

**ОПД.Р.03 СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА**  
**МЯГКИЕ ОБОЛОЧКИ**  
Учебное пособие

В книге рассматривается равновесие мягких оболочек. Оболочки имеют нулевую толщину и перастяжимы. Деформация оболочек состоит из изгибов и из сжатий в складчатые зоны. Излагается теория. Решаются задачи равновесия под гидростатическим давлением оболочек, имеющих до деформации форму плоской полосы, кругового цилиндра, полусферы, сферического сегмента.

Книга предназначена прикладным математикам, специалистам по теории оболочек.

# Оглавление

Предисловие . . . . .	11
<b>Глава 1 Теория мягких оболочек</b>	<b>13</b>
§ 1 Физическая модель мягкой оболочки . . . . .	13
§ 2 Сведения из геометрии поверхностей . . . . .	14
§ 3 Деформация мягкой оболочки . . . . .	16
3.1 Двухосная область . . . . .	16
3.2 Одноосная область . . . . .	16
3.3 Нульосная область . . . . .	19
3.4 Граница между двухосной и одноосной областями	20
3.5 Граница между двухосной и нульосной областями	21
3.6 Граница между одноосной и нульосной областями	21
3.7 Замечания . . . . .	21
§ 4 Уравнения равновесия мягкой оболочки . . . . .	22
4.1 Уравнения сил . . . . .	22
4.2 Уравнение моментов . . . . .	26
4.3 Внутренние силы, действующие на произвольную кривую . . . . .	28
4.4 Уравнения равновесия двухосной области . . . . .	29
4.5 Уравнения равновесия одноосной области . . . . .	30
4.6 Уравнения равновесия нульосной области . . . . .	32
4.7 Условия равновесия на границе между двухосной и одноосной областями . . . . .	33
4.8 Условия равновесия на границе между двухосной и нульосной областями . . . . .	34
4.9 Условия равновесия на границе между одноосной и нульосной областями . . . . .	35
4.10 Замечания . . . . .	36
§ 5 Математическая модель мягкой оболочки . . . . .	36
5.1 Двухосная область . . . . .	37
5.2 Одноосная область . . . . .	37
5.3 Нульосная область . . . . .	37
5.4 Граница между двухосной и одноосной областями	38
5.5 Граница между двухосной и нульосной областями	38
5.6 Граница между одноосной и нульосной областями	39
5.7 Замечания . . . . .	39
§ 6 Нити в одноосной области и геодезические линии . . . . .	39
§ 7 Плоская задача равновесия . . . . .	41
7.1 Геометрические характеристики поверхностей $S$ и $S^c$ . . . . .	42

7.2	Двухосная область . . . . .	44
7.3	Одноосная область . . . . .	44
7.4	Пульсовая область . . . . .	45
7.5	Граница между двухосной и одноосной областями	45
7.6	Замечания . . . . .	45
§ 8	Оссимметричная задача равновесия . . . . .	46
8.1	Геометрические характеристики поверхностей $S$ и $S^o$ . . . . .	47
8.2	Двухосная область . . . . .	50
8.3	Одноосная область . . . . .	50
8.4	Нульсовая область . . . . .	51
8.5	Граница между двухосной и одноосной областями	51
8.6	Граница между двухосной и пульсовой областями	52
8.7	Граница между одноосной и пульсовой областями	52
§ 9	Равновесие мягкой оболочки под гидростатическим давлением . . . . .	53
§ 10	Выводы главы 1 . . . . .	54
<b>Глава 2</b>	<b>Плоская задача равновесия</b>	<b>56</b>
§ 11	Постановка задачи . . . . .	57
§ 12	Уравнения задачи равновесия . . . . .	59
12.1	Двухосная область . . . . .	59
12.2	Одноосная область . . . . .	59
12.3	Граница между двухосной и одноосной областями	60
12.4	Дополнительные условия . . . . .	60
§ 13	Переход к безразмерным переменным . . . . .	60
13.1	Двухосная область . . . . .	61
13.2	Одноосная область . . . . .	61
13.3	Граница между двухосной и одноосной областями	61
13.4	Дополнительные условия . . . . .	61
§ 14	Формы равновесия с одноосными областями . . . . .	62
14.1	Вся оболочка является одноосной областью . . .	62
14.2	Оболочка имеет двухосные и одноосные области	62
14.3	Замечания . . . . .	63
§ 15	Симметрия в задаче равновесия . . . . .	63
15.1	Оболочка не натянута . . . . .	64
15.2	«Жидкость слева» . . . . .	64
15.3	«Жидкость справа» . . . . .	65
15.4	Симметрия относительно горизонтальной плос- кости . . . . .	65
15.5	Симметрия относительно вертикальной плоскости	67
15.6	Осевая симметрия . . . . .	67

15.7	Результаты . . . . .	68
§ 16	Переход к трансцендентным уравнениям . . . . .	69
16.1	Введение вспомогательной переменной . . . . .	69
16.2	$c_3 = -1$ . . . . .	69
16.3	$-1 < c_3 < 1$ . . . . .	70
16.4	$c_3 = 1, \varphi = \pi(\text{mod } 2\pi)$ . . . . .	72
16.5	$c_3 = 1, \varphi(0) \neq \pi(\text{mod } 2\pi)$ . . . . .	72
16.6	$c_3 > 1$ . . . . .	74
§ 17	Формы равновесия оболочки . . . . .	77
§ 18	Число форм равновесия . . . . .	81
18.1	Зависимость между $\psi_0, \psi_1$ . . . . .	81
18.2	Уравнения для несимметричных форм . . . . .	82
18.3	Уравнения для симметричных форм . . . . .	83
18.4	Конечное число форм равновесия при фиксированном значении $n$ . . . . .	85
18.5	Счетное число форм равновесия . . . . .	90
18.6	Конечное число форм равновесия при $v = 0$ и фиксированном значении $n$ . . . . .	91
18.7	Окончание доказательства теорем 18.1, 18.2 . . . . .	93
18.8	Замечания . . . . .	93
§ 19	Пример решения плоской задачи равновесия . . . . .	94
19.1	Жидкость в верхней полости . . . . .	94
19.2	Жидкость в нижней полости . . . . .	95
19.3	Формы равновесия с изломами и участками слипания . . . . .	100
19.4	О устойчивости форм равновесия . . . . .	100
19.5	О каверпе . . . . .	102
19.6	О больших давлениях и больших усилиях . . . . .	102
19.7	О прилипании к стенкам сосуда . . . . .	103
§ 20	Примеры форм равновесия	
	с изломами и участками слипания . . . . .	103
20.1	Жидкость в верхней полости . . . . .	105
20.2	Жидкость в нижней полости . . . . .	108
§ 21	Выводы главы 2 . . . . .	108
<b>Глава 3</b>	<b>Равновесие цилиндрической оболочки</b>	<b>110</b>
§ 22	Постановка задачи . . . . .	110
§ 23	Уравнения задачи равновесия . . . . .	112
23.1	Двухосная область . . . . .	113
23.2	Одноосная область . . . . .	114
23.3	Нульосная область . . . . .	114
23.4	Граница между двухосной и одноосной областями	115

23.5	Граница между двухосной и нульосной областями	115
23.6	Граница между одноосной и нульосной областями	115
23.7	Дополнительные условия . . . . .	116
§ 24	Переход к безразмерным переменным . . . . .	116
24.1	Двухосная область . . . . .	117
24.2	Одноосная область . . . . .	117
24.3	Нульосная область . . . . .	118
24.4	Граница между двухосной и одноосной областями	118
24.5	Граница между двухосной и нульосной областями	119
24.6	Граница между одноосной и нульосной областями	119
24.7	Дополнительные условия . . . . .	119
24.8	Максимальное значение $v$ . . . . .	119
24.9	Замечания . . . . .	122
§ 25	Существование областей разного типа . . . . .	123
§ 26	Решение задачи при $v = 0$ . . . . .	125
26.1	Поверхность $S$ является двухосной . . . . .	125
26.2	Поверхность $S$ является одноосной . . . . .	126
26.3	Поверхность $S$ содержит двухосные и одноосные области . . . . .	127
§ 27	Симметрия в задаче равновесия . . . . .	128
27.1	Жидкость с внутренней стороны оболочки . . . . .	128
27.2	Жидкость с внешней стороны оболочки . . . . .	129
27.3	Симметрия . . . . .	130
§ 28	Одноосные формы равновесия . . . . .	131
28.1	Уравнения . . . . .	131
28.2	Приведение к форме Коши . . . . .	132
28.3	Формула для $v$ . . . . .	132
28.4	Введение новых переменных . . . . .	133
28.5	Область значений параметров . . . . .	134
28.6	О численном интегрировании задачи . . . . .	135
28.7	Связь новых параметров с исходными . . . . .	135
28.8	Формы равновесия . . . . .	137
§ 29	Формы равновесия с одной двухосной и одной одноосной областями . . . . .	139
29.1	Двухосная область прилегает к нижнему контуру	139
29.2	Двухосная область прилегает к верхнему контуру	140
29.3	Переход к новым переменным . . . . .	142
29.4	Формы равновесия . . . . .	143
§ 30	Формы равновесия с двумя двухосными и одной одноосной областями . . . . .	145
30.1	Уравнения . . . . .	145

30.2	Переход к новым переменным . . . . .	147
30.3	Формы равновесия . . . . .	147
§ 31	Формы равновесия с одной двухосной и двумя одноосными областями . . . . .	148
31.1	Уравнения . . . . .	148
31.2	Переход к новым переменным . . . . .	151
31.3	Область значений параметров $w_{10}, w_{20}$ . . . . .	151
31.4	Формы равновесия . . . . .	153
§ 32	Формы равновесия с двумя двухосными и двумя одноосными областями . . . . .	154
32.1	Уравнения . . . . .	154
32.2	Переход к новым переменным . . . . .	157
32.3	Формы равновесия . . . . .	158
§ 33	Число областей разного типа на поверхности оболочки . . . . .	159
33.1	О трех двухосных областях . . . . .	159
33.2	О трех одноосных областях . . . . .	160
§ 34	Примеры решения задачи равновесия цилиндрической оболочки . . . . .	160
34.1	Пример 1 . . . . .	160
34.2	Пример 2 . . . . .	163
34.3	Параметры оболочки при максимальном значении $\epsilon$ . . . . .	165
34.4	О каверпе . . . . .	167
34.5	О больших давлениях и больших усилиях . . . . .	168
34.6	Замечания . . . . .	168
§ 35	Выводы главы 3 . . . . .	168
<b>Глава 4</b>	<b>Равновесие полусферической оболочки</b>	<b>170</b>
§ 36	Постановка задачи . . . . .	170
§ 37	Уравнения задачи равновесия . . . . .	172
37.1	Двухосная область . . . . .	173
37.2	Одноосная область . . . . .	174
37.3	Нульосная область . . . . .	175
37.4	Граница между двухосной и одноосной областями . . . . .	175
37.5	Граница между двухосной и нульосной областями . . . . .	176
37.6	Граница между одноосной и нульосной областями . . . . .	176
37.7	Дополнительные условия . . . . .	176
§ 38	Переход к безразмерным переменным . . . . .	177
38.1	Двухосная область . . . . .	178
38.2	Одноосная область . . . . .	178
38.3	Нульосная область . . . . .	179
38.4	Граница между двухосной и одноосной областями . . . . .	179

38.5	Граница между двухосной и нулевой областями	179
38.6	Граница между одноосной и нулевой областями	180
38.7	Дополнительные условия . . . . .	180
§ 39	Формы равновесия, содержащие области с нулевыми усилиями . . . . .	180
39.1	Вся оболочка является нулевой . . . . .	181
39.2	Одноосная область, граничащая с нулевой . . . . .	182
39.3	Двухосная область, граничащая с областью $M_{01}$	183
39.4	Граница $l^o = l_0^o$ двухосной области . . . . .	184
39.5	Формы равновесия . . . . .	187
§ 40	Решение задачи равновесия в случае, когда жидкость находится под оболочкой . . . . .	189
§ 41	Формы равновесия без областей с нулевыми усилиями	191
41.1	Окрестность точки $l = \pi/2$ . . . . .	192
41.2	Расположение жидкости . . . . .	192
41.3	Симметрия . . . . .	193
41.4	Первая двухосная область . . . . .	196
41.5	Первая одноосная область . . . . .	197
41.6	Результаты . . . . .	197
§ 42	Двухосные формы равновесия . . . . .	198
§ 43	Уравнения для форм равновесия с одной двухосной и одной одноосной областями . . . . .	199
43.1	Уравнения . . . . .	199
43.2	Переход к новым переменным и параметрам . . . . .	200
43.3	Сводные уравнения для новых переменных и параметров . . . . .	202
43.4	Формулы для исходных переменных и параметров	203
43.5	Неравенства для усилий . . . . .	203
§ 44	Асимптотическое решение задачи при $ v  \sim 1$ . . . . .	204
44.1	Переход к новым переменным . . . . .	204
44.2	Построение решения регулярно возмущенной задачи Коши . . . . .	205
44.3	Зависимость $\beta$ от $\varepsilon$ . . . . .	206
44.4	Зависимость $\varepsilon$ от $v$ . . . . .	207
44.5	Неравенство (44.4) . . . . .	208
44.6	Формулы для исходных переменных и параметров	209
44.7	Предельные значения . . . . .	210
44.8	Результаты . . . . .	210
§ 45	Формы равновесия с одной двухосной и одной одноосной областями . . . . .	211
45.1	О численном решении задачи равновесия . . . . .	211

45.2	Зависимость $v$ от $\alpha$ . . . . .	211
45.3	Формы равновесия . . . . .	212
45.4	Усилия оболочки . . . . .	213
45.5	О устойчивости форм равновесия . . . . .	213
45.6	О каверне . . . . .	214
§ 46	Уравнения для форм равновесия с двумя двухосными и одной одноосной областями . . . . .	217
46.1	Вторая двухосная область . . . . .	217
46.2	Уравнения . . . . .	218
46.3	Переход к новым переменным и параметрам . . . . .	219
46.4	Сводные уравнения для новых переменных и параметров . . . . .	220
46.5	Формулы для исходных переменных и параметров . . . . .	221
§ 47	Формы равновесия с двумя двухосными и одной одноосной областями . . . . .	221
47.1	О численном решении задачи равновесия . . . . .	221
47.2	Формы равновесия . . . . .	222
47.3	Усилия оболочки . . . . .	223
47.4	О устойчивости форм равновесия . . . . .	223
47.5	О каверне . . . . .	223
§ 48	Выводы главы 4 . . . . .	223
<b>Глава 5</b>	<b>Равновесие сферического сегмента</b>	<b>226</b>
§ 49	Постановка задачи . . . . .	226
§ 50	Уравнения задачи равновесия . . . . .	228
50.1	Введение координат . . . . .	228
50.2	Область значений поверхностных координат . . . . .	230
50.3	Первая квадратичная форма поверхности $S^0$ . . . . .	230
50.4	Формулы для усилий оболочки . . . . .	231
50.5	Дифференциальные уравнения поверхности $S$ . . . . .	232
50.6	Условия в точках крепления . . . . .	233
50.7	Формула для объема $V$ . . . . .	234
50.8	Сводная система уравнений . . . . .	234
§ 51	Переход к безразмерным переменным . . . . .	235
§ 52	Уравнения для пологого сферического сегмента . . . . .	236
52.1	Введение новых переменных . . . . .	236
52.2	Уравнения для новых переменных . . . . .	237
§ 53	Формулы и уравнения для приближенного решения . . . . .	238
53.1	Уравнения в пулевом приближении . . . . .	238
53.2	Решение дифференциальных уравнений . . . . .	239
53.3	Неравенство (53.2) . . . . .	239
53.4	Переход к трансцендентным уравнениям . . . . .	241



53.5	Условия задачи . . . . .	242
53.6	Результаты . . . . .	242
§ 54	Пример приближенного решения . . . . .	243
54.1	Линии уровня поверхности оболочки . . . . .	243
54.2	Профили поверхности оболочки . . . . .	246
54.3	Внутренние силы . . . . .	246
54.4	Неравенство (53.7) . . . . .	247
§ 55	Выводы главы 5 . . . . .	248
	Литература . . . . .	249
	Предметный указатель . . . . .	250

## Предисловие

В книге рассматривается равновесие мягких оболочек, основной особенностью которых является способность сопротивляться только растяжению. Модель мягкой оболочки хорошо аппроксимирует многие материалы, имеющие широкое применение в технике, строительстве, в обыденной жизни, а именно: пленочные материалы и материалы из тканей.

Способность оболочки мало сопротивляться деформациям, отличным от растяжения, приводит к тому, что любая сжимающая нагрузка вызывает появление складчатых зон с большим числом складок. Можно считать, что в зонах со складками определенного направления оболочка натянута только вдоль складок, так как остальные напряжения в оболочке малы. Если складки произвольны, то напряжения в оболочке равны нулю.

Наличие большого числа складок позволяет идеализировать складчатые зоны и рассматривать их как гладкие поверхности, состоящие из абсолютно гибких нерастяжимых нитей в том случае, когда складки имеют определенное направление. Такие «нитяные» поверхности впервые были рассмотрены в [19], где исследовалось наложение гибкой нерастяжимой оболочки на твердую поверхность. Наложение оболочки осуществлялось таким образом, что длина некоторого семейства кривых оставалась прежней, а длина остальных кривых уменьшалась. После деформации оболочка оказывалась односторонне напряженной. В случае нормальной реакции твердой поверхности показано, что кривые, сохранившие длину, являются геодезическими твердой поверхности, а их прообразы являются геодезическими на поверхности оболочки до деформации.

В главе 1 настоящей книги дана теория мягких оболочек, находящихся в равновесии. Предполагается, что оболочка имеет нулевую толщину, поверхность оболочки состоит из областей трех типов: двухосных, одноосных, нульосных. Двухосные области изометричны своим прообразам на поверхности оболочки до ее деформации. Одноосные области состоят из «нитей», изометричных своим прообразам на поверхности оболочки до деформации. Кривые одноосных областей, не являющиеся «нитями», и все кривые нульосных областей имеют длины, меньшие длин своих прообразов.

В главах 2–5 решены задачи равновесия мягких оболочек под гидростатическим давлением. Эти задачи возникли при исследовании явления вытеснения жидкости из сосуда под давлением газа. Мягкая оболочка при этом использовалась в качестве разделителя двух сред.

В главе 2 мягкая оболочка до деформации имеет вид бесконечной плоской полосы, так что задача сводится к задаче равновесия гибкой нерастяжимой нити под гидростатическим давлением.

В главе 3 мягкая оболочка до деформации имеет вид кругового цилиндра. Решается осесимметричная задача равновесия.

В главе 4 мягкая оболочка до деформации имеет вид полусферы. Решается осесимметричная задача равновесия.

В главе 5 мягкая оболочка до деформации имеет вид сферического сегмента. Оболочка закреплена по границе сегмента и в произвольной внутренней точке. Предполагается, что при равновесии вся оболочка состоит из «нитей», проходящих через точку крепления оболочки.

Из работ, в которых рассматриваются близкие задачи, отметим [1], [2], [3], [4], [7], [11], [14], [15], [16], [17], [18].

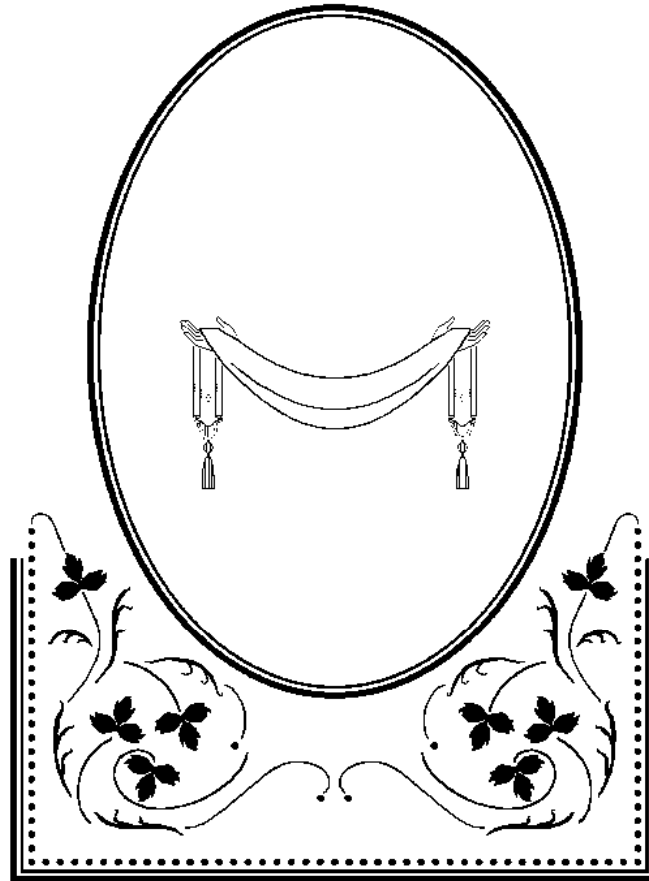
Книга предназначена прикладным математикам, специалистам по теории оболочек.

Автор благодарит акад. А.Ю.Иплинского, благодаря которому автор стал заниматься оболочками. Автор благодарит акад. Ф.Л.Черноусько, под руководством которого была сделана основная работа по оболочкам. Автор благодарит проф. И.В.Новожилова, проф. С.А.Алексеева, проф. А.Е.Межова, С.С.Лемака, В.А.Яхонтову за помощь в работе.

Автор благодарит РФФИ за поддержку (грант № 04-01-00-759).

## Глава 1

# Теория мягких оболочек



### §1. Физическая модель мягкой оболочки

В книге рассматриваются математические задачи равновесия оболочек типа тканей и пленок. Такие оболочки слабо сопротивляются сжатию и изгибу. При наличии сжимающих нагрузок на тканях и пленках образуются складчатые области с большим числом складок. Это обстоятельство привело к модели, в которой складчатые области рассматриваются как гладкие поверхности, состоящие из абсолютно гибких нерастяжимых нитей. Предполагается, что оболочка натягивается только вдоль нитей. Каждая нить является идеализацией складки, так что деформация оболочки заключается в том, что вдоль некоторого семейства кривых происходит сжатие поверхности. Если сжатие

происходит по всем кривым, то напряжения в оболочке равны нулю. Таким образом, получаем следующую физическую модель мягкой оболочки.

**Определение 1.1.** *Мягкой оболочкой* называется материальное тело, имеющее геометрическую форму поверхности. В недеформированном состоянии длины всех кривых поверхности максимальны. При деформации поверхность может изгибаться и сжиматься. Напряжения оболочки вдоль кривых, сохранивших при деформации длину, неотрицательны. Напряжения оболочки вдоль кривых, длины которых при деформации уменьшились, равны нулю.

## §2. Сведения из геометрии поверхностей

Рассмотрим в трехмерном пространстве поверхность  $S$ . Пусть  $X, Y, Z$  — координаты точки в декартовой системе координат  $XYZ$ , а  $x^1, x^2$  — координаты точки на поверхности  $S$ . Будем предполагать, что поверхность  $S$  достаточно гладкая.

Запишем уравнение поверхности  $S$  в виде

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(x^1, x^2),$$

где  $\mathbf{R}$  — радиус-вектор точки поверхности  $S$ . Векторы

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 &= \mathbf{R}_1(x^1, x^2) = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x^1}(x^1, x^2), \\ \mathbf{R}_2 &= \mathbf{R}_2(x^1, x^2) = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x^2}(x^1, x^2) \end{aligned}$$

называются *координатными векторами* поверхности  $S$ . Они лежат в плоскости, которая касается поверхности  $S$  в точке с координатами  $(x^1, x^2)$ . Вектор  $\mathbf{R}_1$  направлен по касательной к координатной кривой  $x^1$ , вектор  $\mathbf{R}_2$  направлен по касательной к координатной кривой  $x^2$ .

Любая поверхность в трехмерном пространстве (с точностью до положения в пространстве) определяется однозначно первой и второй квадратичными формами (*теорема Бонне*, [8]). Запишем квадратичные формы поверхности  $S$  в виде

$$I = (dL)^2 = A_{ij} dx^i dx^j, \quad II = B_{ij} dx^i dx^j. \quad (2.1)$$

Здесь и далее наличие одинаковых верхних и нижних индексов у множителей означает суммирование по этим индексам (индексы принимают значения 1, 2). Например:

$$A_{ij} dx^i dx^j = A_{11} dx^1 dx^1 + A_{12} dx^1 dx^2 + A_{21} dx^2 dx^1 + A_{22} dx^2 dx^2.$$

Коэффициенты  $A_{ij}$  первой квадратичной формы равны скалярным произведениям координатных векторов:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= (R_i, R_j): & A_{11} &= (R_1, R_1) = |R_1|^2, & (2.2) \\ & & A_{12} &= A_{21} = (R_1, R_2), \\ & & A_{22} &= (R_2, R_2) = |R_2|^2. \end{aligned}$$

Здесь через  $|R|$  обозначена длина вектора  $R$ . Таким образом, коэффициенты  $A_{11}$ ,  $A_{22}$  равны квадратам длин координатных векторов  $R_1$ ,  $R_2$ .

Через коэффициенты первой квадратичной формы вычисляются длины кривых, углы между кривыми и площади областей на поверхности  $S$ . Например, пусть на поверхности  $S$  дана кривая

$$x^1 = x^1(\xi), \quad x^2 = x^2(\xi), \quad (2.3)$$

где  $\xi$  — параметр кривой. Тогда квадрат длины бесконечно малого элемента этой кривой, в соответствии с (2.1), равен

$$(dL)^2 = A_{ij} dx^i dx^j = A_{ij} \frac{dx^i}{d\xi} \frac{dx^j}{d\xi} (d\xi)^2.$$

$dL$  — длина элемента кривой. Интегрируя длины бесконечно малых элементов, можно найти длину любой дуги кривой (2.3).

Вторая квадратичная форма характеризует искривление (кривизну) поверхности  $S$ . Она связана со вторыми производными радиус-вектора  $R$  формулами

$$B_{ij} = (R_{ij}, \mathbf{n}), \quad R_{ij} = \frac{\partial^2 R}{\partial x^i \partial x^j}, \quad (2.4)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к поверхности  $S$ . Для  $\mathbf{n}$  справедливы формулы

$$\mathbf{n} = \frac{[R_1, R_2]}{\sqrt{A}}, \quad A = A_{11}A_{22} - A_{12}^2 > 0, \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} |[R_1, R_2]| &= |R_1| \cdot |R_2| \cdot |\sin \widehat{R_1 R_2}| = \sqrt{|R_1|^2 |R_2|^2 - (R_1, R_2)^2} = \\ &= \sqrt{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} = \sqrt{A}, \end{aligned}$$

где  $[R_1, R_2]$  — векторное произведение координатных векторов.

Приведем формулу разложения вторых производных радиус-вектора  $R$  по координатным векторам  $R_1$ ,  $R_2$  и нормали  $\mathbf{n}$ :

$$R_{ij} = \Gamma_{ij}^k R_k + B_{ij} \mathbf{n}. \quad (2.6)$$

Коэффициенты  $\Gamma_{ij}^k$  называются *символами Кристоффеля второго рода*. Их можно вычислить через коэффициенты первой квадратичной

формы по формулам

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{A^{kl}}{2} \left( \frac{\partial A_{li}}{\partial x^j} + \frac{\partial A_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial A_{ij}}{\partial x^l} \right), \quad (2.7)$$

$$A^{11} = \frac{A_{22}}{A}, \quad A^{12} = A^{21} = -\frac{A_{12}}{A}, \quad A^{22} = \frac{A_{11}}{A}.$$

### §3. Деформация мягкой оболочки

Обозначим через  $S^\circ$  поверхность мягкой оболочки в недеформированном состоянии, через  $S$  поверхность мягкой оболочки после деформации. По определению 1.1 кривые на поверхности  $S^\circ$  имеют максимально возможную (для оболочки) длину.

Поверхность  $S$  получается из поверхности  $S^\circ$  деформацией, которая представляет собой изгиб поверхности  $S^\circ$  и сжатие элементов поверхности  $S^\circ$ . Поэтому между  $S^\circ$  и  $S$  существует взаимно-однозначное соответствие. Найдём связь между геометрическими величинами поверхностей  $S^\circ$  и  $S$ . Геометрические величины поверхности  $S^\circ$  будем отмечать градусом, чтобы отличить их от соответствующих величин поверхности  $S$ .

Выберем на поверхности  $S^\circ$  произвольную систему координат  $x^{1^\circ}, x^{2^\circ}$ . При деформации оболочки эта система переходит в систему координат  $x^1, x^2$  на поверхности  $S$ :

$$x^1 = x^{1^\circ}, \quad x^2 = x^{2^\circ}.$$

На поверхности  $S$  возможны области трех типов, которые различаются по характеру деформации оболочки. Рассмотрим их отдельно.

#### 3.1. Двухосная область

**Определение 3.1.** *Двухосной областью* называется область поверхности  $S$ , изометричная своему прообразу на поверхности  $S^\circ$ .

По определению 3.1 длина каждой кривой двухосной области равна длине своего прообраза на поверхности  $S^\circ$ . Деформация оболочки представляет собой изгиб поверхности. Коэффициенты первых квадратичных форм поверхностей  $S$  и  $S^\circ$  равны:

$$A_{ij} = A_{ij}^\circ, \quad i, j=1, 2. \quad (3.1)$$

#### 3.2. Одноосная область

**Определение 3.2.** *Одноосной областью* называется область

поверхности  $S$ , состоящая из кривых, изометричных своим прообразам на поверхности  $S^0$ . Эти кривые поверхности  $S$  называются *нитьями*. Длины почти всех остальных кривых поверхности  $S$  меньше длин их прообразов на поверхности  $S^0$ .

Термин «почти всех остальных кривых» означает, что множество точек, принадлежащих кривым, которые не являются нитями и которые изометричны своему прообразу на  $S^0$ , имеет нулевую меру Лебега на двумерной поверхности  $S$ .

Найдем связь между коэффициентами первых квадратичных форм поверхностей  $S^0$  и  $S$ . Для этого рассмотрим окрестность точки  $Q_1^0$  на поверхности  $S^0$  и ее образ — окрестность точки  $Q_1$  на  $S$ , предполагая, что окрестность точки  $Q_1$  является одноосной областью.

Пусть  $\xi^0$  — кривая, проходящая через  $Q_1^0$  и переходящая при деформации в нить  $\xi$ . Деформацию поверхности в окрестности любой точки можно рассматривать как совокупность двух деформаций по двум взаимно перпендикулярным направлениям [8]. Каждая из этих деформаций представляет собой растяжение (сжатие) поверхности вдоль соответствующего направления. В рассматриваемом случае деформация окрестности  $Q_1^0$  является сжатием вдоль направления, ортогонального  $\xi^0$ . Если совместить точки  $Q_1^0$ ,  $Q_1$  и их окрестности так, чтобы вектор, касательный к  $\xi^0$ , совпал со своим образом, то получим картину, представленную на рис. 3.1.

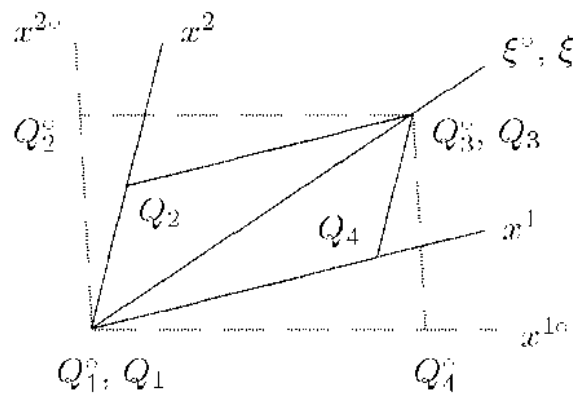


Рис. 3.1. Сжатие элемента оболочки.

Кривые  $x^1$ ,  $x^2$  образуют систему координат на поверхности  $S^0$ . Кривые  $x^1$ ,  $x^2$  образуют систему координат на поверхности  $S$ .  $Q_1Q_2Q_3Q_4$  — бесконечно малый параллелограмм на поверхности  $S$ , образованный координатными кривыми.  $Q_1^0Q_2^0Q_3^0Q_4^0$  — бесконечно ма-



лтый параллелограмм на поверхности  $S^{\circ}$ , прообраз параллелограмма  $Q_1Q_2Q_3Q_4$ . Диагонали  $Q_1Q_3$ ,  $Q_1^{\circ}Q_3^{\circ}$  лежат на пути  $\xi$  и

на прообразе пути  $\xi^{\circ}$ . Точки  $Q_2$ ,  $Q_2^{\circ}$  лежат на одном перпендикуляре к  $\xi$  ( $\xi^{\circ}$ ). Точки  $Q_4$ ,  $Q_4^{\circ}$  лежат на одном перпендикуляре к  $\xi$  ( $\xi^{\circ}$ ).

Пусть координаты вершин  $Q_i^{\circ}$  ( $i = \overline{1,4}$ ) равны

$$\begin{aligned} Q_1^{\circ}(x^{1^{\circ}}, x^{2^{\circ}}), & \quad Q_2^{\circ}(x^{1^{\circ}}, x^{2^{\circ}} + \delta x^{2^{\circ}}), \\ Q_3^{\circ}(x^{1^{\circ}} + \delta x^{1^{\circ}}, x^{2^{\circ}} + \delta x^{2^{\circ}}), & \quad Q_4^{\circ}(x^{1^{\circ}} + \delta x^{1^{\circ}}, x^{2^{\circ}}), \\ \delta x^{i^{\circ}} = \frac{dx^{i^{\circ}}}{d\xi^{\circ}} d\xi^{\circ}, & \quad i = \overline{1,2}. \end{aligned}$$

Тогда координаты их образов суть следующие:

$$Q_1(x^1, x^2), \quad Q_2(x^1, x^2 + \delta x^2), \quad Q_3(x^1 + \delta x^1, x^2 + \delta x^2), \quad Q_4(x^1 + \delta x^1, x^2),$$

$$x^i = x^{i^{\circ}}, \quad \xi = \xi^{\circ}, \quad \delta x^i = \frac{dx^i}{d\xi} d\xi = \delta x^{i^{\circ}}, \quad d\xi = d\xi^{\circ}, \quad i = \overline{1,2}.$$

Векторы, направленные по сторонам и по диагоналям параллелограммов, выражаются через координатные векторы поверхностей по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1^{\circ}\mathbf{Q}_2^{\circ} &= \delta x^2 \mathbf{R}_2^{\circ}, & \mathbf{Q}_1^{\circ}\mathbf{Q}_3^{\circ} &= \delta x^1 \mathbf{R}_1^{\circ} + \delta x^2 \mathbf{R}_2^{\circ}, & \mathbf{Q}_1^{\circ}\mathbf{Q}_4^{\circ} &= \delta x^1 \mathbf{R}_1^{\circ}, \\ \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 &= \delta x^2 \mathbf{R}_2, & \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_3 &= \delta x^1 \mathbf{R}_1 + \delta x^2 \mathbf{R}_2, & \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_4 &= \delta x^1 \mathbf{R}_1. \end{aligned}$$

Векторы  $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_3$ ,  $\mathbf{Q}_1^{\circ}\mathbf{Q}_3^{\circ}$  имеют одинаковую длину, так как лежат на пути  $\xi$  и на ее прообразе  $\xi^{\circ}$ . Поэтому справедливы равенства

$$\begin{aligned} |\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_3|^2 &= |\mathbf{Q}_1^{\circ}\mathbf{Q}_3^{\circ}|^2, & (3.2) \\ A_{ij} \delta x^i \delta x^j &= A_{ij}^{\circ} \delta x^i \delta x^j, & (A_{ij} - A_{ij}^{\circ}) \delta x^i \delta x^j &= 0. \end{aligned}$$

Для почти всех точек одноосной области существует только одна кривая, проходящая через точку и изометричная своему прообразу. Отсюда следует, что квадратное (относительно отношения  $\delta x^1 : \delta x^2$ ) уравнение (3.2) имеет только один корень, и значит его определитель равен нулю:

$$(A_{11} - A_{11}^{\circ})(A_{22} - A_{22}^{\circ}) - (A_{12} - A_{12}^{\circ})^2 = 0. \quad (3.3)$$

Из непрерывности функций  $A_{ij}$ , которая предполагается в одноосной области, следует, что равенство (3.3) выполняется во всех точках одноосной области.

По определению 3.2 для почти всех точек одноосной области справедливо утверждение: все кривые, проходящие через точку, кроме пути, имеют длину, меньшую длины своего прообраза. Поэтому для всех

значений отношения  $dx^1 : dx^2$ , кроме единственного корня уравнения (3.2), выполняются неравенства

$$A_{ij} dx^i dx^j < A_{ij}^{\circ} dx^i dx^j,$$

$$(A_{11} - A_{11}^{\circ})(dx^1)^2 + 2(A_{12} - A_{12}^{\circ})dx^1 dx^2 + (A_{22} - A_{22}^{\circ})(dx^2)^2 < 0.$$

Отсюда и из (3.3) следует, что для почти всех точек одноосной области справедлива совокупность неравенств

$$\begin{cases} A_{11} - A_{11}^{\circ} < 0, \\ A_{22} - A_{22}^{\circ} < 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

### 3.3. Нульсовая область

**Определение 3.3** *Нульсовой областью* называется область поверхности  $S$ , на которой почти каждая кривая имеет длину, меньшую длины ее прообраза на поверхности  $S^{\circ}$ .

Термин «почти каждая кривая» означает, что множество точек, принадлежащих кривым, которые изометричны своему прообразу на  $S^{\circ}$ , имеет нулевую меру Лебега на двумерной поверхности  $S$ .

Из определения 3.3 следует, что для почти каждой точки нульсовой области справедливо утверждение: все кривые, проходящие через точку, имеют длины, меньшие длин их прообразов. Поэтому в почти каждой точке для всех направлений  $dx^1 : dx^2$  справедливы неравенства

$$A_{ij} dx^i dx^j < A_{ij}^{\circ} dx^i dx^j,$$

$$(A_{11} - A_{11}^{\circ})(dx^1)^2 + 2(A_{12} - A_{12}^{\circ})dx^1 dx^2 + (A_{22} - A_{22}^{\circ})(dx^2)^2 < 0.$$

Отсюда следует, что в почти каждой точке нульсовой области коэффициенты первых квадратичных форм поверхностей  $S$ ,  $S^{\circ}$  удовлетворяют неравенствам

$$(A_{11} - A_{11}^{\circ})(A_{22} - A_{22}^{\circ}) - (A_{12} - A_{12}^{\circ})^2 > 0, \quad (3.5)$$

$$A_{11} - A_{11}^{\circ} < 0, \quad A_{22} - A_{22}^{\circ} < 0.$$

Если существует отображение какой-либо области поверхности  $S^{\circ}$  в нульсовую область поверхности  $S$ , то такое отображение неединственно. Поэтому в книге рассматриваются только форма нульсовой области и прообраз нульсовой области на поверхности  $S^{\circ}$  и не рассматриваются способы отображения в нульсовую область.

Рассмотрим условия, которым должны удовлетворять коэффициенты первых квадратичных форм на границах между областями разных типов. Запишем уравнения границы между областями разных

типов в виде

$$x^i = x^i(\eta), \quad i=1,2,$$

где  $\eta$  — параметр границы. Из непрерывности поверхности  $S$  (которая предполагается) следует, что длина границы, вычисленная через коэффициенты первых квадратичных форм соседних областей, одна и та же. Отсюда получаем уравнение, справедливое в точках границы между  $I$ -осной и  $J$ -осной областями ( $I, J = 0, 1, 2; I \neq J$ ):

$$[(A_{ij})_{(I)} - (A_{ij})_{(J)}] \frac{dx^i}{d\eta} \frac{dx^j}{d\eta} = 0. \quad (3.6)$$

Равенства, обеспечивающие непрерывность поверхности  $S$  на границе, имеют вид

$$[R_{(I)} - R_{(J)}] (x^1(\eta), x^2(\eta)) = 0. \quad (3.7)$$

(3.6) есть следствие равенства (3.7).

### 3.4. Граница между двухосной и одноосной областями

**Граница совпадает с нитью.**

Пусть граница между двухосной и одноосной областями совпадает с нитью одноосной области. Тогда в точках границы, кроме (3.6), выполняется и равенство (3.2), справедливое для точек нити. При этом в (3.2)

$$\xi = \eta, \quad \delta x^i = \frac{dx^i}{d\eta} d\eta, \quad i = 1, 2.$$

Запишем равенства (3.2), (3.6) в виде системы

$$[(A_{ij})_{(1)} - (A_{ij})_{(2)}] \frac{dx^i}{d\eta} \frac{dx^j}{d\eta} = 0, \quad (3.8)$$

$$[(A_{ij})_{(1)} - (A_{ij}^{\circ})_{(1)}] \frac{dx^i}{d\eta} \frac{dx^j}{d\eta} = 0.$$

**Граница не совпадает с нитью.**

Пусть граница между двухосной и одноосной областями не совпадает с нитью одноосной области. Тогда через точку границы проходят две кривые, длины которых равны длинам их прообразов: одна кривая совпадает с границей, другая совпадает с нитью одноосной области. Отсюда следует, что все кривые, проходящие через точку границы, имеют длины, равные длинам их прообразов. Поэтому на границе

между двухосной и одноосной областями выполняются равенства

$$(A_{ij})_{(1)} = (A_{ij}^{\circ})_{(1)} = (A_{ij})_{(2)}, \quad i, j = 1, 2. \quad (3.9)$$

### 3.5. Граница между двухосной и нульосной областями

На границе между двухосной и нульосной областями выполняется равенство (3.6):

$$[(A_{ij})_{(0)} - (A_{ij})_{(2)}] \frac{dx^i}{d\eta} \frac{dx^j}{d\eta} = 0. \quad (3.10)$$

### 3.6. Граница между одноосной и нульосной областями

На границе между одноосной и нульосной областями выполняется равенство (3.6):

$$[(A_{ij})_{(0)} - (A_{ij})_{(1)}] \frac{dx^i}{d\eta} \frac{dx^j}{d\eta} = 0. \quad (3.11)$$

### 3.7. Замечания

*Замечание 3.1.* Нити, из которых состоит одноосная область, в общем случае не известны и находятся из уравнений для одноосной области.

*Замечание 3.2.* Границы между областями разного типа в общем случае не известны и находятся из условий, задаваемых на границе.

*Замечание 3.3.* Поверхность  $S$  может иметь излом на границе между двухосной и одноосной областями в случае, когда граница совпадает с нитью. Поверхность  $S$  может иметь излом на границе областей с нульосной областью. Это значит, что производная от радиус-вектора поверхности  $S$  по направлению, трансверсальному к границе, в точках границы может иметь разрыв, и тогда в точках границы

$$\mathbf{n}_{(I)} \neq \mathbf{n}_{(J)}.$$

Здесь  $\mathbf{n}_{(I)}$  — предел единичного вектора нормали  $\mathbf{n}$  к поверхности  $S$  при стремлении точки  $I$ -осной области к границе;  $I, J = 0, 1, 2; I \neq J$ .

Излом поверхности  $S$  на границе между двухосной и нульосной областями имеет место в задаче, рассмотренной в главе 4 (§ 40). Изломы поверхности  $S$  в задачах, рассмотренных в главах 2, 5, вызваны условиями закрепления оболочки (смотрите замечание 4.2).

## §4. Уравнения равновесия мягкой оболочки

### 4.1. Уравнения сил

Рассмотрим равновесие элементарного параллелограмма  $Q_1Q_2Q_3Q_4$ , образованного координатными кривыми  $x^1, x^2, x^1 + dx^1, x^2 + dx^2$  (рис. 4.1). На параллелограмм действуют внутренние и внешние силы.

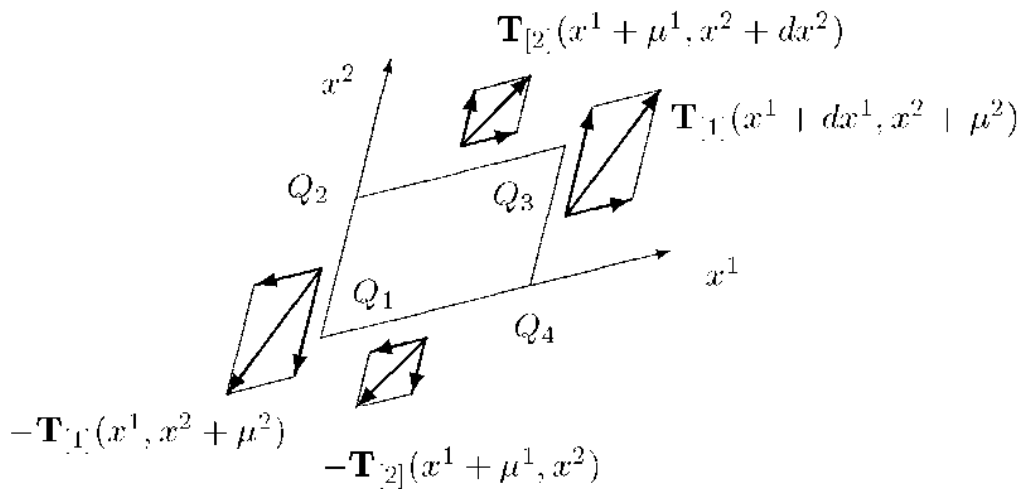


Рис. 4.1. Внутренние силы.

*Внутренние силы* (силы воздействия на параллелограмм остальной части мягкой оболочки) приложены к границам параллелограмма и лежат в касательных к поверхности  $S$  плоскостях. Обозначим через  $\mathbf{T}_{[1]}$ ,  $\mathbf{T}_{[2]}$  силы, действующие на единицу длины кривых  $x^2$  и  $x^1$ . Предполагаем, что  $\mathbf{T}_{[1]}$  — сила воздействия части оболочки, лежащей в области с большими значениями координаты  $x^1$ , на прилегающую область. Аналогично,  $\mathbf{T}_{[2]}$  — сила воздействия части оболочки, лежащей в области с большими значениями координаты  $x^2$ , на прилегающую область. Силы взаимодействия соседних областей оболочки удовлетворяют третьему закону Ньютона: сила действия равна по величине и противоположна по направлению силе противодействия.

Обозначим через  $T_1, U_1$  и, соответственно,  $U_2, T_2$  проекции сил  $\mathbf{T}_{[1]}$ ,  $\mathbf{T}_{[2]}$  на координатные векторы  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ :

$$T_{[1]} = T_1 \frac{\mathbf{R}_1}{\sqrt{A_{11}}} + U_1 \frac{\mathbf{R}_2}{\sqrt{A_{22}}}, \quad (4.1)$$

$$T_{[2]} = U_2 \frac{R_1}{\sqrt{A_{11}}} + T_2 \frac{R_2}{\sqrt{A_{22}}}.$$

**Определение 4.1.**  $T_1, T_2, U_1, U_2$  называются *усилиями*.

Чтобы уравнения равновесия мягкой оболочки имели компактный вид, введем *усилия*  $T^{ij}$  по формулам

$$\begin{aligned} T^{11} &= \sqrt{\frac{A_{22}}{AA_{11}}} T_1, & T^{12} &= \frac{U_1}{\sqrt{A}}, \\ T^{21} &= \frac{U_2}{\sqrt{A}}, & T^{22} &= \sqrt{\frac{A_{11}}{AA_{22}}} T_2. \end{aligned} \quad (4.2)$$

При выводе уравнений равновесия будем предполагать, что элементы  $dx^1, dx^2$  имеют один порядок малости:  $dx^i = a^i \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$  — малый параметр. Чтобы вычислять силы, действующие на элемент поверхности  $S$ , с точностью до любого порядка малости по  $\varepsilon$ , введем (малые) параметры  $\mu^1, \mu^2$  сторон параллелограмма  $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4$ :

$$0 \leq \mu^1 \leq dx^1, \quad 0 \leq \mu^2 \leq dx^2.$$

Элементы  $d\mu^1, d\mu^2$  назовем *элементами второго уровня малости*.

Вычислим силы, действующие на параллелограмм  $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4$ , с точностью до членов второго порядка малости по  $\varepsilon$  включительно. На сторону  $Q_1 Q_2$  действует внутренняя сила

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{Q_1 Q_2} &= - \int_0^{dx^2} \mathbf{T}_{[1]}(x^1, x^2 + \mu^2) \cdot \sqrt{A_{22}(x^1, x^2 + \mu^2)} d\mu^2 - \\ &= - \int_0^{dx^2} \left[ \left( T_1 \frac{R_1}{\sqrt{A_{11}}} + U_1 \frac{R_2}{\sqrt{A_{22}}} \right) \sqrt{A_{22}} \right] (x^1, x^2 + \mu^2) d\mu^2 - \\ &= - \int_0^{dx^2} \left( \sqrt{A} T^{1i} R_i \right) (x^1, x^2 + \mu^2) d\mu^2 - \\ &= - \int_0^{dx^2} \left[ \left( \sqrt{A} T^{1i} R_i \right) (x^1, x^2) + \frac{\partial(\sqrt{A} T^{1i} R_i)}{\partial x^2} (x^1, x^2) \mu^2 + \right. \\ &\quad \left. + \dots \right] d\mu^2 = \\ &= - \left( \sqrt{A} T^{1i} R_i \right) (x^1, x^2) dx^2 - \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\partial(\sqrt{A} T^{1i} R_i)}{\partial x^2} (x^1, x^2) (dx^2)^2 + \dots \end{aligned} \quad (4.3)$$

На сторону  $Q_2Q_3$  действует сила

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{Q_2Q_3} &= \int_0^{dx^1} \mathbf{T}_{2j}(x^1 + \mu^1, x^2 + dx^2) \cdot \sqrt{A_{11}}(x^1 + \mu^1, x^2 + dx^2) d\mu^1 \quad (4.4) \\
&= \int_0^{dx^1} \left[ \left( U_2 \frac{R_1}{\sqrt{A_{11}}} + T_2 \frac{R_2}{\sqrt{A_{22}}} \right) \sqrt{A_{11}} \right] (x^1 + \mu^1, x^2 + dx^2) d\mu^1 - \\
&= \int_0^{dx^1} \left( \sqrt{A} T^{2i} R_i \right) (x^1 + \mu^1, x^2 + dx^2) d\mu^1 - \\
&= \int_0^{dx^1} \left[ \left( \sqrt{A} T^{2i} R_i \right) (x^1, x^2) + \frac{\partial(\sqrt{A} T^{2i} R_i)}{\partial x^1} (x^1, x^2) \mu^1 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial(\sqrt{A} T^{2i} R_i)}{\partial x^2} (x^1, x^2) dx^2 + \dots \right] d\mu^1 - \\
&= \left( \sqrt{A} T^{2i} R_i \right) (x^1, x^2) dx^1 + \frac{1}{2} \frac{\partial(\sqrt{A} T^{2i} R_i)}{\partial x^1} (x^1, x^2) (dx^1)^2 + \\
&\quad + \frac{\partial(\sqrt{A} T^{2i} R_i)}{\partial x^2} (x^1, x^2) dx^1 dx^2 + \dots
\end{aligned}$$

На сторону  $Q_3Q_4$  действует сила

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{Q_3Q_4} &= \int_0^{dx^2} \mathbf{T}_{1j}(x^1 + dx^1, x^2 + \mu^2) \cdot \sqrt{A_{22}}(x^1 + dx^1, x^2 + \mu^2) d\mu^2 \quad (4.5) \\
&= \int_0^{dx^2} \left[ \left( T_1 \frac{R_1}{\sqrt{A_{11}}} + U_1 \frac{R_2}{\sqrt{A_{22}}} \right) \sqrt{A_{22}} \right] (x^1 + dx^1, x^2 + \mu^2) d\mu^2 \\
&= \int_0^{dx^2} \left( \sqrt{A} T^{1i} R_i \right) (x^1 + dx^1, x^2 + \mu^2) d\mu^2 \\
&= \int_0^{dx^2} \left[ \left( \sqrt{A} T^{1i} R_i \right) (x^1, x^2) + \frac{\partial(\sqrt{A} T^{1i} R_i)}{\partial x^1} (x^1, x^2) dx^1 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial(\sqrt{A} T^{1i} R_i)}{\partial x^2} (x^1, x^2) \mu^2 + \dots \right] d\mu^2 - \\
&= \left( \sqrt{A} T^{1i} R_i \right) (x^1, x^2) dx^2 + \frac{\partial(\sqrt{A} T^{1i} R_i)}{\partial x^1} (x^1, x^2) dx^1 dx^2 +
\end{aligned}$$

$$\left| \frac{1}{2} \frac{\partial(\sqrt{A} T^{2i} R_i)}{\partial x^2} (x^1, x^2) (dx^2)^2 \right| \dots$$

На сторону  $Q_1Q_4$  действует сила

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{Q_1Q_4} &= \int_0^{dx^1} \mathbf{T}_{\underline{2}}(x^1 + \mu^1, x^2) \cdot \sqrt{A_{11}}(x^1 + \mu^1, x^2) d\mu^1 & (4.6) \\ &= \int_0^{dx^1} \left[ \left( U_2 \frac{R_1}{\sqrt{A_{11}}} + T_2 \frac{R_2}{\sqrt{A_{22}}} \right) \sqrt{A_{11}} \right] (x^1 + \mu^1, x^2) d\mu^1 \\ &= \int_0^{dx^1} \left( \sqrt{A} T^{2i} R_i \right) (x^1 + \mu^1, x^2) d\mu^1 \\ &= \int_0^{dx^1} \left[ \left( \sqrt{A} T^{2i} R_i \right) (x^1, x^2) + \frac{\partial(\sqrt{A} T^{2i} R_i)}{\partial x^1} (x^1, x^2) \mu^1 + \right. \\ &\quad \left. \dots \right] d\mu^1 = \\ &= \left( \sqrt{A} T^{2i} R_i \right) (x^1, x^2) dx^1 + \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial(\sqrt{A} T^{2i} R_i)}{\partial x^1} (x^1, x^2) (dx^1)^2 + \dots \end{aligned}$$

Обозначим через  $\mathbf{F}$  внешнюю силу, действующую на единицу площади оболочки. Представим разложение силы  $\mathbf{F}$  по векторам  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{n}$  в виде

$$\mathbf{F} = -T^i \mathbf{R}_i - T^3 \mathbf{n}. \quad (4.7)$$

Площадь элементарного параллелограмма со сторонами  $d\mu^1, d\mu^2$  равна

$$|[\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2]| \cdot d\mu^1 d\mu^2 = \sqrt{A} d\mu^1 d\mu^2.$$

Вычислим внешнюю силу, действующую на параллелограмм  $Q_1Q_2Q_3Q_4$ , с точностью до членов второго порядка малости по  $\varepsilon$  включительно:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{Q_1Q_2Q_3Q_4} &= \int_0^{dx^1} \int_0^{dx^2} (\mathbf{F} \sqrt{A})(x^1 + \mu^1, x^2 + \mu^2) d\mu^1 d\mu^2 = & (4.8) \\ &= \int_0^{dx^1} \int_0^{dx^2} \left[ (T^i \mathbf{R}_i + T^3 \mathbf{n}) \sqrt{A} \right] (x^1 + \mu^1, x^2 + \mu^2) d\mu^1 d\mu^2 = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= - \int_0^{dx^1} \int_0^{dx^2} \left\{ \left[ (F^i R_i + F^3 \mathbf{n}) \sqrt{A} \right] (x^1, x^2) + \dots \right\} d\mu^1 d\mu^2 = \\
&= - \left[ (F^i R_i + F^3 \mathbf{n}) \sqrt{A} \right] (x^1, x^2) dx^1 dx^2 + \dots
\end{aligned}$$

При равновесии оболочки главный вектор внешних и внутренних сил, действующих на параллелограмм  $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4$ , равен нулю. Складывая векторы (4.3)–(4.6), (4.8), получим

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(\sqrt{A} T^{2i} R_i)}{\partial x^2} (x^1, x^2) dx^1 dx^2 + \frac{\partial(\sqrt{A} T^{1i} R_i)}{\partial x^1} (x^1, x^2) dx^1 dx^2 - \\
&- \left[ (F^i R_i + F^3 \mathbf{n}) \sqrt{A} \right] (x^1, x^2) dx^1 dx^2 + \dots = 0.
\end{aligned}$$

Разделим равенство на произведение  $\sqrt{A} dx^1 dx^2$  и устремим малый параметр  $\varepsilon$  к нулю. Получим векторное уравнение сил для оболочки  $S$ :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{A}} \frac{\partial(\sqrt{A} T^{2i} R_i)}{\partial x^2} + \frac{1}{\sqrt{A}} \frac{\partial(\sqrt{A} T^{1i} R_i)}{\partial x^1} - F^i R_i - F^3 \mathbf{n} = 0, \\
&\frac{1}{\sqrt{A}} \frac{\partial(\sqrt{A} T^{ji} R_i)}{\partial x^j} - F^i R_i + F^3 \mathbf{n}.
\end{aligned}$$

Преобразуем уравнение, принимая во внимание формулы (2.6) для вторых производных  $R_{ij}$  радиус-вектора и равенства  $B_{ij} = B_{ji}$ ,  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ . Получим

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{A}} \left[ \frac{\partial(\sqrt{A} T^{ji})}{\partial x^j} R_i + \sqrt{A} T^{ji} (\Gamma_{ij}^k R_k + B_{ij} \mathbf{n}) \right] = F^i R_i + F^3 \mathbf{n}, \quad (4.9) \\
&\left[ \frac{1}{\sqrt{A}} \frac{\partial(\sqrt{A} T^{ij})}{\partial x^i} + \Gamma_{ik}^j T^{ik} \right] R_j + B_{ij} T^{ij} \mathbf{n} = F^j R_j + F^3 \mathbf{n}.
\end{aligned}$$

Спроектируем уравнение (4.9) на координатные векторы  $R_1, R_2$  и на нормаль  $\mathbf{n}$ . Получим скалярные уравнения сил для оболочки  $S$ :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{A}} \frac{\partial(\sqrt{A} T^{ij})}{\partial x^i} + \Gamma_{ik}^j T^{ik} = F^j, \quad j=1,2, \quad (4.10) \\
&B_{ij} T^{ij} = F^3.
\end{aligned}$$

## 4.2. Уравнение моментов

При равновесии оболочки главный момент внешних и внутренних сил равен нулю. Вычислим моменты сил, действующих на параллелограмм  $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4$ , относительно точки  $Q_1$  с точностью до членов второго порядка малости включительно по малому параметру  $\varepsilon$ .

Момент внутренних сил, действующих на сторону  $Q_1Q_2$ , равен

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{Q_1Q_2} &= - \int_0^{dx^2} \left[ \mathbf{R}(x^1, x^2 + \mu^2) - \mathbf{R}(x^1, x^2), \mathbf{T}_{[1]}(x^1, x^2 + \mu^2) \right] \times \\
&\quad \times \sqrt{A_{22}(x^1, x^2 + \mu^2)} d\mu^2 - \\
&= - \int_0^{dx^2} \left[ \mathbf{R}_2, \sqrt{A} T^{1i} \mathbf{R}_i \right] (x^1, x^2) \mu^2 d\mu^2 + \dots = \\
&= - \frac{1}{2} (AT^{11} \mathbf{n})(x^1, x^2) (dx^2)^2 + \dots
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Момент внутренних сил, действующих на сторону  $Q_2Q_3$ , равен

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{Q_2Q_3} &= \tag{4.12} \\
&= - \int_0^{dx^1} \left[ \mathbf{R}(x^1 + \mu^1, x^2 + dx^2) - \mathbf{R}(x^1, x^2), \mathbf{T}_{[2]}(x^1 + \mu^1, x^2 + dx^2) \right] \times \\
&\quad \times \sqrt{A_{11}(x^1 + \mu^1, x^2 + dx^2)} d\mu^1 - \\
&= - \int_0^{dx^1} \left[ \mathbf{R}_1 \mu^1 + \mathbf{R}_2 dx^2, \sqrt{A} T^{2i} \mathbf{R}_i \right] (x^1, x^2) d\mu^1 + \dots = \\
&= - \frac{1}{2} (AT^{22} \mathbf{n})(x^1, x^2) (dx^1)^2 - (AT^{21} \mathbf{n})(x^1, x^2) dx^1 dx^2 + \dots
\end{aligned}$$

Момент внутренних сил, действующих на сторону  $Q_3Q_4$ , равен

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{Q_3Q_4} &= \tag{4.13} \\
&= - \int_0^{dx^2} \left[ \mathbf{R}(x^1 + dx^1, x^2 + \mu^2) - \mathbf{R}(x^1, x^2), \mathbf{T}_{[1]}(x^1 + dx^1, x^2 + \mu^2) \right] \times \\
&\quad \times \sqrt{A_{22}(x^1 + dx^1, x^2 + \mu^2)} d\mu^2 - \\
&= - \int_0^{dx^2} \left[ \mathbf{R}_1 dx^1 + \mathbf{R}_2 \mu^2, \sqrt{A} T^{1i} \mathbf{R}_i \right] (x^1, x^2) d\mu^2 + \dots = \\
&= (AT^{12} \mathbf{n})(x^1, x^2) dx^1 dx^2 - \frac{1}{2} (AT^{11} \mathbf{n})(x^1, x^2) (dx^2)^2 + \dots
\end{aligned}$$

Момент внутренних сил, действующих на сторону  $Q_1Q_4$ , равен

$$\mathbf{M}_{Q_1Q_4} = - \int_0^{dx^1} \left[ \mathbf{R}(x^1 + \mu^1, x^2) - \mathbf{R}(x^1, x^2), \mathbf{T}_{[2]}(x^1 + \mu^1, x^2) \right] \times \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sqrt{A_{11}(x^1 + \mu^1, x^2)} d\mu^1 \\
& - - \int_0^{dx^1} \left[ R_{1i}; \sqrt{A} T^{2i} R_i \right] (x^1, x^2) \mu^1 d\mu^1 + \dots - \\
& = -\frac{1}{2} (\Delta T^{22} \mathbf{n})(x^1, x^2) (dx^1)^2 + \dots
\end{aligned}$$

Момент внешних сил, действующих на параллелограмм, относительно точки  $Q_1$  равен

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{Q_1 Q_2 Q_3 Q_4} &= \int_0^{dx^1} \int_0^{dx^2} \left[ \mathbf{R}(x^1 + \mu^1, x^2 + \mu^2) - \right. & (4.15) \\
& \quad \left. - \mathbf{R}(x^1, x^2), (\mathbf{F}\sqrt{A})(x^1 + \mu^1, x^2 + \mu^2) \right] d\mu^1 d\mu^2 - \\
& = O(\varepsilon^3).
\end{aligned}$$

Складывая моменты (4.11)–(4.15), приравнявая сумму нулю, сокращая равенство на произведение  $dx^1 dx^2$  и устремляя  $\varepsilon$  к нулю, получим уравнение моментов для оболочки  $S$ :

$$A (T^{12} - T^{21}) \mathbf{n} = 0.$$

Отсюда следует скалярное уравнение моментов для оболочки  $S$ :

$$T^{12} - T^{21}. \quad (4.16)$$

### 4.3. Внутренние силы, действующие на произвольную кривую

Найдем внутренние силы, действующие на кривую  $\zeta$ , проходящую по диагонали элементарного параллелограмма  $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4$ , образованного координатными кривыми  $x^1, x^2, x^1 + dx^1, x^2 + dx^2$ . Для этого рассмотрим равновесие элементарного треугольника  $Q_1 Q_2 Q_3$  (рис. 4.2). Обозначим через  $\mathbf{T}$  силу, действующую на единицу длины кривой  $\zeta$ . Тогда сила, действующая на сторону  $Q_1 Q_3$ , с точностью до членов порядка  $\varepsilon$  включительно равна

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_{Q_1 Q_3} &= \mathbf{T}(x^1, x^2) dL + \dots, & (4.17) \\
(dL)^2 &= |Q_1 Q_3|^2 = A_{ij} dx^i dx^j.
\end{aligned}$$

Здесь  $dL$  — длина элемента кривой  $\zeta$ .

Внешняя сила, действующая на треугольник  $Q_1 Q_2 Q_3$ , равна половине силы, действующей на параллелограмм  $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4$ , и пропорциональна  $\varepsilon^2$ .

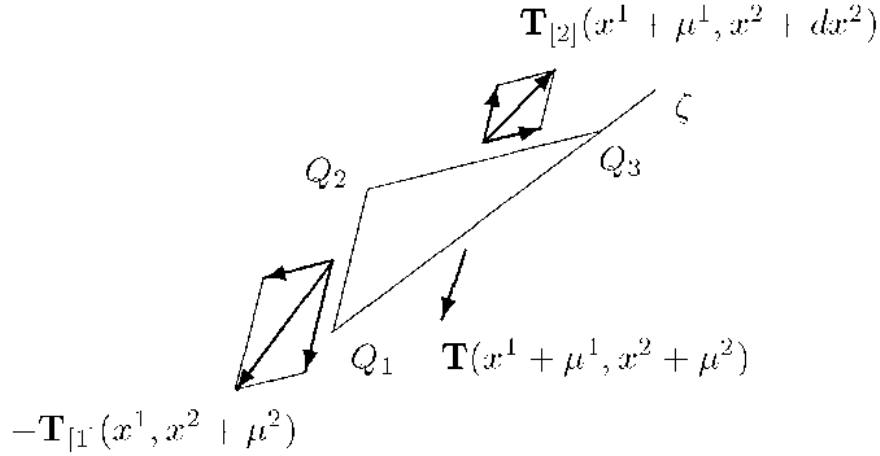


Рис. 4.2. Внутренние силы.

Приравняем нулю главный вектор сил, действующих на треугольник  $Q_1Q_2Q_3$ . Воспользуемся формулами (4.3), (4.4), (4.17). Разделим уравнение на  $dL$  и устремим  $\epsilon$  к нулю. Получим следующие уравнения и формулу для силы  $\mathbf{T}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{Q_1Q_2} + \mathbf{T}_{Q_2Q_3} + \mathbf{T}_{Q_1Q_3} + \mathbf{P}_{Q_1Q_2Q_3} &= 0, \\ -\sqrt{A} T^{1i} R_i dx^2 + \sqrt{A} T^{2i} R_i dx^1 + \mathbf{T} dL + \dots &= 0, \\ \mathbf{T} &= \left( T^{1i} \frac{dx^2}{dL} - T^{2i} \frac{dx^1}{dL} \right) \sqrt{A} R_i. \end{aligned} \quad (4.18)$$

На поверхности  $S$  мягкой оболочки возможны области трех типов, которые отличаются одна от другой по способу деформации оболочки и, соответственно, по напряженному состоянию оболочки. Рассмотрим отдельно каждую область.

#### 4.4. Уравнения равновесия двухосной области

Из определения мягкой оболочки следует, что оболочка сопротивляется только растяжению. Поэтому внутренние силы, действующие на треугольник  $Q_1Q_2Q_3$ , должны быть направлены от треугольника  $Q_1Q_2Q_3$ . Отсюда следует, что неотрицательно скалярное произведение силы  $T_{Q_1Q_3}$  и вектора  $\mathbf{n}_{Q_1Q_3}$ , лежащего в касательной плоскости поверхности  $S$ , ортогонального  $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_3$  и направленного от треугольника  $Q_1Q_2Q_3$ :

$$(\mathbf{T}_{Q_1Q_3}, \mathbf{n}_{Q_1Q_3}) \geq 0, \quad (4.19)$$

$$\mathbf{n}_{Q_1 Q_3} = [\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_3; \mathbf{n}] = \frac{1}{\sqrt{A}} \left[ R_1 dx^1 + R_2 dx^2, [R_1, R_2] \right].$$

По формуле для двойного векторного произведения

$$\mathbf{n}_{Q_1 Q_3} = \frac{1}{\sqrt{A}} \left[ R_1 (A_{12} dx^1 + A_{22} dx^2) - R_2 (A_{11} dx^1 + A_{12} dx^2) \right].$$

Отсюда и из (4.18), (4.19) получаем неравенства

$$\begin{aligned} & \left( (T^{1i} dx^2 - T^{2i} dx^1) R_i, R_1 (A_{12} dx^1 + A_{22} dx^2) - \right. \\ & \left. - R_2 (A_{11} dx^1 + A_{12} dx^2) \right) \geq 0, \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} & (T^{11} dx^2 - T^{21} dx^1) \left[ A_{11} (A_{12} dx^1 + A_{22} dx^2) - A_{12} (A_{11} dx^1 + A_{12} dx^2) \right] + \\ & + (T^{12} dx^2 - T^{22} dx^1) \left[ A_{12} (A_{12} dx^1 + A_{22} dx^2) - A_{22} (A_{11} dx^1 + A_{12} dx^2) \right] \\ & \geq 0, \end{aligned}$$

$$A \left[ (T^{11} dx^2 - T^{21} dx^1) dx^2 - (T^{12} dx^2 - T^{22} dx^1) dx^1 \right] \geq 0,$$

$$T^{22} (dx^1)^2 - 2T^{12} dx^1 dx^2 + T^{11} (dx^2)^2 \geq 0.$$

Здесь использовано равенство  $T^{12} = T^{21}$ . Неравенство (4.20) должно выполняться для любой кривой  $\zeta$ , то есть для всех  $dx^1, dx^2$ . Поэтому определитель квадратичной формы неотрицателен, а старшие коэффициенты неотрицательны. Получаем неравенства

$$T^{11} T^{22} - (T^{12})^2 \geq 0, \quad T^{11} \geq 0, \quad T^{22} \geq 0. \quad (4.21)$$

Таким образом, равновесие двухосной области описывается уравнениями и неравенствами (4.10), (4.16), (4.21).

## 4.5. Уравнения равновесия одноосной области

В одноосной области оболочка натянута вдоль нитей. Поэтому, если вектор  $\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_3$  направлен по нити, то сила  $\mathbf{T}_{Q_1 Q_3}$  равна нулю. Из (3.2), (3.3) следует, что вектор  $\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_3$  направлен по нити, если

$$dx^1 : dx^2 = \delta x^1 : \delta x^2 = -(A_{12} - A_{12}^\circ) : (A_{11} - A_{11}^\circ).$$

Из равенств (4.17), (4.18) следует, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{T}_{Q_1 Q_3} = 0, \quad \mathbf{T} dL + \dots = 0, \\ & (T^{1i} dx^2 - T^{2i} dx^1) \sqrt{A} R_i = 0. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Отсюда получаем скалярные уравнения для усилий в одноосной области:

$$\begin{aligned} 1) \quad & (A_{11} - A_{11}^{\circ}) T^{11} + (A_{12} - A_{12}^{\circ}) T^{21} = 0, \\ & (A_{11} - A_{11}^{\circ}) T^{12} + (A_{12} - A_{12}^{\circ}) T^{22} = 0, \\ & A_{11} - A_{11}^{\circ} \neq 0; \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$2) \quad T^{12} - T^{21} = 0, \quad T^{22} = 0, \quad A_{11} - A_{11}^{\circ} = 0.$$

Здесь используется тот факт, что при  $\delta x^2 = 0$   $A_{11} = A_{11}^{\circ}$ .

**Утверждение 4.1.** Система (4.23) эквивалентна системе уравнений

$$\begin{aligned} T^{11}T^{22} - (T^{12})^2 &= 0, \\ (A_{ij} - A_{ij}^{\circ}) T^{ij} &= 0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

*Доказательство.* 1. Пусть выполняются уравнения (4.23). Покажем, что справедливы уравнения (4.24).

1а) Пусть  $A_{11} \neq A_{11}^{\circ}$ ,  $A_{12} \neq A_{12}^{\circ}$ . Тогда из (3.3) следует, что  $A_{22} \neq A_{22}^{\circ}$ . Выразим из уравнений (4.23)  $T^{11}$ ,  $T^{22}$  и перемножим их. Получим первое равенство (4.24).

Подставим во второе равенство (4.23) вместо  $A_{12} - A_{12}^{\circ}$  его выражение из (3.3):

$$A_{12} - A_{12}^{\circ} = \frac{(A_{11} - A_{11}^{\circ})(A_{22} - A_{22}^{\circ})}{A_{12} - A_{12}^{\circ}}.$$

Получим

$$T^{12}(A_{12} - A_{12}^{\circ}) + T^{22}(A_{22} - A_{22}^{\circ}) = 0. \quad (4.25)$$

Сложим (4.25) с первым уравнением (4.23). Получим второе уравнение (4.24). Таким образом получили систему (4.24).

1б) Пусть  $A_{11} \neq A_{11}^{\circ}$ ,  $A_{12} = A_{12}^{\circ}$ . Тогда из (3.3), (4.23) следуют равенства  $A_{22} = A_{22}^{\circ}$ ,  $T^{11} = 0$ ,  $T^{12} - T^{21} = 0$ , и значит справедливы уравнения (4.24).

1в) Пусть  $A_{11} = A_{11}^{\circ}$ . Тогда из (4.23) следует, что справедливы уравнения (4.24).

2. Пусть выполняются уравнения (4.24). Покажем, что выполняются уравнения (4.23).

2а) Пусть  $T^{11} = 0$ . Тогда из (4.24) следуют равенства  $T^{12} = 0$ ,  $(A_{22} - A_{22}^{\circ}) T^{22} = 0$ .

2а1) Пусть  $A_{22} = A_{22}^{\circ}$ . Тогда из (3.3), (3.4) следует, что  $A_{12} = A_{12}^{\circ}$ ,  $A_{11} \neq A_{11}^{\circ}$ , и уравнения (4.23) выполняются.

2а2) Пусть  $T^{22} = 0$ . Тогда  $T^{ij} = 0$  ( $i, j=1,2$ ) и уравнения (4.23) выполняются.

2б) Пусть  $T^{11} \neq 0$ . Тогда из (4.24) следует формула

$$T^{22} = \frac{(T^{12})^2}{T^{11}}. \quad (4.26)$$

Подставим это выражение во второе уравнение (4.24). Получим

$$(A_{11} - A_{11}^c)(T^{11})^2 + 2(A_{12} - A_{12}^c)T^{11}T^{12} + (A_{22} - A_{22}^c)(T^{12})^2 = 0. \quad (4.27)$$

2б1) Пусть  $A_{11} = A_{11}^c$ . Тогда из (3.3), (3.4), (4.26), (4.27) следует, что  $A_{12} = A_{12}^c$ ,  $A_{22} \neq A_{22}^c$ ,  $T^{12} = T^{22} = 0$  и уравнения (4.23) выполняются.

2б2) Пусть  $A_{11} \neq A_{11}^c$ . Тогда из (3.3) следует формула  $A_{22} - A_{22}^c = (A_{12} - A_{12}^c)^2 / (A_{11} - A_{11}^c)$ . Подставим это выражение в (4.27). Получим

$$\begin{aligned} & (A_{11} - A_{11}^c)^2(T^{11})^2 + 2(A_{11} - A_{11}^c)(A_{12} - A_{12}^c)T^{11}T^{12} + \\ & + (A_{12} - A_{12}^c)^2(T^{12})^2 = 0, \\ & (A_{11} - A_{11}^c)T^{11} + (A_{12} - A_{12}^c)T^{12} = 0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Получили первое уравнение (4.23). Вычислим левую часть второго уравнения (4.23), используя (4.26), (4.28):

$$\begin{aligned} & (A_{11} - A_{11}^c)T^{12} + (A_{12} - A_{12}^c)T^{22} = \\ & = \frac{T^{12}}{T^{11}} \left[ (A_{11} - A_{11}^c)T^{11} + (A_{12} - A_{12}^c)T^{12} \right] = 0. \end{aligned}$$

Получили, что второе уравнение (4.23) выполняется.

Таким образом, система (4.23) эквивалентна системе (4.24). Утверждение 4.1 доказано.

Если вектор  $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_3$  направлен не по нити, то сила  $\mathbf{T}_{Q_1Q_3}$ , на него действующая, должна быть направлена от треугольника  $Q_1Q_2Q_3$ . Отсюда (так же, как в двухосной области) следует, что для всех направлений  $dx^1 : dx^2$  должно выполняться неравенство

$$T^{22}(dx^1)^2 - 2T^{12}dx^1dx^2 + T^{11}(dx^2)^2 \geq 0.$$

Так как определитель квадратичной формы равен нулю, то для усилий в одноосной области получаем неравенства

$$T^{11} \geq 0, \quad T^{22} \geq 0. \quad (4.29)$$

Таким образом, равновесие одноосной области описывается уравнениями и неравенствами (4.10), (4.16), (4.24), (4.29).

## 4.6. Уравнения равновесия нулевой области

Так как в нулевой области длины почти всех кривых меньше длин их прообразов, то в нулевой области оболочка не натягута и усилия равны нулю:

$$T^{ij} = 0, \quad i, j=1,2. \quad (4.30)$$

Отсюда и из уравнений равновесия (4.10) следует, что внешние силы, действующие на нульосную область, равны нулю:

$$F^j = 0, \quad j = \overline{1,3}. \quad (4.31)$$

Рассмотрим условия, которым должны удовлетворять силы на границах между областями разных типов. Так как силы, действующие на элемент поверхности, пропорциональны площади этого элемента, то в уравнения на границах не входят внешние силы, а только силы внутренние: внутренние силы, действующие на границу в областях разного типа, должны быть равны. Отсюда и из (4.18) следует векторное уравнение, справедливое в точках границы между  $I$ -осной и  $J$ -осной областями ( $I, J = 0, 1, 2; I \neq J$ ):

$$\mathbf{T}_{(I)} - \mathbf{T}_{(J)}: \quad (4.32)$$

$$\left[ \left( T^{1i} \frac{dx^2}{d\eta} - T^{2i} \frac{dx^1}{d\eta} \right) \sqrt{A} \mathbf{R}_i \right]_{(I)} - \left[ \left( T^{1i} \frac{dx^2}{d\eta} - T^{2i} \frac{dx^1}{d\eta} \right) \sqrt{A} \mathbf{R}_i \right]_{(J)}.$$

Здесь  $\mathbf{T}_{(I)}$ ,  $\mathbf{T}_{(J)}$  — внутренние силы, действующие на единицу длины границы в  $I$ -осной и в  $J$ -осной областях. Уравнения границы имеют вид

$$x^i = x^i(\eta) \quad i = \overline{1,2}.$$

$\eta$  — параметр границы. Векторное уравнение (4.32) эквивалентно двум скалярным. Рассмотрим их отдельно для областей разного типа.

#### 4.7. Условия равновесия на границе между двухосной и одноосной областями

**Граница совпадает с нитью.**

Если граница между двухосной и одноосной областями совпадает с нитью, то сила, действующая на границу, равна нулю, и из (4.32) следует уравнение

$$\left[ \left( T^{1i} \frac{dx^2}{d\eta} - T^{2i} \frac{dx^1}{d\eta} \right) \sqrt{A} \mathbf{R}_i \right]_{(2)} = 0. \quad (4.33)$$

Равенство нулю силы, действующей на границу в одноосной области, следует из уравнений (4.22) равновесия для одноосной области.

Проектируя равенство (4.33) на векторы  $(\mathbf{R}_1)_{(2)}$ ,  $(\mathbf{R}_2)_{(2)}$ , получим два скалярных уравнения, справедливых в точках границы:

$$\left( T^{1i} \frac{dx^2}{d\eta} - T^{2i} \frac{dx^1}{d\eta} \right)_{(2)} = 0, \quad i = \overline{1,2}. \quad (4.34)$$



### Граница не совпадает с нитью.

Если на границу действует сила, отличная от нуля, то вектор  $\mathbf{T}_{(1)}$  (внутренняя сила, действующая на единицу длины границы в одноосной области) трансверсален границе, так как он направлен по нити. Поэтому на границе справедливы равенства

$$\mathbf{T}_{(1)} = \mathbf{T}_{(2)}, \quad \left(\frac{dR}{d\eta}\right)_{(1)} = \left(\frac{dR}{d\eta}\right)_{(2)}.$$

Второе равенство выполняется на границе между областями любого типа, так как поверхность  $S$  непрерывна. Вектор  $\mathbf{T}_{(1)}$  ( $-\mathbf{T}_{(2)}$ ) трансверсален границе, поэтому на границе непрерывны координатные векторы:

$$(\mathbf{R}_i)_{(1)} = (\mathbf{R}_i)_{(2)}, \quad (A_{ij})_{(1)} = (A_{ij})_{(2)}, \quad i, j = 1, 2. \quad (4.35)$$

Получили, что в точках границы поверхность  $S$  гладкая. Равенство (4.32) можно записать в виде

$$\left(T^{1i} \frac{dx^2}{d\eta} - T^{2i} \frac{dx^1}{d\eta}\right)_{(1)} \mathbf{R}_i - \left(T^{1i} \frac{dx^2}{d\eta} - T^{2i} \frac{dx^1}{d\eta}\right)_{(2)} \mathbf{R}_i.$$

Проектируя равенство на векторы  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ , получим скалярные уравнения, справедливые в точках границы:

$$\left(T^{1i} \frac{dx^2}{d\eta} - T^{2i} \frac{dx^1}{d\eta}\right)_{(1)} = \left(T^{1i} \frac{dx^2}{d\eta} - T^{2i} \frac{dx^1}{d\eta}\right)_{(2)}, \quad i = 1, 2. \quad (4.36)$$

Если сила, действующая на границу, равна нулю, то справедливы равенства

$$\left[\left(T^{1i} \frac{dx^2}{d\eta} - T^{2i} \frac{dx^1}{d\eta}\right) \sqrt{A} \mathbf{R}_i\right]_{(I)} = 0, \quad I=1, 2.$$

Проектируя силы на  $(\mathbf{R}_i)_{(I)}$ , получим

$$\left(T^{1i} \frac{dx^2}{d\eta} - T^{2i} \frac{dx^1}{d\eta}\right)_{(I)} = 0, \quad I = 1, 2; \quad i = 1, 2.$$

Таким образом, равенство (4.36) в этом случае тоже выполняется. Поэтому условие на границе можно записать в виде (4.36), добавив (4.35), если сила отлична от нуля.

### 4.8. Условия равновесия на границе между двухосной и нульосной областями

Сила, действующая на границу в нульосной области, равна нулю. Поэтому из (4.32) следует векторное равенство

$$\left[\left(T^{1i} \frac{dx^2}{d\eta} - T^{2i} \frac{dx^1}{d\eta}\right) \mathbf{R}_i\right]_{(2)} = 0,$$

которое эквивалентно двум скалярным

$$\left(T^{1i} \frac{dx^2}{d\eta} - T^{2i} \frac{dx^1}{d\eta}\right)_{(2)} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (4.37)$$

#### 4.9. Условия равновесия на границе между одноосной и нульосной областями

Сила, действующая на границу в нульосной области, равна нулю. Поэтому на границе должно выполняться векторное равенство

$$\left[\left(T^{1i} \frac{dx^2}{d\eta} - T^{2i} \frac{dx^1}{d\eta}\right) R_i\right]_{(1)} = 0. \quad (4.38)$$

Рассмотрим два случая.

##### Граница совпадает с нитью.

В этом случае равенство (4.38) обращается в тождество  $0 = 0$ , так как (4.38) следует из (4.22).

##### Граница не совпадает с нитью.

В этом случае, из (4.22), (4.38) следует система скалярных уравнений, справедливых в точках границы:

$$\begin{aligned} (T^{1i})_{(1)} \frac{dx^2}{d\eta} - (T^{2i})_{(1)} \frac{dx^1}{d\eta} &= 0, \\ (T^{1i})_{(1)} \frac{df^2}{d\xi} - (T^{2i})_{(1)} \frac{df^1}{d\xi} &= 0, \quad i=1, 2. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Здесь приняты следующие обозначения уравнений нити:  $x^1 = f^1(\xi)$ ,  $x^2 = f^2(\xi)$  (чтобы отличить уравнения нити от уравнений границы).

Так как граница не совпадает с нитью, то

$$\frac{dx^1}{d\eta} : \frac{dx^2}{d\eta} \neq \frac{df^1}{d\xi} : \frac{df^2}{d\xi},$$

определитель системы (4.39) относительно  $(T^{1i})_{(1)}$ ,  $(T^{2i})_{(1)}$  не равен нулю, и значит в точках границы справедливы равенства

$$(T^{ij})_{(1)} = 0, \quad i, j = 1, 2. \quad (4.40)$$

## 4.10. Замечания

*Замечание 4.1.* В [4] определение двухосной и одноосной областей дано через условие на напряженное состояние оболочки. Определения в [4] и в этой книге не эквивалентны. Однако результат расчета оболочки один и тот же и от принятой терминологии не зависит.

*Замечание 4.2.* При выводе уравнений равновесия мягкой оболочки предполагалось, что внешние силы, действующие на оболочку, являются *поверхностными силами*. Это означает, что при стремлении площади области к нулю внешняя сила, действующая на область, стремится к нулю. При таких внешних силах поверхность  $S$  в каждой области (двухосной, одноосной, нульосной) является гладкой поверхностью: радиус-вектор поверхности имеет вторые производные по координатам  $x^1, x^2$ .

Если на мягкую оболочку действуют сосредоточенные силы, то на множестве точек приложения этих сил поверхность  $S$  имеет излом, позволяющий внутренним силам уравновесить действие сосредоточенных сил. Примеры такого излома имеют место в задачах, рассмотренных в главе 2 (§ 19, § 20) и в главе 5 (§ 54). Изломы поверхности  $S$  в этих задачах вызваны условиями закрепления оболочки. Внешними сосредоточенными силами являются *реакции внешних связей* (силы воздействия на оболочку стенок сосуда, к которым прикреплена оболочка).

Об изломах поверхности  $S$  на границах между областями разных типов смотрите в замечании 3.3.

*Замечание 4.3.* На границах между областями разных типов возможен разрыв усилий. Условия равновесия на границах обеспечивают непрерывность только силы, действующей на границу, то есть непрерывность двух линейных комбинаций трех функций  $T^{11}, T^{12} - T^{21}, T^{22}$ . Примеры такого разрыва усилий имеют место в задачах, рассмотренных в главе 3 (§ 34) и в главе 4 (§ 44, § 45, § 47).

## §5. Математическая модель мягкой оболочки

Поверхность мягкой оболочки состоит из областей трех типов: двухосных, одноосных, нульосных. Напишем в виде системы уравнения и неравенства, полученные в § 4, § 5.

### 5.1. Двухосная область

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\sqrt{A}} \frac{\partial(\sqrt{A} T^{ij})}{\partial x^i} + \Gamma_{ik}^j T^{ik} = F^j, \quad j = 1, 2; \\
 & B_{ij} T^{ij} = F^3, \\
 & T^{12} = T^{21}, \\
 & A_{ij} = A_{ij}^{\circ}, \quad i, j = 1, 2; \\
 & T^{11} T^{22} - (T^{12})^2 \geq 0, \quad T^{11} \geq 0, \quad T^{22} \geq 0.
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

### 5.2. Одноосная область

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\sqrt{A}} \frac{\partial(\sqrt{A} T^{ij})}{\partial x^i} + \Gamma_{ik}^j T^{ik} = F^j, \quad j=1, 2, \\
 & B_{ij} T^{ij} = F^3, \\
 & T^{12} = T^{21}, \\
 & T^{11} T^{22} - (T^{12})^2 = 0, \\
 & (A_{ij} - A_{ij}^{\circ}) T^{ij} = 0, \\
 & (A_{11} - A_{11}^{\circ})(A_{22} - A_{22}^{\circ}) - (A_{12} - A_{12}^{\circ})^2 = 0, \\
 & T^{11} \geq 0, \quad T^{22} \geq 0.
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Для почти всех точек одноосной области справедлива совокупность неравенств

$$\begin{cases} A_{11} - A_{11}^{\circ} < 0, \\ A_{22} - A_{22}^{\circ} < 0. \end{cases} \tag{5.3}$$

### 5.3. Нульосная область

$$T^{ij} = 0, \quad F^k = 0, \quad i, j = 1, 2, \quad k = \overline{1, 3}. \tag{5.4}$$

Для почти всех точек нульосной области справедливы неравенства

$$\begin{aligned}
 & (A_{11} - A_{11}^{\circ})(A_{22} - A_{22}^{\circ}) - (A_{12} - A_{12}^{\circ})^2 > 0, \\
 & A_{11} - A_{11}^{\circ} < 0, \quad A_{22} - A_{22}^{\circ} < 0.
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Напишем равенства, которые должны выполняться в точках границы между областями разных типов. Уравнения границы напишем в виде

$$x^i = x^i(\eta), \quad i = 1, 2.$$

Из непрерывности поверхности  $S$  следует, что на границе между  $I$ -й и  $J$ -й областями выполняется векторное равенство

$$[\mathbf{R}_{(I)} - \mathbf{R}_{(J)}](x^1(\eta), x^2(\eta)) = 0. \quad (5.6)$$

#### 5.4. Граница между двухосной и одноосной областями

**Граница совпадает с нитью.**

$$\begin{aligned} \left( T^{1i} \frac{dx^2}{d\eta} - T^{2i} \frac{dx^1}{d\eta} \right)_{(2)} &= 0, \quad i=1,2, \quad (5.7) \\ [(A_{ij})_{(1)} - (A_{ij})_{(2)}] \frac{dx^i}{d\eta} \frac{dx^j}{d\eta} &= 0, \\ [(A_{ij})_{(1)} - (A_{ij}^0)_{(1)}] \frac{dx^i}{d\eta} \frac{dx^j}{d\eta} &= 0. \end{aligned}$$

**Граница не совпадает с нитью.**

$$\begin{aligned} \left( T^{1i} \frac{dx^2}{d\eta} - T^{2i} \frac{dx^1}{d\eta} \right)_{(1)} - \left( T^{1i} \frac{dx^2}{d\eta} - T^{2i} \frac{dx^1}{d\eta} \right)_{(2)}, \quad i=1,2; \quad (5.8) \\ (A_{ij})_{(1)} - A_{ij}^0 - (A_{ij})_{(2)}, \quad i,j=1,2. \end{aligned}$$

Если внутренняя сила, действующая на границу, отлична от нуля, то есть если

$$\left( T^{1i} \frac{dx^2}{d\eta} - T^{2i} \frac{dx^1}{d\eta} \right) \left( T^{1j} \frac{dx^2}{d\eta} - T^{2j} \frac{dx^1}{d\eta} \right) A_{ij} \neq 0 \quad (5.9)$$

в точках границы, то

$$(\mathbf{R}_i)_{(1)} - (\mathbf{R}_i)_{(2)}, \quad i=1,2. \quad (5.10)$$

В (5.9) можно брать как функции одноосной области, так и функции двухосной области, так как справедливы равенства (5.8).

#### 5.5. Граница между двухосной и пульсозной областями

$$\begin{aligned} \left( T^{1i} \frac{dx^2}{d\eta} - T^{2i} \frac{dx^1}{d\eta} \right)_{(2)} &= 0, \quad i=1,2, \quad (5.11) \\ [(A_{ij})_{(0)} - (A_{ij})_{(2)}] \frac{dx^i}{d\eta} \frac{dx^j}{d\eta} &= 0. \end{aligned}$$

## 5.6. Граница между одноосной и нульосной областями

Граница совпадает с нитью.

$$[(A_{ij})_{(0)} - (A_{ij})_{(1)}] \frac{dx^i}{d\eta} \frac{dx^j}{d\eta} = 0. \quad (5.12)$$

Граница не совпадает с нитью.

$$(T^{ij})_{(1)} = 0, \quad i, j=1, 2, \quad (5.13)$$

$$[(A_{ij})_{(0)} - (A_{ij})_{(1)}] \frac{dx^i}{d\eta} \frac{dx^j}{d\eta} = 0.$$

**Определение 5.1.** Система уравнений и неравенств (5.1)–(5.13) называется *математической моделью мягкой оболочки* при равновесии.

## 5.7. Замечания

*Замечание 5.1.* На границах между областями разных типов возможен излом поверхности  $S$  и разрыв усилий (смотрите замечания 3.3, 4.2, 4.3).

*Замечание 5.2.* При решении задачи равновесия мягкой оболочки к системе (5.1)–(5.13) добавляются условия, сформулированные в постановке задачи. Например, в задачах, рассмотренных в главах 2–5, в задаче известен вид оболочки до деформации (поверхность  $S^\circ$ ), известен контур крепления оболочки, известен объем жидкости. Внешняя сила является гидростатическим давлением, известным с точностью до одной постоянной.

*Замечание 5.3.* Равенства (5.7), (5.8), (5.11), (5.13), связывающие коэффициенты  $(A_{ij})_{(T)}$ ,  $(A_{ij})_{(T)}$  на границе, следуют из векторного уравнения (5.6), обеспечивающего непрерывность поверхности  $S$ .

## §6. Нити в одноосной области и геодезические линии

**Теорема 6.1** (Финстервальдера [19]). *Если внешние силы, действующие на одноосную область, направлены по нормали к поверх-*

ности и усилие нитей отлично от нуля, то нити являются геодезическими линиями поверхности  $S$ , а их прообразы являются геодезическими линиями поверхности  $S^\circ$ .

*Доказательство.* Пусть  $Q$  — внутренняя точка одноосной области. Выберем в окрестности точки  $Q$  систему координат так, чтобы кривая  $x^1$  была направлена по нити  $\xi$ , а кривая  $x^2$  была ортогональна нити в точке  $Q$ . Тогда из (2.2), (2.5), (3.2)–(3.4), (5.2) следует, что в точке  $Q$  выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} x^1 = \xi, \quad A_{11} = A_{11}^0, \quad A_{12} = 0, \quad A_{12}^0 = A_{12} = 0, \quad A_{22} \neq A_{22}^0, \quad (6.1) \\ A = A_{11}A_{22} > 0, \quad T^{11} > 0, \quad T^{12} = T^{21} = 0, \quad T^{22} = 0. \end{aligned}$$

По условию теоремы внешние силы ортогональны поверхности  $S$ . Поэтому

$$F^1 = F^2 = 0. \quad (6.2)$$

Рассмотрим первое уравнение (5.2) при  $j = 2$ , учитывая соотношения (6.1), (6.2):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{A}} \frac{\partial(\sqrt{A} T^{i2})}{\partial x^i} + \Gamma_{ik}^2 T^{ik} = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{A}} \left[ \frac{\partial(\sqrt{A} T^{12})}{\partial x^1} + \frac{\partial(\sqrt{A} T^{22})}{\partial x^2} \right] + \Gamma_{11}^2 T^{11} + 2\Gamma_{12}^2 T^{12} + \Gamma_{22}^2 T^{22} = 0, \\ \Gamma_{11}^2 T^{11} = 0, \\ \Gamma_{11}^2 = 0. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Одним из признаков геодезической линии (геодезической кривой) является совпадение главной нормали кривой с нормалью поверхности [8].

**Определение 6.1.** *Соприкасающейся плоскостью* кривой  $x^1$  называется плоскость, проходящая через векторы  $R_1$  и  $R_{11}$ .

*Главной нормалью* кривой называется нормаль, лежащая в соприкасающейся плоскости кривой.

Обозначим главную нормаль нити через  $\mathbf{N}$ . Тогда

$$\mathbf{N} = C_1 R_1 + C_2 R_{11}, \quad (\mathbf{N}, R_1) = 0. \quad (6.4)$$

Здесь  $C_1, C_2$  — скаляры. В выбранной системе координат векторы  $R_1, R_2, \mathbf{n}$  взаимно ортогональны. Отсюда и из (2.6), (6.4) следует, что векторы, направленные по главной нормали нити, имеют вид

$$\mathbf{N} = C(\Gamma_{11}^2 R_2 + B_{11} \mathbf{n}), \quad (6.5)$$

где  $\Gamma_{11}^2$  — символ Кристоффеля второго рода,  $B_{11}$  — коэффициент второй квадратичной формы поверхности  $S$ .  $C \neq 0$  — произвольная

постоянная. Из (6.3), (6.5) следует равенство

$$\mathbf{N} = CB_{11}\mathbf{n}.$$

Получили, что главная нормаль нити направлена по нормали к поверхности  $S$ , и значит нить является геодезической линией поверхности  $S$ .

Рассмотрим теперь прообраз нити на поверхности  $S^\circ$  — кривую  $\xi^\circ$ . Из (2.7), (6.1), (6.3) следуют равенства

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^{2^\circ} &= \frac{A^{2t^\circ}}{2} \left[ 2 \frac{\partial A_{11}^\circ}{\partial x^1} - \frac{\partial A_{11}^\circ}{\partial x^l} \right] - \\ &= \frac{A_{11}^\circ}{2A^\circ} \left[ 2 \frac{\partial A_{21}^\circ}{\partial x^1} - \frac{\partial A_{11}^\circ}{\partial x^2} \right] - \\ &= -\frac{A_{11}}{2A^\circ} \frac{\partial A_{11}}{\partial x^2} - \frac{A}{A^\circ} \Gamma_{11}^2 = 0. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Получили, что  $\Gamma_{11}^{2^\circ} = 0$ . Исходя из этой формулы, используя ортогональность векторов  $R_1^\circ$ ,  $R_2^\circ$ ,  $\mathbf{n}^\circ$ , можно доказать (так же, как для поверхности  $S$ ), что кривая  $\xi^\circ$  является геодезической линией поверхности  $S^\circ$ . Теорема 6.1 доказана.

Геодезическая линия обладает следующим экстремальным свойством [8]: длина дуги геодезической линии между двумя (достаточно близкими) точками меньше длины дуги любой кривой поверхности, соединяющей эти точки.

Для любой точки гладкой поверхности существует единственная геодезическая линия, проходящая через эту точку по заданному направлению [8]. Направление в точке задается значениями  $dx^1/d\xi$ ,  $dx^2/d\xi$  в этой точке.

Известно, что геодезическими линиями плоскости являются прямые линии, геодезическими линиями сферы являются окружности больших кругов [8].

## §7. Плоская задача равновесия

Рассмотрим задачу равновесия мягкой оболочки при следующих предположениях:

1) Поверхности  $S$ ,  $S^\circ$  являются бесконечными цилиндрическими поверхностями с образующими, параллельными оси  $Y$  трехмерного пространства с декартовой системой координат  $XYZ$ .

2) Образующие поверхности  $S^\circ$  являются прообразами образующих поверхности  $S$ . Точка поверхности  $S$  и ее прообраз, принадлежащий поверхности  $S^\circ$ , лежат на одной плоскости, параллельной плоскости  $XZ$ .



3) Оболочка испытывает напряжение только вдоль кривых, лежащих в плоскостях, параллельных плоскости  $XZ$ . Усилие оболочки не зависит от координаты  $Y$ .

4) Внешние силы, действующие на поверхность  $S$ , параллельны плоскости  $XZ$  и не зависят от  $Y$ .

## 7.1. Геометрические характеристики поверхностей $S$ и $S^\circ$

Примем за координаты на поверхности  $S^\circ$  переменные  $\zeta^\circ$  и  $Y$ :  $\zeta^\circ$  — параметр кривой пересечения  $S^\circ$  с плоскостью  $XZ$ ,  $Y$  — вторая координата точки поверхности  $S^\circ$  в пространстве  $XYZ$ . Система координат  $\zeta^\circ, Y$  переходит при деформации оболочки в систему координат  $\zeta$  и  $Y$  на поверхности  $S$ :  $\zeta$  — параметр кривой пересечения  $S$  с плоскостью  $XZ$ ,  $Y$  — вторая координата точки поверхности  $S$  в пространстве  $XYZ$ ,  $\zeta = \zeta^\circ$ .

Уравнения поверхностей  $S, S^\circ$  запишем в виде

$$R = R(\zeta, Y) = \widehat{R}(\zeta) + Y\mathbf{e}, \quad R^\circ = R^\circ(\zeta, Y) = \widehat{R}^\circ(\zeta) + Y\mathbf{e}, \quad (7.1)$$

где  $\mathbf{e}$  — единичный вектор оси  $Y$ , векторы  $\widehat{R}, \widehat{R}^\circ$  лежат в плоскости  $XZ$ .

Вычислим коэффициенты первых квадратичных форм поверхностей  $S$  и  $S^\circ$ . По формулам (2.2), (2.5)

$$A_{ij} = (R_i, R_j), \quad (7.2)$$

$$R_1 = \frac{\partial R}{\partial \zeta} = \frac{\partial \widehat{R}}{\partial \zeta} = \widehat{R}_\zeta, \quad R_2 = \frac{\partial R}{\partial Y} = \mathbf{e},$$

$$A_{11} = |\widehat{R}_\zeta|^2, \quad A_{12} = A_{21} = 0, \quad A_{22} = 1, \\ A = A_{11}A_{22} - A_{12}^2 = A_{11} > 0,$$

$$A_{ij}^\circ = (R_i^\circ, R_j^\circ),$$

$$R_1^\circ = \frac{\partial R^\circ}{\partial \zeta} = \frac{\partial \widehat{R}^\circ}{\partial \zeta} = \widehat{R}_\zeta^\circ, \quad R_2^\circ = \frac{\partial R^\circ}{\partial Y} = \mathbf{e},$$

$$A_{11}^\circ = |\widehat{R}_\zeta^\circ|^2, \quad A_{12}^\circ = A_{21}^\circ = 0, \quad A_{22}^\circ = 1, \\ A^\circ = A_{11}^\circ A_{22}^\circ - (A_{12}^\circ)^2 = A_{11}^\circ > 0.$$

Вычислим единичный вектор нормали к поверхности  $S$ . По формулам (2.5)

$$\mathbf{n} = \frac{[R_1, R_2]}{\sqrt{A}} = \frac{[\widehat{R}_\zeta, \mathbf{e}]}{\sqrt{A}}. \quad (7.3)$$

Вектор  $\mathbf{n}$  лежит в плоскости  $XZ$  и является единичным вектором нормали к  $\zeta$  — кривой пересечения поверхности  $S$  с плоскостью  $XZ$ .

Вычислим коэффициенты второй квадратичной формы поверхности  $S$ . По формулам (2.4)

$$B_{ij} = (\mathbf{R}_{ij}, \mathbf{n}), \quad \mathbf{R}_{ij} = \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial x^i \partial x^j}, \quad (7.4)$$

$$R_{11} = \frac{\partial^2 \hat{R}}{\partial \zeta^2} = \hat{R}_{\zeta\zeta}, \quad R_{12} = R_{21} = 0, \quad R_{22} = 0,$$

$$B_{11} = (\mathbf{R}_{11}, \mathbf{n}) = (\hat{R}_{\zeta\zeta}, \mathbf{n}), \quad B_{12} = B_{21} = 0, \quad B_{22} = 0.$$

Вычислим символы Кристоффеля второго рода для поверхности  $S$ . По формулам (2.7)

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{A^{kl}}{2} \left( \frac{\partial A_{li}}{\partial x^j} + \frac{\partial A_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial A_{ij}}{\partial x^l} \right), \quad (7.5)$$

$$A^{11} = \frac{A_{22}}{A} = \frac{1}{A},$$

$$A^{12} = A^{21} = -\frac{A_{12}}{A} = 0,$$

$$A^{22} = \frac{A_{11}}{A} = 1,$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{A^{1l}}{2} \left( \frac{\partial A_{l1}}{\partial x^1} + \frac{\partial A_{l1}}{\partial x^1} - \frac{\partial A_{11}}{\partial x^l} \right) = \\ &= \frac{A^{11}}{2} \left( \frac{\partial A_{11}}{\partial \zeta} + \frac{\partial A_{11}}{\partial \zeta} - \frac{\partial A_{11}}{\partial \zeta} \right) = \frac{A_{\zeta}}{2A}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}^1 &= \frac{A^{1l}}{2} \left( \frac{\partial A_{l1}}{\partial x^2} + \frac{\partial A_{l2}}{\partial x^1} - \frac{\partial A_{12}}{\partial x^l} \right) = \\ &= \frac{A^{11}}{2} \left( \frac{\partial A_{11}}{\partial Y} + \frac{\partial A_{12}}{\partial \zeta} - \frac{\partial A_{12}}{\partial \zeta} \right) = 0, \end{aligned}$$

$$\Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^1 = 0,$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{22}^1 &= \frac{A^{1l}}{2} \left( \frac{\partial A_{l2}}{\partial x^2} + \frac{\partial A_{l2}}{\partial x^2} - \frac{\partial A_{22}}{\partial x^l} \right) = \\ &= \frac{A^{11}}{2} \left( \frac{\partial A_{12}}{\partial Y} + \frac{\partial A_{12}}{\partial Y} - \frac{\partial A_{22}}{\partial \zeta} \right) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^2 &= \frac{A^{2l}}{2} \left( \frac{\partial A_{l1}}{\partial x^1} + \frac{\partial A_{l1}}{\partial x^1} - \frac{\partial A_{11}}{\partial x^l} \right) = \\ &= \frac{A^{22}}{2} \left( \frac{\partial A_{21}}{\partial \zeta} + \frac{\partial A_{21}}{\partial \zeta} - \frac{\partial A_{11}}{\partial Y} \right) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{12}^2 &= \frac{A^{2l}}{2} \left( \frac{\partial A_{l1}}{\partial x^2} + \frac{\partial A_{l2}}{\partial x^1} - \frac{\partial A_{12}}{\partial x^l} \right) - \\
&= \frac{A^{22}}{2} \left( \frac{\partial A_{21}}{\partial Y} + \frac{\partial A_{22}}{\partial \zeta} - \frac{\partial A_{12}}{\partial Y} \right) = 0, \\
\Gamma_{21}^2 &= \Gamma_{12}^2 = 0, \\
\Gamma_{22}^2 &= \frac{A^{2l}}{2} \left( \frac{\partial A_{l2}}{\partial x^2} + \frac{\partial A_{l2}}{\partial x^2} - \frac{\partial A_{22}}{\partial x^l} \right) - \\
&= \frac{A^{22}}{2} \left( \frac{\partial A_{22}}{\partial Y} + \frac{\partial A_{22}}{\partial Y} - \frac{\partial A_{22}}{\partial Y} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Поищем отдельно для каждой области уравнения из §5 с учетом равенств (7.1)–(7.5) и следующих равенств, следующих из предположений, сделанных в начале § 7:

$$\begin{aligned}
T^{11} &= T^{11}(\zeta), & T^{12} &= T^{21} = 0, & T^{22} &= 0, \\
F^1 &= F^1(\zeta), & F^2 &= 0, & F^3 &= F^3(\zeta).
\end{aligned} \tag{7.6}$$

## 7.2. Двухосная область

Из (5.1), (7.1)–(7.6) следуют соотношения

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{A}} \frac{d(\sqrt{A} T^{11})}{d\zeta} + \Gamma_{11}^1 T^{11} &= F^1, \\
B_{11} T^{11} = F^3, & \quad A_{11} = A_{11}^c, \quad T^{11} \geq 0.
\end{aligned} \tag{7.7}$$

Введем обозначение

$$T = \sqrt{\frac{A A_{11}}{A_{22}}} T^{11} = A T^{11}. \tag{7.8}$$

Из (7.2)–(7.8) получим уравнения и неравенства для двухосной области:

$$\begin{aligned}
\frac{T_\zeta}{A} = F^1, & \quad \frac{T}{A} (\widehat{R}_{\zeta\zeta}, \mathbf{n}) = F^3, & \quad T \geq 0, \\
A = A^c, & \quad A = |\widehat{R}_\zeta|^2, & \quad A^c = |\widehat{R}_\zeta^c|^2, & \quad \mathbf{n} = \frac{[\widehat{R}_\zeta, \mathbf{e}]}{\sqrt{A}}.
\end{aligned} \tag{7.9}$$

## 7.3. Одноосная область

Из постановки задачи следует, что пяти одноосной области являются образующими цилиндрической поверхности  $S$ . Поэтому  $T^{11} = 0$ . Отсюда и из (7.6) следует, что в одноосной области все усилия равны

нулю, оболочка не натянута:  $T^{ij} = 0$  ( $i, j = 1, 2$ ). Для переменной  $T$  и для внешних сил из (5.2), (7.2), (7.8) следуют равенства

$$T = 0, \quad F^k = 0, \quad k = \overline{1, 3}. \quad (7.10)$$

Для почти всех точек одноосной области справедливо неравенство

$$A < A^v, \quad A = |\widehat{R}_\zeta|^2, \quad A^v = |\widehat{R}_\zeta^v|^2. \quad (7.11)$$

## 7.4. Нульсовая область

Из постановки задачи и из определения 3.3 следует, что нульсовая область не существует, так как поверхность  $S$  состоит из образующих, изометричных своим прообразам.

Так как нити одноосной области являются образующими поверхности  $S$ , то граница между двухосной и одноосной областями тоже является образующей поверхности  $S$ . Напишем уравнение границы в виде

$$\zeta = \zeta_*. \quad (7.12)$$

Здесь  $\zeta_* = \text{const}$ . Параметром границы является переменная  $Y: \eta = Y$ . Рассмотрим условия, которые должны выполняться в точках границы.

## 7.5. Граница между двухосной и одноосной областями

Граница между областями совпадает с нитью. Поэтому справедливы уравнения (5.6), (5.7), которые в рассматриваемом случае дают равенства

$$T(\zeta_*) = 0, \quad \left[ \widehat{R}_{(1)} - \widehat{R}_{(2)} \right](\zeta_*) = 0. \quad (7.13)$$

**Определение 7.1.** Система уравнений и неравенств (7.9)–(7.13) называется *плоской задачей равновесия* мягкой оболочки.

## 7.6. Замечания

*Замечание 7.1.* Из формул (4.1), (4.2), (7.8) следует, что переменная  $T$  равна проекции силы  $T_{[1]}$  на касательный вектор  $\widehat{R}_\zeta$ :  $T = T_{[1]}$ .  $T_{[1]}$  — внутренняя сила, действующая на единицу длины образующей  $\zeta = \text{const}$ . Так как вектор  $T_{[1]}$  ортогонален образующей, то переменная  $T$  равна модулю внутренней силы  $T_{[1]}$ :  $T = |T_{[1]}|$ .

*Замечание 7.2.* Плоская кривая  $\zeta$  является пересечением поверхности  $S$  с координатной плоскостью  $XZ$  и описывается уравнением

$$\mathbf{R} = \widehat{\mathbf{R}}(\zeta). \quad (7.14)$$

Это следует из (7.1).

*Замечание 7.3.* Из уравнений (7.9)–(7.13) следует, что плоская задача равновесия мягкой оболочки эквивалентна плоской задаче равновесия гибкой, нерастяжимой (материальной) нити [6], в которой внешняя сила, действующая на единицу длины нити, равна  $\mathbf{F}$ ;

$$\mathbf{F} = -F^1 \widehat{\mathbf{R}}_1 - F^3 \mathbf{n};$$

натяжение нити равно  $T$ ; уравнение нити имеет вид (7.14).

## §8. Осесимметричная задача равновесия

Введем в пространстве  $XYZ$  цилиндрическую систему координат  $R, \varphi, Z$ . Формулы, связывающие декартовы координаты с цилиндрическими координатами, имеют вид

$$\begin{aligned} X &= R \cos \varphi, & Y &= R \sin \varphi, & (8.1) \\ R &= \sqrt{X^2 + Y^2}, & \cos \varphi &= \frac{X}{R}, & \sin \varphi &= \frac{Y}{R}. \end{aligned}$$

Рассмотрим задачу равновесия мягкой оболочки при следующих предположениях:

1) Поверхности  $S, S^0$  являются осесимметричными поверхностями с осью симметрии  $Z$ .

2) Точка поверхности  $S$  и ее прообраз, принадлежащий поверхности  $S^0$ , лежат на одной плоскости, проходящей через ось  $Z$ .

3) Проекция внутренних сил мягкой оболочки на касательные к меридианам и параллелям не зависят от  $\varphi$  (*меридиан* — кривая пересечения поверхности с плоскостью, проходящей через ось симметрии, *параллель* — кривая (окружность) пересечения поверхности с плоскостью, перпендикулярной оси симметрии).

4) Проекция на плоскость меридиана и плоскость параллели внешних сил, действующих на мягкую оболочку, не зависят от  $\varphi$  (*плоскость меридиана* — плоскость, проходящая через ось симметрии, *плоскость параллели* — плоскость, перпендикулярная оси симметрии).

## 8.1. Геометрические характеристики поверхностей $S$ и $S^\circ$

Примем за координаты на поверхности  $S^\circ$  угол  $\varphi$  и параметр  $\zeta^\circ$  меридиана поверхности  $S^\circ$ . Тогда координатами на поверхности  $S$  будут  $\varphi$  и параметр  $\zeta$  меридиана поверхности  $S$ ,

$$\zeta = \zeta^\circ.$$

Уравнения поверхностей  $S$ ,  $S^\circ$  запишем в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= R(\zeta) \cos \varphi \mathbf{e}_1 + R(\zeta) \sin \varphi \mathbf{e}_2 + Z(\zeta) \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{R}^\circ &= R^\circ(\zeta) \cos \varphi \mathbf{e}_1 + R^\circ(\zeta) \sin \varphi \mathbf{e}_2 + Z^\circ(\zeta) \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Здесь  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  — орты (единичные векторы) осей  $X, Y, Z$ ;  $R, R^\circ$  — модули проекций на плоскость параллели радиус-векторов точек поверхностей  $S, S^\circ$ .

Вычислим коэффициенты первых квадратичных форм поверхностей  $S$  и  $S^\circ$ . По формулам (2.2), (2.5)

$$A_{ij} = (R_i, R_j), \quad (8.3)$$

$$R_1 = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \zeta} = R_\zeta \cos \varphi \mathbf{e}_1 + R_\zeta \sin \varphi \mathbf{e}_2 + Z_\zeta \mathbf{e}_3,$$

$$R_2 = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \varphi} = -R \sin \varphi \mathbf{e}_1 + R \cos \varphi \mathbf{e}_2,$$

$$A_{11} = R_\zeta^2 + Z_\zeta^2, \quad A_{12} = A_{21} = 0, \quad A_{22} = R^2,$$

$$A = A_{11}A_{22} - A_{12}^2 = A_{11}A_{22} = R^2(R_\zeta^2 + Z_\zeta^2) > 0,$$

$$A_{ij}^\circ = (R_i^\circ, R_j^\circ),$$

$$R_1^\circ = \frac{\partial \mathbf{R}^\circ}{\partial \zeta} = R_\zeta^\circ \cos \varphi \mathbf{e}_1 + R_\zeta^\circ \sin \varphi \mathbf{e}_2 + Z_\zeta^\circ \mathbf{e}_3,$$

$$R_2^\circ = \frac{\partial \mathbf{R}^\circ}{\partial \varphi} = -R^\circ \sin \varphi \mathbf{e}_1 + R^\circ \cos \varphi \mathbf{e}_2,$$

$$A_{11}^\circ = (R_\zeta^\circ)^2 + (Z_\zeta^\circ)^2, \quad A_{12}^\circ = A_{21}^\circ = 0, \quad A_{22}^\circ = (R^\circ)^2,$$

$$A^\circ = A_{11}^\circ A_{22}^\circ - (A_{12}^\circ)^2 = A_{11}^\circ A_{22}^\circ = (R^\circ)^2 [(R_\zeta^\circ)^2 + (Z_\zeta^\circ)^2] > 0.$$

Вычислим единичный вектор нормали к поверхности  $S$ . По формулам (2.5)

$$\mathbf{n} = \frac{[R_1, R_2]}{\sqrt{A}} \quad (8.4)$$

$$= \frac{R}{\sqrt{A}} [R_\zeta \cos \varphi \mathbf{e}_1 + R_\zeta \sin \varphi \mathbf{e}_2 + Z_\zeta \mathbf{e}_3, -\sin \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \mathbf{e}_2] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{A_{11}}} \left( -Z_\zeta \cos \varphi \mathbf{e}_1 - Z_\zeta \sin \varphi \mathbf{e}_2 + R_\zeta \mathbf{e}_3 \right).$$

Вектор  $\mathbf{n}$  лежит в плоскости меридиана и является единичным вектором нормали к меридиану поверхности  $S$ .

Вычислим коэффициенты второй квадратичной формы поверхности  $S$ . По формулам (2.4)

$$B_{ij} = (\mathbf{R}_{ij}, \mathbf{n}), \quad \mathbf{R}_{ij} = \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial x^i \partial x^j}, \quad (8.5)$$

$$\mathbf{R}_{11} = \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial \zeta^2} = R_{\zeta\zeta} \cos \varphi \mathbf{e}_1 + R_{\zeta\zeta} \sin \varphi \mathbf{e}_2 + Z_{\zeta\zeta} \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{R}_{12} = \mathbf{R}_{21} = \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial \zeta \partial \varphi} = -R_\zeta \sin \varphi \mathbf{e}_1 + R_\zeta \cos \varphi \mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{R}_{22} = \frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial \varphi^2} = -R \cos \varphi \mathbf{e}_1 - R \sin \varphi \mathbf{e}_2,$$

$$\begin{aligned} B_{11} &= \frac{1}{\sqrt{A_{11}}} \left( R_{\zeta\zeta} \cos \varphi \mathbf{e}_1 + R_{\zeta\zeta} \sin \varphi \mathbf{e}_2 + Z_{\zeta\zeta} \mathbf{e}_3, \right. \\ &\quad \left. - Z_\zeta \cos \varphi \mathbf{e}_1 - Z_\zeta \sin \varphi \mathbf{e}_2 + R_\zeta \mathbf{e}_3 \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{A_{11}}} \left( R_\zeta Z_{\zeta\zeta} - R_{\zeta\zeta} Z_\zeta \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{12} = B_{21} &= \frac{1}{\sqrt{A_{11}}} \left( -R_\zeta \sin \varphi \mathbf{e}_1 + R_\zeta \cos \varphi \mathbf{e}_2, \right. \\ &\quad \left. - Z_\zeta \cos \varphi \mathbf{e}_1 - Z_\zeta \sin \varphi \mathbf{e}_2 + R_\zeta \mathbf{e}_3 \right) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{22} &= \frac{R}{\sqrt{A_{11}}} \left( \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2, Z_\zeta \cos \varphi \mathbf{e}_1 + Z_\zeta \sin \varphi \mathbf{e}_2 - R_\zeta \mathbf{e}_3 \right) = \\ &= -\frac{RZ_\zeta}{\sqrt{A_{11}}}. \end{aligned}$$

Вычислим символы Кристоффеля второго рода для поверхности  $S$ . По формулам (2.7)

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{A^{kl}}{2} \left( \frac{\partial A_{li}}{\partial x^j} + \frac{\partial A_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial A_{ij}}{\partial x^l} \right), \quad (8.6)$$

$$A^{11} = \frac{A_{22}}{A} = \frac{1}{A_{11}},$$

$$A^{12} = A^{21} = -\frac{A_{12}}{A} = 0,$$

$$A^{22} = \frac{A_{11}}{A} = \frac{1}{A_{22}},$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{A^{1l}}{2} \left( \frac{\partial A_{l1}}{\partial x^1} + \frac{\partial A_{l1}}{\partial x^1} - \frac{\partial A_{11}}{\partial x^l} \right) - \\
&= \frac{A^{11}}{2} \left( \frac{\partial A_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial A_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial A_{11}}{\partial x^1} \right) = \frac{(A_{11})_\zeta}{2A_{11}}, \\
\Gamma_{12}^1 &= \frac{A^{1l}}{2} \left( \frac{\partial A_{l1}}{\partial x^2} + \frac{\partial A_{l2}}{\partial x^1} - \frac{\partial A_{12}}{\partial x^l} \right) - \\
&= \frac{A^{11}}{2} \left( \frac{\partial A_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial A_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial A_{12}}{\partial x^1} \right) = 0, \\
\Gamma_{21}^1 &= \Gamma_{12}^1 = 0, \\
\Gamma_{22}^1 &= \frac{A^{1l}}{2} \left( \frac{\partial A_{l2}}{\partial x^2} + \frac{\partial A_{l2}}{\partial x^2} - \frac{\partial A_{22}}{\partial x^l} \right) - \\
&= \frac{A^{11}}{2} \left( \frac{\partial A_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial A_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial A_{22}}{\partial x^1} \right) = -\frac{(A_{22})_\zeta}{2A_{11}}, \\
\Gamma_{11}^2 &= \frac{A^{2l}}{2} \left( \frac{\partial A_{l1}}{\partial x^1} + \frac{\partial A_{l1}}{\partial x^1} - \frac{\partial A_{11}}{\partial x^l} \right) - \\
&= \frac{A^{22}}{2} \left( \frac{\partial A_{21}}{\partial x^1} + \frac{\partial A_{21}}{\partial x^1} - \frac{\partial A_{11}}{\partial x^2} \right) = 0, \\
\Gamma_{12}^2 &= \frac{A^{2l}}{2} \left( \frac{\partial A_{l1}}{\partial x^2} + \frac{\partial A_{l2}}{\partial x^1} - \frac{\partial A_{12}}{\partial x^l} \right) - \\
&= \frac{A^{22}}{2} \left( \frac{\partial A_{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial A_{22}}{\partial x^1} - \frac{\partial A_{12}}{\partial x^2} \right) = \frac{(A_{22})_\zeta}{2A_{22}}, \\
\Gamma_{21}^2 &= \Gamma_{12}^2 = \frac{(A_{22})_\zeta}{2A_{22}}, \\
\Gamma_{22}^2 &= \frac{A^{2l}}{2} \left( \frac{\partial A_{l2}}{\partial x^2} + \frac{\partial A_{l2}}{\partial x^2} - \frac{\partial A_{22}}{\partial x^l} \right) - \\
&= \frac{A^{22}}{2} \left( \frac{\partial A_{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial A_{22}}{\partial x^2} - \frac{\partial A_{22}}{\partial x^2} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Из предположений, сделанных в начале § 7, и из формул (4.1), (4.2), (4.7), (8.3) следует, что  $T^{ij}$ ,  $F^k$  зависят от переменной  $\zeta$  и не зависят от переменной  $\varphi$ :

$$T^{ij} = T^{ij}(\zeta), \quad F^k = F^k(\zeta), \quad i, j = 1, 2; \quad k = \overline{1, 3}. \quad (8.7)$$

Учитывая это, напишем уравнения из §5.



## 8.2. Двухосная область

Из (5.1), (8.3), (8.5)–(8.7) следует, что в двухосной области выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{A}} \frac{d(\sqrt{A}T^{11})}{d\zeta} + \Gamma_{11}^1 T^{11} + \Gamma_{22}^1 T^{22} &= F^1, \\ \frac{1}{\sqrt{A}} \frac{d(\sqrt{A}T^{12})}{d\zeta} + 2\Gamma_{12}^2 T^{12} &= F^2, \\ B_{11}T^{11} + B_{22}T^{22} &= F^3, \quad T^{12} = T^{21}, \\ A_{11} - A_{11}^c, \quad A_{22} - A_{22}^c, \\ T^{11}T^{22} - (T^{12})^2 &\geq 0, \quad T^{11} \geq 0, \quad T^{22} \geq 0. \end{aligned} \quad (8.8)$$

## 8.3. Одноосная область

Из (5.2), (8.3), (8.5)–(8.7) следует, что в одноосной области выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{A}} \frac{d(\sqrt{A}T^{11})}{d\zeta} + \Gamma_{11}^1 T^{11} + \Gamma_{22}^1 T^{22} &= F^1, \\ \frac{1}{\sqrt{A}} \frac{d(\sqrt{A}T^{12})}{d\zeta} + 2\Gamma_{12}^2 T^{12} &= F^2, \\ B_{11}T^{11} + B_{22}T^{22} &= F^3, \quad T^{12} = T^{21}, \\ T^{11}T^{22} - (T^{12})^2 &= 0, \quad (A_{11} - A_{11}^c) T^{11} + (A_{22} - A_{22}^c) T^{22} = 0, \\ (A_{11} - A_{11}^c)(A_{22} - A_{22}^c) &= 0, \quad T^{11} \geq 0, \quad T^{22} \geq 0. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Для почти всех значений  $\zeta$  в одноосной области справедлива совокупность неравенств

$$\begin{cases} A_{11} - A_{11}^c < 0, \\ A_{22} - A_{22}^c < 0. \end{cases}$$

Из уравнений (8.9) следует, что линиями одноосной области являются меридианы или параллели поверхности  $S$ , так как  $A_{11} - A_{11}^c = 0$  или  $A_{22} - A_{22}^c = 0$ . Рассмотрим эти случаи отдельно.

### Нити являются меридианами

В этом случае из (8.9) следуют соотношения

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{A}} \frac{d(\sqrt{A}T^{11})}{d\zeta} + \Gamma_{11}^1 T^{11} &= F^1, \quad F^2 = 0, \quad B_{11}T^{11} = F^3, \\ T^{12} = T^{21} &= 0, \quad T^{22} = 0, \quad A_{11} = A_{11}^c, \quad T^{11} \geq 0. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Для почти всех значений  $\zeta$  в одноосной области выполняется неравенство

$$A_{22} - A_{22}^{\circ} < 0. \quad (8.11)$$

### Нити являются параллелями

В этом случае из (8.9) следуют соотношения

$$\begin{aligned} \Gamma_{22}^1 T^{22} - F^1, & \quad F^2 = 0, & \quad B_{22} T^{22} - F^3, \\ T^{11} = 0, & \quad T^{12} - T^{21} = 0, & \quad A_{22} - A_{22}^{\circ}, \quad T^{22} \geq 0. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Для почти всех значений  $\zeta$  в одноосной области выполняется неравенство

$$A_{11} - A_{11}^{\circ} < 0. \quad (8.13)$$

## 8.4. Нульсовая область

Из (5.4) следуют уравнения

$$T^{ij} = 0, \quad F^k = 0, \quad i, j = 1, 2, \quad k = \overline{1, 3}. \quad (8.14)$$

Для почти всех значений  $\zeta$  в нульсовой области выполняются неравенства, следующие из (5.5):

$$A_{11} - A_{11}^{\circ} < 0, \quad A_{22} - A_{22}^{\circ} < 0. \quad (8.15)$$

Из предположений, сделанных в начале § 7, следует, что граница между областями разных типов является параллелью поверхности  $S$ . Запишем уравнение границы в виде

$$\zeta = \zeta_*. \quad (8.16)$$

Параметром границы является переменная  $\varphi$ :  $\eta = \varphi$ . Рассмотрим уравнения на границе между  $I$ -й и  $J$ -й областями. Из (5.6) следуют равенства

$$\left[ R_{(I)} - R_{(J)} \right] (\zeta_*) = 0, \quad \left[ Z_{(I)} - Z_{(J)} \right] (\zeta_*) = 0, \quad (8.17)$$

обеспечивающие непрерывность поверхности  $S$ .

## 8.5. Граница между двухосной и одноосной областями

### Граница совпадает с нитью

В этом случае нить является параллелью поверхности  $S$ . Из (5.6), (8.8), (8.12), (8.16) следуют равенства

$$(T^{11})_{(2)}(\zeta_*) = 0, \quad (T^{12})_{(2)}(\zeta_*) = 0. \quad (8.18)$$

### Граница не совпадает с нитью

В этом случае нить является меридианом поверхности  $S$ . Из (5.7), (8.3), (8.8), (8.10), (8.16) следуют равенства

$$\begin{aligned} \left[ (T^{11})_{(1)} - (T^{11})_{(2)} \right] (\zeta_*) &= 0, \\ (T^{12})_{(2)} (\zeta_*) &= 0, \quad R(\zeta_*) = R^\circ(\zeta_*). \end{aligned} \quad (8.19)$$

Если  $T^{11}(\zeta_*) \neq 0$ , то

$$\left[ (R_\zeta)_{(1)} - (R_\zeta)_{(2)} \right] (\zeta_*) = 0, \quad \left[ (Z_\zeta)_{(1)} - (Z_\zeta)_{(2)} \right] (\zeta_*) = 0, \quad (8.20)$$

Равенства (8.20) обеспечивают гладкость поверхности  $S$ .

### 8.6. Граница между двухосной и нульосной областями

Из (5.8), (8.3), (8.8), (8.16) следуют равенства

$$(T^{11})_{(2)}(\zeta_*) = 0, \quad (T^{12})_{(2)}(\zeta_*) = 0, \quad R(\zeta_*) = R^\circ(\zeta_*). \quad (8.21)$$

### 8.7. Граница между одноосной и нульосной областями

#### Граница совпадает с нитью

В этом случае нить является параллелью поверхности  $S$ . Из (5.9), (8.3), (8.12), (8.16) следует равенство

$$R(\zeta_*) = R^\circ(\zeta_*). \quad (8.22)$$

#### Граница не совпадает с нитью

В этом случае нить является меридианом поверхности  $S$ . Из (5.10), (8.3), (8.10), (8.16) следуют равенства

$$(T^{11})_{(1)}(\zeta_*) = 0, \quad [R_{(0)} - R_{(1)}](\zeta_*) = 0. \quad (8.23)$$

**Определение 8.1.** Система уравнений и неравенств (8.2)—(8.8), (8.10)—(8.23) называется *осесимметричной задачей равновесия* мягкой оболочки.

## §9. Равновесие мягкой оболочки под гидростатическим давлением

В главах 2—5 рассматривается задача равновесия мягкой оболочки под гидростатическим давлением в следующей постановке.

**Постановка задачи.** Дан замкнутый сосуд, разделенный на две полости мягкой оболочкой. Форма оболочки до деформации и способ прикрепления оболочки к твердым стенкам сосуда известны. Одна из полостей сосуда заполнена однородной жидкостью плотности  $\rho$ , другая заполнена газом под давлением  $P_0$ . Объем жидкости известен. Рассматривается равновесие такой системы в поле сил тяжести с ускорением свободного падения  $g$ . Оболочка считается невесомой. Задача состоит в определении формы равновесия оболочки  $S$  и усилий, возникающих в оболочке.

Введем в трехмерном пространстве декартову систему координат  $XYZ$  так, чтобы направление оси  $Z$  было противоположно направлению силы тяжести. На оболочку действуют жидкость и газ. Давление газа постоянно:  $P_0 = \text{const}$ . Гидростатическое давление линейно по вертикальной координате  $Z$  и известно с точностью до постоянного слагаемого  $P_1$ :

$$P_{\text{ж}} = -\rho g Z + P_1. \quad (9.1)$$

Силы давления жидкости и силы давления газа направлены по нормали к поверхности  $S$  в противоположные стороны. Поэтому внешние силы, действующие на оболочку, описываются формулами

$$\mathbf{F} = -F^3 \mathbf{n}, \quad F^1 = 0, \quad F^2 = 0, \quad F^3 = \pm \rho g (Z - D). \quad (9.2)$$

Здесь  $D$  — неизвестная постоянная,

$$D = \frac{P_1 - P_0}{\rho g}. \quad (9.3)$$

Знак плюс в (9.2) соответствует случаю, когда нормаль  $\mathbf{n}$  направлена от жидкости к газу, знак минус соответствует направлению нормали  $\mathbf{n}$  от газа к жидкости.

Рассматриваемые в главах 2—5 задачи равновесия обладают следующим *свойством симметрии* [17]: пусть система находится в равновесии; тогда, если жидкость и газ поменять местами и изменить направление силы тяжести на противоположное, то система сил, действующих на оболочку, не изменится и поверхность останется в равновесии. Это свойство вытекает из инвариантности поверхностной нагрузки (9.2) относительно одновременной замены знака  $g$  и  $(Z - D)$ .

Благодаря этому свойству решение задачи равновесия оболочки можно упростить.

В главах 2—5 задачи равновесия решаются в предположении, что оболочка не прилегает к стенкам сосуда и что вся поверхность оболочки находится под гидростатическим давлением. Первое условие накладывает ограничение на форму сосуда, очевидное после определения поверхности  $S$ . Второе условие накладывает ограничение на давление газа, так как если давление газа мало, то, как видно из формул (9.1), (9.3), давление в жидкости около оболочки может оказаться меньше давления насыщенных паров  $P_*$  (которое предполагаем известным) и около оболочки возникнет каверна. Для того чтобы исключить возможность появления каверны, будем предполагать, что давление газа в полости с газом достаточно велико, так что выполняется неравенство

$$-\rho g Z_{\max} + P_1 = -\rho g(Z_{\max} - D) + P_0 \geq P_*. \quad (9.4)$$

Здесь  $Z_{\max}$  — максимальное значение  $Z$  на поверхности  $S$ . Если  $D > -\infty$ , то написанное неравенство выполняется при достаточно большом значении  $P_0$ .

*Замечание 9.1.* Подставив в уравнения (5.4) функции  $F^k$  из (9.2), найдем, что в задачах равновесия мягкой оболочки под гидростатическим давлением нульсовая область лежит на горизонтальной плоскости  $Z = D$ .

*Замечание 9.2.* Так как давление жидкости и газа направлено по нормали к поверхности  $S$ , то из теоремы Фиштервальдера 6.1 следует: если усилие нитей в одноосной области отлично от нуля, то нити являются геодезическими линиями поверхности  $S$ , а их прообразы являются геодезическими линиями поверхности  $S^c$ .

## §10. Выводы главы 1

В § 1 дано определение мягкой оболочки. В § 2 даны формулы для геометрической поверхности в трехмерном пространстве.

Поверхность оболочки после деформации состоит из областей трех типов: двухосных, одноосных, нульсовых. Двухосные области изометричны своим прообразам на поверхности оболочки до ее деформации. Одноосные области состоят из «нитей», изометричных своим прообразам на поверхности оболочки до деформации. Кривые одноосных областей, не являющиеся «нитями», и все кривые нульсовых областей имеют длины, меньшие длин своих прообразов. В § 3 рассмотре-

ны уравнения и неравенства, связывающие геометрические величины поверхностей оболочки до деформации и после деформации.

Области на поверхности оболочки различаются по характеру деформации оболочки и, соответственно, по напряженному состоянию оболочки: оболочка испытывает усилие только вдоль кривых, сохранивших при деформации свою длину. В § 4 получены уравнения равновесия областей всех трех типов. В § 5 сделана сводка уравнений, полученных в § 3 и § 4.

В § 6 дано доказательство теоремы Финстервальдера о том, что пяти одноосной области являются при определенных условиях геодезическими линиями поверхности оболочки после деформации, а их прообразы являются геодезическими линиями поверхности оболочки до деформации.

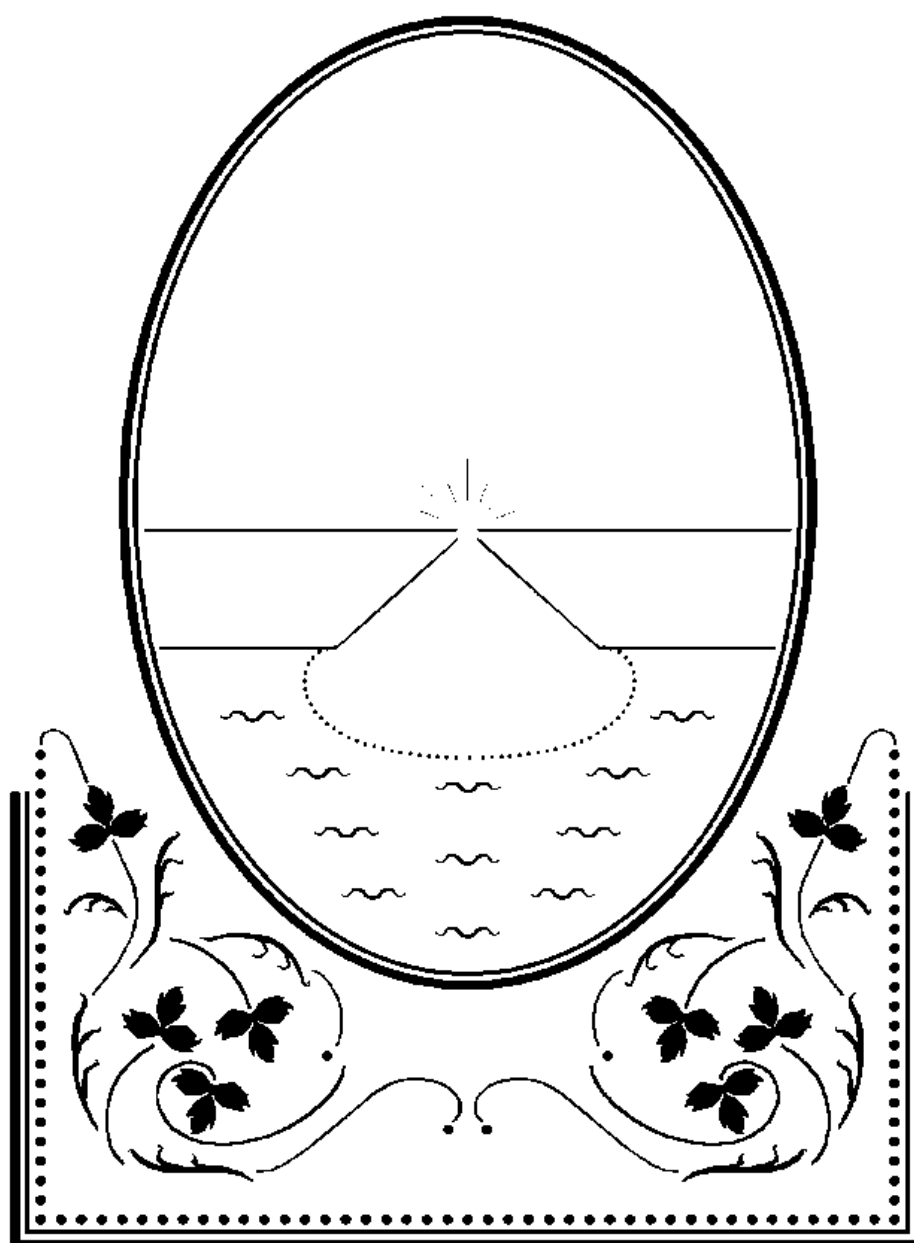
В § 7 написаны уравнения из § 5 для плоской задачи равновесия. В § 8 написаны уравнения из § 5 для осесимметричной задачи равновесия.

В § 9 сформулирована задача равновесия мягкой оболочки под гидростатическим давлением. Эта задача решается в главах 2—5 в случаях, когда до деформации оболочки имеют форму плоской полосы, кругового цилиндра, полусферы, сферического сегмента.

В главе 1 используются результаты работы [13]. В работах [4], [7] излагаются теоретические основы статики мягких оболочек. Плоская задача равновесия мягкой оболочки совпадает с плоской задачей равновесия гибкой нерастяжимой (материальной) нити [6].

## Глава 2

# Плоская задача равновесия



## §11. Постановка задачи

Рассмотрим сосуд, имеющий форму бесконечного цилиндра. Мягкая оболочка прикреплена к стенкам сосуда и разделяет его на две полости. Поверхность  $S^0$  оболочки до деформации является изгибом бесконечной полосы плоскости, ограниченной двумя параллельными прямыми. Оболочка прикреплена по своей границе. Контур крепления состоит из двух прямых, параллельных образующим бесконечного цилиндрического сосуда. Образующие сосуда и оболочки горизонтальны. Одна полость сосуда заполняется однородной жидкостью. Другая полость заполняется газом. Оболочка деформируется в поверхность  $S$ . Система находится в равновесии в поле сил тяжести. Известна площадь сечения жидкости. Известны плотность жидкости и давление газа. Оболочка считается невесомой. Требуется найти форму оболочки (поверхность  $S$ ) и усилия оболочки.

Введем в пространстве декартову систему координат  $XYZ$  так, чтобы ось  $Y$  была параллельна образующим сосуда и оболочки и границы крепления оболочки (две параллельные прямые) лежали в плоскостях  $YZ$  и  $XZ$ . Назовем *направляющими* поверхностей  $S^0$ ,  $S$  кривые пересечения поверхностей с плоскостью  $XZ$ . Обозначим длину направляющей поверхности  $S^0$  через  $C$ , концы направляющей через  $Q_1$ ,  $Q_2$ . Уравнения контура крепления оболочки в пространстве  $XYZ$  запишем в виде

$$X = 0, \quad Z = C_1 \quad \text{и} \quad X = C_2, \quad Z = 0. \quad (11.1)$$

Обозначим через  $V$  площадь области в плоскости  $XZ$ , ограниченной отрезком  $Q_1Q_2$  и мягкой оболочкой. Площадь области, лежащей левее отрезка  $Q_1Q_2$ , если двигаться от  $Q_1$  к  $Q_2$ , считаем положительной, площадь области, лежащей правее отрезка  $Q_1Q_2$ , считаем отрицательной. Величину  $V$  предполагаем известной. Также известными предполагаем следующие величины:  $C$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ , плотность жидкости  $\rho$ , ускорение свободного падения  $g$ , давление газа  $P_0$ .

Так как длина дуги кривой больше или равна расстоянию между концами дуги, то параметры  $C$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  удовлетворяют неравенству

$$C_1^2 + C_2^2 \leq C^2. \quad (11.2)$$

Максимальное значение  $|V|$  равно площади  $V^0$  кругового сегмента, ограниченного дугой длины  $C$  и хордой длины  $\sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ . Поэтому выполняется неравенство

$$|V| \leq V^0 = \frac{C^2(\alpha - \sin \alpha)}{2\alpha^2}, \quad (11.3)$$



где  $\alpha$  — единственный корень уравнения

$$\sqrt{C_1^2 + C_2^2} \alpha - 2C \sin \frac{\alpha}{2} = 0 \quad (11.4)$$

на интервале  $0 < \alpha \leq 2\pi$ .

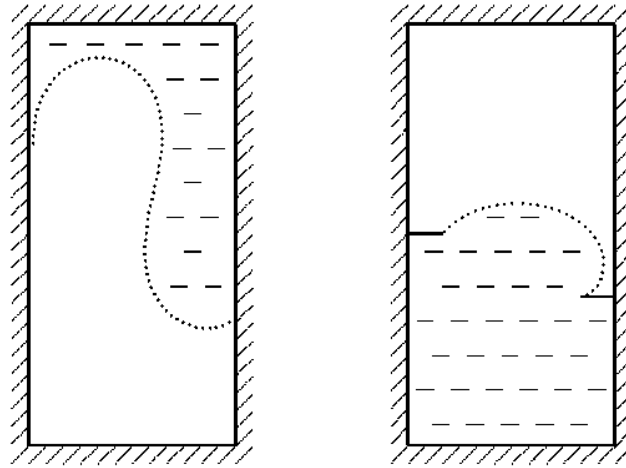


Рис. 11.1. Сечения сосудов плоскостью  $XZ$

Задача решается в предположениях, сформулированных в § 6 и в § 7, а именно:

1. Образующие поверхности  $S^\circ$  являются прообразами образующих поверхности  $S$ . Точка поверхности  $S$  и ее прообраз, принадлежащий поверхности  $S^\circ$ , лежат на одной плоскости, параллельной плоскости  $XZ$ .

2. Оболочка испытывает усилие только вдоль кривых, лежащих в плоскостях, параллельных плоскости  $XZ$ . Усилие оболочки не зависит от координаты  $Y$ .

3. Оболочка не прилегает к стенкам сосуда. Вся поверхность оболочки находится под гидростатическим давлением (около оболочки нет каверпы).

*Замечание 11.1.* На рисунке 11.1 изображены сечения сосудов плоскостью  $XZ$ .

*Замечание 11.2.* Задать площадь  $V$  и задать площадь сечения жидкости — это равносильные условия, так как сумма (разность) этих площадей не зависит от количества жидкости и равна площади области, ограниченной твердыми стенками, омываемыми жидкостью, и отрезком  $Q_1Q_2$ , если жидкость находится в верхней (нижней) полости.

## §12. Уравнения задачи равновесия

Примем за параметр направляющей поверхности  $S^0$  длину  $L^0$  дуги между точкой крепления  $Q_1$  и текущей точкой  $Q$ :

$$\zeta^0 = L^0 = | \vec{Q_1 Q} |.$$

Тогда параметр направляющей поверхности  $S$  равен  $L^0$  и справедливы равенства

$$\zeta = L^0, \quad \hat{\mathbf{R}}_1^0 = \hat{\mathbf{R}}_{L^0}^0, \quad |\hat{\mathbf{R}}_{L^0}^0| = 1, \quad A^0 = A_{11}^0 = 1. \quad (12.1)$$

Здесь  $\zeta^0, \zeta$  — параметры направляющих, использованные в § 7;  $\hat{\mathbf{R}}^0$  — радиус-вектор направляющей,  $\hat{\mathbf{R}}_1^0$  — координатный вектор, направленный по касательной к направляющей.

В рассматриваемой задаче внешними силами, действующими на мягкую оболочку, являются давление жидкости и давление газа. Внешние силы описываются формулами (9.2):

$$\mathbf{F} = -F^3 \mathbf{n}, \quad F^1 = 0, \quad F^2 = 0, \quad F^3 = \pm \rho g (Z - D), \quad (12.2)$$

$\rho$  — плотность жидкости,  $g$  — ускорение свободного падения,  $D$  — неизвестная постоянная.

Пишем уравнения и неравенства из § 7 с учетом внешних сил (12.2) и равенств (12.1). Используем следующие обозначения:  $X, Z$  — координаты точки некоей кривой (направляющей поверхности  $S$ );  $T$  — внутренняя сила оболочки, действующая на единицу длины образующей поверхности  $S$ .

### 12.1. Двухосная область

$$\begin{aligned} T_{L^0} &= 0, \quad T (X_{L^0} Z_{L^0 L^0} - X_{L^0 L^0} Z_{L^0}) = \pm \rho g (Z - D), \quad (12.3) \\ X_{L^0}^2 + Z_{L^0}^2 &= 1, \quad T \geq 0, \\ A = |\hat{\mathbf{R}}_{L^0}^0|^2 = X_{L^0}^2 + Z_{L^0}^2 &= 1, \quad \mathbf{n} = [\hat{\mathbf{R}}_{L^0}^0, \mathbf{e}] = (-Z_{L^0}, 0, X_{L^0}), \\ (\hat{\mathbf{R}}_{L^0 L^0}^0, \mathbf{n}) &= X_{L^0} Z_{L^0 L^0} - X_{L^0 L^0} Z_{L^0}. \end{aligned}$$

### 12.2. Одноосная область

$$T = 0, \quad Z = D. \quad (12.4)$$

Для почти всех значений  $L^0$  в одноосной области справедливо неравенство

$$X_{L^0}^2 + Z_{L^0}^2 < 1. \quad (12.5)$$

### 12.3. Граница между двухосной и одноосной областями

Напишем уравнение границы между двухосной и одноосной областями в виде

$$L^\circ = L_*^\circ, \quad (12.6)$$

где  $L_*^\circ = \text{const}$ . Тогда справедливо равенство

$$T(L_*^\circ) = 0. \quad (12.7)$$

### 12.4. Дополнительные условия

В задаче известен контур крепления мягкой оболочки и известна (алгебраическая) площадь  $V$  области между оболочкой и отрезком  $Q_1Q_2$ . Эти условия дают следующие уравнения для координат  $X$ ,  $Z$  точки поверхности  $S$ :

$$\begin{aligned} X(0) = 0, \quad Z(0) = C_1, \quad X(C) = C_2, \quad Z(C) = 0, \quad (12.8) \\ V = \int_0^{C_2} Z dX - \frac{1}{2} C_1 C_2 = \int_0^C X_{L^\circ} Z dL^\circ - \frac{1}{2} C_1 C_2. \end{aligned}$$

Здесь  $C$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $V$  — известные постоянные,  $C_1^2 + C_2^2 \leq C^2$ ,  $|V| \leq V^\circ$ ,  $V^\circ$  — значение (11.3). Параметр  $L^\circ$  меняется в пределах  $0 \leq L^\circ \leq C$ .

Требуется найти функции  $X(L^\circ)$ ,  $Z(L^\circ)$ ,  $T(L^\circ)$ . Постоянные  $D$ ,  $L_*^\circ$  неизвестны.

## §13. Переход к безразмерным переменным

Введем безразмерные переменные и параметры по формулам

$$\begin{aligned} \hat{r} = \frac{\hat{R}}{C}, \quad x = \frac{X}{C}, \quad z = \frac{Z}{C}, \quad l^\circ = \frac{L^\circ}{C}, \quad t = \frac{T}{\rho g C^2}, \quad (13.1) \\ c_1 = \frac{C_1}{C}, \quad c_2 = \frac{C_2}{C}, \quad d = \frac{D}{C}, \quad v = \frac{V}{C^2}, \quad v^\circ = \frac{V^\circ}{C^2}. \end{aligned}$$

$C$  — длина направляющей поверхности  $S^\circ$  мягкой оболочки до деформации.

Напишем уравнения из предыдущего параграфа в новых переменных.

### 13.1. Двухосная область

$$\begin{aligned}t_{l^{\circ}} &= 0, & t(x_{l^{\circ}} z_{l^{\circ}} - x_{l^{\circ}} z_{l^{\circ}}) &= \pm(z-d), \\x_{l^{\circ}}^2 + z_{l^{\circ}}^2 &= 1, & t &\geq 0.\end{aligned}\quad (13.2)$$

### 13.2. Одноосная область

$$t = 0, \quad z = d. \quad (13.3)$$

Для почти всех значений  $l^{\circ}$  в одноосной области справедливо неравенство

$$x_{l^{\circ}}^2 + z_{l^{\circ}}^2 < 1. \quad (13.4)$$

### 13.3. Граница между двухосной и одноосной областями

Уравнение границы в безразмерных переменных имеет вид

$$l^{\circ} = l_{*}^{\circ}, \quad (13.5)$$

где  $l_{*}^{\circ}$  — постоянная. На границе справедливо равенство

$$t(l_{*}^{\circ}) = 0. \quad (13.6)$$

### 13.4. Дополнительные условия

$$\begin{aligned}x(0) &= 0, & z(0) &= c_1, & x(1) &= c_2, & z(1) &= 0, \\v &= \int_0^1 x_{l^{\circ}} z \, dt^{\circ} = \frac{1}{2} c_1 c_2.\end{aligned}\quad (13.7)$$

Здесь  $c_1, c_2, v$  — известные постоянные,  $c_1^2 + c_2^2 \leq 1$ ,

$$|v| \leq v^{\circ} = \frac{\alpha - \sin \alpha}{2\alpha^2}, \quad (13.8)$$

$\alpha$  — единственный корень уравнения

$$\sqrt{c_1^2 + c_2^2} \alpha - 2 \sin \frac{\alpha}{2} = 0$$

на интервале  $0 < \alpha \leq 2\pi$ . Параметр  $l^{\circ}$  меняется в пределах  $0 \leq l^{\circ} \leq 1$ .

Требуется найти функции  $x(l^{\circ}), z(l^{\circ}), t(l^{\circ})$ . Постоянные  $d, l_{*}^{\circ}$  неизвестны.



Рис. 14.1. Формы равновесия с одноосными областями

*Замечание 13.1.* Параметр  $v$  равен (алгебраическому) безразмерному объему цилиндра, образованного мягкой оболочкой, плоскостью, проходящей через точки  $Q_1, Q_2$  параллельно оси  $Y$ , и плоскостями, параллельными  $XZ$  и расположенными на единичном расстоянии одна от другой.

## §14. Формы равновесия с одноосными областями

### 14.1. Вся оболочка является одноосной областью

Рассмотрим случай, когда вся оболочка является одноосной областью. Из уравнений (13.3) следует, что оболочка не пята и лежит на горизонтальной плоскости

$$z = d. \quad (14.1)$$

Подставляя равенство (14.1) в уравнения (13.7), получаем, что такой случай возможен при

$$c_1 = 0, \quad v = 0, \quad d = 0. \quad (14.2)$$

Покажем, что существует такое отображение поверхности  $S^\circ$  в  $S$ , при котором выполняется неравенство (13.4). Для этого рассмотрим равнопоперечное сжатие  $S^\circ$  вдоль направляющей:

$$x = c_2 l^2, \quad z = 0.$$

В этом случае  $x_{l_0}^2 + z_{l_0}^2 = c_2^2 < 1$ , если  $|c_2| < 1$ , то есть если длина отрезка  $Q_1 Q_2$  меньше длины направляющей поверхности  $S^\circ$ :  $|C_2| < C$ .

### 14.2. Оболочка имеет двухосные и одноосные области

Рассмотрим соседние двухосную и одноосную область. Пусть  $l^*$  — граница между ними. Из (13.2) следует, что в двухосной области

$$t = \text{const.}$$

Из условия (13.6) на границе и из уравнений (13.2) следует, что в двухосной области

$$t = 0, \quad z = d.$$

Получили, что вся оболочка не натянута и двухосная область лежит в той же горизонтальной плоскости, что и одноосная область. Из (13.7) следует, что  $c_1 = 0, v = 0, d = 0$ .

Этот случай можно присовокупить к случаю, рассмотренному в п. 14.1, когда вся оболочка является одноосной областью. Можно считать, что при  $c_1 = 0, v = 0, |c_2| < 1$  существует равновесие, при котором оболочка не натянута, лежит на горизонтальной плоскости  $z = 0$ . При этом на поверхности оболочки  $S$  возможны участки, изометричные своим прообразам на  $S^0$ .

На рис. 14.1 изображена поверхность  $S$  в случае, когда оболочка имеет одноосные области.

**Результат 14.1.** При  $c_1 = 0, v = 0, |c_2| < 1$  существует горизонтальная форма равновесия оболочки

$$z = 0. \quad (14.3)$$

Это единственная форма равновесия мягкой оболочки, имеющей одноосные области. Усилие оболочки при этом равно нулю. Отображение  $S^0$  в  $S$  не единственно. На поверхности  $S$  возможны участки, изометричные своим прообразам на поверхности  $S^0$ .

**Результат 14.2.** При равновесии вся оболочка является двухосной областью в следующих случаях: 1)  $c_1 \neq 0$ , 2)  $v \neq 0$ , 3)  $c_1^2 + c_2^2 = 1$ .

При  $c_1 = 0, v = 0, |c_2| < 1$  существует равновесие, указанное в результате 14.1, и существует равновесие, при котором вся оболочка является двухосной областью (смотрите § 18, § 19).

### 14.3. Замечания

*Замечание 14.1.* Если жидкость находится в верхней полости сосуда,  $c_1 = 0, v = 0, |c_2| < 1$ , то форма равновесия (14.3) неустойчива и не реализуется. Однако теоретически она существует.

*Замечание 14.2.* Если  $c_1^2 + c_2^2 = 1$ , то вся оболочка является двухосной областью и  $v = 0$ .

## §15. Симметрия в задаче равновесия

В § 14 рассмотрены все случаи, когда мягкая оболочка содержит одноосные области. В остальных случаях вся оболочка является двухосной. Длины всех кривых при деформации оболочки сохраняются.

Примем за параметр направляющей поверхности  $S$  переменную  $l$ :

$$l = \frac{L}{C} - \frac{L^2}{C} = t^2, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (15.1)$$

Здесь  $L$  — длина дуги направляющей поверхности  $S$  между точкой крепления  $Q_1$  и текущей точкой  $Q$ :  $L = |Q_1Q| = L^2$ .

### 15.1. Оболочка не натянута

Пусть вся оболочка является двухосной областью и усилие  $t = 0$ . Тогда из (13.2), (13.7) следуют равенства

$$\begin{aligned} t = 0, \quad z = d, \quad x_l^2 + z_l^2 = 1, \\ x(0) = 0, \quad z(0) = c_1, \quad x(1) = c_2, \quad z(1) = 0, \\ v = \int_0^1 x_l z \, dl = \frac{1}{2} c_1 c_2, \end{aligned}$$

которые приводят к формулам

$$\begin{aligned} x = \pm l, \quad z = 0, \quad t = 0, \\ c_1 = 0, \quad c_2 = \pm 1, \quad v = 0, \quad d = 0. \end{aligned}$$

Здесь верхний знак  $x$  соответствует верхнему знаку  $c_2$ . Таким образом, вся оболочка является двухосной областью и имеет пулевое усилие только при  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = \pm 1$ ,  $v = 0$ . В этом случае направляющая поверхности  $S$  совпадает с горизонтальным отрезком  $Q_1Q_2$  (так же, как в случае, когда поверхность  $S$  содержит одноосную область, смотрите рис. 14.1).

Пусть теперь вся оболочка является двухосной областью и усилие отлично от нуля:  $t > 0$ .

### 15.2. «Жидкость слева»

Из (13.2), (13.7) следует, что если при движении по направляющей от  $Q_1$  к  $Q_2$  жидкость находится слева, то выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} t = \text{const} > 0, \quad t(x_l z_{ll} - x_{ll} z_l) = -z + d, \quad (15.2) \\ x_l^2 + z_l^2 = 1, \quad x(0) = 0, \quad z(0) = c_1, \\ x(1) = c_2, \quad z(1) = 0, \quad v = \int_0^1 x_l z \, dl = \frac{1}{2} c_1 c_2. \end{aligned}$$

### 15.3. «Жидкость справа»

Рассмотрим уравнения из § 13 для случая, когда при движении по направляющей от  $Q_1$  к  $Q_2$  жидкость находится справа:

$$\begin{aligned} t = \text{const} > 0, \quad t(x_l z_{ll} - x_{ll} z_l) = z - d, \\ x_l^2 + z_l^2 = 1, \quad x(0) = 0, \quad z(0) = c_1, \\ x(1) = c_2, \quad z(1) = 0, \quad v = \int_0^1 x_l z \, dl = \frac{1}{2} c_1 c_2. \end{aligned} \quad (15.3)$$

Введем новые переменные по формулам

$$\begin{aligned} \bar{x}(\bar{l}) = x(l) - c_2, \quad \bar{z}(\bar{l}) = z(l) - c_1, \quad \bar{l} = 1 - l, \quad \bar{t} = t, \\ \bar{d} = d - c_1, \quad \bar{c}_1 = -c_1, \quad \bar{c}_2 = -c_2, \quad \bar{v} = -v. \end{aligned} \quad (15.4)$$

В новых переменных система (15.3) примет вид

$$\begin{aligned} \bar{t} = \text{const} > 0, \quad \bar{t}(\bar{x}_l \bar{z}_{ll} - \bar{x}_{ll} \bar{z}_l) = -\bar{z} + \bar{d}, \\ \bar{x}_l^2 + \bar{z}_l^2 = 1, \quad \bar{x}(0) = 0, \quad \bar{z}(0) = \bar{c}_1, \\ \bar{x}(1) = \bar{c}_2, \quad \bar{z}(1) = 0, \quad \bar{v} = \int_0^1 \bar{x}_l \bar{z} \, d\bar{l} = \frac{1}{2} c_1 c_2. \end{aligned}$$

Получили задачу (15.2) с точностью до переобозначений.

Из формул (15.4) следует, что случаи «жидкость слева» и «жидкость справа» дают одно и то же решение задачи равновесия. Отличие состоит в том, что параметр направляющей отсчитывается от разных концов направляющей. Поэтому системы координат для этих двух случаев разные (система координат зависит от направления отсчета параметра направляющей поверхности  $S$ , при переходе от одного случая к другому точки  $Q_1, Q_2$  переходят в точки  $Q_2, Q_1$ ).

Так как системы (15.2), (15.3) дают одно и то же решение задачи равновесия мягкой оболочки, то ограничимся рассмотрением системы (15.2). Решение системы (15.3) можно получить по формулам (15.4).

### 15.4. Симметрия относительно горизонтальной плоскости

Рассмотрим уравнения (15.2). Введем новые переменные и параметры по формулам

$$\begin{aligned} \bar{x} = x, \quad \bar{z} = -z, \quad \bar{t} = t, \\ c_1 = -c_1, \quad c_2 = c_2, \quad \bar{d} = -d, \quad v = -v. \end{aligned} \quad (15.5)$$



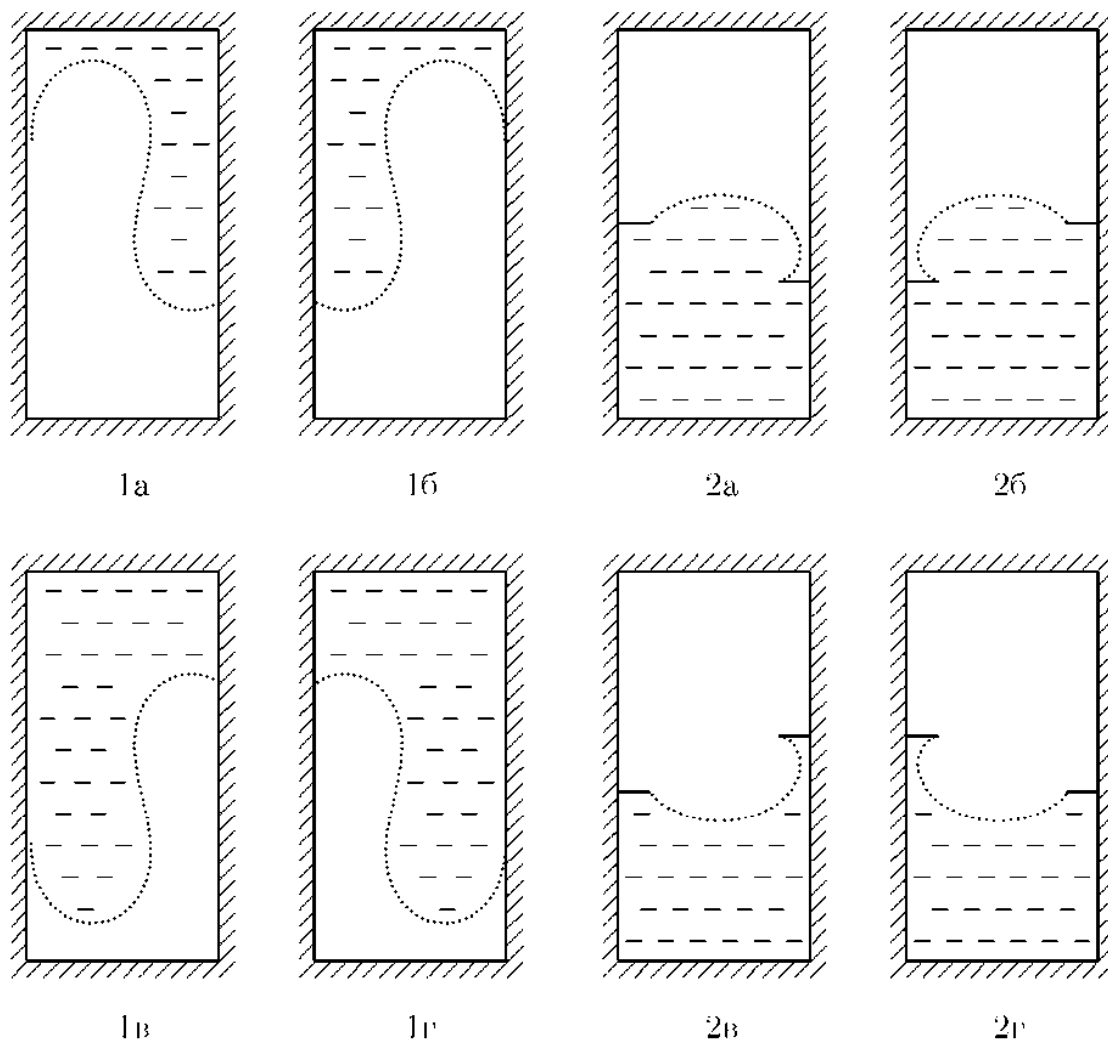


Рис. 15.1. Симметричные формы равновесия

В новых обозначениях задача (15.2) примет вид

$$\begin{aligned} \bar{l} - \text{const} > 0, \quad \bar{l} (x_l z_{ll} - x_{ll} z_l) = -z + d, \\ \bar{x}_l^2 + \bar{z}_l^2 = 1, \quad \bar{x}(0) = 0, \quad \bar{z}(0) = \bar{a}_1, \\ x(1) = c_2, \quad z(1) = 0, \quad v = \int_0^1 x_l z \, dl = \frac{1}{2} c_1 c_2. \end{aligned}$$

Получили задачу (15.2) с точностью до переобозначений. Отсюда и из (15.5) следует, что если оболочка имеет форму равновесия  $S$ , то поверхность, симметричная  $S$  относительно горизонтальной плоскости  $z = 0$ , тоже является формой равновесия. Значения  $c_1, c_2$  для этих

двух случаев противоположны. Значения  $c_2$  и  $t$  равны. Жидкость находится в одной и той же полости.

На рис. 15.1 симметричны относительно горизонтальной плоскости поверхности 1а и 1в, 1б и 1г, 2а и 2в, 2б и 2г.

### 15.5. Симметрия относительно вертикальной плоскости

Рассмотрим уравнения (15.2). Введем новые переменные и параметры по формулам

$$\begin{aligned} \bar{x}(\bar{l}) &= c_2 - x(l), & \bar{z}(\bar{l}) &= z(l) - c_1, & \bar{l} &= 1 - l, & \bar{t} &= t, \\ c_1 &= -c_1, & c_2 &= c_2, & \bar{d} &= d + c_1, & \bar{v} &= -v. \end{aligned} \quad (15.6)$$

В новых обозначениях задача (15.2) примет вид

$$\begin{aligned} t &= \text{const} > 0, & t(\bar{x}_{\bar{l}}\bar{z}_{\bar{l}} - \bar{x}_{\bar{l}}\bar{z}_{\bar{l}}) &= -\bar{z} + d, \\ \bar{x}_{\bar{l}}^2 + \bar{z}_{\bar{l}}^2 &= 1, & \bar{x}(0) &= 0, & \bar{z}(0) &= \bar{c}_1, \\ \bar{x}(1) &= \bar{c}_2, & \bar{z}(1) &= 0, & \bar{v} &= \int_0^1 \bar{x}_{\bar{l}}\bar{z}_{\bar{l}} d\bar{l} - \frac{1}{2} \bar{c}_1\bar{c}_2. \end{aligned}$$

Получили задачу (15.2) с точностью до переобозначений. При переходе от одних переменных к другим точки  $Q_1, Q_2$  переходят в точки  $Q_2, Q_1$ .

Отсюда и из (15.6) следует, что если оболочка имеет форму равновесия  $S$ , то поверхность, симметричная  $S$  относительно вертикальной плоскости, параллельной образующей поверхности  $S$ , тоже является формой равновесия. Значений  $c_1, v$  для этих двух случаев противоположны. Значения  $c_2$  и  $t$  равны. Жидкость находится в одной и той же полости.

На рис. 15.1 симметричны относительно вертикальной плоскости поверхности 1а и 1б, 1в и 1г, 2а и 2б, 2в и 2г.

### 15.6. Осевая симметрия

Рассмотрим уравнения (15.2). Введем новые переменные и параметры по формулам

$$\begin{aligned} \bar{x}(\bar{l}) &= c_2 - x(l), & \bar{z}(\bar{l}) &= c_1 - z(l), & \bar{l} &= 1 - l, & \bar{t} &= t, \\ \bar{d} &= c_1 - d, & \bar{v} &= -v. \end{aligned} \quad (15.7)$$

В новых обозначениях задача (15.2) примет вид

$$\begin{aligned}
t = \text{const} > 0, & \quad t (\bar{x}_I \bar{z}_{II} - \bar{x}_{II} \bar{z}_I) = -\bar{z} + d, \\
\bar{x}_I^2 + \bar{z}_I^2 = 1, & \quad \bar{x}(0) = 0, \quad \bar{z}(0) = c_1, \\
\bar{x}(1) = c_2, & \quad \bar{z}(1) = 0, \quad \bar{v} = \int_0^1 \bar{x}_I \bar{z} \, dl = \frac{1}{2} c_1 c_2.
\end{aligned}$$

Получили задачу (15.2) с точностью до переобозначений. При переходе от одних переменных к другим точки  $Q_1, Q_2$  переходят в точки  $Q_2, Q_1$ .

Отсюда и из (15.6) следует, что если оболочка имеет форму равновесия  $S$ , то поверхность, симметричная  $S$  относительно оси, параллельной образующей поверхности  $S$ , тоже является формой равновесия. Этот результат следует и из наличия двух симметрий — относительно горизонтальной плоскости и вертикальной плоскости.

Значения  $v$  для двух случаев с осевой симметрией противоположны. Значения  $c_1, c_2$  и  $t$  равны. Жидкость находится в одной и той же полости.

На рис. 15.1 осевую симметрию имеют поверхности 1а и 1г, 1б и 1в, 2а и 2г, 2б и 2в.

## 15.7. Результаты

**Результат 15.1.** Вся оболочка является двухосной областью и имеет нулевое усилие только при  $c_1 = 0, c_2 = \pm 1, v = 0$ . В этом случае направляющая поверхности  $S$  совпадает с горизонтальным отрезком  $Q_1 Q_2$ .

**Результат 15.2.** Задачу равновесия достаточно решить для случая, когда жидкость находится слева при движении по направляющей от  $Q_1$  к  $Q_2$ . Случай, когда жидкость находится справа, дает то же решение задачи равновесия.

**Результат 15.3.** Если оболочка имеет форму равновесия  $S$ , то формами равновесия являются и поверхности, симметричные  $S$  относительно горизонтальной плоскости, вертикальной плоскости и оси, параллельной образующей поверхности  $S$  (жидкость при этом находится в одной и той же полости).

**Результат 15.4.** Задачу равновесия достаточно решить для значений параметров  $c_1 > 0$  и  $c_1 = 0, v \geq 0$ . Для остальных значений параметров решение получается пересчетом по формулам (15.5).

*Замечание 15.1.* Результат 15.3 об осевой симметрии сформулирован в § 9 как свойство симметрии задачи равновесия мягкой оболочки

под гидростатическим давлением: если жидкость и газ поменять местами и изменить направление силы тяжести на противоположное, то система сил, действующих на оболочку, не изменится и система останется в равновесии.

## §16. Переход к трансцендентным уравнениям

### 16.1. Введение вспомогательной переменной

Решим дифференциальные уравнения (15.2). Для этого введем новую переменную  $\varphi$  по формулам

$$x_l = \cos \varphi, \quad z_l = \sin \varphi. \quad (16.1)$$

Справедливы равенства

$$x_{ll} = -\sin \varphi \varphi_l, \quad z_{ll} = \cos \varphi \varphi_l, \quad x_l z_{ll} - x_{ll} z_l = \varphi_l. \quad (16.2)$$

Подставляя формулы (16.1), (16.2) в (15.2), получим систему дифференциальных уравнений для  $x$ ,  $z$ ,  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} x_l &= \cos \varphi, & z_l &= \sin \varphi, & t\varphi_l &= -z + d, \\ t &= \text{const} > 0. \end{aligned} \quad (16.3)$$

Продифференцируем третье уравнение (16.3) по  $l$  и подставим в него выражение  $z_l$  из второго уравнения (16.3):

$$t\varphi_{ll} + \sin \varphi = 0. \quad (16.4)$$

Получили уравнение математического маятника для  $\varphi$ , где переменная  $l$  соответствует времени движения маятника.

Уравнение (16.4) имеет первый интеграл

$$\frac{t}{2} \varphi_l^2 = \cos \varphi + c_3. \quad (16.5)$$

$c_3$  — неизвестная постоянная,  $c_3 \geq -1$ .

Зависимость переменной  $\varphi$  от  $l$  определяется значением постоянной  $c_3$ . Существуют пять видов зависимости, которые видны из графиков на фазовой плоскости  $\varphi$ ,  $\varphi_l$  (рис. 16.1). Рассмотрим их отдельно.

### 16.2. $c_3 = -1$

Этот случай соответствует устойчивой точке покоя математического маятника:

$$\varphi = 0 \pmod{2\pi}. \quad (16.6)$$

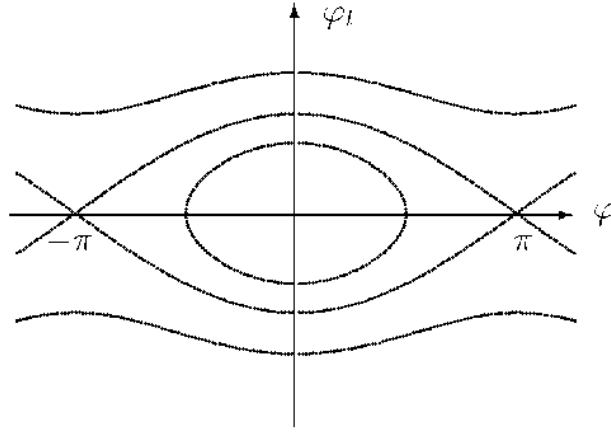


Рис. 16.1. Фазовая плоскость

Решение задачи равновесия следует из (15.2), (16.3), (16.6):

$$\begin{aligned} x = l, \quad z = 0, \quad 0 \leq l \leq 1, \\ c_1 = 0, \quad c_2 = 1, \quad d = 0, \quad v = 0, \quad k = 0. \end{aligned} \quad (16.7)$$

Усилие  $l$  при этом неопределено. Параметр  $k = 0$  введен, чтобы включить кривую (16.7) в семейство кривых с параметром  $k$ .

### 16.3. $-1 < c_3 < 1$

Этот случай соответствует колебательному движению математического маятника:  $\varphi$  принимает значения из отрезка  $[-\varphi_*, \varphi_*]$ ,

$$-\pi < -\varphi_* \leq \varphi \leq \varphi_* < \pi, \quad \varphi_* = \arccos(-c_3). \quad (16.8)$$

Введем вместо  $c_3$  постоянную  $k$ , вместо  $\varphi$  переменную  $\psi$  и найдем зависимость  $l$  от  $\psi$ :

$$k = \sqrt{\frac{1+c_3}{2}}, \quad 0 < k < 1, \quad (16.9)$$

$$\cos \varphi = 1 - 2k^2 \sin^2 \psi, \quad \sin \varphi = 2k \sin \psi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi},$$

$$l = \pm \sqrt{l} \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}.$$

Здесь  $\psi_0$  — неизвестная постоянная. Подставим значения (16.9) в уравнения (16.3) и проинтегрируем уравнения отдельно для случая  $l_\psi > 0$  и  $l_\psi < 0$ .

### 16.3.1. $l_\psi > 0$

Решение задачи равновесия описывается следующими формулами:

$$\begin{aligned} x - \sqrt{t} \left[ 2E(\psi, k) - F(\psi, k) \right]_{\psi_0}^{\psi}, \quad z - d - 2k\sqrt{t} \cos \psi, \quad (16.10) \\ l - \sqrt{t} F(\psi, k) \Big|_{\psi_0}^{\psi}. \end{aligned}$$

Здесь  $t, d, k, \psi_0$  — неизвестные постоянные;  $F(\psi, k), E(\psi, k)$  — эллиптические интегралы первого и второго рода [21]:

$$F(\psi, k) = \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}, \quad E(\psi, k) = \int_0^{\psi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi. \quad (16.11)$$

В формулах (16.10) учтено равенство  $x(0) = 0$ .

Кривая  $z = z(x)$ , задаваемая формулами (16.10), является периодической функцией  $x$  с периодом

$$\Delta = 4\sqrt{t} \left[ 2E(k) - K(k) \right],$$

где  $K(k), E(k)$  — полные эллиптические интегралы [21]

$$\begin{aligned} K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}, \quad (16.12) \\ E(k) = E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi. \end{aligned}$$

Подставим (16.10) в (15.2). Получим трансцендентные уравнения для постоянных  $t, d, k, \psi_0, \psi_1$ :

$$1 = \sqrt{t} F(\psi, k) \Big|_{\psi_0}^{\psi_1}, \quad 0 = d - 2k\sqrt{t} \cos \psi_1, \quad (16.13)$$

$$c_1 = d - 2k\sqrt{t} \cos \psi_0, \quad c_2 = \sqrt{t} \left[ 2E(\psi, k) - F(\psi, k) \right]_{\psi_0}^{\psi_1},$$

$$v = c_2 d - \frac{c_1 c_2}{2} - 2kt \left( \sin \psi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} \right)_{\psi_0}^{\psi_1},$$

$$t > 0, \quad 0 < k < 1.$$

### 16.3.2. $l_\psi < 0$

Решение задачи равновесия описывается формулами

$$\begin{aligned}x &= -\sqrt{t} \left[ 2E(\psi, k) - F(\psi, k) \right]_{\psi_0}^{\psi}, & z &= d + 2k\sqrt{t} \cos \psi, \\l &= -\sqrt{t} F(\psi, k) \Big|_{\psi_0}^{\psi},\end{aligned} \quad (16.14)$$

где  $t, d, k, \psi_0$  — неизвестные постоянные. В формулах (16.14) учтено равенство  $x(0) = 0$ . Введем переменную  $\bar{\psi}$  и параметр  $\bar{\psi}_0$  по формулам

$$\bar{\psi} = \pi - \psi, \quad \bar{\psi}_0 = \pi - \psi_0.$$

В новых обозначениях формулы (16.12) примут вид

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{t} \left[ 2E(\bar{\psi}, k) - F(\bar{\psi}, k) \right]_{\bar{\psi}_0}^{\bar{\psi}}, & z &= d - 2k\sqrt{t} \cos \bar{\psi}, \\l &= \sqrt{t} F(\bar{\psi}, k) \Big|_{\bar{\psi}_0}^{\bar{\psi}}.\end{aligned}$$

Получили систему (16.10) с точностью до переобозначений. Отсюда следует, что формулы (16.14) описывают то же решение, что и формулы (16.10). Поэтому их рассматривать не будем.

### 16.4. $c_3 = 1, \varphi = \pi \pmod{2\pi}$

Этот случай соответствует неустойчивой точке покоя математического маятника. Решение задачи равновесия следует из (15.2), (16.3), (16.6):

$$\begin{aligned}x &= -l, & z &= 0, & 0 &\leq l \leq 1, \\c_1 &= 0, & c_2 &= -1, & v &= 0, & d &= 0, & k &= 1.\end{aligned} \quad (16.15)$$

Усилие  $l$  при этом неопределено. Параметр  $k = 1$  введен, чтобы включить кривую (16.15) в семейство кривых с параметром  $k$ .

### 16.5. $c_3 = 1, \varphi(0) / \pi \pmod{2\pi}$

Этот случай соответствует асимптотическому движению математического маятника:  $\varphi \rightarrow \pi - 0 \pmod{2\pi}$  при  $l \rightarrow \infty$ , если  $\varphi_l(0) > 0$ ;  $\varphi \rightarrow \pi + 0 \pmod{2\pi}$  при  $l \rightarrow \infty$ , если  $\varphi_l(0) < 0$ .

Введем вместо  $\varphi$  переменную  $\psi$  и найдем зависимость  $l$  от  $\psi$ :

$$\psi = \frac{\varphi}{2}, \quad l = \pm \sqrt{t} \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{d\psi}{\cos \psi}. \quad (16.16)$$

Здесь  $\psi_0$  — неизвестная постоянная. Подставим значения (16.16) в уравнения (16.3) и проинтегрируем уравнения отдельно для случая  $l_\psi > 0$  и  $l_\psi < 0$ .

### 16.5.1. $l_\psi > 0$

Решение задачи равновесия описывается формулами

$$x = \sqrt{t} \left( 2 \sin \psi + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sin \psi}{1 + \sin \psi} \right) \Big|_{\psi_0}^{\psi}, \quad z = d - 2\sqrt{t} \cos \psi, \quad (16.17)$$

$$t = -\frac{\sqrt{t}}{2} \ln \frac{1 - \sin \psi}{1 + \sin \psi} \Big|_{\psi_0}^{\psi}, \quad k = 1.$$

Здесь учтено равенство  $x(0) = 0$ . Параметр  $k = 1$  введен, чтобы включить кривую (16.17) в семейство кривых с параметром  $k$ . Подставим формулы (16.17) в (15.2). Получим трансцендентные уравнения для постоянных  $t$ ,  $d$ ,  $\psi_0$ ,  $\psi_1$ :

$$1 = -\frac{\sqrt{t}}{2} \ln \frac{1 - \sin \psi}{1 + \sin \psi} \Big|_{\psi_0}^{\psi_1}, \quad 0 = d - 2\sqrt{t} \cos \psi_1, \quad (16.18)$$

$$c_1 = d - 2\sqrt{t} \cos \psi_0, \quad c_2 = \sqrt{t} \left( 2 \sin \psi + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sin \psi}{1 + \sin \psi} \right) \Big|_{\psi_0}^{\psi_1},$$

$$v = c_2 d - \frac{c_1 c_2}{2} - t \sin \left( 2\psi \right) \Big|_{\psi_0}^{\psi_1}, \quad t > 0, \quad k = 1.$$

### 16.5.2. $l_\psi < 0$

Решение задачи равновесия описывается формулами

$$x = -\sqrt{t} \left( 2 \sin \psi + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sin \psi}{1 + \sin \psi} \right) \Big|_{\psi_0}^{\psi}, \quad z = d + 2\sqrt{t} \cos \psi, \quad (16.19)$$

$$t = \frac{\sqrt{t}}{2} \ln \frac{1 - \sin \psi}{1 + \sin \psi} \Big|_{\psi_0}^{\psi}.$$

Здесь учтено равенство  $x(0) = 0$ . Введем переменную  $\bar{\psi}$  и параметр  $\bar{\psi}_0$  по формулам

$$\bar{\psi} = \pi + \psi, \quad \bar{\psi}_0 = \pi + \psi_0.$$



В новых обозначениях формулы (16.19) примут вид

$$x = \sqrt{t} \left( 2 \sin \psi + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sin \bar{\psi}}{1 + \sin \bar{\psi}} \right) \Big|_{\bar{\psi}_0}^{\bar{\psi}}, \quad z = d - 2\sqrt{t} \cos \bar{\psi},$$

$$l = -\frac{\sqrt{t}}{2} \ln \frac{1 - \sin \bar{\psi}}{1 + \sin \bar{\psi}} \Big|_{\bar{\psi}_0}^{\bar{\psi}}.$$

Получили систему (16.17) с точностью до переобозначений. Отсюда следует, что формулы (16.19) описывают то же решение, что и формулы (16.17). Поэтому их рассматривать не будем.

### 16.6. $c_3 > 1$

Этот случай соответствует вращательному движению математического маятника:  $\varphi$  монотонно возрастает до  $\infty$ , если  $\varphi_l > 0$ , и  $\varphi$  монотонно убывает до  $-\infty$ , если  $\varphi_l < 0$ .

Введем вместо  $c_3$  постоянную  $k$ , вместо  $\varphi$  переменную  $\psi$  и найдем зависимость  $l$  от  $\psi$ :

$$k = \sqrt{\frac{1 + c_3}{2}}, \quad k > 1, \quad \psi = \frac{\varphi}{2}, \quad (16.20)$$

$$l = \pm \tilde{k} \sqrt{t} \int_{\bar{\psi}_0}^{\bar{\psi}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \tilde{k}^2 \sin^2 \psi}}, \quad \tilde{k} = \frac{1}{k}, \quad 0 < \tilde{k} < 1.$$

Здесь  $\bar{\psi}_0$  — неизвестная постоянная. Подставим значения (16.20) в уравнения (16.3) и проинтегрируем уравнения отдельно для случаев  $l_{\bar{\psi}} > 0$  и  $l_{\bar{\psi}} < 0$ .

#### 16.6.1. $l_{\bar{\psi}} > 0$

Решение задачи равновесия описывается формулами

$$x = \frac{\sqrt{t}}{\tilde{k}} \left[ 2E(\psi, \tilde{k}) - (2 - \tilde{k}^2)F(\psi, \tilde{k}) \right] \Big|_{\bar{\psi}_0}^{\bar{\psi}}, \quad (16.21)$$

$$z = d - \frac{2\sqrt{t}}{\tilde{k}} \sqrt{1 - \tilde{k}^2 \sin^2 \bar{\psi}},$$

$$l = \tilde{k} \sqrt{t} F(\bar{\psi}, \tilde{k}) \Big|_{\bar{\psi}_0}^{\bar{\psi}}, \quad \tilde{k} = \frac{1}{k}, \quad k > 1.$$

Здесь учтено равенство  $x(0) = 0$ .

Кривая  $z = z(x)$ , задаваемая формулами (16.21), является периодической функцией  $x$  с периодом

$$\Delta = \frac{2\sqrt{t}}{\tilde{k}} \left[ 2E(\tilde{k}) - (2 - \tilde{k}^2)K(\tilde{k}) \right]. \quad (16.22)$$

Подставим формулы (16.21) в (15.2). Получим трансцендентные уравнения для постоянных  $t, d, \tilde{k}, \psi_0, \psi_1$ :

$$1 - \tilde{k}\sqrt{t} F(\psi, \tilde{k}) \Big|_{\psi_0}^{\psi_1}, \quad 0 = d - \frac{2\sqrt{t}}{\tilde{k}} \sqrt{1 - \tilde{k}^2 \sin^2 \psi_1}, \quad (16.23)$$

$$c_1 = d - \frac{2\sqrt{t}}{\tilde{k}} \sqrt{1 - \tilde{k}^2 \sin^2 \psi_0},$$

$$c_2 = \frac{\sqrt{t}}{\tilde{k}} \left[ 2E(\psi, \tilde{k}) - (2 - \tilde{k}^2)F(\psi, \tilde{k}) \right] \Big|_{\psi_0}^{\psi_1},$$

$$v = c_2 d - \frac{c_1 c_2}{2} - t \sin(2\psi) \Big|_{\psi_0}^{\psi_1}, \quad t > 0, \quad \tilde{k} = \frac{1}{k}, \quad k > 1.$$

### 16.6.2. $t_\psi < 0$

Решение задачи равновесия описывается формулами

$$x = -\frac{\sqrt{t}}{\tilde{k}} \left[ 2E(\psi, \tilde{k}) - (2 - \tilde{k}^2)F(\psi, \tilde{k}) \right] \Big|_{\psi_0}^{\psi}, \quad (16.24)$$

$$z = d + \frac{2\sqrt{t}}{\tilde{k}} \sqrt{1 - \tilde{k}^2 \sin^2 \psi},$$

$$t = -\tilde{k}\sqrt{t} F(\psi, \tilde{k}) \Big|_{\psi_0}^{\psi}, \quad \tilde{k} = \frac{1}{k}, \quad k > 1.$$

Здесь учтено равенство  $x(0) = 0$ .

Кривая  $z = z(x)$ , задаваемая формулами (16.23), является периодической функцией  $x$  с периодом (16.22).

Подставим формулы (16.24) в (15.2). Получим трансцендентные уравнения для постоянных  $t, d, \tilde{k}, \psi_0, \psi_1$ :

$$1 - -\tilde{k}\sqrt{t} F(\psi, \tilde{k}) \Big|_{\psi_0}^{\psi_1}, \quad 0 = d + \frac{2\sqrt{t}}{\tilde{k}} \sqrt{1 - \tilde{k}^2 \sin^2 \psi_1}, \quad (16.25)$$

$$c_1 = d + \frac{2\sqrt{t}}{\tilde{k}} \sqrt{1 - \tilde{k}^2 \sin^2 \psi_0},$$

$$c_2 = -\frac{\sqrt{t}}{\tilde{k}} \left[ 2E(\psi, \tilde{k}) - (2 - \tilde{k}^2)F(\psi, \tilde{k}) \right] \Big|_{\psi_0}^{\psi_1},$$

$$v = c_2 d - \frac{c_1 c_2}{2} - t \sin(2\psi) \Big|_{\psi_0}^{\psi_1}, \quad t > 0, \quad \tilde{k} = \frac{1}{k}, \quad k > 1.$$

Введем новые переменные и параметры по формулам

$$\begin{aligned}\bar{z} &= -z, & \bar{\psi} &= -\psi, & \bar{c}_1 &= -c_1, & \bar{v} &= -v, \\ \bar{d} &= -d, & \bar{\psi}_0 &= -\psi_0, & \bar{\psi}_1 &= -\psi_1.\end{aligned}\quad (16.26)$$

В новых обозначениях система (16.24), (16.25) примет вид

$$\begin{aligned}x &= \frac{\sqrt{t}}{\tilde{k}} \left[ 2E(\bar{\psi}, \tilde{k}) - (2 - \tilde{k}^2)F(\bar{\psi}, \tilde{k}) \right]_{\bar{\psi}_0}^{\bar{\psi}}, \\ \bar{z} &= \bar{d} - \frac{2\sqrt{t}}{\tilde{k}} \sqrt{1 - \tilde{k}^2 \sin^2 \bar{\psi}}, & t &= \tilde{k}\sqrt{t} F(\bar{\psi}, \tilde{k}) \Big|_{\bar{\psi}_0}^{\bar{\psi}}, \\ 1 &= \tilde{k}\sqrt{t} F(\bar{\psi}, \tilde{k}) \Big|_{\bar{\psi}_0}^{\bar{\psi}_1}, & 0 &= \bar{d} - \frac{2\sqrt{t}}{\tilde{k}} \sqrt{1 - \tilde{k}^2 \sin^2 \bar{\psi}_1}, \\ \bar{c}_1 &= \bar{d} - \frac{2\sqrt{t}}{\tilde{k}} \sqrt{1 - \tilde{k}^2 \sin^2 \bar{\psi}_0}, \\ c_2 &= \frac{\sqrt{t}}{\tilde{k}} \left[ 2E(\bar{\psi}, \tilde{k}) - (2 - \tilde{k}^2)F(\bar{\psi}, \tilde{k}) \right]_{\bar{\psi}_0}^{\bar{\psi}_1}, \\ v &= c_2 \bar{d} - \frac{\bar{c}_1 c_2}{2} - t \sin(2\bar{\psi}) \Big|_{\bar{\psi}_0}^{\bar{\psi}_1}, & t &> 0, & \tilde{k} &= \frac{1}{k}, & k &> 1.\end{aligned}$$

Получили систему (16.21), (16.23) с точностью до переобозначений. Отсюда и из (16.26) следует, что формулы (16.21) и (16.24) описывают решения, в которых формы равновесия оболочки симметричны относительно плоскости  $z = 0$ , усилия оболочки одинаковы, значения параметров  $c_1$ ,  $v$  отличаются знаками.

**Результат 16.1.** При  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = \pm 1$ ,  $v = 0$  система находится в равновесии, оболочка является двухосной областью, усилие оболочки неопределено. Поверхность  $S$  является горизонтальной полосой  $0 \leq |x| \leq 1$ ,  $z = 0$  так же, как в случае, когда оболочка содержит одноосные области (смотрите рис. 14.1).

**Результат 16.2.** Решение плоской задачи равновесия мягкой оболочки описывается формулами (16.7), (16.10), (16.15), (16.17), (16.21), (16.24), в которых постоянные  $t$ ,  $d$ ,  $k$ ,  $\psi_0$ ,  $\psi_1$  определяются из трансцендентных уравнений (16.13), (16.18), (16.23), (16.25).

*Замечание 16.1.* В этом параграфе получены трансцендентные уравнения для плоской задачи равновесия мягкой оболочки в предположении, что вся оболочка является двухосной областью, нет участков слияния оболочки и нет изломов поверхности оболочки. Решение, при котором оболочка имеет одноосные области, рассмотрено в § 14. Предположение об отсутствии участков слияния и изломов накладывает ограничения на параметры задачи равновесия. Об этих ограничениях смотрите в § 17.

## §17. Формы равновесия оболочки

Из формул (16.7), (16.10), (16.15), (16.17), (16.21), (16.24) следует, что направляющая поверхности оболочки  $S$  представляет собой (с точностью до масштаба и параллельного сдвига) дугу кривой из следующего семейства кривых:

$$1. \quad k = 0, \quad x = l, \quad z = 0, \quad 0 \leq l \leq 1; \quad (17.1)$$

$$2. \quad x = 2E(\psi, k) - F(\psi, k),$$

$$z = -2k \cos \psi,$$

$$0 < k \leq k_* \approx 0,855$$

$$-\infty < \psi_0 \leq \psi \leq \psi_1 < \infty;$$

$$k_* < k < k_{**} \approx 0,909$$

$$a) \left\{ -\pi < -\psi_* \leq \psi_0 \leq \psi \leq \psi_1 \leq \pi \mid \psi_* < 2\pi \right\} (\text{mod } 2\pi),$$

$$б) \left\{ -2\pi < -\pi - \psi_* \leq \psi_0 \leq \psi \leq \psi_1 \leq \psi_* < \pi \right\} (\text{mod } 2\pi);$$

$$k = k_{**} \approx 0,909$$

$$\left\{ -\frac{\pi}{2} \leq \psi_0 \leq \psi \leq \psi_1 \leq \frac{3\pi}{2} \right\} (\text{mod } 2\pi);$$

$$k_{**} < k < 1$$

$$a) \left\{ -\frac{\pi}{2} < -\psi_* \leq \psi_0 \leq \psi \leq \psi_1 \leq \pi + \psi_* < \frac{3\pi}{2} \right\} (\text{mod } 2\pi),$$

$$б) \left\{ -\frac{3\pi}{2} < -\pi - \psi_* \leq \psi_0 \leq \psi \leq \psi_1 \leq \psi_* < \frac{\pi}{2} \right\} (\text{mod } 2\pi);$$

$$3. \quad k = 1, \quad x = -l, \quad z = 0, \quad 0 \leq l \leq 1;$$

$$4. \quad k = 1,$$

$$x = 2 \sin \psi + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sin \psi}{1 + \sin \psi};$$

$$z = -2 \cos \psi,$$

$$a) \left\{ -\frac{\pi}{2} < -\psi_* \leq \psi_0 \leq \psi \leq \psi_1 < \frac{\pi}{2} \right\} (\text{mod } 2\pi),$$

$$б) \left\{ -\frac{\pi}{2} < \psi_0 \leq \psi \leq \psi_1 \leq \psi_* < \frac{\pi}{2} \right\} (\text{mod } 2\pi),$$

$$в) \left\{ \frac{\pi}{2} < \psi_1 \leq \psi \leq \psi_0 \leq \pi \mid \psi_* < \frac{3\pi}{2} \right\} (\text{mod } 2\pi),$$

$$г) \left\{ \frac{\pi}{2} < \pi - \psi_* \leq \psi_1 \leq \psi \leq \psi_0 < \frac{3\pi}{2} \right\} (\text{mod } 2\pi), \quad \psi_* \approx 1,278;$$

$$\begin{aligned}
5. \quad & x = 2E(\psi, \tilde{k}) - (2 - \tilde{k}^2)F(\psi, \tilde{k}), \\
& z = -2\sqrt{1 - \tilde{k}^2 \sin^2 \psi}, \quad \tilde{k} = \frac{1}{k}, \\
& 1 < k \leq k_{***} \approx 1,089 \\
& \left\{ -\frac{\pi}{2} < -\psi_* \leq \psi_0 \leq \psi \leq \psi_1 \leq \pi \mid \psi_* < \frac{3\pi}{2} \right\} (\text{mod } 2\pi); \\
& k > k_{***} \\
& \text{а) } \left\{ -\frac{\pi}{2} < -\psi_* \leq \psi_0 \leq \psi \leq \psi_1 \leq \pi + \psi_{**} < \frac{5\pi}{4} \right\} (\text{mod } 2\pi), \\
& \text{б) } \left\{ -\frac{\pi}{4} < -\psi_{**} \leq \psi_0 \leq \psi \leq \psi_1 \leq \pi \mid \psi_* < \frac{3\pi}{2} \right\} (\text{mod } 2\pi);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6. \quad & x = -2E(\psi, \tilde{k}) + (2 - \tilde{k}^2)F(\psi, \tilde{k}), \\
& z = 2\sqrt{1 - \tilde{k}^2 \sin^2 \psi}, \quad \tilde{k} = \frac{1}{k}, \\
& 1 < k \leq k_{***} \approx 1,089 \\
& \left\{ -\frac{\pi}{2} < -\psi_* \leq \psi_1 \leq \psi \leq \psi_0 \leq \pi \mid \psi_* < \frac{3\pi}{2} \right\} (\text{mod } 2\pi); \\
& k > k_{***} \\
& \text{в) } \left\{ -\frac{\pi}{2} < -\psi_* \leq \psi_1 \leq \psi \leq \psi_0 \leq \pi + \psi_{**} < \frac{5\pi}{4} \right\} (\text{mod } 2\pi), \\
& \text{г) } \left\{ -\frac{\pi}{4} < -\psi_{**} \leq \psi_1 \leq \psi \leq \psi_0 \leq \pi \mid \psi_* < \frac{3\pi}{2} \right\} (\text{mod } 2\pi).
\end{aligned}$$

Здесь  $k$  — параметр семейства кривых. При значениях  $k$ , равных  $k_*$  и  $k_{***}$ , ветви кривой соприкасаются. При  $k = k_{**}$  кривая описывает «восьмерку». Здесь  $k = k_*$  — единственный корень уравнения

$$2E(\theta, k) - F(\theta, k) = 0 \quad \text{на интервале } \frac{1}{\sqrt{2}} < k < 1, \quad (17.2)$$

$$\theta = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{k\sqrt{2}}\right), \quad k_* \approx 0,855, \quad 0,855 < k_* < 0,856;$$

$k = k_{**}$  — единственный корень уравнения

$$2E(k) - K(k) = 0 \quad \text{на интервале } \frac{1}{\sqrt{2}} < k < 1, \quad (17.3)$$

$$k_{**} \approx 0,909, \quad 0,908 < k_{**} < 0,909;$$

$k_{***} = 1/\tilde{k}_{***}$ ,  $\tilde{k} = \tilde{k}_{***}$  — единственный корень уравнения

$$2E(\tilde{k}) - (2 - \tilde{k}^2)K(\tilde{k}) + 2E\left(\frac{\pi}{4}, \tilde{k}\right) - (2 - \tilde{k}^2)F\left(\frac{\pi}{4}, \tilde{k}\right) = 0 \quad (17.4)$$

$$\text{на интервале } 0 < \tilde{k} < 1, \quad k_{***} \approx 1,089, \quad 1,088 < k_{***} < 1,089.$$

При  $k > k_*$  кривые семейства (17.1) имеют точки самопересечения. Поэтому дуги, содержащие эти точки, не имеют физического смысла в рассматриваемой постановке задачи. В (17.1) выделены дуги между точками самопересечения. Эти дуги соответствуют направляющим поверхности  $S$  оболочки при равновесии.

Дуга кривой описывается неравенством  $\psi_0 \leq \psi \leq \psi_1$  или  $\psi_1 \leq \psi \leq \psi_0$ . Параметры  $\psi_0, \psi_1$  принимают произвольные значения из интервалов, указанных в (17.1).  $\psi = \psi_*$  — единственный корень уравнения, зависящего от параметра  $k$ :

$$k_* < k \leq k_{**} \approx 0,909 \quad (17.5)$$

$$2E(\psi, k) - F(\psi, k) = 0 \quad \text{на интервале}$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \psi < \pi - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2k}}\right), \quad \frac{\pi}{2} \leq \psi_* < \pi;$$

$$k_{**} < k < 1$$

$$2E(\psi, k) - F(\psi, k) = 0 \quad \text{на интервале } 0 < \psi < \frac{\pi}{2},$$

$$0 < \psi_* < \frac{\pi}{2};$$

$$k = 1$$

$$2 \sin \psi + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sin \psi}{1 + \sin \psi} = 0 \quad \text{на интервале } 0 < \psi < \frac{\pi}{2},$$

$$\psi_* \approx 1,278, \quad 1,278 < \psi_* < 1,279;$$

$$k > 1$$

$$2E(\psi, \tilde{k}) - (2 - \tilde{k}^2)F(\psi, \tilde{k}) = 0 \quad \text{на интервале } \frac{\pi}{4} < \psi < \frac{\pi}{2},$$

$$\tilde{k} = \frac{1}{k}, \quad \frac{\pi}{4} < \psi_* < \frac{\pi}{2}.$$

$\psi = \psi_{**}$  — единственный корень уравнения, зависящего от параметра  $k$ :

$$2E(\tilde{k}) - (2 - \tilde{k}^2)K(\tilde{k}) + 2E(\psi, \tilde{k}) - (2 - \tilde{k}^2)F(\psi, \tilde{k}) = 0 \quad (17.6)$$

$$\text{на интервале } 0 < \psi < \frac{\pi}{4}, \quad \tilde{k} = \frac{1}{k},$$

$$k > k_{***} \approx 1,089, \quad 0 < \psi_{**} < \frac{\pi}{4}.$$

На рис. 17.1 показаны кривые семейства (17.1). Отрезки прямых, разделяющие на рисунке жидкость и газ, проведены из точек, являющихся предельными положениями точек крепления  $Q_1, Q_2$ .

**Теорема 17.1.** *Для любой дуги любой кривой семейства (17.1) существуют значения  $s_1, s_2, v$ , при которых эта дуга является (с точностью до масштаба и параллельного переноса) направляющей поверхности  $S$  мягкой оболочки при равновесии.*

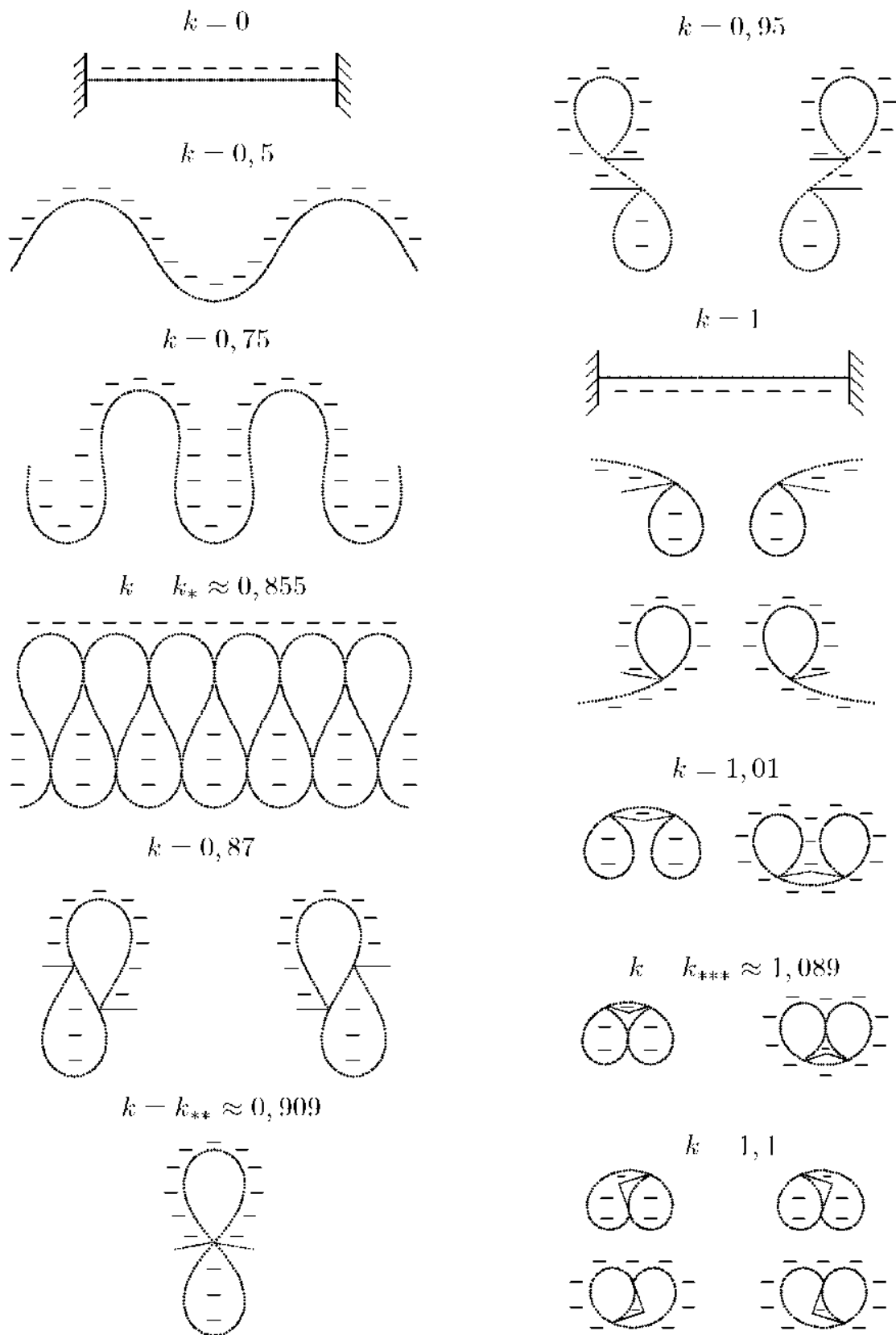


Рис. 17.1. Семейство направляющих поверхности  $S$

*Доказательство.* При  $k = 0$  и при  $k = 1$  решение плоской задачи равновесия однозначно определено формулами (16.7), (16.15) и утверждение теоремы очевидно.

В остальных случаях дуга кривой семейства (17.1) задается значениями  $k, \psi_0, \psi_1$ . При заданных значениях  $k, \psi_0, \psi_1$  из уравнений (16.13), (16.18) (16.23), (16.25) находятся последовательно  $t, d, c_1, c_2, v$ . Теорема 17.1 доказана.

*Замечание 17.1.* Семейство кривых (17.1) разбивается на классы, в каждом из которых кривые топологически эквивалентны. На рис. 17.1 представлены кривые из всех классов семейства. Кривые (17.1) являются эластичными Эйлера.

## §18. Число форм равновесия

**Теорема 18.1.** *Если  $c_1 = 0$ , то для почти всех значений  $c_2, v$  число форм равновесия мягкой оболочки, не имеющих участков слияния и точек излома, конечно при любом положении жидкости.*

**Теорема 18.2.** *Если жидкость находится в верхней полости и  $c_1 = 0, v = 0$ , то:*

1) *для почти всех значений  $0 \leq c_2 < c_{2*} \approx 0,151$  число форм равновесия мягкой оболочки, не имеющих участков слияния и точек излома, конечно,*

2) *для почти всех значений  $c_{2*} \leq c_2 < 1$  число форм равновесия мягкой оболочки, не имеющих участков слияния и точек излома, счетно.*

Далее идет доказательство теорем 18.1, 18.2.

Если  $c_2 = \pm 1$ , то  $v = 0$  и существует единственная поверхность  $S$  равновесия оболочки — горизонтальная. Эта поверхность описывается формулами (16.7), (16.15).

Рассмотрим остальные случаи. Для них  $k > 0$  и при  $k = 1$   $\varphi(0) \neq \pi \pmod{2\pi}$ .

### 18.1. Зависимость между $\psi_0, \psi_1$

Параметры  $t$  и  $d$  однозначно выражаются через  $k, \psi_0$  и  $\psi_1$  из уравнений (16.13), (16.18), (16.23), (16.25). Поэтому поверхность  $S$  однозначно определяется параметрами  $k, \psi_0, \psi_1$  по формулам (16.10), (16.17), (16.21), (16.24).



Найдем зависимость между  $\psi_0$  и  $\psi_1$ . Из (16.13), (16.18), (16.23), (16.25) следуют уравнения

$$\begin{aligned} 0 < k \leq 1, & \quad \cos \psi_1 = \cos \psi_0; \\ k > 1, & \quad |\sin \psi_1| = |\sin \psi_0|. \end{aligned}$$

Отсюда получаем формулы для  $\psi_1$ :

$$\begin{aligned} 0 < k \leq 1, & \quad \psi_1 = 2\pi n \pm \psi_0; \\ k > 1, & \quad \psi_1 = \pi n \pm \psi_0; \quad n = 0, \pm 1, \dots \end{aligned} \quad (18.1)$$

Знак плюс в формулах (18.1) соответствует формам равновесия, не имеющим симметрии относительно вертикальной плоскости, проходящей через точку  $x = c_2/2$ ,  $z = 0$  параллельно образующим поверхности  $S$ , — *несимметричным формам*. Знак минус в (18.1) соответствует формам равновесия, имеющим симметрию относительно вертикальной плоскости, проходящей через точку  $x = c_2/2$ ,  $z = 0$  параллельно образующим поверхности  $S$ , — *симметричным формам*. Рассмотрим уравнения для этих случаев отдельно.

## 18.2. Уравнения для несимметричных форм

Рассмотрим формулы (18.1) со знаком плюс. Исключая из (16.13), (16.18), (16.23), (16.25) параметры  $t$ ,  $d$  и учитывая интервалы изменения  $\psi_0$ ,  $\psi_1$  в (17.1), найдем уравнения, связывающие параметры  $k$ ,  $\psi_0$  и  $c_2$ ,  $v$ :

$$1. \quad c_2 = \frac{2E(k) - K(k)}{K(k)}, \quad v = \frac{c_2 k \cos \psi_0}{2nK(k)}; \quad (18.2)$$

$$0 < k \leq k_* \approx 0,855,$$

$$-\pi < \psi_0 < \pi, \quad \psi_0 \neq 0, \quad \psi_1 = 2\pi n + \psi_0, \quad n = 1, 2, \dots;$$

$$k_* < k < k_{**} \approx 0,909,$$

$$\psi_0 \in \left\{ [-\psi_*, -\pi + \psi_*] \cup [\pi - \psi_*, \psi_*] \right\}, \quad \psi_1 = 2\pi + \psi_0,$$

$$n = 1;$$

$$k = k_{**} \approx 0,909,$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \psi_0 \leq \frac{3\pi}{2}, \quad \psi_1 = 2\pi + \psi_0, \quad n = 1;$$

$$2. \quad k > 1,$$

$$c_2 = \frac{2E(\tilde{k}) - (2 - \tilde{k}^2)K(\tilde{k})}{\tilde{k}^2 K(\tilde{k})}, \quad v = \frac{nc_2 \sqrt{1 - \tilde{k}^2 \sin^2 \psi_0}}{\tilde{k}^2 K(\tilde{k})},$$

$$\tilde{k} = \frac{1}{k}, \quad -\psi_* \leq \psi_0 \leq \psi_*, \quad \psi_0 \neq 0,$$

$$\text{а) } \psi_1 = \pi + \psi_0, \quad n = 1;$$

$$\text{б) } \psi_1 = -\pi + \psi_0, \quad n = -1.$$

Здесь  $k_*$ ,  $k_{**}$ ,  $\psi_*$  — корни уравнений (17.2), (17.3), (17.5). Для значений  $k$  из интервала  $k_{**} < k \leq 1$  несимметричные формы равновесия не существуют. Случай  $k > 1$ ,  $n = 1$  соответствует уравнениям (16.23), случай  $k > 1$ ,  $n = -1$  соответствует уравнениям (16.25).

Параметры  $t$ ,  $d$  вычисляются по формулам

$$1. \quad t = \frac{1}{16n^2 K^2(k)}, \quad d = \frac{k \cos \psi_0}{2nK(k)}, \quad (18.3)$$

$$0 < k \leq k_* \approx 0,855, \quad n = 1, 2, \dots;$$

$$k_* < k \leq k_{**} \approx 0,909, \quad n = 1;$$

$$2. \quad k > 1, \quad t = \frac{1}{4\tilde{k}^2 K^2(\tilde{k})}, \quad d = \frac{n\sqrt{1 - \tilde{k}^2 \sin^2 \psi_0}}{\tilde{k}^2 K(\tilde{k})}, \quad \tilde{k} = \frac{1}{k}.$$

При всех значениях  $\psi_0 \in \mathbf{R}$  можно перейти к значениям, рассмотренным в (18.2), сдвигом вдоль оси  $\psi_0$ .

### 18.3. Уравнения для симметричных форм

Рассмотрим формулы (18.1) со знаком минус. Исключая из (16.13), (16.18), (16.23), (16.25) параметры  $t$ ,  $d$  и учитывая интервалы изменения  $\psi_0$ ,  $\psi_1$  в (17.1), найдем уравнения, связывающие  $k$ ,  $\psi_0$  и  $c_2$ ,  $v$ :

$$1. \quad c_2 = -1 + \frac{4nE(k) - 2E(\psi_0, k)}{2nK(k) - F(\psi_0, k)}, \quad (18.4)$$

$$v = \frac{c_2 k \cos \psi_0}{2nK(k) - F(\psi_0, k)} + \frac{k \sin \psi_0 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi_0}}{[2nK(k) - F(\psi_0, k)]^2};$$

$$0 < k \leq k_* \approx 0,855$$

$$\text{а) } -\pi \leq \psi_0 < 0, \quad \psi_1 = -\psi_0, \quad n = 0;$$

$$\text{б) } -\pi \leq \psi_0 < \pi, \quad \psi_1 = 2\pi n - \psi_0, \quad n = 1, 2, \dots;$$

$$k_* < k < 1$$

$$\text{а) } -\psi_* \leq \psi_0 < 0, \quad \psi_1 = -\psi_0, \quad n = 0;$$

$$\text{б) } \pi - \psi_* \leq \psi_0 < \pi, \quad \psi_1 = 2\pi - \psi_0, \quad n = 1;$$

$$2. \quad k = 1$$

$$c_2 = -1 - 4 \sin \psi_0 \ln^{-1} \frac{1 - \sin \psi_0}{1 + \sin \psi_0},$$

$$v = 2c_2 \cos \psi_0 \ln^{-1} \frac{1 - \sin \psi_0}{1 + \sin \psi_0} + 2 \sin(2\psi_0) \ln^{-2} \frac{1 - \sin \psi_0}{1 + \sin \psi_0},$$

$$\text{а) } -\psi_* \leq \psi_0 < 0, \quad \psi_1 = -\psi_0, \quad n = 0,$$

$$\text{б) } \pi < \psi_0 \leq \pi + \psi_*, \quad \psi_1 = 2\pi - \psi_0, \quad n = 1;$$

$$\psi_* \approx 1,278;$$

3.  $k > 1$

$$c_2 = 1 - \frac{2}{\tilde{k}^2} + \frac{2[nE(\tilde{k}) - E(\psi_0, \tilde{k})]}{\tilde{k}^2 [nK(\tilde{k}) - F(\psi_0, \tilde{k})]},$$

$$v = \frac{c_2 \sqrt{1 - \tilde{k}^2 \sin^2 \psi_0}}{\tilde{k}^2 [nK(\tilde{k}) - F(\psi_0, \tilde{k})]} + \frac{\sin(2\psi_0)}{2\tilde{k}^2 [nK(\tilde{k}) - F(\psi_0, \tilde{k})]^2},$$

$$\tilde{k} = \frac{1}{k};$$

$$\text{а) } -\psi_* \leq \psi_0 < \psi_*, \quad \psi_0 \neq 0, \quad \psi_1 = -\psi_0, \quad n = 0;$$

$$\text{б) } k \leq k_{***}, \quad -\psi_* \leq \psi_0 < \frac{\pi}{2};$$

$$k > k_{***}, \quad -\psi_{**} \leq \psi_0 < \frac{\pi}{2};$$

$$\psi_1 = \pi - \psi_0, \quad n = 1;$$

$$\text{в) } k \leq k_{***}, \quad -\frac{\pi}{2} < \psi_0 \leq \psi_*;$$

$$k > k_{***}, \quad -\frac{\pi}{2} < \psi_0 \leq \psi_{**};$$

$$\psi_1 = -\pi - \psi_0, \quad n = -1.$$

Здесь случай  $k > 1$ ,  $n = 0$ ,  $\psi_0 < 0$  и случай  $k > 1$ ,  $n = 1$  соответствуют уравнениям (16.23). Случай  $k > 1$ ,  $n = 0$ ,  $\psi_0 > 0$  и случай  $k > 1$ ,  $n = -1$  соответствуют уравнениям (16.25).

Параметры  $t$ ,  $d$  определяются однозначно по формулам

$$1. \quad t = \frac{1}{4[2nK(k) - F(\psi_0, k)]^2}, \quad d = \frac{k \cos \psi_0}{2nK(k) - F(\psi_0, k)}, \quad (18.5)$$

$$0 < k < 1;$$

$$2. \quad t = \ln^{-2} \frac{1 - \sin \psi_0}{1 + \sin \psi_0}, \quad d = 2 \cos \psi_0 \ln^{-1} \frac{1 - \sin \psi_0}{1 + \sin \psi_0},$$

$$k = 1;$$

$$3. \quad t = \frac{1}{4\tilde{k}^2 [nK(\tilde{k}) - F(\psi_0, \tilde{k})]^2}, \quad d = \frac{\sqrt{1 - \tilde{k}^2 \sin^2 \psi_0}}{\tilde{k}^2 [nK(\tilde{k}) - F(\psi_0, \tilde{k})]},$$

$$\tilde{k} = \frac{1}{k}, \quad k > 1.$$

При всех значениях  $\psi_0 \in \mathbf{R}$  можно перейти к значениям, рассмотренным в (18.4), сдвигом вдоль оси  $\psi_0$ .

#### 18.4. Конечное число форм равновесия при фиксированном значении $n$

Форма равновесия мягкой оболочки однозначно определяется значением тройки  $(k, \psi_0, \psi_1)$ . Поэтому при фиксированном значении  $n$  конечность числа форм равновесия равносильна конечности числа решений  $(k, \psi_0)$  уравнений (18.2), (18.4) для заданных  $c_2, v$ .

##### 18.4.1. Несимметричные формы, $k < 1$

Рассмотрим уравнения (18.2) и следующее множество значений  $k, \psi_0$ :

$$M_{k, \psi_0} = \left\{ (k, \psi_0) : 0 \leq k \leq k_{**}, -\pi \leq \psi_0 \leq \frac{3\pi}{2} \right\},$$

$$k_{**} \approx 0,909, \quad n \geq 1.$$

Значения  $k, \psi_0$  из (18.2) при  $k < 1$  принадлежат множеству  $M_{k, \psi_0}$ . Формулы (18.2) задают отображение множества  $M_{k, \psi_0}$  на множество  $M_{c_2, v}$ :

$$f : M_{k, \psi_0} \longrightarrow M_{c_2, v}. \quad (18.6)$$

Функции (18.2) — аналитические функции от  $k, \psi_0$  на множестве  $M_{k, \psi_0}$ . Якобиан функций (18.2) равен

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial c_2}{\partial k} & \frac{\partial c_2}{\partial \psi_0} \\ \frac{\partial v}{\partial k} & \frac{\partial v}{\partial \psi_0} \end{pmatrix}.$$

$\det D$  — аналитическая на  $M_{k, \psi_0}$  функция, не равная тождественно нулю, так как

$$\det D = \frac{2k^2}{n\pi} + O(k^3) \neq 0 \quad 0 < k \ll 1, \quad \psi_0 = \frac{\pi}{2}, \quad n \geq 1.$$

Отсюда следует, что множество нулей функции  $\det D$  на  $M_{k, \psi_0}$  имеет нулевую (по Лебегу) меру. Обозначим

$$M_{k, \psi_0}^* = \left\{ (k, \psi_0) : (k, \psi_0) \in M_{k, \psi_0}, \det D \neq 0 \right\}.$$

$M_{k,\psi_0}^*$  — множество критических точек отображения (18.6). Рассмотрим образ  $M_{k,\psi_0}^*$  при отображении (18.6):

$$f : M_{k,\psi_0}^* \longrightarrow M_{c_2,v}^*.$$

$M_{c_2,v}^*$  — множество критических значений отображения (18.6). Так как отображение аналитическое, то  $M_{c_2,v}^*$  имеет нулевую меру Лебега,  $M_{c_2,v}^* \subset M_{c_2,v}$ .

Рассмотрим некритические значения  $(c_2, v)$ , то есть значения  $(c_2, v)$  из множества

$${}^*M_{c_2,v} = \left\{ (c_2, v) : (c_2, v) \in M_{c_2,v}, (c_2, v) \notin M_{c_2,v}^* \right\}.$$

Прообраз каждой точки  $(c_2, v) \in {}^*M_{c_2,v}$  состоит из решений  $(k, \psi_0)$  уравнений (18.2), рассматриваемых как уравнения относительно  $k, \psi_0$ . Так как все точки прообраза  $(c_2, v)$  некритические (в них  $\det D \neq 0$ ) и множество  $M_{k,\psi_0}$  ограничено и замкнуто, то число точек прообраза, то есть число решений  $(k, \psi_0)$  уравнений (18.2), конечно.

[Если предположить, что число решений  $(k, \psi_0)$  уравнений (18.2) бесконечно, то (так как множество  $M_{k,\psi_0}$  ограничено и замкнуто) точки  $(k, \psi_0)$  имеют предельную точку  $(k_\infty, \psi_{0\infty}) \in M_{k,\psi_0}$ . Так как функции  $c_2(k, \psi_0), v(k, \psi_0)$  непрерывны, то  $(k_\infty, \psi_{0\infty})$  — тоже решение.  $\det D = 0$  в точке  $(k_\infty, \psi_{0\infty})$ , так как иначе точка  $(k_\infty, \psi_{0\infty})$  была бы изолированной. Пришли к противоречию, так как  $\det D \neq 0$  (из-за выбора значения  $(c_2, v)$ :  $(c_2, v)$  — некритическое значение, принадлежит множеству  ${}^*M_{c_2,v}$ ).]

Получили: для почти всех значений  $(c_2, v)$  уравнения (18.2) при фиксированном значении  $n$  имеют конечное число решений со значением  $k < 1$ .

Доказательство конечности числа решений остальных уравнений (18.2), (18.4) при фиксированном значении  $n$ , в основном, аналогично доказательству в п. 18.4.1. Приведем формулы для множества  $M_{k,\psi_0}$ , которое можно использовать при доказательстве, и рассмотрим некоторые особенности доказательства. Для этого введем число  $\delta$  следующим образом.

При  $k = 1$  число  $\psi_* \approx 1,278$ . Так как  $\psi_*$  непрерывно зависит от  $k$  (смотрите уравнения (17.5)), то существует такое значение  $\delta > 0$ , что при  $k \in [1 - \delta, 1 + \delta]$  число  $\psi_* \in [\pi/4, 1, 4]$ . Зафиксируем это значение  $\delta$  и обозначим

$$\tilde{\delta} = \frac{1}{1 + \delta} < 1.$$

При  $k \in [1 - \delta, 1 + \delta]$  справедливы вложения

$$[-\psi_*, 0] \subseteq [-1, 4, 0], \quad [0, \psi_*] \subseteq [0, 1, 4], \quad [-\psi_*, \psi_*] \subseteq [-1, 4, 1, 4].$$

### 18.4.2. Несимметричные формы, окрестность точки $k = 1$ при $k > 1$

На множестве

$$1 < k \leq 1 + \delta, \quad -1,4 \leq \psi_0 \leq 1,4$$

конечность числа решений  $(k, \psi_0)$  уравнений (18.2) можно доказать, не используя разложения  $K, E$  в ряды при  $\tilde{k} \approx 1$  [21]. При этом нужно уменьшить значение  $\delta > 0$  до необходимого.

### 18.4.3. Несимметричные формы, $k \geq 1 + \delta$

$$M_{\tilde{k}, \psi_0} = \left\{ (\tilde{k}, \psi_0) : 0 \leq \tilde{k} \leq \tilde{\delta}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \psi_0 \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

### 18.4.4. Симметричные формы, $k < 1, \psi_0 \geq 0, n = 1$

Введем вместо  $\psi_0$  параметр  $\chi$  по формуле  $\chi = \pi - \psi_0$ . Уравнения (18.4) примут вид

$$c_2 = -1 + \frac{2E(\chi, k)}{F(\chi, k)}, \quad c = \frac{-c_2 k \cos \chi}{F(\chi, k)} + \frac{k \sin \chi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \chi}}{F^2(\chi, k)};$$

$$0 < k \leq k_* \approx 0,855, \quad 0 < \chi \leq \pi;$$

$$k_* < k < 1, \quad 0 < \chi \leq \psi_*; \quad n = 1.$$

Для написанных уравнений достаточно рассмотреть множество

$$M_{k, \chi} = \left\{ (k, \chi) : 0 \leq k \leq 1 - \delta, \quad 0 \leq \chi \leq \pi; \right. \\ \left. 1 - \delta \leq k \leq 1, \quad 0 \leq \chi \leq 1,4 \right\}, \quad n = 1.$$

### 18.4.5. Симметричные формы, окрестность точки $k = 1, \psi_0 = \pi/2$ при $k > 1, n = 1$

Перейдем к новым параметрам  $r, \theta$  по формулам

$$r = \sqrt{1 - \tilde{k}^2 \sin^2 \psi}, \quad (18.7)$$

$$\sin \theta = \frac{\tilde{k} \cos \psi}{\sqrt{1 - \tilde{k}^2 \sin^2 \psi}}, \quad \cos \theta = \sqrt{\frac{1 - \tilde{k}^2}{1 - \tilde{k}^2 \sin^2 \psi}}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Обратные формулы имеют вид

$$\tilde{k} = \sqrt{1 - r^2 \cos^2 \theta}, \quad (18.8)$$

$$\sin \psi = \sqrt{\frac{1 - r^2}{1 - r^2 \cos^2 \theta}}, \quad \cos \psi = \frac{r \sin \theta}{\sqrt{1 - r^2 \cos^2 \theta}}.$$

Окрестность точки  $k = 1$ ,  $\psi_0 = \pi/2$  при  $k > 1$ ,  $\psi_0 < \pi/2$  переходит по формулам (18.7) на множество

$$0 < r_0 \ll 1, \quad 0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}.$$

При движении по отрезку  $\tilde{k} = \text{const}$ ,  $\psi_0 \leq \psi \leq \pi/2$  точка  $(r, \theta)$  перемещается от  $(r_0, \theta_0)$  к  $(r_1, 0)$ , где

$$r_0 = \sqrt{1 - \tilde{k}^2 \sin^2 \psi_0}, \quad r_1 = \sqrt{1 - \tilde{k}^2}, \quad r_0 \geq r_1, \quad (18.9)$$

$$\sin \theta_0 = \frac{\tilde{k} \cos \psi_0}{\sqrt{1 - \tilde{k}^2 \sin^2 \psi_0}}, \quad \cos \theta_0 = \sqrt{\frac{1 - \tilde{k}^2}{1 - \tilde{k}^2 \sin^2 \psi_0}}, \quad 0 \leq \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}.$$

При этом справедливы формулы

$$\cos \theta \, dr - r \sin \theta \, d\theta = 0, \quad d\psi = -\frac{r d\theta}{\cos \theta \sqrt{1 - r^2}}, \quad (18.10)$$

$$\begin{aligned} K(\tilde{k}) - F(\psi_0, \tilde{k}) &= \int_{\psi_0}^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \tilde{k}^2 \sin^2 \psi}} - \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\cos \theta \sqrt{1 - r^2}} \\ &= I \left[ 1 + O(r_0^2) \right], \end{aligned}$$

$$E(\tilde{k}) - E(\psi_0, \tilde{k}) = \int_{\psi_0}^{\pi/2} \sqrt{1 - \tilde{k}^2 \sin^2 \psi} \, d\psi - \int_0^{\theta_0} \frac{r^2 d\theta}{\cos \theta \sqrt{1 - r^2}} =$$

$$= \int_0^{\theta_0} \frac{r^2}{\cos \theta} \left[ 1 + O(r^2) \right] d\theta = \int_0^{\theta_0} \frac{1 - \tilde{k}^2}{\cos^3 \theta} d\theta \left[ 1 + O(r_0^2) \right] =$$

$$= \frac{I r_0^2}{2} \left( 1 - q^2 + \frac{q}{I} \right) \left[ 1 + O(r_0^2) \right],$$

$$I = \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\cos \theta} = \ln \sqrt{\frac{1+q}{1-q}}, \quad q = \sin \theta_0.$$

Из (18.4), (18.8)–(18.10) получим следующие формулы для  $c_2$ ,  $v$ :

$$c_2 = 1 - \frac{2}{1 - r_0^2 \cos^2 \theta_0} \left[ 1 - \frac{E(\tilde{k}) - E(\psi_0, \tilde{k})}{K(\tilde{k}) - F(\psi_0, \tilde{k})} \right] = \quad (18.11)$$

$$\begin{aligned}
& -1 - r_0^2 \left(1 - q^2 - \frac{q}{I}\right) + \left(1 + \frac{q}{I}\right) O(r_0^4), \\
v &= \frac{c_2 r_0}{(1 - r_0^2 \cos^2 \theta_0) \left[ \mathcal{K}(\tilde{k}) - F(\psi_0, \tilde{k}) \right]} + \frac{r_0 \sin \theta_0 \sqrt{1 - r_0^2}}{(1 - r_0^2 \cos^2 \theta_0)^2 \left[ \mathcal{K}(\tilde{k}) - F(\psi_0, \tilde{k}) \right]^2} - \\
& - \frac{r_0}{I} \left(1 - \frac{q}{I}\right) + \frac{1}{I} \left(1 + \frac{q}{I}\right) O(r_0^3), \\
I &= \ln \sqrt{\frac{1+q}{1-q}}, \quad q = \sin \theta_0.
\end{aligned}$$

Рассматривая (18.11) как уравнения относительно  $r_0$ ,  $\theta_0$ , получим: существует такое значение  $\delta_1$ ,  $0 < \delta_1 \ll 1$ , что для почти всех значений  $(c_2, v)$  уравнения (18.11) имеют конечное число решений на множестве

$$0 < r_0 \leq \delta_1, \quad 0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда следует: для почти всех значений  $(c_2, v)$  уравнения (18.4) имеют конечное число решений при

$$\sqrt{1 - \delta_1^2} < \tilde{k} < 1, \quad \frac{\pi}{2} - \delta_2 < \psi_0 < \frac{\pi}{2},$$

где

$$\sin \delta_2 = \frac{\delta_1}{\sqrt{1 - \delta_1^2}}, \quad 0 < \delta_2 \ll 1.$$

#### 18.4.6. Симметричные формы, окрестность точки $k = 1$ при $k > 1$ , $\psi_0 \leq \pi/2 - \delta_2$ , $n = 1$

Разлагая функции (18.4) в ряды по степеням  $1 - \tilde{k}^2$ , можно получить следующий результат: существует такое значение  $\delta_3 > 0$ , что для почти всех значений  $(c_2, v)$  уравнения (18.4) имеют конечное число решений на множестве

$$1 - \delta_3 \leq \tilde{k} < 1, \quad -1,4 \leq \psi_0 \leq \frac{\pi}{2} - \delta_2.$$

#### 18.4.7. Симметричные формы, $n \geq 0$

Часть значений  $(k, \psi_0)$  рассмотрена в п. 18.4.4–18.4.6. Остальные значения  $(k, \psi_0)$  можно рассмотреть так же, как в п. 18.4.1. При этом можно использовать следующие множества  $M_{k, \psi_0}$ :

$$M_{k, \psi_0} : 0 \leq k \leq 1 - \delta, \quad -\pi \leq \psi_0 \leq 0, \quad n = 0;$$



$$\begin{aligned}
1 - \delta \leq k \leq 1, & \quad -1,4 \leq \psi_0 \leq 0, & n = 0; \\
0 \leq k \leq k_*, & \quad -\pi \leq \psi_0 \leq 0, & n = 1; \\
0 \leq k \leq k_*, & \quad -\pi \leq \psi_0 \leq \pi, & n = 2, 3, \dots; \\
0 \leq \tilde{k} \leq \tilde{\delta}, & \quad -\frac{\pi}{2} \leq \psi_0 \leq \frac{\pi}{2}; & n = 0; \\
\tilde{\delta} \leq \tilde{k} \leq 1, & \quad -1,4 \leq \psi_0 \leq 1,4, & n = 0; \\
0 \leq \tilde{k} \leq \sqrt{1 - \delta_1^2}, & \quad \frac{\pi}{2} - \delta_2 \leq \psi_0 \leq \frac{\pi}{2}, & n = 1; \\
0 \leq \tilde{k} \leq 1 - \delta_3, & \quad -\frac{\pi}{2} \leq \psi_0 \leq \frac{\pi}{2} - \delta_2, & n = 1; \\
\tilde{k} = \frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

#### 18.4.8. Симметричные формы, $k > 1$ , $n = -1$

Этот случай сводится к случаю  $k > 1$ ,  $n = 1$  заменой параметров  $v, \psi_0$  на  $\bar{v}, \bar{\psi}_0$  по формулам

$$v = -\bar{v}, \quad \psi_0 = -\bar{\psi}_0.$$

Из п. 18.4.1–18.4.8 следует, что справедливо

**Утверждение 18.1.** *Для почти всех значений  $(c_2, v)$  уравнения (18.2), (18.4) при фиксированном значении  $n$  имеют конечное число решений  $(k, \psi_0)$ .*

### 18.5. Счетное число форм равновесия

Устремим в (18.2), (18.4)  $n$  к  $\infty$ . Для несимметричных форм получим уравнения

$$c_2 - \frac{2E(k) - K(k)}{K(k)}, \quad v - \frac{c_2 k \cos \psi_0}{2nK(k)} = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (18.12)$$

$$0 < k \leq k_* \approx 0,855, \quad -\pi < \psi_0 < \pi, \quad \psi_0 \neq 0.$$

Для симметричных форм уравнения имеют вид

$$c_2 - \frac{2E(k) - K(k)}{K(k)} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (18.13)$$

$$v - \frac{c_2 k \cos \psi_0}{2nK(k)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

$$0 < k \leq k_* \approx 0,855, \quad -\pi \leq \psi_0 < \pi.$$

Функция

$$f(k) = \frac{2E(k) - K(k)}{K(k)}$$

монотонно убывает на отрезке  $0 \leq k \leq k_* \approx 0,855$ ,

$$f(0) = 1, \quad f(k_*) = \frac{2E(k_*) - K(k_*)}{K(k_*)} = c_{2*} \approx 0,151.$$

Отсюда и из (18.12), (18.13) следует, что для любого значения  $c_2 \in (c_{2*}, 1)$  существует единственное решение  $k = k_c$  для несимметричных форм и при достаточно больших значениях  $n$  единственное решение  $k = k_c + O(1/n)$  для симметричных форм. Число  $k_c \in (0, k_*)$ . Таким образом, счетное число значений  $n$  возможно только в случае, когда жидкость находится в верхней полости, так как множество  $c_2 > 0$  соответствует именно этому случаю.

Из (18.12), (18.13) следует, что если  $v \neq 0$ , то при достаточно больших значениях  $n$  решение уравнений не существует, так как по формулам  $v = O(1/n)$ . При  $v = 0$  для несимметричных форм

$$\psi_0 = \pm \frac{\pi}{2},$$

для симметричных форм

$$\psi_0 = \pm \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Таким образом, получили следующие утверждения.

**Утверждение 18.2.** *Если жидкость находится в верхней полости и  $c_2 \in (c_{2*}, 1)$ ,  $v = 0$ , то существует счетное число несимметричных форм равновесия с  $n \geq 1$  и счетное число симметричных форм равновесия с  $n \geq n_*$ , где  $n_*$  зависит от  $c_2$ .*

**Утверждение 18.3.** *Если жидкость находится в верхней полости и  $c_2 = c_{2*}$ ,  $v = 0$ , то существует счетное число несимметричных форм равновесия с  $n \geq 1$ .*

## 18.6. Конечное число форм равновесия при $v = 0$ и фиксированном значении $n$

**Утверждение 18.4.** *Для почти всех значений  $c_2$  уравнения (18.2), (18.4) при  $v = 0$  и фиксированном значении  $n$  имеют конечное число решений  $(k, \psi_0)$ .*

*Доказательство.* Рассмотрим уравнения (18.4) при

$$v = 0, \quad 0 < k \leq 1 - \delta, \quad -\pi \leq \psi_0 \leq 0, \quad n = 0. \quad (18.14)$$

На множестве (18.14) уравнения (18.4) эквивалентны следующим:

$$c_2 = \frac{2E(\psi_0, k) - F(\psi_0, k)}{F(\psi_0, k)}, \quad (18.15)$$

$$\widehat{v} \equiv -\frac{c_2 \cos \psi_0}{F(\psi_0, k)} + \frac{\sin \psi_0 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi_0}}{F^2(\psi_0, k)} = 0;$$

$$0 < k \leq k_* \approx 0,855, \quad -\pi \leq \psi_0 < 0;$$

$$k_* < k \leq 1 - \delta, \quad -\psi_* \leq \psi_0 < 0.$$

(Доказательство утверждения 18.4 для уравнений (18.15) аналогично доказательству в п. 18.4.1). Рассмотрим следующее множество значений  $k, \psi_0$ :

$$M_{k, \psi_0} = \left\{ (k, \psi_0) : \widehat{v}(k, \psi_0) = 0, 0 \leq k \leq 1 - \delta, -\pi \leq \psi_0 \leq 0 \right\}.$$

Значения  $k, \psi_0$  из (18.15) принадлежат множеству  $M_{k, \psi_0}$ . Формула (18.15) для  $c_2$  задает отображение множества  $M_{k, \psi_0}$  на множество  $M_{c_2}$ :

$$f : M_{k, \psi_0} \longrightarrow M_{c_2}. \quad (18.16)$$

Рассмотрим определитель якобиана

$$\det \widehat{D} = \begin{vmatrix} \frac{\partial c_2}{\partial k} & \frac{\partial c_2}{\partial \psi_0} \\ \frac{\partial \widehat{v}}{\partial k} & \frac{\partial \widehat{v}}{\partial \psi_0} \end{vmatrix}.$$

Функция  $\det \widehat{D}$  не равна тождественно нулю на множестве  $M_{k, \psi_0}$ , так как в точке  $k = k_{**} \approx 0,909, \psi_0 = -\pi$  имеем

$$\widehat{v}(k_{**}, -\pi) = 0, \quad \det \widehat{D}(k_{**}, -\pi) = \frac{1}{2k_{**}(1 - k_{**}^2)K^2(k_{**})} \neq 0.$$

Отсюда следует, что множество нулей функции  $\det \widehat{D}$  на  $M_{k, \psi_0}$  имеет нулевую (по Лебегу) меру. Обозначим

$$M_{k, \psi_0}^* = \left\{ (k, \psi_0) : (k, \psi_0) \in M_{k, \psi_0}, \det \widehat{D} = 0 \right\}.$$

$M_{k, \psi_0}^*$  — множество критических точек отображения (18.16). Рассмотрим образ  $M_{k, \psi_0}^*$  при отображении (18.16):

$$f : M_{k, \psi_0}^* \longrightarrow M_{c_2}^*.$$

$M_{c_2}^*$  — множество критических значений отображения (18.16),  $M_{c_2}^*$  имеет нулевую меру Лебега,  $M_{c_2}^* \subset M_{c_2}$ .

Рассмотрим некритические значения  $c_2$ , то есть значения  $c_2$  из множества

$${}^*M_{c_2} = \left\{ c_2 : c_2 \in M_{c_2}, \quad c_2 \notin M_{c_2}^* \right\}.$$

Прообраз каждой точки  $c_2 \in {}^*M_{c_2}$  состоит из решений  $(k, \psi_0)$  уравнений (18.15), рассматриваемых как уравнения относительно  $k, \psi_0$ . Так как все точки прообраза  $c_2$  некритические (в них  $\det \widehat{D} \neq 0$ ) и множество  $M_{k, \psi_0}$  ограничено и замкнуто, то число точек прообраза, то есть число решений  $(k, \psi_0)$  уравнений (18.15), конечно.

Получили: для почти всех значений  $c_2$  уравнения (18.4) при  $v = 0$  и  $n = 0$  имеют конечно число решений со значением  $k \leq 1 - \delta$ .

Остальные уравнения (18.2), (18.4) при фиксированном значении  $n$  и  $v = 0$  рассматриваются аналогично приведенному доказательству и доказательству в п. 18.4.

## 18.7. Окончание доказательства теорем 18.1, 18.2

Так как при  $c_2 \notin [c_{2*}, 1)$  или  $c_2 \in [c_{2*}, 1)$ ,  $v \neq 0$  число  $n$  ограничено сверху, то отсюда и из утверждений 18.1–18.4 следует, что справедливы теоремы 18.1, 18.2.

## 18.8. Замечания

*Замечание 18.1.* Теоремы 18.1, 18.2 сформулированы для форм равновесия, не имеющих изломов и участков слипания. Возможно, что при всех  $c_2 \in (0, 1)$  и  $v = 0$  число форм равновесия счетно (жидкость находится в верхней полости).

*Замечание 18.2.* В теоремах 18.1, 18.2 область значений  $c_2, v$  определяется неравенствами  $|c_2| \leq 1, |v| \leq v^c$ , где  $v^c$  — значение (13.8).

*Замечание 18.3.* Отдельное рассмотрение множества

$$M_{c_2, v} = \{(c_2, v) : v = 0\}$$

в п. 18.6 вызвано тем, что это множество имеет в пространстве всех допустимых значений  $(c_2, v)$  нулевую меру Лебега.

## §19. Пример решения плоской задачи равновесия

Найдем формы равновесия для оболочки с параметрами

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \pm \frac{1}{3}, \quad v^{\circ} \approx 0,133. \quad (19.1)$$

Длина направляющей оболочки в 3 раза превышает расстояние между точками крепления. Знак плюс в (19.1) соответствует случаю, когда жидкость находится в верхней полости, знак минус — когда жидкость находится в нижней полости.  $v^{\circ}$  — максимальное значение  $|v|$  при данных значениях  $c_1, c_2$ , найденное по формуле (13.8).

Формы равновесия оболочки показаны на рис. 19.1, 19.2. В случае, когда оболочка не имеет изломов и участков сгибания, эти формы построены по формулам (14.3), (16.10), (16.21), (16.24). Численные значения параметров представленных форм даны в табл. 19.1, 19.2. Эти значения получены из (18.1)—(18.5) по заданным  $c_2 = \pm 1/3, v$ . Параметры  $k, \psi_0, \psi_1$  однозначно определяют форму равновесия в (16.10), (16.21), (16.24). Целое число  $n$  входит в формулы (18.1), связывающие углы  $\psi_0, \psi_1$ .  $t$  — усилие оболочки.  $d$  — постоянная в формуле для гидростатического давления.  $\Pi$  — потенциальная энергия жидкости (смотрите п. 19.4).

### 19.1. Жидкость в верхней полости.

На рис. 19.1 показаны формы равновесия оболочки для значений (19.1) в случае, когда жидкость находится в верхней полости ( $c_2 = 1/3$ ). Численные значения параметров представленных форм даны в табл. 19.1.

Кривая 10 на рис. 19.1 (горизонтальный отрезок  $0 \leq x \leq c_2 = 1/3, z = 0$ ) является единственной формой равновесия оболочки с одноосными областями (смотрите результат 14.1). Под кривой 10 расположены формы равновесия, симметричные относительно вертикальной плоскости  $x = c_2/2$  («симметричные формы»).

Под кривой 10 находятся формы равновесия, не обладающие симметрией относительно вертикальной плоскости  $x = c_2/2$  («несимметричные формы»).

На одной вертикали на рис. 19.1 расположены формы равновесия (кроме форм 1, 19) с одинаковым значением  $v$ . Формы 1, 19, обозначенные пунктирными линиями, соответствуют максимально возможному значению  $|v| = v^{\circ} \approx 0,133$  и являются дугами окружностей.

Несимметричные формы равновесия существуют при

$$|v| < v_* \approx 0,066.$$

$v_*$  является бифуркационным значением  $v$  в следующем смысле: при  $|v| \geq v_*$  существуют только симметричные формы равновесия, при  $|v| < v_*$  существуют симметричные и несимметричные формы равновесия.

При  $v \rightarrow 0$  число форм равновесия (и симметричных, и несимметричных) увеличивается. При  $v = 0$  существует счетное число симметричных и несимметричных форм равновесия. На рис. 19.1 этот факт условно обозначен многоточием между формами 9, 10 и многоточием между формами 10, 11. При  $n \rightarrow \infty$  направляющая поверхности  $S$  стремится к горизонтальному отрезку  $0 \leq x \leq c_2, z = 0$  (кривой 10 на рис. 19.1),  $t \rightarrow 0, d \rightarrow 0$ .

Следующие кривые на рис. 19.1 симметричны одна другой относительно:

- 1) горизонтальной плоскости: 1 и 19, 2 и 18, 3 и 15, 4 и 17, 5 и 16, 6 и 7, 8 и 9, 11 и 12, 13 и 14;
- 2) вертикальной плоскости  $x = c_2/2$ : 4 и 5, 11 и 12, 13 и 14, 16 и 17;
- 3) горизонтальной оси  $x = c_2/2, z = 0$ : 1 и 19, 2 и 18, 3 и 15, 4 и 16, 5 и 17, 6 и 7, 8 и 9.

Симметрией относительно горизонтальной оси  $x = c_2/2, z = 0$  обладают кривые 11, 12, 13, 14 на рис. 19.1.

## 19.2. Жидкость в нижней полости

На рис. 19.2 показаны формы равновесия оболочки для значений (19.1) в случае, когда жидкость находится в нижней полости ( $c_2 = -1/3$ ). Из точек крепления оболочки проведены отрезки прямых, разделяющие жидкость и газ. Численные значения параметров представленных форм даны в табл. 19.2.

На рис. 19.2 в рамках представлены формы равновесия оболочки при  $v = 0$ . Формы 6, 7 имеют изломы, формы 9—12 имеют изломы и участки сгибания (смотрите о них в п. 19.3). Кривая 8 (горизонтальный отрезок  $-1/3 = c_2 \leq x \leq 0, z = 0$ ) является единственной формой равновесия оболочки с одноосными областями (смотрите результат 14.1).

Над кривой 8 расположены формы равновесия, симметричные относительно вертикальной плоскости  $x = c_2/2$  («симметричные формы»).

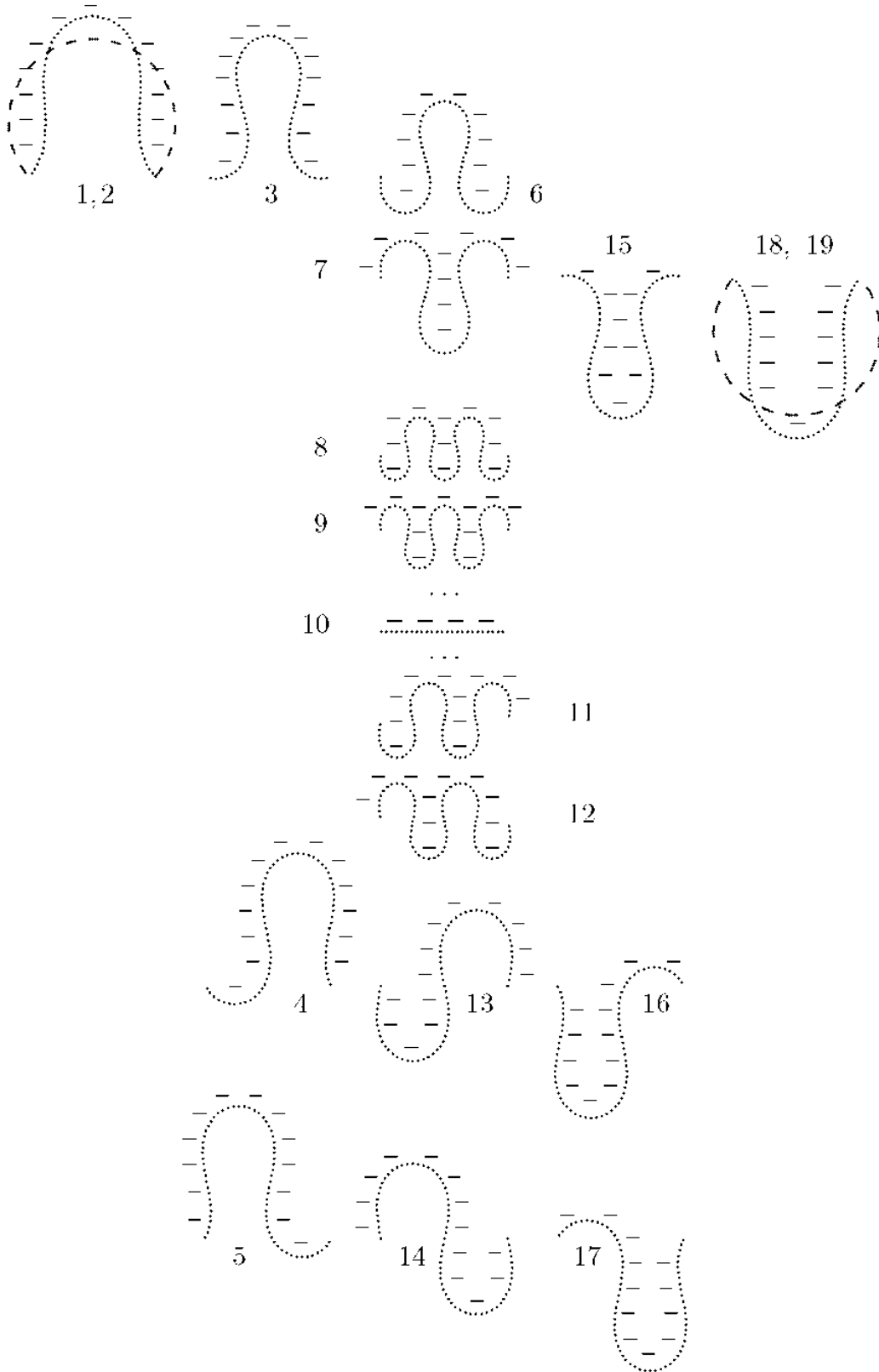


Рис. 19.1. Формы равновесия при  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 1/3$ .

Таблица 19.1. Параметры форм равновесия при  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 1/3$ .

	$v$	$k$	$\psi_0$	$\psi_1$	$n$	$l$	$d$	$\Pi$
1	0,133	$\infty$	1,139	-1,139	0	$\infty$	$-\infty$	-0,0221
2	0,100	0,728	0,575	5,708	1	0,025	0,193	-0,0193
3	0,050	0,794	-0,248	6,531	1	0,014	0,182	-0,0093
4	0,050	0,774	-0,715	5,568	1	0,016	0,150	-0,0096
5	0,050	0,774	0,715	6,998	1	0,016	0,150	-0,0096
6	0,000	0,800	-1,220	7,503	1	0,008	0,051	-0,0030
7	0,000	0,800	1,922	10,645	2	0,008	-0,051	-0,0030
8	0,000	0,783	-1,371	13,938	2	0,003	0,016	-0,0010
9	0,000	0,783	1,770	17,079	3	0,003	-0,016	-0,0010
10	0					0	0	0
11	0,000	0,774	-1,571	10,996	2	0,004	0,000	-0,0015
12	0,000	0,774	1,571	14,137	2	0,004	0,000	-0,0015
13	0,000	0,774	-1,571	4,712	1	0,016	0,000	-0,0058
14	0,000	0,774	1,571	7,854	1	0,016	0,000	-0,0058
15	-0,050	0,794	2,894	9,672	2	0,014	-0,182	-0,0093
16	-0,050	0,774	-2,427	3,856	1	0,016	-0,150	-0,0096
17	-0,050	0,774	2,427	8,710	1	0,016	-0,150	-0,0096
18	-0,100	0,728	-2,566	2,566	0	0,025	-0,193	-0,0193
19	-0,133	$\infty$	-1,139	1,139	0	$\infty$	$\infty$	-0,0221

Под кривой 8 находятся формы равновесия, не обладающие симметрией относительно вертикальной плоскости  $x = c_2/2$  («несимметричные формы»). На одной вертикали на рис. 19.2 вне рамок расположены формы равновесия (кроме форм 1, 17) с одинаковым значением  $v$ . Формы 1, 17, обозначенные пунктирными линиями, соответствуют максимально возможному значению  $|v| = v^c \approx 0,133$  и являются дугами окружностей.

Несимметричные формы равновесия, не имеющие изломов и участков слияния, существуют при

$$v_{**} \leq |v| < v_* \approx 0,122, \quad v_{**} \approx 0,042.$$

Симметричные формы равновесия, не имеющие изломов и участков слияния, существуют при

$$|v| \geq v^* \approx 0,025.$$

$v_*$  является бифуркационным значением  $v$  в следующем смысле: при  $|v| \geq v_*$  существуют только симметричные формы равновесия, при  $|v| < v_*$  существуют симметричные и несимметричные формы.



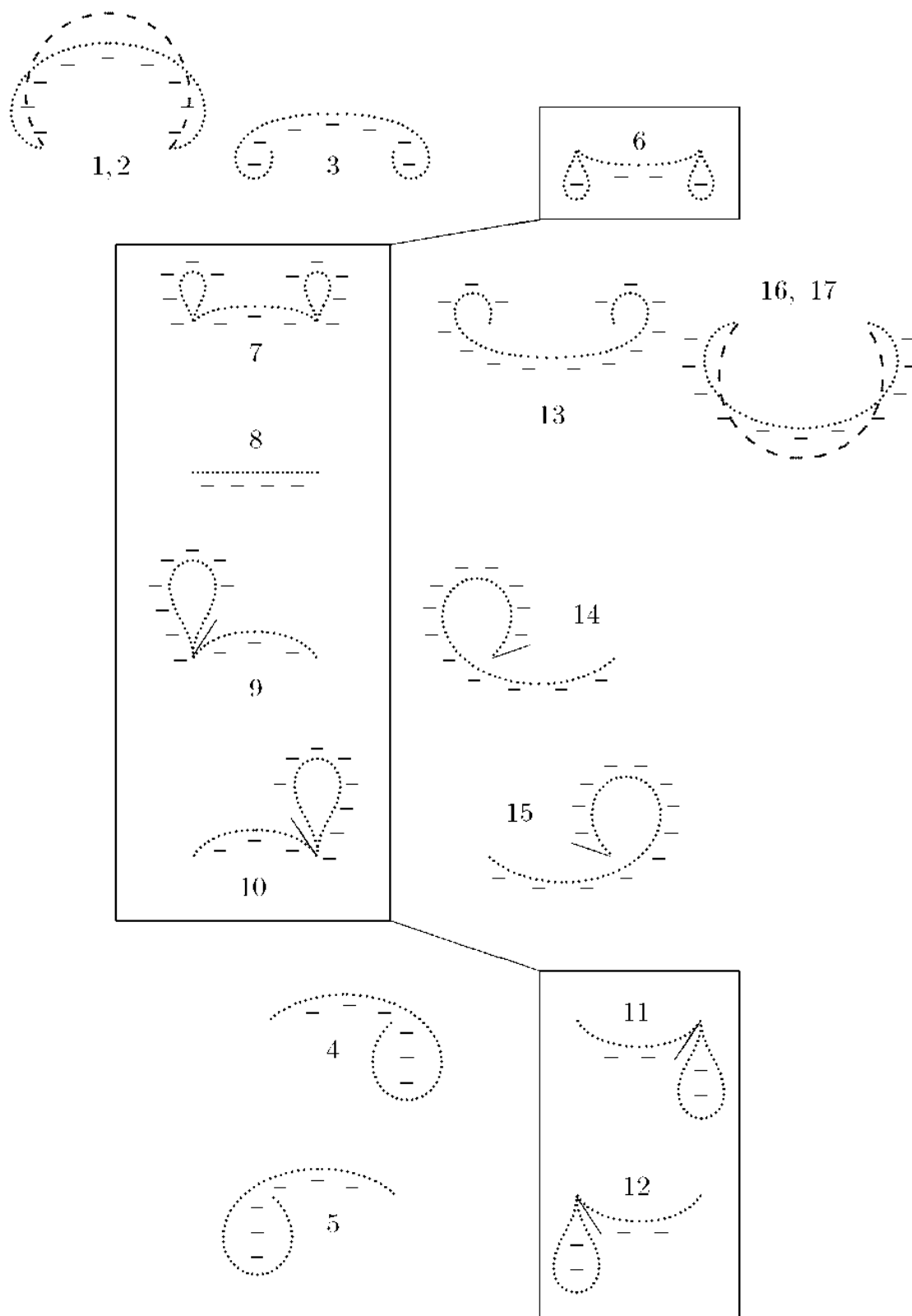


Рис. 19.2. Формы равновесия при  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = -1/3$ .

Таблица 19.2. Параметры для форм равновесия при  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = -1/3$ .

	$v$	$k$	$\psi_0$	$\psi_1$	$n$	$t$	$d$	$\pi$	$l_i$
1	-0,133	$\infty$	0,431	2,710	1	$\infty$	$\infty$	0,0221	1
2	-0,122	1,027	0	3,142	1	0,032	0,366	0,0156	1
3	-0,050	1,002	-0,975	4,116	1	0,008	0,103	0,0010	1
4	-0,050	1,027	-1,214	1,928	1	0,032	0,150	-0,0029	1
5	-0,050	1,027	1,214	4,355	1	0,032	0,150	-0,0029	1
6	0,000					0,003	-0,047	-0,0008	
		0,855	-2,127	2,127	0				0,322
		1,0005	-1,104	-2,038	-1				0,355
		0,855	-2,127	2,127	0				0,322
7	0,000					0,003	-0,047	-0,0008	
		0,855	1,014	5,269	1				0,322
		1,0005	1,104	2,038	1				0,355
		0,855	1,014	5,269	1				0,322
8	0					0	0	0	1
9	0,000					0,009	0,102	-0,0026	0,010*
		1,011	1,030	2,111	1				0,381
		0,855	0,974	5,310	1				0,598
10	0,000					0,009	0,102	-0,0026	0,010*
		0,855	0,974	5,310	1				0,598
		1,011	1,030	2,111	1				0,381
11	0,000					0,009	-0,102	-0,0026	0,010*
		0,855	-2,168	2,168	0				0,598
		1,011	-1,030	-2,111	-1				0,381
12	0,000					0,009	-0,102	-0,0026	0,010*
		1,011	-1,030	-2,111	-1				0,381
		0,855	-2,168	2,168	0				0,598
13	0,050	1,002	0,975	-4,116	-1	0,008	-0,103	0,0010	1
14	0,050	1,027	-1,214	-4,355	-1	0,032	-0,150	-0,0029	1
15	0,050	1,027	1,214	-1,928	-1	0,032	-0,150	-0,0029	1
16	0,122	1,027	0	-3,142	-1	0,032	-0,366	0,0156	1
17	0,133	$\infty$	-0,431	-2,710	-1	$\infty$	$-\infty$	0,0221	1

На рис. 19.2 даны формы равновесия для бифуркационного значения  $v = v_*$  (кривые 2, 16). Формы равновесия имеют изломы и/или участки слияния при  $|v| < v_{**}$  (несимметричные формы) и при  $|v| < v^*$  (симметричные формы).

Следующие кривые на рис. 19.2 симметричны одна другой относительно

- 1) горизонтальной плоскости: 1 и 17, 2 и 16, 3 и 13, 4 и 15, 5 и 14, 6 и 7, 9 и 12, 10 и 11;
- 2) вертикальной плоскости  $x = c_2/2$ : 4 и 5, 9 и 10, 11 и 12, 14 и 15;
- 3) горизонтальной оси  $x = c_2/2, z = 0$ : 1 и 17, 2 и 16, 3 и 13, 4 и 14, 5 и 15, 6 и 7, 9 и 11, 10 и 12.

### 19.3. Формы равновесия с изломами и участками слипания

На рис. 19.2 кривые 6, 7 имеют изломы, кривые 9–12 имеют изломы и участки слипания. Значение  $v$  для них равно 0.

При расчете форм с изломами принято дополнительное предположение, что в точках излома оболочки усилие  $t$  сохраняет непрерывность как функция. Таким образом, усилие  $t$  одно и то же во всех точках оболочки. Точки излома совпадают с точками крепления оболочки.

Если область, занимаемая жидкостью, не односвязна (как это имеет место для некоторых форм равновесия с изломами и/или участками слипания), то принято, что постоянная  $d$  одна и та же для всей жидкости.

Направляющие оболочки 6, 7, 9–12 состоят из участков слипания и гладких дуг. Гладкие дуги описываются формулами (16.10), (16.21), (16.24), только в формулах для координаты  $x$  нужно добавить слагаемое  $x(\psi_0)$ . Для представленных форм  $x(\psi_0) = 0$ , если гладкая дуга содержит начало координат, и  $x(\psi_0) = c_2 = -1/3$ , если гладкая дуга не содержит начало координат. Значения параметров гладких дуг даны в таблице 19.2.  $l_i$  — длина гладкой дуги (число без звездочки) или длина участка слипания (число со звездочкой). Участки слипания являются отрезками вертикальных прямых.

### 19.4. О устойчивости форм равновесия

Если для данного объема жидкости имеется несколько форм равновесия, то, по-видимому, не все из них устойчивы и поэтому не все из них реализуются. Наиболее вероятным кажется устойчивое и, соответственно, реализация тех форм равновесия, которым соответствует наименьшая потенциальная энергия жидкости. Формула для потенциальной энергии  $\Pi$  слоя жидкости, имеющего единичную толщину по оси  $Y$ , с точностью до постоянной имеет вид

$$\Pi = -\frac{\rho g c_Y}{2} \int_0^C X_{L^*} Z^2 dL^*.$$

Здесь используются обозначения § 11, § 12:  $\rho$  — плотность жидкости,  $g$  — ускорение свободного падения,  $X, Z$  — размерные координаты точки поверхности оболочки,  $L^*$  — размерный параметр направляющей (длина дуги),  $c_Y$  — размерная единица длины по оси  $Y$ . Введем безразмерную потенциальную энергию единичного слоя жидкости по формуле

$$\Pi = \frac{\Pi}{\rho g c_Y C^3}.$$

Из (19.2), (19.3) следует, что

$$\Pi = -\frac{1}{2} \int_0^1 x_l z^2 dl.$$

Подставляя вместо  $x, z$  их выражения из (16.10), (16.21), (16.24), получим:

$$\begin{aligned} 0 < k < 1, \quad \Pi = & -\frac{c_2}{2} (d^2 + 4k^2 t) + 2ktd \left( \sin \psi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} \right)_{\psi_0}^{\psi_1} + \\ & + \frac{2t^{3/2}}{3} \left[ -(1 + 2k^2) F(\psi, k) + (1 + 4k^2) E(\psi, k) - \right. \\ & \left. - k^2 \sin(2\psi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} \right]_{\psi_0}^{\psi_1}; \\ k > 1, \quad \Pi = & \mp \frac{\sqrt{t}}{6\tilde{k}^3} \left\{ \left[ 3\tilde{k}^2 d^2 (\tilde{k}^2 - 2) - 8t(1 - \tilde{k}^2) \right] F(\psi, \tilde{k}) + \right. \\ & + \left[ 6\tilde{k}^2 d^2 + 4t(2 - \tilde{k}^2) \right] E(\psi, \tilde{k}) + \\ & \left. + 2\tilde{k}^2 \sqrt{t} \sin(2\psi) (\mp 3\tilde{k}d + 2\sqrt{t} \sqrt{1 - \tilde{k}^2 \sin^2 \psi}) \right\}_{\psi_0}^{\psi_1}. \end{aligned}$$

Здесь в формуле для  $\Pi$  при  $k > 1$  верхний знак соответствует формам равновесия (16.21), нижний знак — формам (16.24).

Численные значения потенциальной энергии для форм, представленных на рис. 19.1 и 19.2, даны в таблицах 19.1 и 19.2. Из таблиц следует, что минимальной потенциальной энергией обладают несимметричные формы (с меньшим значением  $n$ , если жидкость находится в верхней полости).

## 19.5. О каверне

Давление в жидкости линейно по вертикальной координате  $Z$ . Из (9.1), (9.3), (13.1) следуют формулы

$$P_{\text{ж}} = -\rho g Z + P_1 = -\rho g(Z - D) + P_0 = \rho g C(-z + d) + P_0, \quad (19.2)$$

где  $P_0$  — давление газа в полости с газом.

В книге задача равновесия оболочки решается в предположении, что около оболочки нет каверны. Поэтому должны выполняться неравенства

$$P_{\text{ж}} \geq P_*, \quad \rho g C(-z_{\text{max}} + d) + P_0 \geq P_*. \quad (19.3)$$

Здесь  $P_*$  — давление насыщенных паров,  $z_{\text{max}}$  — максимальное значение координаты  $z$  на поверхности оболочки.

Из таблиц 19.1, 19.2 видно, что  $d = -\infty$  при максимальном значении  $v = v^{\circ} \approx 0,133$ . Отсюда и из неравенства (19.3) следует: если рассматривать задачу равновесия оболочки при разных объемах жидкости, то при заданных значениях давления газа  $P_0$  и давления насыщенных паров  $P_*$  существует такой объем жидкости, меньше которого около оболочки образуется каверна. Это относится и к случаю, когда жидкость находится в верхней полости, и к случаю, когда жидкость находится в нижней полости. Поэтому для значений  $v$ , близких к  $v^{\circ}$ , при решении задачи равновесия нужно учитывать наличие около оболочки каверны.

Если  $v \neq v^{\circ}$ , то полученное в настоящей главе решение справедливо, если давление газа в полости с газом достаточно велико, так что выполняется неравенство, следующее из (19.3):

$$P_0 \geq \rho g C(z_{\text{max}} - d) + P_*. \quad (19.4)$$

Неравенство (19.4) гарантирует, что вся оболочка находится под гидростатическим давлением, около оболочки нет каверны.

## 19.6. О больших давлениях и больших усилиях

Из таблиц 19.1, 19.2 следует, что  $t = \infty$  при экстремальных значениях  $v = \pm v^{\circ}$ . При минимальном значении  $v = -v^{\circ}$  постоянная  $d = \infty$  и давление в жидкости равно  $\infty$  (смотрите формулу (19.2)). Так как реальные материалы имеют ограниченные характеристики, то отсюда следует, что экстремальные значения  $v = \pm v^{\circ}$  и близкие к ним не реализуются.

## 19.7. О прилипании к стенкам сосуда

Если жидкость находится в нижней полости, то при заданной форме сосуда реализуются не все формы равновесия из-за ограничений, накладываемых стенками сосуда. Это следует из рис. 19.2. Действительно, совместим формы равновесия 3 и 13. Они пересекаются, и не существует линии, соединяющей точки крепления оболочки и лежащей между кривыми 3 и 13.

Поэтому, если форма сосуда задана и жидкость находится в нижней полости, то при некоторых значениях  $v$  неизбежно прилипание оболочки к стенкам сосуда и при решении задачи равновесия оболочки это нужно учитывать.

## §20. Примеры форм равновесия с изломами и участками слипания

На рис. 20.1, 20.2 приведены формы равновесия оболочки при

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \pm \frac{1}{12}. \quad (20.1)$$

Длина направляющей оболочки в 12 раз превышает расстояние между точками крепления. Знак плюс в (20.1) соответствует случаю, когда жидкость находится в верхней полости, знак минус — когда жидкость находится в нижней полости.

Формы 1 на рис. 20.1, 20.2 имеют участок слипания. Формы 2 имеют изломы. Формы 3 имеют изломы и участки слипания. Из точек крепления оболочки проведены отрезки прямых, разделяющие жидкость и газ. Приведенные на рисунках формы не исчерпывают множество топологических типов форм равновесия оболочки с изломами и участками слипания.

При расчете форм с изломами принято дополнительное предположение, что в точках излома оболочки усилие  $t$  сохраняет непрерывность как функция. Таким образом, усилие  $t$  одно и то же во всех точках оболочки. Точки излома совпадают с точками крепления оболочки.

Если область, занимаемая жидкостью, не односвязна (как это имеет место для некоторых форм равновесия с изломами и/или участками слипания), то принято, что постоянная  $d$  одна и та же для всей жидкости.

Направляющие оболочки на рис. 20.1, 20.2 состоят из участков слипания и гладких дуг. Значения параметров направляющих оболочки для кривых 1а, 2а, 3а даны в таблицах 20.1, 20.2.

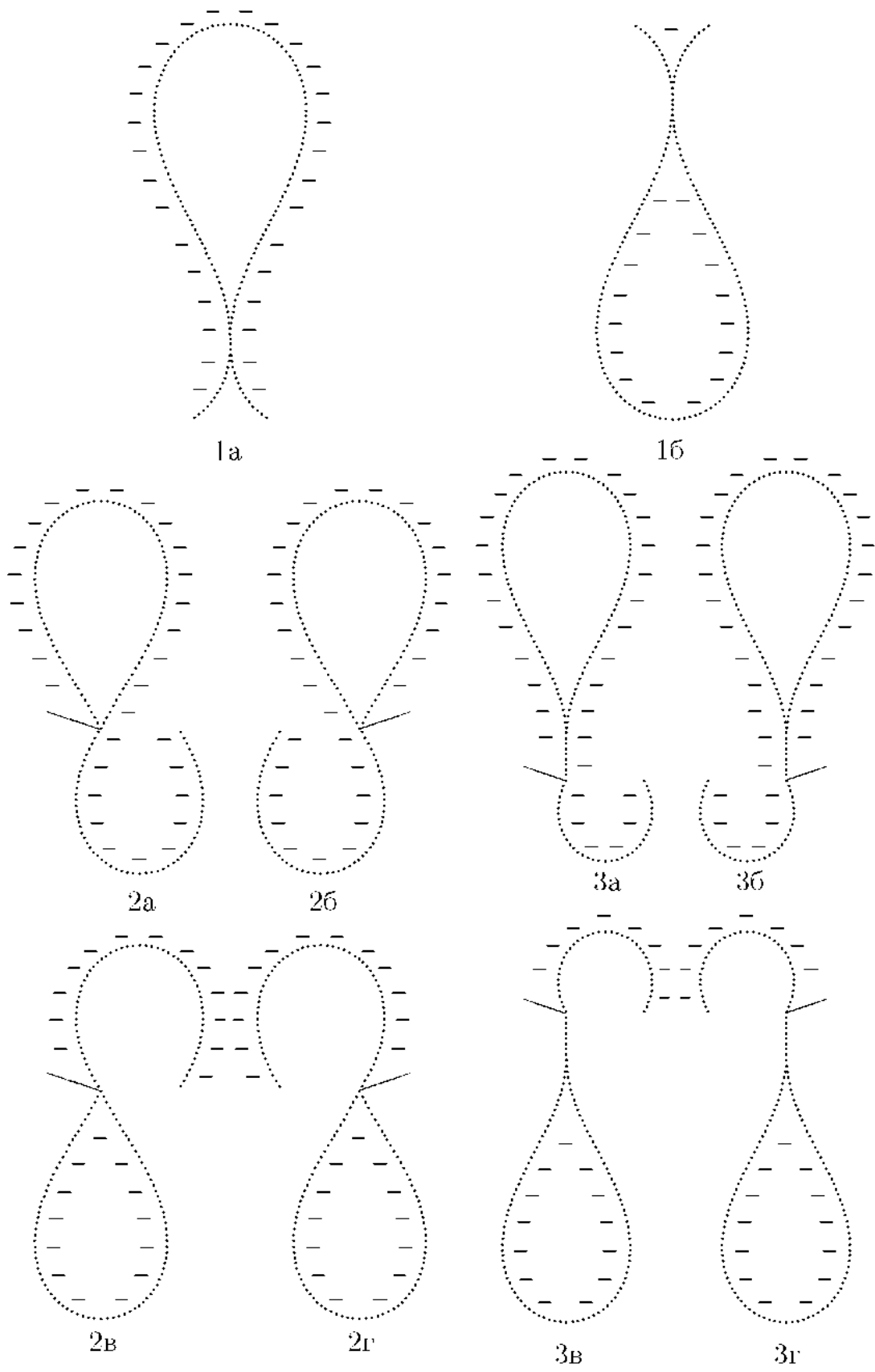


Рис. 20.1. Формы равновесия с изломами и участками слипания  
 $(c_1 = 0, c_2 = 1/12)$

Таблица 20.1. Параметры форм равновесия при  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 1/12$ .

	$v$	$k$	$\psi_0$	$\psi_1$	$x(\psi_0)$	$t$	$d$	$l_i$
1а	0,034					0,016	0,209	0,006*
		0,870	0,311	0,950	0			0,096
		0,855	0,974	5,310	0,042			0,796
		0,870	-0,950	-0,311	0,042			0,096
2а	0,005					0,013	0,018	
		0,871	1,324	4,959	0			0,602
		0,902	-1,332	1,332	0			0,398
3а	0,015					0,011	0,150	0,047*
		0,855	0,974	5,310	0			0,672
		1,111	-1,037	1,037	0			0,234

Параметры  $k$ ,  $\psi_0$ ,  $\psi_1$  однозначно определяют гладкую дугу по формулам (16.10), (16.21), (16.24), только в формулах для координаты  $x$  нужно добавить слагаемое  $x(\psi_0)$ .  $t$  — усилие оболочки.  $d$  — постоянная в формуле для гидростатического давления.  $l_i$  — длина гладкой дуги (число без звездочки) или длина участка слипания (число со звездочкой). Участки слипания являются отрезками вертикальных прямых.

Кривые 1а и 1б на рис. 20.1, 20.2 имеют симметрию относительно вертикальной плоскости  $x = c_2/2$ . Следующие кривые симметричны одна другой относительно

- 1) горизонтальной плоскости: 1а и 1б, 2а и 2в, 2б и 2г, 3а и 3в, 3б и 3г;
- 2) вертикальной плоскости  $x = c_2/2$ : 2а и 2б, 2в и 2г, 3а и 3б, 3в и 3г;
- 3) горизонтальной оси  $x = c_2/2$ ,  $z = 0$ : 1а и 1б, 2а и 2г, 2б и 2в, 3а и 3г, 3б и 3в.

## 20.1. Жидкость в верхней полости.

На рис. 20.1 представлены формы равновесия оболочки для значений (20.1) в случае, когда жидкость находится в верхней полости ( $c_2 = 1/12$ ).

Приведем для примера уравнения и формулы для кривой 1а, состоящей из 5 ветвей. Кривая 1а гладкая.

$$1) \quad x = \sqrt{t} \left[ 2E(\psi, k_1) - F(\psi, k_1) \right]_{\psi_{10}}^{\psi},$$

$$z = d - 2k_1 \sqrt{t} \cos \psi, \quad \psi_{10} \leq \psi \leq \psi_{11},$$



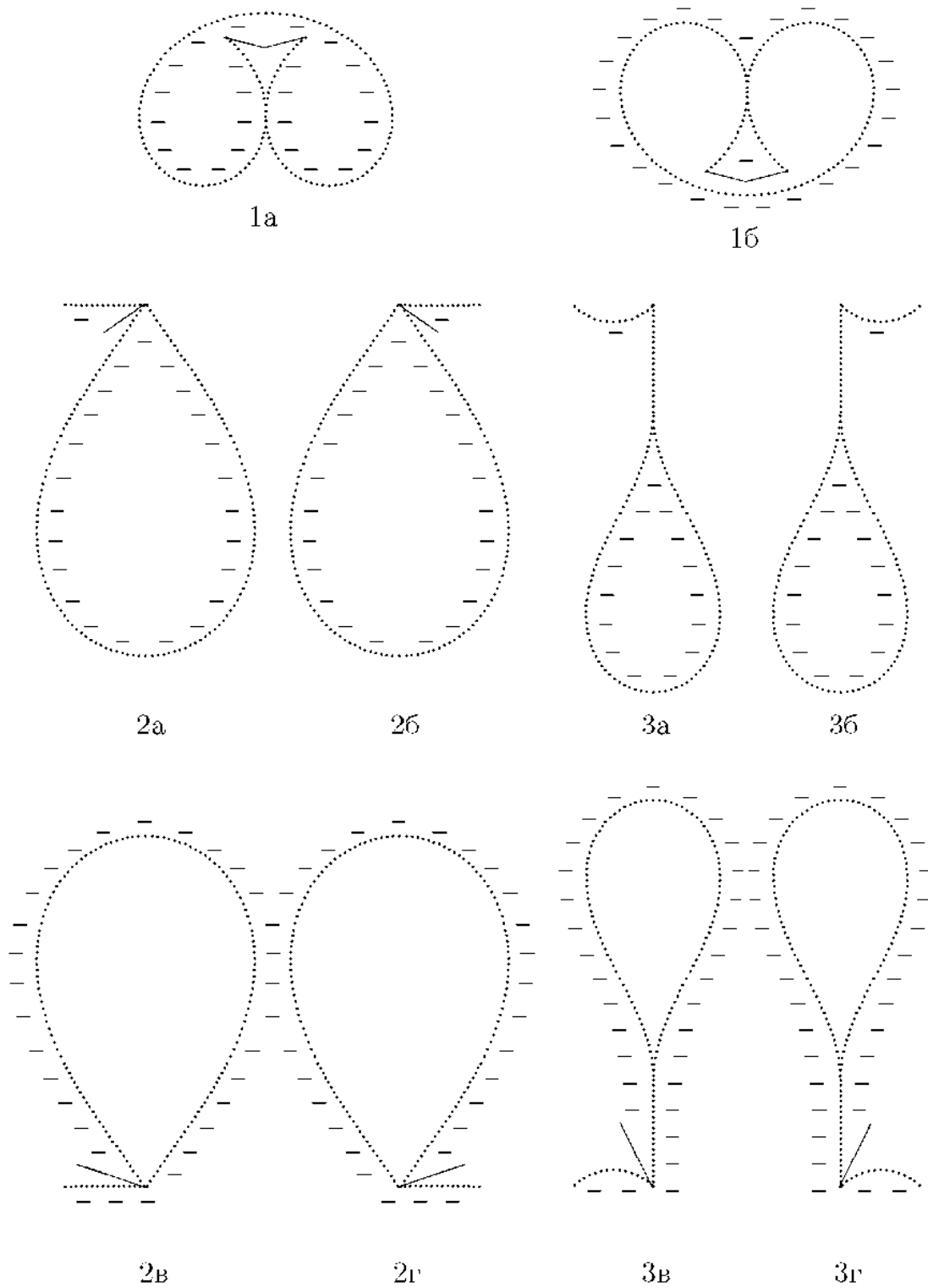


Рис. 20.2. Формы равновесия с изломами и участками слипания  
 $(c_1 = 0, c_2 = -1/12)$

$$\begin{aligned}
& l_1 - \sqrt{t} F(\psi, k_1) \Big|_{\psi_{10}}^{\psi_{11}}, \quad d - 2k_1 \sqrt{t} \cos \psi_{10} = 0, \\
& \frac{c_2}{2} - \sqrt{t} \left[ 2E(\psi, k_1) - F(\psi, k_1) \right]_{\psi_{10}}^{\psi_{11}}, \\
2, 4) \quad & x = \frac{c_2}{2}, \quad c_{11} \leq z \leq c_{11} + l_2, \quad c_{11} = d - 2k_1 \sqrt{t} \cos \psi_{11}, \\
3) \quad & x = \sqrt{t} \left[ 2E(\psi, k_*) - F(\psi, k_*) \right]_{\psi_{30}}^{\psi_{31}} + \frac{c_2}{2}, \\
& z = d - 2k_* \sqrt{t} \cos \psi, \quad \psi_{30} \leq \psi \leq \psi_{31}, \\
& \psi_{30} = \pi - \psi_*, \quad \psi_{31} = \pi + \psi_*, \\
& 1 - 2k_*^2 \sin^2 \psi_* = 0, \quad \frac{\pi}{2} < \psi_* < \pi, \\
& l_3 = 2\sqrt{t} F(\psi_*, k_*), \quad d + 2k_* \sqrt{t} \cos \psi_* = c_{11} + l_2, \\
5) \quad & x = \sqrt{t} \left[ 2E(\psi, k_1) - F(\psi, k_1) \right]_{\psi_{50}}^{\psi_{51}} + \frac{c_2}{2}, \\
& z = d - 2k_1 \sqrt{t} \cos \psi, \quad \psi_{50} \leq \psi \leq \psi_{51}, \\
& \psi_{50} = -\psi_{11}, \quad \psi_{51} = -\psi_{10}, \quad l_5 = l_1,
\end{aligned}$$

Таблица 20.2. Параметры форм равновесия при  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = -1/12$ .

	$v$	$k$	$\psi_0$	$\psi_1$	$x(\psi_0)$	$t$	$d$	$l_z$
1a	-0,038					0,018	0,142	0,003*
		1,079	-1,234	-0,785	0			0,093
		1,089	-0,785	3,927	-0,042			0,808
		1,079	0,785	1,234	-0,042			0,093
2a	-0,056					0,034	-0,037	
		0,887	-1,689	1,689	0			0,917
		1,005	-1,549	-1,593	0			0,083
3a	-0,022					0,012	-0,217	0,112*
		0,855	-2,168	2,168	0			0,682
		1,358	-1,164	-1,977	0			0,093

$$2\sqrt{t} F(\psi, k) \Big|_{\psi_{10}}^{\psi_{11}} + 2l_2 + 2\sqrt{t} F(\psi_*, k_*) = 1,$$

$$v = c_2 d - 4k_1 t \left( \sin \psi \sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \psi} \right)_{\psi_{10}}^{\psi_{11}} + 4k_* t \sin \psi_* \sqrt{1 - k_*^2 \sin^2 \psi_*}.$$

Предпоследнее уравнение следует из равенства длины направляющей оболочки единице.

## 20.2. Жидкость в нижней полости.

На рис. 20.2 представлены формы равновесия оболочки для значений (20.1) в случае, когда жидкость находится в нижней полости ( $c_2 = -1/12$ ).

Приведем для примера уравнения и формулы для кривой 2а, состоящей из 2 ветвей. Кривая 2а имеет излом в точке, совпадающей с точкой крепления  $x = 0, z = 0$ .

$$\begin{aligned}
 1) \quad x &= \sqrt{l} \left[ 2E(\psi, k_1) - F(\psi, k_1) \right]_{\psi_{10}}^{\psi}, \\
 z &= d - 2k_1 \sqrt{l} \cos \psi, \quad \psi_{10} \leq \psi \leq \psi_{11}, \\
 \psi_{10} &= -\psi_*, \quad \psi_{11} = \psi_*, \\
 2E(\psi_*, k_1) - F(\psi_*, k_1) &= 0, \quad \frac{\pi}{2} < \psi_* < \pi, \\
 l_1 - 2\sqrt{l}F(\psi_*, k_1), \quad d - 2k_1 \sqrt{l} \cos \psi_* &= 0, \\
 2) \quad x &= -\frac{\sqrt{l}}{\tilde{k}_2} \left[ 2E(\psi, \tilde{k}_2) - (2 - \tilde{k}_2^2)F(\psi, \tilde{k}_2) \right]_{\psi_{20}}^{\psi}, \\
 z &= d + \frac{2\sqrt{l}}{\tilde{k}_2} \sqrt{1 - \tilde{k}_2^2 \sin^2 \psi}, \quad \tilde{k}_2 = \frac{1}{k_2}, \\
 \psi_{20} \leq \psi \leq \psi_{21}, \quad \psi_{21} &= -\pi - \psi_{20}, \\
 l_2 - 2\tilde{k}_2 \sqrt{l} \left[ K(\tilde{k}_2) + F(\psi_{20}, \tilde{k}_2) \right], \\
 c_2 - \frac{2\sqrt{l}}{\tilde{k}_2} \left\{ 2E(\tilde{k}_2) + 2E(\psi_{20}, \tilde{k}_2) - (2 - \tilde{k}_2^2) \left[ K(\tilde{k}_2) + F(\psi_{20}, \tilde{k}_2) \right] \right\}, \\
 d + \frac{2\sqrt{l}}{\tilde{k}_2} \sqrt{1 - \tilde{k}_2^2 \sin^2 \psi_{20}} &= 0, \\
 2\sqrt{l}F(\psi_*, k_1) + 2\tilde{k}_2 \sqrt{l} \left[ K(\tilde{k}_2) + F(\psi_{20}, \tilde{k}_2) \right] &= 1, \\
 v &= -4k_1 t \sin \psi_* \sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \psi_*} + 2\tilde{k}_2 c_2 \sqrt{l} \cos \psi_* + 2t \sin(2\psi_{20}).
 \end{aligned}$$

Предпоследнее уравнение следует из равенства длины направляющей оболочки единице.

## §21. Выводы главы 2

В § 11 дана постановка плоской задачи равновесия мягкой оболочки. В § 12 получены уравнения, описывающие рассматриваемую задачу в размерных переменных. В § 13 сделан переход к безразмер-

ным переменным. В § 14 рассмотрены все формы равновесия мягкой оболочки, имеющие одноосные области.

В § 15 показано, что для каждой формы равновесия оболочки поверхности, симметричные ей относительно горизонтальной плоскости, вертикальной плоскости, горизонтальной оси, являются тоже формами равновесия.

В § 16 получены формулы для направляющей оболочки. Система уравнений, описывающих плоскую задачу равновесия, сведена к системе трансцендентных уравнений относительно параметров.

В § 17 описано все семейство кривых, задающих равновесные формы оболочки, не имеющие изломов и участков сгипания. На рис. 17.1 представлены все топологические типы кривых семейства. Направляющая любой формы равновесия оболочки является дугой какой-либо кривой представленного семейства. Кривые семейства являются элестиками Эйлера.

В § 18 плоская задача равновесия рассмотрена в случае, когда контур крепления оболочки лежит в одной горизонтальной плоскости. Доказаны теоремы о числе форм равновесия оболочки для некоторого множества значений длины направляющей оболочки и объема жидкости.

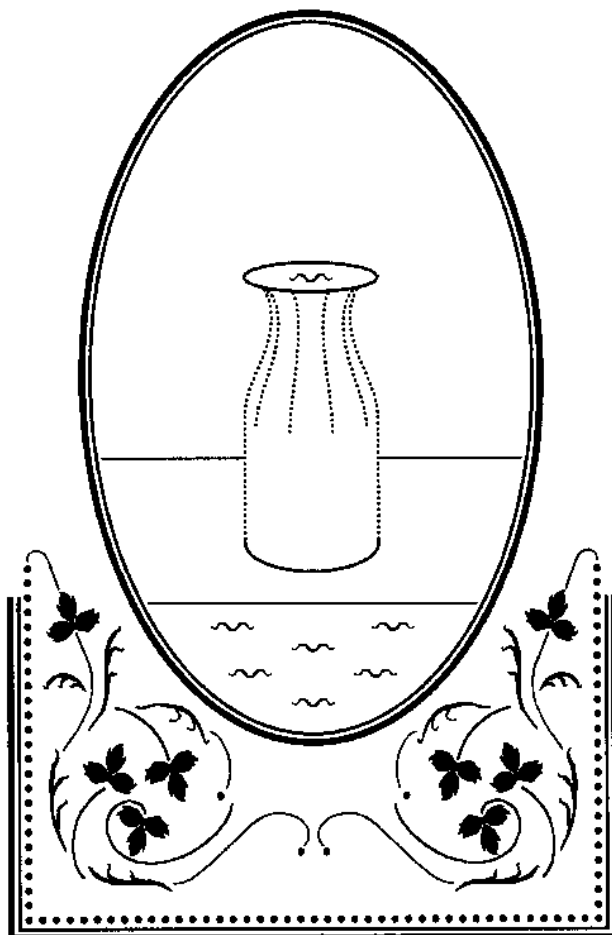
В § 19 плоская задача равновесия решена в случае, когда контур крепления оболочки лежит в одной горизонтальной плоскости, а длина направляющей оболочки в 3 раза превышает расстояние между точками крепления. Формы равновесия оболочки представлены на рис. 19.1, 19.2, численные значения параметров даны в таблицах 19.1, 19.2.

В § 20 показаны некоторые формы равновесия, имеющие изломы и участки сгипания, в случае, когда контур крепления оболочки лежит в одной горизонтальной плоскости, а длина направляющей оболочки в 12 раз превышает расстояние между точками крепления (рис. 20.1, 20.2). Представленные формы не исчерпывают множество топологических типов форм равновесия с изломами и участками сгипания.

В главе 2 используются результаты работы [12]. Плоская задача главы 2 совпадает с плоской задачей равновесия под гидростатическим давлением гибкой нерастяжимой (материальной) нити. Равновесие нити рассматривалось во многих работах в разных постановках (смотрите, например, [14], [15]). Отметим работу [17], в которой задача главы 2 решена при дополнительном условии: длина направляющей оболочки мало отличается от расстояния между точками крепления.

## Глава 3

# Равновесие цилиндрической оболочки



## §22. Постановка задачи

Рассмотрим мягкую оболочку, которая прикреплена к стенкам сосуда и разделяет его на две полости. Поверхность  $S^o$  мягкой оболочки в недеформированном состоянии является круговым цилиндром с радиусом основания  $C$  и высотой  $C_1$ . Оболочка закреплена по своей границе так, что контуры крепления являются окружностями, лежащими в параллельных плоскостях, радиусы контуров равны  $C$ , центры

контуров лежат на одной вертикальной прямой, плоскости контуров находятся одна от другой на расстоянии  $C_2 < C_1$ . Одна полость сосуда заполняется однородной жидкостью известного объема и известной плотности. Другая полость заполняется газом. Давление газа известно. Оболочка деформируется в поверхность  $S$ . Система находится в равновесии в поле сил тяжести. Требуется найти форму оболочки (поверхность  $S$ ) и усилия оболочки.

Введем в трехмерном пространстве декартову систему координат  $XYZ$  так, чтобы центры контуров крепления мягкой оболочки лежали на оси  $Z$ , верхний контур крепления лежал в плоскости  $XY$ , ось  $Z$  была направлена в сторону, противоположную направлению сил тяжести. Уравнения контуров крепления мягкой оболочки в принятой системе координат имеют вид

$$X^2 + Y^2 = C^2, \quad Z = -C_2 \qquad X^2 + Y^2 = C^2, \quad Z = 0.$$

Обозначим через  $V$  объем области, ограниченной поверхностью  $S$  и поверхностью

$$X^2 + Y^2 = C^2, \quad -C_2 \leq Z \leq 0. \qquad (22.1)$$

Значения  $C$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $V$  предполагаем известными. Также известными предполагаем плотность жидкости  $\rho$ , ускорение свободного падения  $g$ , давление газа  $P_0$ .

Задачу равновесия будем решать в предположениях, сделанных в начале § 8, то есть будем решать осесимметричную задачу равновесия, предполагая следующее:

22.1. Поверхность  $S$  является осесимметричной поверхностью с осью симметрии  $Z$ .

22.2. Точка поверхности  $S$  и ее прообраз, принадлежащий поверхности  $S^c$ , лежат на одной плоскости меридиана.

22.3. Проекции внутренних сил мягкой оболочки на касательные к меридианам и параллелям не зависят от  $\varphi$  — угла между плоскостью  $XZ$  и плоскостью меридиана.

Кроме того, будем предполагать, что

22.4. Поверхность  $S$  не имеет участков слипания и не касается стенок сосуда.

*Замечание 22.1.* Задать объем  $V$  и объем жидкости в сосуде это равносильные условия, так как сумма или разность этих объемов равна объему области, ограниченной поверхностью (22.1) и стенками, омываемыми жидкостью.

## §23. Уравнения задачи равновесия

Введем в пространстве  $XYZ$  цилиндрическую систему координат  $R, \varphi, Z$ . Формулы, связывающие декартовы координаты с цилиндрическими координатами, имеют вид

$$\begin{aligned} X &= R \cos \varphi, & Y &= R \sin \varphi, \\ R &= \sqrt{X^2 + Y^2}, & \cos \varphi &= \frac{X}{R}, & \sin \varphi &= \frac{Y}{R}. \end{aligned}$$

В рассматриваемой задаче внешними силами, действующими на мягкую оболочку, являются давление жидкости и давление газа. Внешние силы описываются формулами (9.2):

$$\mathbf{F} = -F^3 \mathbf{n}, \quad F^1 = 0, \quad F^2 = 0, \quad F^3 = \pm \rho g(Z - D), \quad (23.1)$$

$\rho$  — плотность жидкости,  $g$  — ускорение свободного падения,  $D$  — неизвестная постоянная.

Примем за параметр меридиана поверхности  $S^0$  длину  $L^0$  дуги между точкой  $Q_1$  нижнего контура крепления и текущей точкой  $Q$  меридиана:

$$\zeta^0 = L^0 = |\overset{\sim}{Q_1 Q}|, \quad 0 \leq L^0 \leq C_1.$$

Тогда для поверхности  $S^0$  справедливы равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^0 &= C \cos \varphi \mathbf{e}_1 + C \sin \varphi \mathbf{e}_2 + L^0 \mathbf{e}_3, & (23.2) \\ \mathbf{R}_1^0 &= \mathbf{e}_3, & \mathbf{R}_2^0 &= -C \sin \varphi \mathbf{e}_1 + C \cos \varphi \mathbf{e}_2, \\ A_{11}^0 &= 1, & A_{12}^0 &= 0, & A_{22}^0 &= C^2, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{R}^0$  — радиус-вектор точки поверхности  $S^0$ ;  $\mathbf{R}_1^0, \mathbf{R}_2^0$  — координатные векторы;  $A_{11}^0, A_{12}^0, A_{22}^0$  — коэффициенты первой квадратичной формы;  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  — орты осей  $X, Y, Z$ .

Параметр меридиана поверхности  $S$  равен  $L^0$ . Для поверхности  $S$  справедливы формулы

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= R \cos \varphi \mathbf{e}_1 + R \sin \varphi \mathbf{e}_2 + Z \mathbf{e}_3, & (23.3) \\ \mathbf{R}_1 &= R_{L^0} \cos \varphi \mathbf{e}_1 + R_{L^0} \sin \varphi \mathbf{e}_2 + Z_{L^0} \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{R}_2 &= -R \sin \varphi \mathbf{e}_1 + R \cos \varphi \mathbf{e}_2, \\ A &= A_{11} A_{22}, \quad A_{12} = 0, \quad \zeta = L^0, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{R}$  — радиус-вектор точки поверхности  $S$ ;  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$  — координатные векторы;  $A_{11}, A_{12}, A_{22}$  — коэффициенты первой квадратичной формы.  $R, Z$  являются искомыми функциями от  $L^0$ :

$$R = R(L^0), \quad Z = Z(L^0).$$

$\zeta^c, \zeta$  — обозначение параметров меридианов из § 8. Перейдем от усилий  $T^{ij}$  к переменным  $T_1, T_2, U$  по формулам

$$\begin{aligned} T_1 &= \sqrt{\frac{AA_{11}}{A_{22}}} T^{11} = A_{11} T^{11}, \\ T_2 &= \sqrt{\frac{AA_{22}}{A_{11}}} T^{22} = A_{22} T^{22}, \\ U &= \sqrt{A} T^{12} = \sqrt{A} T^{21}. \end{aligned} \quad (23.4)$$

Тогда  $T_1, T_2, U$  — проекции внутренних сил  $T_{[1]}, T_{[2]}$ , действующих на единицу длины параллели и меридиана (смотрите формулы (4.1), (4.2)):

$$\begin{aligned} T_{[1]} &= T_1 \frac{R_1}{\sqrt{A_{11}}} + U \frac{R_2}{\sqrt{A_{22}}}, \\ T_{[2]} &= U \frac{R_1}{\sqrt{A_{11}}} + T_2 \frac{R_2}{\sqrt{A_{22}}}. \end{aligned} \quad (23.5)$$

Напишем уравнения равновесия мягкой оболочки из § 8 с учетом заданных внешних сил и введенных переменных.

### 23.1. Двухосная область

Из (8.3), (8.8), (23.2) следует, что в двухосной области выполняются равенства

$$A_{11} = R_{L^c}^2 + Z_{L^c}^2 = 1, \quad A_{22} = R^2 = C^2. \quad (23.6)$$

Поэтому двухосная область является круговым цилиндром радиуса  $C$ :

$$R = C, \quad |Z_{L^c}| = 1, \quad Z_{L^c} = \kappa = \pm 1. \quad (23.7)$$

Таким образом, двухосная область получается сдвигом своего прообраза вдоль оси  $Z$  ( $\kappa = 1$ ) или сдвигом вдоль оси  $Z$  зеркального (относительно горизонтальной плоскости) отображения своего прообраза ( $\kappa = -1$ ).

Из (8.5), (8.6) получаем следующие равенства для двухосной области:

$$B_{11} = 0, \quad B_{22} = \kappa C, \quad \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2 = 0.$$

Здесь  $B_{11}, B_{22}$  — коэффициенты второй квадратичной формы,  $\Gamma_{ij}^k$  — символы Кристоффеля второго рода. Из равенств и из (8.8), (23.1), (23.4), (23.6) следует, что в двухосной области выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{dL^c} &= 0, \quad \frac{dU}{dL^c} = 0, \quad \kappa \frac{T_2}{C} = \pm \rho g(Z - D), \\ T_1 T_2 - U^2 &\geq 0, \quad T_1 \geq 0, \quad T_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (23.8)$$



## 23.2. Одноосная область

**Нити являются меридианами**

Из (8.3), (8.5), (8.6), (8.10), (23.1), (23.2), (23.4) следуют соотношения

$$\begin{aligned} A_{11} &= (R_{L^z})^2 + (Z_{L^o})^2 = 1, \quad \Gamma_{11}^1 = 0, \\ B_{11} &= R_{L^z} Z_{L^o L^z} - R_{L^o L^z} Z_{L^z}, \quad A_{22} = R^2, \quad A = R^2, \\ \frac{d(RT_1)}{dL^o} &= 0, \quad (R_{L^z} Z_{L^o L^z} - R_{L^o L^z} Z_{L^z})T_1 = \pm \rho g(Z - D), \\ T_2 &= 0, \quad U = 0, \quad T_1 \geq 0. \end{aligned} \quad (23.9)$$

Для почти всех значений  $L^o$  в одноосной области выполняется неравенство

$$R(L^o) < C. \quad (23.10)$$

**Нити являются параллелями**

В этом случае из (8.3), (8.12), (23.2) следует, что одноосная область является круговым цилиндром радиуса  $R$ :

$$A_{22} = A_{22}^o = C^2, \quad R = C.$$

Справедливы равенства, следующие из (8.3), (8.5), (8.6), (8.12), (23.4):

$$\begin{aligned} A_{11} &= Z_{L^o}^2, \quad \Gamma_{22}^1 = 0, \quad B_{22} = \kappa C, \quad \kappa = \frac{Z_{L^o}}{|Z_{L^o}|} = \pm 1, \\ \frac{\kappa T_2}{C} &= \pm \rho g(Z - D), \quad T_1 = 0, \quad U = 0, \quad T_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (23.11)$$

Для почти всех значений  $L^o$  в одноосной области выполняется неравенство

$$|Z_{L^o}(L^o)| < 1. \quad (23.12)$$

## 23.3. Нульосная область

Из (8.14), (23.1), (23.4) следуют уравнения

$$T_1 = 0, \quad T_2 = 0, \quad U = 0, \quad Z = D. \quad (23.13)$$

Для почти всех значений  $L^o$  в нульосной области выполняются неравенства, следующие из (8.15), (23.2), (23.3):

$$R(L^o) < C, \quad \left[ R_{L^z}(L^o) \right]^2 + \left[ Z_{L^z}(L^o) \right]^2 < 1. \quad (23.14)$$

Граница между областями разных типов является параллелью поверхности  $S$ . Запишем уравнение границы в виде

$$L^o = L_*^o. \quad (23.15)$$

Параметром границы является переменная  $\varphi$ . Рассмотрим равенства, которые должны выполняться на границе.

### 23.4. Граница между двухосной и одноосной областями

#### Граница совпадает с нитью

В этом случае из (8.18), (23.4), (23.6), (23.15) следуют равенства

$$(T_1)_{(2)}(L_*^z) = 0, \quad U_{(2)}(L_*^z) = 0. \quad (23.16)$$

#### Граница не совпадает с нитью

В этом случае нить является меридианом поверхности  $S$ . Из (8.19), (23.2), (23.4), (23.6), (23.9), (23.15) следуют равенства

$$(T_1)_{(1)}(L_*^z) = (T_1)_{(2)}(L_*^z), \quad U_{(2)}(L_*^z) = 0, \quad R(L_*^z) = C. \quad (23.17)$$

Если  $T_1(L_*^z) \neq 0$ , то

$$R_{L_*^z}(L_*^z) = 0, \quad Z_{L_*^z}(L_*^z) = \kappa. \quad (23.18)$$

### 23.5. Граница между двухосной и нульосной областями

Из (8.21), (23.2), (23.3), (23.5), (23.12) следуют равенства

$$(T_1)_{(2)}(L_*^z) = 0, \quad U_{(2)}(L_*^z) = 0, \quad R(L_*^z) = C. \quad (23.19)$$

### 23.6. Граница между одноосной и нульосной областями

#### Граница совпадает с нитью

В этом случае нить является параллелью поверхности  $S$ . Из (8.22), (23.2), (23.12) следует равенство

$$R(L_*^z) = C. \quad (23.20)$$

#### Граница не совпадает с нитью

В этом случае нить является меридианом поверхности  $S$ . Из (8.23), (23.4), (23.9), (23.15) следуют равенства

$$(T_1)_{(1)}(L_*^z) = 0, \quad R_{(0)}(L_*^z) = R_{(1)}(L_*^z). \quad (23.21)$$

### 23.7. Дополнительные условия

Дополнительными условиями являются условия закрепления оболочки и известное значение объема  $V$ . Эти условия описываются равенствами

$$R(0) = C, \quad Z(0) = -C_2, \quad R(C_1) = C, \quad Z(C_1) = 0, \quad (23.22)$$

$$V = \pi \int_0^{C_1} (C^2 - R^2) Z_{L^\circ} dL^\circ.$$

В задачах (23.6)—(23.22) неизвестными являются функции  $R(L^\circ)$ ,  $Z(L^\circ)$ ,  $T_1(L^\circ)$ ,  $T_2(L^\circ)$ ,  $U(L^\circ)$  и постоянные  $D$ ,  $L_\star^\circ$ . Независимая переменная  $L^\circ$  меняется на отрезке  $0 \leq L^\circ \leq C_1$ . Параметры  $C$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $V$  известны.

*Замечание 23.1.* Из выбора координат  $L^\circ$ ,  $\varphi$  на поверхности  $S$  следует, что знак плюс в формулах (23.1), (23.8), (23.9), (23.11) при сомножителе  $\rho g$  соответствует случаю, в котором при движении по меридиану поверхности  $S$  от нижнего контура к верхнему жидкость находится справа (с внешней стороны оболочки). Знак минус соответствует случаю, в котором при движении по меридиану жидкость находится слева (с внутренней стороны оболочки).

*Замечание 23.2.* Внешние силы (23.1), действующие на оболочку, направлены по нормали к поверхности оболочки. По теореме Фипстервальдера 6.1, если усилия нитей отличны от нуля, то нити являются геодезическими поверхности  $S$ , а прообразы нитей являются геодезическими поверхности  $S^\circ$ . Меридианы и параллели кругового цилиндра являются геодезическими линиями.

## §24. Переход к безразмерным переменным

Введем безразмерные переменные по формулам

$$\begin{aligned} r &= \frac{R}{C}, & x &= \frac{X}{C}, & y &= \frac{Y}{C}, & z &= \frac{Z}{C}, & (24.1) \\ r &= \frac{R}{C}, & l^\circ &= \frac{L^\circ}{C}, & d &= \frac{D}{C}, & v &= \frac{V}{\pi C^3}, \\ c_i &= \frac{C_i}{C}, & t_i &= \frac{T_i}{\rho g C^2}, & u &= \frac{U}{\rho g C^2}, & & i=1,2. \end{aligned}$$

Здесь  $r$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  — безразмерные радиус-вектор и координаты точки поверхности  $S$ ;  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  — безразмерные цилиндрические координаты

точки;  $l^\circ$  — безразмерный параметр меридианов поверхностей  $S^\circ$  и  $S$  (равен безразмерной длине дуги меридиана поверхности  $S^\circ$ , отсчитываемой от нижнего контура крепления оболочки);  $t_1, t_2, u$  — безразмерные усилия оболочки;  $d$  — безразмерная неизвестная постоянная, определяющая давление в жидкости;  $c_1$  — безразмерная длина меридиана поверхности  $S^\circ$ ;  $c_2$  — безразмерное расстояние между плоскостями контуров крепления оболочки.

В безразмерных переменных векторное уравнение поверхности  $S$  имеет вид

$$\mathbf{r} = r \cos \varphi \mathbf{e}_1 + r \sin \varphi \mathbf{e}_2 + z \mathbf{e}_3.$$

$r, z$  — искомые функции переменной  $l^\circ$ :

$$r = r(l^\circ), \quad z = z(l^\circ).$$

Напишем уравнения (23.6)—(23.22) в безразмерных переменных и параметрах.

### 24.1. Двухосная область

Двухосная область является круговым цилиндром. В двухосной области выполняются соотношения

$$\begin{aligned} r = 1, \quad z_{l^\circ} = \kappa = \pm 1, \quad \frac{dt_1}{dl^\circ} = 0, \quad \frac{du}{dl^\circ} = 0, \quad (24.2) \\ \kappa t_2 = \pm (z - d), \quad t_1 t_2 - u^2 \geq 0, \quad t_1 \geq 0, \quad t_2 \geq 0. \end{aligned}$$

### 24.2. Одноосная область

Нити являются меридианами

$$\begin{aligned} (r_{l^\circ})^2 + (z_{l^\circ})^2 = 1, \quad (24.3) \\ \frac{d(rt_1)}{dl^\circ} = 0, \quad t_1(r_{l^\circ} z_{l^\circ l^\circ} - r_{l^\circ l^\circ} z_{l^\circ}) = \pm (z - d), \\ t_2 = 0, \quad u = 0, \quad t_1 \geq 0. \end{aligned}$$

Для почти всех значений  $l^\circ$  в одноосной области выполняется неравенство

$$r(l^\circ) < 1. \quad (24.4)$$

## Нити являются параллелями

Одноосная область является круговым цилиндром. Справедливы равенства

$$\begin{aligned} r &= 1, & \kappa t_2 &= \pm (z - d), & \kappa &= \frac{z_{l^c}}{|z_{l^c}|} = \pm 1, & (24.5) \\ t_1 &= 0, & u &= 0, & t_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Для почти всех значений  $l^c$  в одноосной области выполняется неравенство

$$|z_{l^c}(l^c)| < 1. \quad (24.6)$$

## 24.3. Нульосная область

Справедливы уравнения

$$t_1 = 0, \quad t_2 = 0, \quad u = 0, \quad z = d. \quad (24.7)$$

Для почти всех значений  $l^c$  в нульосной области выполняются неравенства

$$r(l^c) < 1, \quad |r_{l^c}(l^c)|^2 + |z_{l^c}(l^c)|^2 < 1. \quad (24.8)$$

Граница между областями разных типов является параллелью поверхности  $S$ . Запишем уравнение границы в виде

$$l^c = l_*^c. \quad (24.9)$$

Рассмотрим равенства, которые должны выполняться на границе.

## 24.4. Граница между двухосной и одноосной областями

### Граница совпадает с нитью

На границе выполняются равенства

$$(t_1)_{(2)}(l_*^c) = 0, \quad u_{(2)}(l_*^c) = 0. \quad (24.10)$$

### Граница не совпадает с нитью

В этом случае нить является меридианом поверхности  $S$ . На границе выполняются равенства

$$(t_1)_{(1)}(l_*^c) = (t_1)_{(2)}(l_*^c), \quad u_{(2)}(l_*^c) = 0, \quad r(l_*^c) = 1. \quad (24.11)$$

Если  $t_1(l_*^c) \neq 0$ , то

$$r_{l^c}(l_*^c) = 0, \quad z_{l^c}(l_*^c) = \kappa. \quad (24.12)$$

## 24.5. Граница между двухосной и нульосной областями

На границе выполняются равенства

$$(t_1)_{(2)}(l_*^v) = 0, \quad u_{(2)}(l_*^v) = 0, \quad r(l_*^v) = 1. \quad (24.13)$$

## 24.6. Граница между одноосной и нульосной областями

**Граница совпадает с нитью**

В этом случае нить является параллелью поверхности  $S$ . На границе выполняется равенство

$$r(l_*^v) = 1. \quad (24.14)$$

**Граница не совпадает с нитью**

В этом случае нить является меридианом поверхности  $S$ . На границе выполняются равенства

$$(t_1)_{(1)}(l_*^v) = 0, \quad r_{(0)}(l_*^v) = r_{(1)}(l_*^v). \quad (24.15)$$

## 24.7. Дополнительные условия

Из (23.22) следуют равенства, описывающие закрепление оболочки и заданный объем жидкости:

$$r(0) = 1, \quad z(0) = -c_2, \quad r(c_1) = 1, \quad z(c_1) = 0, \quad (24.16)$$
$$v = \int_0^{c_1} (1 - r^2) z_{l^v} dl^v.$$

В задаче (24.2)–(24.16) неизвестными являются функции  $r(l^v)$ ,  $z(l^v)$ ,  $t_1(l^v)$ ,  $t_2(l^v)$ ,  $u(l^v)$  и постоянные  $d$ ,  $l_*^v$ . Независимая переменная  $l^v$  меняется на отрезке  $0 \leq l^v \leq c_1$ . Параметры  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $v$  известны,  $c_1 \geq c_2 \geq 0$ ,  $v \geq 0$ .

## 24.8. Максимальное значение $v$

**Уравнения и формулы**

Найдем максимальное значение  $v_*$  объема  $v$  в (24.16) при заданных значениях параметров  $c_1$ ,  $c_2$ . Для этого решим вариационную задачу

на условный экстремум: найти максимум функционала

$$\hat{v} = \int_0^{c_1} (1 - \hat{r}^2) \hat{z}_i \, d\hat{l}$$

на множестве кривых  $\hat{r} = \hat{r}(\hat{l})$ ,  $\hat{z} = \hat{z}(\hat{l})$  заданной длины:

$$\hat{r}_i^2 + \hat{z}_i^2 = 1, \quad 0 \leq \hat{l} \leq c_1.$$

Добавим условия, обеспечивающие закрепление и нерастяжимость оболочки:

$$\begin{aligned} \hat{r}(0) = 1, \quad \hat{z}(0) = -c_2, \quad \hat{r}(c_1) = 1, \quad \hat{z}(c_1) = 0, \\ \hat{r}(\hat{l}) \leq 1, \quad 0 \leq \hat{l} \leq c_1. \end{aligned} \quad (24.17)$$

Поставленная задача сводится к вариационной задаче на безусловный экстремум для функционала

$$\hat{v} = \int_0^{c_1} \left[ (1 - \hat{r}^2) \hat{z}_i + \lambda(\hat{l}) (\hat{r}_i^2 + \hat{z}_i^2 - 1) \right] d\hat{l}$$

на множестве функций  $\hat{r}(\hat{l})$ ,  $\hat{z}(\hat{l})$ ,  $\lambda(\hat{l})$ , удовлетворяющих (24.17). Искомые функции являются решением следующей системы [20]:

$$\begin{aligned} \frac{d(\lambda \hat{r}_i)}{d\hat{l}} + \hat{r} \hat{z}_i = 0, \quad \frac{d(1 - \hat{r}^2 + 2\lambda \hat{z}_i)}{d\hat{l}} = 0, \\ \hat{r}(0) = 1, \quad \hat{z}(0) = -c_2, \quad \hat{r}(c_1) = 1, \quad \hat{z}(c_1) = 0, \\ \hat{r}(\hat{l}) \leq 1, \quad 0 \leq \hat{l} \leq c_1. \end{aligned} \quad (24.18)$$

Решая задачу (24.18), получим формулы для максимального значения  $v_*$  объема  $v$  и для функций, создающих этот объем:

$$\begin{aligned} v_* = c_2 - \frac{2c_1(1 - k^2)}{3k^2(1 - k^2 \sin^2 \hat{\psi}_0)} - \frac{k^2 \sin 2\hat{\psi}_0}{3(1 - k^2 \sin^2 \hat{\psi}_0)} + \\ + \frac{2 - k^2}{3(1 - k^2 \sin^2 \hat{\psi}_0)^{3/2}} \left[ E(k) - E(\hat{\psi}_0, k) \right], \end{aligned} \quad (24.19)$$

$$\hat{r} = \sqrt{\frac{1 - k^2 \sin^2 \psi}{1 - k^2 \sin^2 \hat{\psi}_0}},$$

$$\hat{z} = -c_2 - \frac{1}{2\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \hat{\psi}_0}} \left[ 2E(\psi, k) - (2 - k^2)F(\psi, k) \right]_{\hat{\psi}_0}^{\psi},$$

$$\hat{l} = \frac{k^2}{2\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \hat{\psi}_0}} \left[ F(\psi, k) \right]_{\hat{\psi}_0}^{\psi}, \quad 0 < k < 1,$$

$$\hat{\psi}_0 \leq \psi \leq \hat{\psi}_1, \quad \hat{\psi}_0 \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right), \quad \hat{\psi}_1 = \pi - \hat{\psi}_0.$$

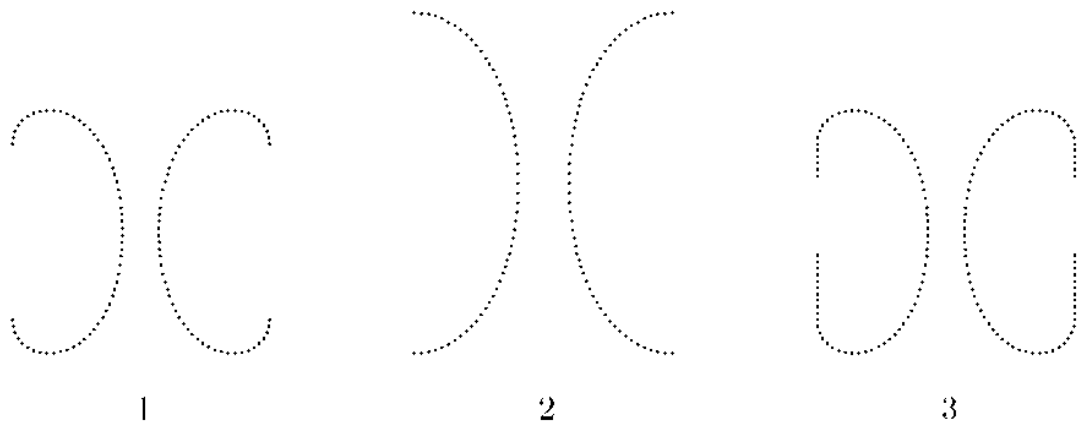


Рис. 24.1. Осесимметричные поверхности  
максимального значения  $v$  ( $v = v_*$ )

Здесь  $F(\psi, k)$ ,  $E(\psi, k)$  — эллиптические интегралы (16.11) первого и второго рода. Параметры  $k$ ,  $\hat{\psi}_0$  однозначно определяют кривую  $\hat{r} = \hat{r}(\hat{t})$ ,  $\hat{z} = \hat{z}(\hat{t})$  и связаны с параметрами  $c_1$ ,  $c_2$  формулами

$$c_1 = \frac{k^2}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \hat{\psi}_0}} \left[ K(k) - F(\hat{\psi}_0, k) \right], \quad (24.20)$$

$$c_2 = -\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \hat{\psi}_0}} \left\{ 2E(k) - 2E(\hat{\psi}_0, k) - \right.$$

$$\left. -(2 - k^2) \left[ K(k) - F(\hat{\psi}_0, k) \right] \right\}.$$

Здесь  $K(k)$ ,  $E(k)$  — полные эллиптические интегралы (16.12).

### Примеры

На рис. 24.1 изображены сечения плоскостью меридиана осесимметричных поверхностей максимального значения  $v = v_*$ . Параметры поверхностей даны в табл. 24.1.

Каждая осесимметричная поверхность, представляющая собой часть поверхности максимального значения  $v$ , является тоже (с точностью до масштаба) осесимметричной поверхностью максимального значения  $v$  для своих значений  $c_1$ ,  $c_2$ . Поверхность 2 на рис. 24.1 является частью поверхности 1, расположенной между экстремумами поверхности по вертикали.



Таблица 24.1. Параметры поверхностей рис. 24.1

$c_1$	$c_2$	$v_*$	$k$	$\hat{\psi}_0$	$\hat{\psi}_1$	$\Delta l_0$	$\Delta l_1$
3,290	1,366	1,672	0,990	0	$\pi$	—	—
3,401	2,644	2,211	0,990	$\pi/4$	$3\pi/4$	—	—
4,040	0,616	1,672	0,990	0	$\pi$	0,500	0,250

Поверхность 3 на рис. 24.1 состоит из поверхности 1 и двух круговых цилиндров. Таким образом, поверхность 3 состоит из трех частей, которые описываются уравнениями

$$1. \quad \hat{r} = 1, \quad \hat{z} = -c_2 - \hat{l}, \quad 0 \leq \hat{l} \leq \Delta l_0; \quad (24.21)$$

$$2. \quad \hat{r} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi},$$

$$\hat{z} = -c_2 - \Delta l_0 - E(\psi, k) + \left(1 - \frac{k^2}{2}\right) F(\psi, k),$$

$$\hat{l} = \Delta l_0 + \frac{k^2}{2} F(\psi, k), \quad 0 - \hat{\psi}_0 \leq \psi \leq \hat{\psi}_1 - \pi;$$

$$3. \quad \hat{r} = 1, \quad \hat{z} = c_1 - \hat{l}, \quad c_1 - \Delta l_1 \leq \hat{l} \leq c_1.$$

Параметры  $k$ ,  $\Delta l_0$ ,  $\Delta l_1$  удовлетворяют соотношениям

$$c_1 = \Delta l_0 + \Delta l_1 + k^2 K(k), \quad (24.22)$$

$$c_2 = -\Delta l_0 - \Delta l_1 - 2E(k) + (2 - k^2) K(k),$$

$$\Delta l_0 \geq 0, \quad \Delta l_1 \geq 0.$$

Таким образом, формулы (24.21) описывают однопараметрическое семейство осесимметричных поверхностей с равными значениями  $v_*$  и разными высотами круговых цилиндров при контурах крепления. Значение  $v_*$  вычисляется по формуле

$$v_* = c_2 - \frac{2c_1(1 - k^2)}{3k^2} + \frac{2 - k^2}{3} E(k). \quad (24.23)$$

## 24.9. Замечания

*Замечание 24.1.* Знак плюс в формулах (24.2), (24.3), (24.5) при множителе  $(z - d)$  соответствует случаю, когда жидкость находится с внешней стороны оболочки. Знак минус соответствует случаю, когда жидкость находится с внутренней стороны оболочки.

*Замечание 24.2.* Меридиан (24.19)  $\hat{r} = \hat{r}(\hat{l})$ ,  $\hat{z} = \hat{z}(\hat{l})$ , создающий максимальный объем  $v = v_*$ , является эластикой Эйлера и принадлежит семейству направляющих поверхности  $S$  в плоской задаче.

Если сравнить формулы (24.19) с формулами (16.21) (или (16.24)), то (с точностью до множителя и движения) переменные  $\hat{r}$ ,  $\hat{z}$ ,  $\hat{l}$  и параметр  $\hat{k}$  осесимметричной поверхности соответствуют переменным  $-z$ ,  $-x$ ,  $\hat{l}$  и параметру  $\tilde{k}$  в формулах (16.21) (или  $z$ ,  $x$ ,  $\hat{l}$ ,  $\tilde{k}$  в формулах (16.24)). На рис.17.1 кривым (24.19) соответствуют дуги направляющих с  $k > 1$ , соединяющие экстремальные (по горизонтали) точки. Нужно повернуть кривые рис. 17.1 на  $90^\circ$ , чтобы получить меридиан осесимметричной поверхности.

*Замечание 24.3.* Если  $v = v_*$  и оболочка находится под гидростатическим давлением, то на поверхности возможна только одна двухосная область, которая прилегает к верхнему контуру крепления, если жидкость находится с внутренней стороны оболочки ( $\Delta l_0 = 0$ ,  $\Delta l_1 \geq 0$ ), и к нижнему контуру крепления, если жидкость находится с внешней стороны оболочки ( $\Delta l_0 \geq 0$ ,  $\Delta l_1 = 0$ ). Это следует из замечания 30.1.

## §25. Существование областей разного типа

**Теорема 25.1.** *Поверхность  $S$  не содержит нульосных областей.*

*Доказательство.* Из (24.7) следует, что нульосная область лежит на горизонтальной плоскости  $z = d$  и значит описывается уравнениями

$$z = d, \quad r_1 \leq r \leq r_2,$$

где  $r_1, r_2$  — некоторые постоянные,  $r_1 < r_2 \leq 1$ .

Меридиан поверхности  $S$  соединяет точки контура крепления, на которых  $r = 1$ . Поэтому при  $r = r_1$  нульосная область граничит с одноосной областью, нити которой являются меридианами поверхности  $S$  (из всех возможных областей только нульосная область и одноосная область с нитями вдоль меридианов имеют точки с  $r < 1$ ).

Из уравнений (24.3) следует, что в одноосной области  $t_1 = t/r$ , где  $t$  — постоянная. Из условий (24.15) на границе следует, что при  $r = r_1$  усилие  $t_1$  обращается в ноль. Поэтому  $t = 0$  и  $t_1 = 0$  в одноосной области. Отсюда и из (24.3) следует, что одноосная область лежит на той же горизонтальной плоскости  $z = d$ , что и нульосная область. Поэтому меридиан поверхности  $S$  имеет участки слипания, на которых нульосная область совпадает с одноосной. Это противоречит предположению 22.4 в § 22 об отсутствии участков слипания. Отметим, что на участках слипания внешние силы, действующие на оболочку, равны нулю.

Теорема 25.1 доказана.

**Теорема 25.2.** *Поверхность  $S$  не содержит одноосных областей с нитями, расположенными на меридианах и имеющими нулевое усилие.*

*Доказательство.* Из уравнений (24.3) следует, что если усилие нитей  $t_1$  в одноосной области равно нулю, то  $z = d$  и значит одноосная область находится на горизонтальной плоскости и описывается уравнениями

$$z = d, \quad r_1 \leq r \leq r_2,$$

где  $r_1, r_2$  — некоторые постоянные,  $r_1 < r_2 \leq 1$ . Меридиан поверхности  $S$  соединяет точки контура крепления, на которых  $r = 1$ . Так как нулевые области не существуют (по теореме 25.1), то только одноосная область с нитями вдоль меридианов имеет точки с  $r < 1$ . Поэтому меридиан поверхности  $S$  имеет участки сгипания в одноосной области. Это противоречит предположению 22.4 в § 22 об отсутствии участков сгипания.

Теорема 25.2 доказана.

**Теорема 25.3.** *При  $v \neq 0$  поверхность  $S$  содержит одноосную область с нитями, расположенными на меридианах и имеющими ненулевое усилие.*

*Доказательство.* Из теоремы 25.1 следует, что поверхность  $S$  состоит из двухосных и одноосных областей. Двухосные области и одноосные области с нитями, расположенными по параллелям, являются круговыми цилиндрами  $r = 1$ . Поэтому они не вносят вклада в объем  $v$ , как следует из формулы (24.16). Остается только одноосная область с нитями вдоль меридианов. Усилие нитей в таких областях отлично от нуля по теореме 25.2.

Теорема 25.3 доказана.

**Теорема 25.4.** *При  $v \neq 0$  поверхность  $S$  не содержит одноосных областей с нитями, расположенными на параллелях.*

*Доказательство.* По теореме 25.3 при  $v \neq 0$  поверхность  $S$  содержит одноосную область с нитями вдоль меридианов и с  $t_1 > 0$ . Такая одноосная область может граничить только с двухосной областью, так как на ее границе  $t_1 > 0$ . Для соседней двухосной области из уравнений (24.2) и из условия (24.11) на границе с одноосной областью следует, что  $t_1 = \text{const} > 0$ .

Одноосная область с нитями вдоль параллелей не существует, так как для нее не может быть выполнено условие  $t_1 = 0$  на границе (граничить только с контурами крепления одноосная область не может, так как  $v \neq 0$ ).

Теорема 25.4 доказана.

**Теорема 25.5.** *При  $v = 0$  поверхность  $S$  не содержит одноосных областей с нитями, расположенными на меридианах.*

*Доказательство.* Из теоремы 25.1 следует, что поверхность  $S$  состоит из двухосных и одноосных областей. Двухосные области и одноосные области с нитями, расположенными по параллелям, являются круговыми цилиндрами  $r = 1$ . Поэтому они не вносят вклада в объем  $v$ , как следует из формулы (24.16). По теореме 25.2 поверхность  $S$  не содержит одноосных областей с нитями, расположенными на меридианах и имеющими нулевое усилие  $t_1$ .

Предположим, что при  $v = 0$  поверхность  $S$  содержит одноосную область с нитями, совпадающими с меридианами и имеющими ненулевое усилие  $t_1$ . По условию (24.4) для почти всех точек одноосной области выполняется неравенство  $r < 1$ . Так как по предположению 22.4 в § 22 оболочка не содержит участков сгибания, то область между оболочкой и цилиндром  $r = 1$  имеет ненулевой объем:  $v > 0$ . Пришли к противоречию, из которого следует, что предположение о существовании одноосной области неверно.

Теорема 25.5 доказана.

Теоремы 25.1–25.5 приводят к следующим результатам.

**Результат 25.1.** *При  $v \neq 0$  поверхность  $S$  состоит из двухосных областей и одноосных областей, нити которых расположены вдоль меридианов и имеют ненулевое усилие.*

**Результат 25.2.** *При  $v = 0$  поверхность  $S$  состоит из двухосных областей и одноосных областей, нити которых расположены вдоль параллелей.*

## §26. Решение задачи при $v = 0$

Из результата 25.2 следует, что при  $v = 0$  поверхность  $S$  является круговым цилиндром  $r = 1$ .

### 26.1. Поверхность $S$ является двухосной

Пусть вся поверхность  $S$  является двухосной областью. Тогда из (24.2) следует, что справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} r = 1, \quad z = \kappa l^c + z_0, \quad \kappa = \pm 1, \quad t_1 = \text{const} \geq 0, \quad (26.1) \\ t_2 = \pm \kappa(z - d) \geq 0, \quad u = \text{const}, \quad t_1 t_2 - u^2 \geq 0, \end{aligned}$$

где  $z_0$  — искомая постоянная. Подставим формулы (26.1) в дополнительные условия (24.16). Получим

$$\begin{aligned} z_0 &= -c_2, & \kappa c_1 &= c_2, & \kappa &= 1, \\ r &= 1, & z - l^\circ &= c_1, & v &= 0. \end{aligned}$$

Из равенств следует, что рассматриваемый случай возможен, когда длина  $c_1$  меридиана оболочки равна расстоянию  $c_2$  между контурами крепления. Усилие оболочки определяется с точностью до трех неизвестных постоянных  $t_1$ ,  $u$ ,  $d$ , которые удовлетворяют следующим условиям: если жидкость находится с внешней стороны оболочки, то

$$t_1 \geq 0, \quad c_1 + d \leq 0, \quad u^2 \leq -t_1(c_1 + d); \quad (26.2)$$

если жидкость находится с внутренней стороны оболочки, то

$$t_1 \geq 0, \quad d \geq 0, \quad u^2 \leq t_1 d. \quad (26.3)$$

Неравенства (26.2), (26.3) следуют из неравенств (26.1), так как  $-c_2 \leq z \leq 0$ .

## 26.2. Поверхность $S$ является одноосной

Пусть вся поверхность  $S$  является одноосной областью. Тогда нити одноосной области расположены на параллелях (смотрите результат 25.2) и из (24.5) следуют равенства

$$\begin{aligned} r &= 1, & t_1 &= 0, & t_2 &= \pm \kappa(z - d) \geq 0, & u &= 0, & (26.4) \\ \kappa &= \frac{z_{l^\circ}}{|z_{l^\circ}|} = \pm 1. \end{aligned}$$

Подставим эти значения в дополнительные условия (24.16). Получим

$$z(0) = -c_2, \quad z(c_1) = 0, \quad \kappa = 1, \quad v = 0.$$

Для почти всех значений  $l^\circ$  в одноосной области выполняется неравенство

$$|z_{l^\circ}(l^\circ)| < 1. \quad (26.5)$$

Таким образом, поверхность  $S$  является круговым цилиндром

$$r = 1, \quad -c_2 \leq z \leq 0. \quad (26.6)$$

Решение задачи определяется с точностью до функции  $z(l^\circ)$  и постоянной  $d$ . Почти во всех точках отрезка  $0 \leq l^\circ \leq c_1$  функция  $z$  удовлетворяет неравенству (26.5). Постоянная  $d$  удовлетворяет неравенству

$$d \leq -c_2, \quad (26.7)$$

если жидкость находится с внешней стороны оболочки, и неравенству

$$d \geq 0, \quad (26.8)$$

если жидкость находится с внутренней стороны оболочки. Неравенства (26.7), (26.8) следуют из (26.4), (26.6).

Отметим, что из (26.5) следует, что  $c_2 < c_1$ .

### 26.3. Поверхность $S$ содержит двухосные и одноосные области

Пусть на поверхности  $S$  есть и двухосные, и одноосные области. Тогда нити одноосных областей расположены на параллелях (смотрите результат 25.2). Поверхность  $S$  является круговым цилиндром  $r = 1$ .

Из условия (24.10) на границе и из формул (24.2), (24.5) для усилия оболочки следует, что на всей поверхности  $S$  выполняются равенства

$$t_1 = 0, \quad t_2 = \pm \kappa(z - d) \geq 0, \quad u = 0, \quad \kappa = \frac{z_{l^2}}{|z_{l^2}|} = \pm 1. \quad (26.9)$$

В двухосной области  $z_{l^2} = \kappa$ . Для почти всех значений  $l^2$  в одноосной области выполняется неравенство (26.5). Из дополнительных условий (24.16) следует, что

$$z(0) = -c_2, \quad z(c_1) = 0, \quad v = 0.$$

Так как  $z(0) = -c_2 < z(c_1) = 0$ , то на поверхности  $S$  существуют точки, в которых  $\kappa = 1$ . Так как по предположению 22.4 в § 22 поверхность  $S$  не содержит участков сгибания, то  $\kappa = 1$  на всей поверхности  $S$ . Отсюда следует, что поверхность  $S$  является круговым цилиндром

$$r = 1, \quad -c_2 \leq z \leq 0.$$

Решение задачи определяется с точностью до функции  $z(l^2)$  и постоянной  $d$ . Поверхность  $S$  может содержать произвольное число чередующихся двухосных и одноосных областей произвольного размера (на отрезке  $0 \leq l^2 \leq c_1$ ). В двухосных областях  $z$  — линейная функция от  $l^2$  с коэффициентом пропорциональности  $\kappa = 1$ . Почти во всех точках одноосных областей функция  $z$  удовлетворяет неравенству (26.5). Постоянная  $d$  удовлетворяет неравенствам (26.7), (26.8).

Отметим, что из (26.5) следует, что  $c_2 < c_1$ .

**Результат 26.1.** При  $v = 0$  поверхность  $S$  является круговым цилиндром

$$r = 1, \quad -c_2 \leq z \leq 0.$$

При  $v = 0$ ,  $c_1 = c_2$  поверхность  $S$  является двухосной областью, усилие оболочки определяется с точностью до трех постоянных  $t_1$ ,  $u$ ,  $d$ , которые удовлетворяют неравенствам (26.2), (26.3).

При  $v = 0$ ,  $c_1 > c_2$  поверхность  $S$  состоит из произвольного числа чередующихся двухосных и одноосных областей произвольного размера (на отрезке  $0 \leq l^z \leq c_1$ ). Нити одноосных областей расположены на параллелях. Решение задачи определяется с точностью до функции  $z(l^z)$  и постоянной  $d$  по формулам (26.9). Функция  $z$  удовлетворяет соотношениям

$$0 \leq z_l^z \leq 1 \quad 0 \leq l^z \leq c_1, \quad z(0) = -c_2, \quad z(c_1) = 0.$$

Постоянная  $d$  удовлетворяет неравенствам (26.7), (26.8).

## §27. Симметрия в задаче равновесия

При  $v \neq 0$  поверхность  $S$  состоит из двухосных и одноосных областей, нити одноосных областей расположены на меридианах, усилие нитей не равно нулю (смотрите результат 25.1). Так как кривые в двухосной области и нити одноосной области имеют ту же длину, что и их прообразы на поверхности  $S^c$ , то длины дуг меридианов поверхности  $S$  равны длинам их прообразов и  $l^z = l$ , где

$$l = \frac{L}{C},$$

$L$  — длина дуги меридиана поверхности  $S$ , отсчитываемая от нижнего контура;  $C$  — радиус кругового цилиндра  $S^c$ . Рассмотрим уравнения из § 24 при  $v \neq 0$ , заменяя  $l^z$  на  $l$ .

### 27.1. Жидкость с внутренней стороны оболочки

#### Двухосная область

Из (24.2) получим соотношения для двухосной области:

$$\begin{aligned} r = 1, \quad z_l = \kappa = \pm 1, \quad t_1 = \text{const} \geq 0, \\ u = \text{const}, \quad t_2 = -\kappa(z - d) \geq 0, \quad t_1 t_2 = u^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (27.1)$$

#### Одноосная область

Из (24.3) получим соотношения для одноосной области:

$$\begin{aligned} (r_l)^2 + (z_l)^2 = 1, \quad t(r_l z_l - r_l z_l) + r(z - d) = 0, \\ t_1 = \frac{t}{r}, \quad t = \text{const} > 0, \quad t_2 = 0, \quad u = 0. \end{aligned} \quad (27.2)$$

Для почти всех значений  $l$  в одноосной области выполняется неравенство

$$r(l) < 1. \quad (27.3)$$

## Условия на границе между областями

На границе  $l = l_*$  между двухосной и одноосной областью выполняются равенства

$$\begin{aligned} r(l_*) = 1, \quad r_l(l_*) = 0, \quad z_l(l_*) = \kappa, \\ t_1(l_*) = t, \quad u(l_*) = 0. \end{aligned} \quad (27.4)$$

## Дополнительные условия

Равенства (24.16) имеют вид

$$\begin{aligned} r(0) = 1, \quad z(0) = -c_2, \quad r(c_1) = 1, \quad z(c_1) = 0, \\ v = \int_0^{c_1} (1 - r^2) z_l dl, \quad 0 \leq l \leq c_1. \end{aligned} \quad (27.5)$$

## 27.2. Жидкость с внешней стороны оболочки

### Двухосная область

Из (24.2) получим соотношения для двухосной области:

$$\begin{aligned} r = 1, \quad z_l = \kappa \pm 1, \quad t_1 = \text{const} \geq 0, \\ u = \text{const}, \quad t_2 = \kappa(z - d) \geq 0, \quad t_1 t_2 - u^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (27.6)$$

### Одноосная область

Из (24.3) получим соотношения для одноосной области:

$$\begin{aligned} (r_l)^2 + (z_l)^2 = 1, \quad t(r_l z_{ll} - r_{ll} z_l) - r(z - d) = 0, \\ t_1 = \frac{t}{r}, \quad t = \text{const} > 0, \quad t_2 = 0, \quad u = 0. \end{aligned} \quad (27.7)$$

Для почти всех значений  $l$  в одноосной области выполняется неравенство

$$r(l) < 1. \quad (27.8)$$

## Условия на границе между областями

На границе  $l = l_*$  между двухосной и одноосной областью выполняются равенства

$$\begin{aligned} r(l_*) = 1, \quad r_l(l_*) = 0, \quad z_l(l_*) = \kappa, \\ t_1(l_*) = t, \quad u(l_*) = 0. \end{aligned} \quad (27.9)$$



### Дополнительные условия

$$\begin{aligned} r(0) &= 1, \quad z(0) = -c_2, \quad r(c_1) = 1, \quad z(c_1) = 0, \quad (27.10) \\ v &= \int_0^{c_1} (1-r^2) z_l \, dl, \quad 0 \leq l \leq c_1. \end{aligned}$$

### 27.3. Симметрия

Введем новые переменные и параметры по формулам

$$\begin{aligned} \bar{l} = c_1 - l, \quad \bar{r}(l) = r(l), \quad \bar{z}(l) = -[z(l) + c_2], \quad (27.11) \\ t_i(\bar{l}) = t_i(l), \quad u(\bar{l}) = u(l), \quad \bar{d} = -(d + c_2), \quad \bar{t} = t. \end{aligned}$$

В новых переменных и параметрах соотношения (27.6)—(27.10) примут следующий вид:

#### Двухосная область

$$\begin{aligned} r = 1, \quad z_l = \kappa \pm 1, \quad \bar{l}_1 = \text{const} \geq 0, \quad (27.12) \\ u = \text{const}, \quad t_2 = -\kappa(z - d) \geq 0, \quad t_1 t_2 - u^2 \geq 0. \end{aligned}$$

#### Одноосная область

$$\begin{aligned} (r_l)^2 + (z_l)^2 = 1, \quad t(r_l z_{ll} - r_{ll} z_l) + r(z - d) = 0, \quad (27.13) \\ t_1 = \frac{\bar{l}}{r}, \quad t = \text{const} > 0, \quad t_2 = 0, \quad \bar{u} = 0. \end{aligned}$$

Для почти всех значений  $l$  в одноосной области выполняется неравенство

$$\bar{r}(l) < 1. \quad (27.14)$$

#### Условия на границе между областями

На границе  $l = l_*$  выполняются равенства

$$\begin{aligned} \bar{r}(l_*) = 1, \quad \bar{r}_{\bar{l}}(l_*) = 0, \quad \bar{z}_{\bar{l}}(l_*) = \kappa, \quad (27.15) \\ \bar{l}_1(\bar{l}_*) = \bar{l}, \quad u(\bar{l}_*) = 0. \end{aligned}$$

## Дополнительные условия

$$r(0) = 1, \quad z(0) = -c_2, \quad r(c_1) = 1, \quad z(c_1) = 0, \quad (27.16)$$

$$v = \int_0^{c_1} (1 - r^2) z_{\bar{l}} d\bar{l}, \quad 0 \leq \bar{l} \leq c_1.$$

Соотношения (27.12)—(27.16) совпадают с (27.1)—(27.5) с точностью до обозначений. Отсюда следует

**Результат 27.1.** Задачу равновесия достаточно решить для случая, когда жидкость находится с внутренней стороны оболочки. Если жидкость находится с внешней стороны оболочки, то решение получается пересчетом по формулам (27.11).

*Замечание 27.1.* Результат 27.1 справедлив для всех значений  $v \geq 0$ .

*Замечание 27.2.* Результат 27.1 сформулирован в § 9 как свойство симметрии задачи равновесия мягкой оболочки под гидростатическим давлением. Таким образом, если жидкость и газ поменять местами, не меняя значений параметров  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $v$ , то поверхность  $S$  перейдет в поверхность, симметричную ей относительно плоскости  $z = -c_2/2$ .

## §28. Одноосные формы равновесия

Рассмотрим задачу равновесия при  $v \neq 0$ , предполагая, что жидкость находится с внутренней стороны оболочки и вся поверхность  $S$  является одноосной областью.

### 28.1. Уравнения

Задача равновесия описывается соотношениями, следующими из (27.2), (27.5):

$$(r_l)^2 + (z_l)^2 = 1, \quad t(r_l z_{ll} - r_{ll} z_l) + r(z - d) = 0, \quad (28.1)$$

$$t_1 = \frac{t}{r}, \quad t = \text{const} > 0, \quad t_2 = 0, \quad u = 0,$$

$$r(0) = 1, \quad z(0) = -c_2, \quad r(c_1) = 1, \quad z(c_1) = 0,$$

$$v = \int_0^{c_1} (1 - r^2) z_l dl, \quad 0 \leq l \leq c_1.$$

Для почти всех значений  $l$  из отрезка  $0 \leq l \leq c_1$  выполняется неравенство (27.3):

$$r(l) < 1. \quad (28.2)$$

В (28.1) неизвестными являются функции  $r(l)$ ,  $z(l)$  и постоянные  $t$ ,  $d$ . Независимая переменная  $l$  принимает значения на отрезке  $0 \leq l \leq c_1$ . Постоянные  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $v$  известны,  $c_1 \geq c_2 \geq 0$ ,  $v \geq 0$ .

## 28.2. Приведение к форме Коши

Введем новую функцию  $\theta$  по формулам

$$\cos \theta = r_l, \quad \sin \theta = z_l. \quad (28.3)$$

Тогда из (28.1), (28.3) получим следующую задачу для переменных  $r$ ,  $z$ ,  $\theta$ :

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dl} &= \cos \theta, & \frac{dz}{dl} &= \sin \theta, & \frac{d\theta}{dl} &= -\frac{r(z-d)}{t}, & (28.4) \\ r(0) &= 1, & z(0) &= -c_2, & r(c_1) &= 1, & z(c_1) &= 0, \\ v &= \int_0^{c_1} (1-r^2) \sin \theta dl, & & & & & 0 \leq l \leq c_1. \end{aligned}$$

Система дифференциальных уравнений приняла форму Коши. В (28.4)  $r$ ,  $z$ ,  $\theta$  — неизвестные функции на отрезке  $0 \leq l \leq c_1$ ;  $t$ ,  $d$  — известные постоянные,  $t > 0$ . Для почти всех значений  $l$  выполняется неравенство (28.2). Усилие  $t_1$  находится по формуле (28.1).

## 28.3. Формула для $v$

Пусть одноосная область расположена на отрезке  $l_1 \leq l \leq l_2$  и  $r(l_1) = 1$ ,  $r(l_2) = 1$ . Рассмотрим формулу для объема  $v_1$  между одноосной областью и цилиндром  $r = 1$ ,  $z(l_1) \leq z \leq z(l_2)$ , используя дифференциальные уравнения (28.4) для одноосной области.

$$\begin{aligned} v_1 &= \int_{l_1}^{l_2} (1-r^2) z_l dl = \int_{z(l_1)}^{z(l_2)} (1-r^2) dz = & (28.5) \\ &= (1-r^2)(z-d) \Big|_{l_1}^{l_2} + 2 \int_{r(l_1)}^{r(l_2)} r(z-d) dr = -2t \int_{l_1}^{l_2} \frac{d\theta}{dl} \frac{dr}{dl} dl = \\ &= -2t \int_{\theta(l_1)}^{\theta(l_2)} \cos \theta d\theta = 2t [\sin \theta(l_1) - \sin \theta(l_2)]. \end{aligned}$$

Из полученной формулы следует, что равенство (28.4) для  $v$  можно заменить на равенство

$$v = 2l \left[ \sin \theta(0) - \sin \theta(c_1) \right]. \quad (28.6)$$

## 28.4. Введение новых переменных

Введем новые переменные, для которых уравнения принимают вид, удобный для численного исследования. Для этого заметим следующее.

Функции  $r(l)$ ,  $z(l)$ , описывающие поверхность  $S$ , рассматриваются на отрезке  $0 \leq l \leq c_1$ . Функция  $r(l)$  удовлетворяет неравенствам  $0 < r \leq 1$  и принимает на концах отрезка одинаковые значения  $r = 1$ . Значения функции  $z$  на концах отрезка  $l$  удовлетворяют неравенству  $z(0) \leq z(c_1)$ . Кривая  $r(l)$ ,  $z(l)$  гладкая и не имеет точек самопересечения. Отсюда следует: существует такое значение  $l = l_{**}$ ,  $0 < l_{**} < c_1$ , что при  $l = l_{**}$  функция  $r$  принимает минимальное на отрезке  $l$  значение, а производная  $dz/dl$  положительна. Из (28.2), (28.4) следуют равенства

$$r(l_{**}) = r_{**} = \min_{0 < l < c_1} r(l), \quad 0 < r_{**} \leq 1 \quad \theta(l_{**}) = \frac{\pi}{2}. \quad (28.7)$$

Заметим, что из (28.3), (28.4) следует, что в какой-либо точке отрезка  $0 \leq l \leq c_1$  значение  $\theta$  можно выбрать, не нарушая общности, на отрезке  $0 \leq \theta < 2\pi$ , поэтому принято  $\theta(l_{**}) = \pi/2$ . В общем случае  $\theta(l_{**}) = (\pi/2) \pmod{2\pi}$ .

Введем новые переменные и параметры по формулам

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{l - l_{**}}{\sqrt[3]{t}}, & w_1 &= \frac{r}{\sqrt[3]{t}}, & w_2 &= \frac{z - d}{\sqrt[3]{t}}, \\ w_3 &= \frac{\pi}{2} - \theta, & w_{10} &= \frac{r_{**}}{\sqrt[3]{t}}, & w_{20} &= \frac{z(l_{**}) - d}{\sqrt[3]{t}}. \end{aligned} \quad (28.8)$$

Обратные формулы имеют вид

$$l = \frac{\sigma - \sigma_{-1}}{w_1(\sigma_1)}, \quad r = \frac{w_1}{w_1(\sigma_1)}, \quad z = \frac{w_2 - w_2(\sigma_1)}{w_1(\sigma_1)}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} - w_3. \quad (28.9)$$

Для новых переменных из (28.4), (28.7), (28.8) получим задачу Коши

$$\begin{aligned} \frac{dw_1}{d\sigma} &= \sin w_3, & \frac{dw_2}{d\sigma} &= \cos w_3, & \frac{dw_3}{d\sigma} &= w_1 w_2, \\ w_1(0) &= w_{10}, & w_2(0) &= w_{20}, & w_3(0) &= 0. \end{aligned} \quad (28.10)$$

Задача (28.10) интегрируется на двух интервалах

$$0 \leq \sigma \leq \sigma_1 \quad \sigma_{-1} \leq \sigma \leq 0. \quad (28.11)$$

Постоянные  $w_{10}$ ,  $w_{20}$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_{-1}$  являются новыми параметрами задачи.

## 28.5. Область значений параметров

Пойдем ограничения на значения параметров в задаче (28.10), (28.11). Из неравенств  $r > 0$ ,  $t > 0$  следует, что

$$w_{10} > 0.$$

Покажем, что  $w_{20} > 0$ . Для этого пойдем разложения функции  $w_1$  в окрестности точки  $\sigma = 0$ , воспользовавшись тем, что в окрестности начальной точки решение задачи Коши представимо в виде сходящихся рядов по степеням независимой переменной (теорема Коши [5]). Из (28.10) следует:

$$\begin{aligned} w_i &= \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \sigma^j, \quad i = \overline{1,3}, \\ a_{10} &= w_{10}, \quad a_{20} = w_{20}, \quad a_{30} = 0, \quad a_{11} = 0, \quad a_{21} = 1, \\ a_{31} &= a_{10}a_{20} = w_{10}w_{20}, \quad a_{12} = \frac{1}{2}a_{31} = \frac{1}{2}w_{10}w_{20}, \quad a_{22} = 0, \\ a_{32} &= \frac{1}{2}(a_{11}a_{20} + a_{10}a_{21}) = \frac{1}{2}w_{10}, \quad a_{13} = \frac{1}{3}a_{32} = \frac{1}{6}w_{10}, \\ a_{23} &= -\frac{1}{6}a_{31}^2 = -\frac{1}{6}w_{10}^2w_{20}^2, \\ a_{33} &= \frac{1}{3}(a_{12}a_{20} + a_{11}a_{21} + a_{10}a_{22}) = \frac{1}{6}w_{10}w_{20}^2. \end{aligned}$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} w_1 &= w_{10} + \frac{1}{2}w_{10}w_{20}\sigma^2 + \frac{1}{6}w_{10}\sigma^3 + O(\sigma^4), \\ w_2 &= w_{20} + \sigma - \frac{1}{6}w_{10}^2w_{20}^2\sigma^3 + O(\sigma^4), \\ w_3 &= w_{10}w_{20}\sigma + \frac{1}{2}w_{10}\sigma^2 + \frac{1}{6}w_{10}w_{20}^2\sigma^3 + O(\sigma^4). \end{aligned} \quad (28.12)$$

Так как при  $\sigma = 0$  функция  $w_1$  имеет минимальное значение и так как  $w_{10} > 0$ , то

$$w_{20} > 0.$$

Параметр  $\sigma_{-1}$  определяется из равенства значений  $r$  на концах отрезка  $t$ :

$$w_1(\sigma_1) = w_1(\sigma_{-1}), \quad \sigma_{-1} \leq 0 \leq \sigma_1. \quad (28.13)$$

Ограничение на параметр  $\sigma_1$  следует из неравенства  $r \leq 1$ :  $\sigma_1$  принимает произвольные положительные значения, для которых справедливо неравенство

$$w_1(\sigma) \leq w_1(\sigma_1) \quad \sigma_{-1} \leq \sigma \leq \sigma_1.$$

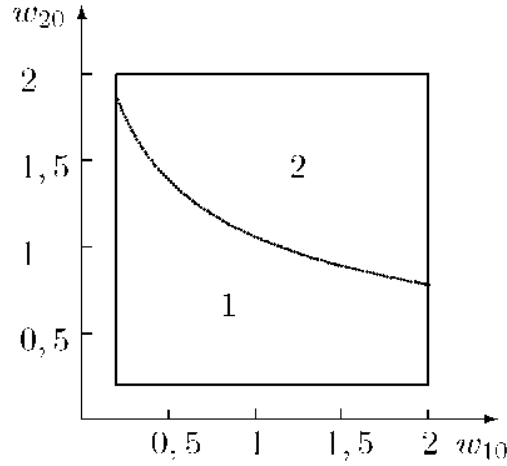


Рис. 28.1. Область значений параметров  $w_{10}$ ,  $w_{20}$

## 28.6. О численном интегрировании задачи

Задача (28.10) интегрировалась численно в области значений

$$0,2 \leq w_{10} \leq 2, \quad 0,2 \leq w_{20} \leq 2 \quad (28.14)$$

на максимально возможном интервале  $\sigma_{-1} \leq \sigma \leq \sigma_1$ , принадлежащем отрезку  $[\sigma_{-1**}, \sigma_{1**}]$ .

На рис. 28.1 показано разбиение области (28.14), полученное численно. В области 1 производная  $dr/dl$  обращается в ноль при  $\sigma = \sigma_{-1} - \sigma_{-1**}$ , при этом  $dz/dl = 1$ ,  $\sigma_1 < \sigma_{1**}$ . В области 2 производная  $dr/dl$  обращается в ноль при  $\sigma = \sigma_1 - \sigma_{1**}$ , при этом  $dz/dl = -1$ ,  $\sigma_{-1} > \sigma_{-1**}$ . На границе областей 1, 2 производная  $dr/dl$  обращается в ноль на обоих концах максимально возможного интервала:

$$\begin{aligned} \sigma_{-1} - \sigma_{-1**}, \quad \frac{dr}{dl}(\sigma_{-1**}) = 0, \quad \frac{dz}{dl}(\sigma_{-1**}) = 1, \\ \sigma_1 - \sigma_{1**}, \quad \frac{dr}{dl}(\sigma_{1**}) = 0, \quad \frac{dz}{dl}(\sigma_{1**}) = -1. \end{aligned}$$

## 28.7. Связь новых параметров с исходными

Параметры  $w_{10}$ ,  $w_{20}$ ,  $\sigma_1$  связаны с  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $v$ ,  $t$ ,  $d$ ,  $\sigma_{-1}$  уравнениями, следующими из (28.4), (28.6), (28.8), (28.13):

$$\begin{aligned} w_1(\sigma_{-1}) = w_1(\sigma_1), \quad \sigma_{-1} \leq 0 \leq \sigma_1, \quad \sqrt[3]{l} = \frac{1}{w_1(\sigma_1)}, \\ d = -w_2(\sigma_1) \sqrt[3]{t}, \quad c_1 = (\sigma_1 - \sigma_{-1}) \sqrt[3]{t}, \end{aligned}$$

Таблица 28.1. Параметры форм равновесия для точек  $(w_{10}, w_{20})$  границы между областями 1 и 2 на рис. 28.1

$w_{01}$	$w_{02}$	$\sigma_{1**}$	$\sigma_{-1**}$	$c_1$	$c_2$	$v$	$t$	$d$
0, 2	1, 85	1, 98	-3, 03	4, 22	3, 09	2, 38	0, 60	-2, 28
0, 4	1, 49	1, 79	-2, 65	3, 23	2, 19	1, 54	0, 38	-1, 52
0, 6	1, 29	1, 66	-2, 42	2, 65	1, 70	1, 09	0, 27	-1, 13
0, 8	1, 16	1, 57	-2, 24	2, 23	1, 38	0, 81	0, 20	-0, 88
1, 0	1, 06	1, 49	-2, 11	1, 92	1, 15	0, 61	0, 15	-0, 71
1, 2	0, 98	1, 42	-1, 99	1, 68	0, 98	0, 47	0, 12	-0, 59
1, 4	0, 91	1, 36	-1, 90	1, 48	0, 85	0, 37	0, 09	-0, 50
1, 6	0, 86	1, 31	-1, 81	1, 31	0, 74	0, 30	0, 07	-0, 43
1, 8	0, 82	1, 26	-1, 74	1, 18	0, 65	0, 24	0, 06	-0, 38
2, 0	0, 78	1, 22	-1, 67	1, 06	0, 58	0, 20	0, 05	-0, 33

$$c_2 = \left[ w_2(\sigma_1) - w_2(\sigma_{-1}) \right] \sqrt[3]{t}, \quad v = 2t \left[ \cos w_3(\sigma_{-1}) - \cos w_3(\sigma_1) \right].$$

Отсюда получаем следующие формулы для исходных параметров:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\sigma_1 - \sigma_{-1}}{w_1(\sigma_1)}, & c_2 &= \frac{w_2(\sigma_1) - w_2(\sigma_{-1})}{w_1(\sigma_1)}, & (28.15) \\ v &= \frac{2}{w_1^3(\sigma_1)} \left[ \cos w_3(\sigma_{-1}) - \cos w_3(\sigma_1) \right], \\ t &= \frac{1}{w_1^3(\sigma_1)}, & d &= -\frac{w_2(\sigma_1)}{w_1(\sigma_1)}. \end{aligned}$$

В табл. 28.1 даны значения параметров для кривой, разделяющей области 1 и 2 на рис. 28.1.

**Утверждение 28.1.** При  $\sigma_1 = 0$  и произвольных  $w_{10} > 0$ ,  $w_{20} > 0$  параметры  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $v$  равны нулю.

*Доказательство.* При  $\sigma_1 \ll 1$  справедливы формулы (28.12). Подставим эти формулы в уравнения (28.13), (28.15) и решим уравнения. Получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{-1} &= -\sigma_1 - \frac{\sigma_1^2}{3w_{20}} + O(\sigma_1^3), & c_1 &= \frac{2\sigma_1}{w_{10}} + \frac{\sigma_1^2}{3w_{10}w_{20}} + O(\sigma_1^3), \\ c_2 &= \frac{2\sigma_1}{w_{10}} + \frac{\sigma_1^2}{3w_{10}w_{20}} + O(\sigma_1^3), & v &= \frac{4w_{20}\sigma_1^3}{3w_{10}} + O(\sigma_1^4). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при  $\sigma_1 = 0$  параметры  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $v$  обращаются в ноль. Утверждение 28.1 доказано.

## 28.8. Формы равновесия

На рис. 28.2 представлены одноосные формы равновесия. Численные значения параметров форм 1а—4а даны в таблице 28.2. Для форм 1б—4б значения  $c_1, c_2, v, t$  такие же. Значение  $d$  находится по формуле (27.11):  $d = -d(a) - c_2$ , где  $d(a)$  — значение  $d$  в табл. 28.2 для формы а.

Формы равновесия получены интегрированием системы (28.10) с последующим переходом к исходным переменным по формулам (28.9).

Таблица 28.2. Параметры форм равновесия рис. 28.2

	$w_{01}$	$w_{02}$	$\sigma_1$	$\sigma_{-1}$	$c_1$	$c_2$	$v$	$t$	$d$
1а	0,50	1,00	0,97	-1,84	3,39	3,24	1,28	1,75	-2,27
2а	1,00	1,06	1,49	-2,11	1,92	1,15	0,61	0,15	-0,71
3а	1,00	1,50	1,25	-1,19	1,39	0,56	0,40	0,18	-0,97
4а	1,00	1,06	1,00	-1,37	1,49	1,16	0,52	0,25	-1,06

Формы 1, 3 имеют значения  $(w_{10}, w_{20})$ , принадлежащие областям 1, 2 рис. 28.1. Значения  $(w_{10}, w_{20})$  для формы 2 лежат на границе между 1 и 2 областями. Значения  $\sigma_{-1}$  для форм 1, 2 являются минимальными:  $\sigma_{-1} = \sigma_{-1**}$ . Значения  $\sigma_1$  для форм 2, 3 являются максимальными:  $\sigma_1 = \sigma_{1**}$ .

Любая часть поверхностей равновесия тоже является поверхностью равновесия. Поверхность 4 на рис. 28.2 является (с точностью до масштаба) частью поверхности 2.

**Результат 28.1.** Одноосные формы равновесия находятся из решения задачи (28.4) для исходных переменных и задачи (28.10) для новых переменных. На рис. 28.2 показаны одноосные формы равновесия. Параметры форм даны в табл. 28.2.



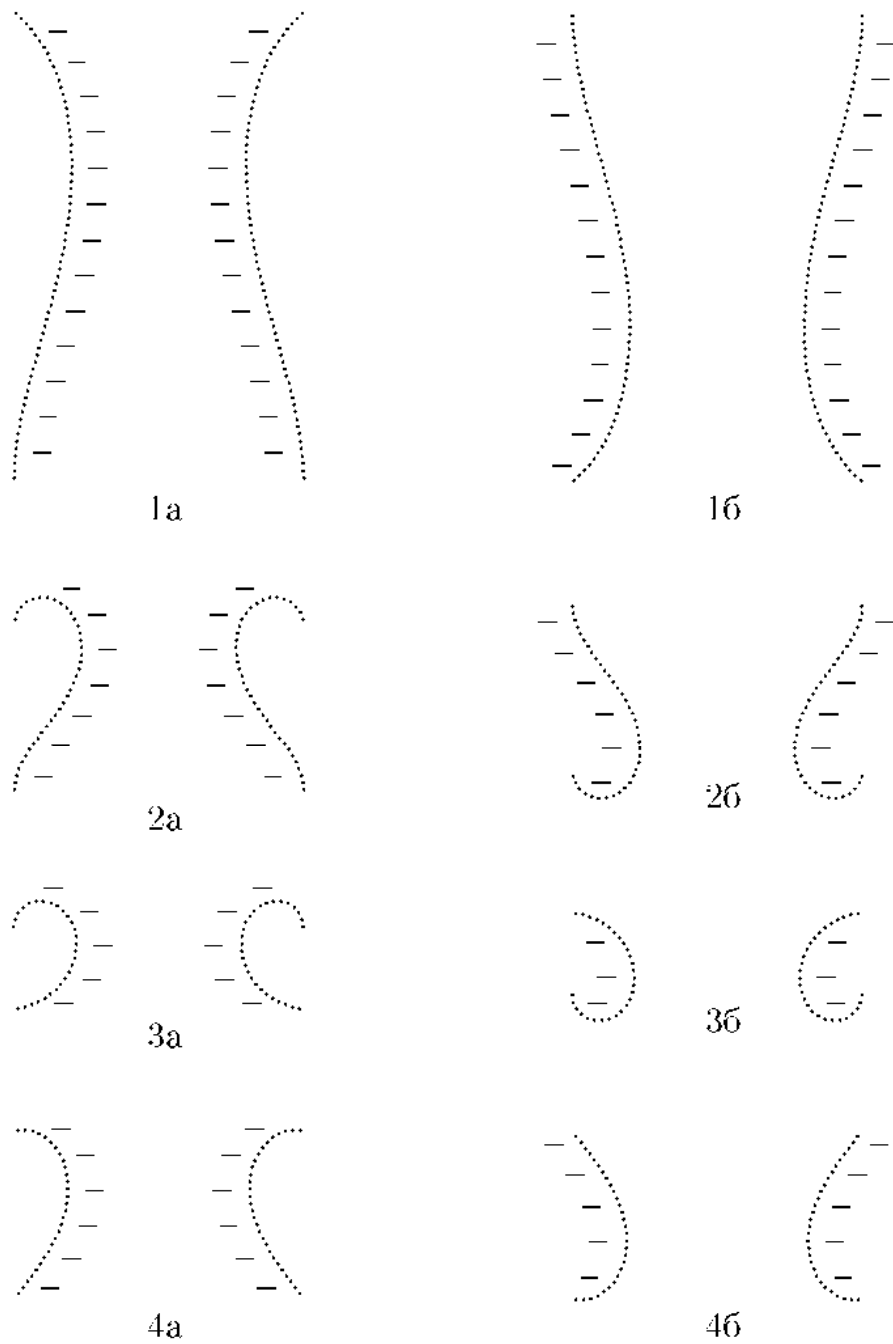


Рис. 28.2. Одноосные формы равновесия

## §29. Формы равновесия с одной двухосной и одной одноосной областями

### 29.1. Двухосная область прилегает к нижнему контуру

Пусть двухосная область прилегает к нижнему контуру. Тогда она расположена на отрезке  $0 \leq l \leq l_1$ , где  $l_1$  — искомая постоянная,  $0 < l_1 < c_1$ . Одноосная область расположена на отрезке  $l_1 \leq l \leq c_1$ . Из условия гладкости поверхности  $S$  на границе следует, что  $z_l(l_1) = \kappa = \pm 1$ . Поэтому для переменной  $\theta$  выполняется равенство  $\sin \theta(l_1) = \kappa$  (смотрите (28.3)). Из формулы (28.5) для  $v_1$  получаем равенство

$$v = 2l \left[ \sin \theta(l_1) - \sin \theta(c_1) \right] = 2l \left[ \kappa - \sin \theta(c_1) \right]. \quad (29.1)$$

Так как  $v > 0$ , то получаем, что

$$\kappa = 1, \quad \theta(l_1) = \frac{\pi}{2}. \quad (29.2)$$

Это означает, что двухосная область лежит выше нижнего контура крепления оболочки. Из (27.1)—(27.5), (28.4), (29.1), (29.2) получим следующие уравнения для рассматриваемого случая равновесия.

#### Двухосная область

$$\begin{aligned} r = 1, \quad z = l - c_2, \quad t_1 = \text{const} \geq 0, \quad u = \text{const}, \quad (29.3) \\ t_2 = -z + d \geq 0, \quad t_1 t_2 = u^2 \geq 0, \quad 0 \leq l \leq l_1. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что двухосная область прилегает к нижнему контуру.

#### Одноосная область

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dl} = \cos \theta, \quad \frac{dz}{dl} = \sin \theta, \quad \frac{d\theta}{dl} = -\frac{r(z-d)}{t}, \quad (29.4) \\ t_1 = \frac{t}{r}, \quad t = \text{const} > 0, \quad t_2 = 0, \quad u = 0, \quad l_1 \leq l \leq c_1. \end{aligned}$$

Для почти всех значений  $l$ ,  $l_1 \leq l \leq c_1$ , выполняется неравенство

$$r(l) < 1. \quad (29.5)$$

### Условия на границе между областями

$$r(l_1) = 1, \quad \theta(l_1) = \frac{\pi}{2}, \quad t_1 = t > 0, \quad u(l_1) = 0. \quad (29.6)$$

Из условия на границе следует, что на всей поверхности  $S$

$$u = 0. \quad (29.7)$$

### Дополнительные условия

$$r(c_1) = 1, \quad z(c_1) = 0, \quad v = 2t \left[ 1 - \sin \theta(c_1) \right]. \quad (29.8)$$

### Сводные уравнения

В задаче (29.3)–(29.8) неизвестными являются функции  $r(l)$ ,  $z(l)$ ,  $\theta(l)$  на отрезке  $l_1 \leq l \leq c_1$  и постоянные  $t_1$ ,  $t$ ,  $d$ . Запишем уравнения и неравенства для неизвестных в виде одной системы

$$\frac{dr}{dl} = \cos \theta, \quad \frac{dz}{dl} = \sin \theta, \quad \frac{d\theta}{dl} = -\frac{r(z-d)}{t}, \quad (29.9)$$

$$r(l_1) = 1, \quad \theta(l_1) = \frac{\pi}{2}, \quad r(c_1) = 1, \quad z(c_1) = 0,$$

$$v = 2t \left[ 1 - \sin \theta(c_1) \right], \quad t > 0, \quad d \geq -c_2 + l_1, \quad l_1 \leq l \leq c_1.$$

Для почти всех значений  $l$ ,  $l_1 \leq l \leq c_1$ , выполняется неравенство (29.5). Двухосная область описывается уравнениями (29.3). Для усилий  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $u$  справедливы формулы (29.3), (29.4), (29.7). Неравенство (29.9) для  $d$  следует из неравенства (29.3) для  $t_2$  в двухосной области.

## 29.2. Двухосная область прилегает к верхнему контуру

Пусть двухосная область прилегает к верхнему контуру. Тогда она расположена на отрезке  $l_1 \leq l \leq c_1$ , где  $l_1$  — искомая постоянная,  $0 < l_1 < c_1$ . Одноосная область расположена на отрезке  $0 \leq l \leq l_1$ . Из условия гладкости поверхности  $S$  на границе следует, что  $z_l(l_1) = \kappa = \pm 1$ . Поэтому для переменной  $\theta$  выполняется равенство  $\sin \theta(l_1) = \kappa$  (смотрите (28.3)). Из формулы (28.5) для  $v_1$  получаем равенство

$$v = 2t \left[ \sin \theta(0) - \sin \theta(l_1) \right] = 2t \left[ \sin \theta(0) - \kappa \right]. \quad (29.10)$$

Так как  $v > 0$ , то

$$\kappa = -1, \quad \theta(l_1) = \frac{\pi}{2}. \quad (29.11)$$

Это означает, что двухосная область лежит выше верхнего контура крепления оболочки. Из (27.1)–(27.5), (28.4), (29.10), (29.11) получим следующие уравнения для рассматриваемого случая равновесия.

### Двухосная область

$$\begin{aligned} r = 1, \quad z = -l + c_1, \quad t_1 = \text{const} \geq 0, \quad u = \text{const}, \quad (29.12) \\ t_2 = z - d \geq 0, \quad t_1 t_2 - u^2 \geq 0, \quad l_1 \leq l \leq c_1. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что двухосная область прилегает к верхнему контуру.

### Одноосная область

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dl} = \cos \theta, \quad \frac{dz}{dl} = \sin \theta, \quad \frac{d\theta}{dl} = -\frac{r(z-d)}{t}, \quad (29.13) \\ t_1 = \frac{t}{r}, \quad t = \text{const} > 0, \quad t_2 = 0, \quad u = 0, \quad 0 \leq l \leq l_1. \end{aligned}$$

Для почти всех значений  $l$ ,  $l_1 \leq l \leq c_1$ , выполняется неравенство

$$r(l) < 1. \quad (29.14)$$

### Условия на границе между областями

$$r(l_1) = 1, \quad \theta(l_1) = -\frac{\pi}{2}, \quad t_1 = t > 0, \quad u(l_1) = 0. \quad (29.15)$$

Из условия на границе следует, что на всей поверхности  $S$

$$u = 0. \quad (29.16)$$

### Дополнительные условия

$$r(0) = 1, \quad z(0) = -c_2, \quad v = 2t \left[ 1 + \sin \theta(0) \right]. \quad (29.17)$$

### Сводные уравнения

В задаче (29.12)–(29.17) неизвестными являются функции  $r(l)$ ,  $z(l)$ ,  $\theta(l)$  на отрезке  $0 \leq l \leq l_1$  и постоянные  $l_1$ ,  $t$ ,  $d$ . Запишем уравнения и неравенства для неизвестных в виде одной системы

$$\frac{dr}{dl} = \cos \theta, \quad \frac{dz}{dl} = \sin \theta, \quad \frac{d\theta}{dl} = -\frac{r(z-d)}{t}, \quad (29.18)$$

$$r(0) = 1, \quad z(0) = -c_2, \quad r(l_1) = 1, \quad \theta(l_1) = -\frac{\pi}{2},$$

$$v = 2t \left[ 1 + \sin \theta(0) \right], \quad t > 0, \quad d \leq 0, \quad 0 \leq l \leq l_1.$$

Для почти всех значений  $l$ ,  $0 \leq l \leq l_1$ , выполняется неравенство (29.14.). Двухосная область описывается уравнениями (29.12). Для усилий  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $u$  справедливы формулы (29.12), (29.13), (29.16). Неравенство (29.18) для  $d$  следует из неравенства (29.12) для  $t_2$  в двухосной области.

### 29.3. Переход к новым переменным

По формулам (28.8) перейдем к новым переменным  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $w_3$ ,  $\sigma$  в одноосной области. Новые переменные являются решением задачи Коши (28.10):

$$\begin{aligned} \frac{dw_1}{d\sigma} &= \sin w_3, & \frac{dw_2}{d\sigma} &= \cos w_3, & \frac{dw_3}{d\sigma} &= w_1 w_2, \\ w_1(0) &= w_{10}, & w_2(0) &= w_{20}, & w_3(0) &= 0. \end{aligned} \quad (29.19)$$

Задача (29.19) интегрируется на двух интервалах

$$0 \leq \sigma \leq \sigma_1 \quad \sigma_{-1} \leq \sigma \leq 0; \quad w_1(\sigma_1) = w_1(\sigma_{-1}). \quad (29.20)$$

#### Двухосная область прилегает к нижнему контуру

Из (28.8), (28.9) (29.9), (29.20) получим формулы для исходных переменных и параметров:

$$l = \frac{\sigma - \sigma_{-1}}{w_1(\sigma_1)} + l_1, \quad r = \frac{w_1}{w_1(\sigma_1)}, \quad z = \frac{w_2 - w_2(\sigma_1)}{w_1(\sigma_1)}, \quad (29.21)$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} - w_3, \quad c_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_{-1}}{w_1(\sigma_1)} + l_1, \quad c_2 = \frac{w_2(\sigma_1) - w_2(\sigma_{-1})}{w_1(\sigma_1)} + l_1,$$

$$v = \frac{2}{w_1^3(\sigma_1)} \left[ 1 - \cos w_3(\sigma_1) \right], \quad t = \frac{1}{w_1^3(\sigma_1)}, \quad d = -\frac{w_2(\sigma_1)}{w_1(\sigma_1)}.$$

Из (29.9) следует, что значения  $(w_{10}, w_{20})$  принадлежат области 1 и границе между областями 1 и 2 на рис. 28.1. Значение  $\sigma_{-1}$  равно минимально возможному:  $\sigma_{-1} = \sigma_{1**}$ .

### Двухосная область прилегает к верхнему контуру

Из (28.8), (28.9), (29.18), (29.20) получим формулы для исходных переменных и параметров:

$$\begin{aligned}
 l &= \frac{\sigma - \sigma_{-1}}{w_1(\sigma_1)}, & r &= \frac{w_1}{w_1(\sigma_1)}, & (29.22) \\
 z &= \frac{w_2 - w_2(\sigma_1)}{w_1(\sigma_1)} + c_1 - l_1, & \theta &= \frac{\pi}{2} - w_3, & l_1 &= \frac{\sigma_1 - \sigma_{-1}}{w_1(\sigma_1)}, \\
 c_2 &= \frac{w_2(\sigma_1) - w_2(\sigma_{-1})}{w_1(\sigma_1)} + l_1 - c_1, & v &= \frac{2}{w_1^3(\sigma_1)} \left[ 1 + \cos w_3(\sigma_{-1}) \right], \\
 t &= \frac{1}{w_1^3(\sigma_1)}, & d &= -\frac{w_2(\sigma_1)}{w_1(\sigma_1)} + c_1 - l_1.
 \end{aligned}$$

Из (29.18) следует, что значения  $(w_{10}, w_{20})$  принадлежат области 2 и границе между областями 1 и 2 на рис. 28.1. Значение  $\sigma_1$  равно максимально возможному:  $\sigma_1 = \sigma_{1**}$ .

### 29.4. Формы равновесия

На рис. 29.1 даны формы равновесия с одной одноосной и одной двухосной областями. Параметры форм равновесия 1а—3а даны в таблице 29.1. Для форм 1б—3б значения  $c_1, c_2, v, t$  такие же. Значение  $d$  вычисляется по формуле (27.11):  $d = -d(a) - c_2$ , где  $d(a)$  — значение  $d$  в табл. 29.1 для формы а.

Одноосные области представленных форм совпадают с формами равновесия 1—3 на рис. 28.2.

Таблица 29.1. Параметры форм равновесия на рис. 29.1

	$w_{01}$	$w_{02}$	$\sigma_1$	$\sigma_{-1}$	$c_1$	$c_2$	$v$	$t$	$d$	$l_1$
1а	0,50	1,00	0,97	-1,84	3,89	3,74	1,28	1,75	-2,27	0,50
2а	1,00	1,06	1,49	-2,11	2,42	1,65	0,61	0,15	-0,71	0,50
	1,00	1,06	1,49	-2,11	2,42	0,65	0,61	0,15	-0,21	1,92
3а	1,00	1,50	1,25	-1,19	1,69	0,26	0,40	0,18	-0,67	1,39

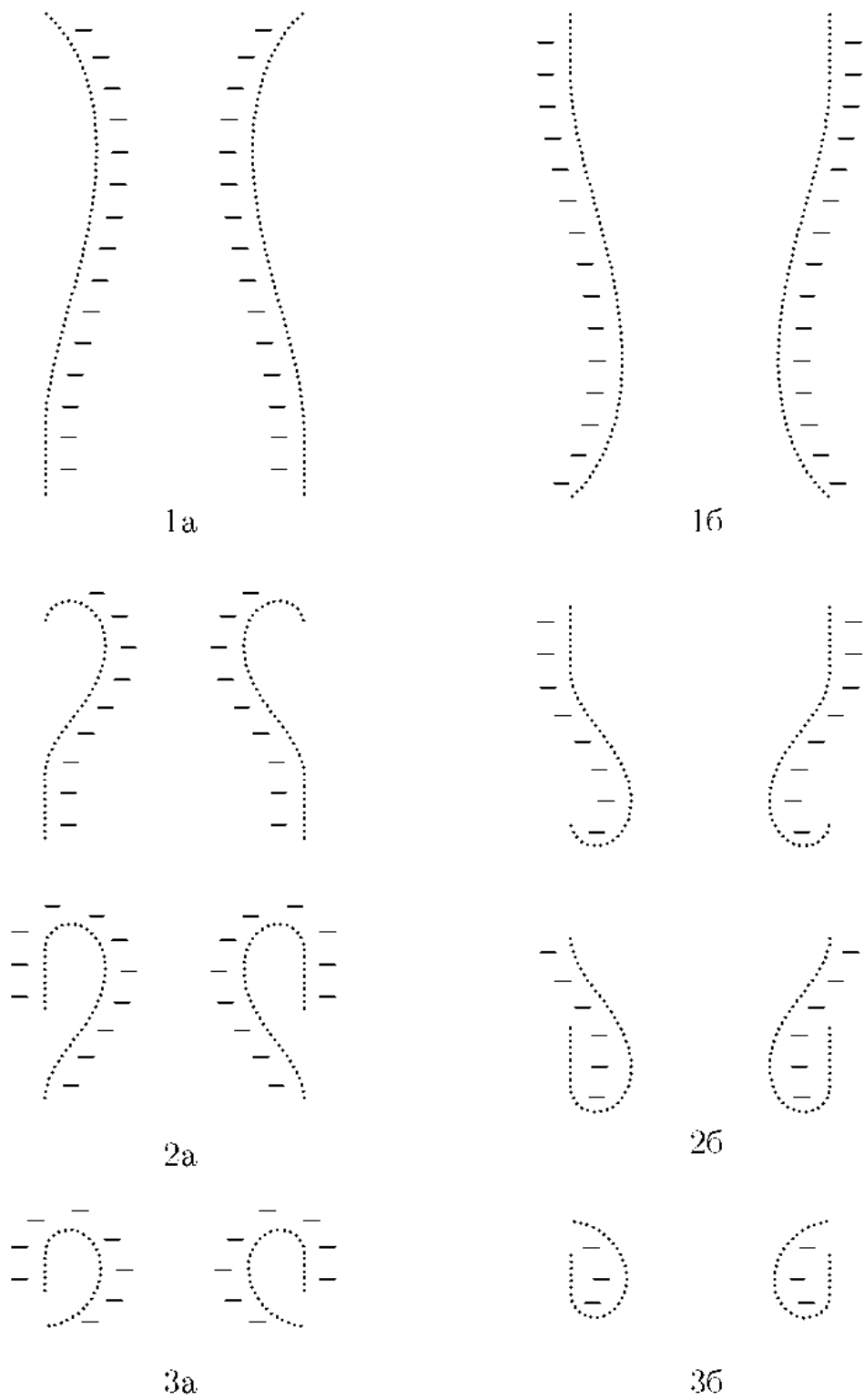


Рис. 29.1. Формы равновесия с одной двухосной и одной одноосной областями

## §30. Формы равновесия с двумя двухосными и одной одноосной областями

### 30.1. Уравнения

#### Расположение областей

Если оболочка содержит две двухосные и одну одноосную области, то двухосные области примыкают к контурам крепления:

$$\begin{aligned} 0 \leq l \leq l_1 & \quad \text{первая двухосная область,} \\ l_1 \leq l \leq l_2 & \quad \text{одноосная область,} \\ l_2 \leq l \leq c_1 & \quad \text{вторая двухосная область,} \end{aligned}$$

$l_1, l_2$  — искомые постоянные,  $0 < l_1 < l_2 < c_1$ .

Из условия гладкости поверхности  $S$  на границе следует, что  $z_i(l_i) = \kappa_i = \pm 1$  ( $i = 1, 2$ ), поэтому для переменной  $\theta$  выполняются равенства  $\sin \theta(l_i) = \kappa_i$  (смотрите (28.3)). Из формулы (28.5) для  $v_1$  получаем равенство

$$v = 2t \left[ \sin \theta(l_1) - \sin \theta(l_2) \right].$$

Так как  $\kappa_i = \pm 1$ , то разность синусов может принимать одно из трех значений:  $-2, 0, 2$ . Так как  $v > 0$ , то получаем, что

$$\begin{aligned} \kappa_1 = 1, \quad \kappa_2 = -1, & \quad (30.1) \\ \theta(l_1) = \frac{\pi}{2}, \quad \theta(l_2) = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}, & \quad v = 4t. \end{aligned}$$

Это означает, что двухосные области лежат выше контуров крепления: первая область выше нижнего контура, вторая область выше верхнего контура. Из (27.1)–(27.5), (28.4), (30.1) получим следующие уравнения для рассматриваемого случая равновесия.

#### Первая двухосная область

$$\begin{aligned} r = 1, \quad z = l - c_2, \quad t_1 = t, \quad u = 0, \quad t_2 = -z \mid d, & \quad (30.2) \\ d \geq l_1 - c_2, \quad 0 \leq l \leq l_1. & \end{aligned}$$

Здесь учтено, что двухосная область прилегает к нижнему контуру, и учтены условия на границах между областями для усилий.



### Одноосная область

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dl} = \cos \theta, \quad \frac{dz}{dl} = \sin \theta, \quad \frac{d\theta}{dl} = -\frac{r(z-d)}{l}, \quad (30.3) \\ t_1 = \frac{l}{r}, \quad t = \text{const} > 0, \quad t_2 = 0, \quad u = 0, \quad l_1 \leq l \leq l_2. \end{aligned}$$

Для почти всех значений  $l$ ,  $l_1 \leq l \leq l_2$ , выполняется неравенство

$$r(l) < 1. \quad (30.4)$$

### Вторая двухосная область

$$\begin{aligned} r = 1, \quad z = -l + c_1, \quad l_1 = l, \quad u = 0, \quad t_2 = z - d, \quad (30.5) \\ d \leq 0, \quad t_2 \leq l \leq c_1. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что двухосная область прилегает к верхнему контуру, и учтены условия на границах между областями для усилий.

### Условия на границах между областями

$$r(l_1) = 1, \quad \theta(l_1) = \frac{\pi}{2}, \quad r(l_2) = 1, \quad \theta(l_2) = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}. \quad (30.6)$$

### Дополнительные условия

$$v = 4t. \quad (30.7)$$

### Сводные уравнения

В задаче (30.2)–(30.7) неизвестными являются функции  $r(l)$ ,  $z(l)$ ,  $\theta(l)$  на отрезке  $l_1 \leq l \leq l_2$  и постоянные  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $t$ ,  $d$ . Запишем уравнения и неравенства для неизвестных в виде одной системы

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dl} = \cos \theta, \quad \frac{dz}{dl} = \sin \theta, \quad \frac{d\theta}{dl} = -\frac{r(z-d)}{l}, \quad (30.8) \\ r(l_1) = 1, \quad \theta(l_1) = \frac{\pi}{2}, \quad r(l_2) = 1, \quad \theta(l_2) = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}, \\ v = 4t, \quad t > 0, \quad -c_2 + l_1 \leq d \leq 0, \quad 0 < l_1 \leq l \leq l_2 < c_1. \end{aligned}$$

Для почти всех значений  $l$ ,  $l_1 \leq l \leq l_2$ , выполняется неравенство (30.4). Двухосные области описываются уравнениями (30.2), (30.5). Усилия  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $u$  находятся по формулам (30.2), (30.3), (30.5).

## 30.2. Переход к новым переменным

По формулам (28.8) перейдем к новым переменным  $w_1, w_2, w_3, \sigma$  в одноосной области. Новые переменные являются решением задачи Коши (28.10):

$$\begin{aligned} \frac{dw_1}{d\sigma} &= \sin w_3, & \frac{dw_2}{d\sigma} &= \cos w_3, & \frac{dw_3}{d\sigma} &= w_1 w_2, \\ w_1(0) &= w_{10}, & w_2(0) &= w_{20}, & w_3(0) &= 0. \end{aligned} \quad (30.9)$$

Задача (30.9) интегрируется на двух интервалах

$$0 \leq \sigma \leq \sigma_1 \quad \text{и} \quad \sigma_{-1} \leq \sigma \leq 0; \quad w_1(\sigma_1) = w_1(\sigma_{-1}). \quad (30.10)$$

Из (30.8) следует, что значения  $(w_{10}, w_{20})$  принадлежат границе между областями 1 и 2 на рис. 28.1. Значения  $\sigma_1, \sigma_{-1}$  равны экстремальным:

$$\sigma_1 = \sigma_{1**}, \quad \sigma_{-1} = \sigma_{-1**}; \quad \theta(l_2) = -\frac{\pi}{2}.$$

Из (28.9), (30.8), (30.10) получим формулы для исходных переменных и параметров:

$$\begin{aligned} l &= \frac{\sigma - \sigma_{-1}}{w_1(\sigma_1)} + l_1, & r &= \frac{w_1}{w_1(\sigma_1)}, \\ z &= \frac{w_2 - w_2(\sigma_1)}{w_1(\sigma_1)} + c_1 - l_2, & \theta &= \frac{\pi}{2} - w_3, & l_2 &= \frac{\sigma_1 - \sigma_{-1}}{w_1(\sigma_1)} + l_1, \\ c_2 &= \frac{w_2(\sigma_1) - w_2(\sigma_{-1})}{w_1(\sigma_1)} - c_1 + l_2, & v &= \frac{A}{w_1^3(\sigma_1)}, \\ t &= \frac{1}{w_1^3(\sigma_1)}, & d &= -\frac{w_2(\sigma_1)}{w_1(\sigma_1)} + c_1 - l_2. \end{aligned} \quad (30.11)$$

## 30.3. Формы равновесия

На рис. 30.1 даны формы равновесия с двумя двухосными и с одной одноосной областями. Параметры формы а имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} w_{01} &= 1,00, & w_{02} &\approx 1,06, & \sigma_1 - \sigma_{1**} &\approx 1,49, \\ \sigma_{-1} - \sigma_{-1**} &\approx -2,11, & c_1 &\approx 2,92, \\ c_2 &\approx 1,15, & v &\approx 0,61, & t &\approx 0,15, \\ d &\approx -0,21, & l_1 &= 0,50, & l_2 &\approx 2,42. \end{aligned} \quad (30.12)$$

Для формы б значения  $c_1, c_2, v, t$  такие же. Значение  $d$  вычисляется по формуле  $d = -d(a) - c_2 \approx -0,94$ . Здесь  $d(a)$  — значение  $d$  в (30.12) для формы а.

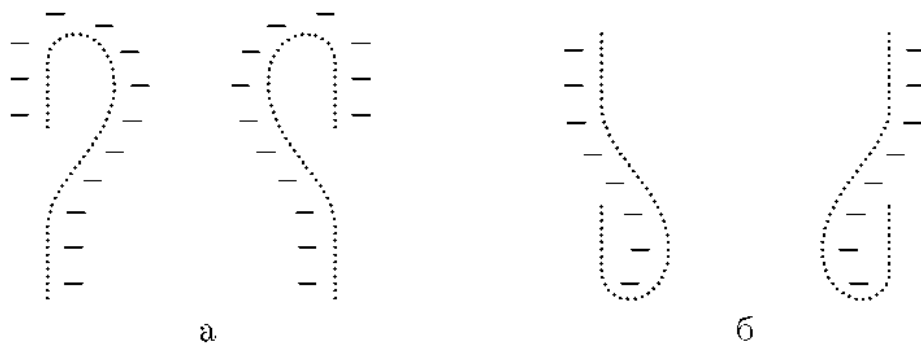


Рис. 30.1. Формы равновесия с двумя двухосными и одной одноосной областями

Одноосные области представленных на рис. 30.1 форм совпадают с формами равновесия 2 на рис. 28.2. Формы 2 на рис. 29.1 являются частью форм рис.30.1.

*Замечание 30.1.* В настоящем параграфе показано, что в случае, когда оболочка имеет две двухосные и одну одноосную область, двухосные области лежат выше контуров крепления. Отсюда и из результатов п. 24.8 следует: если  $v = v_*$  ( $v_*$  — максимальное значение  $v$ ), то оболочка может иметь только одну двухосную область. Если жидкость находится с внутренней стороны оболочки, то двухосная область прилегает к верхнему контуру крепления. Если жидкость находится с внешней стороны оболочки, то двухосная область прилегает к нижнему контуру крепления (смотрите замечание 24.3).

## §31. Формы равновесия с одной двухосной и двумя одноосными областями

### 31.1. Уравнения

#### Расположении областей

Если оболочка содержит одну двухосную и две одноосные области, то одноосные области примыкают к контурам крепления:

$$\begin{aligned}
 0 \leq l \leq l_1 & \quad \text{первая одноосная область,} \\
 l_1 \leq l \leq l_2 & \quad \text{двухосная область,} \\
 l_2 \leq l \leq c_1 & \quad \text{вторая одноосная область,}
 \end{aligned}$$

$l_1, l_2$  — искомые постоянные,  $0 < l_1 < l_2 < c_1$ . Из условия гладкости поверхности  $S$  на границе следует, что  $z_l(l_i) = \kappa = \pm 1$  ( $i = 1, 2$ ), поэтому для переменной  $\theta$  выполняются равенства  $\sin \theta(l_i) = \kappa$  (смотрите (28.3)).

Из формулы (28.5) для объема  $v_1$  области между первой одноосной областью и цилиндром  $r = 1$  получим равенства

$$v_1 = 2t \left[ \sin \theta(0) - \sin \theta(l_1) \right] = 2t \left[ \sin \theta(0) - \kappa \right]. \quad (31.1)$$

Если  $\kappa = 1$ , то  $v_1 < 0$ , граница  $z = z(l_1)$  находится под нижним контуром, двухосная область находится между  $z = z(l_1)$  и нижним контуром,  $z(l_1) < z(l_2) < -c_2$ . В этом случае вторая одноосная область, имеющая границей  $z = z(l_2)$ , находится между первой одноосной областью и цилиндром  $r = 1$  и не может прилегать к верхнему контуру. Отсюда следует, что

$$\kappa = -1, \quad \theta(l_i) = -\frac{\pi}{2}, \quad i = 1, 2, \quad (31.2)$$

$v_1 > 0$ , граница  $z = z(l_1)$  находится над нижним контуром, двухосная область находится между  $z = z(l_1)$  и нижним контуром,  $-c_2 < z(l_2) < z(l_1)$ .

Вторая одноосная область соединяет границу  $z = z(l_2)$  и верхний контур. Поэтому вторая одноосная область находится между первой одноосной областью и цилиндром  $r = 1$ . Граница  $z = z(l_2)$  находится над верхним контуром, так как по условию 22.4 оболочка не имеет участков слипания. Для границ двухосной области и для  $v_2$  ( $v_2$  — объем области между второй одноосной областью и цилиндром  $r = 1$ ) справедливы равенства

$$0 < z(l_2) < z(l_1), \quad (31.3)$$

$$v_2 = 2t \left[ \sin \theta(l_2) - \sin \theta(c_1) \right] - 2t \left[ -1 - \sin \theta(c_1) \right] < 0.$$

Из (27.1)—(27.5), (28.4), (31.1)—(31.3) получим следующие уравнения для рассматриваемого случая равновесия.

### Одноосные области

$$\frac{dr}{dl} = \cos \theta, \quad \frac{dz}{dl} = \sin \theta, \quad \frac{d\theta}{dl} = -\frac{r(z-d)}{t}, \quad t_1 = \frac{t}{r}, \quad (31.4)$$

$$t - \text{const} > 0, \quad t_2 = 0, \quad u = 0, \quad l \in [0, l_1] \cup [l_2, c_1].$$

Для почти всех значений  $l \in [0, l_1] \cup [l_2, c_1]$  выполняется неравенство

$$r(l) < 1. \quad (31.5)$$

### Двухосная область

$$\begin{aligned} r = 1, \quad z = -l + l_1 + z(l_1), \quad t_1 = t, \quad u = 0, \quad (31.6) \\ t_2 = z - d, \quad d \leq z(l_2) - z(l_1) + l_1 - l_2, \quad l_1 \leq l \leq l_2. \end{aligned}$$

Здесь учтены условия на границах между областями для усилий. Неравенство для  $d$  следует из неравенства  $t_2 \geq 0$  для двухосной области.

### Условия на границах между областями

$$r(l_i) = 1, \quad \theta(l_i) = -\frac{\pi}{2}, \quad i = 1, 2. \quad (31.7)$$

### Дополнительные условия

$$\begin{aligned} r(0) = 1, \quad z(0) = -c_2, \quad r(c_1) = 1, \quad z(c_1) = 0, \quad (31.8) \\ v = v_1 + v_2 = 2l \left[ \sin \theta(0) - \sin \theta(c_1) \right]. \end{aligned}$$

Так как  $v > 0$ , то из последней формулы получаем неравенство  $\sin \theta(0) > \sin \theta(c_1)$ .

### Сводные уравнения

В задаче (31.4)–(31.8) неизвестными являются функции  $r(l)$ ,  $z(l)$ ,  $\theta(l)$  на отрезках  $0 \leq l \leq l_1$ ,  $l_2 \leq l \leq c_1$  и постоянные  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $t$ ,  $d$ . Запишем уравнения и неравенства для неизвестных в виде одной системы

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dl} = \cos \theta, \quad \frac{dz}{dl} = \sin \theta, \quad \frac{d\theta}{dl} = -\frac{r(z-d)}{t}, \quad (31.9) \\ r(0) = 1, \quad r(l_i) = 1, \quad r(c_1) = 1, \\ z(0) = -c_2, \quad z(l_1) - z(l_2) = l_2 - l_1, \quad z(c_1) = 0, \\ \theta(l_i) = -\frac{\pi}{2}, \quad v = 2l \left[ \sin \theta(0) - \sin \theta(c_1) \right], \\ t > 0, \quad d \leq z(l_2), \quad l \in [0, l_1] \cup [l_2, c_1], \\ 0 < l_1 < l_2 < c_1, \quad i=1, 2. \end{aligned}$$

Для почти всех значений  $l \in [0, l_1] \cup [l_2, c_1]$  выполняется неравенство (31.5). Двухосная область описывается уравнениями (31.6). Усилия  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $u$  находятся по формулам (31.4), (31.6).

## 31.2. Переход к новым переменным

По формулам (28.8) перейдем к новым переменным  $w_1, w_2, w_3, \sigma$ . В первой одноосной области новые переменные являются решением задачи Коши (28.10):

$$\begin{aligned} \frac{dw_1}{d\sigma} &= \sin w_3, & \frac{dw_2}{d\sigma} &= \cos w_3, & \frac{dw_3}{d\sigma} &= w_1 w_2, & (31.10) \\ w_1(0) &= w_{10}, & w_2(0) &= w_{20}, & w_3(0) &= 0. \end{aligned}$$

Задача (31.10) интегрируется на двух интервалах

$$\begin{aligned} 0 \leq \sigma \leq \sigma_1 & \quad \sigma_{-1} \leq \sigma \leq 0; & (31.11) \\ w_1(\sigma_1) &= w_1(\sigma_{-1}), & w_3(\sigma_1) &= \pi. \end{aligned}$$

Во второй одноосной области новые переменные являются решением следующей задачи Коши:

$$\begin{aligned} \frac{dw_1}{d\bar{\sigma}} &= \sin w_3, & \frac{dw_2}{d\bar{\sigma}} &= \cos w_3, & \frac{dw_3}{d\bar{\sigma}} &= w_1 w_2, & (31.12) \\ w_1|_{\bar{\sigma}=0} &= w_1(\sigma_1), & w_3|_{\bar{\sigma}=0} &= \pi, \\ w_1|_{\bar{\sigma}=\sigma_2} &= w_1(\sigma_1), & 0 \leq \bar{\sigma} &\leq \sigma_2. \end{aligned}$$

Здесь для удобства интегрирования введена новая независимая переменная  $\sigma$ . Исходные переменные и параметры вычисляются по формулам, которые следуют из (28.8), (28.9), (31.9), (31.11), (31.12):

$$\begin{aligned} l &= \frac{\sigma - \sigma_{-1}}{w_1(\sigma_1)}, & \sigma_{-1} \leq \sigma \leq \sigma_1; & (31.13) \\ l &= \frac{\bar{\sigma} - \sigma_2}{w_1(\sigma_1)} + c_1, & 0 \leq \bar{\sigma} \leq \sigma_2; \\ r &= \frac{w_1}{w_1(\sigma_1)}, & z &= \frac{w_2 - w_2(\bar{\sigma} = \sigma_2)}{w_1(\sigma_1)}, & \theta &= \frac{\pi}{2} - w_3, \\ & \sigma_{-1} \leq \sigma \leq \sigma_1, & 0 \leq \bar{\sigma} \leq \sigma_2; \\ c_1 &= l_2 + \frac{\sigma_2}{w_1(\sigma_1)}, & c_2 &= \frac{w_2(\bar{\sigma} = \sigma_2) - w_2(\sigma_{-1})}{w_1(\sigma_1)}, \\ v &= \frac{2}{w_1^3(\sigma_1)} \left[ \cos w_3(\sigma_{-1}) - \cos w_3(\bar{\sigma} = \sigma_2) \right], & t &= \frac{1}{w_1^3(\sigma_1)}, \\ d &= -\frac{w_2(\sigma - \sigma_2)}{w_1(\sigma_1)}, & l_1 &= \frac{\sigma_1 - \sigma_{-1}}{w_1(\sigma_1)}, & l_2 &= l_1 + \frac{w_2(\sigma_1) - w_2(\sigma - 0)}{w_1(\sigma_1)}. \end{aligned}$$

## 31.3. Область значений параметров $w_{10}, w_{20}$

Из результатов п. 28.6 и из равенства (31.11) для  $w_3(\sigma_1)$  следует, что значения  $(w_{10}, w_{20})$  принадлежат области 2 и границе между обла-

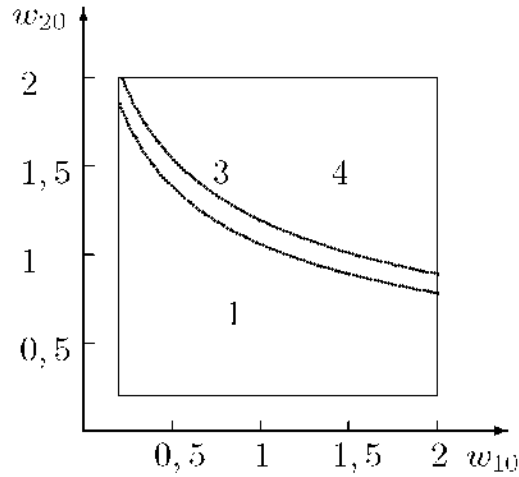


Рис. 31.1. Область значений параметров  $w_{10}$ ,  $w_{20}$

стями 1 и 2 на рис. 28.1. Значение  $\sigma_1$  равно максимально возможному:  $\sigma_1 = \sigma_{1**}$ .

Так как во второй одноосной области переменная  $w_1$  принимает максимальные значения на концах отрезка  $\sigma$ , то вторая одноосная область пересекает плоскость  $z = d$  ( $w_2 = 0$ ). Поэтому плоскость  $z = d$  лежит выше нижнего контура крепления. Это условие выполняется не для всех точек  $(w_{10}, w_{20})$  области 2 на рис. 28.1, а только для точек, лежащих в области 3 и на границе между областью 1 и 3 на рис. 31.1. Область 2 на рис. 28.1 является объединением областей 3, 4 рис. 31.1.

### Граница между областями 3 и 4 на рис. 31.1

Для значений  $(w_{10}, w_{20})$ , принадлежащих границе между областью 3 и 4, выполняется равенство  $w_2(\sigma - 1) = 0$ . В таблице 31.1 даны значения параметров одноосной области для точек  $(w_{10}, w_{20})$ , принадлежащих границе (жидкость находится с внутренней стороны оболочки). Значение  $d = z(0)$ . Поверхность  $S$  является или целиком одноосной (и тогда  $l_1 = c_1$ ,  $z(l_1) = 0$ ,  $z(0) = -c_2$ ), или содержит одну двухосную и одну одноосную области. Двухосная область прилегает к верхнему контуру.

Таблица 31.1. Параметры одноосной области для точек  $(w_{10}, w_{20})$  границы между областями 3 и 4 на рис. 31.1

$w_{01}$	$w_{02}$	$\sigma_{1**}$	$\sigma_{-1}$	$z(l_1) - z(0)$	$v$	$t$	$l_1$
0,4	1,66	1,71	-1,97	1,64	1,37	0,41	2,74
0,6	1,44	1,58	-1,77	1,23	0,95	0,29	2,22
0,8	1,30	1,49	-1,62	0,97	0,69	0,22	1,86
1,0	1,19	1,41	-1,51	0,79	0,52	0,16	1,59
1,2	1,10	1,34	-1,42	0,65	0,40	0,12	1,38
1,4	1,04	1,28	-1,34	0,56	0,31	0,10	1,21
1,6	0,98	1,23	-1,28	0,48	0,24	0,08	1,07
1,8	0,93	1,19	-1,22	0,42	0,20	0,06	0,96
2,0	0,89	1,14	-1,17	0,37	0,16	0,05	0,86

### 31.4. Формы равновесия

На рис. 31.2 даны формы равновесия с одной двухосной и двумя одноосными областями. Параметры формы а имеют следующие значения:

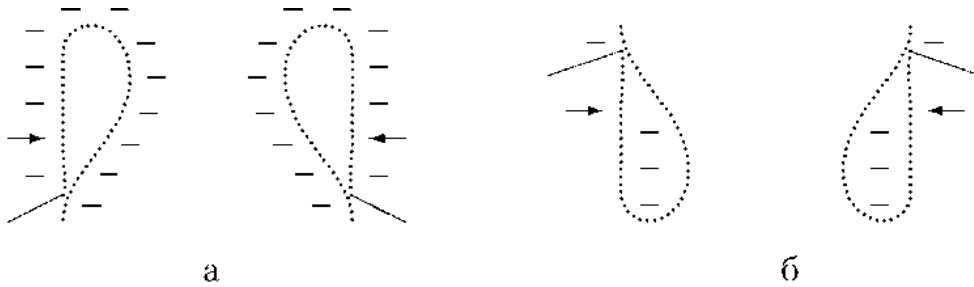


Рис. 31.2. Формы равновесия с одной двухосной и двумя одноосными областями

$$\begin{aligned}
 w_{10} &= 1,00, & w_{20} &\approx 1,06, & \sigma_1 &\approx 1,49, \\
 \sigma_{-1} &\approx -2,11, & w_1|_{\sigma=0} &\approx 1,87, & w_2|_{\sigma=0} &\approx 0,26, \\
 \sigma_2 &\approx 0,80, & c_1 &\approx 2,92, & c_2 &\approx 0,15, & (31.14) \\
 v &\approx 0,60, & t &\approx 0,15, & d &\approx 0,28, \\
 l_1 &\approx 1,92, & l_2 &\approx 2,49.
 \end{aligned}$$

Для формы б значения  $c_1, c_2, t, d$  такие же. Значение  $d$  вычисляется по формуле (27.11):  $d = -d(a) - c_2 \approx -0,44$ . Здесь  $d(a)$  — значение  $d$  в (31.14) для формы а.

Вторые одноосные области форм равновесия на рис. 31.2 близки



к круговым цилиндрам. На рисунке на границы между двухосной и второй одноосной областями указывают стрелки. Наклонные отрезки показывают разделение жидкости и газа.

Первые одноосные области представленных на рис. 31.2 форм совпадают с формами равновесия 2 на рис. 28.2.

*Замечание 31.1.* Форма 4 на рис. 28.2 не может быть частью поверхности с одной двухосной областью и двумя одноосными, так как для нее плоскость  $z = d$  лежит ниже нижнего контура крепления.

## §32. Формы равновесия с двумя двухосными и двумя одноосными областями

### 32.1. Уравнения

#### Расположение областей

Предположим, что к нижнему контуру примыкает одноосная область. Тогда область расположена на отрезке  $0 \leq l \leq l_1$ , и при  $l = l_1$  она граничит с первой двухосной областью,  $z_l(l_1) = \kappa_1$ . Рассмотрим оба случая возможных значений  $\kappa_1$ .

$\kappa_1 = 1$  В этом случае объем  $v_1$  между одноосной областью и цилиндром  $r = 1$  равен (по формуле (28.5))

$$v_1 = 2t \left[ \sin \theta(0) - \sin \theta(l_1) \right] - 2t \left[ \sin \theta(0) - 1 \right] < 0.$$

Отсюда следует, что граница  $z = l_1$  расположена ниже нижнего контура, двухосная область  $l_1 \leq z \leq l_2$  расположена между нижним контуром и  $z = z(l_1)$ . Так как на оболочке нет, по предположению 22.4, участков сгипания, то вся оболочка расположена между одноосной областью  $0 \leq l \leq l_1$  и цилиндром  $r = 1$  и поэтому не может граничить с верхним контуром. Получили, что случай  $\kappa_1 = 1$  невозможен.

$\kappa_1 = -1$  В этом случае объем  $v_1$  между одноосной областью и цилиндром  $r = 1$  равен (по формуле (28.5))

$$v_1 = 2t \left[ \sin \theta(0) - \sin \theta(l_1) \right] - 2t \left[ \sin \theta(0) + 1 \right] > 0.$$

Отсюда следует, что граница  $z = l_1$  расположена выше нижнего контура, первая двухосная область  $l_1 \leq z \leq l_2$  расположена между нижним контуром и  $z = z(l_1)$ . Так как на оболочке нет, по предположению 22.4, участков сгипания, то вся оболочка расположена между одноосной областью  $0 \leq l \leq l_1$  и цилиндром  $z = 1$ . Вторая одноосная

область расположена на отрезке  $l_2 \leq l \leq l_3$  между двумя двухосными областями. Для объема  $v_2$ , который она ограничивает, справедливы формулы

$$v_2 = 2l \left[ \sin \theta(l_2) - \sin \theta(l_3) \right] - 2l(\kappa_1 - \kappa_2) - 4l < 0.$$

Для объема  $v$  получаем соотношения

$$v = v_1 + v_2 = 2t \left[ \sin \theta(0) - 1 \right] < 0.$$

Получили противоречие, так как  $v > 0$ . Отсюда следует, что предположение о том, что к нижнему контуру примыкает одноосная область, неверно и области расположены в следующем порядке:

$$\begin{aligned} 0 \leq l \leq l_1 & \quad \text{первая двухосная область,} \\ l_1 \leq l \leq l_2 & \quad \text{первая одноосная область,} \\ l_2 \leq l \leq l_3 & \quad \text{вторая двухосная область,} \\ l_3 \leq l \leq c_1 & \quad \text{вторая одноосная область.} \end{aligned}$$

Рассматривая возможные значения  $\kappa_i$  так же, как это сделано выше, ( $\kappa_i$  — значение  $\kappa$  для  $i$ -ой двухосной области в (27.1)) получим, что

$$\kappa_1 = 1, \quad \kappa_2 = -1. \quad (32.1)$$

Из (27.1)—(27.5), (28.4), (32.1) получим следующие уравнения для рассматриваемого случая равновесия.

### Первая двухосная область

$$\begin{aligned} r = 1, \quad z = l - c_2, \quad t_1 = t, \quad u = 0, \quad t_2 = -z + d, \quad (32.2) \\ d \geq l_1 - c_2, \quad 0 \leq l \leq l_1. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что двухосная область прилегает к нижнему контуру, и учтены условия на границах между областями для усилий.

### Вторая двухосная область

$$\begin{aligned} r = 1, \quad z = -l + l_2 + z(l_2), \quad t_1 = t, \quad u = 0, \quad (32.3) \\ t_2 = z - d, \quad d \leq z(l_3), \quad l_2 \leq l \leq l_3. \end{aligned}$$

Здесь учтены условия на границах между областями для усилий.

### Одноосные области

$$\frac{dr}{dl} = \cos \theta, \quad \frac{dz}{dl} = \sin \theta, \quad \frac{d\theta}{dl} = -\frac{r(z-d)}{t}, \quad t_1 = \frac{t}{r}, \quad (32.4)$$
$$l = \text{const} > 0, \quad t_2 = 0, \quad u = 0, \quad l \in [l_1, l_2] \cup [l_3, c_1].$$

Для почти всех значений  $l \in [l_1, l_2] \cup [l_3, c_1]$  выполняется неравенство

$$r(l) < 1. \quad (32.5)$$

### Условия на границах между областями

$$r(l_1) = 1, \quad z(l_1) = l_1 - c_2, \quad \theta(l_1) = \frac{\pi}{2}, \quad (32.6)$$
$$r(l_2) = 1, \quad \theta(l_2) = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi},$$
$$r(l_3) = 1, \quad z(l_3) = -l_3 + l_2 + z(l_2), \quad \theta(l_3) = -\frac{\pi}{2}.$$

Здесь учтены формулы (28.3), связывающие переменную  $\theta$  и производные  $r_l, z_l$ .

### Дополнительные условия

$$r(c_1) = 1, \quad z(c_1) = 0, \quad v = 2t \left[ 1 - \sin \theta(c_1) \right]. \quad (32.7)$$

Формула для  $v$  получена так же, как формула (31.8).

### Сводные уравнения

В задаче (32.2)–(32.7) неизвестными являются функции  $r(l), z(l), \theta(l)$  на отрезках  $l_1 \leq l \leq l_2, l_3 \leq l \leq c_1$  и постоянные  $l_1, l_2, l_3, t, d$ . Запишем уравнения и неравенства для неизвестных в виде одной системы:

$$\frac{dr}{dl} = \cos \theta, \quad \frac{dz}{dl} = \sin \theta, \quad \frac{d\theta}{dl} = -\frac{r(z-d)}{t}, \quad (32.8)$$
$$r(l_1) = 1, \quad z(l_1) = l_1 - c_2, \quad \theta(l_1) = \frac{\pi}{2},$$
$$r(l_2) = 1, \quad \theta(l_2) = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi},$$
$$r(l_3) = 1, \quad z(l_3) = -l_3 + l_2 + z(l_2), \quad \theta(l_3) = -\frac{\pi}{2},$$

$$r(c_1) = 1, \quad z(c_1) = 0, \quad v = 2t \left[ 1 - \sin \theta(c_1) \right],$$

$$t > 0, \quad l_1 - c_2 \leq d \leq z(l_3), \quad l \in [l_1, l_2] \cup [l_3, c_1].$$

Для почти всех значений  $l \in [l_1, l_2] \cup [l_3, c_1]$  выполняется неравенство (32.5). Двухосные области описываются уравнениями (32.2), (32.3). Усилия  $t_1, t_2, u$  находятся по формулам (32.2)–(32.4).

## 32.2. Переход к новым переменным

По формулам (28.8) перейдем к новым переменным  $w_1, w_2, w_3, \sigma$ . В первой одноосной области новые переменные являются решением задачи Коши (28.10):

$$\frac{dw_1}{d\sigma} = \sin w_3, \quad \frac{dw_2}{d\sigma} = \cos w_3, \quad \frac{dw_3}{d\sigma} = w_1 w_2, \quad (32.9)$$

$$w_1(0) = w_{10}, \quad w_2(0) = w_{20}, \quad w_3(0) = 0.$$

Задача (32.9) интегрируется на двух интервалах

$$0 \leq \sigma \leq \sigma_1 \quad \sigma_{-1} \leq \sigma \leq 0; \quad w_1(\sigma_1) = w_1(\sigma_{-1}), \quad (32.10)$$

$$w_3(\sigma_1) = \pi \pmod{2\pi}, \quad w_3(\sigma_{-1}) = 0 \pmod{2\pi}.$$

Из результатов п. 28.6 и из равенств (32.10) для  $w_3(\sigma_1), w_3(\sigma_{-1})$  следует, что значения  $(w_{10}, w_{20})$  принадлежат границе между областями 1 и 2 на рис. 28.1 (или, что то же, границе между областями 1 и 3 на рис. 31.1). Значения  $\sigma_1, \sigma_{-1}$  равны экстремальным:  $\sigma_1 = \sigma_{1**}, \sigma_{-1} = \sigma_{-1**}$ .

Во второй одноосной области новые переменные являются решением следующей задачи Коши:

$$\frac{dw_1}{d\sigma} = \sin w_3, \quad \frac{dw_2}{d\sigma} = \cos w_3, \quad \frac{dw_3}{d\sigma} = w_1 w_2, \quad (32.11)$$

$$w_1|_{\sigma=0} = w_1(\sigma_1), \quad w_3|_{\sigma=0} = \pi,$$

$$w_1|_{\sigma=\sigma_2} = w_1(\sigma_1), \quad 0 \leq \sigma \leq \sigma_2.$$

Здесь для удобства интегрирования введена новая независимая переменная  $\bar{\sigma}$ . Исходные переменные и параметры вычисляются по формулам, следующим из (28.9), (32.10), (32.11):

$$l = \frac{\sigma - \sigma_{-1}}{w_1(\sigma_1)} + l_1, \quad \sigma_{-1} \leq \sigma \leq \sigma_1; \quad (32.12)$$

$$l = \frac{\sigma - \sigma_2}{w_1(\sigma_1)} + c_1, \quad 0 \leq \bar{\sigma} \leq \sigma_2;$$

$$r = \frac{w_1}{w_1(\sigma_1)}, \quad z = \frac{w_2 - w_2(\bar{\sigma} - \sigma_2)}{w_1(\sigma_1)}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} - w_3,$$

....

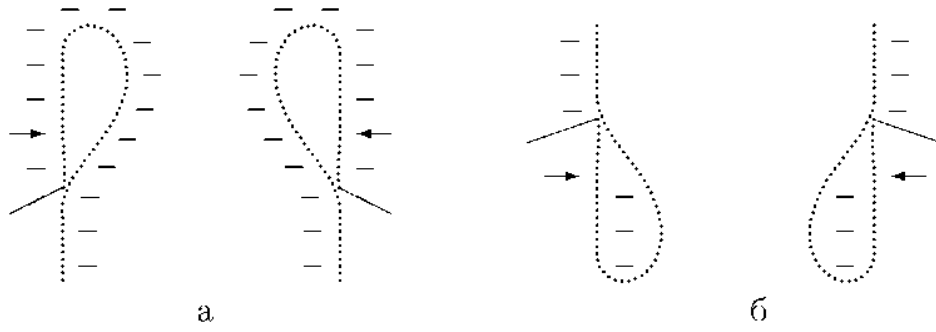


Рис. 32.1. Формы равновесия с двумя двухосными и двумя одноосными областями

$$\begin{aligned}
 & \sigma_{-1} \leq \sigma \leq \sigma_1, \quad 0 \leq \bar{\sigma} \leq \sigma_2; \\
 & c_1 = l_3 + \frac{\sigma_2}{w_1(\sigma_1)}, \quad c_2 = \frac{w_2(\sigma - \sigma_2) - w_2(\sigma_{-1})}{w_1(\sigma_1)} + l_1, \\
 & v = \frac{2}{w_1^3(\sigma_1)} \left[ 1 - \cos w_3(\sigma - \sigma_2) \right], \quad t = \frac{1}{w_1^3(\sigma_1)}, \\
 & d = -\frac{w_2(\sigma - \sigma_2)}{w_1(\sigma_1)}, \quad l_2 - l_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_{-1}}{w_1(\sigma_1)}, \\
 & l_3 - l_2 = \frac{w_2(\sigma_1) - w_2(\bar{\sigma} - 0)}{w_1(\sigma_1)}.
 \end{aligned}$$

### 32.3. Формы равновесия

На рис. 32.1 показаны формы равновесия с двумя двухосными и двумя одноосными областями. Параметры формы а имеют следующие значения:

$$\begin{aligned}
 w_{10} &= 1,00, & w_{20} &\approx 1,06, & \sigma_1 &\approx 1,49, \\
 \sigma_{-1} &\approx -2,11, & w_1|_{\bar{\sigma}=0} &\approx 1,87, & w_2|_{\bar{\sigma}=0} &\approx 0,26, \\
 \sigma_2 &\approx 0,80, & c_1 &\approx 3,42, & c_2 &\approx 0,65, & (32.13) \\
 v &\approx 0,60, & t &\approx 0,15, & d &\approx 0,28, \\
 l_1 &= 0,50, & l_2 &\approx 2,42, & l_3 &\approx 2,99.
 \end{aligned}$$

Для формы б значения  $c_1, c_2, v, t$  такие же. Значение  $d$  вычисляется по формуле (27.11):  $d = -d(a) - c_2 \approx -0,94$ . Здесь  $d(a)$  — значение  $d$  в (32.13) для формы а.

Вторые одноосные области близки к круговым цилиндрам. На рис. 32.1 на границы между второй двухосной и второй одноосной областя-

ми указывают стрелки. Наклопные отрезки показывают разделение жидкости и газа.

Первые одноосные области представленных на рис. 31.2 форм совпадают с формами равновесия 2 на рис. 28.2. Формы равновесия на рис. 31.2 являются частью форм на рис. 32.1.

### §33. Число областей разного типа на поверхности оболочки

Покажем, что поверхность  $S$  не может содержать больше двух областей одного типа.

#### 33.1. О трех двухосных областях

Предположим, что поверхность  $S$  содержит три двухосные области или больше трех. Тогда на поверхности  $S$  имеются, по крайней мере, 2 одноосные области. Назовем области для удобства изложения первой, второй, третьей и рассмотрим следующий порядок расположения областей:

$$\begin{aligned} 0 \leq l_1 \leq l \leq l_2 & \quad \text{первая двухосная область,} \\ l_2 \leq l \leq l_3 & \quad \text{— первая одноосная область,} \\ l_3 \leq l \leq l_4 & \quad \text{вторая двухосная область,} \\ l_4 \leq l \leq l_5 & \quad \text{— вторая одноосная область,} \\ l_5 \leq l \leq l_6 \leq c_1 & \quad \text{третья двухосная область.} \end{aligned}$$

Объем  $v_i$  области, ограниченной  $i$ -ой одноосной областью и круговым цилиндром  $r = 1$ , отличен от нуля и находится по формуле (28.5). Из гладкости поверхности  $S$  следует, что на границах между областями разного типа  $\lambda_l = \kappa_l$ , где  $\kappa_l$  — значение  $\kappa$  для  $i$ -ой двухосной области в (27.1). Справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} v_1 &= 2l \left[ \sin \theta(l_2) - \sin \theta(l_3) \right] = 2l(\kappa_1 - \kappa_2) - 4l\kappa_1, & \kappa_2 &= -\kappa_1, \\ v_2 &= 2l \left[ \sin \theta(l_4) - \sin \theta(l_5) \right] = 2l(\kappa_2 - \kappa_3) - 4l\kappa_2 = -4l\kappa_1, \\ \kappa_3 &= -\kappa_2 = \kappa_1, & v &= v_1 + v_2 = 0. \end{aligned}$$

Из равенства  $\kappa_2 = -\kappa_1$  следует, что часть оболочки  $l_3 \leq l \leq c_1$  находится между первой одноосной областью и цилиндром  $r = 1$ . Но тогда  $v = v_1 + v_2 \neq 0$  (так как нет участков слияния). Получили противоречие, из которого следует, что оболочка не может иметь больше двух двухосных областей и, значит, оболочка не может иметь больше трех одноосных областей.

## 33.2. О трех одноосных областях

Предположим, что поверхность  $S$  содержит три одноосные области и, соответственно, две двухосные области:

$$\begin{aligned} 0 \leq l \leq l_1 & \text{ — первая одноосная область,} \\ l_1 \leq l \leq l_2 & \text{ — первая двухосная область,} \\ l_2 \leq l \leq l_3 & \text{ — вторая одноосная область,} \\ l_3 \leq l \leq l_4 & \text{ — вторая двухосная область,} \\ l_4 \leq l \leq c_1 & \text{ — третья одноосная область.} \end{aligned}$$

Объем  $v_i$  области, ограниченной  $i$ -ой одноосной областью и круговым цилиндром  $r = 1$ , отличен от нуля и находится по формуле (28.5). Справедливы следующие равенства:

$$v_1 - 2t \left[ \sin \theta(0) - \sin \theta(l_1) \right] - 2t \left[ \sin \theta(0) - \kappa_1 \right], \quad (33.1)$$

$$v_2 - 2t \left[ \sin \theta(l_2) - \sin \theta(l_3) \right] - 2t(\kappa_1 - \kappa_2) - 4t\kappa_1, \quad \kappa_2 = -\kappa_1.$$

Из равенства  $\kappa_2 = -\kappa_1$  следует, что часть оболочки  $l_1 \leq l \leq c_1$  находится между первой одноосной областью и цилиндром  $r = 1$ . Так как нет участков слипания, то  $|v_1| > |v_2|$ . Из формул (33.1) следует:

$$|v_1| \leq 2t \left[ 1 + |\sin \theta(0)| \right] \leq 4t - |v_2|.$$

Получили противоречие, из которого следует, что оболочка не может содержать больше двух одноосных областей.

**Результат 33.1.** Поверхность  $S$  не может иметь больше двух двухосных и больше двух одноосных областей.

**Результат 33.2.** В § 28–32 рассмотрены все возможные случаи расположения областей на поверхности  $S$  при  $v \neq 0$ .

## §34. Примеры решения задачи равновесия цилиндрической оболочки

### 34.1. Пример 1

Рассмотрим равновесие цилиндрической оболочки при

$$c_1 = 2,5, \quad c_2 = 2. \quad (34.1)$$

В зависимости от значения  $v$  на поверхности оболочки  $S$  имеются следующие области:

$$\begin{aligned} v_1 - v_* \geq v \geq v_2 & \text{ — 1 одноосная область,} \\ v_2 > v \geq v_3 & \text{ — 1 двухосная и 1 одноосная области,} \\ v_3 > v \geq v_4 & \text{ — 2 двухосные и 1 одноосная области,} \\ v_4 > v \geq v_5 & \text{ — 2 двухосные и 2 одноосные области.} \end{aligned}$$

При  $v < v_5$  оболочка имеет участок сгипания. Такие формы здесь не рассматриваются (смотрите условие 22.4).

На рис. 34.1 показаны формы равновесия для  $v = v_1, \dots, v_5$ . Значения параметров форм 1а–5а даны в табл. 34.1. Для форм 1б–5б значения  $v, t$  такие же. Значение  $d$  вычисляется по формуле (27.11):  $d = -d(a) - c_2$ , где  $d(a)$  — значение  $d$  для формы а в табл. 34.1. Наклонные отрезки на рис. 34.1 показывают разделение жидкости и газа. Стрелки указывают на границу между 2 двухосной и 2 одноосной областями. В рамках дано пятикратное увеличение одноосных и второй двухосной областей.

Значение  $v_1$  объема  $v$  формы 1 является максимальным для  $c_1, c_2$  из (34.1):  $v_1 = v_*$ . Формы 1 рис. 34.1 построены по формулам (24.19), где

$$k \approx 0,967, \quad \hat{\psi}_0 \approx 0,916, \quad \hat{\psi}_1 \approx 2,226. \quad (34.2)$$

Значения  $t$  и  $d$  для  $v = v_*$  получены в п. 34.3 (формулы (34.8), (34.10)).

Кривая 5 на рис. 34.1 имеет следующие значения параметров, характеризующих вторую одноосную область:

$$w_1|_{\bar{\sigma}=0} \approx 5,65, \quad w_2|_{\bar{\sigma}=0} \approx 0,20, \quad \sigma_2 \approx 0,61.$$

Усилие  $t_2$  вычисляется по формуле  $t_2 = -z \mid d$  в двухосной области, прилегающей к нижнему контуру крепления, и по формуле  $t_2 = z - d$  в двухосной области, лежащей выше верхнего контура (смотрите (29.3), (29.12), (30.2), (30.5), (32.2), (32.3)).

В одноосной области  $t_2 = 0$ . На границе между одноосной и двухосной областями  $t_2$  терпит разрыв. Приведем значения  $t_2$  для форм 3а–5а.

$$3а \quad t_2(l_1 - 0) \approx 0,26,$$

$$4а \quad t_2(l_1 - 0) \approx 0,12, \quad t_2(l_2 + 0) \approx 0,13,$$

$$5а \quad t_2(l_1 - 0) \approx 0,08, \quad t_2(l_2 + 0) \approx 0,09, \quad t_2(l_3 - 0) \approx 0,03.$$

Усилие  $t_1$  является непрерывной функцией на поверхности оболочки.



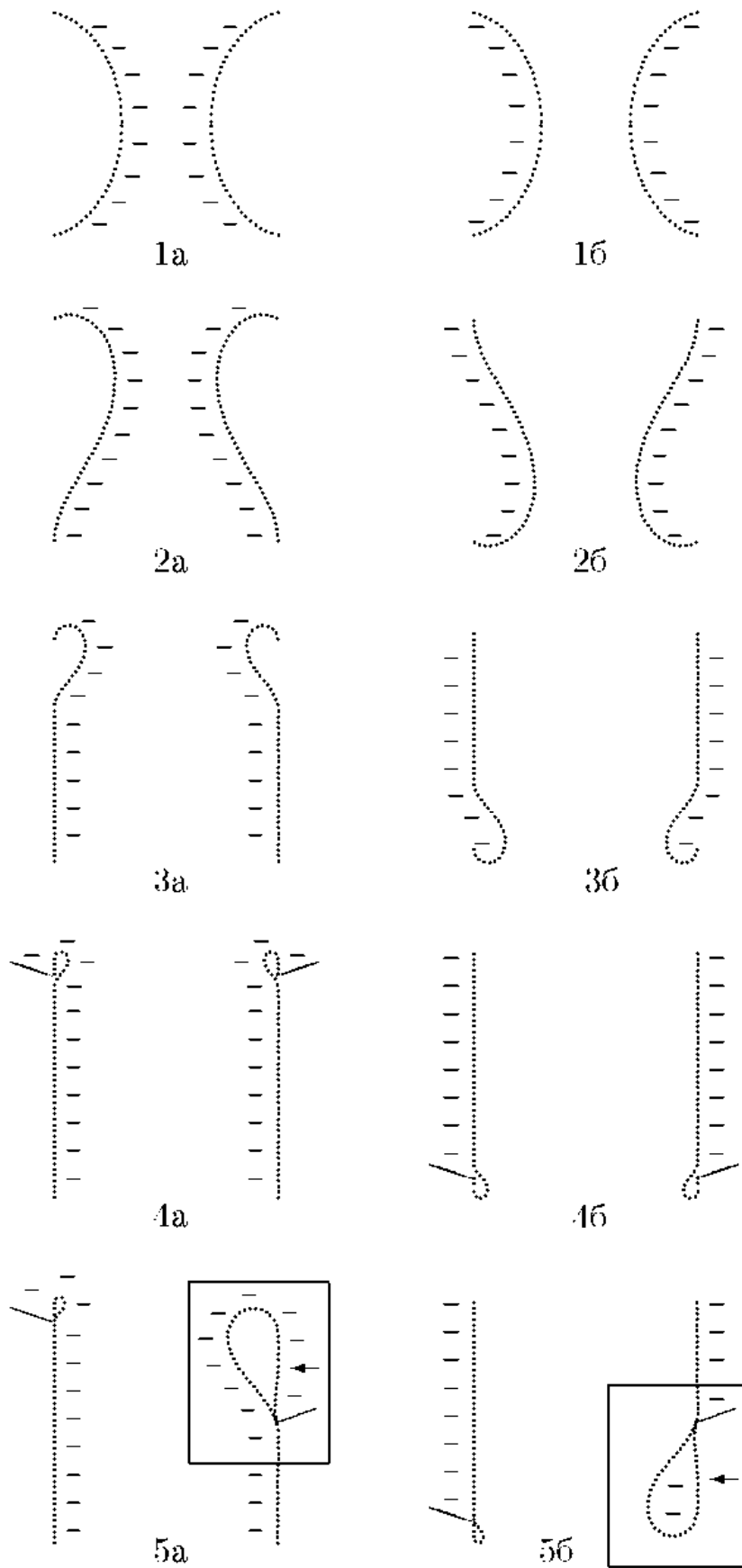


Рис. 31.1. Формы равновесия при  $c_1 = 2, 5$ ,  $c_2 = 2$

Таблица 34.1. Параметры форм равновесия при  $c_1 = 2,5$ ,  $c_2 = 2$ .

	$v$	$t$	$d$	$w_{10}$	$w_{20}$	$\sigma_1$	$\sigma_{-1}$	$l_1$	$l_2$	$l_3$
1a	1,35	$\infty$	$-\infty$	—	—	—	—	—	—	—
2a	1,06	0,357	-1,38	0,64	1,19	1,29	-2,23	—	—	—
3a	0,22	0,054	-0,35	1,90	0,80	1,24	-1,70	1,38	—	—
4a	0,04	0,011	0,00	3,98	0,56	0,94	-1,26	1,88	2,37	—
5a	0,02	0,006	0,07	5,15	0,50	0,84	-1,12	1,99	2,33	2,39

## 34.2. Пример 2

Рассмотрим равновесие цилиндрической оболочки при

$$c_1 = 4,5, \quad c_2 = 2. \quad (34.3)$$

В зависимости от значения  $v$  на поверхности оболочки  $S$  имеются следующие области:

$$\begin{aligned} v_1 = v_* \geq v \geq v_2 & - 1 \text{ двухосная и } 1 \text{ одноосная области,} \\ v_2 > v \geq v_3 & - 2 \text{ двухосные и } 1 \text{ одноосная области,} \\ v_3 > v \geq v_4 & 2 \text{ двухосные и } 2 \text{ одноосные области.} \end{aligned}$$

При  $v < v_1$  оболочка имеет участок сгибания. Такие формы здесь не рассматриваются (смотрите условие 22.4).

На рис. 34.2 показаны формы равновесия для  $v = v_1, \dots, v_4$ . Значения параметров форм 1a—4a даны в табл. 34.2. Для форм 1б—4б значения  $v$ ,  $t$  такие же. Значение  $d$  вычисляется по формуле (27.11):  $d = -d(a) - c_2$ , где  $d(a)$  — значение  $d$  для формы  $a$  в табл. 34.2. Наклонные отрезки на рис.34.2 показывают разделение жидкости и газа. Стрелки указывают на границу между 2 двухосной и 2 одноосной областями.

Таблица 34.2. Параметры форм равновесия при  $c_1 = 4,5$ ,  $c_2 = 2$ .

	$v$	$t$	$d$	$w_{10}$	$w_{20}$	$\sigma_1$	$\sigma_{-1}$	$l_1$	$l_2$	$l_3$
1a	2,58	$\infty$	$-\infty$	—	—	—	—	4,24	—	—
2a	2,02	0,50	-1,24	0,27	1,70	1,90	-2,87	3,80	—	—
3a	0,75	0,19	0,00	0,85	1,13	1,55	-2,21	1,52	3,66	—
4a	0,45	0,11	0,33	1,23	0,97	1,41	-1,98	1,95	3,59	4,00

Значение  $v_1$  объема  $v$  формы 1 является максимальным для  $c_1, c_2$  из (34.3):  $v_1 = v_*$ . Формы 1 рис. 34.2 построены по формулам (24.21),

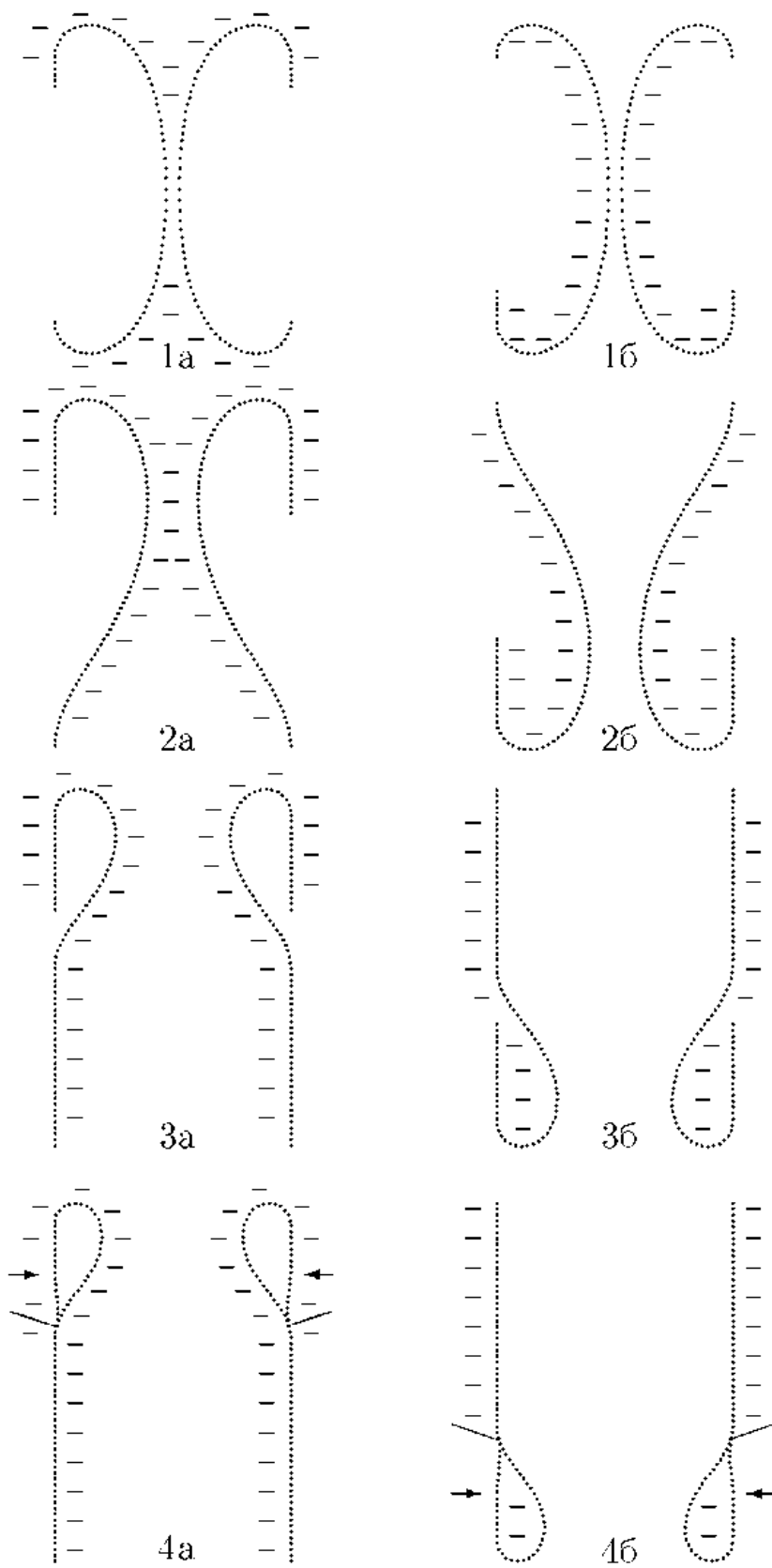


Рис. 34.2. Формы равновесия при  $c_1 = 4, 5$ ,  $c_2 = 2$

где

$$\begin{aligned} k &\approx 0,998, & \hat{\psi}_0 &= 0, & \hat{\psi}_1 &= \pi, \\ \Delta l_0 &= 0, & \Delta l_1 - c_1 - l_1 &\approx 0,26 \end{aligned} \quad (34.4)$$

в случае, когда жидкость находится с внутренней стороны оболочки. Значения  $t$  и  $d$  для  $v = v_*$  получены в п. 34.3 (формулы (34.8), (34.10)).

Кривая 4 на рис. 34.2 имеет следующие значения параметров, характеризующих вторую одноосную область:

$$w_1|_{\bar{\sigma}=0} \approx 2,06, \quad w_2|_{\bar{\sigma}=0} \approx 0,34, \quad \sigma_2 \approx 1,03.$$

Усилие  $t_2$  вычисляется так же, как в примере 34.1. Приведем значения  $t_2$  для форм 1а—4а:

$$\begin{aligned} 1а & t_2(l) = \infty, & l_1 &\leq l \leq c_1, \\ 2а & t_2(l_1 - 0) \approx 1,94, \\ 3а & t_2(l_1 - 0) \approx 0,48, & t_2(l_2 + 0) &\approx 0,83, \\ 4а & t_2(l_1 - 0) \approx 0,38, & t_2(l_2 + 0) &\approx 0,58, & t_2(l_3 - 0) &\approx 0,16. \end{aligned}$$

Усилие  $t_1$  является непрерывной функцией на поверхности оболочки.

### 34.3. Параметры оболочки при максимальном значении $v$

Поверхность оболочки при максимальном значении  $v$ , равном  $v_*$ , описывается формулами (24.19) в примере 34.1 и (24.21) в примере 34.2. Постоянные  $k$ ,  $\hat{\psi}_0$ ,  $\hat{\psi}_1$ ,  $\Delta l_0$ ,  $\Delta l_1$  и значения  $v_* = v_1$ , найденные из (24.19)—(24.23), (34.1), (34.3), даны в (34.2), (34.4) и таблицах 34.1, 34.2.

Чтобы найти  $t$ , рассмотрим формы равновесия, близкие к экстремальным формам (24.19), (24.21). Положим

$$\begin{aligned} r &= r_0 + r_1, & z &= z_0 + z_1, \\ r_0 &= \sqrt{\frac{1 - k^2 \sin^2 \psi}{1 - k^2 \sin^2 \psi_0}}, \\ z_0 &= -c_2 - \frac{1}{2\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi_0}} \left[ 2E(\psi, k) - (2 - k^2)F(\psi, k) \right]_{\psi_0}^{\psi}, \\ l &= \frac{k^2}{2\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi_0}} \left[ F(\psi, k) \right]_{\psi_0}^{\psi}, & \psi_0 &\leq \psi \leq \psi_1. \end{aligned} \quad (34.5)$$

Здесь  $k$  — значения (34.2), (34.4);  $\psi_0$ ,  $\psi_1$  — значения, близкие к  $\hat{\psi}_0$ ,  $\hat{\psi}_1$  в (34.2), (34.4). В примере 34.2 формулы (34.5) описывают одноосную область.

Из (28.4), (31.5) найдем производные

$$\begin{aligned}\frac{dr_1}{dl} - \frac{dr}{dl} - \frac{dr_0}{dl} &= \cos \theta + \sin 2\psi, \\ \frac{dz_1}{dl} - \frac{dz}{dl} - \frac{dz_0}{dl} &= \sin \theta + \cos 2\psi.\end{aligned}$$

Предполагая, что  $r_1$ ,  $z_1$  и их производные по  $l$  имеют один порядок малости  $\varepsilon$ , отсюда получим формулы для  $\theta$ :

$$\begin{aligned}\cos \theta &= -\sin 2\psi + O(\varepsilon), & \sin \theta &= -\cos 2\psi + O(\varepsilon), \\ \theta - \frac{3\pi}{2} &= 2\psi + O(\varepsilon).\end{aligned}\quad (34.6)$$

Из (28.6), (34.6) получим формулу для  $v$ :

$$v - 2t \left[ \sin \theta(0) - \sin \theta(l_1) \right] = 2t \left[ -\cos 2\psi_0 + \cos 2\psi_1 + O(\varepsilon) \right]. \quad (34.7)$$

В примере 34.1  $l_1 = c_1$ . Так как  $\psi_0$ ,  $\psi_1$  близки к значениям  $\hat{\psi}_0$ ,  $\hat{\psi}_1$  из (34.2), (34.4), то

$$\psi_1 - \hat{\psi}_1 + O(\varepsilon) = \pi - \hat{\psi}_0 + O(\varepsilon) = \pi - \psi_0 + O(\varepsilon).$$

Подставляя выражение для  $\psi_1$  в (34.7) и учитывая близость  $v$  к  $v_*$ , получим

$$v - 2tO(\varepsilon), \quad 2tO(\varepsilon) = v_* + O(\varepsilon).$$

Так как  $v_*$  — конечная величина ( $v_* \approx 1,35$  в примере 34.1,  $v_* \approx 2,58$  в примере 34.2), то, устремляя  $\varepsilon$  к нулю, получим значение  $t$  при максимальном  $v$ :

$$t = \infty. \quad (34.8)$$

Чтобы найти  $d$ , рассмотрим производную  $d\theta/dl$ , используя (28.4), (31.5), (34.6):

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dl} &= \frac{r(z-d)}{t} - \frac{(r_0 + r_1)(z_0 + z_1 - d)}{t} - \\ &= \frac{1}{t} \sqrt{\frac{1 - k^2 \sin^2 \psi}{1 - k^2 \sin^2 \psi_0}} \left\{ c_2 + d + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi_0}} \left[ 2E(\psi, k) - (2 - k^2)F(\psi, k) \right]_{\psi_0}^{\psi} \right\} + \frac{1}{t} O(\varepsilon), \\ \frac{d\theta}{dl} &= -2 \frac{d\psi}{dl} + O(\varepsilon) = -\frac{4}{k^2} \sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \psi_0)(1 - k^2 \sin^2 \psi)} + O(\varepsilon).\end{aligned}$$

Приравняв правые части, получим формулу для  $d$ :

$$d = -\frac{4t(1 - k^2 \sin^2 \psi_0)}{k^2} - c_2 - \quad (34.9)$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{1-k^2\sin^2\psi_0}} \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{\cos 2\psi \, d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} + tO(\varepsilon).$$

Здесь функции  $F$ ,  $E$  заменены интегралами. Устремляя в (34.9)  $\varepsilon$  к нулю, получим значение  $d$  при  $v = v_*$  в случае, когда жидкость находится с внутренней стороны оболочки:

$$d = -\infty. \quad (34.10)$$

Если жидкость расположена с внешней стороны оболочки, то  $d$  находится по формуле (27.11):

$$d = -d(a) - c_2 \rightarrow \infty. \quad (34.11)$$

Здесь  $d(a)$  обозначено значение  $d$  в (34.10).

### 34.4. О каверне

Давление в жидкости линейно по вертикальной координате  $Z$ . Из (9.1), (9.3), (24.1) следуют формулы

$$P_{\text{ж}} = -\rho g Z + P_1 = -\rho g(Z - D) + P_0 = \rho g C(-z + d) + P_0, \quad (34.12)$$

где  $P_0$  — давление газа в полости с газом.

В книге задача равновесия оболочки решается в предположении, что около оболочки нет каверны. Поэтому должны выполняться неравенства

$$P_{\text{ж}} \geq P_*, \quad \rho g C(-z_{\text{max}} + d) + P_0 \geq P_*, \quad (34.13)$$

где  $P_*$  — давление насыщенных паров,  $z_{\text{max}}$  — максимальное значение координаты  $z$  на поверхности оболочки.

Из таблиц 34.1, 34.2 видно, что  $d = -\infty$  при максимальном значении  $v = v_* = v_1$  в случае, когда жидкость находится с внутренней стороны оболочки. Отсюда и из неравенства (34.13) следует: если рассматривать задачу равновесия оболочки при разных объемах жидкости, то при заданных значениях давления газа  $P_0$  и давления насыщенных паров  $P_*$  существует такой объем жидкости, меньше которого около оболочки образуется каверна. Поэтому для значений  $v$ , близких к  $v_*$ , при решении задачи равновесия нужно учитывать наличие около оболочки каверны.

Если  $v < v_*$ , то полученное в настоящей главе решение справедливо, если давление газа в полости с газом достаточно велико, так что выполняется неравенство, следующее из (34.13):

$$P_0 \geq \rho g C(z_{\text{max}} - d) + P_*. \quad (34.14)$$

Неравенство (34.14) гарантирует, что вся оболочка находится под гидростатическим давлением, около оболочки нет каверны.

### 34.5. О больших давлениях и больших усилиях

Из таблиц 34.1, 34.2 следует, что  $t = \infty$  при максимальном значении  $v = v_* = v_1$ . В случае, когда жидкость находится с внешней стороны оболочки, при  $v = v_* = v_1$  постоянная  $d = \infty$  и давление в жидкости равно  $\infty$  (смотрите формулы (34.11), (34.12)). Так как реальные материалы имеют ограниченные характеристики, то отсюда следует, что максимальные значения  $v = v_*$  и близкие к ним не реализуются (при любом расположении жидкости).

### 34.6. Замечания

*Замечание 34.1.* Формы равновесия в примерах 34.1, 34.2 получены интегрированием уравнений (28.10), (29.19), (30.9), (31.10), (31.12), (32.9), (32.12) и последующим переходом к исходным переменным по формулам (28.9), (29.21), (29.22), (30.11), (31.13), (32.13).

*Замечание 34.2.* В задаче равновесия цилиндрической оболочки усилие  $t_1$  является непрерывной функцией на поверхности оболочки, усилие  $t_2$  терпит разрыв на границах между одноосной и двухосной областями (разрыв  $t_2$  следует из формул (24.2), (28.8) для  $t_2$ ,  $w_2$  и из того факта, что на границе между двухосной и одноосной областями переменная  $w_2 \neq 0$ ).

## §35. Выводы главы 3

В § 22 дана постановка осесимметричной задачи равновесия цилиндрической оболочки. В § 23 получены уравнения, описывающие

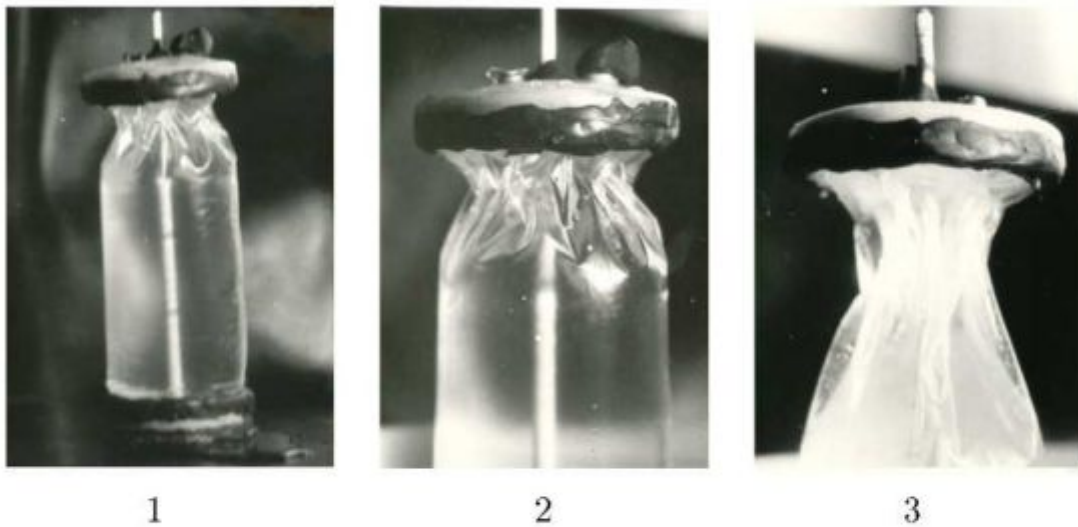


Рис. 35.1

рассматриваемую задачу в размерных переменных. В § 24 сделал переход к безразмерным переменным и найдена осесимметричная поверхность, меридиан которой имеет заданную длину и которая отсекает от кругового цилиндра тело максимального объема. Меридиан найденной поверхности является эластикой Эйлера.

В § 25 доказано, что поверхность оболочки состоит из двухосных и одноосных областей. В § 26 рассмотрен случай, когда оболочка остается круговым цилиндром при деформации (сжимаясь вдоль меридиана).

В § 27 показано, что для каждой формы равновесия оболочки поверхность, симметричная ей относительно горизонтальной плоскости, является тоже формой равновесия, но для случая, когда жидкость находится с противоположной стороны оболочки.

В § 28—§ 32 получена замкнутая система уравнений для конкретного числа двухосных (от 0 до 2) и одноосных (от 1 до 2) областей на поверхности оболочки. В § 33 доказано, что в § 28—§ 32 рассмотрены все возможные случаи.

В § 34 осесимметричная задача равновесия решена для заданных численных значений длины меридиана оболочки и расстояния между контурами крепления. Формы равновесия оболочки представлены на рис. 34.1, 34.2, численные значения параметров даны в таблицах 34.1, 34.2. Отмечено, что усилие  $t_2$  терпит разрыв на границе между двухосной и одноосной областями. Усилие  $t_1$  — непрерывная функция на поверхности оболочки.

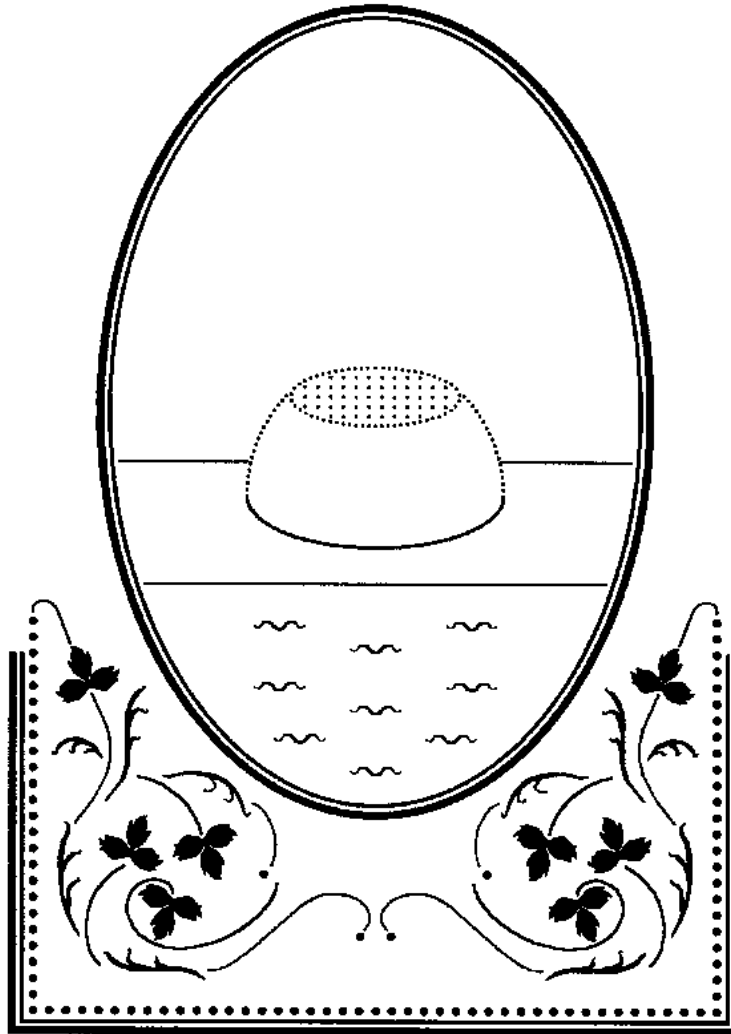
На рис. 35.1 приведены фотографии эксперимента. Радиус основания цилиндрической полиэтиленовой оболочки равен 4,7 см, длина меридиана оболочки равна 23,5 см, расстояние между контурами крепления равно 20 см. С внутренней стороны оболочки находится вода, с внешней стороны — воздух. Формы равновесия имеют одну двухосную область (круговой цилиндр) и одну одноосную область (складчатую зону). На фиг. 2, 3 представлены одноосные области для разных значений объема жидкости.

В главе 3 используются результаты работы [10]. Отметим работу [1], в которой рассмотрена осесимметричная задача равновесия цилиндрической оболочки под постоянным давлением.



## Глава 4

# Равновесие полусферической оболочки



### §36. Постановка задачи

Рассмотрим мягкую оболочку, которая прикреплена к стенкам сосуда и разделяет его на две полости. Поверхность  $S^\circ$  мягкой оболочки в недеформированном состоянии является полусферой радиуса  $C$ .

Оболочка закреплена по своей границе так, что контур крепления лежит в горизонтальной плоскости и является окружностью радиуса  $C$ . Одна полость сосуда заполняется однородной жидкостью известного объема и известной плотности. Другая полость заполняется газом. Давление газа известно. Оболочка деформируется в поверхность  $S$ . Система находится в равновесии в поле сил тяжести. Требуется найти форму оболочки (поверхность  $S$ ) и усилия оболочки.

Введем в трехмерном пространстве декартову систему координат  $OXYZ$  так, чтобы точка  $O$  совпадала с центром контура крепления оболочки, контур крепления лежал в плоскости  $XY$ , ось  $Z$  была направлена в сторону, противоположную направлению сил тяжести. Уравнения контура крепления оболочки в принятой системе координат имеет вид

$$X^2 + Y^2 = C^2, \quad Z = 0.$$

Обозначим через  $V$  объем области, ограниченной поверхностью  $S$  и плоскостью  $XY$ . Объем области, лежащей выше плоскости  $XY$ , считаем положительным; объем области, лежащей ниже плоскости  $XY$ , считаем отрицательным. Значения  $C$ ,  $V$  предполагаем известными. Также известными предполагаем плотность жидкости  $\rho$ , ускорение свободного падения  $g$ , давление газа  $P_0$ .

Задачу равновесия будем решать в предположениях, сделанных в начале § 8, то есть будем решать осесимметричную задачу равновесия, предполагая следующее:

36.1. Поверхность  $S$  является осесимметричной поверхностью с осью симметрии  $Z$ .

36.2. Точка поверхности  $S$  и ее прообраз, принадлежащий поверхности  $S^c$ , лежат на одной плоскости меридиана.

36.3. Проекция внутренних сил мягкой оболочки на касательные к меридианам и параллелям не зависят от  $\varphi$  — угла между плоскостью  $XZ$  и плоскостью меридиана.

Кроме того, будем предполагать, что

36.4. Поверхность  $S$  не имеет участков сгипания и не касается стенок сосуда.

*Замечание 36.1.* Задать объем  $V$  и объем жидкости в сосуде — это равносильные условия, так как сумма или разность этих объемов равна объему области, ограниченной плоскостью  $XY$  и стенками, омываемыми жидкостью.

*Замечание 36.2.* Из определения объема  $V$  следует, что  $|V|$  не превосходит половины объема шара радиуса  $C$ :

$$|V| \leq \frac{2}{3} \pi C^3.$$

### §37. Уравнения задачи равновесия

Введем в пространстве  $OXYZ$  цилиндрическую систему координат  $R, \varphi, Z$ . Формулы, связывающие декартовы координаты с цилиндрическими координатами, имеют вид

$$\begin{aligned} X &= R \cos \varphi, & Y &= R \sin \varphi, \\ R &= \sqrt{X^2 + Y^2}, & \cos \varphi &= \frac{X}{R}, & \sin \varphi &= \frac{Y}{R}. \end{aligned}$$

В рассматриваемой задаче внешними силами, действующими на мягкую оболочку, являются давление жидкости и давление газа. Внешние силы описываются формулами (9.2):

$$\mathbf{F} = -F^3 \mathbf{n}, \quad F^1 = 0, \quad F^2 = 0, \quad F^3 = \pm \rho g(Z - D), \quad (37.1)$$

$\rho$  — плотность жидкости,  $g$  — ускорение свободного падения,  $D$  — неизвестная постоянная.

Примем за параметр меридиана поверхности  $S^\circ$  длину  $L^\circ$  дуги между точкой  $Q_1$  контура крепления и текущей точкой  $Q$  меридиана:

$$\zeta^\circ = L^\circ = |\widetilde{Q_1 Q}|, \quad 0 \leq L^\circ \leq \frac{\pi C}{2}$$

( $L^\circ$  не превосходит длины четверти окружности радиуса  $C$ ). Тогда для поверхности  $S^\circ$  справедливы равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^\circ &= R^\circ \cos \varphi \mathbf{e}_1 + R^\circ \sin \varphi \mathbf{e}_2 + Z^\circ \mathbf{e}_3, & (37.2) \\ R^\circ &= C \cos \frac{L^\circ}{C}, & Z^\circ &= C \sin \frac{L^\circ}{C}, \\ \mathbf{R}_1^\circ &= -\sin \frac{L^\circ}{C} \cos \varphi \mathbf{e}_1 - \sin \frac{L^\circ}{C} \sin \varphi \mathbf{e}_2 + \cos \frac{L^\circ}{C} \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{R}_2^\circ &= -C \cos \frac{L^\circ}{C} \sin \varphi \mathbf{e}_1 + C \cos \frac{L^\circ}{C} \cos \varphi \mathbf{e}_2, \\ A_{11}^\circ &= 1, & A_{12}^\circ &= 0, & A_{22}^\circ &= C^2 \cos^2 \frac{L^\circ}{C}, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{R}^\circ$  — радиус-вектор точки поверхности  $S^\circ$ ;  $\mathbf{R}_1^\circ, \mathbf{R}_2^\circ$  — координатные векторы;  $A_{11}^\circ, A_{12}^\circ, A_{22}^\circ$  — коэффициенты первой квадратичной формы.

Параметр меридиана поверхности  $S$  равен  $L^\circ$ . Для поверхности  $S$  справедливы формулы

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= R \cos \varphi \mathbf{e}_1 + R \sin \varphi \mathbf{e}_2 + Z \mathbf{e}_3, & \zeta &= L^\circ, & (37.3) \\ \mathbf{R}_1 &= R_{L^\circ} \cos \varphi \mathbf{e}_1 + R_{L^\circ} \sin \varphi \mathbf{e}_2 + Z_{L^\circ} \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{R}_2 &= -R \sin \varphi \mathbf{e}_1 + R \cos \varphi \mathbf{e}_2, \\ A_{11} &= R_{L^\circ}^2 + Z_{L^\circ}^2, & A_{12} &= 0, & A_{22} &= R^2, & A &= A_{11} A_{22}, \end{aligned}$$

где  $R$  — радиус-вектор точки поверхности  $S$ ;  $R_1, R_2$  — координатные векторы;  $A_{11}, A_{12}, A_{22}$  — коэффициенты первой квадратичной формы.  $R, Z$  являются искомыми функциями от  $L^\circ$ :

$$R = R(L^\circ), \quad Z = Z(L^\circ).$$

$\zeta^\circ, \zeta$  — обозначение параметров меридианов из § 8. Перейдем от усилий  $T^{ij}$  к усилиям  $T_1, T_2, U$  по формулам

$$\begin{aligned} T_1 &= \sqrt{\frac{AA_{11}}{A_{22}}} T^{11} = A_{11} T^{11}, \\ T_2 &= \sqrt{\frac{AA_{22}}{A_{11}}} T^{22} = A_{22} T^{22}, \\ U &= \sqrt{A} T^{12} = \sqrt{A} T^{21}. \end{aligned} \quad (37.4)$$

Тогда  $T_1, T_2, U$  — проекции внутренних сил  $T_{[1]}, T_{[2]}$ , действующих на единицу длины параллели и меридиана (смотрите формулы (4.1), (4.2)):

$$\begin{aligned} T_{[1]} &= T_1 \frac{R_1}{\sqrt{A_{11}}} + U \frac{R_2}{\sqrt{A_{22}}}, \\ T_{[2]} &= U \frac{R_1}{\sqrt{A_{11}}} + T_2 \frac{R_2}{\sqrt{A_{22}}}. \end{aligned}$$

Напишем уравнения равновесия мягкой оболочки из § 8 с учетом заданных внешних сил и введенных переменных.

### 37.1. Двухосная область

Из (8.8), (37.2), (37.3) следует, что в двухосной области выполняются равенства

$$A_{11} = R_{L^\circ}^2 + Z_{L^\circ}^2 = 1, \quad A_{22} = R^2 - C^2 \cos^2 \frac{L^\circ}{C}.$$

Поэтому двухосная область является сферическим сегментом или сферическим поясом радиуса  $C$ :

$$R = C \cos \frac{L^\circ}{C}, \quad Z_{L^\circ} = \kappa \cos \frac{L^\circ}{C}, \quad \kappa = \pm 1. \quad (37.5)$$

Таким образом, двухосная область получается сдвигом своего прообраза вдоль оси  $Z$  ( $\kappa = 1$ ) или сдвигом вдоль оси  $Z$  зеркального (относительно горизонтальной плоскости) отображения своего прообраза ( $\kappa = -1$ ).

Из (8.5), (8.6), (37.6), (37.7) получаем следующие равенства для двухосной области:

$$\begin{aligned} B_{11} &= \frac{1}{\sqrt{A_{11}}} (R_{L^\circ} Z_{L^\circ L^\circ} - R_{L^\circ L^\circ} Z_{L^\circ}) - \frac{\kappa}{C}, \\ B_{22} &= \frac{R Z_{L^\circ}}{\sqrt{A_{11}}} - \kappa C \cos^2 \frac{L^\circ}{C}, \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{(A_{11})_{L^\circ}}{2A_{11}} = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{(A_{22})_{L^\circ}}{2A_{11}} = -\frac{C}{2} \sin \frac{2L^\circ}{C}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{(A_{22})_{L^\circ}}{2A_{22}} = -\frac{1}{C} \operatorname{tg} \frac{L^\circ}{C}. \end{aligned}$$

Здесь  $B_{11}$ ,  $B_{22}$  — коэффициенты второй квадратичной формы,  $\Gamma_{ij}^k$  — символы Кристоффеля второго рода. Отсюда и из (8.8), (37.1), (37.4), (37.6) следует, что в двухосной области выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{dL^\circ} - \frac{1}{C} \operatorname{tg} \frac{L^\circ}{C} (T_1 - T_2) &= 0, & (37.6) \\ \frac{dU}{dL^\circ} - \frac{2}{C} \operatorname{tg} \frac{L^\circ}{C} U &= 0, \quad T_1 + T_2 = \pm \kappa \rho g C (Z - D), \\ T_1 T_2 - U^2 &\geq 0, \quad T_1 \geq 0, \quad T_2 \geq 0. \end{aligned}$$

## 37.2. Одноосная область

**Нити являются меридианами**

Из (8.5), (8.6), (8.10), (37.1)—(37.4) следуют соотношения

$$\begin{aligned} A_{11} &= (R_{L^\circ})^2 + (Z_{L^\circ})^2 = 1, \quad A_{22} = R^2, \quad A = R^2, & (37.7) \\ B_{11} &= R_{L^\circ} Z_{L^\circ L^\circ} - R_{L^\circ L^\circ} Z_{L^\circ}, \quad \Gamma_{11}^1 = 0, \\ \frac{d(RT_1)}{dL^\circ} &= 0, \quad (R_{L^\circ} Z_{L^\circ L^\circ} - R_{L^\circ L^\circ} Z_{L^\circ}) T_1 = \pm \rho g (Z - D), \\ T_2 &= 0, \quad U = 0, \quad T_1 \geq 0. \end{aligned}$$

Для почти всех значений  $L^\circ$  в одноосной области выполняется неравенство, следующее из (8.11), (37.2), (37.3):

$$R(L^\circ) < C \cos \frac{L^\circ}{C}. \quad (37.8)$$

**Нити являются параллелями**

Из (8.5), (8.6), (8.12), (37.1)—(37.4) следуют равенства

$$A_{11} = \sin^2 \frac{L^\circ}{C} + Z_{L^\circ}^2, \quad A_{22} = R^2 = C^2 \cos^2 \frac{L^\circ}{C}, \quad (37.9)$$

$$B_{22} = \frac{RZ_{L^0}}{\sqrt{A_{11}}} = \frac{CZ_{L^0} \cos(L^0/C)}{\sqrt{\sin^2(L^0/C) + (Z_{L^0})^2}},$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{(A_{22})_{L^0}}{2A_{11}} = -\frac{C \cos(L^0/C) \sin(L^0/C)}{\sin^2(L^0/C) + (Z_{L^0})^2},$$

$$R = C \cos \frac{L^0}{C}, \quad Z = D, \quad T_1 = 0, \quad T_2 = 0, \quad U = 0.$$

Неравенство (8.13) выполняется во всех точках одноосной области, кроме  $L^0 = \pi C/2$ , так как оно имеет вид

$$\left| Z_{L^0}(L^0) \right| < \cos \frac{L^0}{C}, \quad 0 < \cos \frac{L^0}{C}.$$

### 37.3. Нульсовая область

Из (8.14), (37.1), (37.4) следуют равенства

$$Z = D, \quad T_1 = 0, \quad T_2 = 0, \quad U = 0. \quad (37.10)$$

Для почти всех значений  $L^0$  в нульсовой области выполняются неравенства, следующие из (8.15), (37.2), (37.3), (37.12):

$$R(L^0) < C \cos \frac{L^0}{C}, \quad |R_{L^0}(L^0)| < 1. \quad (37.11)$$

Граница между областями разных типов является параллелью поверхности  $S$ . Запишем уравнение границы в виде

$$L^0 = L_*^0.$$

Рассмотрим равенства, которые должны выполняться на границе.

### 37.4. Граница между двухосной и одноосной областями

**Граница совпадает с питью**

В этом случае пить является параллелью поверхности  $S$ . Из (8.18), (37.4), (37.7), (37.11) следуют равенства

$$T_1(L_*^0) = 0, \quad U(L_*^0) = 0, \quad Z(L_*^0) = D. \quad (37.12)$$

**Граница не совпадает с питью**

В этом случае пить является меридианом поверхности  $S$ . Из (8.17), (8.19), (37.2), (37.4), (37.7), (37.9) следуют равенства

$$[(T_1)_{(1)} - (T_1)_{(2)}](L_*^0) = 0, \quad U(L_*^0) = 0, \quad (37.13)$$

$$R(L_*^0) = C \cos \frac{L_*^0}{C}, \quad [Z_{(1)} - Z_{(2)}](L_*^0) = 0.$$

Если  $T_1(L_*^\circ) \neq 0$ , то из (8.20), (37.7) следуют равенства

$$R_{L_*^\circ}(L_*^\circ) = -\sin \frac{L_*^\circ}{C}, \quad Z_{L_*^\circ}(L_*^\circ) = \kappa \cos \frac{L_*^\circ}{C}. \quad (37.14)$$

### 37.5. Граница между двухосной и нулевой областями

Из (8.17), (8.21), (37.2), (37.4), (37.12) следуют равенства

$$\begin{aligned} T_1(L_*^\circ) = 0, \quad U(L_*^\circ) = 0, \\ R(L_*^\circ) = C \cos \frac{L_*^\circ}{C}, \quad Z(L_*^\circ) = D. \end{aligned} \quad (37.15)$$

### 37.6. Граница между одноосной и нулевой областями

**Граница совпадает с нитью**

В этом случае нить является параллелью поверхности  $S$ . Из (8.17), (8.22), (37.2), (37.12) следуют равенства

$$R(L_*^\circ) = C \cos \frac{L_*^\circ}{C}, \quad Z(L_*^\circ) = D. \quad (37.16)$$

**Граница не совпадает с нитью**

В этом случае нить является меридианом поверхности  $S$ . Из (8.17), (8.23), (37.4), (37.12) следуют равенства

$$T_1(L_*^\circ) = 0, \quad [R_{(0)} - R_{(1)}](L_*^\circ) = 0, \quad Z(L_*^\circ) = D. \quad (37.17)$$

### 37.7. Дополнительные условия

Дополнительными условиями являются условия закрепления оболочки, условие непрерывности поверхности  $S$  и известное значение объема  $V$ . Эти условия описываются равенствами

$$R(0) = C, \quad Z(0) = 0, \quad R\left(\frac{\pi C}{2}\right) = 0, \quad (37.18)$$

$$V = -2\pi \int_0^{\pi C/2} R R_{L_*^\circ} Z dL_*^\circ.$$

Нулевое значение  $R$  при  $L_*^\circ = \pi C/2$  обеспечивает непрерывность поверхности  $S$ . Если  $T_1(\pi C/2) \neq 0$ , то для гладкости поверхности  $S$  в

точке  $L^* = \pi C/2$  должно выполняться равенство

$$Z_{L^*} \left( \frac{\pi C}{2} \right) = 0. \quad (37.19)$$

К этим условиям добавим условие ограниченности усилий оболочки при  $L^* = \pi C/2$ :

$$T_1 \left( \frac{\pi C}{2} \right) < \infty, \quad T_2 \left( \frac{\pi C}{2} \right) < \infty, \quad \left| U \left( \frac{\pi C}{2} \right) \right| < \infty. \quad (37.20)$$

В задаче (37.5)–(37.20) неизвестными являются функции  $R(L^*)$ ,  $Z(L^*)$ ,  $T_1(L^*)$ ,  $T_2(L^*)$ ,  $U(L^*)$  и постоянные  $D$ ,  $L_*^*$ . Независимая переменная  $L^*$  меняется на отрезке  $0 \leq L^* \leq \pi C/2$ . Параметры  $C$ ,  $V$  известны.

*Замечание 37.1.* Из выбора координат  $L^*$ ,  $\varphi$  на поверхности  $S$  следует, что знак плюс в формулах (37.1), (37.6), (37.7) при множителе  $\rho g$  соответствует случаю, в котором жидкость находится над оболочкой. Знак минус соответствует случаю, в котором жидкость находится под оболочкой.

*Замечание 37.2.* Внешние силы (37.1), действующие на оболочку, направлены по нормали к поверхности оболочки. По теореме Финстервальдера 6.1, если усилие нитей отлично от нуля, то нити являются геодезическими поверхности  $S$ , а прообразы нитей являются геодезическими поверхности  $S^c$ . Геодезические линии сферической поверхности расположены на окружностях больших кругов сферы. Параллели полусферы (кроме экватора) не являются геодезическими. Нити, расположенные на параллелях, имеют нулевое усилие (смотрите (37.9)). Нулевое усилие могут иметь нити, расположенные на меридианах (смотрите (37.7)). Прообразы меридианов лежат на окружностях больших кругов сферы.

## §38. Переход к безразмерным переменным

Введем безразмерные переменные по формулам

$$\begin{aligned} r &= \frac{R}{C}, & x &= \frac{X}{C}, & y &= \frac{Y}{C}, & z &= \frac{Z}{C}, \\ r &= \frac{R}{C}, & t^* &= \frac{L^*}{C}, & d &= \frac{D}{C}, & v &= \frac{3V}{2\pi C^3}, \\ t_i &= \frac{T_i}{\rho g C^2}, & u &= \frac{U}{\rho g C^2}, & & & i &= 1, 2. \end{aligned} \quad (38.1)$$



Здесь  $r, x, y, z$  — безразмерный радиус-вектор и координаты точки в трехмерном пространстве;  $r, \varphi, z$  — безразмерные цилиндрические координаты;  $l^\circ$  — безразмерный параметр меридианов поверхностей  $S^\circ, S$  (равен безразмерной длине дуги меридиана поверхности  $S^\circ$ , отсчитываемой от контура крепления оболочки,  $0 \leq l^\circ \leq \pi/2$ );  $t_1, t_2, u$  — безразмерные усилия оболочки;  $d$  — безразмерная неизвестная постоянная, определяющая давление в жидкости;  $v$  — безразмерный объем области между оболочкой и плоскостью  $xy$ .

В безразмерных переменных векторное уравнение поверхности  $S$  имеет вид

$$\mathbf{r} = r \cos \varphi \mathbf{e}_1 + r \sin \varphi \mathbf{e}_2 + z \mathbf{e}_3.$$

$r, z$  — искомые функции переменной  $l^\circ$ :  $r = r(l^\circ), z = z(l^\circ)$ .

Писшем уравнения (37.5) — (37.20) в безразмерных переменных и параметрах.

### 38.1. Двухосная область

Двухосная область является сферическим сегментом или сферическим поясом. В двухосной области выполняются соотношения

$$r = \cos l^\circ, \quad z_{l^\circ} = \kappa \cos l^\circ, \quad \kappa = \pm 1, \quad (38.2)$$

$$\frac{dt_1}{dt^\circ} - \operatorname{tg} l^\circ (t_1 - t_2) = 0,$$

$$\frac{du}{dt^\circ} - 2 \operatorname{tg}(l^\circ) u = 0, \quad t_1 + t_2 = \pm \kappa (z - d),$$

$$t_1 t_2 - u^2 \geq 0, \quad t_1 \geq 0, \quad t_2 \geq 0.$$

### 38.2. Одноосная область

Нити являются меридианами

$$(r_{l^\circ})^2 + (z_{l^\circ})^2 = 1, \quad (38.3)$$

$$\frac{d(rt_1)}{dt^\circ} = 0, \quad (r_{l^\circ} z_{l^\circ t_1} - r_{l^\circ t_1} z_{l^\circ}) t_1 = \pm (z - d),$$

$$t_2 = 0, \quad u = 0, \quad t_1 \geq 0.$$

Для почти всех значений  $l^\circ$  в одноосной области выполняется неравенство

$$r(l^\circ) < \cos l^\circ. \quad (38.4)$$

**Нити являются параллелями**

$$r = \cos l^0, \quad z = d, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 0, \quad u = 0. \quad (38.5)$$

### 38.3. Нульсовая область

$$z = d, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 0, \quad u = 0. \quad (38.6)$$

Для почти всех значений  $l^0$  в нульсовой области выполняются неравенства

$$r(l^0) < \cos l^0, \quad |r_{l^0}(l^0)| < 1. \quad (38.7)$$

Напишем уравнение границы между областями разных типов в виде

$$l^0 = l_*^0.$$

### 38.4. Граница между двухосной и одноосной областями

**Граница совпадает с нитью**

В этом случае нить является параллелью поверхности  $S$ . Справедливы равенства

$$t_1(l_*^0) = 0, \quad u(l_*^0) = 0, \quad z(l_*^0) = d. \quad (38.8)$$

**Граница не совпадает с нитью**

В этом случае нить является меридианом поверхности  $S$ . Справедливы равенства

$$\begin{aligned} [(t_1)_{(1)} - (t_1)_{(2)}](l_*^0) &= 0, & u(l_*^0) &= 0, \\ r(l_*^0) &= \cos l_*^0, & |z_{(1)} - z_{(2)}|(l_*^0) &= 0. \end{aligned} \quad (38.9)$$

Если  $t_1(l_*^0) \neq 0$ , то

$$r_{l^0}(l_*^0) = -\sin l_*^0, \quad z_{l^0}(l_*^0) = \kappa \cos l_*^0. \quad (38.10)$$

### 38.5. Граница между двухосной и нульсовой областями

$$t_1(l_*^0) = 0, \quad u(l_*^0) = 0, \quad r(l_*^0) = \cos l_*^0, \quad z(l_*^0) = d. \quad (38.11)$$

### 38.6. Граница между одноосной и пульсозной областями

Граница совпадает с нитью

В этом случае нить является параллелью поверхности  $S$ . Справедливы равенства

$$r(l_*^{\circ}) = \cos l_*^{\circ}, \quad z(l_*^{\circ}) = d. \quad (38.12)$$

Граница не совпадает с нитью

В этом случае нить является меридианом поверхности  $S$ . Справедливы равенства

$$t_1(l_*^{\circ}) = 0, \quad [r_{(0)} - r_{(1)}](l_*^{\circ}) = 0, \quad z(l_*^{\circ}) = d. \quad (38.13)$$

### 38.7. Дополнительные условия

$$r(0) = 1, \quad z(0) = 0, \quad r\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad v = -3 \int_0^{\pi/2} r r_{l^{\circ}} z dl^{\circ}, \quad (38.14)$$

$$t_1\left(\frac{\pi}{2}\right) < \infty, \quad t_2\left(\frac{\pi}{2}\right) < \infty, \quad \left|u\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| < \infty.$$

Если  $t_1(\pi/2) \neq 0$ , то

$$z_{l^{\circ}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad (38.15)$$

В задаче (38.2)–(38.15) неизвестными являются функции  $r(l^{\circ})$ ,  $z(l^{\circ})$ ,  $t_1(l^{\circ})$ ,  $t_2(l^{\circ})$ ,  $u(l^{\circ})$  и постоянные  $d$ ,  $l_*^{\circ}$ . Независимая переменная  $l^{\circ}$  меняется на отрезке  $0 \leq l^{\circ} \leq \pi/2$ . Параметр  $v$  известен.

*Замечание 38.1.* Знак плюс в формулах (38.2), (38.3) при множителе  $(z - d)$  соответствует случаю, в котором жидкость находится над оболочкой. Знак минус соответствует случаю, в котором жидкость находится под оболочкой.

*Замечание 38.2.* Из определения объема  $v$  следует, что  $|v| \leq 1$ .

## §39. Формы равновесия, содержащие области с нулевыми усилиями

Рассмотрим формы равновесия, на которых есть пульсозная область или область с нулевыми усилиями.

### 39.1. Вся оболочка является нулевой

Из (38.6), (38.14) следует: если вся оболочка является нулевой, то поверхность  $S$  представляет собой горизонтальный круг

$$0 \leq r \leq 1, \quad z = 0, \quad (39.1)$$

усилия оболочки, постоянная  $d$  и объем  $v$  равны нулю:

$$t_1 = 0, \quad t_2 = 0, \quad u = 0, \quad d = 0, \quad v = 0.$$

Рассмотрим неравенства (38.7).

**Утверждение 39.1.** *Существует отображение области*

$$r^0 = \cos t^0, \quad z^0 = \sin t^0, \quad 0 \leq t_1^0 \leq t^0 \leq t_2^0 \leq \frac{\pi}{2}$$

поверхности  $S^0$  в поверхность

$$\cos t_2^0 \leq r \leq \cos t_1^0, \quad z = 0,$$

при котором почти всюду выполняются неравенства (38.7).

*Доказательство.* Рассмотрим следующее отображение поверхности  $S^0$ : точка  $t^0$  меридиана переходит в точку

$$r(t^0) = \frac{\cos t_1^0(t_2^0 - t^0) + \cos t_2^0(t^0 - t_1^0)}{t_2^0 - t_1^0}, \quad z = 0. \quad (39.2)$$

Рассмотрим функцию

$$f(t^0) = r(t^0) - \cos t^0 = \frac{\cos t_1^0(t_2^0 - t^0) + \cos t_2^0(t^0 - t_1^0)}{t_2^0 - t_1^0} - \cos t^0.$$

При  $t^0 = t_1^0$  и при  $t^0 = t_2^0$  функция  $f$  обращается в ноль. Производная

$$f_{t^0} = \frac{\cos t_2^0 - \cos t_1^0}{t_2^0 - t_1^0} + \sin t^0$$

обращается в ноль в единственной точке  $t^0 = t^{00}$  интервала  $(t_1^0, t_2^0)$ , так как

$$a = \frac{\cos t_2^0 - \cos t_1^0}{t_2^0 - t_1^0} = - \int_0^1 \sin(t_1^0 + \mu(t_2^0 - t_1^0)) d\mu > - \int_0^1 \sin t_2^0 d\mu = - \sin t_2^0, \\ a < - \int_0^1 \sin t_1^0 d\mu = - \sin t_1^0.$$

При  $t^0 < t^{00}$  производная  $f_{t^0} < 0$ . При  $t^0 > t^{00}$  производная  $f_{t^0} > 0$ . Поэтому

$$f(t^0) < 0, \quad r(t^0) < \cos t^0 \quad t_1^0 < t^0 < t_2^0.$$

Таким образом, первое неравенство (38.7) выполняется во всех точках интервала  $(l_1^c, l_2^c)$ . Рассмотрим второе неравенство (38.7).

При  $l_1^c \leq l^c \leq l_2^c$ ,  $l_1^c < l_2^c$  для функции (39.2) справедливы соотношения

$$\begin{aligned} |r_{l^c}(l^c)| - \left| \frac{\cos l_2^c - \cos l_1^c}{l_2^c - l_1^c} \right| &= \left| - \int_0^1 \sin(l_1^c + \mu(l_2^c - l_1^c)) d\mu \right| < \\ < \int_0^1 \sin l_2^c d\mu \quad \sin l_2^c \leq 1. \end{aligned}$$

Таким образом, второе неравенство (38.7) выполняется во всех точках отрезка  $[l_1^c, l_2^c]$ , оба неравенства (38.7) выполняются почти всюду, а именно: на всем интервале  $(l_1^c, l_2^c)$ . Утверждение 39.1 доказано.

Полагая в утверждении 39.1  $l_1^c = 0$ ,  $l_2^c = \pi/2$ , получим

**Следствие 39.1.** *Существует отображение поверхности  $S^c$  в поверхность (39.1), при котором почти всюду выполняются неравенства (38.7).*

### 39.2. Одноосная область, граничащая с нульосной

Если нити одноосной области являются меридианами, то усилие  $t_1$  вычисляется по формуле, следующей из (38.3):  $t_1 = t/r$ ,  $t = \text{const} \geq 0$ . Из условия (38.13) на границе  $l^c = l_*^c$  между нульосной и одноосной областью следует, что  $t = 0$  и, значит, для одноосной области выполняются равенства

$$t_1 = 0, \quad t_2 = 0, \quad u = 0, \quad z = d \quad (39.3)$$

и равенство  $|r_{l^c}| = 1$ , следующие из (38.3). Для почти всех значений  $l^c$  справедливо неравенство (38.4):  $r(l^c) < \cos l^c$ .

Если нити одноосной области являются параллелями, то, как следует из (38.5), выполняются равенства (39.3) и равенство  $r(l^c) = \cos l^c$ .

Отсюда следует, что объединение нульосной и соседних одноосных областей можно рассматривать как одну область  $M_{01}$ , в которой справедливы равенства (39.3) и неравенства

$$r(l^c) \leq \cos l^c, \quad |r_{l^c}(l^c)| \leq 1.$$

Область  $M_{01}$  может граничить с двухосной областью или с контуром крепления.

### 39.3. Двухосная область, граничащая с областью $M_{01}$

Так как в двухосной области  $t_1 \geq 0$  и  $t_2 \geq 0$ , то из (38.2) следует, что в двухосной области выполняется неравенство

$$\pm \kappa(z - d) \geq 0. \quad (39.4)$$

Таким образом, двухосная область является сферическим сегментом или сферическим поясом, расположенным в одном из полупространств, на которые плоскость  $z = d$  разделяет пространство.

Найдем усилие  $t_1$  в двухосной области. Для этого из (38.2) получим дифференциальное уравнение для  $t_1$  и решим его:

$$\begin{aligned} z - \kappa \sin l^\circ + d_1, \quad t_2 - \pm \kappa(z - d) - t_1, \quad (39.5) \\ \frac{dt_1}{dl^\circ} - 2 \operatorname{tg}(l^\circ) t_1 \pm \kappa \operatorname{tg} l^\circ (\kappa \sin l^\circ + d_1 - d) = 0, \\ t_1 = \mp \frac{1}{6 \cos^2 l^\circ} \left[ 2 \sin^3 l^\circ + 3 \kappa (d_1 - d) \sin^2 l^\circ + d_2 \right]. \end{aligned}$$

Здесь  $d_1, d_2$  — неизвестные постоянные.

Пусть  $l^\circ = l_1^\circ$  — граница между двухосной областью и областью  $M_{01}$ . Тогда

$$z(l_1^\circ) = d, \quad t_1(l_1^\circ) = 0. \quad (39.6)$$

Отсюда получаем формулы для  $d_1, d_2$ :

$$d_1 = d - \kappa \sin l_1^\circ, \quad d_2 = -2 \sin^3 l_1^\circ - 3 \kappa (d_1 - d) \sin^2 l_1^\circ. \quad (39.7)$$

Формула для  $t_1$  принимает вид

$$\begin{aligned} t_1 = \mp \frac{1}{6 \cos^2 l^\circ} \left[ 2(\sin^3 l^\circ - \sin^3 l_1^\circ) + 3 \sin l_1^\circ (\sin^2 l^\circ - \sin^2 l_1^\circ) \right] = (39.8) \\ = \mp \frac{(\sin l^\circ - \sin l_1^\circ)^2 (2 \sin l^\circ + \sin l_1^\circ)}{6 \cos^2 l^\circ}. \end{aligned}$$

Так как значения  $l^\circ, l_1^\circ$  принадлежат отрезку  $[0, \pi/2]$ , то неравенство  $t_1 \geq 0$  может выполняться только в случае нижнего знака в формуле (39.8), то есть в случае, когда жидкость расположена под оболочкой:

$$t_1 = \frac{(\sin l^\circ - \sin l_1^\circ)^2 (2 \sin l^\circ + \sin l_1^\circ)}{6 \cos^2 l^\circ}. \quad (39.9)$$

Из (39.4), (39.5), (39.7) получаем неравенства

$$\begin{aligned} -\kappa(z - d) \geq 0, \quad -\kappa(\kappa \sin l^\circ + d_1 - d) \geq 0, \quad -\sin l^\circ + \sin l_1^\circ \geq 0, \\ l^\circ \leq l_1^\circ. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что двухосная область является сферическим поясом, расположенным на отрезке  $l_0^\circ \leq l^\circ \leq l_1^\circ$ . Область  $M_{01}$  является

горизонтальным кругом

$$\begin{aligned} 0 \leq r \leq \cos l_1^o, \quad z = d, \quad l_1^o \leq l^o \leq \frac{\pi}{2}, \\ r(l_1^o) = \cos l_1^o, \quad r\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \end{aligned} \quad (39.10)$$

### 39.4. Граница $l^o = l_0^o$ двухосной области

**Утверждение 39.2.** *Граница  $l^o = l_0^o$  двухосной области является контуром крепления:  $l_0^o = 0$ ,  $r(l_0^o) = 1$ ,  $z(l_0^o) = 0$ .*

*Доказательство.* В рассматриваемом случае предполагается, что двухосная область не вырождена, то есть  $0 \leq l_0^o < l_1^o$ . Тогда, так как  $t_1(l_0^o) > 0$  (смотрите (39.9)), то граница  $l^o = l_0^o$  двухосной области является или контуром крепления оболочки, или границей с одноосной областью, линии которой расположены по меридианам и имеют усилие

$$t_{\perp} = \frac{t}{r}, \quad t = \text{const} > 0. \quad (39.11)$$

а) Предположим, что двухосная область граничит с одноосной областью, расположенной на отрезке

$$0 \leq l^o_{-1} \leq l^o \leq l_0^o, \quad l_0^o > 0.$$

Тогда при  $l^o = l_0^o$  из (38.9), (38.10), (39.5), (39.7), (39.11) следуют соотношения

$$\begin{aligned} r(l_0^o) = \cos l_0^o, \quad z(l_0^o) = \kappa(\sin l_0^o - \sin l_1^o) + d, \\ r_{l^o}(l_0^o) = -\sin l_0^o, \quad z_{l^o}(l_0^o) = \kappa \cos l_0^o, \quad \kappa[z(l_0^o) - d] < 0. \end{aligned} \quad (39.12)$$

Граница  $l^o = l_{-1}^o$  является или контуром крепления ( $l_{-1}^o = 0$ ), или границей с двухосной областью. Это означает, что при  $l^o = l_{-1}^o$  выполняется равенство

$$r(l_{-1}^o) = \cos l_{-1}^o. \quad (39.13)$$

б) Рассмотрим дифференциальные уравнения (38.3), описывающие одноосную область. Приведем их к форме Коши. Для этого введем переменную  $\theta$  по формулам

$$r_{l^o} = \cos \theta, \quad z_{l^o} = \sin \theta. \quad (39.14)$$

Из (38.3) получим уравнения для переменных  $r$ ,  $z$ ,  $\theta$  в одноосной области:

$$\frac{dr}{dl^o} = \cos \theta, \quad \frac{dz}{dl^o} = \sin \theta, \quad \frac{d\theta}{dl^o} = -\frac{r(z-d)}{t}. \quad (39.15)$$

При  $l^v = l_0^v$  выполняются равенства, следующие из (39.12), (39.14), (39.15):

$$\theta(l_0^v) = \kappa \left( \frac{\pi}{2} + l_0^v \right), \quad (39.16)$$

$$\kappa \frac{d\theta}{dl^v}(l_0^v) = - \left[ \frac{\kappa r(z-d)}{l} \right](l_0^v) - \frac{\cos l_0^v (\sin l_0^v - l_1^v)}{l} > 0.$$

Из определения  $\theta$  следует, что в какой-либо точке одноосной области можно взять значение  $\theta$ , принадлежащее наперед заданному интервалу длины  $2\pi$ . Для удобства доказательства взято значение (39.16). В общем случае  $\theta(l_0^v) = \kappa(\pi/2 + l_0^v) \pmod{2\pi}$ .

в) Покажем, что

$$\kappa \frac{d\theta}{dl^v}(l_0^v) \geq 1. \quad (39.17)$$

Так как для почти всех значений  $l^v$  в одноосной области выполняется неравенство (38.4) ( $r(l^v) < f(l^v) - \cos l^v$ ) и так как

$$r(l_0^v) = f(l_0^v) - \cos l_0^v, \quad \frac{dr}{dl^v}(l_0^v) = \frac{df}{dl^v}(l_0^v) + \sin l_0^v,$$

то

$$\frac{d^2 r}{(dl^v)^2}(l_0^v) \leq \frac{d^2 f}{(dl^v)^2}(l_0^v);$$

$$\frac{d \cos \theta}{dl^v}(l_0^v) = - \left[ \sin \theta \frac{d\theta}{dl^v} \right](l_0^v) = -\kappa \cos l_0^v \frac{d\theta}{dl^v}(l_0^v) \leq -\cos l_0^v;$$

$$\kappa \frac{d\theta}{dl^v}(l_0^v) \geq 1.$$

Здесь использованы формулы (39.12), (39.15), (39.16). Неравенство (39.17) доказано.

г) По теореме о продолжении решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений [5] система (39.15) имеет решение на любом интервале  $(l_{-2}^v, l_0^v)$ . Из (39.17) следует, что в некоторой окрестности точки  $l^v = l_0^v$  с уменьшением  $l^v$  функция  $\kappa\theta$  убывает. Пусть  $(l_{-2}^v, l_0^v)$  — такой интервал  $l^v$ , что на нем выполняются неравенства

$$\frac{\pi}{2} < \kappa\theta \leq \frac{\pi}{2} + l_0^v.$$

Так как на этом интервале функции  $r, z$  монотонны ( $dr/dl^v < 0$ ,  $\kappa dz/dl^v > 0$ , смотрите (39.15)), то из (39.15), (39.17) следуют неравенства

$$\kappa \frac{d\theta}{dl^v}(l^v) > - \frac{\kappa r(l_0^v) [z(l_0^v) - d]}{l} - \kappa \frac{d\theta}{dl^v}(l_0^v) \geq 1. \quad (39.18)$$



Поэтому существует такое значение  $l_{-2}^c$ , что

$$\kappa\theta(l_{-2}^c) = \frac{\pi}{2}. \quad (39.19)$$

Найдем оценку значения  $l_{-2}^c$ . Из (39.16), (39.18), (39.19) следуют соотношения

$$\kappa [\theta(l^c) - \theta(l_0^c)] = \kappa \int_{l_0^c}^{l^c} \frac{d\theta}{dl^c} dl^c < \kappa \int_{l_0^c}^{l^c} \frac{d\theta}{dl^c}(l_0^c) dl^c \leq l^c - l_0^c, \quad (39.20)$$

$$\kappa [\theta(l_{-2}^c) - \theta(l_0^c)] < l_{-2}^c - l_0^c,$$

$$\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} + l_0^c\right) < l_{-2}^c - l_0^c, \quad l_{-2}^c > 0.$$

д) Рассмотрим интервал  $[l_{-2}^c, l_0^c)$ . На нем выполняются неравенства, следующие из (39.12), (39.15), (39.16), (39.20):

$$\kappa [\theta(l^c) - \theta(l_0^c)] < l^c - l_0^c, \quad \kappa\theta(l^c) < \frac{\pi}{2} + l^c,$$

$$\frac{dr}{dl^c} = \cos \theta > -\sin l^c, \quad r(l^c) - r(l_0^c) < \cos l^c - \cos l_0^c,$$

$$r(l^c) < \cos l^c.$$

Получили, что  $l^c - l_{-2}^c$  является внутренней точкой одноосной области.

е) В точке  $l^c - l_{-2}^c$  выполняются равенства, следующие из (39.15), (39.18), (39.19):

$$\frac{dr}{dl^c}(l_{-2}^c) = \cos \theta(l_{-2}^c) = 0, \quad \frac{d^2r}{(dl^c)^2}(l_{-2}^c) = -\left[\sin \theta \frac{d\theta}{dl^c}\right](l_{-2}^c) < 0.$$

Поэтому в некоторой окрестности точки  $l^c - l_{-2}^c$  с уменьшением  $l^c$  функция  $r$  убывает. Чтобы функция  $r$  смогла выйти на значение (39.13) в точке  $l_{-1}^c \in [0, l_{-2}^c)$ , нужно, чтобы существовала точка  $l_{**}^c$ , в которой бы выполнялись соотношения

$$r > 0, \quad \frac{dr}{dl^c} = 0, \quad \kappa \frac{dz}{dl^c} = 1, \quad \frac{d^2r}{(dl^c)^2} > 0 \quad (39.21)$$

(функция  $r^c$  должна возрастать с уменьшением  $l^c$ . Так как кривая  $r^c$ ,  $z^c$  не имеет точек самопересечения, то пересечь вертикаль  $r = r^c(l_{-2}^c)$  кривая может только при  $\kappa z \leq \kappa z(l_{-2}^c)$ . Отсюда равенство  $\kappa dz/dl^c = 1$  в (39.21)). Последнее неравенство (39.21) не выполняется, так как в рассматриваемой области  $r > 0$ ,  $\kappa(z-d) < 0$  при  $l^c - l_{**}^c$  выполняются соотношения

$$\frac{d^2r}{(dl^c)^2} = -\sin \theta \frac{d\theta}{dl^c} - \frac{dz}{dl^c} \frac{r(z-d)}{l} - \frac{\kappa r(z-d)}{l} < 0.$$

Получили, что не существует такой точки  $t_{-1}^c$ , в которой бы выполнялось равенство (39.13). Поэтому не существует одноосной области и предположение о том, что двухосная область граничит с одноосной областью, неверно.  $t^c = t_0^c$  является контуром крепления. Утверждение 39.2 доказано.

### 39.5. Формы равновесия

Из уравнений (38.2) следует, что не существует двухосных областей с нулевыми усилиями, так как иначе приходим к противоречию:

$$z = d, \quad z_{t^c} = 0 \neq \kappa \cos t^c.$$

Одноосные области, в которых усилия оболочки равны нулю, приводят к области  $M_{01}$ , уже рассмотренной в п. 39.2. Таким образом, если поверхность  $S$  имеет области с нулевыми усилиями, то это означает, что жидкость находится под оболочкой, поверхность  $S$  состоит из области  $M_{01}$ , описываемой формулами (39.10), и сферического пояса, расположенного между областью  $M_{01}$  и контуром крепления и описываемого формулами

$$r = \cos t^c, \quad z = \kappa \sin t^c, \quad 0 \leq t^c \leq t_1^c. \quad (39.22)$$

Постоянная  $d$  находится из (39.6), (39.22):

$$d = \kappa \sin t_1^c. \quad (39.23)$$

Усилия в области  $M_{01}$  равны нулю:  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 0$ ,  $u = 0$ . Пойдем усилия в двухосной области. Усилие  $t_1$  вычисляется по формуле (39.9). Формулу для  $t_2$  получим из (39.5), (39.9), (39.22), (39.23):

$$\begin{aligned} t_2 = & -\kappa(z - d) - t_1 = \\ & -\sin t^c + \sin t_1^c - \frac{1}{6 \cos^2 t^c} (\sin t^c - \sin t_1^c)^2 (2 \sin t^c + \sin t_1^c) \\ & \frac{1}{6 \cos^2 t^c} (\sin t^c - \sin t_1^c) (4 \sin^2 t^c + \sin t_1^c \sin t^c + \sin^2 t_1^c - 6). \end{aligned}$$

Неравенство  $t_2 \geq 0$  в двухосной области выполняется, так как при  $0 \leq t^c < t_1^c$

$$\begin{aligned} \sin t^c - \sin t_1^c & < 0, \\ 4 \sin^2 t^c + \sin t_1^c \sin t^c + \sin^2 t_1^c - 6 & < 4 + 1 + 1 - 6 = 0. \end{aligned}$$

Усилие  $u$  найдем, интегрируя уравнение (38.2):

$$\frac{du}{dt^c} - 2 \operatorname{tg}(t^c) u = 0, \quad u = \frac{d_3}{\cos^2 t^c}.$$

Постоянная  $d_3$  находится из условий (38.8), (38.9), (38.11) на границе между областью  $M_{01}$  и сферическим поясом:

$$u(t_1^c) = 0, \quad d_3 = 0, \quad u = 0 \quad 0 \leq t^c \leq t_1^c.$$

Таким образом, получили следующие формулы для усилий в двухосной области:

$$t_1 = \frac{(\sin t^c - \sin t_1^c)^2}{6 \cos^2 t^c} (2 \sin t^c + \sin t_1^c) \quad (39.24)$$

$$t_2 = \frac{\sin t^c - \sin t_1^c}{6 \cos^2 t^c} (4 \sin^2 t^c + \sin t_1^c \sin t^c + \sin^2 t_1^c - 6),$$

$$u = 0.$$

Выразим постоянную  $t_1^c$  через параметр  $v$ . Для этого подставим значения (39.10), (39.22), (39.23) для  $r$ ,  $z$  и  $d$  в формулу (38.14) для  $v$ . Получим уравнение

$$\begin{aligned} v &= 3\kappa \int_0^{t_1^c} \cos t^c \sin^2 t^c dt^c - 3\kappa \sin t_1^c \int_{\cos t_1^c}^0 r dr - \\ &= \kappa \sin^3 t_1^c + \frac{3\kappa}{2} \sin t_1^c \cos^2 t_1^c - \frac{\kappa}{2} \sin t_1^c (3 - \sin^2 t_1^c). \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию

$$f(w) = \frac{\kappa}{2} w (3 - w^2).$$

$f(0) = 0$ ,  $f(1) = \kappa$ . Производная функции равна

$$\frac{df}{dw} = \frac{3\kappa}{2} (1 - w^2).$$

Поэтому  $\kappa df/dw > 0$  при  $|w| < 1$ . Отсюда следует, что для любого значения  $v$ ,  $-1 \leq v \leq 1$ , существует единственная пара значений  $\kappa$ ,  $t_1^c$ , удовлетворяющих уравнениям

$$v = \frac{\kappa}{2} \sin t_1^c (3 - \sin^2 t_1^c), \quad \kappa = \pm 1. \quad (39.25)$$

**Результат 39.1.** При  $v \neq 0$  поверхность  $S$  содержит область  $M_{01}$  с нулевыми усилиями (в частности, нульосную область) только в случае, когда жидкость находится под оболочкой. Область  $M_{01}$  является горизонтальным кругом (39.10), (39.23). К области  $M_{01}$  примыкает сферический пояс (39.22). Усилия в области  $M_{01}$  равны нулю, усилия в двухосной области описываются формулами (39.24). Параметры  $\kappa$ ,  $t_1^c$  определяются однозначно по значению объема  $v$  из уравнений (39.25).

**Результат 39.2.** При  $v = 0$  и любом положении жидкости существует форма равновесия, представляющая собой горизонтальный круг (39.10) ( $d = 0, t_0 = 0$ ), ограниченный контуром крепления. Усилия оболочки при этом равны нулю.

*Замечание 39.1.* В случае, когда жидкость находится под оболочкой, для значений  $v$ , равных по модулю и противоположных по знаку, значения  $t_1^v$  равны, а значения  $\kappa$  противоположны (смотрите (39.25)). Поэтому для таких значений  $v$  формы равновесия оболочки симметричны одна другой относительно плоскости  $z = 0$ , усилия оболочки совпадают (смотрите (39.22), (39.24)). Этот результат сформулировано в § 9 как свойство симметрии задачи равновесия мягкой оболочки под гидростатическим давлением.

## §40. Решение задачи равновесия в случае, когда жидкость находится под оболочкой

Пусть жидкость находится под оболочкой. Рассмотрим формы равновесия, найденные в § 39. Поверхность  $S$  состоит из сферического пояса и горизонтального круга:

$$\begin{aligned} r = \cos l^v, \quad z = \kappa \sin l^v, \quad 0 \leq l^v \leq t_1^v; & \quad (40.1) \\ 0 \leq r \leq \cos t_1^v, \quad z = \kappa \sin t_1^v, \quad t_1^v \leq l^v \leq \frac{\pi}{2}, \quad r\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Параметры  $t_1^v, \kappa$  однозначно определяются по значению объема  $v$  из уравнений

$$v = \frac{\kappa}{2} \sin t_1^v (3 - \sin^2 t_1^v), \quad \kappa = \pm 1, \quad -1 \leq v \leq 1. \quad (40.2)$$

Параметр  $d$  и усилия оболочки вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} d &= \kappa \sin t_1^v; \\ t_1 &= \frac{(\sin l^v - \sin t_1^v)^2}{6 \cos^2 l^v} (2 \sin l^v + \sin t_1^v), \\ t_2 &= \frac{\sin l^v - \sin t_1^v}{6 \cos^2 l^v} (4 \sin^2 l^v + \sin t_1^v \sin l^v + \sin^2 t_1^v - 6), \\ u &= 0, \quad 0 \leq l^v \leq t_1^v; \\ t_1 &= 0, \quad t_2 = 0, \quad u = 0, \quad t_1^v \leq l^v \leq \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

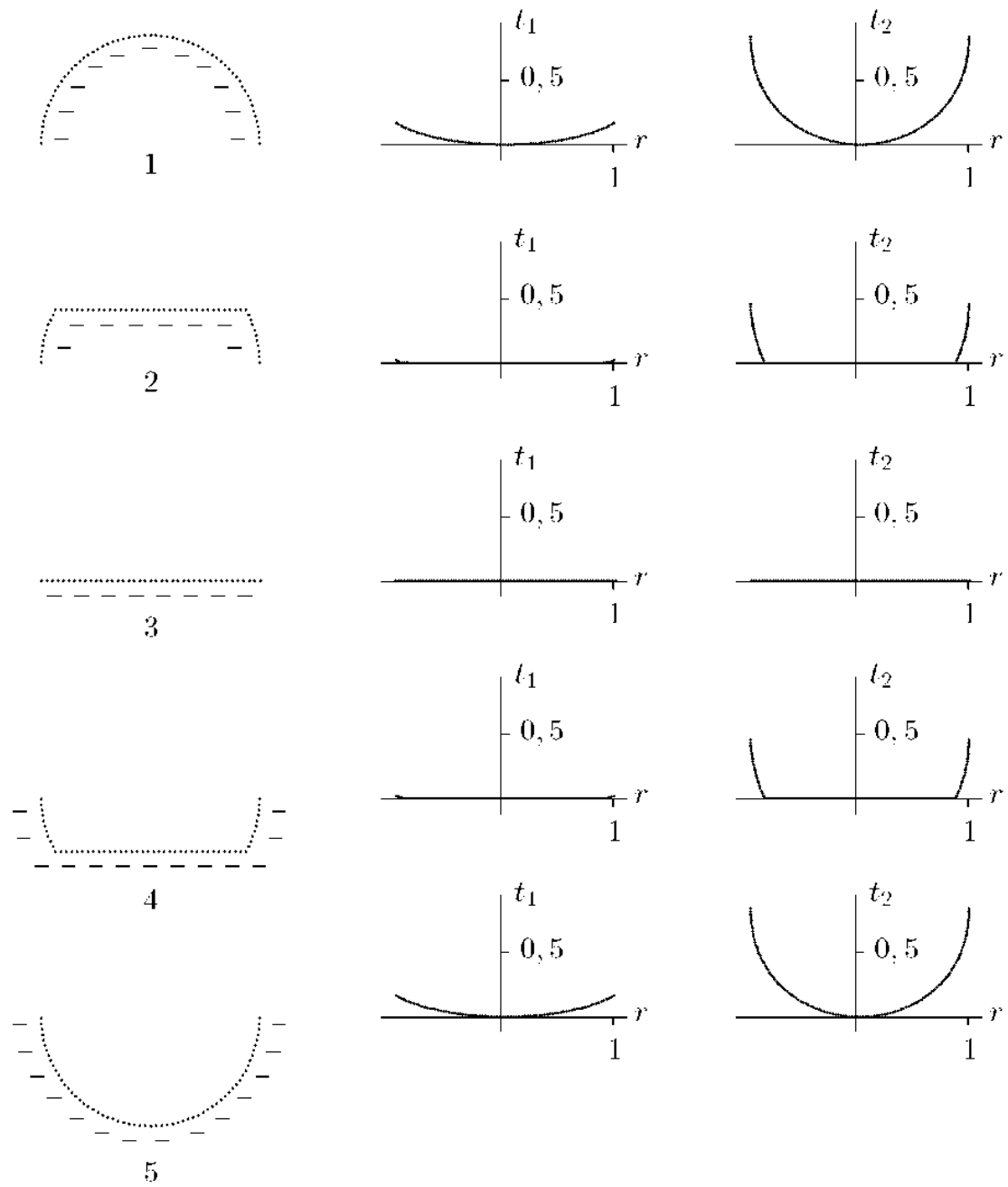


Рис. 40.1. Формы равновесия и усилия  $t_1, t_2$

Таблица 40.1. Значения параметров форм равновесия на рис. 40.1

	$v$	$l_1^0$	$\cos l_1^0$	$d$	$t_1(0)$	$t_2(0)$
1	1,0	1,571	0,000	1,000	0,167	0,833
2	0,7	0,506	0,874	0,485	0,019	0,466
3	0,0	0,000	1,000	0,000	0,000	0,000
4	-0,7	0,506	0,874	-0,485	0,019	0,466
5	-1,0	1,571	0,000	-1,000	0,167	0,833

Формы равновесия и усилия оболочки представлены на рис. 40.1. Для наглядности усилия  $t_1, t_2$  даны как функции от  $r$ . Численные значения параметров даны в табл. 40.1. В таблице  $t_i(0) = t_i|_{l^0=0} = t_i|_{r=1}$ ,  $i = 1, 2$ .

На границе между двухосной и нулевой областями поверхность  $S$  имеет излом. При  $v = 0$  поверхность  $S$  вырождается в горизонтальный круг ( $l_1^0 = 0$ ). При  $v = \pm 1$  поверхность  $S$  является полусферой ( $l_1^0 = \pi/2$ ).

*Замечание 40.1.* В § 41 показано, что в случае, когда жидкость находится под оболочкой, других форм равновесия, кроме (40.1), (40.2), нет.

## §41. Формы равновесия без областей с нулевыми усилиями

Формы равновесия оболочки, содержащие области с нулевыми усилиями, рассмотрены в § 39. Рассмотрим остальные формы равновесия. Так как области с нулевыми усилиями отсутствуют, то поверхность  $S$  состоит из двухосных областей и одноосных областей, пяти которых расположены вдоль меридианов и имеют ненулевые усилия. Так как меридианы изометричны своим прообразам на поверхности оболочки до деформации, то заменим переменную  $l^0$  на  $l$ , где

$$l = \frac{L}{C} = l^0, \quad 0 \leq l \leq \frac{\pi}{2},$$

$L, l$  — длина и безразмерная длина дуги меридиана поверхности  $S$ , отсчитываемая от контура крепления.

## 41.1. Окрестность точки $l = \pi/2$

**Утверждение 41.1.** *Окрестность точки  $l = \pi/2$  является двуосной областью.*

*Доказательство.* Предположим противное, а именно: окрестность точки  $l = \pi/2$  является одноосной областью. Рассмотрим уравнения (38.3) для одноосной области в форме, аналогичной (39.15):

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dl} = \cos \theta, \quad \frac{dz}{dl} = \sin \theta, \quad \frac{d\theta}{dl} = \pm \frac{r(z-d)}{t}, \quad (41.1) \\ r\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad z\left(\frac{\pi}{2}\right) = \tilde{z}, \quad \theta\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi. \end{aligned}$$

Здесь  $t > 0$  — постоянная, определяющая усилие в одноосной области:

$$t_1 = \frac{t}{r}.$$

Значения  $r$ ,  $\theta$  при  $l = \pi/2$  следуют из (38.14), (38.15), значение  $z$  при  $l = \pi/2$  обозначено через  $\tilde{z}$ .

В окрестности точки  $l = \pi/2$  решение системы (41.1) представимо в виде сходящихся рядов по степеням  $(\pi/2 - l)$  (как решение задачи Коши [5]). Вычисляя первые члены этих рядов, получим

$$r = \frac{\pi}{2} - l + O\left((\frac{\pi}{2} - l)^4\right).$$

Отсюда следует, что неравенство (38.4) не выполняется в окрестности точки  $l = \pi/2$ , так как для  $\cos l$  справедливо разложение

$$\cos l = \frac{\pi}{2} - l - \frac{1}{6} (\frac{\pi}{2} - l)^3 + O\left((\frac{\pi}{2} - l)^4\right).$$

Утверждение 41.1 доказано.

## 41.2. Расположение жидкости

Вся поверхность  $S$  является двуосной областью (полусферой) тогда и только тогда, когда  $v = \pm 1$  (единица — максимальное значение  $|v|$ , для максимального значения форма равновесия единственна — полусфера).

Пусть  $|v| < 1$ . Тогда поверхность  $S$  не может быть полусферой и, значит, содержит одноосную область. Из утверждения 41.1 следует, что окрестность точки  $l = \pi/2$  является двуосной областью, сферическим сегментом

$$r = \cos l, \quad z = \kappa \sin l + d_1, \quad 0 < l_1 \leq l \leq \frac{\pi}{2}. \quad (41.2)$$

В случае, когда жидкость находится под оболочкой, так же, как в утверждении 39.2, можно доказать, что граница  $l = l_1$  не может быть

границей с одноосной областью. Поэтому этот случай невозможен. Отсюда следует:

а) Если поверхность  $S$  не содержит областей с нулевыми усилиями, то жидкость занимает любое положение и  $v = \pm 1$  или жидкость находится над оболочкой.

б) В § 39, § 40 рассмотрены все формы равновесия в случае, когда жидкость находится под оболочкой.

Осталось рассмотреть случай, когда жидкость находится над оболочкой.

### 41.3. Симметрия

Рассмотрим уравнения равновесия оболочки отдельно для двух значений  $\kappa$  в формуле (41.2).

#### 41.3.1. $\kappa = 1$

В двухосной области справедливы уравнения (38.2), которые в рассматриваемом случае имеют вид

$$\begin{aligned} r &= \cos l, & z_l &= \kappa_i \cos l, & (41.3) \\ \frac{dt_1}{dl} - \operatorname{tg} l (t_1 - t_2) &= 0, \\ \frac{du}{dl} - 2 \operatorname{tg}(l) u &= 0, & t_1 + t_2 - \kappa_i (z - d), \\ t_1 t_2 - u^2 &\geq 0, & t_1 &\geq 0, & t_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Здесь через  $\kappa_i$  обозначено значение  $\kappa$  для  $i$ -ой двухосной области,  $\kappa_i = \pm 1$ . Будем считать окрестность точки  $l = \pi/2$  первой двухосной областью. Тогда

$$\kappa_1 = 1. \quad (41.4)$$

Дифференциальные уравнения  $j$ -й одноосной области запишем в форме (41.1):

$$\frac{dr}{dl} = \cos \theta, \quad \frac{dz}{dl} = \sin \theta, \quad \frac{d\theta}{dl} = \frac{r(z - d)}{t^{(j)}}. \quad (41.5)$$

Усилия в  $j$ -ой одноосной области вычисляются по формулам

$$t_1 = \frac{t^{(j)}}{r}, \quad t_2 = 0, \quad u = 0, \quad t^{(j)} = \operatorname{const} > 0. \quad (41.6)$$

Почти всюду в одноосной области выполняется неравенство (38.4):

$$r(l) < \cos l. \quad (41.7)$$



Условия на границе  $l = l_*$  между  $i$ -й двухосной областью и  $j$ -й одноосной областью следуют из (38.9), (38.10):

$$\begin{aligned} [(t_1)_{(1)} - (t_1)_{(2)}](l_*) &= 0, & u(l_*) &= 0, \\ r(l_*) &= \cos l_*, & [z_{(1)} - z_{(2)}](l_*) &= 0, \\ r_l(l_*) &= -\sin l_*, & z_l(l_*) &= \kappa_i \cos l_*. \end{aligned} \quad (41.8)$$

Дополнительные условия, описывающие контур крепления оболочки, объем и ограниченность усилий, имеют вид

$$\begin{aligned} r(0) &= 1, & z(0) &= 0, & v &= -3 \int_0^{\pi/2} r r_l z dl, \\ t_1\left(\frac{\pi}{2}\right) &< \infty, & t_2\left(\frac{\pi}{2}\right) &< \infty, & \left|u\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| &< \infty. \end{aligned} \quad (41.9)$$

### 41.3.2. $\kappa = -1$

В двухосной области справедливы уравнения

$$\begin{aligned} r &= \cos l, & z_l &= \kappa_i \cos l, & \kappa_1 &= -1, \\ \frac{dt_1}{dl} &= \operatorname{tg} l (t_1 - t_2) = 0, \\ \frac{du}{dl} &= 2 \operatorname{tg}(l) u = 0, & t_1 + t_2 &= \kappa_i (z - d), \\ t_1 t_2 - u^2 &\geq 0, & t_1 &\geq 0, & t_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

В одноосной области справедливы уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dl} &= \cos \theta, & \frac{dz}{dl} &= \sin \theta, & \frac{d\theta}{dl} &= \frac{r(z - d)}{t^{(j)}}, \\ t_1 &= \frac{t^{(j)}}{r}, & t_2 &= 0, & u &= 0, & t^{(j)} &= \operatorname{const} > 0. \end{aligned}$$

Почти всюду в одноосной области выполняется неравенство

$$r(l) < \cos l.$$

Условия на границе  $l = l_*$  между  $i$ -й двухосной областью и  $j$ -й одноосной областью имеют вид

$$\begin{aligned} [(t_1)_{(1)} - (t_1)_{(2)}](l_*) &= 0, & u(l_*) &= 0, \\ r(l_*) &= \cos l_*, & [z_{(1)} - z_{(2)}](l_*) &= 0, \\ r_l(l_*) &= -\sin l_*, & z_l(l_*) &= \kappa_i \cos l_*. \end{aligned}$$

Дополнительные условия, описывающие контур крепления оболочки, объем и ограниченность усилий, имеют вид

$$r(0) = 1, \quad z(0) = 0, \quad v = -3 \int_0^{\pi/2} r r_l z dl,$$

$$t_1\left(\frac{\pi}{2}\right) < \infty, \quad t_2\left(\frac{\pi}{2}\right) < \infty, \quad \left|u\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| < \infty.$$

### 41.3.3. Переход к новым переменным

Перейдем в уравнениях для  $\kappa = -1$  к новым переменным и параметрам по формулам

$$r = \bar{r}, \quad z = -\bar{z}, \quad \bar{\theta} = -\theta, \quad \bar{t}_1 = t_1, \quad \bar{t}_2 = t_2, \quad (41.10)$$

$$u = \bar{u}, \quad v = -\bar{v}, \quad \bar{d} = -d, \quad \kappa_i = -\kappa_i.$$

Напишем уравнения для случая  $\kappa = -1$  в новых переменных и параметрах.

В двухосной области:

$$\bar{r} = \cos l, \quad \bar{z}_l = \bar{\kappa}_i \cos l, \quad \bar{\kappa}_i = 1,$$

$$\frac{d\bar{t}_1}{dl} = \operatorname{tg} l (\bar{t}_1 - \bar{t}_2) = 0,$$

$$\frac{d\bar{u}}{dl} = 2 \operatorname{tg}(l) \bar{u} = 0, \quad \bar{t}_1 + \bar{t}_2 = \bar{\kappa}_i (\bar{z} - \bar{d}),$$

$$\bar{t}_1 \bar{t}_2 - \bar{u}^2 \geq 0, \quad \bar{t}_1 \geq 0, \quad \bar{t}_2 \geq 0.$$

В одноосной области:

$$\frac{d\bar{r}}{dl} = \cos \bar{\theta}, \quad \frac{d\bar{z}}{dl} = \sin \bar{\theta}, \quad \frac{d\bar{\theta}}{dl} = \frac{r(z - \bar{d})}{l^{(j)}},$$

$$\bar{t}_1 = \frac{l^{(j)}}{\bar{r}}, \quad \bar{t}_2 = 0, \quad \bar{u} = 0, \quad t^{(j)} = \operatorname{const} > 0.$$

Неравенство для почти всех значений  $l$  в одноосной области:

$$\bar{r}(l) < \cos l.$$

Условия на границе  $l = l_*$  между  $i$ -й двухосной областью и  $j$ -й одноосной областью:

$$\left[(\bar{t}_1)_{(1)} - (\bar{t}_1)_{(2)}\right](l_*) = 0, \quad \bar{u}(l_*) = 0,$$

$$r(l_*) = \cos l_*, \quad [z_{(1)} - z_{(2)}](l_*) = 0,$$

$$r_l(l_*) = -\sin l_*, \quad z_l(l_*) = \kappa_i \cos l_*.$$

Дополнительные условия:

$$r(0) = 1, \quad z(0) = 0, \quad v = -3 \int_0^{\pi/2} r r_1 z dl,$$

$$t_1\left(\frac{\pi}{2}\right) < \infty, \quad t_2\left(\frac{\pi}{2}\right) < \infty, \quad \left|\bar{u}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| < \infty.$$

Получили уравнения (41.3)–(41.9) с точностью до переобозначений. Отсюда следует

**Утверждение 41.2.** Если жидкость находится над оболочкой, то задачу равновесия достаточно решить для  $\kappa = 1$ . Для  $\kappa = -1$  решение получится пересчетом по формулам (41.10).

Из утверждения 41.2 и формул (41.10) следует, что формы равновесия для  $\kappa = 1$  и  $\kappa = -1$  симметричны одна другой относительно плоскости  $z = 0$ . При этом значения  $v$  совпадают по абсолютной величине и отличаются знаком, значения усилий оболочки совпадают. Отсюда и из замечания 39.1 получаем следствие.

**Следствие 41.1.** При любом положении жидкости для значений  $v$ , имеющих одинаковые модули и разные знаки, формы равновесия оболочки симметричны одна другой относительно плоскости  $z = 0$ , усилия оболочки одинаковы.

#### 41.4. Первая двухосная область

В соответствии с утверждением 41.2 будем рассматривать случай  $\kappa = 1$ . Тогда окрестность точки  $l = \pi/2$  является сферическим сегментом

$$r = \cos l, \quad z = \sin l + d_1, \quad 0 \leq t_1 \leq l \leq \frac{\pi}{2}. \quad (41.11)$$

Постоянные  $d_1, t_1$  в (41.11) подлежат определению.

Найдем усилия в первой двухосной области. Для усилия  $t_1$  справедлива формула (39.5), которую запишем через параметр  $l$ :

$$t_1 = -\frac{1}{6 \cos^2 l} [2 \sin^3 l + 3(d_1 - d) \sin^2 l + d_2].$$

Так как  $t_1(\pi/2) < \infty$  (смотрите (41.9)), то  $d_2 = -2 - 3(d_1 - d)$  и формула для  $t_1$  принимает вид

$$t_1 = \frac{1}{3(1 + \sin l)} + \frac{\sin l}{3} + \frac{d_1 - d}{2}.$$

Для усилия  $t_2$  из (41.3), (41.11) получим равенства

$$t_2 = z - d - t_1 = \sin l + d_1 - d - \frac{1}{3(1 + \sin l)} - \frac{\sin l}{3} - \frac{d_1 - d}{2} =$$

$$- \frac{1}{3(1 + \sin l)} + \frac{2 \sin l}{3} + \frac{d_1 - d}{2}.$$

Усилие  $u$  найдем, интегрируя дифференциальное уравнение (41.3):

$$u = \frac{d_3}{\cos^2 l}.$$

Так как  $|u(\pi/2)| < \infty$  (смотрите (41.9)), то  $d_3 = 0$ ,  $u = 0$ . В результате получаем следующие формулы для усилий в сферическом сегменте (41.11):

$$t_1 = \frac{1}{3(1 + \sin l)} + \frac{\sin l}{3} + \frac{d_1 - d}{2} \geq 0, \quad (41.12)$$

$$t_2 = -\frac{1}{3(1 + \sin l)} + \frac{2 \sin l}{3} + \frac{d_1 - d}{2} \geq 0, \quad u = 0.$$

### 41.5. Первая одноосная область

Если  $|v| < 1$ , то поверхность  $S$  не может быть полусферой. Это означает, что  $0 < l_1 < \pi/2$  и при  $0 \leq l_0 \leq l \leq l_1$  поверхность  $S$  содержит одноосную область, уравнения которой следуют из (41.5), (41.6), (41.8), (41.11), (41.12):

$$\frac{dr}{dt} = \cos \theta, \quad \frac{dz}{dt} = \sin \theta, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{r(z - d)}{t}, \quad (41.13)$$

$$r(l_1) = \cos l_1, \quad z(l_1) = \sin l_1 + d_1, \quad \theta(l_1) = \frac{\pi}{2} + l_1,$$

$$t = \cos l_1 \left[ \frac{1}{3(1 + \sin l_1)} + \frac{\sin l_1}{3} + \frac{d_1 - d}{2} \right] > 0, \quad t = t^{(1)}.$$

Усилия в одноосной области определяются по формулам (41.6). Для почти всех значений  $l$  в одноосной области выполняется неравенство (41.7). Граница  $l = l_0$  является или контуром крепления оболочки, или границей со второй двухосной областью.

### 41.6. Результаты

**Результат 41.1.** В случае, когда жидкость находится под оболочкой, все формы равновесия описываются формулами (40.1), (40.2).

**Результат 41.2.** В случае, когда жидкость находится над оболочкой, поверхность  $S$  состоит из двухосных и одноосных областей. Нити одноосных областей расположены вдоль меридианов и имеют ненулевое усилие. Окрестность точки  $l = \pi/2$  является двухосной областью (41.11), в которой усилия оболочки описываются формулами (41.12).

Исключением является единственная форма равновесия: при  $e = 0$  существует форма равновесия, представляющая собой горизонтальный круг (39.10), где  $l_1^* = \pi/2$ ,  $d = 0$ . Усилия оболочки при этом равны нулю.

*Замечание 41.1.* Следствие 41.1 сформулировано в § 9 как свойство симметрии задачи равновесия мягкой оболочки под гидростатическим давлением.

## §42. Двухосные формы равновесия

Если вся поверхность  $S$  является двухосной, то она имеет вид полусферы и справедливы формулы, следующие из (41.11), (41.12) и из свойства симметрии задачи (смотрите следствие 41.1):

$$\begin{aligned} r &= \cos l, & z &= \kappa \sin l, & 0 \leq l \leq \frac{\pi}{2}, & (42.1) \\ t_1 &= \frac{1}{3(1 + \sin l)} + \frac{\sin l}{3} - \frac{\kappa d}{2}, \\ t_2 &= -\frac{1}{3(1 + \sin l)} + \frac{2 \sin l}{3} - \frac{\kappa d}{2}, & u &= 0, \\ v &= \kappa = \pm 1. \end{aligned}$$

Здесь использованы условия закрепления оболочки (41.9), из которых следует, что  $l_1 = 0$ ,  $d_1 = 0$ . Значение  $d$  не определено. Так как  $t_1 \geq 0$ ,  $t_2 \geq 0$ , то из (42.1) получим неравенства для  $d$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{3(1 + \sin l)} + \frac{\sin l}{3} - \frac{\kappa d}{2} &\geq 0, & \kappa d &\leq \frac{2}{3(1 + \sin l)} + \frac{2 \sin l}{3}; \\ -\frac{1}{3(1 + \sin l)} + \frac{2 \sin l}{3} - \frac{\kappa d}{2} &\geq 0, & \kappa d &\leq -\frac{2}{3(1 + \sin l)} + \frac{4 \sin l}{3}; \\ 0 &\leq l \leq \pi/2. \end{aligned}$$

Вычисляя минимальные значения правых частей, получаем

$$\kappa d \leq -\frac{2}{3}. \quad (42.2)$$

**Результат 42.1.** Если  $|v| = 1$ , то поверхность  $S$  является полусферой при любом положении жидкости. В случае, когда жидкость находится над оболочкой, усилия оболочки определены формулами (42.1) с точностью до постоянной  $d$ , удовлетворяющей неравенству (42.2).

*Замечание 42.1.* В § 44 значение  $d$  получено как предел  $d$  при  $|v| \rightarrow 1$ :  $d = -2\kappa/3$ .

## §43. Уравнения для форм равновесия с одной двухосной и одной одноосной областями

Рассмотрим равновесие мягкой оболочки в случае, когда жидкость находится над оболочкой и поверхность  $S$  содержит одну двухосную и одну одноосную область.

### 43.1. Уравнения

Из результата 41.2 следует, что двухосная область расположена на отрезке  $0 < l_1 \leq l \leq \pi/2$  и в области справедливы равенства (41.11), (41.12).

Одноосная область расположена на отрезке  $0 \leq l \leq l_1$ . Граница  $l = l_1$  отделяет одноосную область от двухосной. Граница  $l = 0$  является контуром крепления. Для одноосной области справедливы уравнения, следующие из (41.9), (41.16):

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dl} &= \cos \theta, & \frac{dz}{dl} &= \sin \theta, & \frac{d\theta}{dl} &= \frac{r(z-d)}{t}, & (43.1) \\ r(l_1) &= \cos l_1, & z(l_1) &= \sin l_1 + d_1, & \theta(l_1) &= \frac{\pi}{2} + l_1, \\ r(0) &= 1, & z(0) &= 0, \\ t &= \cos l_1 \left[ \frac{1}{3(1 + \sin l_1)} + \frac{\sin l_1}{3} + \frac{d_1 - d}{2} \right] > 0. \end{aligned}$$

Усилия оболочки в одноосной области описываются формулами (41.6), в которых  $t^{(j)} = t^{(1)} = t$ . Пойдем формулу для объема  $v$ . Из (41.9), (41.14), (43.1) следует:

$$\begin{aligned} v &= -3 \int_0^{\pi/2} r r_l z dl = & (43.2) \\ &= -3 \int_0^{l_1} r r_l (z-d) dl - 3 \int_0^{l_1} r r_l d dl + 3 \int_{l_1}^{\pi/2} \cos l \sin l (\sin l + d_1) dl = \\ &= -3t \int_0^{l_1} r_l \theta_l dl - \frac{3dr^2}{2} \Big|_1^{\cos l_1} + \left( \sin^3 l + \frac{3d_1 \sin^2 l}{2} \right) \Big|_{l_1}^{\pi/2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 3t \int_{\theta(0)}^{\pi/2-l_1} \cos \theta d\theta + \frac{3d \sin^2 l_1}{2} + 1 - \sin^3 l_1 + \frac{3d_1 \cos^2 l_1}{2} - \\
& - 3t [\cos l_1 - \sin \theta(0)] + \frac{3d \sin^2 l_1}{2} + 1 - \sin^3 l_1 + \frac{3d_1 \cos^2 l_1}{2}.
\end{aligned}$$

Получили, что задача равновесия сводится к интегрированию дифференциальных уравнений (43.1) на отрезке  $0 \leq l \leq l_1$  и определению постоянных  $d_1, l_1, t, d$  из уравнений (43.1), (43.2). Значение объема  $v$  известно,  $-1 < v < 1$ . Функция  $r(l)$  для почти всех значений  $l, 0 \leq l \leq l_1$ , удовлетворяет неравенству (41.7):

$$r(l) < \cos l. \quad (43.3)$$

### 43.2. Переход к новым переменным и параметрам

Чтобы привести уравнения для одноосной области к виду, удобному для численного интегрирования, введем новые переменные и параметры по формулам

$$\begin{aligned}
\sigma &= \frac{l_1 - l}{\sqrt[3]{l}}, & w_1 &= \frac{r}{\sqrt[3]{l}}, & w_2 &= \frac{z - d}{\sqrt[3]{l}}, & w_3 &= \theta - \frac{\pi}{2}, \\
\alpha &= \frac{\pi}{2} - l_1, & \beta &= \frac{1}{\sqrt[3]{l}}.
\end{aligned} \quad (43.4)$$

Тогда переменные  $w_1(\sigma), w_2(\sigma), w_3(\sigma)$  удовлетворяют дифференциальным уравнениям, следующим из (43.1), (43.4):

$$\frac{dw_1}{d\sigma} = \sin w_3, \quad \frac{dw_2}{d\sigma} = -\cos w_3, \quad \frac{dw_3}{d\sigma} = -w_1 w_2. \quad (43.5)$$

#### Начальные значения

Выразим начальные значения переменных  $w_1, w_3$  через  $\alpha, \beta$  из (43.1), (43.4):

$$w_1(0) = \frac{r(l_1)}{\sqrt[3]{l}} = \beta \sin \alpha, \quad w_3(0) = \theta(l_1) - \frac{\pi}{2} - l_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Начальное значение  $w_2$  найдем, используя формулу (43.1) для  $t$  и равенства (43.1), (43.4):

$$\begin{aligned}
\frac{d_1 - d}{2} &= \frac{t}{\sin \alpha} = \frac{1}{3(1 + \cos \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{3}, \\
w_2(0) &= \frac{z(l_1) - d}{\sqrt[3]{l}} = \beta(\sin l_1 + d_1 - d) =
\end{aligned} \quad (43.6)$$

$$- \beta \left[ \cos \alpha + \frac{2t}{\sin \alpha} - \frac{2}{3(1 + \cos \alpha)} - \frac{2 \cos \alpha}{3} \right] - \frac{2}{\beta^2 \sin \alpha} - \frac{\beta(1 - \cos \alpha)(2 + \cos \alpha)}{3(1 + \cos \alpha)}.$$

В результате получаем формулы

$$w_1(0) = \beta \sin \alpha, \quad w_2(0) = \frac{2}{\beta^2 \sin \alpha} - \frac{\beta(1 - \cos \alpha)^2(2 + \cos \alpha)}{3 \sin^2 \alpha}, \quad (43.7)$$

$$w_3(0) = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

### Интервал $\sigma$

Длину  $\sigma_1$  интервала изменения переменной  $\sigma$  найдем из (43.4), принимая во внимание, что  $\sigma = \sigma_1$  при  $l = 0$ :  $\sigma_1 = t_1 / \sqrt[3]{l} = (\pi/2 - \alpha)\beta$ . Отсюда следует, что система (43.5) интегрируется на отрезке

$$0 \leq \sigma \leq \sigma_1 = \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \beta. \quad (43.8)$$

### Краевое условие

Из (43.1), (43.4) следуют равенства  $w_1(\sigma_1) = r(0) / \sqrt[3]{l} = \beta$ . Получили краевое условие для новых переменных, связывающее параметры  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$w_1(\sigma_1) = \beta, \quad \sigma_1 = \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \beta. \quad (43.9)$$

### Неравенство (43.3)

Из (43.3), (43.4) следуют соотношения

$$l - t_1 = \sqrt[3]{t} \sigma = \frac{\pi}{2} - \alpha - \frac{\sigma}{\beta}, \quad w_1(\sigma) < \frac{\cos l}{\sqrt[3]{l}} = \beta \sin \left( \alpha + \frac{\sigma}{\beta} \right).$$

Получили, что для почти всех значений  $\sigma$  из отрезка (43.8) выполняется неравенство

$$w_1(\sigma) < \beta \sin \left( \alpha + \frac{\sigma}{\beta} \right). \quad (43.10)$$

### Формулы для $d$ , $v$

Из (43.1), (43.4) получим формулу для постоянной  $d$ :

$$w_2(\sigma_1) = \frac{z(0) - d}{\sqrt[3]{t}} = -d\beta, \quad d = -\frac{w_2(\sigma_1)}{\beta}. \quad (43.11)$$



Из (43.2), (43.4), (43.6), (43.11) получим формулу для  $v$ :

$$\begin{aligned}
 v &= -3t [\cos l_1 - \sin \theta(0)] + \frac{3d}{2} + 1 - \sin^3 l_1 + \\
 &\quad + \frac{3(d_1 - d) \cos^2 l_1}{2} - \\
 &= \frac{3}{\beta^3} \left[ \cos w_3(\sigma_1) - \sin \alpha \right] - \frac{3w_2(\sigma_1)}{2\beta} | 1 - \cos^3 \alpha | \\
 &\quad + 3 \sin^2 \alpha \left[ \frac{1}{\beta^3 \sin \alpha} - \frac{1}{3(1 + \cos \alpha)} - \frac{\cos \alpha}{3} \right] = \\
 &= \frac{3}{\beta^3} \cos w_3(\sigma_1) - \frac{3w_2(\sigma_1)}{2\beta}.
 \end{aligned} \tag{43.12}$$

### Неравенства для $\alpha$ , $\beta$

Из (43.4) следует, что параметр  $\alpha$  лежит в интервале

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}. \tag{43.13}$$

Чтобы найти интервал изменения  $\beta$ , подставим значение (43.6) для  $(d_1 - d)/2$  в неравенство (41.12) для  $t_2$  при  $l = l_1$  и учтем, что  $t = 1/\beta^3$ :

$$\begin{aligned}
 t_2(l_1) &= -\frac{1}{3(1 + \sin l_1)} + \frac{2 \sin l_1}{3} + \frac{d_1 - d}{2} - \\
 &= -\frac{2}{3(1 + \cos \alpha)} + \frac{\cos \alpha}{3} + \frac{t}{\sin \alpha} \geq 0, \\
 t &\geq \sin \alpha \left[ \frac{2}{3(1 + \cos \alpha)} - \frac{\cos \alpha}{3} \right] - \frac{(1 - \cos \alpha)^2 (2 + \cos \alpha)}{3 \sin \alpha}, \\
 \beta^3 &\leq \frac{3 \sin \alpha}{(1 - \cos \alpha)^2 (2 + \cos \alpha)}.
 \end{aligned} \tag{43.14}$$

Принимая во внимание, что  $t > 0$ , получаем следующий интервал изменения параметра  $\beta$ :

$$0 < \beta \leq \sqrt[3]{\frac{3 \sin \alpha}{(1 - \cos \alpha)^2 (2 + \cos \alpha)}}. \tag{43.15}$$

### 43.3. Сводные уравнения для новых переменных и параметров

Напишем уравнения, полученные в п. 43.2, в виде одной системы:

$$\frac{dw_1}{d\sigma} = \sin w_3, \quad \frac{dw_2}{d\sigma} = -\cos w_3, \quad \frac{dw_3}{d\sigma} = -w_1 w_2, \tag{43.16}$$

$$\begin{aligned}
w_1(0) &= \beta \sin \alpha, \\
w_2(0) &= \frac{2}{\beta^2 \sin \alpha} - \frac{\beta(1 - \cos \alpha)^2(2 + \cos \alpha)}{3 \sin^2 \alpha}, \\
w_3(0) &= \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad 0 \leq \sigma \leq \sigma_1 - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\beta, \\
w_1(\sigma_1) &= \beta, \quad v = \frac{3}{\beta^3} \cos w_3(\sigma_1) - \frac{3w_2(\sigma_1)}{2\beta}, \\
0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \beta &\leq \sqrt[3]{\frac{3 \sin \alpha}{(1 - \cos \alpha)^2(2 + \cos \alpha)}}.
\end{aligned}$$

Для почти всех значений  $\sigma$  из отрезка  $0 \leq \sigma \leq \sigma_1$  выполняется неравенство (43.10).

В (43.16) неизвестными являются функции  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $w_3$  и постоянные  $\alpha$ ,  $\beta$ . Значение  $v$  известно ( $-1 < v < 1$ ).

#### 43.4. Формулы для исходных переменных и параметров

Двухосная область и усилия в двухосной области описываются формулами (41.11), (41.12). Напишем формулы, выражающие исходные переменные в одноосной области и параметры задачи через новые переменные и параметры, используя (43.4), (43.6), (43.11), (43.12):

$$\begin{aligned}
r &= \frac{w_1}{\beta}, \quad z = \frac{w_2 - w_2(\sigma_1)}{\beta}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} + w_3, \quad (43.17) \\
l &= \frac{\pi}{2} - \alpha - \frac{\sigma}{\beta}, \quad l_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad t = \frac{1}{\beta^3}, \\
d &= -\frac{w_2(\sigma_1)}{\beta}, \quad d_1 = -\frac{w_2(\sigma_1)}{\beta} + \frac{2}{\beta^3 \sin \alpha} - \frac{2(1 - \cos^3 \alpha)}{3 \sin^2 \alpha}, \\
v &= \frac{3}{\beta^3} \cos w_3(\sigma_1) - \frac{3w_2(\sigma_1)}{2\beta}.
\end{aligned}$$

Усилия в одноосной области вычисляются по формулам (41.6):

$$t_1 = \frac{t}{r}, \quad t_2 = 0, \quad u = 0, \quad 0 \leq l \leq l_1. \quad (43.18)$$

#### 43.5. Неравенства для усилий

Покажем, что в двухосной области усилия  $t_1$ ,  $t_2$  неотрицательны. При  $l = l_1$  выполняется неравенство  $t_2(l_1) \geq 0$  (смотрите (43.14)). Для

$l_1$  из (41.12) следует:

$$l_1 - l_2 + \frac{2}{3(1 + \sin l)} - \frac{\sin l}{3} - l_2 + \frac{(1 - \sin l)(2 + \sin l)}{3(1 + \sin l)} \geq l_2.$$

Так как

$$\frac{dt_2}{dt} - \cos l \left[ \frac{1}{3(1 + \sin l_1)^2} + \frac{2}{3} \right] \geq 0,$$

то во всей двухосной области имеем, что требуется:  $l_1 \geq l_2 \geq t_2(l_1) \geq 0$ .

## §44. Асимптотическое решение задачи при $|v| \sim 1$

В § 42 рассмотрено равновесие, при котором вся оболочка является двухосной областью. В этом случае  $|v| = 1$  и уравнения, описывающие задачу, позволяют находить усилия оболочки с точностью до постоянной  $d$ . Найдём постоянную  $d$ , рассматривая предел  $|v| \rightarrow 1$ . Для этого рассмотрим равновесие оболочки, предполагая, что объём  $v$  близок к экстремальному значению ( $|v| \sim 1$ ) и поверхность  $S$  состоит из одной двухосной и одной одноосной области.

В соответствии с утверждением 41.2 положим  $\kappa = 1$ . Тогда справедливы уравнения и неравенства (41.11), (41.12), (43.16); для почти всех значений  $\sigma$  на отрезке  $0 \leq \sigma \leq \sigma_1$  выполняется неравенство (43.10);  $|v - 1| \ll 1$ ; двухосная область близка к полусфере;  $l_1 = \pi/2 - \alpha \ll 1$ . Для большей наглядности введём малый параметр  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = l_1 - \frac{\pi}{2} = \alpha; \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

### 44.1. Переход к новым переменным

Введём новые переменные, удобные для асимптотического интегрирования:

$$\begin{aligned} x_1 &= w_1 - w_1(0) = w_1 - \beta \cos \varepsilon, & (44.1) \\ x_2 &= w_2 - w_2(0) = w_2 - \frac{2}{\beta^2 \cos \varepsilon} + \frac{\beta(1 - \sin \varepsilon)^2(2 + \sin \varepsilon)}{3 \cos^2 \varepsilon}, \\ x_3 &= \frac{w_3 - w_3(0)}{\varepsilon} = \frac{w_3}{\varepsilon} - 1, \quad \xi = \frac{\sigma}{\sigma_1} = \frac{\sigma}{\varepsilon \beta}. \end{aligned}$$

Дифференциальные уравнения и начальные значения (43.16) для переменных  $x_i(\xi, \varepsilon)$  принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\xi} &= \varepsilon\beta \sin(\varepsilon + \varepsilon x_3), \\ \frac{dx_2}{d\xi} &= -\varepsilon\beta \cos(\varepsilon + \varepsilon x_3), \\ \frac{dx_3}{d\xi} &= -\beta(x_1 + \beta \cos \varepsilon) \left[ x_2 + \frac{2}{\beta^2 \cos \varepsilon} - \frac{\beta(1 - \sin \varepsilon)^2(2 + \sin \varepsilon)}{3 \cos^2 \varepsilon} \right], \\ x(0, \varepsilon) &= 0, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad x = (x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \quad (44.2)$$

Остальные соотношения (43.16) имеют вид

$$\begin{aligned} x_1(1, \varepsilon) &= \beta(1 - \cos \varepsilon), \\ v &= \frac{3}{\beta^3} \cos[\varepsilon + \varepsilon x_3(1, \varepsilon)] - \frac{3}{2\beta} \left[ x_2(1, \varepsilon) + \frac{2}{\beta^2 \cos \varepsilon} - \frac{\beta(1 - \sin \varepsilon)^2(2 + \sin \varepsilon)}{3 \cos^2 \varepsilon} \right], \\ 0 < \beta &\leq \sqrt[3]{\frac{3 \cos \varepsilon}{(1 - \sin \varepsilon)^2(2 + \sin \varepsilon)}}. \end{aligned} \quad (44.3)$$

Для почти всех значений  $\xi$ ,  $0 \leq \xi \leq 1$ , выполняется неравенство, следующее из (43.10), (44.1):

$$x_1(\xi, \varepsilon) < \beta[\cos(\varepsilon - \varepsilon\xi) - \cos \varepsilon]. \quad (44.4)$$

## 44.2. Построение решения регулярно возмущенной задачи Коши

Задача (44.2) является регулярно возмущенной задачей Коши с малым параметром  $\varepsilon$ . По теореме Пуанкаре [5] для каждого значения  $\beta$  существует такое значение  $\varepsilon_*$ , что при  $0 \leq \xi \leq 1$ ,  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_*$  решение задачи (44.2) существует, единственно и представимо в виде равномерно сходящихся рядов

$$x_i(\xi, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{ik}(\xi) \varepsilon^k, \quad i = \overline{1,3}. \quad (44.5)$$

Найдем первые члены рядов (44.5). Для этого подставим (44.5) в (44.2), разложим левые и правые части уравнений в ряды по параметру  $\varepsilon$ :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{da_{1k}}{d\xi} \varepsilon^k = \left[ 1 + a_{30} + a_{31}\varepsilon + a_{32}\varepsilon^2 - \frac{(1 + a_{30})^3 \varepsilon^2}{6} \right] \beta \varepsilon^2 +$$

$$\begin{aligned}
& +O(\varepsilon^5), \\
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{da_{2k}}{d\xi} \varepsilon^k &= -\left[1 - \frac{(1+a_{30})^2 \varepsilon^2}{2} - (1+a_{30})a_{31} \varepsilon^3\right] \beta \varepsilon + O(\varepsilon^5), \\
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{da_{3k}}{d\xi} \varepsilon^k &= -\beta \left[\beta + a_{10} + a_{11} \varepsilon + (a_{12} - \frac{\beta}{2}) \varepsilon^2\right] \left[\frac{2(3-\beta^3)}{3\beta^2} + a_{20} + \right. \\
& \left. + (a_{21} + \beta) \varepsilon + a_{22} \varepsilon^2 + \frac{(3-2\beta^3) \varepsilon^2}{3\beta^2}\right] + O(\varepsilon^3), \\
\sum_{k=0}^{\infty} a_{ik}(1) \varepsilon^k &= 0, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad i=\overline{1,3}.
\end{aligned}$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$  в написанных уравнениях, получим задачу Коши для коэффициентов  $a_{ik}(\xi)$ . Вычислив коэффициенты, получим следующее асимптотическое решение задачи (44.2):

$$\begin{aligned}
x_1 &= \left[1 - \frac{(3-\beta^3)\xi}{3}\right] \beta \xi \varepsilon^2 - \left(1 - \frac{\xi}{3}\right) \frac{\beta^4 \xi^2 \varepsilon^3}{2} - \left[1 - 3\xi + \right. & (44.6) \\
& \left. + \frac{2(3-\beta^3)(9-2\beta^3)\xi^2}{9} - \frac{(3-\beta^3)^2(9-2\beta^3)\xi^3}{27}\right] \frac{\beta \xi \varepsilon^4}{6} + O(\varepsilon^5), \\
x_2 &= -\beta \xi \varepsilon + \left[1 - \frac{2(3-\beta^3)\xi}{3} + \frac{4(3-\beta^3)^2 \xi^2}{27}\right] \frac{\beta \xi \varepsilon^3}{2} - \\
& - \left[1 - \frac{(15-4\beta^3)\xi}{9} + \frac{(3-\beta^3)\xi^2}{6}\right] \frac{\beta^4 \xi^2 \varepsilon^4}{2} + O(\varepsilon^5), \\
x_3 &= -\frac{2(3-\beta^3)\xi}{3} - \left(1 - \frac{\xi}{2}\right) \beta^3 \xi \varepsilon + \left[\beta^3 - (3-\beta^3)\xi + \right. \\
& \left. + \frac{2(3-\beta^3)^2 \xi^2}{9}\right] \frac{\xi \varepsilon^2}{3} + O(\varepsilon^3).
\end{aligned}$$

### 44.3. Зависимость $\beta$ от $\varepsilon$

Подставим выражение (44.6) для  $x_1$  в первое уравнение (44.3):

$$\frac{\beta^4 \varepsilon^2}{3} - \frac{\beta^4 \varepsilon^3}{3} + \left[1 - \frac{(9-\beta^6)(9-2\beta^3)}{54}\right] \frac{\beta \varepsilon^4}{3} + O(\varepsilon^5) - \beta(1 - \cos \varepsilon).$$

Разложим  $\cos \varepsilon$  в ряд по степеням  $\varepsilon$ , сократим уравнение на множитель  $\beta \varepsilon^2 > 0$  (это возможно, так как из первого уравнения (44.2) следует, что каждый коэффициент  $a_{1k}$  имеет множителем  $\beta$ ). Получим уравнение для  $\beta$ :

$$-\frac{1}{2} + \frac{\beta^3}{3} - \frac{\beta^3 \varepsilon}{3} + \left[1 - \frac{4(9-\beta^6)(9-2\beta^3)}{243}\right] \frac{3\varepsilon^2}{8} + O(\varepsilon^3) = 0. \quad (44.7)$$

Решение будем искать в виде

$$\beta = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \varepsilon^k. \quad (44.8)$$

Подставим ряд (44.8) в уравнение (44.7), разложим левую часть уравнения в ряд по степеням  $\varepsilon$ , приравняем коэффициенты полученного ряда нулю, получим уравнения для  $b_k$ . Решив уравнения, получим асимптотическую формулу для  $\beta$ :

$$\beta = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \left( 1 + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{5\varepsilon^2}{36} \right) + O(\varepsilon^3). \quad (44.9)$$

Неравенства (44.3) для  $\beta$  выполняются, так как

$$\begin{aligned} \beta - \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + O(\varepsilon) &> 0, \\ \beta - \sqrt[3]{\frac{3 \cos \varepsilon}{(1 - \sin \varepsilon)^2 (2 + \sin \varepsilon)}} &= -\frac{\varepsilon}{6} \sqrt[3]{\frac{3}{2}} + O(\varepsilon^2) < 0. \end{aligned}$$

#### 44.4. Зависимость $\varepsilon$ от $v$

Подставим выражения (44.6), (44.9) для  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $\beta$  в формулу (44.3) для  $v$ . Получим следующие равенства:

$$\begin{aligned} v &= \frac{3}{\beta^3} \left\{ 1 - \frac{[1 + x_3(1, \varepsilon)]^2 \varepsilon^2}{2} + \frac{[1 + x_3(1, \varepsilon)]^4 \varepsilon^4}{24} \right\} \\ &\quad - \frac{3}{2\beta} \left[ x_2(1, \varepsilon) + \frac{2}{\beta^2} \left( 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{5\varepsilon^4}{24} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\beta}{3} \left( 2 - 3\varepsilon + 2\varepsilon^2 - \frac{3\varepsilon^3}{2} + \frac{4\varepsilon^4}{3} \right) \right] + O(\varepsilon^5), \\ x_2(1, \varepsilon) &= -\beta\varepsilon + \frac{(9 - 6\beta^3 + 4\beta^6)\beta\varepsilon^3}{54} + \frac{(3 - 5\beta^3)\beta^4\varepsilon^4}{36} + O(\varepsilon^5), \\ 1 + x_3(1, \varepsilon) &= -\frac{3 - 2\beta^3}{3} - \frac{\beta^3\varepsilon}{2} + O(\varepsilon^2), \\ v &= 1 - \frac{(3 - 2\beta^3)(3 - \beta^3)\varepsilon^2}{3\beta^3} + \frac{(-45 + 21\beta^3 - 2\beta^6)\varepsilon^3}{18} - \\ &\quad - \frac{3\varepsilon^4}{64\beta^3} [1 + (3 - 2\beta^3) f(\beta)] + O(\varepsilon^5), \\ v &= 1 - \frac{\varepsilon^4}{32} + O(\varepsilon^5). \end{aligned}$$

Здесь  $f(\beta)$  — многочлен от  $\beta^3$  с постоянными коэффициентами. Решив уравнение относительно  $\varepsilon$ , получим асимптотическую формулу

$$\varepsilon = \sqrt[4]{32(1-v)} + O(\sqrt{1-v}). \quad (44.10)$$

### 44.5. Неравенство (44.4)

Обозначим

$$F(\xi, \varepsilon) = x_1(\xi, \varepsilon) + \beta \cos \varepsilon - \beta \cos(\varepsilon - \varepsilon\xi). \quad (44.11)$$

а) Рассмотрим функцию  $F(\xi, \varepsilon)$  в окрестности точки  $\xi = 0$ . Из (44.2), (44.6), (44.9), (44.11) следуют равенства

$$\begin{aligned} F(\xi, \varepsilon) &= F(0, \varepsilon) + \frac{dF}{d\xi}(0, \varepsilon)\xi + \frac{d^2F}{d\xi^2}(0, \varepsilon)\frac{\xi^2}{2} + \dots = \\ &= x_1(0, \varepsilon) + \frac{dx_1}{d\xi}(0, \varepsilon)\xi - (\beta\varepsilon \sin \varepsilon)\xi + \\ &\quad + \left[ \beta\varepsilon^2 \cos(\varepsilon + \varepsilon x_3) \frac{dx_3}{d\xi} \right](0, \varepsilon) \frac{\xi^2}{2} + (\beta\varepsilon^2 \cos \varepsilon) \frac{\xi^2}{2} + \dots, \\ F(\xi, \varepsilon) &= -\frac{\xi^2 \varepsilon^3}{4} \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \left[ 1 + O(\xi) + O(\varepsilon) \right]. \end{aligned}$$

Из полученной для  $F$  формулы следует: существуют значения  $\xi_1, \varepsilon_1$ , не зависящие от  $\xi, \varepsilon$  и такие, что  $0 < \xi_1 < 1, \varepsilon_1 > 0$  и при  $0 < \xi < \xi_1, 0 < \varepsilon < \varepsilon_1$  функция  $F(\xi, \varepsilon) < 0$ . Поэтому неравенство (44.4) выполняется при всех значениях  $\xi, \varepsilon$  из множества  $0 < \xi < \xi_1, 0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ .

б) Рассмотрим функцию  $F(\xi, \varepsilon)$  в окрестности точки  $\xi = 1$ . Из (44.2), (44.6), (44.9), (44.11) следуют равенства

$$\begin{aligned} F(\xi, \varepsilon) &= F(1, \varepsilon) + \frac{dF}{d\xi}(1, \varepsilon)(\xi - 1) + \frac{d^2F}{d\xi^2}(1, \varepsilon)\frac{(\xi - 1)^2}{2} + \dots = \\ &= x_1(1, \varepsilon) + \beta \cos \varepsilon - \beta + \frac{dx_1}{d\xi}(1, \varepsilon)(\xi - 1) + \\ &\quad + \left[ \beta\varepsilon^2 \cos(\varepsilon + \varepsilon x_3) \frac{dx_3}{d\xi} \right](1, \varepsilon) \frac{(\xi - 1)^2}{2} + \frac{\beta\varepsilon^2(\xi - 1)^2}{2} + \dots, \\ F(\xi, \varepsilon) &= \frac{(\xi - 1)\varepsilon^3}{4} \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \left[ 1 + O(\xi - 1) + O(\varepsilon) \right]. \end{aligned}$$

Из полученной для  $F$  формулы следует: существуют значения  $\xi_2, \varepsilon_2$ , не зависящие от  $\xi, \varepsilon$  и такие, что  $\xi_1 < \xi_2 < 1, 0 < \varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$  и при  $\xi_2 < \xi < 1, 0 < \varepsilon < \varepsilon_2$  функция  $F(\xi, \varepsilon) < 0$ . Поэтому неравенство

(44.4) выполняется при всех значениях  $\xi$ ,  $\varepsilon$  из множества  $\xi_2 < \xi < 1$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$ .

в) Рассмотрим разложение функции  $F(\xi, \varepsilon)$  по  $\varepsilon$ . Из (44.6), (44.9), (44.11) следует формула

$$F(\xi, \varepsilon) = \varepsilon^3 \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \left[ \frac{\xi^2(\xi - 1)}{4} + O(\varepsilon) \right].$$

Из формулы следует: существует значение  $\varepsilon_3$ , не зависящее от  $\xi$ ,  $\varepsilon$  и такое, что  $0 < \varepsilon_3 \leq \varepsilon_2$  и при  $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_3$  функция  $F(\xi, \varepsilon) < 0$ . Поэтому неравенство (44.4) выполняется при всех значениях  $\xi$ ,  $\varepsilon$  из множества  $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_3$ .

Получили, что неравенство (44.4) выполняется на всем интервале  $0 < \xi < 1$  при достаточно малых значениях  $\varepsilon > 0$ .

## 44.6. Формулы для исходных переменных и параметров

Из (43.17), (44.1) получим следующие формулы, выражающие исходные переменные и параметры через переменные  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $\xi$  и параметры  $\beta$ ,  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} r &= \frac{x_1}{\beta} + \cos \varepsilon, & z &= \frac{x_2 - x_2(1, \varepsilon)}{\beta}, & \theta &= \frac{\pi}{2} + \varepsilon(1 + x_3), \\ l &= \varepsilon(1 - \xi), & l_1 &= \varepsilon, & t &= \frac{1}{\beta^3}, & d_1 &= -\frac{x_2(1, \varepsilon)}{\beta} - \sin \varepsilon, \\ d &= -\frac{x_2(1, \varepsilon)}{\beta} - \frac{2}{\beta^3 \cos \varepsilon} + \frac{(1 - \sin \varepsilon)^2(2 + \sin \varepsilon)}{3 \cos^2 \varepsilon}. \end{aligned}$$

Подставляя выражения (44.6), (44.9), (44.10) в эти формулы, заменяя  $\xi$  на  $l$  ( $\xi - 1 = l/\varepsilon$ ), получим асимптотические формулы для одноосной области оболочки и для параметров задачи равновесия:

$$\begin{aligned} r &= 1 - \frac{l^2}{2} - \frac{l(l - \varepsilon)^2}{4} + O(\varepsilon^4), & z &= l \left( 1 - \frac{l^2}{6} \right) + O(\varepsilon^4), & (44.12) \\ 0 \leq l \leq \varepsilon, & l_1 &= \varepsilon, & t &= \frac{2(1 - \varepsilon)}{3} + O(\varepsilon^2), \\ d_1 &= \frac{\varepsilon^4}{48} + O(\varepsilon^5), & d &= -\frac{2(1 - 2\varepsilon)}{3} + O(\varepsilon^2), \\ \varepsilon &= \sqrt[4]{32(1 - v)} + O\left(\sqrt{1 - v}\right), & v &\rightarrow 1. \end{aligned}$$

Двухосная область оболочки описывается формулами (41.11). Усилия оболочки описываются формулами (41.12), (41.6). Усилие  $t_1$  является непрерывной функцией на оболочке. Усилие  $t_2$  при  $l = \varepsilon$  терпит



разрыв:

$$t_2(\varepsilon - 0) = 0, \quad t_2(\varepsilon + 0) = \frac{\varepsilon}{3} + O(\varepsilon^2) > 0. \quad (44.13)$$

### 44.7. Предельные значения

Устремим в формулах (44.12)  $v \rightarrow 1$ . Получим предельные значения параметров:

$$l_1 \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \frac{2}{3}, \quad d_1 \rightarrow 0, \quad d \rightarrow -\frac{2}{3}, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad v \rightarrow 1.$$

Неравенство (42.2) для  $d$  выполняется, так как

$$\kappa - 1, \quad \kappa d + \frac{2}{3} = 0.$$

### 44.8. Результаты

При значениях  $v$ , близких к экстремальным, поверхность оболочки описывается формулами

$$r = 1 - \frac{t^2}{2} - \frac{t(t - \varepsilon)^2}{4} + O(\varepsilon^4), \quad z = \kappa l \left(1 - \frac{t^2}{6}\right) + O(\varepsilon^4), \quad (44.14)$$

$$0 \leq t \leq \varepsilon;$$

$$r = \cos t, \quad z = \kappa \sin t + d_1, \quad \varepsilon \leq t \leq \frac{\pi}{2};$$

$$d_1 = \frac{\kappa \varepsilon^4}{48} + O(\varepsilon^5), \quad \varepsilon = \sqrt{32(1 - \kappa v)} + O(\sqrt{1 - \kappa v}), \quad \kappa = \pm 1, \\ \kappa v \rightarrow 1 - 0.$$

Усилия оболочки вычисляются по формулам (41.12), (41.6):

$$t_1 = \frac{t}{r}, \quad t_2 = 0, \quad u = 0, \quad 0 \leq t \leq \varepsilon; \quad (44.15)$$

$$t_1 = \frac{1}{3(1 + \sin t)} + \frac{\sin t}{3} + \frac{\kappa(d_1 - d)}{2},$$

$$t_2 = -\frac{1}{3(1 + \sin t)} + \frac{2 \sin t}{3} + \frac{\kappa(d_1 - d)}{2}, \quad u = 0, \quad \varepsilon \leq t \leq \frac{\pi}{2};$$

$$t = \frac{2(1 - \varepsilon)}{3} + O(\varepsilon^2), \quad d = -\frac{2\kappa(1 - 2\varepsilon)}{3} + O(\varepsilon^2).$$

Усилие  $t_1$  является непрерывной функцией на оболочке. Усилие  $t_2$  терпит разрыв на границе  $t = \varepsilon$  между двухосной и одноосной областью (смотрите формулы (44.13)).

При экстремальных значениях  $v$  поверхность оболочки является двухосной областью (полусферой (42.1)), усиления оболочки описываются формулами (42.1), где

$$d = -\frac{2\kappa}{3}. \quad (44.16)$$

В формулах (44.14)—(44.16) учтено свойство симметрии задачи равновесия оболочки (смотрите следствие 41.1).

## §45. Формы равновесия с одной двухосной и одной одноосной областями

### 45.1. О численном решении задачи равновесия

В случае, когда поверхность оболочки имеет одну двухосную и одну одноосную области, задача равновесия решалась численно. Для этого задавались значения параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  из множества (43.13), (43.15) и численно интегрировалась задача Коши (43.5), (43.7). На конце интервала интегрирования (43.8) проверялось равенство (43.9). Если равенство не выполнялось, то менялось значение  $\beta$  так, чтобы этому равенству удовлетворить. При интегрировании дифференциальных уравнений проверялось неравенство (43.10). После интегрирования вычислялись исходные переменные и параметры по формулам (43.12), (43.17).

Для каждого значения  $\alpha$  из интервала (43.13) было найдено единственное значение  $\beta$  из интервала (43.15). Таким образом, значение  $\alpha$  определяет единственную форму равновесия оболочки.

### 45.2. Зависимость $v$ от $\alpha$

На рис. 45.1 дан график зависимости  $v$  от  $\alpha$ . На графике учтено свойство симметрии задачи равновесия (смотрите следствие 41.1). Для наглядности значение  $\alpha$  принято отрицательным при  $\kappa = -1$  (параметр  $\kappa$  входит в формулу (41.2) для двухосной области). Из графика видно, что при  $v \rightarrow 0$  число форм равновесия растет. При  $v = 0$  число форм равновесия, по-видимому, счетно.

На рис. 45.1 дуги около оси  $\alpha$  соответствуют формам равновесия, на которых неравенство (43.10) не выполняется. На дугу около точки  $\alpha \approx 0.225$  указывают стрелки. Неравенство (43.10) нарушается в области около контура крепления оболочки. Полусферическая оболочка не может принимать вид поверхности  $S$ , на которой неравенство (43.10) не выполняется (смотрите замечание 45.1).

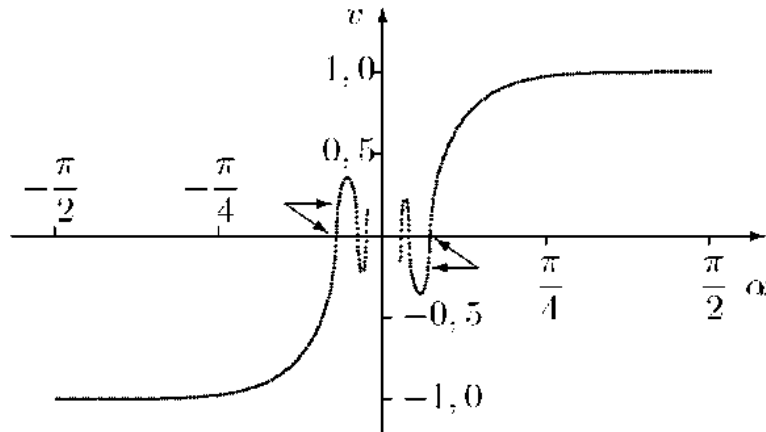


Рис. 45.1. Зависимость  $v$  от  $\alpha$

### 45.3. Формы равновесия

На рисунке 45.2 представлены формы равновесия оболочки в случае, когда жидкость находится над оболочкой. Значения параметров представленных форм даны в таблице 45.1. Эти значения получены по формулам (43.12), (43.17), (44.16), (45.3).

Приведем используемые обозначения:  $v$  — безразмерный объем области, ограниченной оболочкой и плоскостью контура крепления;  $\kappa$  — параметр в формуле (41.2) для двухосной области ( $\kappa = 1$ , если сферический сегмент обращен выпуклостью вверх;  $\kappa = -1$ , если сферический сегмент обращен выпуклостью вниз);  $|\alpha|$  равен безразмерной длине меридиана в двухосной области,  $\operatorname{sgn} \alpha = \kappa$ ;  $l_1$  — безразмерная длина меридиана в одноосной области ( $|\alpha| + l_1 = \pi/2$ );  $t$  — постоянная в формуле (43.18) для усилия в одноосной области;  $d$  — постоянная в формуле (45.4) для гидростатического давления;  $d_1$  — постоянная, определяющая сдвиг сферического сегмента по вертикали в формуле (41.2);  $\Pi$  — потенциальная энергия жидкости (45.3).

$l_0^*$  — параметр, определяющий длину дуги  $0 \leq l \leq l_0^*$  одноосной области, на которой неравенство (43.10) нарушается. Помера форм равновесия, на которых имеет место такое нарушение, помечены звездочками:  $5^*$ — $7^*$ ,  $9^*$ — $11^*$ . Полусферическая оболочка не может при равновесии иметь вид поверхностей  $5^*$ — $7^*$ ,  $9^*$ — $11^*$ . Однако формы равновесия  $5$ — $7$ ,  $9$ — $11$ , полученные в §17, настолько близки к поверхностям  $5^*$ — $7^*$ ,  $9^*$ — $11^*$ , что вместо двух близких кривых на рис. 45.2 дана одна кривая и указано два помера.

На рис. 45.2 формы 1, 15 являются двухосными поверхностями (полусферами). Формы 2—4,  $5^*$ — $7^*$ ,  $9^*$ — $11^*$ , 12—14 имеют одну двух-

осную и одну одноосную области. Двухосная область является сферическим сегментом (41.2). Одноосная область получена численным интегрированием, как описано в п. 45.1. Форма 8 состоит из нулевых и одноосных областей с нулевыми усилиями и представляет собой горизонтальный круг (смотрите результат 39.2).

Формы 2—4 ограничивают одинаковый объем  $v$ , как и формы 12—14. Число форм с  $v = 0$ , по-видимому, счетно (и для  $\kappa = 1$ , и для  $\kappa = -1$ ).

На рис. 45.2 это предположение условно обозначено многоточиями.

#### 45.4. Усилия оболочки

На рис. 45.3 даны графики усилий  $t_1$ ,  $t_2$  для форм равновесия, представленных на рис. 45.2. Для наглядности усилия даны как функции от  $r$ . Графики получены по формулам (41.12), (43.18). Усилие  $t_2$  терпит разрыв на границе между двухосной и одноосной областями.

#### 45.5. О устойчивости форм равновесия

Если для данного объема жидкости имеется несколько форм равновесия, то, по-видимому, не все из них устойчивы. Наиболее вероятным кажется устойчивость тех форм равновесия, которым соответствует наименьшая потенциальная энергия жидкости. Формула для потенциальной энергии  $\Pi$  жидкости с точностью до постоянной имеет вид

$$\Pi = -\pi\rho g \int_0^C RZ^2 dR. \quad (45.1)$$

Здесь используются обозначения § 36, § 37:  $\rho$  — плотность жидкости,  $g$  — ускорение свободного падения,  $R$ ,  $Z$  — размерные цилиндрические координаты точки поверхности оболочки. Введем безразмерную потенциальную энергию  $\pi$  жидкости по формуле

$$\pi = \frac{4\Pi}{\pi\rho g C^4}, \quad (45.2)$$

где  $C$  — радиус полусферической оболочки  $S^2$  ( $-\pi\rho g C^4/4$  — потенциальная энергия жидкости для полусферы). Из (45.1), (45.2) следует, что

$$\pi = -4 \int_0^1 rz^2 dr. \quad (45.3)$$

Таблица 45.1. Значения параметров форм равновесия на рис. 45.2

	$v$	$\kappa$	$\alpha$	$l_1$	$\cos l_1$	$t$	$d$	$d_1$	$\pi$	$l_0^*$
1	1,0	1	1,571	0,000	1,000	—	-0,667	0,000	-1,000	—
2	0,3	1	0,250	1,321	0,248	0,060	0,303	-0,198	-0,308	—
3	0,3	-1	-0,202	1,369	0,200	0,034	0,138	0,791	-0,163	—
4	0,3	-1	-0,148	1,423	0,147	0,022	0,213	0,907	-0,155	—
5*	0,0	1	0,225	1,346	0,223	0,046	0,093	-0,478	-0,147	0,025
6*	0,0	1	0,123	1,448	0,122	0,016	-0,032	-0,768	-0,051	0,030
7*	0,0	1	0,083	1,488	0,083	0,008	0,016	-0,788	-0,026	0,026
8	0,0	—	—	—	—	—	0,000	—	0,000	—
9*	0,0	-1	-0,083	1,488	0,083	0,008	-0,016	0,788	-0,026	0,026
10*	0,0	-1	-0,123	1,448	0,122	0,016	0,032	0,768	-0,051	0,030
11*	0,0	-1	-0,225	1,346	0,223	0,046	-0,093	0,478	-0,147	0,025
12	-0,3	1	0,148	1,423	0,147	0,022	-0,213	-0,907	-0,155	—
13	-0,3	1	0,202	1,369	0,200	0,034	-0,138	-0,791	-0,163	—
14	-0,3	-1	-0,250	1,321	0,248	0,060	-0,303	0,198	-0,308	—
15	-1,0	-1	-1,571	0,000	1,000	—	0,667	0,000	-1,000	—

Здесь  $r, z$  — безразмерные цилиндрические координаты точки поверхности оболочки.

Численные значения потенциальной энергии для форм, представленных на рис. 45.2, даны в таблице 45.1. Из таблицы следует, что минимальной потенциальной энергией обладают формы с большим значением  $|\alpha|$ . По-видимому, эти формы обладают большей устойчивостью.

## 45.6. О каверне

Давление в жидкости линейно по вертикальной координате  $Z$ . Из (9.1), (9.3), (38.1) следуют формулы

$$P_{ж-} = \rho g Z + P_1 = -\rho g(Z - D) + P_0 = \rho g C(-z + d) + P_0, \quad (45.4)$$

где  $P_0$  — давление газа в полости с газом.

В книге задача равновесия оболочки решается в предположении, что вся оболочка находится под гидростатическим давлением, около оболочки нет каверны. Поэтому должны выполняться неравенства, гарантирующее отсутствие каверны:  $P_{ж} \geq P_*$ ,

$$\rho g C(-z_{\max} + d) + P_0 \geq P_*. \quad (45.5)$$

Здесь  $P_*$  — давление насыщенных паров жидкости,  $z_{\max}$  — максимальное значение координаты  $z$  на поверхности оболочки.

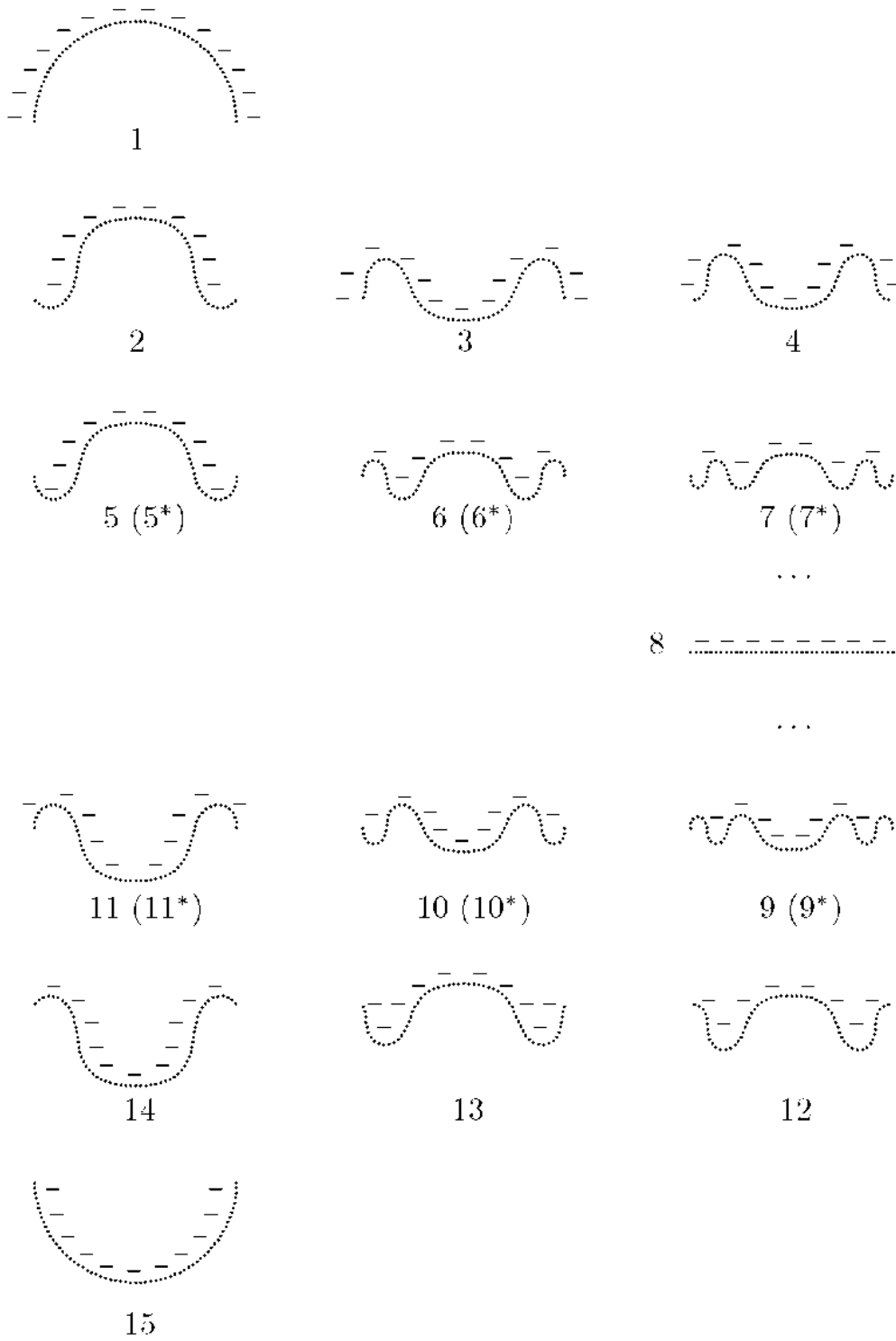


Рис. 45.2. Формы равновесия

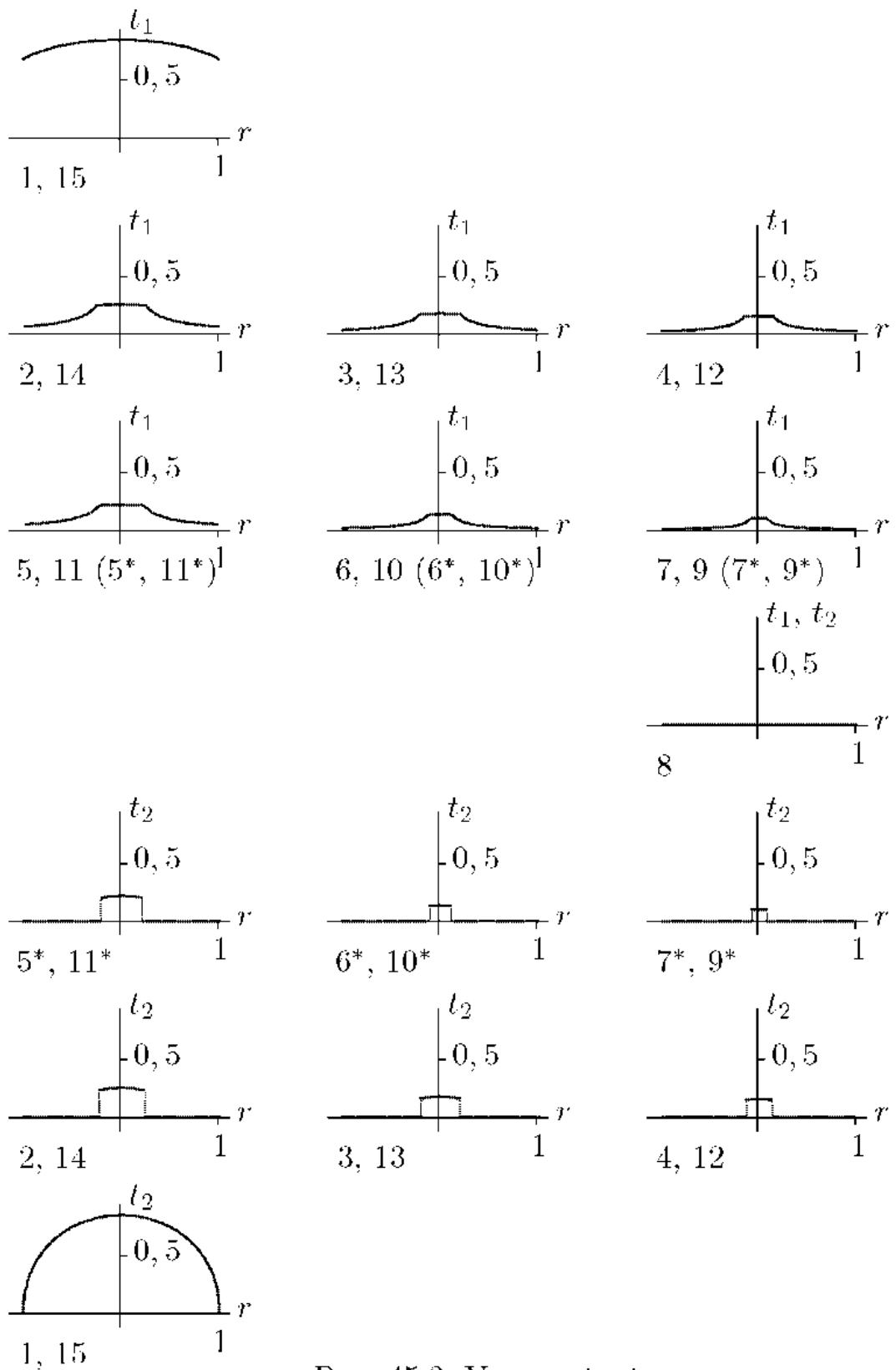


Рис. 45.3. Усилия  $t_1, t_2$

Неравенство (45.5) выполняется, если давление газа в полости с газом достаточно велико.

*Замечание 45.1.* Полусферическая оболочка не может принимать при равновесии форму поверхностей  $5^*$ – $7^*$ ,  $9^*$ – $11^*$  рис. 45.2, так как на этих поверхностях не выполняется неравенство (43.10). Поверхность оболочки при равновесии не определяет однозначно поверхность  $S^*$  оболочки до деформации. Существует бесчисленное множество оболочек  $S^*$ , которые при равновесии имеют вид поверхностей  $5^*$ – $7^*$ ,  $9^*$ – $11^*$ .

## §46. Уравнения для форм равновесия с двумя двухосными и одной одноосной областями

Рассмотрим равновесие мягкой оболочки в случае, когда жидкость находится над оболочкой и поверхность  $S$  содержит две двухосные и одну одноосную область. Из результата 41.2 следует, что первая двухосная область расположена на отрезке  $l_1 \leq l \leq \pi/2$  и в этой области справедливы равенства (41.11), (41.12). Одноосная область расположена на отрезке  $0 < l_0 \leq l \leq l_1 < \pi/2$ , и в этой области справедливы равенства (41.13). Для почти всех значений  $l$  в одноосной области выполняется неравенство (41.7).

### 46.1. Вторая двухосная область

Рассмотрим вторую двухосную область. Эта область является сферическим поясом и расположена между одноосной областью и контуром крепления. Для второй двухосной области справедливы уравнения, следующие из (41.3), (41.9):

$$r = \cos l, \quad z = \kappa_2 \sin l, \quad \kappa_2 = \pm 1, \quad 0 \leq l \leq l_0. \quad (46.1)$$

Найдем усилия во второй двухосной области. Интегрируя уравнения (41.3) для усилий (так же, как в (39.5)), получим

$$t_1 = -\frac{1}{6 \cos^2 l} [2 \sin^3 l - 3 \kappa_2 d \sin^2 l + d_2] \geq 0, \quad (46.2)$$

$$t_2 = \sin l - \kappa_2 d - t_1 \geq 0, \quad u = \frac{d_3}{\cos^2 l}.$$

Здесь  $d_2, d_3$  — неизвестные постоянные. Из равенств (41.8) на границе



$l - l_0$  получим уравнения для этих постоянных:

$$-\frac{1}{6 \cos^2 l_0} [2 \sin^3 l_0 - 3\kappa_2 d \sin^2 l_0 + d_2] = \frac{t}{\cos l_0}, \quad \frac{d_3}{\cos^2 l_0} = 0.$$

Здесь  $t > 0$  — постоянная, определяющая усилие  $t_1 = t/r$  в одноосной области. Вычисляя  $d_2, d_3$  и подставляя эти значения в (46.2), получим формулы для усилий во второй двухосной области:

$$t_1 = \frac{t \cos l_0}{\cos^2 l} - \frac{2(\sin^3 l - \sin^3 l_0) - 3\kappa_2 d(\sin^2 l - \sin^2 l_0)}{6 \cos^2 l} \geq 0, \quad (46.3)$$

$$t_2 = \sin l - \kappa_2 d - t_1 \geq 0, \quad u = 0.$$

## 46.2. Уравнения

Из равенств (41.8) для функций  $r, z$  получим следующие формулы:

$$r(l_0) = \cos l_0, \quad z(l_0) = \kappa_2 \sin l_0, \quad (46.4)$$

$$r_l(l_0) = -\sin l_0, \quad z_l(l_0) = \kappa_2 \cos l_0.$$

Отсюда и из (41.13) следуют равенства для переменной  $\theta$ :

$$\cos \theta(l_0) = -\sin l_0, \quad \sin \theta(l_0) = \kappa_2 \cos l_0, \quad (46.5)$$

$$\theta(l_0) = \kappa_2 \left( \frac{\pi}{2} + l_0 \right) \pmod{2\pi}.$$

Из (41.9), (41.11), (41.13), (46.1), (46.5) получим формулу для  $v$ :

$$v = -3 \int_0^{\pi/2} r r_l z dl = \quad (46.6)$$

$$- 3\kappa_2 \int_0^{l_0} \cos l \sin^2 l dl - 3 \int_{l_0}^{l_1} r r_l (z - d) dl - 3 \int_{l_0}^{l_1} r r_l d dl +$$

$$+ 3 \int_{l_1}^{\pi/2} \cos l \sin l (\sin l + d_1) dl =$$

$$= \kappa_2 \sin^3 l_0 - 3t \int_{l_0}^{l_1} r_l \theta_l dl - \frac{3dr^2}{2} \Big|_{\cos l_0}^{\cos l_1} + \left( \sin^3 l + \frac{3d_1 \sin^2 l}{2} \right) \Big|_{l_1}^{\pi/2} =$$

$$- \kappa_2 \sin^3 l_0 - 3t \int_{\theta(l_0)}^{\theta(l_1)} \cos \theta d\theta - \frac{3d(\cos^2 l_1 - \cos^2 l_0)}{2} +$$

$$\begin{aligned}
& +1 - \sin^3 l_1 + \frac{3d_1 \cos^2 l_1}{2} - \\
& = \kappa_2 \sin^3 l_0 - 3t [\cos l_1 - \kappa_2 \cos l_0] - \frac{3d(\cos^2 l_1 - \cos^2 l_0)}{2} + \\
& +1 - \sin^3 l_1 + \frac{3d_1 \cos^2 l_1}{2}.
\end{aligned}$$

Получили, что задача равновесия сводится к интегрированию дифференциальных уравнений (41.13) на отрезке  $l_0 \leq l \leq l_1$  и определенно постоянных  $\kappa_2, l_0, l_1, t, d, d_1$  из уравнений (41.13), (46.4)–(46.6). Значение объема  $v$  известно,  $-1 < v < 1$ . Функция  $r(l)$  для почти всех значений  $l, l_0 \leq l \leq l_1$ , удовлетворяет неравенству (41.7).

### 46.3. Переход к новым переменным и параметрам

Введем в одноосной области новые переменные  $\sigma, w_1, w_2, w_3$  и параметры  $\alpha, \beta$  по формулам (43.4). Переменные  $w_1 - w_3$  удовлетворяют дифференциальным уравнениям (43.5) и начальным значениям (43.7). Для почти всех значений  $\sigma$  в одноосной области выполняется неравенство (43.10). Параметры  $\alpha, \beta$  лежат в интервалах (43.13), (43.15).

#### Интервал $\sigma$

Длину  $\sigma_1$  интервала изменения переменной  $\sigma$  найдем из (43.4), принимая во внимание, что  $\sigma = \sigma_1$  при  $l = l_0$ :  $\sigma_1 = (l_1 - l_0)/\sqrt[3]{t} - (\pi/2 - \alpha - l_0)\beta > 0$ . Отсюда следует, что система (43.5) интегрируется на отрезке

$$0 \leq \sigma \leq \sigma_1 = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha - l_0\right)\beta > 0. \quad (46.7)$$

#### Краевые условия

Из (43.4), (46.4), (46.5) следуют равенства

$$\begin{aligned}
w_1(\sigma_1) &= \frac{r(l_0)}{\sqrt[3]{t}} - \beta \cos l_0, \\
w_3(\sigma_1) &= \theta(l_0) - \frac{\pi}{2} - \frac{(\kappa_2 - 1)\pi}{2} + \kappa_2 l_0 + 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \dots
\end{aligned}$$

Получили краевые условия для новых переменных, связывающие параметры  $\alpha, \beta, l_0$ :

$$w_1(\sigma_1) = \beta \cos l_0, \quad w_3(\sigma_1) = \frac{(\kappa_2 - 1)\pi}{2} + \kappa_2 l_0 + 2\pi n, \quad (46.8)$$

$$n = 0, \pm 1, \dots$$

**Формулы для  $d, v$**

Из (43.4), (46.4) получим формулу для постоянной  $d$ :

$$w_2(\sigma_1) = \frac{z(l_0) - d}{\sqrt[3]{t}} = \beta(\kappa_2 \sin l_0 - d), \quad d = \kappa_2 \sin l_0 - \frac{w_2(\sigma_1)}{\beta}. \quad (46.9)$$

Из (43.4), (43.6), (46.6), (46.9) получим формулу для  $v$ :

$$\begin{aligned} v &= \kappa_2 \sin^3 l_0 - \frac{3}{\beta^3} [\sin \alpha - \kappa_2 \cos l_0] + \quad (46.10) \\ &+ \frac{3 \cos^2 l_0}{2} \left[ \kappa_2 \sin l_0 - \frac{w_2(\sigma_1)}{\beta} \right] + 1 - \cos^3 \alpha + \\ &+ 3 \sin^2 \alpha \left[ \frac{1}{\beta^3 \sin \alpha} - \frac{1}{3(1 + \cos \alpha)} - \frac{\cos \alpha}{3} \right] = \\ &= \frac{\kappa_2 \sin l_0 (3 - \sin^2 l_0)}{2} + \frac{3 \kappa_2 \cos l_0}{\beta^3} - \frac{3 \cos^2 l_0 w_2(\sigma_1)}{2\beta}. \end{aligned}$$

#### 46.4. Сводные уравнения для новых переменных и параметров

Получим уравнения, рассмотренные в п. 46.3, в виде одной системы:

$$\frac{dw_1}{d\sigma} = \sin w_3, \quad \frac{dw_2}{d\sigma} = -\cos w_3, \quad \frac{dw_3}{d\sigma} = -w_1 w_2, \quad (46.11)$$

$$w_1(0) = \beta \sin \alpha,$$

$$w_2(0) = \frac{2}{\beta^2 \sin \alpha} - \frac{\beta(1 - \cos \alpha)^2 (2 + \cos \alpha)}{3 \sin^2 \alpha},$$

$$w_3(0) = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad 0 \leq \sigma \leq \sigma_1 = \left( \frac{\pi}{2} - \alpha - l_0 \right) \beta,$$

$$w_1(\sigma_1) = \beta \cos l_0, \quad w_3(\sigma_1) = \frac{(\kappa_2 - 1)\pi}{2} + \kappa_2 l_0 + 2\pi n,$$

$$v = \frac{\kappa_2 \sin l_0 (3 - \sin^2 l_0)}{2} + \frac{3 \kappa_2 \cos l_0}{\beta^3} - \frac{3 \cos^2 l_0 w_2(\sigma_1)}{2\beta},$$

$$\kappa_2 = \pm 1, \quad \alpha > 0, \quad l_0 > 0, \quad \alpha + l_0 < \frac{\pi}{2},$$

$$0 < \beta \leq \sqrt[3]{\frac{3 \sin \alpha}{(1 - \cos \alpha)^2 (2 + \cos \alpha)}}; \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

Для почти всех значений  $\sigma$  из отрезка  $0 \leq \sigma \leq \sigma_1$  выполняется неравенство

$$w_1(\sigma) < \beta \sin\left(\alpha + \frac{\sigma}{\beta}\right). \quad (46.12)$$

Неизвестными являются функции  $w_1$ — $w_3$  и постоянные  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $l_0$ ,  $\kappa_2$ ,  $n$ . Значение  $v$  известно ( $-1 < v < 1$ ).

## 46.5. Формулы для исходных переменных и параметров

Первая двухосная область и усилия в ней описываются формулами (41.11), (41.12). Вторая двухосная область и усилия в ней описываются формулами (46.1), (46.3). Напишем формулы, выражающие исходные переменные в одноосной области и параметры задачи через новые переменные и параметры, используя (43.4), (43.6), (46.9):

$$r = \frac{w_1}{\beta}, \quad z = \kappa_2 \sin l_0 + \frac{w_2 - w_2(\sigma_1)}{\beta}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} + w_3, \quad (46.13)$$

$$l = \frac{\pi}{2} - \alpha - \frac{\sigma}{\beta}, \quad l_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad t = \frac{1}{\beta^3},$$

$$d = \kappa_2 \sin l_0 - \frac{w_2(\sigma_1)}{\beta},$$

$$d_1 = \kappa_2 \sin l_0 - \frac{w_2(\sigma_1)}{\beta} + \frac{2}{\beta^3 \sin \alpha} - \frac{2(1 - \cos^3 \alpha)}{3 \sin^2 \alpha},$$

$$v = \frac{\kappa_2 \sin l_0 (3 - \sin^2 l_0)}{2} + \frac{3\kappa_2 \cos l_0}{\beta^3} - \frac{3 \cos^2 l_0 w_2(\sigma_1)}{2\beta}.$$

## §47. Формы равновесия с двумя двухосными и одной одноосной областями

### 47.1. О численном решении задачи равновесия

В случае, когда поверхность оболочки имеет две двухосные и одну одноосную области, задача равновесия решалась численно. Для этого задавались значения параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  из интервалов (43.13), (43.15). На отрезке

$$0 \leq \sigma \leq \sigma_1^* \quad \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\beta$$

численно интегрировалась задача Коши (43.5), (43.7).

Отрезок  $[0, \sigma_1] \subseteq [0, \sigma_1^*]$ . Значения  $\sigma_1$ ,  $l_0$ ,  $\kappa_2$ ,  $n$  находились из формулы (46.7) для  $\sigma_1$  и из второго равенства (46.8). На отрезке

Таблица 47.1. Значения параметров форм равновесия на рис. 45.2

	$v$	$\kappa$	$\kappa_2$	$n$	$\alpha$	$l_0$	$l_1$	$l$	$d$	$d_1$	$\pi$
1	1,0	1	—	—	1,571	—	0,000	—	-0,667	0,000	-1,000
2	0,3	1	—	—	0,250	—	1,321	0,060	0,303	-0,198	-0,308
3	0,3	-1	—	—	-0,202	—	1,369	0,034	0,138	0,791	-0,163
4	0,3	-1	—	—	-0,148	—	1,423	0,022	0,213	0,907	-0,155
5	0,0	1	-1	1	0,225	0,013	1,346	0,046	0,093	-0,478	-0,147
6	0,0	1	1	0	0,123	0,016	1,448	0,016	-0,032	-0,768	-0,051
7	0,0	1	-1	1	0,083	0,014	1,488	0,008	0,016	-0,787	-0,026
8	0,0	—	—	—	—	—	—	—	0,000	—	0,000
9	0,0	-1	-1	1	-0,083	0,014	1,488	0,008	-0,016	0,787	-0,026
10	0,0	-1	1	0	-0,123	0,016	1,448	0,016	0,032	0,768	-0,051
11	0,0	-1	-1	1	-0,225	0,013	1,346	0,046	-0,093	0,478	-0,147
12	-0,3	1	—	—	0,148	—	1,423	0,022	-0,213	-0,907	-0,155
13	-0,3	1	—	—	0,202	—	1,369	0,034	-0,138	-0,791	-0,163
14	-0,3	-1	—	—	-0,250	—	1,321	0,060	-0,303	0,198	-0,308
15	-1,0	-1	—	—	-1,571	—	0,000	—	0,667	0,000	-1,000

$0 \leq \sigma \leq \sigma_1$  проверялось неравенство (46.12), в точке  $\sigma = \sigma_1$  проверялось первое равенство (46.8) (отметим, что точка  $\sigma = \sigma_1$  является критической для функции  $f(\sigma) = w_1(\sigma) - \beta \cos l = w_1(\sigma) - \beta \sin(\alpha + \sigma/\beta)$ :  $(df/d\sigma)(\sigma_1) = 0$ ). Если неравенство (46.12) и/или первое равенство (46.8) не выполнялись, то менялось значение  $\beta$  так, чтобы им удовлетворить. После интегрирования задачи Коши (43.5), (43.7) вычислялись исходные переменные и параметры по формулам (46.13).

## 47.2. Формы равновесия

Формы равновесия с двумя двухосными и одной одноосной областями представлены на рис. 45.2 под номерами 5–7, 9–11. Они ограничивают область с объемом  $v = 0$ .

В табл. 47.1 даны значения параметров всех форм равновесия полусферической оболочки, представленных на рис. 45.2. В таблице  $\kappa_2$ ,  $l_0$  — параметры второй двухосной области в формулах (46.1),  $n$  — параметр в красном условии (46.8). Остальные параметры те же, что и в табл. 45.1. Из табл. 45.1, 47.1 видно, что значения параметров, общих для форм 5–7, 9–11 и форм 5\*–7\*, 9\*–11\*, совпадают в первых цифрах.

Формы равновесия 5–7, 9–11 близки к поверхностям 5\*–7\*, 9\*–11\*, полученным в § 45. Поэтому на рис. 45.2 вместо двух близких

кривых дана одна кривая и указано два номера.

### 47.3. Усилия оболочки

Усилие  $t_1$  для форм 5—7, 9—11 близко к усилию  $t_1$  для форм 5\*—7\*, 9\*—11\*, поэтому на рис. 45.3 графики усилия  $t_1$  даны в виде кривых с несколькими номерами.

Усилие  $t_2$  для форм 5—7, 9—11 близко к усилию  $t_2$  для форм 5\*—7\*, 9\*—11\* на всей поверхности, кроме второй двухосной области, которая примыкает к контуру крепления и мала по размерам. Усилие  $t_2$  терпит разрыв на границе между двухосной и одноосной областями. Разрыв  $t_2$  на границе между одноосной и первой двухосной областями виден на рис. 45.3. Значения  $t_2$  на границе между одноосной и второй двухосной областями и на контуре крепления равны следующим:

$$t_2(l_0 + 0) = 0; \tag{47.1}$$

5, 11 :	$t_2(l_0 - 0) = 0,059,$	$t_2(0) = 0,046;$
6, 10 :	$t_2(l_0 - 0) = 0,032,$	$t_2(0) = 0,016;$
7, 9 :	$t_2(l_0 - 0) = 0,022,$	$t_2(0) = 0,008.$

### 47.4. О устойчивости форм равновесия

В табл. 47.1 даны значения потенциальной энергии жидкости, вычисленные по формуле (45.3). Из таблицы следует, что минимальной потенциальной энергией обладают формы с большим значением  $|\alpha|$ . По-видимому, эти формы обладают большей устойчивостью.

### 47.5. О каверне

При равновесии вся оболочка находится под гидростатическим давлением (около оболочки нет каверны), если давление газа в полости с газом достаточно велико и выполняется неравенство (45.5).

## §48. Выводы главы 4

В § 36 дана постановка осесимметричной задачи равновесия полусферической оболочки. В § 37 получены уравнения, описывающие рассматриваемую задачу в размерных переменных. В § 38 сделал переход к безразмерным переменным. В § 39 найдены формы равновесия, имеющие области с нулевыми усилиями (в частности, нульосные области).

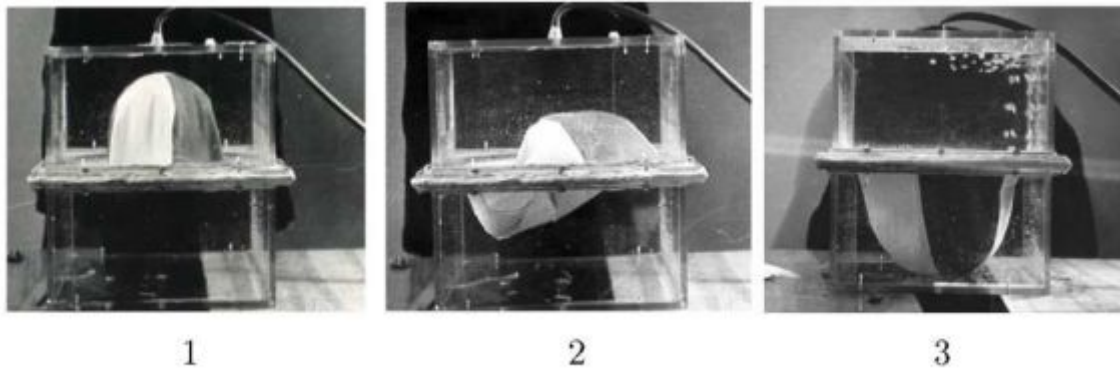


Рис. 48.1

В § 40 рассмотрены формы равновесия для случая, когда жидкость находится под оболочкой. Формы равновесия и усилия оболочки представлены на рис. 40.1, значения параметров даны в табл. 40.1. Усилия являются непрерывными функциями на поверхности оболочки.

Далее в главе 4 рассматривается равновесие оболочки в случае, когда жидкость находится над оболочкой. В § 41 показано, что окрестность оболочки около оси симметрии является двухосной областью. Оболочка состоит из двухосных и одноосных областей. Отмечено, что для каждой формы равновесия, поверхность, симметричная ей относительно горизонтальной плоскости, является тоже формой равновесия. В § 42 рассмотрены двухосные формы равновесия (полусферы).

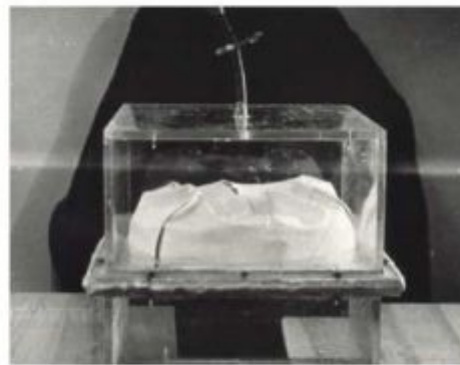


Рис. 48.2

В § 43 получена система уравнений для случая, когда поверхность оболочки имеет одну двухосную и одну одноосную область. В § 44 построено асимптотическое решение задачи равновесия для случая, когда значение объема жидкости близко к экстремальному. В § 45 найдены формы равновесия оболочки с одной двухосной и одной одноосной областями (формы 2—4, 12—14 на рис. 45.2).

В § 46 получена система уравнений для случая, когда поверхность оболочки имеет две двухосные и одну одноосную область. В § 47 най-

дены формы равновесия с двумя двухосными и одной одноосной областями (формы 5—7, 9—11 на рис. 45.2).

Значения параметров форм равновесия, представленных на рис. 45.2, даны в табл. 45.1, 47.1 и в формулах (47.1). Графики усилий оболочки даны на рис. 45.3. Отмечено, что усилие  $t_2$  терпит разрыв на границе между двухосной и одноосной областями. Усилие  $t_1$  непрерывная функция на поверхности оболочки.

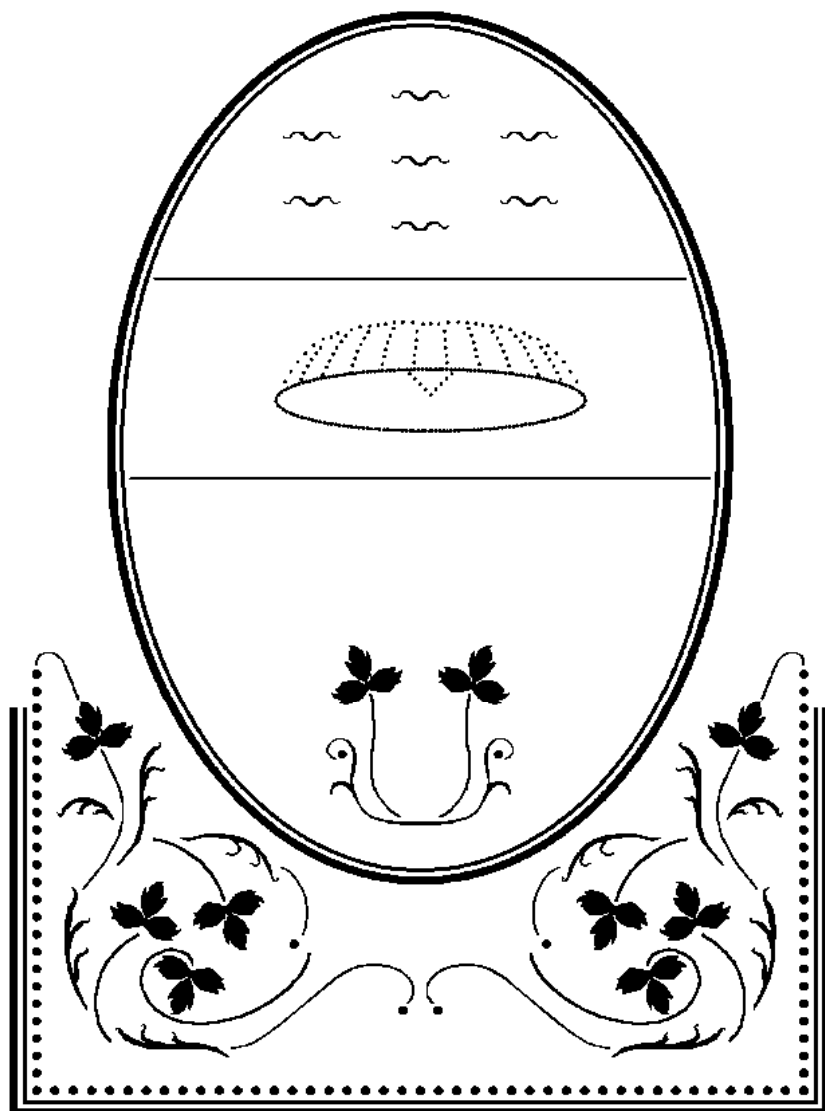
На рис. 48.1 приведены фотографии эксперимента. Диаметр полусферической оболочки равен 34 см, над оболочкой находится вода, под оболочкой — воздух. При увеличении объема жидкости оболочка меняла осесимметричную форму (фиг. 1) на несимметричную (фиг. 2), а затем снова на осесимметричную (фиг. 3). По-видимому, осесимметричные формы равновесия неустойчивы при значениях объема  $V$ , близких к нулю. На осесимметричных формах равновесия видны двухосная область (сферический сегмент) и одноосная область (складчатая зона). Из-за большой жесткости оболочки складок немного.

На рис. 48.2 вода находится под оболочкой, над оболочкой находится воздух. На фотографии видны двухосная область (сферический пояс) и одноосная область (горизонтальный круг). Отклонения от горизонтального круга достаточно велики из-за большой жесткости оболочки.

В главе 4 используются результаты работы [9]. В работе [17] решена осесимметричная задача равновесия под гидростатическим давлением сферической оболочки. В работе [13] решена осесимметричная задача равновесия под гидростатическим давлением пологого сферического сегмента.



## Равновесие сферического сегмента



### §49. Постановка задачи

Рассмотрим мягкую оболочку, которая прикреплена к стенкам сосуда и разделяет его на две полости. Поверхность  $S^\circ$  мягкой оболочки в недеформированном состоянии является сферическим сегментом радиуса  $C$ . Радиус основания сегмента равен  $\tilde{C}$  ( $\tilde{C} \leq C$ ). Оболочка закреплена по своей границе так, что контур крепления лежит в горизонтальной плоскости и является окружностью радиуса  $\tilde{C}$ . Кроме того, оболочка закреплена в одной внутренней точке. Обозначим

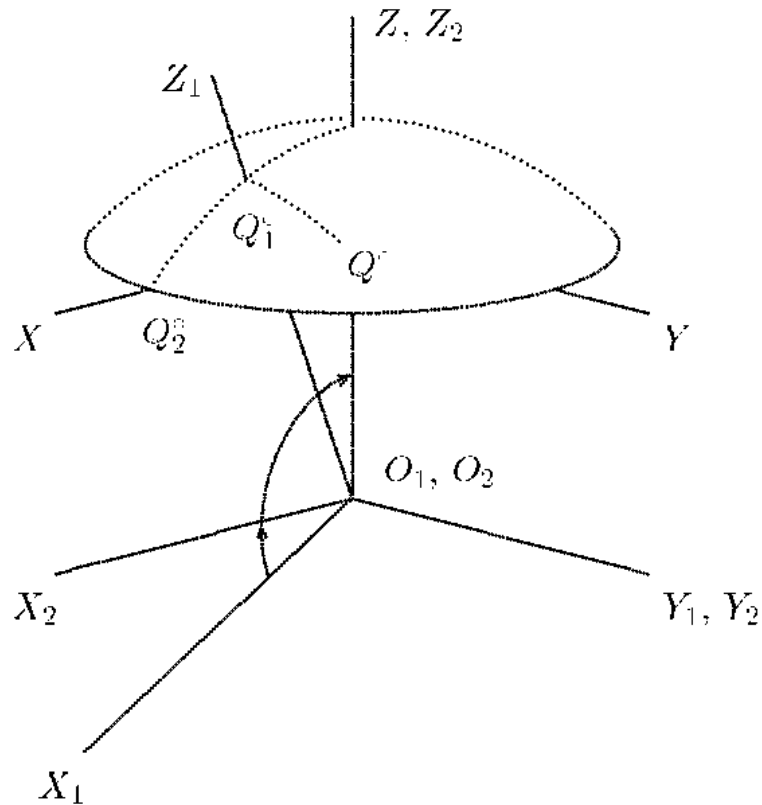


Рис. 49.1. Системы координат

положение точки крепления на поверхностях  $S^*$ ,  $S$  через  $Q_1^*$ ,  $Q_1$  соответственно. Положение точек  $Q_1^*$ ,  $Q_1$  известно. Верхняя полость сосуда заполняется однородной жидкостью известного объема и известной плотности. Нижняя полость заполняется газом. Давление газа известно. Оболочка деформируется в поверхность  $S$ . Система находится в равновесии в поле сил тяжести. Требуется найти форму оболочки (поверхность  $S$ ) и усилия оболочки.

Введем в трехмерном пространстве декартову систему координат  $OXYZ$  так, чтобы контур крепления основания сегмента лежал в плоскости  $XY$ ; точка  $O$  совпадала с центром основания сегмента; точка  $Q_1^*$  лежала в полуплоскости  $X \geq 0$ ,  $Y = 0$ ; ось  $Z$  была направлена в сторону, противоположную направлению сил тяжести (рис. 49.1). Уравнения сферического сегмента  $S^*$  в принятой системе координат имеют вид

$$(X^*)^2 + (Y^*)^2 + (Z^* + C_4)^2 = C^2, \quad Z^* \geq 0.$$

Здесь через  $X^*$ ,  $Y^*$ ,  $Z^*$  обозначены декартовы координаты точки сферического сегмента  $S^*$ , через  $C_4$  обозначена постоянная, задающая

положение центра  $O_1$  сферы, частью которой является сферический сегмент:  $O_1(0, 0, -C_4)$ . Уравнения контура крепления оболочки имеют вид

$$X^2 + Y^2 = \tilde{C}^2, \quad Z = 0.$$

Точки  $Q_1^c, Q_1$  имеют координаты

$$Q_1^c(C \sin \alpha, 0, C \cos \alpha - C_4), \quad Q_1(C_1, C_2, C_3).$$

Здесь  $\alpha$  — угол между радиусами сферы, проведенными в точку  $Q_1^c$  и в вершину сегмента (угол между осями  $Z_1, Z_2$  на рис. 49.1),

$$0 \leq \alpha < \arccos \frac{C_4}{C}.$$

Постоянные  $C, \tilde{C}, C_4$  связаны равенством

$$\tilde{C} = \sqrt{C^2 - C_4^2}.$$

Обозначим через  $V$  объем области, ограниченной поверхностью  $S$  и плоскостью  $XU$ . Объем области, лежащей выше плоскости  $XU$ , считаем положительным; объем области, лежащей ниже плоскости  $XU$ , считаем отрицательным. Значения  $C, C_1-C_4, \alpha, V$  предполагаем известными. Также известными предполагаем плотность жидкости  $\rho$ , ускорение свободного падения  $g$  и давление газа  $P_0$ .

Задачу равновесия будем решать при следующих предположениях:

49.1. Поверхность  $S$  является одноосной областью. Нити одноосной области проходят через точку  $Q_1$  и имеют ненулевое усилие.

49.2. Поверхность  $S$  не имеет участков сгибания и не касается стенок сосуда.

*Замечание 49.1.* Задать объем  $V$  и объем жидкости в сосуде — это равносильные условия, так как сумма этих объемов равна объему области, ограниченной плоскостью  $XU$  и стенками, омываемыми жидкостью.

## §50. Уравнения задачи равновесия

### 50.1. Введение координат

Введем на сферическом сегменте  $S^c$  мягкой оболочки полугеодезическую систему координат  $L, \varphi$ . Примем за координатные линии дуги окружностей больших кругов сферы (частью которой является сферический сегмент), проходящих через точку  $Q_1^c$ . Тогда положение любой точки  $Q^c$  на сферическом сегменте определяется однозначно

большим полукругом, проходящим через точки  $Q_1^{\circ}$  и  $Q^{\circ}$ , и длиной дуги  $\overset{\sim}{Q_1^{\circ}Q^{\circ}}$  окружности большого полукруга, которую обозначим  $L^{\circ}$ :

$$L^{\circ} = |\overset{\sim}{Q_1^{\circ}Q^{\circ}}|.$$

Положение большого полукруга, на котором лежит точка  $Q^{\circ}$ , определим углом  $\varphi$  — углом (вычисляемым в точке  $Q_1^{\circ}$ ) между дугой  $\overset{\sim}{Q_1^{\circ}Q_2^{\circ}}$  и дугой  $\overset{\sim}{Q_1^{\circ}Q^{\circ}}$  сферического сегмента. Здесь через  $Q_2^{\circ}$  обозначена точка контура крепления с координатами  $Q_2^{\circ}(\tilde{C}, 0, 0)$  в системе  $OXYZ$ . Угол  $\varphi$  отсчитывается от дуги  $\overset{\sim}{Q_1^{\circ}Q_2^{\circ}}$ . За положительное направление отсчета примем направление «против часовой стрелки», если смотреть на сферический сегмент от точки  $Q_1^{\circ}$  к центру  $O_1$  сферы.

Чтобы связать координаты на поверхности  $S^{\circ}$  и пространственные координаты, рассмотрим декартову систему  $O_1X_1Y_1Z_1$ , где  $O_1$  — центр сферы (частью которой является сферический сегмент  $S^{\circ}$ ), ось  $Z_1$  проходит через точку крепления  $Q_1^{\circ}$ , плоскости  $XZ$ ,  $X_1Z_1$  совпадают (рис. 49.1). Тогда точка  $Q^{\circ}$  с поверхностными координатами  $(L^{\circ}, \varphi)$  имеет следующие декартовы координаты:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \sin(L^{\circ}/C) \cos \varphi \\ \sin(L^{\circ}/C) \sin \varphi \\ \cos(L^{\circ}/C) \end{pmatrix}. \quad (50.1)$$

Перейдем к системе  $O_2X_2Y_2Z_2$ , ось  $Z_2$  которой совпадает с осью  $Z$ , а начало  $O_2$  совпадает с центром сферы  $O_1$ . Для этого повернем систему  $O_1X_1Y_1Z_1$  вокруг оси  $Y_1$  на угол  $(-\alpha)$ :

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}. \quad (50.2)$$

Система  $OXYZ$  получается из системы  $O_2X_2Y_2Z_2$  сдвигом вдоль оси  $Z_2$ :

$$X = X_2, \quad Y = Y_2, \quad Z = Z_2 - C_4. \quad (50.3)$$

Из (50.1)—(50.3) получим формулы, связывающие поверхностные координаты  $L^{\circ}$ ,  $\varphi$  и декартовы координаты  $X^{\circ}$ ,  $Y^{\circ}$ ,  $Z^{\circ}$  точки поверхности  $S^{\circ}$ :

$$\begin{pmatrix} X^{\circ} \\ Y^{\circ} \\ Z^{\circ} + C_4 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(L^{\circ}/C) \cos \varphi \\ \sin(L^{\circ}/C) \sin \varphi \\ \cos(L^{\circ}/C) \end{pmatrix}. \quad (50.4)$$

## 50.2. Область значений поверхностных координат

Область значений поверхностных координат описывается неравенствами

$$0 \leq L^\circ \leq L_*(\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

где  $L_*(\varphi)$  — функция, описывающая контур крепления  $L^\circ = L_*(\varphi)$ . В неявном виде  $L_*(\varphi)$  задается уравнением

$$C_1 - C \left( -\sin \alpha \sin \frac{L^\circ}{C} \cos \varphi + \cos \alpha \cos \frac{L^\circ}{C} \right), \quad (50.5)$$

которое следует из (50.4) и из равенства  $Z = 0$ , справедливого для точек крепления оболочки.

## 50.3. Первая квадратичная форма поверхности $S^\circ$

Радиус-вектор поверхности  $S^\circ$  выражается через поверхностные координаты по формуле

$$\mathbf{R}^\circ = X^\circ \mathbf{e}_1 + Y^\circ \mathbf{e}_2 + Z^\circ \mathbf{e}_3, \quad (50.6)$$

где  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  — орты осей  $X, Y, Z$ ; а координаты  $X^\circ, Y^\circ, Z^\circ$  вычисляются по формуле (50.4). Дифференцируя (50.6) по  $L^\circ, \varphi$ , получим формулы для координатных векторов поверхности  $S^\circ$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1^\circ &= \left( \cos \alpha \cos \frac{L^\circ}{C} \cos \varphi - \sin \alpha \sin \frac{L^\circ}{C} \right) \mathbf{e}_1 + \cos \frac{L^\circ}{C} \sin \varphi \mathbf{e}_2 + \\ &+ \left( -\sin \alpha \cos \frac{L^\circ}{C} \cos \varphi - \cos \alpha \sin \frac{L^\circ}{C} \right) \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{R}_2^\circ &= -C \cos \alpha \sin \frac{L^\circ}{C} \sin \varphi \mathbf{e}_1 + C \sin \frac{L^\circ}{C} \cos \varphi \mathbf{e}_2 + \\ &+ C \sin \alpha \sin \frac{L^\circ}{C} \sin \varphi \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Вычисляя скалярные произведения координатных векторов, получим следующие формулы для коэффициентов первой квадратичной формы поверхности  $S^\circ$ :

$$\begin{aligned} A_{11}^\circ &= (\mathbf{R}_1^\circ, \mathbf{R}_1^\circ) = 1, \quad A_{12}^\circ = (\mathbf{R}_1^\circ, \mathbf{R}_2^\circ) = 0, \quad (50.7) \\ A_{22}^\circ &= (\mathbf{R}_2^\circ, \mathbf{R}_2^\circ) = C^2 \sin^2 \frac{L^\circ}{C}. \end{aligned}$$

## 50.4. Формулы для усилий оболочки

В рассматриваемой задаче внешними силами, действующими на мягкую оболочку, являются давление жидкости и давление газа. Жидкость находится в верхней полости. Внешние силы описываются формулами, следующими из (9.2):

$$\mathbf{F} = -F^3 \mathbf{n}, \quad F^1 = 0, \quad F^2 = 0, \quad F^3 = -\rho g(Z - D). \quad (50.8)$$

Постоянная  $D$  неизвестна и подлежит определению.

По предположению 49.1 поверхность  $S$  является одноосной областью и нити одноосной области имеют ненулевое усилие. Внешние силы, действующие на мягкую оболочку, направлены по нормали к поверхности  $S$ . Отсюда и из теоремы Фипстервальдера 6.1 следует, что нити одноосной области являются геодезическими линиями поверхности  $S$ , а их прообразы являются геодезическими линиями поверхности  $S^\circ$ . Так как нити проходят, по предположению 49.1, через точку  $Q_1$ , то их прообразы проходят через точку  $Q_1^\circ$ . Так как геодезические линии сферы лежат на окружностях больших кругов, то прообразами нитей являются координатные линии  $L^\circ$ , введенные в п. 50.1.

При деформации поверхность  $S^\circ$  переходит в поверхность  $S$ . Координаты  $L^\circ, \varphi$  являются координатами обеих поверхностей. Так как длины нитей равны длинам их прообразов, то  $L^\circ = L$ , где  $L$  — длина дуги нити, отсчитываемая от точки  $Q_1$ . Напишем уравнения для поверхности  $S$ , заменяя  $L^\circ$  на  $L$ .

Из равенства длин нитей длинам их прообразов следует, что

$$A_{11} = A_{11}^\circ = 1. \quad (50.9)$$

Из (5.3) следует, что для почти всех точек поверхности  $S$  выполняется неравенство  $A_{22} = A_{22}^\circ < 0$ . Отсюда и из (5.2), (50.7), (50.9) получаем равенства

$$\begin{aligned} A_{12} = A_{12}^\circ = 0, \quad A = A_{11}A_{22} - A_{12}^2 = A_{22}, \quad (50.10) \\ T^{22} = 0, \quad T^{12} = T^{21} = 0, \end{aligned}$$

где  $A_{11}, A_{12}, A_{22}$  — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности  $S$ ;  $T^{ij}$  — усилия оболочки. По предположению 49.1  $T^{11} \neq 0$ . Соотношения (5.2), (50.8) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{A}} \frac{\partial(\sqrt{A} T^{11})}{\partial x^1} + \Gamma_{11}^1 T^{11} = 0, \quad \Gamma_{11}^2 = 0, \quad (50.11) \\ B_{11} T^{11} = -\rho g(Z - D), \quad T^{11} > 0. \end{aligned}$$

Здесь  $x^1 = L$ ;  $B_{11}$  — коэффициент второй квадратичной формы поверхности  $S$ ;  $\Gamma_{11}^1, \Gamma_{11}^2$  — символы Кристоффеля второго рода. Из (2.7),

(50.9), (50.10) получим формулы

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{A^{1l}}{2} \left( \frac{\partial A_{l1}}{\partial x^1} + \frac{\partial A_{l1}}{\partial x^1} - \frac{\partial A_{11}}{\partial x^l} \right) - A^{11} \frac{\partial A_{11}}{\partial x^1} = 0, \quad (50.12)$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{A^{2l}}{2} \left( \frac{\partial A_{l1}}{\partial x^1} + \frac{\partial A_{l1}}{\partial x^1} - \frac{\partial A_{11}}{\partial x^l} \right) - \frac{A^{22}}{2} \frac{\partial A_{11}}{\partial x^2} = 0.$$

Из (50.10)–(50.12) получим уравнение и формулу для усилия  $T^{11}$ :

$$\frac{\partial(\sqrt{A} T^{11})}{\partial L} = 0, \quad T^{11} = \frac{T(\varphi)}{\sqrt{A}} = \frac{T(\varphi)}{\sqrt{A_{22}}}, \quad T(\varphi) > 0. \quad (50.13)$$

Здесь  $T(\varphi)$  — неизвестная функция. Перейдем от усилий  $T^{ij}$  к усилиям  $T_1, T_2, U$  по формулам (4.2), (50.9), (50.10), (50.13):

$$T_1 = \sqrt{\frac{\Lambda A_{11}}{A_{22}}} T^{11} = T^{11} = \frac{T(\varphi)}{\sqrt{A_{22}}}, \quad (50.14)$$

$$T_2 = \sqrt{\frac{A A_{22}}{A_{11}}} T^{22} = 0,$$

$$U = \sqrt{A} T^{12} = \sqrt{A} T^{21} = 0.$$

$T_1, T_2, U$  — проекции внутренних сил  $\mathbf{T}_{[1]}, \mathbf{T}_{[2]}$ , действующих на единицу длины координатных линии  $\varphi$  и  $L$  (смотрите формулы (4.1) и рис. 4.1):

$$T_{[1]} = T_1 \frac{\mathbf{R}_1}{\sqrt{A_{11}}} + U \frac{\mathbf{R}_2}{\sqrt{A_{22}}} = T_1 \frac{\mathbf{R}_1}{\sqrt{A_{11}}},$$

$$T_{[2]} = U \frac{\mathbf{R}_1}{\sqrt{A_{11}}} + T_2 \frac{\mathbf{R}_2}{\sqrt{A_{22}}} = 0.$$

## 50.5. Дифференциальные уравнения поверхности $S$

Обозначим декартовы координаты точки поверхности  $S$  через  $X, Y, Z$ . Тогда радиус-вектор поверхности  $S$  равен

$$\mathbf{R} = X\mathbf{e}_1 + Y\mathbf{e}_2 + Z\mathbf{e}_3.$$

Формулы для координатных векторов и для коэффициентов квадратичных форм поверхности  $S$ , следующие из (2.2), (2.4), (2.5), имеют вид

$$\mathbf{R}_1 = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial L} = X_L \mathbf{e}_1 + Y_L \mathbf{e}_2 + Z_L \mathbf{e}_3, \quad (50.15)$$

$$\mathbf{R}_2 = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \varphi} = X_\varphi \mathbf{e}_1 + Y_\varphi \mathbf{e}_2 + Z_\varphi \mathbf{e}_3,$$

$$\begin{aligned}
A_{11} &= X_L^2 + Y_L^2 + Z_L^2, \\
A_{12} &= X_L X_\varphi + Y_L Y_\varphi + Z_L Z_\varphi, \\
A_{22} &= X_\varphi^2 + Y_\varphi^2 + Z_\varphi^2, \\
R_{11} &= \frac{\partial^2 R}{\partial L^2} = X_{LL} \mathbf{e}_1 + Y_{LL} \mathbf{e}_2 + Z_{LL} \mathbf{e}_3, \\
\mathbf{n} &= \frac{[R_1, R_2]}{\sqrt{A}} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{A_{22}}} \left\{ Y_L Z_\varphi - Y_\varphi Z_L, X_\varphi Z_L - X_L Z_\varphi, X_L Y_\varphi - X_\varphi Y_L \right\}, \\
B_{11} &= (R_{11}, \mathbf{n}) = \frac{1}{\sqrt{A_{22}}} \left[ X_{LL} (Y_L Z_\varphi - Y_\varphi Z_L) + \right. \\
&\quad \left. + Y_{LL} (X_\varphi Z_L - X_L Z_\varphi) + Z_{LL} (X_L Y_\varphi - X_\varphi Y_L) \right].
\end{aligned}$$

Уравнения для координат  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  следуют из (50.9)–(50.11), (50.13), (50.15):

$$\begin{aligned}
X_L^2 + Y_L^2 + Z_L^2 &= 1, \\
X_L X_\varphi + Y_L Y_\varphi + Z_L Z_\varphi &= 0, \\
\frac{T(\varphi)}{A_{22}} \left[ X_{LL} (Y_L Z_\varphi - Y_\varphi Z_L) + Y_{LL} (X_\varphi Z_L - X_L Z_\varphi) + \right. \\
&\quad \left. + Z_{LL} (X_L Y_\varphi - X_\varphi Y_L) \right] = \rho g (Z - D), \\
A_{22} = X_\varphi^2 + Y_\varphi^2 + Z_\varphi^2, \quad T(\varphi) > 0, \quad 0 \leq L \leq L_*, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.
\end{aligned}$$

Для почти всех точек одноосной области справедливы неравенства, следующие из (5.3), (50.7), (50.15):

$$A_{22} - A_{22}^\circ < 0, \quad X_\varphi^2 + Y_\varphi^2 + Z_\varphi^2 < C^2 \sin^2 \frac{L}{C}.$$

## 50.6. Условия в точках крепления

Рассмотрим уравнения, описывающие крепление мягкой оболочки. Так как точки основания сферического сегмента  $S^\circ$  остаются неподвижными при деформации оболочки и совпадают с точками контура крепления, то из (50.4) получим формулы для функций  $X(L, \varphi)$ ,  $Y(L, \varphi)$  на контуре крепления  $L = L_*(\varphi)$ :

$$\begin{aligned}
X(L_*, \varphi) &= X^\circ(L_*, \varphi) = C \cos \alpha \sin \frac{L_*}{C} \cos \varphi + C \sin \alpha \cos \frac{L_*}{C}, \\
Y(L_*, \varphi) &= Y^\circ(L_*, \varphi) = C \sin \frac{L_*}{C} \sin \varphi, \\
Z(L_*, \varphi) &= Z^\circ(L_*, \varphi) = 0.
\end{aligned}$$



Функция  $L_*(\varphi)$  описывается уравнением (50.5).

Точка  $Q_1$  крепления оболочки является образом точки  $Q_1^0$ , лежащей на поверхности  $S^0$  и имеющей координату  $L^0 = 0$ . Поэтому справедливы следующие равенства:

$$X(0, \varphi) = C_1, \quad Y(0, \varphi) = C_2, \quad Z(0, \varphi) = C_3.$$

### 50.7. Формула для объема $V$

Объем области, ограниченной мягкой оболочкой и плоскостью  $XU$ , описывается формулами

$$V = \iint_{X^2+Y^2 \leq \tilde{C}^2} Z dXdY = \int_0^{2\pi} \int_0^{L_*} Z (X_L Y_\varphi - X_\varphi Y_L) dL d\varphi.$$

### 50.8. Сводная система уравнений

Получим уравнения, полученные в п. 50.5–50.7, в виде одной системы:

$$X_L^2 + Y_L^2 + Z_L^2 = 1, \quad (50.16)$$

$$X_L X_\varphi + Y_L Y_\varphi + Z_L Z_\varphi = 0,$$

$$\frac{T(\varphi)}{A_{22}} \left[ X_{LL} (Y_L Z_\varphi - Y_\varphi Z_L) + Y_{LL} (X_\varphi Z_L - X_L Z_\varphi) + Z_{LL} (X_L Y_\varphi - X_\varphi Y_L) \right] = -\rho g (Z - D),$$

$$A_{22} = X_\varphi^2 + Y_\varphi^2 + Z_\varphi^2, \quad 0 \leq L \leq L_*(\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

$$X(0, \varphi) = C_1, \quad Y(0, \varphi) = C_2, \quad Z(0, \varphi) = C_3,$$

$$X(L_*, \varphi) = C \cos \alpha \sin \frac{L_*}{C} \cos \varphi + C \sin \alpha \cos \frac{L_*}{C},$$

$$Y(L_*, \varphi) = C \sin \frac{L_*}{C} \sin \varphi, \quad Z(L_*, \varphi) = 0,$$

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{L_*} Z (X_L Y_\varphi - X_\varphi Y_L) dL d\varphi, \quad T(\varphi) > 0.$$

Функция  $L_*(\varphi)$  описывается уравнением (50.5). Для почти всех значений  $0 \leq L \leq L_*(\varphi)$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$  выполняется неравенство

$$X_\varphi^2 + Y_\varphi^2 + Z_\varphi^2 < C^2 \sin^2 \frac{L}{C}. \quad (50.17)$$

Неизвестными являются функции  $X(L, \varphi)$ ,  $Y(L, \varphi)$ ,  $Z(L, \varphi)$ ,  $T(\varphi)$  и постоянная  $D$ . Независимыми переменными являются  $L$ ,  $\varphi$ . Постоянные  $C$ ,  $C_1$ – $C_4$ ,  $\alpha$ ,  $V$ ,  $\rho$ ,  $g$  известны. Усилия оболочки находятся по формулам (50.14).

*Замечание 50.1.* Объем  $V^\circ$  тела, ограниченного сферическим сегментом  $S^\circ$  и кругом, лежащим в основании сегмента, равен

$$V^\circ = \frac{\pi}{3} (2C^3 - 3C_4C^2 + C_4^3). \quad (50.18)$$

## §51. Переход к безразмерным переменным

Введем безразмерные переменные и постоянные по формулам

$$\begin{aligned} x &= \frac{X}{C}, & y &= \frac{Y}{C}, & z &= \frac{Z}{C}, & (51.1) \\ l &= \frac{L}{C}, & l_* &= \frac{L_*}{C}, & c_i &= \frac{C_i}{C}, & i=\overline{1,4}, \\ d &= \frac{D}{C}, & v &= \frac{V}{C^3}, & t &= \frac{T}{\rho g C^3}. \end{aligned}$$

Здесь  $x, y, z$  — безразмерные декартовы координаты точки поверхности  $S$ ;  $l$  — безразмерная длина нити, отсчитываемая от точки  $Q_1$ ,  $0 \leq l \leq l_*(\varphi)$ ;  $l_*$  — функция, описывающая контур крепления;  $c_1$ – $c_4$  — безразмерные координаты точек  $Q_1, O_1$ ;  $d$  — безразмерная неизвестная постоянная, определяющая давление в жидкости;  $v$  — безразмерный объем области, ограниченной мягкой оболочкой  $S$  и плоскостью  $xy$ ;  $t$  — функция, определяющая усилие оболочки.

В безразмерных переменных уравнения для задачи равновесия оболочки следуют из (50.5), (50.16), (51.1):

$$x_l^2 + y_l^2 + z_l^2 = 1, \quad (51.2)$$

$$x_l x_\varphi + y_l y_\varphi + z_l z_\varphi = 0,$$

$$\begin{aligned} t(\varphi) \left[ x_l \left( y_l z_\varphi - y_\varphi z_l \right) + y_l \left( x_\varphi z_l - x_l z_\varphi \right) + \right. \\ \left. + z_l \left( x_l y_\varphi - x_\varphi y_l \right) \right] + (z - d) (x_\varphi^2 + y_\varphi^2 + z_\varphi^2) = 0, \end{aligned}$$

$$0 \leq l \leq l_*(\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

$$x(0, \varphi) = c_1, \quad y(0, \varphi) = c_2, \quad z(0, \varphi) = c_3,$$

$$x(l_*, \varphi) = \cos \alpha \sin l_* \cos \varphi + \sin \alpha \cos l_*,$$

$$y(l_*, \varphi) = \sin l_* \sin \varphi, \quad z(l_*, \varphi) = 0,$$

$$c_4 = -\sin \alpha \sin l_* \cos \varphi + \cos \alpha \cos l_*,$$

$$v = \int_0^{2\pi} \int_0^{l_*} z (x_l y_\varphi - x_\varphi y_l) dl d\varphi, \quad l(\varphi) > 0.$$

Неизвестными являются функции  $x(l, \varphi)$ ,  $y(l, \varphi)$ ,  $z(l, \varphi)$ ,  $l(\varphi)$  и постоянная  $d$ . Независимыми переменными являются  $l, \varphi$ . Постоянные  $c_1 - c_4, \alpha, v$  известны. Для почти всех значений  $0 \leq l \leq l_*(\varphi)$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$  выполняется неравенство, следующее из (50.17), (51.1):

$$x_\varphi^2 + y_\varphi^2 + z_\varphi^2 < \sin^2 l. \quad (51.3)$$

Усилия оболочки находятся из формул, следующих из (50.14), (51.1):

$$T_1 = \frac{\rho g C^2 l(\varphi)}{\sqrt{x_\varphi^2 + y_\varphi^2 + z_\varphi^2}}, \quad T_2 = 0, \quad U = 0. \quad (51.4)$$

*Замечание 51.1.* Из (50.18) следует формула для безразмерного объема  $v^0$  области, ограниченной сферическим сегментом  $S^0$  и кругом, лежащим в основании сегмента:

$$v^0 = \frac{V^0}{C^3} = \frac{\pi}{3} (2 - 3c_4 + c_4^3). \quad (51.5)$$

## §52. Уравнения для пологого сферического сегмента

### 52.1. Введение новых переменных

Рассмотрим задачу равновесия в случае, когда поверхность  $S^0$  является пологим сферическим сегментом. Для пологого сегмента постоянные  $C, C_4$  близки, постоянная  $c_4$  близка к единице. Введем малый параметр  $\varepsilon$  по формуле

$$\varepsilon = \sqrt{1 - c_4}. \quad (52.1)$$

Тогда  $c_4 = 1 - \varepsilon^2$ . Введем новые (нормализованные) переменные и параметры по формулам

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x - \alpha - l \cos \varphi}{\varepsilon^3}, & \bar{y} &= \frac{y - l \sin \varphi}{\varepsilon^3}, & \bar{z} &= \frac{z}{\varepsilon^2}, \\ l &= \frac{l}{\varepsilon}, & \bar{\alpha} &= \frac{\alpha}{\varepsilon}, & l_* &= \frac{l_*}{\varepsilon}, & \bar{c}_1 &= \frac{c_1 - \alpha}{\varepsilon^3}, & \bar{c}_2 &= \frac{c_2}{\varepsilon^3}, \\ \bar{c}_3 &= \frac{c_3}{\varepsilon^2}, & d &= \frac{d}{\varepsilon^2}, & \bar{v} &= \frac{v}{\varepsilon^4}, & t &= \frac{t}{\varepsilon^3}. \end{aligned} \quad (52.2)$$

Тогда для исходных переменных и параметров справедливы равенства

$$\begin{aligned} x &= \varepsilon \bar{\alpha} + \varepsilon l \cos \varphi + \varepsilon^3 \bar{x}, & y &= \varepsilon l \sin \varphi + \varepsilon^3 \bar{y}, & z &= \varepsilon^2 \bar{z}, & (52.3) \\ l &= \varepsilon l, & \alpha &= \varepsilon \bar{\alpha}, & l_* &= \varepsilon l_*, & c_1 &= \varepsilon \bar{c}_1 + \varepsilon^3 \bar{c}_1, & c_2 &= \varepsilon^3 \bar{c}_2, \\ c_3 &= \varepsilon^2 \bar{c}_3, & c_4 &= 1 - \varepsilon^2, & d &= \varepsilon^2 \bar{d}, & v &= \varepsilon^4 \bar{v}, & t &= \varepsilon^3 \bar{t}. \end{aligned}$$

## 52.2. Уравнения для новых переменных

В нормализованных переменных задача равновесия оболочки, имеющей до деформации форму пологого сегмента, описывается уравнениями, следующими из (51.2), (52.3):

$$\begin{aligned} (\cos \varphi + \varepsilon^2 x_{\bar{l}})^2 + (\sin \varphi + \varepsilon^2 y_{\bar{l}})^2 + \varepsilon^2 z_{\bar{l}}^2 &= 1, & (52.4) \\ (\cos \varphi + \varepsilon^2 \bar{x}_l)(-l \sin \varphi + \varepsilon^2 \bar{x}_\varphi) + (\sin \varphi + \varepsilon^2 \bar{y}_l)(l \cos \varphi + \varepsilon^2 \bar{y}_\varphi) + \\ + \varepsilon^2 \bar{z}_{\bar{l}} \bar{z}_\varphi &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{l}(\varphi) \left\{ \varepsilon^2 x_{ll} \left[ (\sin \varphi + \varepsilon^2 y_l) z_\varphi - (\bar{l} \cos \varphi + \varepsilon^2 y_\varphi) z_l \right] + \right. \\ + \varepsilon^2 \bar{y}_{ll} \left[ (-\bar{l} \sin \varphi + \varepsilon^2 \bar{x}_\varphi) \bar{z}_l - (\cos \varphi + \varepsilon^2 \bar{x}_l) \bar{z}_\varphi \right] + \\ + z_{ll} \left[ (\cos \varphi + \varepsilon^2 x_l)(l \cos \varphi + \varepsilon^2 y_\varphi) + \right. \\ \left. + (l \sin \varphi - \varepsilon^2 \bar{x}_\varphi)(\sin \varphi + \varepsilon^2 \bar{y}_l) \right] \left. \right\} + \\ + (z - \bar{d}) \left[ (\bar{l} \sin \varphi - \varepsilon^2 x_\varphi)^2 + (\bar{l} \cos \varphi + \varepsilon^2 y_\varphi)^2 + \varepsilon^2 z_\varphi^2 \right] &= 0, \\ 0 \leq \bar{l} \leq \bar{l}_*(\varphi), & \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \end{aligned}$$

$$\bar{x}(0, \varphi) = \bar{c}_1, \quad \bar{y}(0, \varphi) = \bar{c}_2, \quad \bar{z}(0, \varphi) = \bar{c}_3,$$

$$\begin{aligned} x(\bar{l}_*, \varphi) - \frac{1}{\varepsilon^3} \left[ \cos(\varepsilon \alpha) \sin(\varepsilon \bar{l}_*) \cos \varphi + \sin(\varepsilon \alpha) \cos(\varepsilon \bar{l}_*) - \varepsilon \alpha - \right. \\ \left. - \varepsilon \bar{l}_* \cos \varphi \right], \end{aligned}$$

$$y(\bar{l}_*, \varphi) - \frac{\sin \varphi}{\varepsilon^3} [\sin(\varepsilon \bar{l}_*) - \varepsilon \bar{l}_*], \quad z(\bar{l}_*, \varphi) = 0,$$

$$l_* = l_{*1} - l_{*2},$$

$$\cos(\varepsilon l_{*1}) = \frac{1 - \varepsilon^2}{\sqrt{1 - \sin^2(\varepsilon \alpha) \sin^2 \varphi}}, \quad 0 < \varepsilon l_{*1} \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\cos(\varepsilon l_{*2}) = \frac{\cos(\varepsilon \bar{\alpha})}{\sqrt{1 - \sin^2(\varepsilon \alpha) \sin^2 \varphi}},$$

$$\sin(\varepsilon l_{*2}) = \frac{\sin(\varepsilon \alpha) \cos \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2(\varepsilon \alpha) \sin^2 \varphi}}, \quad -\frac{\pi}{2} < \varepsilon l_{*2} < \frac{\pi}{2},$$

$$\bar{v} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\bar{l}_*} \bar{z} \left[ (\cos \varphi + \varepsilon^2 \bar{x}_{\bar{l}})(\bar{l} \cos \varphi + \varepsilon^2 \bar{y}_{\varphi}) + \right. \\ \left. + (l \sin \varphi - \varepsilon^2 \bar{x}_{\varphi})(\sin \varphi + \varepsilon^2 \bar{y}_{\bar{l}}) \right] d\bar{l} d\varphi, \quad t(\varphi) > 0.$$

Неизвестными являются функции  $\bar{x}(l, \varphi)$ ,  $\bar{y}(l, \varphi)$ ,  $\bar{z}(l, \varphi)$ ,  $t(\varphi)$  и постоянная  $\bar{d}$ . Независимыми переменными являются  $\bar{l}$ ,  $\varphi$ . Постоянные  $\bar{c}_1$ — $\bar{c}_3$ ,  $\varepsilon$ ,  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{v}$  известны.  $\varepsilon > 0$  — малая величина (малый параметр). Для почти всех значений  $0 \leq \bar{l} \leq \bar{l}_*(\varphi)$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$  выполняется неравенство, следующее из (51.3):

$$(\bar{l} \sin \varphi - \varepsilon^2 \bar{x}_{\varphi})^2 + (\bar{l} \cos \varphi + \varepsilon^2 \bar{y}_{\varphi})^2 + \varepsilon^2 \bar{z}_{\varphi}^2 < \frac{\sin^2(\varepsilon \bar{l})}{\varepsilon^2}. \quad (52.5)$$

Усилия оболочки вычисляются по формулам, следующим из (51.4), (52.2), (52.3):

$$T_1 = \frac{\rho g C^2 \varepsilon^2 \bar{t}}{\sqrt{(l \sin \varphi - \varepsilon^2 \bar{x}_{\varphi})^2 + (l \cos \varphi + \varepsilon^2 \bar{y}_{\varphi})^2 + \varepsilon^2 \bar{z}_{\varphi}^2}}, \quad (52.6)$$

$$T_2 = 0, \quad U = 0.$$

*Замечание 52.1.* Из (51.5), (52.3) следует формула для нормализованного объема области, ограниченной пологим сферическим сегментом  $S^c$  и кругом, лежащим в основании сегмента:

$$\bar{v}^c = \frac{v^c}{\varepsilon^4} = \frac{\pi}{3} (3 - \varepsilon^2).$$

## §53. Формулы и уравнения для приближенного решения

### 53.1. Уравнения в нулевом приближении

Разложим в системе (52.4) функции в ряды по степеням параметра  $\varepsilon$  и приравняем нулю старшие коэффициенты разложений. Получим следующие уравнения для нулевого приближения неизвестных:

$$2 \cos \varphi \bar{x}_l^{(0)} + 2 \sin \varphi \bar{y}_l^{(0)} + \left[ \bar{z}_l^{(0)} \right]^2 = 0, \quad (53.1)$$

$$-l \sin \varphi x_l^{(0)} + \cos \varphi x_{\varphi}^{(0)} + l \cos \varphi y_l^{(0)} + \sin \varphi y_{\varphi}^{(0)} + z_l^{(0)} z_{\varphi}^{(0)} = 0,$$

$$\begin{aligned}
\tau z_{ll}^{(0)} + \bar{l} [z^{(0)} - \bar{d}_0] &= 0, & 0 \leq \bar{l} \leq \bar{\lambda}(\varphi), & & 0 \leq \varphi < 2\pi, \\
x^{(0)}(0, \varphi) = c_1, & & y^{(0)}(0, \varphi) = c_2, & & z^{(0)}(0, \varphi) = c_3, \\
\bar{x}^{(0)}(\lambda, \varphi) &= -\frac{\bar{\lambda}}{6} (\lambda^2 + 3\bar{\alpha}^2) \cos \varphi - \frac{\bar{\alpha}}{6} (\bar{\alpha}^2 + 3\lambda^2), \\
\bar{y}^{(0)}(\lambda, \varphi) &= -\frac{\bar{\lambda}^3}{6} \sin \varphi, & \bar{z}^{(0)}(\lambda, \varphi) &= 0, \\
\lambda &= \sqrt{2 - \bar{\alpha}^2 \sin^2 \varphi} - \bar{\alpha} \cos \varphi, \\
\bar{v} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\lambda \bar{z}^{(0)} l \, dl d\varphi, & \bar{\tau} &\geq 0.
\end{aligned}$$

Неизвестными являются функции  $\bar{x}^{(0)}(\bar{l}, \varphi)$ ,  $\bar{y}^{(0)}(\bar{l}, \varphi)$ ,  $\bar{z}^{(0)}(\bar{l}, \varphi)$ ,  $\bar{\tau}(\varphi)$  и постоянная  $\bar{d}_0$ . Независимыми переменными являются  $\bar{l}$ ,  $\varphi$ . Постоянные  $\bar{c}_1 - \bar{c}_3$ ,  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{v}$  известны. Для всех значений  $0 \leq l \leq \lambda(\varphi)$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$  выполняется неравенство, следующее из (52.5):

$$-2\bar{l} \sin \varphi x_\varphi^{(0)} + 2\bar{l} \cos \varphi y_\varphi^{(0)} + [z_\varphi^{(0)}]^2 + \frac{l^4}{3} \leq 0. \quad (53.2)$$

Нулевое приближение решения задачи (52.4) отмечено индексом  $^{(0)}$ , введены обозначения

$$d^{(0)} = d_0, \quad l_*^{(0)} = \lambda, \quad t^{(0)} = \bar{\tau}. \quad (53.3)$$

### 53.2. Решение дифференциальных уравнений

В разложениях (52.3) координат  $x$ ,  $y$  функции  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  входят в члены порядка  $\varepsilon^3$ . Этими членами пренебрежем.

Дифференциальное уравнение (53.1) для  $\bar{z}^{(0)}$  (третье уравнение) имеет решение

$$\begin{aligned}
z^{(0)} &= \bar{d}_0 + \left(\frac{3q}{2}\right)^{1/3} \left[ \bar{d}_1(\varphi) J_{1/3}(q) + \bar{d}_2(\varphi) N_{1/3}(q) \right], & (53.4) \\
q &= \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\bar{l}^3}{\tau(\varphi)}}, & 0 \leq l \leq \lambda(\varphi), & & 0 \leq \varphi < 2\pi.
\end{aligned}$$

Здесь  $J_{1/3}$ ,  $N_{1/3}$  — функции Бесселя и Неймана [21];  $\bar{d}_1(\varphi)$ ,  $\bar{d}_2(\varphi)$ ,  $\tau(\varphi)$  — неизвестные функции,  $d_0$  — неизвестная постоянная.

### 53.3. Неравенство (53.2)

Чтобы рассмотреть неравенство (53.2), введем функции

$$\bar{g}_1 = \cos \varphi \bar{x}^{(0)} + \sin \varphi \bar{y}^{(0)}, \quad (53.5)$$

$$\bar{g}_2 = -\sin \varphi \bar{x}^{(0)} + \cos \varphi \bar{y}^{(0)}.$$

Из первых двух уравнений (53.1) следуют уравнения

$$g_{1l} = -\frac{[z_l^{(0)}]^2}{2}, \quad lg_{2l} - g_2 = -g_{1\varphi} - z_l^{(0)} z_\varphi^{(0)},$$

решение которых имеет вид

$$g_1 = -\frac{1}{2} \int_{\lambda}^l [z_l^{(0)}]^2 dl - \frac{\lambda^3}{6} - \frac{\bar{\alpha}^2 \lambda}{2} \cos^2 \varphi - \frac{\bar{\alpha} \cos \varphi}{6} (\alpha^2 + 3\lambda^2), \quad (53.6)$$

$$g_2 = -\bar{l} \int_{\lambda}^{\bar{l}} \frac{1}{\bar{l}^2} [g_{1\varphi} + z_l^{(0)} z_\varphi^{(0)}] d\bar{l} + \frac{l\alpha^2}{4} \sin(2\varphi) + \frac{l\alpha \sin \varphi}{6\bar{\lambda}} (\alpha^2 + 3\bar{\lambda}^2).$$

Здесь использованы равенства (53.1) для  $\bar{x}^{(0)}$ ,  $\bar{y}^{(0)}$  при  $l = \lambda$  и равенства, следующие из (53.5):

$$g_1(\bar{\lambda}, \varphi) = \cos \varphi x^{(0)}(\bar{\lambda}, \varphi) + \sin \varphi y^{(0)}(\bar{\lambda}, \varphi),$$

$$g_2(\lambda, \varphi) = -\sin \varphi x^{(0)}(\lambda, \varphi) + \cos \varphi y^{(0)}(\lambda, \varphi).$$

Неравенство (53.2) имеет вид

$$2l (\bar{g}_{2\varphi} + \bar{g}_1) + [\bar{z}_\varphi^{(0)}]^2 + \frac{\bar{l}^4}{3} \leq 0, \quad 0 \leq l \leq \lambda(\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Функции  $\bar{z}^{(0)}$ ,  $\bar{g}_1$ ,  $\bar{g}_2$ ,  $\lambda$  определяются по формулам (53.1), (53.4), (53.6).

Возвращаясь к исходным переменным и параметрам, получим, что для поверхности  $S$  оболочки справедливы неравенства

$$2l (g_{2\varphi} + g_1) + [z_\varphi^{(0)}]^2 + \frac{l^4}{3} \leq 0, \quad 0 \leq l \leq \lambda(\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (53.7)$$

где

$$z^{(0)} = d_0 + \left(\frac{3q}{2}\right)^{1/3} [d_1(\varphi) J_{1/3}(q) + d_2 N_{1/3}(q)], \quad (53.8)$$

$$g_1 = -\frac{1}{2} \int_{\lambda}^l [z_l^{(0)}]^2 dl - \frac{\lambda^3}{6} - \frac{\alpha^2 \lambda}{2} \cos^2 \varphi - \frac{\alpha \cos \varphi}{6} (\alpha^2 + 3\lambda^2),$$

$$g_2 = -l \int_{\lambda}^{\bar{l}} \frac{1}{\bar{l}^2} [g_{1\varphi} + z_l^{(0)} z_\varphi^{(0)}] d\bar{l} + \frac{l\alpha^2}{4} \sin(2\varphi) + \frac{l\alpha \sin \varphi}{6\lambda} (\alpha^2 + 3\lambda^2),$$

$$\lambda = \varepsilon \bar{\lambda} \sqrt{2\varepsilon^2 - \alpha^2 \sin^2 \varphi} - \alpha \cos \varphi.$$

### 53.4. Переход к трансцендентным уравнениям

Из равенства

$$g_1(0, \varphi) = \cos \varphi x^{(0)}(0, \varphi) + \sin \varphi y^{(0)}(0, \varphi),$$

следующего из (53.5), и из формул (53.1), (53.4) для  $\bar{x}^{(0)}$ ,  $\bar{y}^{(0)}$ ,  $\bar{z}^{(0)}$ ,  $\bar{v}$  получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6\lambda} \left\{ \left( \frac{3q_*}{2} \right)^{8/3} \left[ A^2(q_*, \varphi) + \frac{4}{3q_*} A(q_*, \varphi) B(q_*, \varphi) + B^2(q_*, \varphi) \right] + \right. \\ \left. + \frac{6d_2}{\pi\sqrt{3}} \left( \frac{3q_*}{2} \right)^{2/3} (d_1\sqrt{3} + d_2) \right\} - (c_1 - \alpha) \cos \varphi - c_2 \sin \varphi - \\ - \frac{\lambda\alpha^2}{2} \cos^2 \varphi + \frac{\alpha(\alpha^2 + 3\lambda^2)}{6} \cos \varphi + \frac{\lambda^3}{6}, \\ d_0 - d_2 \frac{\sqrt[3]{3}\Gamma(1/3)}{\pi} - c_3, \\ d_0 + \left( \frac{3q_*}{2} \right)^{1/3} A(q_*, \varphi) = 0, \\ v - 2\pi\varepsilon^2 d_0 + \int_0^{2\pi} \left[ - \left( \frac{3q_*}{2} \right)^{2/3} B(q_*, \varphi) + \right. \\ \left. + \frac{3^{1/6}}{\Gamma(1/3)} \left( \frac{3q_*}{2} \right)^{4/3} (d_1\sqrt{3} + d_2) \right] \lambda^2 d\varphi, \end{aligned} \quad (53.9)$$

где

$$\begin{aligned} A(q, \varphi) &= d_1 J_{1/3}(q) + d_2 N_{1/3}(q), \\ B(q, \varphi) &= d_1 J_{-2/3}(q) + d_2 N_{-2/3}(q), \\ \lambda &= \sqrt{2\varepsilon^2 - \alpha^2 \sin^2 \varphi - \alpha \cos \varphi}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 - c_4}, \end{aligned} \quad (53.10)$$

$\Gamma$  — гамма-функция,  $q_*$  — значение переменной  $q$  в (53.4) при  $l = \lambda$  ( $l = \lambda$ ), формулы для  $\lambda$ ,  $\varepsilon$  следуют из (52.1), (53.8). Неизвестными являются функции  $q_*(\varphi)$ ,  $d_1(\varphi)$  и постоянные  $d_0$ ,  $d_2$ . Постоянные  $c_1$ — $c_4$ ,  $\alpha$ ,  $v$  известны. Справедливы равенства

$$d_0 = \varepsilon^2 \bar{d}_0, \quad d_1 = \varepsilon^2 \bar{d}_1, \quad d_2 = \varepsilon^2 \bar{d}_2, \quad \lambda = \varepsilon \bar{\lambda}. \quad (53.11)$$

Функция  $\bar{d}_2$  в формуле (53.4) не зависит от  $\varphi$ , как следует из (53.9), (53.11). Функция  $\tau = \varepsilon^3 \bar{\tau}$  находится по формуле, следующей из (53.4):

$$\tau = \frac{4\lambda^3(\varphi)}{9q_*^2(\varphi)}. \quad (53.12)$$



### 53.5. Условия задачи

Начальные условия  $x^{(0)}(0, \varphi) = c_1$ ,  $y^{(0)}(0, \varphi) = c_2$  в (53.1) равносильны равенствам

$$\begin{aligned} g_1(0, \varphi) &= c_1 \cos \varphi + c_2 \sin \varphi, \\ g_2(0, \varphi) &= -c_1 \sin \varphi + c_2 \cos \varphi, \end{aligned} \quad (53.13)$$

как следует из формул (53.5). Первое равенство выполняется в силу уравнений (53.9). Покажем, что второе равенство (53.13) тоже выполняется.

Из (53.13) и из начального условия  $z^{(0)}(0, \varphi) = c_3$  в (53.1) следуют формулы

$$g_{1\varphi}(0, \varphi) = -c_1 \sin \varphi + c_2 \cos \varphi, \quad z_{\varphi}^{(0)}(0, \varphi) = 0.$$

Отсюда и из (53.6) получим равенства

$$\begin{aligned} g_2(\bar{l}, \varphi) &= g_{1\varphi}(\bar{l}, \varphi) - \frac{l}{\lambda} g_{1\varphi}(\bar{\lambda}, \varphi) + \bar{l} \int_{\bar{\lambda}}^{\bar{l}} z_{\bar{l}}^{(0)} \left[ \frac{1}{\bar{l}} z_{\bar{l}\varphi}^{(0)} - \frac{1}{\bar{l}^2} z_{\varphi}^{(0)} \right] d\bar{l} + \\ &\quad + \frac{\bar{l}\alpha^2}{4} \sin(2\varphi) + \frac{\bar{l}\alpha \sin \varphi}{6\lambda} (\bar{\alpha}^2 + 3\lambda^2), \\ g_2(0, \varphi) &= g_{1\varphi}(0, \varphi) = -c_1 \sin \varphi + c_2 \cos \varphi. \end{aligned}$$

Таким образом, второе равенство (53.13) выполняется и, значит, полученное решение удовлетворяет всем условиям задачи (53.1).

### 53.6. Результаты

Из (52.2), (52.3) следует, что решение задачи равновесия пологого сферического сегмента имеет вид

$$\begin{aligned} x &= \alpha + l \cos \varphi + O(\varepsilon^3), & y &= l \sin \varphi + O(\varepsilon^3), \\ z &= d_0 + \left(\frac{3q}{2}\right)^{1/3} [d_1(\varphi) J_{1/3}(q) + d_2 N_{1/3}(q)] + O(\varepsilon^3), \\ q &= \frac{2}{3} \sqrt{\frac{l^3}{\tau(\varphi)}}, & 0 \leq l &\leq \lambda(\varphi) + O(\varepsilon^2), & 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ d &= d_0[1 + O(\varepsilon)], \end{aligned} \quad (53.14)$$

где  $J_{1/3}$ ,  $N_{1/3}$  — функции Бесселя и Неймана [21]; функции  $q_*(\varphi)$ ,  $d_1(\varphi)$  и постоянные  $d_0$ ,  $d_2$  находятся из (53.9), функции  $\lambda(\varphi)$ ,  $\tau(\varphi)$  описываются формулами (53.10), (53.12). Постоянные  $c_1$ — $c_4$ ,  $\alpha$ ,  $v$  заданы. Для всех точек поверхности  $S$  выполняется неравенство (53.7).

Усилия оболочки вычисляются по формулам, следующим из (52.2), (52.6), (53.3):

$$T_1 = \frac{\rho g C^2 \tau(\varphi)}{l} [1 + O(\varepsilon)], \quad T_2 = 0, \quad U = 0. \quad (53.15)$$

## §54. Пример приближенного решения

По формулам (53.14) были построены две формы равновесия мягкой оболочки со следующими значениями параметров:

$$\begin{aligned} c_1 &\approx 0,104, & c_2 &= 0, & c_3 &= 0, & c_4 &= 0,91, \\ \varepsilon &= 0,3, & v^0 &\approx 0,025, & \alpha &\approx 0,104, & v &\approx \pm 0,017, \\ d &\approx \mp 1,652, & d_0 &\approx \mp 1,652, & d_1(0) &\approx \pm 0,958, & d_2 &\approx \mp 1,343, \\ q_*(0) &= 0,4, & \tau(0) &\approx 0,092, & \lambda(0) &\approx 0,321. \end{aligned} \quad (54.1)$$

Здесь верхний знак соответствует форме равновесия, представленной на рис. 54.1, нижний знак соответствует форме равновесия на рис. 54.2. Формы симметричны одна другой относительно плоскости  $xy$ .

Из свойства симметрии задачи равновесия мягкой оболочки под гидростатическим давлением, сформулированного в § 9, следует, что для каждой поверхности  $S$  поверхность, симметричная ей относительно плоскости  $xy$ , тоже является формой равновесия. Этот результат можно получить непосредственно из уравнений (50.16). Усилия оболочки в симметричных формах равновесия совпадают.

### 54.1. Линии уровня поверхности оболочки

На фиг. 1 рисунков 54.1, 54.2 изображены следующие линии уровня поверхности  $S$ :

Рис. 54.1

$z = 0$	—	контур крепления и точка крепления оболочки с координатами $x \approx 0,104, y = 0$ ,
$z \approx 0,019$	—	две замкнутые кривые, вложенные одна в другую,
$z \approx 0,039$	—	две замкнутые кривые, вложенные одна в другую и соприкасающиеся в седловой точке функции $z$ , точка соприкосновения имеет координаты $x \approx 0,288, y = 0$ ,
$z \approx 0,044,$	—	одна замкнутая кривая,
$z \approx 0,050,$	—	точка максимума функции $z$ с координатами $x \approx -0,200, y = 0$ .

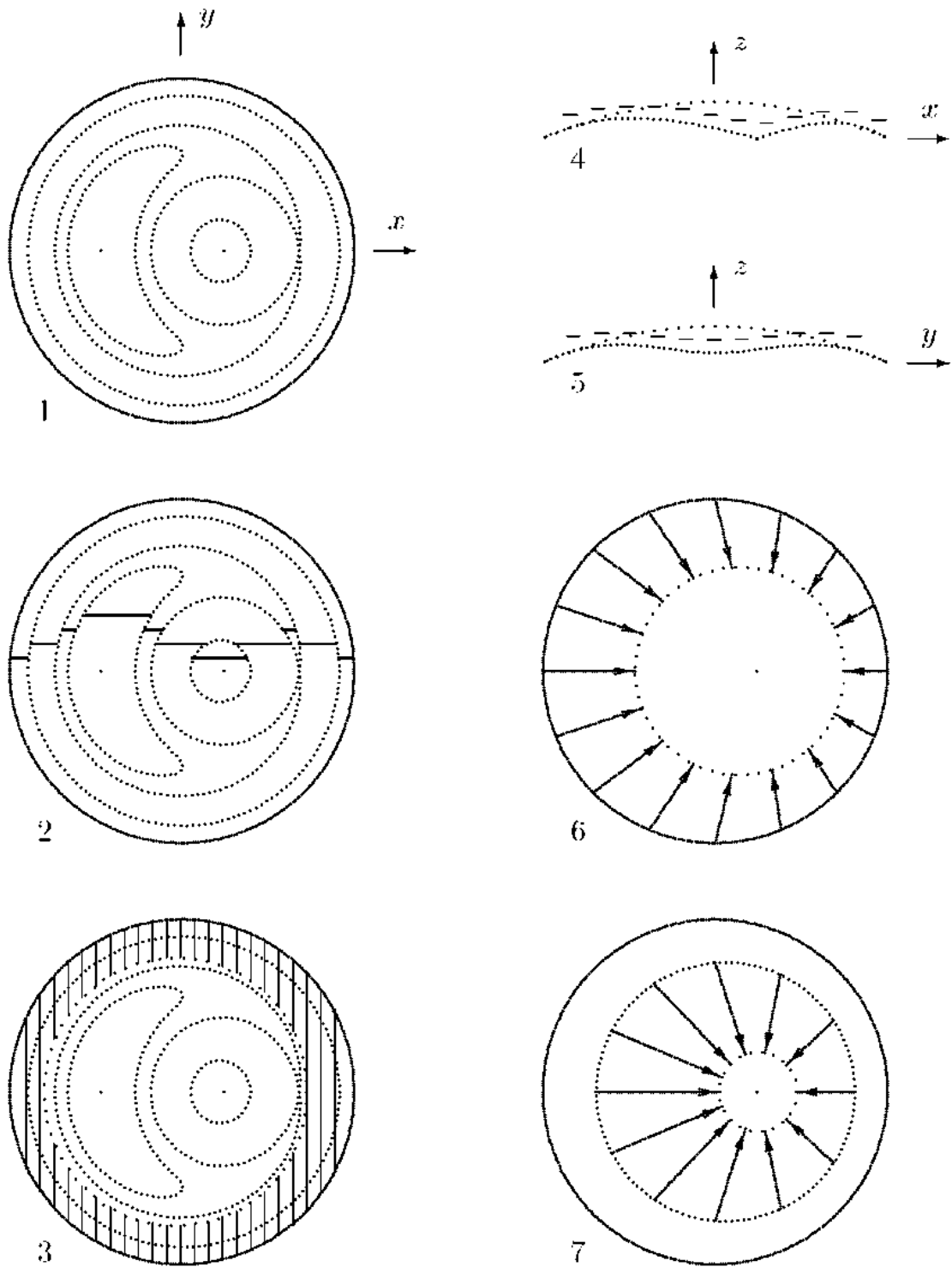


Рис. 51.1. Форма равновесия и внутренние силы

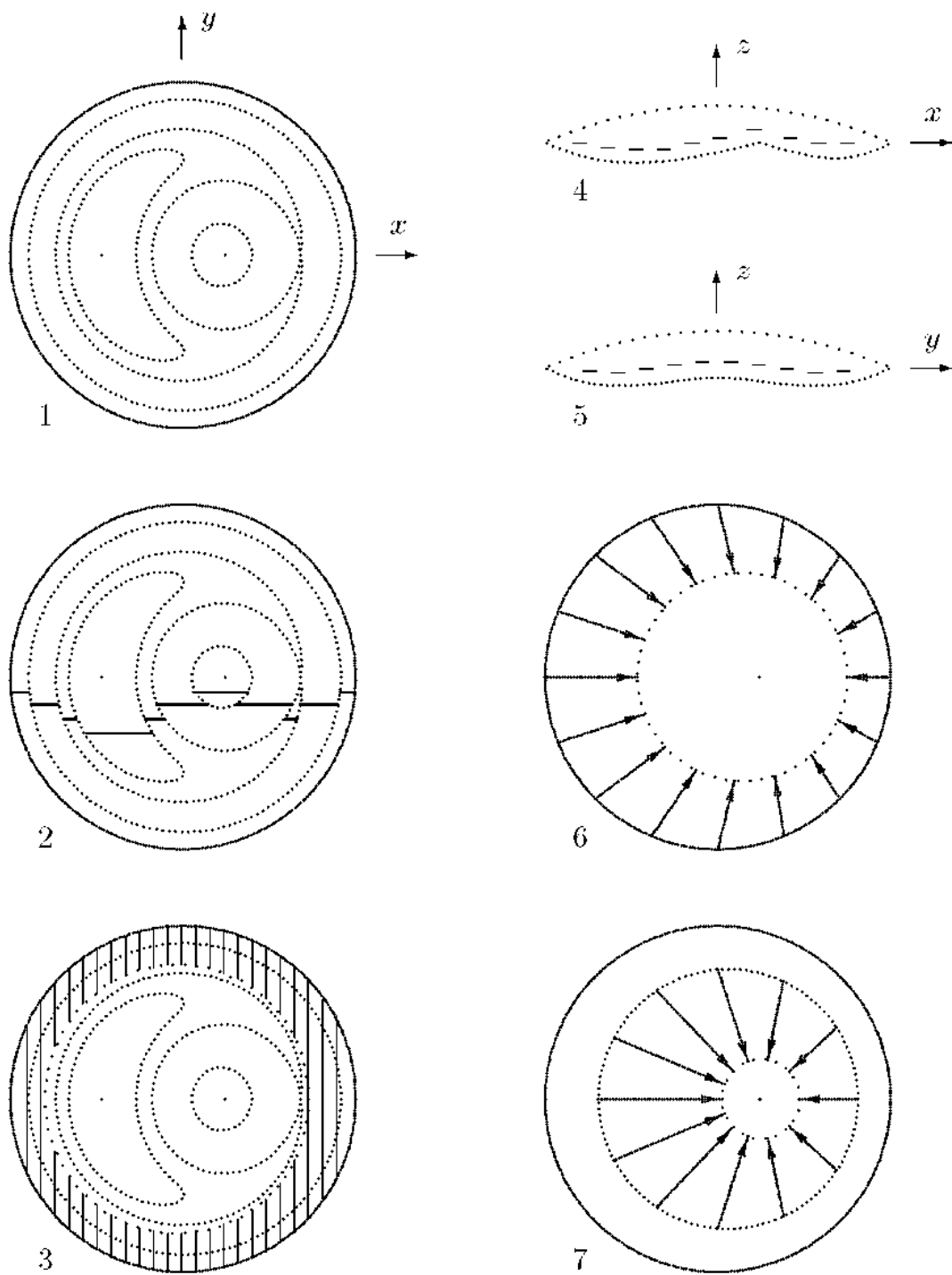


Рис. 54.2. Форма равновесия и внутренние силы

### Рис. 54.2

$z = 0$	контур крепления и точка крепления оболочки с координатами $x \approx 0,104, y = 0,$
$z \approx -0,019$	две замкнутые кривые, вложенные одна в другую,
$z \approx -0,039$	— две замкнутые кривые, вложенные одна в другую и соприкасающиеся в седловой точке функции $z$ , точка соприкосновения имеет координаты $x \approx 0,288, y = 0,$
$z \approx -0,044,$	— одна замкнутая кривая,
$z \approx -0,050,$	точка минимума функции $z$ с координатами $x \approx -0,200, y = 0.$

На фиг. 2 рисунков 54.1, 54.2 линии уровня поверхности  $S$  изображены (для большей наглядности) с отрезками: отрезки, лежащие на одной прямой, находятся между одинаковыми линиями уровня.

## 54.2. Профили поверхности оболочки

На фиг. 4 рисунков 54.1, 54.2 изображены кривые пересечения с плоскостью  $xz$  поверхности  $S^0$  оболочки до деформации и поверхности  $S$  оболочки после деформации.

На рисунках видно, что в точке крепления оболочки  $(c_1, c_2, c_3)$  поверхность  $S$  имеет излом. Разность усилий, возникающая в этой точке, компенсируется сосредоточенной силой, приложенной к оболочке со стороны опоры.

На фиг. 5 рисунков 54.1, 54.2 изображены кривые пересечения с плоскостью  $yz$  поверхности  $S^0$  оболочки до деформации и поверхности  $S$  оболочки после деформации.

## 54.3. Внутренние силы

На фиг. 6 рисунков 54.1, 54.2 показаны силы, действующие на контур крепления со стороны мягкой оболочки. Сила  $\mathbf{T}_*$ , действующая на единицу длины контура крепления, вычисляется по формуле, следующей из (4.18):

$$\mathbf{T}_* = -T_* \mathbf{R}_1, \quad (54.2)$$
$$T_* = |\mathbf{T}_*| = T_1 \sqrt{\frac{X_\varphi^2 + Y_\varphi^2 + Z_\varphi^2}{X_\varphi^2 + Y_\varphi^2 + Z_\varphi^2 + L_{*\varphi}^2}} \Big|_{L = L_*(\varphi)}.$$

Здесь  $L = L_*(\varphi)$  — уравнение контура крепления в размерных переменных. Формула для  $T_*$  в безразмерных переменных следует из

(51.1), (51.4), (54.2):

$$T_* = T_1 \sqrt{\frac{x_\varphi^2 + y_\rho^2 + z_\varphi^2}{x_\varphi^2 + y_\varphi^2 + z_\rho^2 + l_{*\varphi}^2}} \Big|_{l=l_*(\rho)} = \frac{\rho g C^2 l(\varphi)}{\sqrt{x_\rho^2 + y_\rho^2 + z_\varphi^2 + l_{*\rho}^2}} \Big|_{l=l_*(\varphi)} \quad (54.3)$$

Для пологого сферического сегмента из (52.3), (53.3), (53.11), (53.14), (54.3) следует, что

$$T_* = \frac{\rho g C^2 \tau(\varphi)}{\sqrt{\lambda^2 + \lambda_\varphi^2}} [1 + O(\varepsilon)], \quad (54.4)$$

где функции  $\lambda(\varphi)$ ,  $\tau(\varphi)$  вычисляются по формулам (53.10), (53.12).

На фиг. 6 модули изображенных векторов равны модулям сил  $\mathbf{T}_*$ ,  $T_*(0) \approx 0,286 \rho g C^2$ . Силы  $\mathbf{T}_*$  направлены по касательным к пиям. В рассматриваемом приближении пия лежат в вертикальных плоскостях, проходящих через точку крепления оболочки.

По третьему закону Ньютона силы  $\mathbf{T}'_*$ , действующие на оболочку со стороны контура, равны по модулю и противоположны по направлению силам  $\mathbf{T}_*$ :  $\mathbf{T}'_* = T_* \mathbf{R}_1$ .

На фиг. 7 рисунков 54.1, 54.2 показаны внутренние силы, действующие на часть оболочки, лежащую между контуром крепления и замкнутой кривой

$$l = \frac{3}{4} l_*(\varphi) - \frac{3}{4} \lambda(\varphi) + O(\varepsilon^2), \quad (54.5)$$

со стороны остальной части оболочки. Обозначим  $\mathbf{T}_{**}$  силу, действующую на единицу длины кривой (54.5). Проведя также же вычисления для  $\mathbf{T}_{**}$ , как и для  $\mathbf{T}_*$ , получим формулы

$$\mathbf{T}_{**} = -T_{**} \mathbf{R}_1, \quad T_{**} = |\mathbf{T}_{**}| = \frac{4}{3} T_* [1 + O(\varepsilon)],$$

где  $T_*$  вычисляется по формуле (54.4). На фиг. 7 модули изображенных векторов равны модулям сил  $\mathbf{T}_{**}$ ,  $T_{**}(0) \approx 0,381 \rho g C^2$ . Силы  $\mathbf{T}_{**}$  направлены по касательным к пиям.

По третьему закону Ньютона силы  $\mathbf{T}'_{**}$ , действующие на часть оболочки, ограниченную кривой (54.5), со стороны остальной части оболочки, равны по модулю и противоположны по направлению силам  $\mathbf{T}_{**}$ :  $\mathbf{T}'_{**} = T_{**} \mathbf{R}_1$ .

Усилия оболочки в формах, представленных на рис. 54.1, 54.2, совпадают.

#### 54.4. Неравенство (53.7)

На фиг. 3 рисунков 54.1, 54.2 заштрихованы области, в которых не выполняется неравенство (54.7). Это означает, что сферический сег-

мент не может быть одноосным при значениях  $c_1, c_2, c_3, c_4, \alpha, v$  из (54.1): на поверхности  $S$  есть двухосная или двухосные области. Задачи, в которых поверхность  $S$  имеет области разных типов, выходят за рамки настоящей книги.

**Результат.** При значениях  $c_1, c_2, c_3, c_4, \alpha, v$  из (54.1) поверхность оболочки не является одноосной, на поверхности есть области разных типов.

*Замечание 54.1.* Поверхность  $S^\circ$  оболочки до деформации определяется неоднозначно по поверхности  $S$ . Существует бесконечное множество поверхностей  $S^\circ$ , принимающих при равновесии формы, найденные в настоящем параграфе. Например, за поверхность  $S^\circ$  можно принять часть кругового цилиндра

$$(X^\circ)^2 + (Y^\circ)^2 = C^2, \quad 0 \leq Z^\circ \leq L_*(\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Если точки границы

$$(X^\circ)^2 + (Y^\circ)^2 = C^2, \quad Z^\circ = L_*(\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

поместить в точку крепления  $(C_1, C_2, C_3)$  (в безразмерных координатах — в точку  $(c_1, c_2, c_3)$ ), то такая оболочка принимает найденные формы равновесия.

## §55. Выводы главы 5

В § 49 дана постановка задачи равновесия сферического сегмента. В § 50 получены уравнения, описывающие рассматриваемую задачу в размерных переменных. В § 51 сделан переход к безразмерным переменным.

В § 52 получены уравнения для пологого сферического сегмента, в задачу введен малый параметр. В § 53 решены дифференциальные уравнения равновесия пологого сферического сегмента в нулевом приближении. Задача сведена к решению трансцендентных уравнений.

В § 54 рассмотрены две формы равновесия, полученные численно по приближенным формулам из § 53.

В главе 5 используются результаты работы [13].

# Литература

1. Азовцев А.И., Магула В.Э. Сжатие конструктивно складчатой мягкой цилиндрической оболочки. В сб. Сообщения лаборатории мягких оболочек. Владивосток: Дальневосточное высшее инженерное морское училище им. адмирала Г.И. Невельского. 1968. Вып. 3.
2. Алексеев С.А. К теории мягких оболочек вращения. В сб. Расчет пространственных конструкций. М.: Стройиздат. 1955. Вып. 3.
3. Алексеев С.А. Одноосные мягкие оболочки. Изв. АН СССР. ММТ. 1971. № 6. С. 89–94.
4. Алексеев С.А. Основы общей теории мягких оболочек. В сб. Расчет пространственных конструкций. М.: Стройиздат. 1967. Вып. XI. С. 5–37.
5. Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа. 1991.
6. Бухгольц П.П. Основы курса теоретической механики. Часть 1. М.: Наука. 1965.
7. Друзь В.И., Друзь И.Б. Теория мягких оболочек. Владивосток: Морской гос. университет им. адмирала Г.И. Невельского. 2003.
8. Каган В.Ф. Основы теории поверхностей. М. — Л.: Гостехиздат. Т.1. 1947. Т. 2. 1948.
9. Кузьмина Р.П. Осесимметричная задача равновесия полусферической пленки под гидростатическим давлением. Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 1. С. 125–130.
10. Кузьмина Р.П. Осесимметричная задача равновесия цилиндрической пленки под гидростатическим давлением. Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 4. С. 182–188.
11. Кузьмина Р.П., Петров В.М., Черноусько Ф.Л. Задачи механики гибких пленок, содержащих жидкие массы. В сб. Успехи механики деформируемых сред. К 100-летию со дня рождения акад. Б.Г. Галеркина. М.: Наука. 1975. С. 324–339.
12. Кузьмина Р.П. Плоская задача равновесия жидкости, ограниченной гибкой пленкой. Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 5. С. 87–94.
13. Кузьмина Р.П. Равновесие нерастяжимых пленок. Изв. АН СССР. МТТ. 1974. № 6. С. 144–153.
14. Магула В.Э., Друзь В.И., Кулагин В.Д., Милославская Е.П., По-



- восселов М.В. Судовые мягкие емкости. Л.: Судостроение. 1966.
15. Можевитинов А.Л. О статическом расчете нейлонового затвора водосливной плотины. Информационный сборник Всесоюзного государственного проектного института Гидропроект. Л. 1961. № 21.
  16. Молчапов А.Г. О форме равновесия мягкой одноосной каркасированной оболочки под действием внутреннего давления. Изв. АН СССР. МТТ. 1971. № 5. С. 165–172.
  17. Петров В.М., Черноусько Ф.Л. О равновесии жидкости, ограниченной гибкой пленкой. Изв. АН СССР. МТТ. 1971. № 4. С. 131–142.
  18. Солодилов Ю.А. Большие деформации безмоментной сферической оболочки, нагруженной давлением жидкости. Изв. АН СССР. МТТ. 1966. № 4. С. 151–153.
  19. Finsterwalder S. Mechanische Beziehungen bei der Flächen-deformation. Jahresb. Deutsch. Math. Vereinigung, 1899. Bd. 6.
  20. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука. 1969.
  21. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука. 1968.

# Предметный указатель

- Безразмерные переменные, 60  
Большие давления, 102, 168  
Большие усилия, 102, 168
- Внутренние силы, 22  
Вторая квадратичная форма, 14
- Геодезические линии, 39  
Главная нормаль, 40
- Двухосная область, 16
- Излом поверхности, 100, 103, 191, 246
- Каверпа, 102, 167, 214, 223  
Координатные векторы, 14
- Линии уровня, 243
- Математическая модель мягкой оболочки, 39  
Меридиан, 46  
Мягкая оболочка, 14
- Направляющие, 57  
Нити, 17  
Нормализованные переменные, 236  
Нульовая область, 19
- Одноосная область, 16  
Орты, 47  
Осесимметричная задача равновесия, 52
- Параллель, 46  
Первая квадратичная форма, 14  
Плоская задача равновесия, 45  
Плоскость меридиана, 46  
Плоскость параллели, 46  
Поверхностные силы, 36  
Полные эллиптические интегралы, 71  
Пологий сферический сегмент, 225, 236  
Полугеодезическая система координат, 228  
Потенциальная энергия, 100, 213, 223  
Признак геодезической линии, 40  
Разрыв усилия, 168, 210, 213, 223  
Реакции внешних связей, 36  
Регулярно возмущенная задача Коши, 205
- Свойство симметрии, 53  
Символы Кристоффеля 2-го рода, 15  
Соприкасающаяся плоскость, 40  
Сосредоточенные силы, 36
- Теорема Бонне, 14  
Теорема Пуанкаре, 205  
Теорема Фитстервальдера, 39
- Усилия, 23
- Экстремальное свойство геодезической линии, 41  
Эластика Эйлера, 81, 122  
Элементы второго уровня малости, 23  
Эллиптические интегралы первого и второго рода, 71