

ОПД.Р.03 СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА
ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В
ТЕОРИИ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК
Учебное пособие

Рассматриваются вопросы использования вариационных (энергетических) методов в теории пластин и оболочек, приводятся основные уравнения пластин и оболочек с применением принципов Лагранжа, Кастильяно, метода Бубнова – Галеркина и др. Теоретические положения иллюстрируются примерами.

Предназначено для магистров и бакалавров, обучающихся по направлению 150300 «Прикладная механика», изучающих курс «Строительная механика машин».

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
1. Вариационные принципы строительной механики	4
1.1. Принцип Лагранжа – Кастильяно.....	4
1.2. Принцип Гамильтона.....	9
2. Теория вариационных методов.....	10
3. Практическое приложение вариационных методов.....	17
3.1. Применение метода Ритца – Тимошенко для изгиба пластин в рамках классической теории	17
3.2. Канонические уравнения Галеркина для изгиба пластинки	20
3.3. Уравнения Кастильяно – Ритца для изгиба пластинки	24
3.4. Уравнение устойчивости сжатой пластинки (уравнение Галеркина)	27
3.5. Энергетический метод расчетов на устойчивость	29
3.6. Применение метода Бубнова – Галеркина для расчета пологих оболочек	30
4. Применение метода Ритца – Тимошенко для расчета гибких пластин	33
Список рекомендуемой литературы.....	40

ВВЕДЕНИЕ

Практически все задачи, связанные с исследованием напряжений и деформаций в пластинках и оболочках, сводятся к решению краевых задач для одного или нескольких дифференциальных уравнений.

Точное решение этих уравнений не вызывает затруднения лишь в некоторых элементарных случаях. В более сложных случаях оно сопряжено с большими математическими трудностями, для большинства же задач точное решение вообще невозможно. Во всех таких случаях приходится прибегать к методам приближенного решения задачи.

Методы приближенного решения краевых задач дифференциальных уравнений могут быть разбиты на две большие группы:

а) методы вариационные, дающие приближенное аналитическое выражение для искомой функции;

б) методы численные, дающие численные значения функции при тех или иных значениях аргумента.

К первой группе относятся методы Ритца, Галеркина, Треффца, Канторовича и другие, а ко второй – конечно-разностный метод, или метод сеток, вариационно-разностный метод, метод конечных элементов.

В данном пособии изложена теория вариационных методов [1, 2], описано практическое применение их к решению задач теории пластинок и оболочек. Вариационные методы обладают рядом достоинств по сравнению с численными методами и позволяют получать приближенные решения многих практически важных задач строительной механики.

1. ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

1.1. Принцип Лагранжа – Кастильяно

Вариационные методы базируются на экстремальных свойствах потенциальной энергии, позволяющих получить необходимые расчетные уравнения. Потенциальной энергией упругой системы называется

та работа, которую совершают как внутренние, так и внешние силы системы при переводе ее из деформированного состояния в начальное, недеформированное. Пусть \mathcal{E} – полная потенциальная энергия системы; U, V – потенциальная энергия внутренних и внешних сил.

Тогда

$$\mathcal{E} = U + V.$$

Потенциальная энергия внутренних сил, линейно зависящих от деформации, всегда положительна и вычисляется как половина произведений сил и соответствующих перемещений. Потенциальная энергия внешних сил всегда отрицательна и определяется как полная величина произведения силы и пути.

Пусть упругое тело под действием внешней нагрузки, состоящей из поверхностных сил X_v, Y_v, Z_v и объемных сил $\rho X, \rho Y, \rho Z$, получило напряжения X_x, Y_y, Z_z, \dots , перемещения u, v, w и находится в состоянии равновесия. Назовем это действительное состояние I (рис. 1). В этом состоянии удовлетворяются условия равновесия и условия совместности деформаций Сен-Венана. Представим себе второе, фиктивное, состояние тела (состояние II), в котором внешние силы, как поверхностные, так и объемные, суть вариации внешних сил действительного состояния: $\delta X_v, \delta Y_v, \delta Z_v, \delta \rho X, \delta \rho Y, \delta \rho Z$. Тогда напряжения и перемещения в этом состоянии будут представлять вариации напряжений и перемещений первого состояния: $\delta X_x, \delta Y_y, \delta Z_z, \dots, \delta u, \delta v, \delta w$. Выбор величины вариации внешних сил при этом произволен.

Применим начало возможных перемещений к состоянию I, взяв за возможные перемещения из состояния II, получим:

$$\begin{aligned} \iint_S (X_v \delta u + Y_v \delta v + Z_v \delta w) ds + \iiint_V (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) dv - \\ - \delta \iiint_V U_0(u, v, w) dv = 0, \end{aligned}$$

где последний член выражает вариацию работы внутренних сил. Ее можно выразить через компоненты перемещений u, v, w . В уравнении X_v, Y_v, Z_v, X, Y, Z – постоянные неварьируемые величины. По-

этому можно знак вариации δ вынести за знак интегралов. Меняя, кроме того, знаки на обратные, получим:

$$\delta \left[\iiint_V U_0(u, v, w) dV - \iint_S (X_v u + Y_v v + Z_v w) dS - \right. \\ \left. - \iiint_V \rho (Xu + Yv + Zw) dV \right] = \delta \mathcal{E}(u, v, w) = 0. \quad (1)$$

Равенство $\delta \mathcal{E} = 0$ означает, что потенциальная энергия действительного состояния имеет экстремальное значение. Если взять вторую вариацию от функции \mathcal{E} , то можно убедиться, что она положительна. Следовательно, потенциальная энергия в состоянии равновесия минимальна.

Из всех мыслимых систем перемещений упругого тела перемещения, действительно имеющие место, сообщают потенциальной энергии минимальное значение. В этом заключается принцип Лагранжа, или принцип минимума для перемещений.

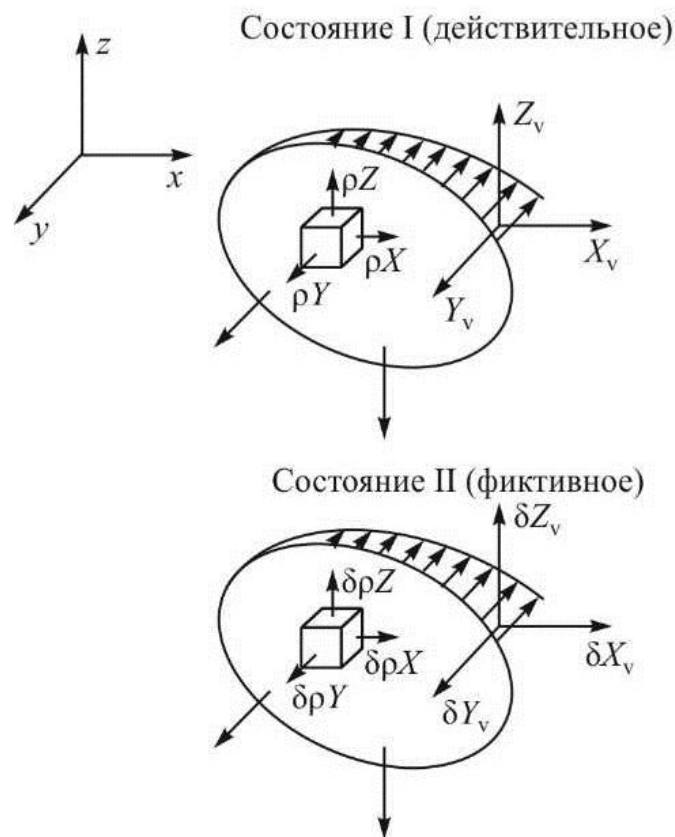


Рис. 1

Применим теперь начало возможных перемещений ко второму, фиктивному, состоянию тела, взяв за возможные перемещения действительного состояния. Получим:

$$\iint_S [(\delta X_v)u + (\delta Y_v)v + (\delta Z_v)w] dS + \\ + \iiint_V [\rho (\delta X)u + \rho (\delta Y)v + \rho (\delta Z)w] dV - \delta \iiint_V U_0(X_x, \dots) dV = 0.$$

Здесь уже u, v, w – постоянные неварьируемые функции, а U_0 – удельная энергия внутренних сил, выраженная через напряжения и вызванная вариацией напряжений. Вынося знак вариации за знаки интегралов и меняя знаки на обратные, получим:

$$\delta \left[\iiint_V U_0(X_x, Y_y, \dots) dV - \iint_S (X_v u + Y_v v + Z_v w) dS - \right. \\ \left. - \iiint_V \rho (Xu + Yv + Zw) dV \right] = \delta \mathcal{E}(X_x, Y_y, \dots) = 0.$$

Если в фиктивном состоянии положить вариации объемных сил равными нулю, то

$$\left[\iiint_V U_0(X_x, Y_y, \dots) dV - \iint_S (X_v u + Y_v v + Z_v w) dS \right] = \\ = \delta \mathcal{E}_1(X_x, Y_y, \dots) = 0. \quad (2)$$

Здесь \mathcal{E}_1 – не полная потенциальная энергия, а энергия внутренних и поверхностных сил (не считая объемных). Равенство (2) означает, что потенциальная энергия внутренних и поверхностных сил в действительном состоянии имеет экстремальное значение. Можно показать, взяв вторую вариацию от \mathcal{E}_1 , что она положительна, т. е. \mathcal{E}_1 имеет минимальное значение.

Из всех систем статически возможных напряжений, т. е. таких, которые находятся в равновесии, не только с поверхностными силами, но и с заданными массовыми силами, та система имеет место

в действительности, для которой энергия внутренних и поверхностных сил минимальна. В этом заключается вариационный принцип Кастильяно.

Принцип Кастильяно, как и принцип Лагранжа, утверждает, что энергия системы в действительном состоянии имеет минимальное значение. Однако он существенным образом отличается от принципа Лагранжа. В принципе Лагранжа варьируются перемещения, в принципе Кастильяно – напряжения.

Если из принципа Лагранжа как следствие вытекают уравнения равновесия внутри и на поверхности тела, то из принципа Кастильяно – уравнения неразрывности Сен-Венана.

Уравнение (1) называется вариационным уравнением Лагранжа, а (2) – вариационным уравнением Кастильяно.

Отметим два частных случая уравнений (1) и (2):

1. Предположим, что в фиктивном состоянии вариации внешних и объемных сил выбраны так, что последние два интеграла уравнения (1) обратились в нуль.

Тогда остается:

$$\delta \iiint_V U_0(u, v, w) dV = \delta U(u, v, w) = 0$$

или

$$U(u, v, w) = \min.$$

Это значит, что из всех систем перемещений, совпадающих с заданными на поверхности тела, только та имеет место в действительности, которая сообщает энергии внутренних сил минимальное значение.

2. Предположим, что в фиктивном состоянии вариации как поверхностных, так и объемных сил равны нулю, а вариации напряжений вызываются какими-либо иными воздействиями. Тогда в уравнении (2) остается:

$$\delta \iiint_V U_0(X_x, Y_y, \dots) dV = \delta U(X_x, Y_y, \dots) = 0$$

или

$$U(X_x, Y_y, \dots) = \min. \quad (3)$$

Это значит, что из всех статически возможных систем напряжений, совпадающих с заданными на поверхности тела, только та имеет место в действительности, которая сообщает энергии внутренних сил минимальное значение.

1.2. Принцип Гамильтона

Пусть упругое тело находится в движении. Тогда мы можем по началу Д'Аламбера, добавив к действующей нагрузке силы инерции $-\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $-\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$, $-\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$, рассматривать тело в каждый данный момент времени в состоянии равновесия. Применяя начало возможных перемещений к состоянию I и беря за возможные перемещения из состояния II, получим:

$$\begin{aligned} & \iint_S (X_v \delta u + Y_v \delta v + Z_v \delta w) dS + \iiint_V \rho (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) dV - \\ & - \iiint_V \rho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta v + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right) dV - \delta \iiint_V U_0 dV = 0. \end{aligned}$$

Здесь u, v, w, X_x, Y_y, \dots – функции координат x, y, z и времени t .

Вынесем во всех интегралах, кроме третьего, знак вариации за интеграл и переменим знаки на обратные, получим:

$$\delta \mathcal{E} + \iiint_V \rho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta v + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right) dV = 0. \quad (4)$$

Представим себе наряду с действительной траекторией движения некоторую близкую к ней траекторию, пересекающуюся с действительной в момент времени t_0 и t_1 (рис. 2). Это значит, что мы варьируем компоненты перемещений u, v, w , подчиняя вариации условиям

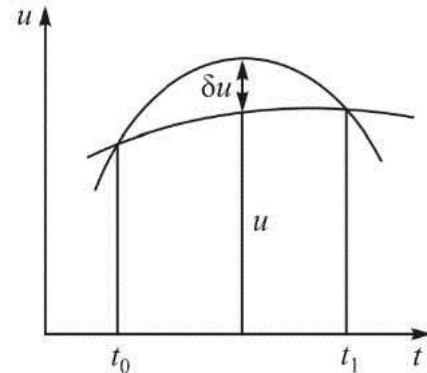


Рис. 2

$$\delta u = \delta v = \delta w = 0 \quad \text{при } t = t_0 \text{ и } t = t_1. \quad (5)$$

Интегрируя (4) по времени в пределах от t_0 до t_1 , получим:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta \mathcal{E} dt + \int_{t_0}^{t_1} \iiint_V \rho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta v + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right) dV dt = 0.$$

Второй интеграл можно преобразовать, интегрируя по частям:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \iiint_V \rho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta v + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right) dV dt = \\ & = \left[\iiint_V \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \delta u + \frac{\partial v}{\partial t} \delta v + \frac{\partial w}{\partial t} \delta w \right) dV \right]_{t_0}^{t_1} - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \iiint_V \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} \cdot \frac{\partial \delta v}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \cdot \frac{\partial \delta w}{\partial t} \right) dV dt. \end{aligned}$$

Первый объемный интеграл правой части ввиду условий (5) обращается в нуль. Второй интеграл представляет собой вариацию кинетической энергии δK .

Тогда из этого уравнения получим:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (K - \mathcal{E}) dt = 0.$$

Иными словами, на участке действительного движения системы в промежутке времени $t_0 - t_1$ интеграл

$$\int_{t_0}^{t_1} (K - \mathcal{E}) dt$$

принимает экстремальное значение. В этом заключается принцип Гамильтона, или принцип экстремума действия.

2. ТЕОРИЯ ВАРИАЦИОННЫХ МЕТОДОВ

Первое применение вариационных методов в строительной механике связано с именем Релея, который применил закон сохранения энергии к исследованию колебаний струны, стержня, пла-

стинки. Дальнейшее развитие способа Релея принадлежит Ритцу. Ритц показал, что для приближенного решения задач, сводящихся к отысканию экстремума некоторого определенного интеграла, нет необходимости решать уравнение Эйлера – Лагранжа. Можно использовать прямой путь определения функции. Если ищется функция $w(x)$, сообщающая минимум интегралу

$$J = \int f(x, w, w' \dots) dx,$$

то, задав функцию $w(x)$ в виде ряда

$$w(x) = a_1 \phi_1(x) + a_2 \phi_2(x) + \dots + a_n \phi_n(x),$$

где a_i – неопределенные параметры, а ϕ_i – «подходящие» функции, удовлетворяющие граничным условиям задачи, и подставив его в выражение интеграла J , мы получим функцию от неизвестных параметров a_i .

Для получения экстремального значения J приравниваются нулю производные от J по каждому из параметров и решаются n линейных уравнений:

$$\frac{\partial J}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial a_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial J}{\partial a_n} = 0.$$

Метод Ритца применен Тимошенко и для решения задач устойчивости стержней и пластинок. В состоянии безразличного равновесия приращение энергии системы при отклонении ее от устойчивой формы равновесия равно нулю. Можно интеграл J , выражающий полную энергию системы, представить суммой двух интегралов: интеграла $U = F_1(a_1, a_2, \dots)$, выражающего энергию внутренних сил, и интеграла $V = -P_{кр} \cdot F_2(a_1, a_2, \dots)$, определяющего энергию внешних сил.

Из равенства нулю данного интеграла:

$$J = F_1(a_1, a_2, \dots) - P_{кр} \cdot F_2(a_1, a_2, \dots) = 0,$$

определяется критическое значение усилия:

$$P_{\text{кр}} = \frac{F_1(a_1, a_2, \dots)}{F_2(a_1, a_2, \dots)}.$$

Значение неизвестных варьируемых параметров определяется с помощью линейных уравнений, полученных из условий

$$\frac{\partial P_{\text{кр}}}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial P_{\text{кр}}}{\partial a_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial P_{\text{кр}}}{\partial a_n} = 0.$$

При использовании метода Ритца в перемещениях для изгиба пластин полная потенциальная энергия

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(w) = & \frac{D}{2} \iint \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\mu) \times \right. \\ & \left. \times \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy - \iint p w dx dy, \end{aligned} \quad (6)$$

где D – цилиндрическая жесткость изгиба пластины; в напряжениях

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(M) = & \frac{1}{2D(1-\mu^2)} \times \\ & \times \iint \left[M_x^2 + M_y^2 - 2\mu M_x M_y + (1+\mu) M_{xy}^2 \right] dx dy - \iint p w dx dy, \end{aligned} \quad (7)$$

где M , M_x , M_y , M_{xy} – изгибающие погонные моменты; μ – коэффициент Пуассона; p – интенсивность внешней нагрузки.

При расчете на устойчивость полная потенциальная энергия сжатой пластинки

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \iint \left\{ \frac{D}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] - \right. \\ & \left. - \left[\frac{1}{2} N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + N_{xy} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \right\} dx dy, \end{aligned} \quad (8)$$

где N_x , N_y , N_{xy} – погонные усилия.

В методе Ритца рассматривается потенциальная энергия, при этом не применяется дифференциальное уравнение.

В отличие от метода Ритца метод Галеркина позволяет приближенно решать непосредственно дифференциальное уравнение. Суть его заключается в следующем. Пусть в некотором интервале (a, b) задача приводится к решению дифференциального уравнения

$$L(x, w, w', w'', \dots) = 0$$

при заданных граничных условиях. Для приближенного решения его задаем функцию $w(x)$ в виде ряда

$$w(x) = a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x) + \dots + a_n \varphi_n(x),$$

где φ_i – линейно независимые функции, удовлетворяющие всем граничным условиям; a_i – независимые параметры.

Неизвестные параметры a_i определяем из следующих условий:

$$\int L(x, w, w', w'', \dots) \varphi_k dx = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (9)$$

представляющих линейные относительно a_i уравнения.

Метод Галеркина имеет более общий характер по сравнению с методом Ритца, он может быть применен к любым дифференциальным уравнениям, не связанным с вариационными задачами. Условие (9) известно как условие ортогональности.

По методу Трэффца функции выбираются так, чтобы они не удовлетворяли граничным условиям, а были частными интегралами дифференциального уравнения задачи. Определять же параметры a_i он предлагает из условия, что взятый по всей области интеграл от квадрата градиента ошибки n -го приближения имеет наименьшее значение. Метод Трэффца дает приближение искомой функции снизу, а метод Ритца – сверху. Таким образом, оба метода дают нижний и верхний пределы, между которыми заключается истинное значение функции.

Сущность вариационных методов решения дифференциальных уравнений заключается в том, что функции, удовлетворяющие дифференциальному уравнению при заданных граничных условиях, замещают приближенным аналитическим выражением, наилуч-

шим образом аппроксимирующим эту функцию, т.е. добиваются, чтобы отклонение от искомого значения функции было наименьшим. При решении этой задачи возникает два вопроса:

- 1) о выборе формы аппроксимирующей функции;
- 2) о способе приближения функции.

Наиболее удобной формой выражения аппроксимирующей функции является представление функции в виде ряда

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x, y), \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n),$$

где $\varphi_i(x, y)$ – подходящие функции, наилучшим образом изображающие в совокупности исследуемую функцию; a_i – неопределенные постоянные параметры, варьируемые в соответствии с принятым способом приближения.

Различают три способа построения ряда:

1. Выбирают функции φ_i так, чтобы каждая из них удовлетворяла части граничных условий. Дифференциальное уравнение при этом не удовлетворяется. Параметры a_i определяют из условия, что весь ряд в целом наилучшим образом аппроксимирует функцию как внутри области, так и на ее границах.

2. Выбирают φ_i так, чтобы каждая из них в отдельности удовлетворяла всем граничным условиям. Дифференциальное уравнение при этом не удовлетворяется. Параметры a_i определяют из условия, что весь ряд наилучшим образом аппроксимирует функцию внутри области.

3. Выбирают φ_i так, чтобы каждая из них удовлетворяла дифференциальному уравнению, т. е. была частным интегралом этого уравнения. Граничные условия не удовлетворяются. Параметры a_i определяют из условия, чтобы весь ряд наилучшим образом аппроксимировал функцию на концах промежутка.

Первый способ построения проще других, поскольку он налагает на функции φ_i наименьшее число ограничений. Однако условие для определения параметров оказывается более сложным.

В целом же весь ряд должен наиболее близко соответствовать ожидаемому характеру изменения функции. Чем ближе ряд представляет искомую функцию, тем быстрее идет процесс сходимости приближения.

Ниже приводятся некоторые «подходящие» функции прогибов для пластинок при различных условиях закрепления контура:

1. Свободное опирание прямоугольной пластинки по контуру (рис. 3) (симметричная нагрузка):

$$w(x, y) = a_1 \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b} + a_2 \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{3\pi y}{2b} + \\ + a_3 \cos \frac{3\pi x}{2a} \cos \frac{3\pi y}{2b} + \dots,$$

$$w(x, y) = a_1 (x^2 - a^2)(y^2 - b^2) + a_2 (x^2 - a^2)x^2(y^2 - b^2)y^2 + \dots$$

2. Защемленная по контуру прямоугольная пластинка при симметричном нагружении (рис. 4):

$$w(x, y) = a_1 \cos^2 \frac{\pi x}{2a} \cos^2 \frac{\pi y}{2b} + a_2 \cos^2 \frac{3\pi x}{2a} \cos^2 \frac{3\pi y}{2b} + \dots,$$

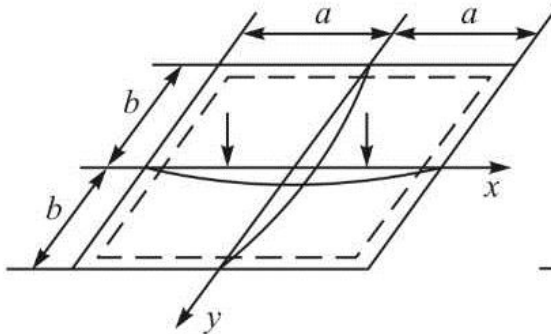


Рис. 3

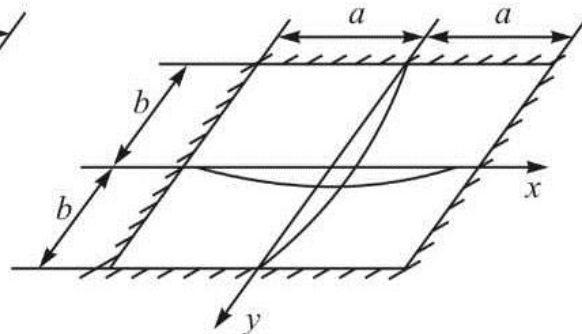


Рис. 4

$$w(x, y) = a_1 (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 + a_2 (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 + \\ + a_3 (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 + \dots,$$

$$w(x, y) = a_1 (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 + a_2 \cos^2 \frac{\pi x}{2a} \cos^2 \frac{\pi y}{2b} +$$

$$+ a_3 \cos^2 \frac{3\pi x}{2a} \cos^2 \frac{3\pi y}{2b} + \dots$$

3. Свободное опирание пластинки по углам (рис. 5):

$$w(x, y) = a_1 \cos \frac{\pi x}{2a} + a_2 \cos \frac{\pi y}{2b} + a_3 \cos \frac{3\pi x}{2a} + a_4 \cos \frac{3\pi y}{2b} + \dots,$$

$$w(x, y) = a_1 (x^2 - a^2) + a_2 (y^2 - b^2) +$$

$$+ a_3 (x^2 - a^2)x^2 + a_4 (x^2 - a^2)y^2 + \dots$$

4. Эллиптическая пластинка при свободном опирании и симметричном нагружении (рис. 6):

$$w(x, y) = a_1 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) + a_2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \frac{x^2}{a^2} +$$

$$+ a_3 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \frac{y^2}{b^2} + \dots$$

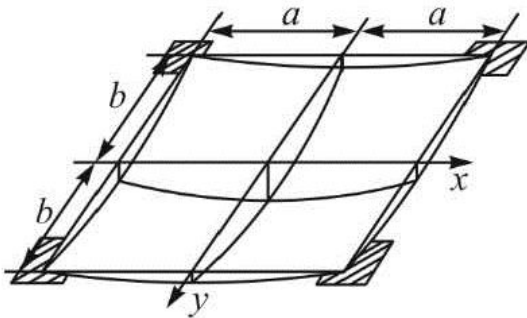


Рис. 5

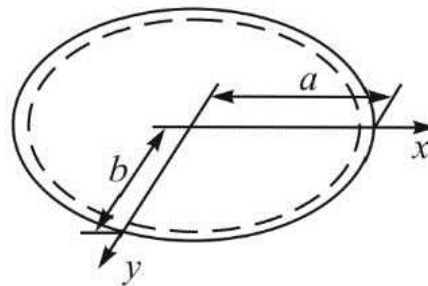


Рис. 6

Для определения параметров a_i используется тот или иной способ приближения функции в зависимости от способа задания функции:

1) метод Ритца, если функции φ_i удовлетворяют не всем граничным условиям;

2) метод Галеркина, если функции φ_i удовлетворяют всем граничным условиям и известно дифференциальное уравнение задачи;

3) метод Треффца, если можно выбрать функции φ_i так, чтобы они были частными интегралами дифференциального уравнения.

В некоторых случаях возможно комбинирование различных способов в одной задаче.

3. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ МЕТОДОВ

3.1. Применение метода Ритца – Тимошенко для изгиба пластин в рамках классической теории

Потенциальная энергия пластинки в общем случае выражается через перемещения формулой (6).

Возьмем функцию прогибов в виде ряда

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x, y) \quad (10)$$

так, чтобы удовлетворялись все геометрические условия задачи.

Для определения коэффициентов a_i воспользуемся условием экстремума полной энергии:

$$\delta \mathcal{E} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Мы получим n уравнений для определения неизвестных a_i , разрешив которые, получим функцию прогибов (10).

Рассмотрим в качестве примера изгиб свободно опертой по контуру прямоугольной пластинки (рис. 7) при задании функции прогибов в виде двойного тригонометрического ряда:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (11)$$

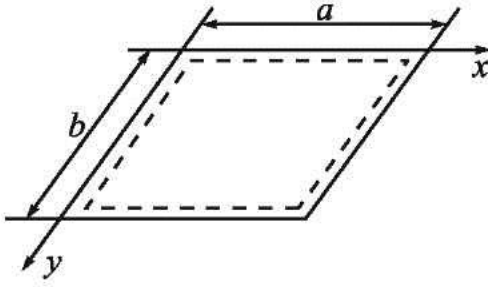


Рис. 7

После подстановки данного ряда в выражение полной энергии (6), интегрирования и преобразований получим:

$$\begin{aligned} \Xi = & \frac{\pi^4 ab}{8} D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2 - \\ & - \int_0^a \int_0^b p \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \end{aligned}$$

Дифференцирование по коэффициентам a_{mn} даст нам следующее:

$$\frac{\pi^4 ab}{8} D a_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \int_0^a \int_0^b p \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = 0.$$

Если $p = \text{const}$, то интеграл обращается в нуль для четных значений m и n , а для нечетных он равен $\frac{4ab}{\pi^2 mn}$. Поэтому получим:

$$a_{mn} = \frac{16p}{\pi^6 D m n \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \quad (m, n = 1, 3, 5, \dots).$$

Подставим значения коэффициентов a_{mn} в уравнение прогибов (11):

$$w(x, y) = \frac{16p}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{m n \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}. \quad (12)$$

Если в формуле (12) взять бесконечно большое число членов, то получим решение задачи, совпадающее с точным.

Ограничившись одним членом ряда, имеем для $m = 1, n = 1$:

$$w_{11}(x, y) = \frac{16p}{\pi^6 D} \cdot \frac{\sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}}{1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2}. \quad (13)$$

Максимальный прогиб возникает в центре пластинки при $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$, из формулы (13) получим:

$$w_{11}^{\max} = \frac{16 p}{\pi^6 D \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2}.$$

Для квадратной пластинки ($a = b$) максимальный прогиб

$$w_{11}^{\max} = \frac{4 p a^4}{\pi^6 D}.$$

Для коэффициента Пуассона $\mu = 0,3$ после подстановки выражения цилиндрической жесткости получим

$$w_{11}^{\max} = 0,0455 \frac{p a^4}{E h^6},$$

где E – модуль упругости материала.

Точное же решение [2] дает

$$w^{\max} = 0,0443 \frac{p a^4}{E h^6},$$

т.е. погрешность составляет 2,7 %.

Изгибающие погонные моменты определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Максимальные изгибающие моменты действуют в центре пластинки $\left(x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2} \right)$, для квадратной пластинки ($a = b$)

$$M_x^{\max} = M_y^{\max} = \frac{4pa^2}{\pi^4}(1+\mu) = 0,0535 pa^2.$$

Точное значение максимальных изгибающих моментов для квадратной пластинки [3]

$$M_x^{\max} = M_y^{\max} = 0,0479 pa^2.$$

Максимальный изгибающий момент для квадратной пластинки в первом приближении отличается на 11,7 %. Для повышения точности решения необходимо увеличивать количество членов ряда.

3.2. Канонические уравнения Галеркина для изгиба пластинки

Дифференциальное уравнение изогнутой поверхности пластинки имеет следующий вид [2]:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - p = 0 \quad (15)$$

или

$$\Delta \Delta w = \frac{p}{D}.$$

Возьмем функцию w в виде (10), удовлетворяющую всем геометрическим и статическим граничным условиям задачи. Метод Галеркина требует, чтобы левая часть уравнения (15) после подстановки в нее ряда (10) была ортогональна ко всем функциям, составляющим этот ряд:

$$\iint (D \sum a_i \Delta \Delta \phi_i - p) \cdot \phi_k dx dy = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (16)$$

Развертывая сумму, вынося параметры за знаки интегралов, перенося грузовые члены вправо и деля все члены на параметр D , получим:

$$\begin{aligned}
& a_1 \iint \Delta\Delta\varphi_1 \cdot \varphi_1 dx dy + a_2 \iint \Delta\Delta\varphi_2 \cdot \varphi_1 dx dy + \\
& + a_3 \iint \Delta\Delta\varphi_3 \cdot \varphi_1 dx dy + \dots = \iint \frac{P}{D} \varphi_1 dx dy, \\
& a_1 \iint \Delta\Delta\varphi_1 \cdot \varphi_2 dx dy + a_2 \iint \Delta\Delta\varphi_2 \cdot \varphi_2 dx dy + \\
& + a_3 \iint \Delta\Delta\varphi_3 \cdot \varphi_2 dx dy + \dots = \iint \frac{P}{D} \varphi_2 dx dy, \\
& a_1 \iint \Delta\Delta\varphi_1 \cdot \varphi_3 dx dy + a_2 \iint \Delta\Delta\varphi_2 \cdot \varphi_3 dx dy + \\
& + a_3 \iint \Delta\Delta\varphi_3 \cdot \varphi_3 dx dy + \dots = \iint \frac{P}{D} \varphi_3 dx dy,
\end{aligned}$$

или короче:

$$\left. \begin{aligned}
a_1 \delta_{11} + a_2 \delta_{21} + a_3 \delta_{31} + \dots &= \Delta p_1, \\
a_1 \delta_{12} + a_2 \delta_{22} + a_3 \delta_{32} + \dots &= \Delta p_2, \\
a_1 \delta_{13} + a_2 \delta_{23} + a_3 \delta_{33} + \dots &= \Delta p_3,
\end{aligned} \right\} \quad (17)$$

где

$$\delta_{ik} = \delta_{ki} = \iint \Delta\Delta\varphi_i \cdot \varphi_k dx dy, \quad \Delta p_k = \iint \frac{P}{D} \varphi_k dx dy.$$

Взаимность единичных интегралов δ_{ik} и δ_{ki} можно доказать путем интегрирования по частям, имея в виду, что ряд (10) удовлетворяет всем кинематическим и статическим граничным условиям.

Система (17) при известных интегралах δ_{ik} и Δp_k позволяет найти параметры a_i . Эта система носит название канонических уравнений Галеркина для изгиба пластинки. В первом приближении имеем одно уравнение с одним неизвестным параметром a_1 , во втором приближении – два уравнения с неизвестными a_1, a_2 и т. д. Определив параметры a_i , вносим их в ряд (10) и находим функцию $w(x, y)$.

Способ Галеркина в приложении к задачам механики можно трактовать как способ приближенного применения начала возможных перемещений. Действительно, дифференциальное уравнение равновесия

(15) представляет равнодействующую всех внешних и внутренних сил, приложенных к элементу единичных размеров, φ_i есть возможное перемещение этого элемента. Условия (16) выражают равенство нулю работы всех сил на возможных перемещениях φ_i .

Рассмотрим в качестве примера изгиб прямоугольной пластинки, защемленной по всему контуру, под действием равномерной нагрузки p (см. рис. 4). Граничные условия задачи:

$$w \Big|_{\substack{x=-a, \\ y=-b}} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=-a} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=-b} = 0.$$

Возьмем для $w(x,y)$ степенную функцию такого вида:

$$w(x,y) = a_1 (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 + a_2 (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^3 + \dots$$

Данная функция удовлетворяет всем граничным условиям. Ограничимся первым приближением. Уравнение Галеркина (17) примет вид

$$a_1 \delta_{11} = \Delta p_1,$$

где

$$\delta_{11} = \iint \Delta \Delta \varphi_1 \cdot \varphi_1 \, dx dy, \quad \Delta p_1 = \iint \frac{P}{D} \varphi_1 \, dx dy.$$

Определим значение коэффициентов:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= 4 \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial y^4} \right) \cdot \varphi_1 \, dx dy = \\ &= \frac{4 \cdot 128 \cdot 64}{9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 5} \cdot a^5 b^5 \left(b^4 + \frac{4}{7} a^2 b^2 + a^4 \right), \end{aligned}$$

$$\Delta p_1 = 4 \int_0^a \int_0^b \frac{P}{D} \cdot \varphi_1 \, dx dy = \frac{4P}{D} \cdot \frac{64}{225} \cdot a^5 b^5.$$

Внося полученные значения δ_{11} и Δp_1 в уравнение (17), получим:

$$a_1 = \frac{\Delta p_1}{\delta_{11}} = \frac{7p}{128 \left(a^4 + \frac{4}{7} a^2 b^2 + b^4 \right) D},$$

и, следовательно,

$$w(x, y) = a_1 \Phi_1 = \frac{7p}{128 \left(a^4 + \frac{4}{7} a^2 b^2 + b^4 \right) D} \cdot (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2.$$

Наибольший прогиб в центре пластинки при $x = y = 0$

$$w^{\max} = \frac{7p a^4 b^4}{128 \left(a^4 + \frac{4}{7} a^2 b^2 + b^4 \right) D}.$$

Для квадратной пластинки при $a = b$ имеем:

$$a_1 = 0,0213 \frac{p}{a^4 D},$$

$$w(x, y) = 0,0213 \frac{p}{a^4 D} \cdot (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2,$$

$$w^{\max} = 0,0213 \frac{p a^4}{D}.$$

По решению С.П. Тимошенко [3], для данной задачи $w^{\max} = 0,0202 \frac{p a^4}{D}$. Наибольшее значение изгибающий момент принимает в середине сторон квадрата. При $x = \pm a, y = 0$ найдем его по первой из формул (14):

$$M_x^{\max} = -0,205 p a^2.$$

В центре пластинки $M_x = 0,086 p a^2$.

3.3. Уравнения Кастильяно – Ритца для изгиба пластинки

Вариационное уравнение Кастильяно (3) требует, чтобы в системе, находящейся в равновесии, обратилась в нуль вариация энергии внутренних сил:

$$\delta U = 0,$$

где U выражается первым слагаемым формулы (7).

Энергия U зависит от трех неизвестных моментов M_x , M_y , M_{xy} . Выберем для приближенного их выражения функции таким образом, чтобы момент M_{xy} отвечал граничным условиям задачи, а M_x и M_y удовлетворяли дифференциальному уравнению пластинки [2]:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p. \quad (18)$$

Этого можно достичь, взяв для M_{xy} функцию в виде ряда

$$M_{xy} = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x, y) \quad (i=1, 2, 3, \dots, n), \quad (19)$$

а для M_x и M_y функции такого вида:

$$\begin{aligned} M_x &= -\frac{px^2}{4} + \int \sum a_i \varphi'_y(x, y) dx + \sum b_i \psi(y), \\ M_y &= -\frac{py^2}{4} + \int \sum a_i \varphi'_x(x, y) dx + \sum c_i \theta(x). \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь $\psi(y)$ и $\theta(x)$ зависят от одной лишь переменной. В частности, это могут быть постоянные. Несложно убедиться, что функции (19) и (20) удовлетворяют уравнению (18). Из условия минимума потенциальной энергии определяются неизвестные параметры a_i , b_i , c_i , для этого следует составить три системы уравнений:

$$\frac{\partial U}{\partial a_i} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial b_i} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial c_i} = 0, \quad (21)$$

решение которых дает значения $3n$ неизвестных параметров. Если ввести значение U из формулы (7) в уравнение (21), первая из систем (21) примет следующий вид:

$$\iint \left[M_x \frac{\partial M_x}{\partial a_i} + M_y \frac{\partial M_y}{\partial a_i} - \mu \left(\frac{\partial M_x}{\partial a_i} M_y + \frac{\partial M_y}{\partial a_i} M_x \right) + 2(1+\mu) M_{xy} \frac{\partial M_{xy}}{\partial a_i} \right] dx dy = 0. \quad (22)$$

Вторая и третья системы будут иметь аналогичный вид, надо лишь в уравнение (22) вместо a_i поставить b_i или c_i .

Рассмотрим в качестве примера задачу, описанную в предыдущем параграфе. Для прямоугольной пластинки, защемленной по контуру (см. рис. 4), примем за неизвестные изгибающие моменты M_x , M_y и крутящий момент M_{xy} . Имея в виду, что крутящий момент по контуру пластинки, а также вдоль линий $x = 0$, $y = 0$ равен нулю, а внутри контура меняется, как на рис. 8, примем для M_{xy} , ограничившись одним членом ряда, такую функцию:

$$M_{xy} = a_1 \varphi_1(x, y) = a_1 x y (x^2 - a^2)(y^2 - b^2).$$

Эта функция удовлетворяет указанным граничным условиям:

$$M_{xy}|_{x=0} = M_{xy}|_{y=0} = M_{xy}|_{x=\pm a} = M_{xy}|_{y=\pm b} = 0.$$

Функции для M_x и M_y возьмем в соответствии в формулами (20) так, чтобы удовлетворялось дифференциальное уравнение изгиба пластинки:

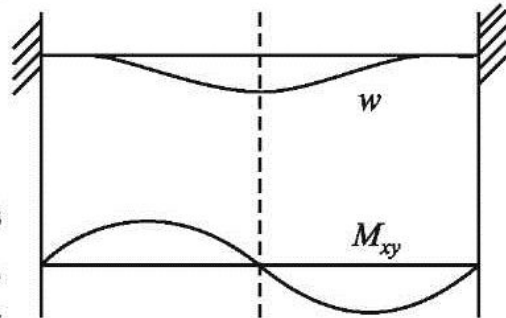


Рис. 8

$$M_x = -\frac{p x^2}{4} + a_1 \left(\frac{x^4}{4} - \frac{a^2 x^2}{2} \right) (3 y^2 - b^2) + b_1,$$

$$M_y = -\frac{p y^2}{4} + a_1 \left(\frac{y^4}{4} - \frac{b^2 y^2}{2} \right) (3 x^2 - a^2) + c_1.$$

Мы ограничились для параметров b_i и c_i первым приближением и взяли их в виде постоянных.

Рассмотрим в дальнейшем случай квадратной пластинки. Ввиду симметричной структуры последних формул очевидно, что $b_1 = c_1$, и для определения двух параметров a_1 и b_1 мы должны составить два уравнения типа (22):

$$\iint \left[M_x \frac{\partial M_x}{\partial a_1} + M_y \frac{\partial M_y}{\partial a_1} - \mu \left(\frac{\partial M_x}{\partial a_1} M_y + \frac{\partial M_y}{\partial a_1} M_x \right) + 2(1 + \mu) M_{xy} \frac{\partial M_{xy}}{\partial a_1} \right] dx dy = 0,$$

$$\iint \left[M_x \frac{\partial M_x}{\partial b_1} + M_y \frac{\partial M_y}{\partial b_1} - \mu \left(\frac{\partial M_x}{\partial b_1} M_y + \frac{\partial M_y}{\partial b_1} M_x \right) + 2(1 + \mu) M_{xy} \frac{\partial M_{xy}}{\partial b_1} \right] dx dy = 0.$$

Внося значение моментов M_x , M_y , M_{xy} и их производных, после интегрирования, подстановки пределов получим для $a = b$, $\mu = 0,3$:

$$a_1 a^{14} \cdot 0,0228 - a^{10} \cdot p \cdot 0,00066 = 0,$$

$$-a^4 \cdot \frac{p}{12} + b_1 a^2 = 0.$$

Отсюда находим

$$a_1 = 0,029 \frac{p}{a^4}, \quad b_1 = \frac{p a^2}{12}.$$

В характерных точках изгибающие моменты

$$M_x^{\max} \Big|_{\substack{x=a, \\ y=0}} = -0,1742 p a^2,$$

$$M_x \Big|_{\substack{x=0, \\ y=0}} = b_1 = \frac{p a^2}{12} = 0,083 p a^2.$$

Таким образом, решение, выполненное в напряжениях с помощью уравнения Кастильяно – Ритца, хорошо согласуется с решением в перемещениях по методу Галеркина.

3.4. Уравнение устойчивости сжатой пластинки (уравнение Галеркина)

Дифференциальное уравнение искривленной формы равновесия потерявшей устойчивость пластинки имеет следующий вид [2]:

$$D\Delta\Delta w + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0,$$

или, если ввести обозначения $\alpha = \frac{N_y}{N_x}$, $\beta = \frac{N_{xy}}{N_x}$,

$$D\Delta\Delta w + N_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\beta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = 0. \quad (23)$$

Будем выражать приближенно функцию $w(x,y)$ в виде ряда

$$w(x,y) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x,y), \quad (24)$$

удовлетворяющего всем граничным условиям задачи. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \Delta\Delta w &= \sum_{i=1}^n a_i \Delta\Delta\varphi_i; & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \sum_{i=1}^n a_i \varphi_{ixx}; \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \sum_{i=1}^n a_i \varphi_{iyy}; & \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= \sum_{i=1}^n a_i \varphi_{ixy}. \end{aligned}$$

Для определения параметров a_i по Галеркину мы должны внести выражения $w(x,y)$ и ее производные в уравнение (23) и составить n условий вида

$$\iint \sum a_i \left[D\Delta\Delta\varphi_i + N_x (\varphi_{ixx} + \alpha \cdot \varphi_{iyy} + 2\beta \cdot \varphi_{ixy}) \right] \varphi_k dx dy = 0 \quad (25)$$

$(i, k = 1, 2, 3, \dots, n).$

Развертывая сумму и вынося параметры за знаки интегралов, можно представить эти условия так:

$$a_1 \iint \left[D(\Delta\Delta\varphi_1)\varphi_1 + N_x(\varphi_{1,xx} + \alpha\varphi_{1,yy} + 2\beta\varphi_{1,xy})\varphi_1 \right] dx dy + \\ + a_2 \iint \left[D(\Delta\Delta\varphi_2)\varphi_1 + N_x(\varphi_{2,xx} + \alpha\varphi_{2,yy} + 2\beta\varphi_{2,xy})\varphi_1 \right] dx dy + \dots = 0,$$

$$a_1 \iint \left[D(\Delta\Delta\varphi_1)\varphi_2 + N_x(\varphi_{1,xx} + \alpha\varphi_{1,yy} + 2\beta\varphi_{1,xy})\varphi_2 \right] dx dy + \\ + a_2 \iint \left[D(\Delta\Delta\varphi_2)\varphi_2 + N_x(\varphi_{2,xx} + \alpha\varphi_{2,yy} + 2\beta\varphi_{2,xy})\varphi_2 \right] dx dy + \dots = 0,$$

или короче:

$$a_1\delta_{11} + a_2\delta_{21} + \dots = 0, \\ a_1\delta_{12} + a_2\delta_{22} + \dots = 0, \tag{26}$$

где

$$\delta_{ik} = \delta_{ki} = \iint \left[D(\Delta\Delta\varphi_i)\varphi_k + N_x(\varphi_{i,xx} + \alpha\varphi_{i,yy} + 2\beta\varphi_{i,xy})\varphi_k \right] dx dy.$$

Система (26) имеет ненулевое решение при условии равенства нулю определителя из всех коэффициентов δ_{ik} . Записав это условие:

$$\det = \begin{vmatrix} \delta_{11}, & \delta_{21}, & \dots \\ \delta_{12}, & \delta_{22}, & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0, \tag{27}$$

получим уравнение n -й степени, из которого определяем n корней критического усилия N_x . В первом приближении ($n = 1$) имеем уравнение первой степени, во втором – ($n = 2$) – уравнение второй степени и т. д. Уравнение (27) называется уравнением Галеркина для устойчивости сжатой пластинки. В частном случае, если действуют одни лишь сжимающие силы N_x ($N_y = N_{xy} = 0$), обращаются в нуль коэффициенты α и β .

Этот метод позволяет решать задачи устойчивости пластин для различных случаев нагружения пластин.

3.5. Энергетический метод расчетов на устойчивость

Энергетический критерий потери устойчивости основан на рассмотрении потенциала всех сил, действующих на систему. Система находится в устойчивом равновесии, если ее полная энергия является минимальной. Используя энергетический метод, С.П. Тимошенко в 1907 г. рассмотрел продольный изгиб стержня в упругой среде, позже исследовал устойчивость пластин при различных условиях закрепления и оболочек.

Плоская форма равновесия пластинки является устойчивой, когда при каждом отклонении от плоской формы равновесия потенциальная энергия пластинки растет. В противном случае равновесное состояние пластинки оказывается неустойчивым.

При выходе из равновесия потенциальная энергия изгиба увеличивается и одновременно уменьшается потенциальная энергия сжатия. Равенство $U = V$ дает критическое значение сжимающего напряжения.

Для пластины при свободном опирании по контуру уравнение прогибов представляется в форме (11), тогда из уравнения (8) следует:

$$U = \frac{\pi^4 D a b}{8} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2,$$
$$V = \frac{N_{кр}}{2} \cdot \frac{a b}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2}.$$

Из основного уравнения ($U = V$) найдем:

$$N_{кр} = \pi^2 D \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \frac{m^2}{a^2}}. \quad (28)$$

Коэффициенты a_{mn} должны быть выбраны так, чтобы $N_{кр}$ было минимальным. Из формулы (28) видно, что все члены, кроме одного, нужно положить равными нулю. Таким способом получим:

$$N_{\text{кр}} = \pi^2 D \frac{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)}{\frac{m^2}{a^2}} = \pi^2 D \left(\frac{m}{a} + \frac{a}{b^2 m} \right)^2.$$

Это значение критического усилия получается и при использовании метода рядов для интегрирования дифференциального уравнения сложного изгиба прямоугольной пластинки.

Выпучивание пластинки при устойчивости происходит по поверхности:

$$w(x, y) = a_{mn} \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b}.$$

3.6. Применение метода Бубнова – Галеркина для расчета пологих оболочек

У пологих оболочек стрела подъема не превышает 1/5 наименьшего линейного размера в плане. Теория расчета пологих оболочек создана В.З. Власовым и основывается на следующих гипотезах:

- 1) оболочка принимается настолько полой, что геометрию ее поверхности считают совпадающей с геометрией ее проекции;
- 2) пренебрегают членами, содержащими кривизны и их производные в качестве коэффициентов.

Дифференциальные уравнения, описывающие поведение пологих оболочек, имеют следующий вид [4]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{Eh} \Delta \Delta \varphi - \Delta_k w &= 0, \\ \Delta_k \varphi + D \Delta \Delta w &= p, \end{aligned} \right\}$$

здесь φ – функция напряжений; w – функция прогибов.

Для решения системы дифференциальных уравнений используются вариационные методы решения Бубнова – Галеркина, Ритца – Тимошенко. Рассмотрим применение метода Бубнова – Галеркина в форме, разработанной для пологих оболочек В.З. Власовым.

Функцию напряжений и функцию прогибов представляем в форме рядов:

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \varphi_{mn}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} X_m(x) \cdot Y_n(y), \\ w(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} w_{mn}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} U_m(x) \cdot V_n(y).\end{aligned}\quad (29)$$

Внешнюю нагрузку также представляем в форме ряда

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} U_m(x) \cdot V_n(y). \quad (30)$$

При известной функции нагрузки определяем коэффициенты ряда c_{mn} .

Функции $X_m(x)$, $Y_n(y)$, $U_m(x)$, $V_n(y)$ выбираются так, чтобы φ_{mn} и w_{mn} удовлетворяли всем граничным условиям. Эти функции можно представить в виде линейных комбинаций фундаментальных балочных функций, заведомо удовлетворяющих граничным условиям задачи.

Постоянные a_{mn} и b_{mn} определяем из системы уравнений

$$\left. \begin{aligned}\int_0^a \int_0^b \left(\frac{1}{Eh} \Delta \Delta \varphi - \Delta_k \varphi \right) \varphi_{mn} dx dy &= 0, \\ \int_0^a \int_0^b (\Delta_k \varphi + D \Delta \Delta w - p) w_{mn} dx dy &= 0,\end{aligned}\right\} \quad (31)$$

где a , b – размер оболочки в плане.

Вариационные уравнения (31) после подстановки рядов (29) и (30) примут вид

$$\left. \begin{aligned}\int_0^a \int_0^b \left(\frac{1}{Eh} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \Delta \Delta \varphi_{mn} - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \Delta_k w_{mn} \right) \varphi_{mn} dx dy &= 0, \\ \int_0^a \int_0^b \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \Delta_k \varphi_{mn} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \Delta \Delta w_{mn} \right) w_{mn} dx dy &= \\ = \int_0^a \int_0^b \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} p_{mn} w_{mn} dx dy.\end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Так как фундаментальные балочные функции, их вторые и четвертые производные обладают свойством ортогональности, то в системе уравнений (32) исчезнут все коэффициенты, имеющие разные индексы. Для определения каждого коэффициента останется по два уравнения следующего вида:

$$\left. \begin{aligned} a_{mn} \delta_{mn} - b_{mn} \delta'_{mn} &= 0, \\ a_{mn} r'_{mn} + b_{mn} r_{mn} &= \Delta_{mn}. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Входящие в эти уравнения коэффициенты определяются такими выражениями:

$$\begin{aligned} \delta_{mn} &= \int_0^a \int_0^b \left(\frac{1}{Eh} \Delta \Delta \varphi_{mn} \right) \varphi_{mn} dx dy = \\ &= \frac{1}{Eh} \int_0^a \int_0^b \left(X_m^{(IV)} Y_n + 2X_m'' Y_n'' + X_m Y_n^{(IV)} \right) X_m Y_n dx dy, \end{aligned}$$

$$\delta'_{mn} = \int_0^a \int_0^b \Delta_k w_{mn} \varphi_{mn} dx dy = \int_0^a \int_0^b (\chi_1 U_m V_n'' + \chi_2 U_m'' V_n) X_m Y_n dx dy,$$

$$r'_{mn} = \int_0^a \int_0^b \Delta_k \varphi_{mn} w_{mn} dx dy = \int_0^a \int_0^b (\chi_1 X_m Y_n'' + \chi_2 X_m'' Y_n) U_m V_n dx dy,$$

$$r_{mn} = \int_0^a \int_0^b D \Delta \Delta w_{mn} w_{mn} dx dy = D \int_0^a \int_0^b \left(U_m^{(IV)} V_n + 2U_m'' V_n'' + U_m V_n^{(IV)} \right) U_m V_n dx dy,$$

$$\Delta_{mn} = c_{mn} \int_0^a \int_0^b p_{mn} w_{mn} dx dy = c_{mn} \int_0^a \int_0^b U_m^2(x) V_n^2(y) dx dy.$$

Решая систему уравнений (33) для каждой пары значений m и n , находим:

$$a_{mn} = \frac{\Delta_{mn} \delta'_{mn}}{\delta_{mn} r'_{mn} + \delta'_{mn} r_{mn}}, \quad b_{mn} = \frac{\Delta_{mn} \delta_{mn}}{\delta_{mn} r'_{mn} + \delta'_{mn} r_{mn}}.$$

При известных функциях напряжений φ и прогибов w рассчитывается напряженно-деформированное состояние пологой оболочки.

4. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РИТЦА – ТИМОШЕНКО ДЛЯ РАСЧЕТА ГИБКИХ ПЛАСТИН

В настоящее время достаточно развита теория расчета жестких пластин, для которых характерна линейная зависимость прогибов от действия поперечной нагрузки. При этом основную роль играют напряжения от изгибающих и крутящего моментов, а потенциальная энергия пластинки определяется соотношениями (6), (7). Однако с увеличением нагрузки и, соответственно, прогибов возрастает роль мембранных усилий, которые не учитываются в классической теории пластин [3–6].

Потенциальная энергия изгиба пластинки в декартовой системе координат имеет следующий вид [1, 3]:

$$U_M = \frac{1}{2} \iint_F (M_x \theta_x + M_y \theta_y + 2M_{xy} \theta_{xy}) dx dy, \quad (34)$$

где M_x, M_y, M_{xy} – действующие в пластинке изгибающие и крутящий моменты; $\theta_x, \theta_y, \theta_{xy}$ – соответствующие кривизны срединной поверхности пластинки.

С учетом принятых в теории пластин уравнений соотношение (34) для прямоугольной пластинки записывается в следующем виде:

$$U_M = \frac{D}{2} \iint_F \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy, \quad (35)$$

где D – цилиндрическая жесткость пластинки, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$; E, μ – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала соответственно.

но; h – толщина пластинки; $w(x, y)$ – функция прогиба пластинки, зависящая от координат x, y .

Аналогично для круглой пластинки при симметричном относительно оси нагружении потенциальная энергия деформации изгиба определяется интегралом

$$U_M = \frac{D}{2} \iint_F \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{2\mu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] r dr d\theta, \quad (36)$$

где w – функция прогиба пластинки, зависящая от радиальной координаты; r – радиальная координата.

Решения задач изгиба жестких пластин основаны на минимуме полной энергии системы с использованием уравнений (35) и (36) для прямоугольной и круглой пластинок соответственно. При действии на пластинку поперечной нагрузки и увеличении прогибов в пластинке возникают мембранные усилия, которым соответствует потенциальная энергия, определяемая в виде

$$U_N = \frac{1}{2} \iint_F (N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + 2N_{xy} \gamma_{xy}) dx dy,$$

где N_x, N_y, N_{xy} – мембранные усилия; $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ – вызванные ими относительные деформации;

$$U_N = \frac{Eh}{8(1-\mu^2)} \iint_F \left\{ \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right]^2 + 2(1-\mu) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy. \quad (37)$$

Доля потенциальной энергии мембранных усилий круглой пластинки определяется следующим образом:

$$U_N = \frac{1}{2} \iint_F (N_r \varepsilon_r + N_t \varepsilon_t) r dr d\theta,$$

где $\varepsilon_r, \varepsilon_t$ – деформации в радиальном и тангенциальном направлениях соответственно; N_r, N_t – мембранные усилия в пластинке;

$$U_N = \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \iint_F \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right)^2 \mu \frac{u}{r} + \right. \\ \left. + 2\mu \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{u}{r} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^4 \right] r dr d\theta, \quad (38)$$

где u – перемещение в радиальном направлении.

Если не учитывать радиальные перемещения, то выражение (38) существенно упрощается:

$$U_N = \frac{Eh}{8(1-\mu^2)} \iint_F \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^4 r dr d\theta.$$

Составляющие потенциальной энергии (35), (37) для прямоугольных пластинок и (36), (38) для круглых пластинок образуют с потенциалом нагрузки функционал полной энергии, учитывающий и моменты, и мембранные усилия, и могут быть использованы для расчета гибких пластин вариационными методами.

Пример 1. Рассмотрим поведение круглой пластинки радиусом $r=a$, заземленной по контуру, под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивностью p_0 .

Функцию прогибов задаем в виде

$$w(r) = a_1 (a^2 - r^2)^2, \quad (39)$$

удовлетворяющем граничным условиям и условию симметрии деформирования:

$$w|_{r=a} = 0; \quad \left. \frac{dw}{dr} \right|_{r=0} = 0; \quad \left. \frac{dw}{dr} \right|_{r=a} = 0.$$

Решение (39) выбрано в виде, аналогичном известному точному решению данной задачи для жесткой пластинки [1], но включа-

ет неизвестный параметр a_1 , который определяется из условия минимума полной энергии пластинки.

Функцию перемещений в радиальном направлении примем в виде

$$u(r) = a_2(a - r). \quad (40)$$

Полагая, что из условий симметрии деформирования $u|_{r=0} = 0$, в защемлении $u|_{r=a} = 0$, а параметр a_2 также определяем из решения вариационной задачи. Подставляя выражения (39) и (40) в соотношения (36) и (38), получим зависимости для определения потенциальной энергии деформации изгиба и потенциальной энергии мембранных усилий:

$$U_M = \frac{32}{3} \pi D a_1^2 a^6,$$

$$U_N = \frac{\pi E h}{1 - \mu^2} \left(\frac{1}{4} a_2^2 a^4 + a_1^2 a_2 a^9 \left(\frac{82}{315} \mu - \frac{46}{315} \right) + \frac{32}{105} a_1^4 a^{14} \right).$$

Работу внешней распределенной нагрузки вычисляем интегралом

$$A_n = \iint_F p_0 w r dr d\theta = \frac{1}{3} \pi p_0 a_1 a^6.$$

Таким образом, с учетом потенциальной энергии мембранных напряжений полная энергия для гибких пластин

$$\mathcal{E} = U_M + U_N + V, \quad (41)$$

где V – потенциальная энергия внешних сил, $V = -A_n$.

Неизвестные коэффициенты a_1 , a_2 определяются из условия минимума полной энергии пластинки:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2;$$

откуда

$$a_2 - \frac{4}{315} a_1^2 a^5 (23 - 41\mu) = 0; \quad (42)$$

$$a_1^3 a^{10} \frac{128 E h}{35 a^2 (1 - \mu^2)} + a_1 a \left[\frac{64 D}{a} - \frac{4 E h a_2 a^2 (23 - 41\mu)}{105 (1 - \mu^2)} \right] - p_0 = 0. \quad (43)$$

Уравнения (42) и (43) сводятся к кубическому уравнению:

$$a_1^3 + a_1 \frac{h^2}{a^8} K - \frac{3(1 - \mu^2) p_0}{16 E h a^8} K = 0, \quad (44)$$

где $K = \frac{11025}{7031 + 1886\mu - 1681\mu^2}$.

Уравнение (44) решаем с использованием формулы Кардано [5], находим значения параметров a_1 , a_2 , затем функцию прогибов w и радиальные перемещения u .

Расчет показал, что учет радиальных перемещений не вносит существенной поправки в значения прогибов w и погрешность расчета без учета радиальных перемещений не превышает 0,5 %.

При расчете без учета перемещений пластинки в радиальном направлении вместо уравнений (42) и (43) имеем одно уравнение вида

$$a_1^3 + a_1 \frac{h^2}{a^8} \frac{35}{24} - \frac{(1 - \mu^2) p_0}{E h a^8} \frac{35}{128} = 0. \quad (45)$$

На рис. 9 приведены результаты расчета максимальных прогибов в центре жесткой пластинки w_{\max}^* , отнесенных к максимальным прогибам гибкой пластинки w_{\max} и полученных по формуле (45), в зависимости от относительной толщины (a/h); радиус пластинки $a = 0,1$ м, $p_0 = 0,1$ МПа.

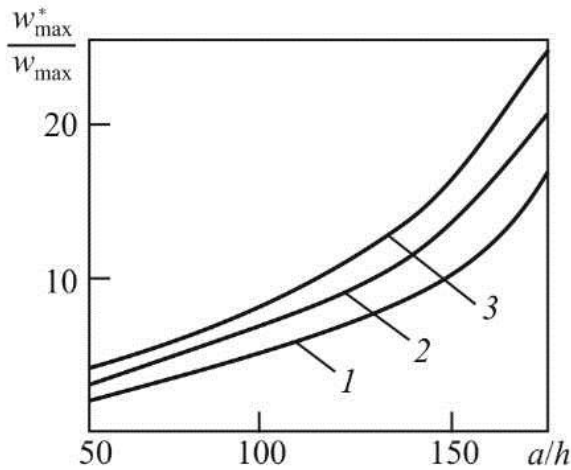


Рис. 9

Представлены результаты расчета для пластин из различных материалов: кривая 1 – сталь, 2 – титан, 3 – алюминий. На рис. 9 видно, что по мере утонения пластинки и перехода к мембране роль потенциальной энергии мембранных усилий возрастает.

Пример 2. Рассмотрим прямоугольную пластину, свободно опертую по краям, с размерами сторон a и b (см. рис. 7). В этом случае функцию прогибов задают обычно в виде ряда

$$w(x, y) = \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (46)$$

Ограничившись первым членом ряда (46), после подстановки в выражение (38) получим потенциальную энергию мембранных сил в следующем виде:

$$U_N = \frac{3D}{h^2} \frac{a_{11}^4 \pi^4}{128 a^3 b^3} [9a^4 + 9b^4 + 2(2-\mu)a^2 b^2].$$

В свою очередь, потенциальная энергия изгиба пластинки

$$U_M = \frac{D}{8} \frac{a_{11}^2 \pi^4}{a^3 b^3} (a^2 + b^2)^2.$$

Из уравнения баланса полной энергии (41) методом Ритца – Тимошенко получаем кубическое уравнение для определения коэффициента a_{11} , которое для квадратной пластинки ($a = b$) примет вид

$$a_{11}^3 + a_{11} \frac{16h^2}{3(11-\mu)} - \frac{256 \bar{p} h^3 \bar{b}^4 (1-\mu^2)}{\pi^6 (11-\mu)} = 0, \quad (47)$$

где \bar{p}, \bar{b} – безразмерные параметры, характеризующие нагрузку и геометрию пластинки соответственно, $\bar{p} = p / E$; $\bar{b} = b / h$.

Кубическое уравнение (47) решается относительно a_{11} с помощью формулы Кардано [7], что позволяет определить функцию прогибов $w(x,y)$ (46). Следует отметить, что при использовании метода Ритца – Тимошенко по классической теории жестких пластин с учетом только потенциальной энергии изгиба пластинки мы получим линейное уравнение для определения коэффициентов a_{mn} , тогда функция прогибов для одного члена ряда будет иметь вид

$$w(x,y) = \frac{4p_0 b^4}{\pi^6 D} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (48)$$

На рис. 10 приведены результаты расчета максимальных прогибов в центре прямоугольной свободно опертой по краям пластины ($x = a/2$; $y = b/2$) по классической теории жестких пластин (кривые 2, 4) и по данной методике (кривые 1, 3), т.е. полученные по соотношению (48). При расчете принимали $a = b = 0,1$ м, $h = 0,001$ м, $\bar{b} = 100$; материал пластинки – сталь (кривые 1, 2), алюминий (кривые 3, 4).

Из сопоставления результатов, представленных на рис. 9 и 10, следует, что зависимость прогибов гибких пластин от давления существенно нелинейна, так как учитывает роль мембранных усилий. Кроме того, чем меньше модуль упругости материала пластинки (меньше жесткость материала), тем большее влияние оказывают мембранные усилия на ее деформацию.

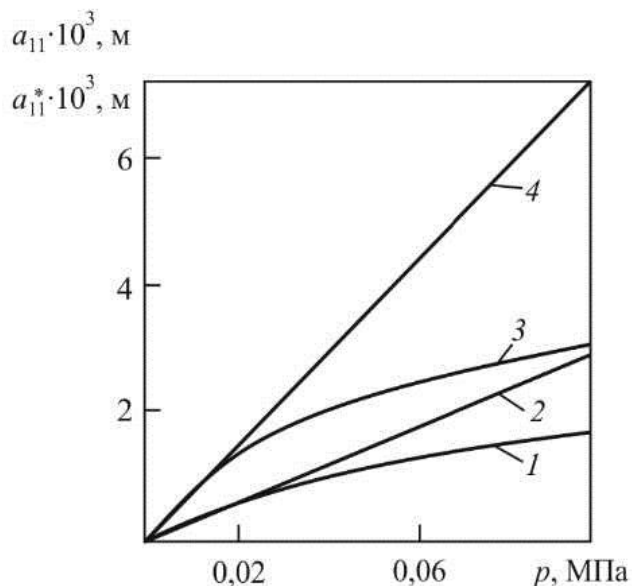


Рис. 10

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука: Физматлит, 1970. – 512 с.
2. Кристалинский Р.Е., Шапошников Н.Н. Решение вариационных задач строительной механики в системе Mathematica: учеб. пособие. – СПб.: Лань, 2010. – 240 с.
3. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки: пер. с англ. – М.: Наука, 1966. – 635 с.
4. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности: учеб. для вузов. – М.: Высш. шк., 1982. – 264 с.
5. Колкунов Н.В. Основы расчета упругих оболочек: учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 1972. – 296 с.
6. Саргсян А.Е. Строительная механика. Механика инженерных конструкций: учеб. для вузов. – М.: Высш. шк., 2008. – 462 с.
7. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – СПб.: Лань, 2009. – 608 с.