}\right) = \frac{1-\mu}{4} q_0 r^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{2r}{15b}\right);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2^* &= \frac{q_0 r^2}{16} \left(2 + 2\mu - \frac{8r}{9b} (1+\mu) + 1 - \mu - \frac{8r}{15b} (1+\mu)\right) = \\ &= \frac{q_0 r^2}{16} \left(3 + \mu - \frac{64r}{45b} - \frac{16r}{45b} \mu\right);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_3^* &= \frac{(1+\mu)}{16} q_0 r^2 \left(2 - \frac{8r}{9b}\right) - \frac{(1-\mu)}{16} q_0 r^2 \left(1 - \frac{8r}{15b}\right) = \\ &= \frac{q_0 r^2}{16} \left(2 + 2\mu - \frac{8r}{9b} - \mu \frac{8r}{9b} - 1 + \mu + \frac{8r}{15b} - \mu \frac{8r}{15b}\right) = \\ &= \frac{q_0 r^2}{16} \left(1 + 3\mu - \frac{16r}{45b} - \mu \frac{64r}{45b}\right);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_4^* &= \frac{r}{D} \left(\frac{q_0 r^2}{8} \left(1 - \frac{4r}{9b}\right) - \frac{q_0 r^2}{16} \left(1 - \frac{8r}{15b}\right)\right) = \\ &= \frac{q_0 r^2}{16D} \left(2 - \frac{8r}{9b} - 1 + \frac{8r}{15b}\right) = \frac{q_0 r^2}{16D} \left(1 - \frac{16r}{45b}\right);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_5^*(r) &= \int_0^r \frac{q_0 r_1^3}{16D} \left(1 - \frac{16r_1}{45b}\right) dr_1 = \frac{q_0}{16D} \left(\frac{r^4}{4} - \frac{16r^5}{45b}\right) = \\ &= \frac{q_0 r^4}{64D} \left(1 - \frac{64r}{225b}\right).\end{aligned}$$

Учитывая начальные условия $P(0) = \frac{d\omega}{dr}(0) = P_i = M_j = 0$ и находя $M_r(0)$ из условия

$M_r(b) = \varphi_{22} M_r(0) + \varphi_2^* = 0$, получим

$$M_r(r) = \varphi_2^*(r) - \varphi_2^*(b) = -q_0 b^2 \left[\frac{3+\mu}{16} \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right) - \frac{4+\mu}{45} \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right) \right];$$

$$M_{\Theta}(r) = \varphi_3^*(r) - \varphi_2^*(b) = -q_0 b^2 \left[\frac{3+\mu}{16} \left(1 - \frac{1+3\mu}{3+\mu} \frac{r^2}{b^2} \right) - \frac{4+\mu}{45} \left(1 - \frac{1+4\mu}{4+\mu} \frac{r^3}{b^3} \right) \right];$$

$$\begin{aligned} \omega(r) &= \frac{(b^2 - r^2)\varphi_2^*(b)}{2(1+\mu)D} + \varphi_5^*(r) - \varphi_5^*(b) = \\ &= \frac{q_0 b^4}{D} \left[\frac{71+29\mu}{1440(1+\mu)} \left(1 - \frac{r^2}{b^2} \right) - \frac{1}{64} \left(1 - \frac{r^4}{b^4} \right) + \frac{1}{225} \left(1 - \frac{r^5}{b^5} \right) \right]. \end{aligned}$$

Пример 3. Рассчитать пластину без отверстия, заделанную по наружному контуру и нагруженную в центре сосредоточенной силой P (рис. 38).

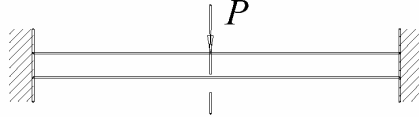


Рис. 38

По начальным условиям $P(0) = P$, $\frac{d\omega}{dr}(0) = P_i = M_j = \varphi^* = 0$ и, найдя $M_r(0)$ из условия $\frac{d\omega}{dr}(b) = 0 = \varphi_{41}(b)P + \varphi_{42}(b)M_r(0)$, получим с учетом $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$M_r(r) = \left[\varphi_{21}(r) - \varphi_{22}(r) \frac{\varphi_{41}(b)}{\varphi_{42}(b)} \right] P = \frac{P}{4\pi} \left[1 + (1+\mu) \ln \frac{r}{b} \right];$$

$$M_{\Theta}(r) = \left[\varphi_{31}(r) - \varphi_{32}(r) \frac{\varphi_{41}(b)}{\varphi_{42}(b)} \right] P = \frac{P}{4\pi} \left[\mu + (1+\mu) \ln \frac{r}{b} \right];$$

$$\begin{aligned} \omega(r) &= \left\{ \varphi_{51}(r) - \varphi_{51}(b) - \left[\varphi_{51}(r) - \varphi_{52}(b) \frac{\varphi_{41}(b)}{\varphi_{42}(b)} \right] \right\} P = \\ &= \frac{P}{16\pi D} \left(b^2 - r^2 + 2r^2 \ln \frac{r}{b} \right). \end{aligned}$$

В точке приложения сосредоточенной силы P расчетные моменты и напряжения стремятся к бесконечности. Поэтому сосредоточенную силу надо прикладывать к пластинке через жесткий центр, относительный радиус которого $\alpha_0 = a_0/b$ определяют из условия $\sigma_{\max} \leq$

$[\sigma]$, вследствие чего $\psi(\alpha_0) \leq \frac{[\sigma]h^3}{6P}$, где для пластинки с шарнирной опорой по нагруженному контуру $\psi(\alpha_0) = -\frac{2(1+\mu)\ln \alpha_0 - (1-\mu)(1-\alpha_0^2)}{4\pi[1+\mu+(1-\mu)\alpha_0^2]}$.

При $\alpha_0^2 \ll 1$ и $\mu = 0,3$ получаем соответственно:

$$\alpha_0 \geq \exp\left(-1,05 \frac{[\sigma]h^2}{P} + 0,27\right);$$

$$\alpha_0 \geq \exp\left(-1,05 \frac{[\sigma]h^2}{P} - 0,50\right).$$

3.3 РАСЧЕТЫ С ПОМОЩЬЮ ТАБЛИЦ

Для удобства расчетов в табл. 5 приведены значения функций $\varphi(r)$, $\varphi^*(r)$ при $\mu = 0,3$ в зависимости от параметра x , соответственно равного отношениям a/r или c/r . Если в качестве x принять отношения r_i/r или r_j/r , получим значения функций $\varphi_i(r)$ или $\varphi_j(r)$.

Пример 4. Для пластинки без отверстия, заделанной по наружному контуру и нагруженной на радиусе $r/b = 0,2$ распределенной нагрузкой Q , найти прогиб на радиусе $r/b = 0,5$ (рис. 39).

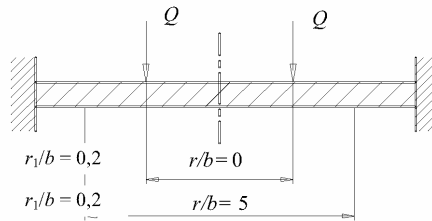


Рис. 39

$$P(0) = \frac{d\omega}{dr}(0) = M_j = \varphi^* = 0;$$

$$i = 1; P_1 = 2\pi Q; r_1/b = 0,2.$$

Из условия

$$\frac{d\omega}{dr}(b) = \varphi_{42}(b)M_r(0) + \varphi_{41,i}(b)P_1 = 0,$$

где согласно табл. 1 при $x = a/b = 0$ $\varphi_{42}(b) = 0,76923 \frac{b}{D}$ и при $x_1 = r_1/b = 0,2$ $\varphi_{41,i}(b) = 0,08988 \frac{b}{D}$,

находим $M_r(0) = -0,1168P_1$.

Из условия

$$\omega(b) = \omega(0) + \varphi_{52}(b)M_r(0) + \varphi_{51,i}(b)P_1 = 0,$$

где $\varphi_{52}(b) = 0,38462 b^2/D$ и $\varphi_{51,i}(b) = 0,02840 b^2/D$, находим

$$\omega(0) = 0,01652 P_1 b^2/D,$$

и, полагая для $r/b = 0,5$ величину $x_1 = r_1/r = 0,4$, определяем

$$\begin{aligned} \omega(0,5b) &= \omega(0) + \varphi_{52}(0,5b)M_r(0) + \varphi_{51,i}(0,5b)P_1 = \\ &= \left(0,01652 - 0,38462 \cdot 0,5^2 \cdot 0,1168 + 0,02840 \cdot 0,5^2\right) \frac{P_1 b^2}{D} = 0,00751 \frac{P_1 b^2}{D}. \end{aligned}$$

3.4 ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Если температура меняется по толщине и вдоль радиуса пластинки $T = f(z, r)$, где z - расстояние от срединной плоскости ($0,5h \leq z \leq 0,5h$), то в основных соотношениях появляются дополнительные члены $\varphi_{11}(r)$:

- пластина с отверстием, $a \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\varphi_{T_1} &= 0; \quad \varphi_{T_2}(r) = \frac{1-\mu}{r^2} \int_a^r r_1 M_r(r_1) dr_1; \\
\varphi_{T_3}(r) &= (1-\mu)M_T(r) - \varphi_{T_2}(r); \\
\varphi_{T_4}(r) &= -\frac{1}{Dr} \int_a^r r_1 M_T(r_1) dr_1; \\
\varphi_{T_5}(r) &= \int_a^r \varphi_{T_4}(r_1) dr_1.
\end{aligned} \tag{65}$$

- пластина без отверстия, $a = 0$:

$$\begin{aligned}
\varphi_{T_1} &= 0; \quad \varphi_{T_2}(r) = (1-\mu) \left[\frac{1}{r^2} \int_0^r r_1 M_T(r_1) dr_1 - \frac{1}{2} M_T(0) \right]; \\
\varphi_{T_3}(r) &= (1-\mu) [M_T(r) - M_T(0)] - \varphi_{T_2}(r); \\
\varphi_{T_4}(r) &= -\frac{r}{D} \left[\frac{1}{r^2} \int_0^r r_1 M_T(r_1) dr + \frac{1-\mu}{2(1+\mu)} M_T(0) \right]; \\
\varphi_{T_5}(r) &= \int_0^r \varphi_{T_4}(r_1) dr_1.
\end{aligned} \tag{66}$$

Здесь

$$M_T(r) = \frac{E\alpha}{1-\mu} \int_{-0,5h}^{+0,5h} T(z, r) z dz.$$

При $r \rightarrow 0$ $\frac{1}{r^2} \int_0^r r_1 M_r(r_1) dr_1 \rightarrow 0,5M_T$, поэтому $\varphi_T(0) = 0$.

Для температурного поля, симметричного относительно срединной плоскости пластинки, $M_T = 0$.

При линейном законе $T(z, r) = T_{cp}(r) + \Delta T(r) \frac{z}{h}$, где ΔT - разность температур поверхностей,

$$M_T(r) = \frac{Eh^2 \alpha \Delta T(r)}{12(1-\mu)}. \tag{67}$$

Пример 5. Найти температурные напряжения и деформации в пластинке без отверстия для постоянной по радиусу разности температур $\Delta T = \text{const}$ при свободном и заделанном наружном контуре.

Если $M_T = \text{const}$, то $\varphi_{T_2} = \varphi_{T_3} = 0$,

$$\varphi_{T_4}(r) = -\frac{rM_T}{D(1+\mu)}, \quad \varphi_{T_5}(r) = -\frac{r^2 M_T}{2D(1+\mu)}.$$

Для свободного контура $M_r(b) = M_r(0) = 0$, т.е. $M_r(b) = M_\theta(r) = 0$ и напряжений в пластинке нет, а ее кривизна $\frac{d^2 \omega}{dr^2} = -\frac{M_T}{2(1+\mu)}$ постоянна.

При заделанном наружном контуре

$\frac{d\omega}{dr}(b) = \frac{b}{D(1+\mu)} M_r(0) - \frac{bM_T}{D(1+\mu)} = 0$, откуда $M_r(r) = M_\Theta(r) = M_T$, но $\omega(r) = 0$ (пластинка остается плоской).

Максимальные температурные напряжения в пластинке будут $\sigma_{r,\max} = \sigma_{\Theta,\max} = \frac{E\alpha\Delta T}{2(1-\mu)}$. Это выражение справедливо для пластинки заземленной по любому контуру.

3.5 ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ПЛАСТИНКИ

В прямоугольных пластинках (рис. 40) в сечениях, параллельных внешним сторонам пластинки, возникают изгибающие моменты M_x , M_y , крутящие моменты $M_{xy} = -M_{yx}$ и поперечные силы Q_x и Q_y . Из условий равновесия элемента пластинки и соотношений упругости

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{q}{D}. \quad (68)$$

Решение этого уравнения обычно ищут в форме двойных бесконечных рядов.

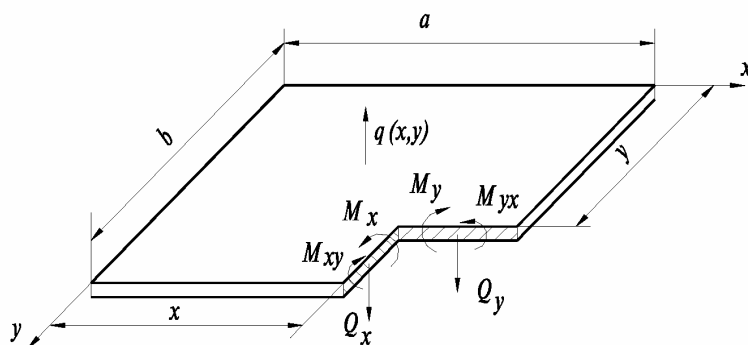


Рис. 40

Пример 6. Свободно опертая пластинка с размерами сторон a и b нагружена давлением, распределенным по закону $q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$. Граничные условия $\omega = 0$, $M_x = 0$ при $y = b$. Решение уравнения имеет вид

$$\omega = \frac{q_0}{\pi^4 D \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Максимальные изгибающие моменты и максимальный прогиб в центре пластинки

$$M_{x,\max} = \frac{1 + \mu \left(\frac{a}{b} \right)^2}{\pi^2 \left(1 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right)^2} q_0 a^2;$$

$$M_{y,\max} = \frac{\mu + \left(\frac{a}{b} \right)^2}{\pi^2 \left(1 + \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right)^2} q_0 a^2;$$

$$\omega_{\max} = \frac{12(1-\mu^2)}{\pi^4 \left(1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2\right)^2} \frac{q_0 a^4}{Eh^3}.$$

В общем случае формулы для максимальных напряжений и максимального прогиба прямоугольной пластинки можно записать в виде

$$\sigma_{\max} = \frac{K_{\sigma} q a^2}{h^2}; \quad \omega_{\max} = K_{\omega} \frac{q a^4}{Eh^3},$$

причем коэффициенты K_{σ} и K_{ω} зависят от отношения

сторон пластинки b/a и от коэффициента μ .

При действии сосредоточенной силы

$$\sigma_{\max} = \frac{K'_{\sigma} P}{h^2}; \quad \omega_{\max} = K'_{\omega} \frac{P a^2}{Eh^3}.$$

Расчет прямоугольных пластин также возможно вести с помощью табл. 2.

4 ВРАЩАЮЩИЕСЯ НЕРАВНОМЕРНО НАГРЕТЫЕ ДИСКИ

4.1 ОСНОВНЫЕ РАСЧЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ

Рассмотрим диск переменной толщины $h = h(r)$ с центральным отверстием, симметричный относительно срединной плоскости. Материал диска изотропный, упругий. Диск нагрет до температуры $T = T(r)$, переменной по радиусу и постоянной по толщине, и вращается с угловой скоростью ω . Закон изменения температуры $T(r)$ и зависимость модуля упругости E , коэффициента Пуассона μ и коэффициента линейного расширения α материала диска от температуры предполагаем известными. Располагая этими данными, можно получить законы изменения величин E , μ и α по радиусу диска: $E = E(r)$, $\mu = \mu(r)$, $\alpha = \alpha(r)$.

Расчетная схема диска представлена на рис. 41.

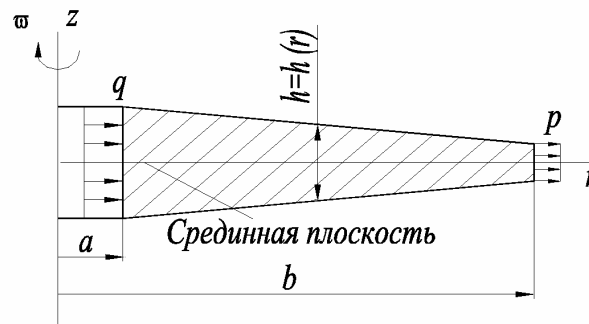


Рис. 41

При вращении диска возникают массовые силы инерции, распределенные по его объему и направленные по радиусу от центра. Интенсивность этих сил p_0 является функцией радиуса и равна произведению плотности материала диска ρ на величину центростремительного ускорения $\omega^2 r$, т.е. $p_0 = \rho \omega^2 r$.

Воздействие на диск присоединенных к нему по наружной поверхности $r = b$ лопаток и узлов их крепления может быть представлено инерционной радиальной нагрузкой. Ввиду того, что обычно число лопаток велико, будем считать эту нагрузку равномерно распределенной по наружной поверхности. Обозначим интенсивность этой нагрузки через p .

В результате посадки диска на вал с натягом (напомним, что под натягом понимают разность диаметров вала и отверстия) на поверхностях контакта возникают силы давления. Предположим, что эти силы равномерно распределены по контактными поверхностям;

интенсивность их обозначим через q и назовем контактным давлением. Величина контактного давления зависит от величины натяга δ и угловой скорости вращения диска ω .

В основу расчета диска положено два допущения. Согласно первому принимаем равномерное распределение напряжений по толщине диска. Согласно второму - предполагаем, что напряжения в плоскостях, параллельных срединной плоскости, отсутствуют, что позволяет считать напряженное состояние всех точек диска двухосным.

Эти допущения были обоснованы путем сопоставления приближенного решения с точным, полученным для некоторых частных случаев, и справедливы при условии, что отношение внешнего диаметра диска к его наибольшей толщине больше четырех.

Учитывая первое допущение, заключаем, что в рассматриваемой постановке напряжения, деформации и перемещения в диске являются функциями только радиуса.

4.2 УРАВНЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ ЭЛЕМЕНТА ДИСКА

Выделим из диска элемент в форме криволинейного шестигранника (рис. 42). В радиальных сечениях по условиям симметрии касательные напряжения отсутствуют и возникают лишь нормальные напряжения, которые называются кольцевыми или окружными и обозначаются σ_t . Таким образом, площадки, лежащие в радиальных сечениях, являются главными. Учитывая, что напряженное состояние диска является плоским (см. второе допущение), заключаем, что площадки, лежащие в окружных сечениях, также являются главными. Нормальные напряжения в этих сечениях называются радиальными и обозначаются σ_r .

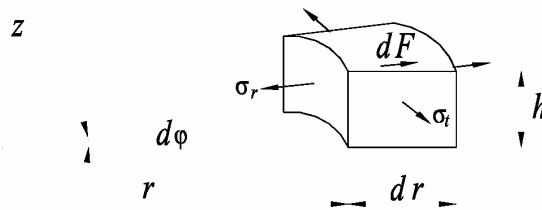


Рис. 42

Помимо радиальных и кольцевых внутренних сил к рассматриваемому элементу приложена еще и объемная сила $dF = p_0 dV$, где $dV = h r d\phi dr$ - объем элемента.

Внутренние силы, возникающие в сечениях диска приводим к его срединной плоскости. В окружном сечении получаем радиальное усилие интенсивности

$$N_r = \sigma_r h$$

на единицу длины окружного сечения срединной плоскости (рис. 43).

В радиальном сечении получаем кольцевое усилие интенсивности

$$N_t = \sigma_t h$$

на единицу длины радиального сечения срединной плоскости.

Проектируя силы, действующие на элемент диска, на радиальное направление, получим следующее уравнение равновесия:

$$N_r r d\varphi + d(N_r r d\varphi) - N_r r d\varphi - 2N_t dr \sin \frac{d\varphi}{2} + \rho \dot{u}^2 r h r d\varphi dr = 0, \quad (69)$$

откуда, учитывая, что $2\sin \frac{d\varphi}{2} \approx d\varphi$ и обозначая $k = \rho\omega^2$, устанавливаем, что

$$\frac{d}{dr}(N_r r) - N_t + kr^2 h = 0. \quad (70)$$

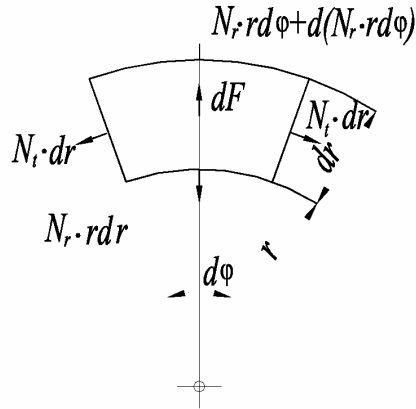


Рис. 43

Остальные уравнения равновесия для элемента выполняются тождественно. Параметр k называют динамическим коэффициентом.

В уравнение равновесия (69) входят две неизвестных величины N_r и N_t , поэтому задача определения внутренних усилий в диске является статически неопределимой. Для решения ее необходимо рассмотреть деформации.

4.3 ДЕФОРМАЦИИ ЭЛЕМЕНТА ДИСКА

Рассмотрим элемент диска до и после деформации (рис. 44). Перемещения точек диска по условиям симметрии будут происходить в радиальных направлениях. Радиальное перемещение точек на радиусе r обозначим через u .

Тогда радиальное перемещение точек на радиусе $r + dr$ будет $u + du$. За положительное направление для u примем направление от оси диска. Обозначим через ε_r и ε_t относительные деформации в диске в радиальном и кольцевом направлениях и выразим их через перемещение u .

Очевидно, что радиальная деформация

$$\varepsilon_r = \frac{A_1 C_1 - AC}{AC} = \frac{(dr + u + du - u) - dr}{dr} = \frac{du}{dr}, \quad (71)$$

а кольцевая деформация

$$\varepsilon_t = \frac{A_1 B_1 - AB}{AB} = \frac{(r+u)d\varphi - rd\varphi}{rd\varphi} = \frac{u}{r}. \quad (72)$$

4.4 СВЯЗЬ МЕЖДУ ДЕФОРМАЦИЯМИ И ВНУТРЕННИМИ УСИЛИЯМИ В ДИСКЕ

Три независимых уравнения (70) - (72) содержат пять неизвестных величин: N_r , N_t , u , ε_r , ε_t . Недостающие два уравнения получаем, рассматривая обобщенный закон Гука для материала диска. Поскольку напряженное состояние является двухосным, деформации и напряжения связаны следующими зависимостями:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \mu\sigma_t) + \theta, \quad (73)$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}(\sigma_t - \mu\sigma_r) + \theta, \quad (74)$$

где $\theta = \theta(r)$ - температурная деформация, обусловленная нагревом диска на $\Delta T = T - T_n$; T_n - начальная температура равномерно нагретого диска (обычно принимают $T_n = 20$ °C). Температурная деформация определяется по формуле

$$\theta = \alpha\Delta T = \alpha(T - T_n). \quad (75)$$

Переходя в уравнениях (73) и (74) от напряжений σ_r и σ_t к усилиям N_r и N_t , получаем

$$\varepsilon_r = \frac{1}{Eh}(N_r - \mu N_t) + \theta, \quad (76)$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{Eh}(N_t - \mu N_r) + \theta. \quad (77)$$

4.5 РАЗРЕШАЮЩАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ДИСКА С ЦЕНТРАЛЬНЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Уравнения (70) - (72), (76), (77) позволяют получить полное решение задачи о расчете напряженно-деформированного состояния диска. Примем в качестве основных неизвестных радиальное перемещение u и радиальное усилие N_r и преобразуем эти уравнения, исключив из них величины N_t , ε_r , ε_t .

Из уравнений (76) и (77) следует, что

$$\varepsilon_r + \mu\varepsilon_t = \frac{1-\mu^2}{Eh}N_r + (1+\mu)\theta, \quad (78)$$

$$N_t = \mu N_r + Eh\varepsilon_t - Eh\theta. \quad (79)$$

Подставляя соотношение (79) в уравнение (70), получаем

$$r \frac{dN_r}{dr} = Eh\varepsilon_r - (1-\mu)N_r - kr^2h - Eh\theta. \quad (80)$$

Заменяя в уравнениях (78) и (80) ε_r и ε_t их выражениями (71) и (72), получаем систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно u и N_r :

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dr} &= -\frac{\mu}{r}u + \frac{1-\mu^2}{Eh}N_r + (1+\mu)\theta \\ \frac{dN_r}{dr} &= \frac{Eh}{r^2}u - \frac{1-\mu}{r}N_r - krh - \frac{Eh\theta}{r} \end{aligned} \right\}. \quad (81)$$

В общем случае систему (81) интегрируем численным методом. Постоянные интегрирования определяем из граничных условий на внутреннем и наружном контурах диска.

Через величины u и N_r , определяемые из системы (81), можно выразить остальные параметры, характеризующие напряженно-деформированное состояние диска:

$$\left. \begin{aligned} N_t &= \mu N_r + Eh\left(\frac{u}{r} - \theta\right), \\ \sigma_r &= \frac{N_r}{h}, \\ \sigma_t &= \frac{N_t}{h} = \mu \frac{N_r}{h} + E\left(\frac{u}{r} - \theta\right), \\ \varepsilon_r &= \frac{1}{E}(\sigma_r - \mu\sigma_t) + \theta = \frac{1-\mu^2}{Eh}N_r - \frac{\mu}{r}u + (1+\mu)\theta, \\ \varepsilon_t &= \frac{u}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

4.6 ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

В случае, когда величина контактного усилия q на внутреннем контуре диска задана, граничное условие можно записать в следующей форме:

$$N_r^0 = -qh_0, \quad (83)$$

где N_r^0 , h_0 - радиальное усилие и толщина диска на внутреннем контуре.

При установке диска на вал с натягом величина контактного давления зависит от величины натяга δ , угловой скорости вращения ω , неравномерного нагрева диска и заранее неизвестна. Запишем уравнение совместности перемещений контактных поверхностей диска и вала

$$u_0 - \Delta = \delta/2, \quad (84)$$

где u_0 , и Δ - радиальные перемещения точек поверхностей контакта диска и вала соответственно. Эти перемещения считаются положительными, если они направлены от центра.

Радиальные перемещения точек поверхности вала определяются выражением

$$\Delta = \Delta_k + a\theta_b, \quad (85)$$

где Δ_k - перемещения точек поверхности вала за счет контактного давления; $\theta_b = \alpha_b \Delta T_b = \alpha_b (T_b - T_{ub})$ - температурная деформация вала; α_b - коэффициент линейного расширения материала вала; T_b - температура нагрева вала; T_{ub} - начальная температура вала (обычно $T_{ub} = 20$ °С).

Перемещения точек посадочной поверхности вала за счет контактного давления q можно найти по формуле

$$\Delta_k = -\aleph(1-\mu_b) \frac{aq}{E_b}, \quad (86)$$

где E_b , μ_b - модуль упругости и коэффициент Пуассона материала вала; \aleph - коэффициент, зависящий от отношения длины посадочной поверхности к диаметру вала; численное значение можно определить по формулам

$$\aleph = \begin{cases} 0,94 \sqrt{\frac{h_0}{a}} & \text{при } \frac{h_0}{a} \leq 0,6; \\ 1 - 0,5e^{-\frac{h_0}{a}} & \text{при } \frac{h_0}{a} > 0,6. \end{cases} \quad (87)$$

Подставляя выражения (85) и (86) в уравнение (84) и принимая во внимание, что контактное давление q связано с радиальным усилием N_r^0 на внутреннем контуре диска соотношением (83), получаем

$$u^0 - \beta N_r^0 = \delta/2 + a\theta_b, \quad (88)$$

где

$$\beta = \aleph(1-\mu_b) \frac{a}{E_g h_0}. \quad (89)$$

Соотношение (88) служит граничным условием в случае посадки диска на вал с натягом.

Если контактное давление между валом и внутренней поверхностью диска отсутствует (например, образуется зазор), граничное условие на внутреннем контуре диска принимает вид

$$N_r^0 = 0. \quad (90)$$

В общем случае граничное условие на внутреннем контуре диска можно записать в форме

$$g_1 u_0 + g_2 N_r^0 = g_3, \quad (91)$$

где g_1, g_2, g_3 - заданные коэффициенты.

Граничное условие (83) можно получить из общего выражения (91) при $g_1 = 0, g_2 = 1, g_3 = -qh_0$. В случае посадки диска на вал с натягом $g_1 = 1, g_2 = -\beta, g_3 = \delta/2 + a\theta_b$. Граничное условие (90) получим из выражения (91) при

$$g_1 = g_3 = 0, g_2 = 1.$$

Граничное условие на наружном контуре диска ($r = b$)

$$N_r(b) = ph(b), \quad (92)$$

где $N_r(b)$ и $h(b)$ – радиальное усилие и толщина диска при $r = b$, p - интенсивность инерционной радиальной нагрузки, распределенной по наружной поверхности диска.

Совокупность уравнений (81), (82) и граничных условий (91), (92) является математической моделью напряженно-деформированного состояния вращающегося неравномерно нагретого диска с центральным отверстием.

4.7 СПЛОШНОЙ ДИСК

Уравнения (81) остаются справедливыми и для сплошного диска (без центрального отверстия) кроме точки $r = 0$. Найдем производные $\frac{du}{dr}$ и $\frac{dN_r}{dr}$ в центре диска, полагая, что они непрерывны в этой точке.

Разложим функцию $u = u(r)$ в ряд по степеням r в окрестности точки $r = 0$:

$$u = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n. \quad (93)$$

По условиям симметрии $u(0) = 0$, следовательно, $a_0 = 0$.

Подставляя разложение (93) в выражения (71) и (72), получаем

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} = a_1 + 2a_2 r + 3a_3 r^2 + \dots, \quad (94)$$

$$\varepsilon_t = \frac{u}{r} = a_1 + a_2 r + a_3 r^2 + \dots \quad (95)$$

Из выражений (94), (95) следует, что величины $\frac{du}{dr}$, ε_r , ε_t принимают в центре диска ($r = 0$) одно и то же значение

$$\frac{du(0)}{dr} = \varepsilon_r(0) = \varepsilon_t(0) = a_1. \quad (96)$$

Выразим усилия N_r и N_t через деформации ε_r и ε_t , воспользовавшись соотношениями (76) и (77),

$$N_r = \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_r + \mu\varepsilon_t) - \frac{Eh\theta}{1-\mu}; \quad (97)$$

$$N_t = \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_t + \mu\varepsilon_r) - \frac{Eh\theta}{1-\mu}. \quad (98)$$

Подставляя в выражения (97) и (98) разложения (94) и (95), находим

$$N_r = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left[(1+\mu)a_1 + (2+\mu)a_2r + (3+\mu)a_3r^2 + \dots \right] - \frac{Eh\theta}{1-\mu}; \quad (99)$$

$$N_t = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left[(1+\mu)a_1 + (1+2\mu)a_2r + (1+3\mu)a_3r^2 + \dots \right] - \frac{Eh\theta}{1-\mu}. \quad (100)$$

Из выражений (99) и (100) вытекает, что усилия N_t и N_r принимают в центре диска одно и то же значение N_0

$$N_r(0) = N_t(0) = N_0 = \frac{E_0h_0}{1-\mu_0} a_1 - \frac{E_0h_0\theta_0}{1-\mu_0}, \quad (101)$$

где $E_0, \mu_0, h_0, \theta_0$ - значения соответствующих параметров при $r = 0$.

Из выражений (96) и (101) находим

$$\frac{du(0)}{dr} = \varepsilon_r(0) = \varepsilon_t(0) = \frac{1-\mu_0}{E_0h_0} N_0 + \theta_0. \quad (102)$$

Найдем производную $\frac{dN_r}{dr}$ из выражения (99):

$$\begin{aligned} \frac{dN_r}{dr} = \frac{d}{dr} \left(\frac{Eh}{1-\mu^2} \right) \left[(1+\mu)a_1 + (2+\mu)a_2r + (3+\mu)a_3r^2 + \dots \right] - \frac{d}{dr} \left(\frac{Eh\theta}{1-\mu} \right) + \\ + \frac{Eh}{1-\mu^2} [(2+\mu)a_2 + 2(3+\mu)a_3r + \dots] \end{aligned} \quad (103)$$

Полагая, что в центре диска производные $\frac{d(Eh)}{dr}$, $\frac{d\mu}{dr}$, $\frac{d\theta}{dr}$ обращаются в нуль, находим значение производной $\frac{dN_r}{dr}$ в этой точке

$$\frac{dN_r(0)}{dr} = (2+\mu) = \frac{E_0h_0}{1-\mu_0^2} a_2. \quad (104)$$

Уравнение (70) можно записать в следующем виде

$$\frac{dN_r}{dr} = \frac{N_t - N_r}{r} - krh. \quad (105)$$

Подставляя в уравнение (105) выражения (99) и (100), получаем

$$\frac{dN_r}{dr} = \frac{Eh}{1-\mu^2} [(\mu-1)a_2 + (2\mu-2)a_3r + \dots], \quad (106)$$

откуда

$$\frac{dN_r(0)}{dr} = -(1-\mu_0) \frac{E_0 h_0}{1-\mu_0^2} a_2. \quad (107)$$

Сопоставляя выражения (104) и (107), заключаем, что $a_2 = 0$.

Таким образом, в центре диска

$$\left. \begin{aligned} \frac{du(0)}{dr} &= \frac{1-\mu_0}{E_0 h_0} N_0 + \theta_0, \\ \frac{dN_r(0)}{dr} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (108)$$

Расчет сплошного диска сводится к интегрированию системы (81), при этом производные $\frac{du}{dr}$ и $\frac{dN_r}{dr}$ в точке $r = 0$ определяем по формулам (108). Для определения постоянных интегрирования служат граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} u(0) &= 0, \\ N_r(b) &= ph(b) \end{aligned} \right\} \quad (109)$$

Отметим, что граничное условие в точке $r = 0$ можно получить из общего выражения (91) при $g_1 = 1, g_2 = g_3 = 0$.

Параметры, характеризующие напряженно-деформированное состояние в сечениях диска при $r > 0$, находим по формулам (82). Напряжения и деформации в центре диска определяем по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r(0) = \sigma_t(0) = \sigma_0 &= \frac{N_0}{h}, \\ \varepsilon_r(0) = \varepsilon_t(0) &= \frac{1-\mu_0}{E_0 h_0} N_0 + \theta_0 \end{aligned} \right\} \quad (110)$$

Уравнения (81), (82), (108), (110) и граничные условия (109) составляют математическую модель напряженно-деформированного состояния вращающегося сплошного неравномерно нагретого диска.

4.8 РАСЧЕТ ДИСКОВ ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ

Для дисков постоянной толщины при $E = \text{const}, \mu = \text{const}$ можно получить замкнутое решение задачи.

а) Диск с центральным отверстием

При решении системы уравнений (70) - (72), (76), (77) применяем метод начальных параметров. Согласно этому методу постоянные интегрирования выражаем через начальные параметры u_0 и N_r^0 - радиальное перемещение и радиальное усилие, соответствующие внутреннему контуру диска.

Из уравнений (76) и (77) вытекает, что

$$N_t - N_r = -\frac{Eh}{1+\mu}(\varepsilon_r + \varepsilon_t) = \frac{Eh}{1+\mu}\left(\frac{u}{r} - \frac{du}{dr}\right) = \frac{Eh}{1+\mu}r \frac{d}{dr}\left(-\frac{u}{r}\right). \quad (111)$$

Подставляя выражения (111) в уравнение (72), получаем

$$\frac{dN_r}{dr} = \frac{Eh}{1+\mu} \frac{d}{dr}\left(-\frac{u}{r}\right) - krh. \quad (112)$$

Интегрируя уравнение (112) в промежутке от a до текущего значения r , находим

$$N_r = -\frac{Eh}{1+\mu} \frac{u}{r} - \frac{kr^2h}{2} + C, \quad (113)$$

где

$$C = N_r^0 + \frac{Eh}{1+\mu} \frac{u_0}{a} + \frac{ka^2h}{2}. \quad (114)$$

Подставляем выражение (113) в первое уравнение системы (81):

$$\frac{du}{dr} = -\frac{u}{r} - \frac{1-\mu^2}{E} \frac{kr^2}{2} + \frac{1-\mu^2}{Eh} C + (1+\mu)\theta. \quad (115)$$

Принимая во внимание, что $\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} = \frac{1}{r} \frac{d(ur)}{dr}$, получаем

$$\frac{d(ur)}{dr} = -\frac{1-\mu^2}{E} kr^3 + \frac{1-\mu^2}{Eh} Cr + (1+\mu)\theta r. \quad (116)$$

Интегрируем уравнение (116) в промежутке от a до r :

$$ur - u_0a = -\frac{1-\mu^2}{E} \left(\frac{kr^4}{8} - \frac{ka^4}{8}\right) + \frac{1-\mu^2}{Eh} C \frac{r^2 - a^2}{2} + (1+\mu) \int_a^r \theta r dr. \quad (117)$$

Подставляя в уравнение (117) выражение (114) для C , получаем

$$u = \frac{1-\mu+(1+\mu)\frac{a^2}{r^2}}{2\frac{a}{r}}u_0 + N_r^0 \left(1-\mu^2\right) \frac{r}{Er} \frac{1-\frac{a^2}{r^2}}{2} - \frac{kr^3}{E} \frac{1-\mu_2}{8} \left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)^2 + \frac{1+\mu}{r} \int_a^r \theta r dr. \quad (118)$$

Подставляя выражение (118) в уравнение (113), находим

$$N_r^0 = u_0 \frac{Eh}{r} \frac{1-\frac{a^2}{r^2}}{2\frac{a}{r}} + N_r^0 \frac{1}{2} \left[(1+\mu) - (1-\mu) \frac{a^2}{r^2} \right] - kr^2 h \cdot \frac{1}{8} \left[2(1+\mu) \left(1-\frac{a^2}{r^2}\right) + (1-\mu) \left(1-\frac{a^4}{r^4}\right) \right] - \frac{Eh}{r^2} \int_a^r \theta r dr. \quad (119)$$

Введем обозначения: $\lambda = \frac{a}{r}$ и

$$\begin{aligned} \psi_{uu}(\lambda) &= \frac{1-\mu+(1+\mu)\lambda^2}{2\lambda}, & \psi_{ru}(\lambda) &= \frac{1-\lambda^2}{2\lambda}, \\ \psi_{ur}(\lambda) &= \frac{1-\mu^2}{2} (1-\lambda^2), & \psi_{rr}(\lambda) &= \frac{1}{2} \left[1+\mu+(1-\mu)\lambda^2 \right] \\ \psi_{u\omega}(\lambda) &= \frac{1-\mu^2}{8} (1-\lambda^2)^2, & \psi_{r\omega}(\lambda) &= -\frac{1}{8} \left[2(1+\mu)(1-\lambda^2) + (1-\mu)(1-\lambda^4) \right] \end{aligned}$$

Тогда уравнения (118) и (119) можно записать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 \psi_{uu}(\lambda) + N_r^0 \frac{r}{Eh} \psi_{ur}(\lambda) + \frac{kr^3}{E} \psi_{u\omega}(\lambda) + \frac{1+\mu}{r} \int_a^r \theta r dr. \\ N_r &= u_0 \frac{Eh}{r} \psi_{ru}(\lambda) + N_r^0 \psi_{rr}(\lambda) + kr^2 h \psi_{r\omega}(\lambda) - \frac{Eh}{r^2} \int_a^r \theta r dr. \end{aligned} \right\} \quad (120)$$

Уравнения системы (120) являются основными при расчете дисков постоянной толщины с центральными отверстиями. Начальные параметры u_0 , N_r^0 определяем из граничных условий (91), (92).

Функции $\psi_{uu}(\lambda)$, $\psi_{ur}(\lambda)$, $\psi_{u\omega}(\lambda)$, $\psi_{ru}(\lambda)$, $\psi_{rr}(\lambda)$, $\psi_{r\omega}(\lambda)$ называются сопровождающими функциями для диска. Их числовые значения для $\mu = 0,3$ приведены в приложении.

б) Сплошной диск

Основные уравнения для диска без центрального отверстия получаем из уравнений (118) и (119), выполняя в этих уравнениях предельный переход при $a \rightarrow 0$ и принимая во внимание, что для сплошного диска $u_0 = 0$, $N_r^0 = N_r^i = N_0$.

Предварительно находим, используя соотношение (102),

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{u_0}{a} = \lim_{a \rightarrow 0} \varepsilon_r(a) = \frac{1-\mu}{Eh} N_0 + \theta_0. \quad (121)$$

Переходя к пределу при $a \rightarrow 0$ в уравнения (118) и (119), получаем с учетом выражения (121):

$$u = \frac{1-\mu}{Eh} N_0 r - \frac{1-\mu^2}{8E} k r^3 - \frac{1-\mu}{2} \theta r + \frac{1+\mu}{r} \int_0^r \theta r dr, \quad (122)$$

$$N_r = N_0 - \frac{3+\mu}{8} k r^2 h + \frac{Eh\theta_0}{2} - \frac{Eh}{r^2} \int_0^r \theta r dr. \quad (123)$$

Уравнения (122) и (123) являются основными при расчете сплошных дисков. Они содержат только один начальный параметр N_0 , который можно определить из граничного условия на наружном контуре диска: $N_r(b) = ph$. Из этого, с учетом выражения (123) находим

$$N_0 = ph + \frac{3+\mu}{8} k b^2 h - \frac{Eh\theta_0}{2} + \frac{Eh}{b^2} \int_0^b \theta r dr. \quad (124)$$

Напряжения и деформации в сечениях диска при $r > 0$ находим по формулам (182), в центре диска – по формулам (110).

Рассмотрим более подробно случай, когда неравномерный нагрев диска отсутствует ($\Delta T = 0$). В этом случае $\theta = \theta_0 = 0$,

$$N_0 = ph + \frac{3+\mu}{8} k b^2 h.$$

Подставляя значение начального параметра N_0 в уравнения (122) и (123), находим

$$u = \frac{1-\mu}{E} r \left[p + \frac{3+\mu}{8} k \left(b^2 - \frac{1+\mu}{3+\mu} r^2 \right) \right], \quad (125)$$

$$N_r = ph + \frac{3+\mu}{8} k h (b^2 - r^2). \quad (126)$$

Подставляя выражения (125) и (126) в уравнение (123) для кольцевого усилия N_t при $\theta = 0$, получаем

$$N_t = ph + \frac{3+\mu}{8} k h \left(b^2 - \frac{1+3\mu}{3+\mu} r^2 \right). \quad (127)$$

Формулы для напряжений в диске имеют вид:

$$\sigma_r = \frac{N_r}{h} = p + \frac{3+\mu}{8} k (b^2 - r^2), \quad (128)$$

$$\sigma_t = \frac{N_t}{h} = p + \frac{3+\mu}{8} k \left(b^2 - \frac{1+3\mu}{3+\mu} r^2 \right). \quad (129)$$

Графики напряжений, построенные по зависимостям (128) и (129), приведены на рис. 45.

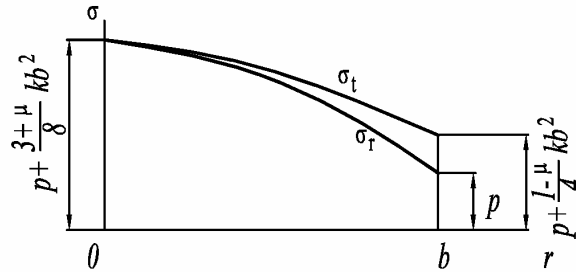


Рис. 45

Наибольшие напряжения возникают в центре диска

$$\sigma_r^{\max} = \sigma_t^{\max} = p + \frac{3+\mu}{8} kb^2. \quad (130)$$

Приведенные теоретические закономерности расчета оболочек вращения, пластин и дисков могут быть использованы при проведении механического расчета проектируемого оборудования.

5 Функции влияния для круглых пластинок

Функц ии влияни я	x										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
φ_{21}	-	0,265 78	0,193 24	0,149 90	0,118 19	0,09260	0,07067	0,05110	0,03311	0,01619	0
φ_{22}	1	0,653 50	0,664 00	0,681 50	0,706 00	0,73750	0,77600	0,82150	0,87400	0,93350	1
$\varphi_{24}(r/D)$	-	4,504 50	2,184 00	1,380 17	0,955 50	0,68250	0,48533	0,33150	0,20475	0,09606	0
φ_{31}	-	0,210 63	0,139 76	0,099 21	0,071 40	0,05082	0,03502	0,02269	0,01306	0,00561	0
φ_{32}	1	0,646 50	0,636 00	0,618 50	0,594 00	0,56250	0,52400	0,47850	0,42600	0,36650	0,30000
$\varphi_{34}(r/D)$	-	4,595 50	2,366 00	1,653 17	1,319 50	1,13750	1,03133	0,96850	0,93275	0,91506	0,91000
$\varphi_{41}(D/r)$	-	0,143	0,089	0,059	0,039	0,02532	0,01518	0,00809	0,00343	0,00082	0

)		84	88	60	49						
$\varphi_{42}(D/r)$	0,769	0,495	0,480	0,455	0,420	0,37500	0,32000	0,25500	0,18000	0,09500	0
)	23	00	00	00	00						
φ_{44}	-	3,565	1,880	1,361	1,135	1,02500	0,97333	0,95500	0,95700	0,97389	1
)		00	00	67	00						
$\varphi_{51}(D/r^2)$	-	0,054	0,028	0,016	0,008	0,00463	0,00218	0,00085	0,00024	0,00003	0
)		14	40	01	87						
$\varphi_{52}(D/r^2)$	0,384	0,235	0,207	0,173	0,136	0,10086	0,06805	0,04011	0,01859	0,00483	0
)		62	99	81	32	70					
$\varphi_{54}(1/r)$	-	1,882	1,049	0,765	0,605	0,48777	0,38589	0,28979	0,19478	0,09858	0
)		17	23	61	74						
$\varphi_1^*(1/qr^2)$	3,141	3,110	3,015	2,858	2,638	2,35619	2,01062	1,60221	1,13097	0,59690	0
)		59	17	93	85	94					
$\varphi_2^*(1/qr^2)$	0,206	0,196	0,175	0,148	0,119	0,09017	0,06215	0,03745	0,01776	0,00472	0
)		25	27	40	89	72					
$\varphi_3^*(1/qr^2)$	0,118	0,110	0,094	0,076	0,057	0,04095	0,02631	0,01470	0,00642	0,00156	0
)		75	51	76	43	98					
$\varphi_4^*(D/q r^3)$	0,062	0,056	0,046	0,034	0,024	0,01527	0,00843	0,00380	0,00120	0,00016	0
)		50	74	31	90	25					
$\varphi_5^*(D/q r^4)$	0,156	0,133	0,097	0,064	0,038	0,01999	0,00875	0,00293	0,00061	0,00004	0
)		25	50	92	63	33					
$\times 10$											

Продолжение табл. 6

Отношение сторон $\gamma = \frac{b}{a}$	Равномерная нагрузка $d = \text{const}$			
	Свободные опоры		Заделка	
	В центре K_w	В центре $-K_{\sigma x}$	В центре K_w	В середине стороны b $K_{\sigma x}$
1,0	0,0443	0,2874	0,0138	0,308

1,1	0,0530	0,3324	0,0164	0,349
1,2	0,0616	0,3762	0,0188	0,383
1,3	0,0697	0,4164	0,0209	0,412
1,4	0,0770	0,4530	0,0226	0,436
1,5	0,0843	0,4872	0,0240	0,454
1,6	0,0906	0,5172	0,0251	0,468
1,7	0,0963	0,5448	0,0260	0,480
1,8	0,1017	0,5688	0,0267	0,487
1,9	0,1063	0,5910	0,0272	0,493
2,0	0,1106	0,6102	0,0277	0,497
3,0	0,1335	0,7134	0,0283	0,500
4,0	0,1400	0,7410	0,0284	0,500
5,0	0,1416	0,7476	0,0284	0,500
∞	0,1422	0,7500	0,0284	0,500

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 *Биргер И. А.* Круглые пластинки и оболочки вращения. М.: Машиностроение, 1959. 368 с.
- 2 *Выливили Н. В.* Методы расчета оболочек на ЭЦВМ. М.: Машиностроение, 1976. 227 с.
- 3 *Луганцев Л. Д.* Расчет на прочность вращающихся дисков машин. М., 1983.
- 4 *Тимошенко С. П.* Устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1955.
- 5 *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 635 с.