

**ОПД.Р.03 СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА**  
**МАТРИЦЫ**  
Учебное пособие

Учебное пособие содержит изложение материала о применении теории матриц в расчетах строительных конструкций. Приведены матричные методы определения перемещений, матричная форма метода сил и метода перемещений, матричный метод проф. А.Ф.Смирнова для определения критической нагрузки в теории устойчивости сооружений, матричные методы решения задач динамики сооружений. Завершает изложение применение теории матриц в методе конечных элементов. Теоретический материал сопровождается решением примеров.

Предназначено для студентов всех форм обучения.

## Введение

Настоящее пособие включает разделы строительной механики, в которых излагаются методы статического и динамического расчета сооружений использующие матричные методы. Представленный материал соответствует действующим в настоящее время учебным программам для строительных и транспортных специальностей.

Развитие строительной механики в настоящее время связано с применением в расчетах строительных конструкций мощных персональных компьютеров (ПК). В связи с этим в теорию расчетов все шире внедряются, использующие удобные для реализации на ПК матричные методы. В настоящее время каждый инженер-расчетчик имеет в своем распоряжении мощный персональный компьютер, который может выполнить любой расчет по программам, написанным на основе методов строительной механики. В свою очередь методы строительной механики требуют перед программированием описания задачи в матричной форме, поскольку язык матричной алгебры оказался наиболее удобным для общения человека с электронно-вычислительной машиной.

Студенты, обучающиеся на инженерно-строительных специальностях, по мере изучения различных дисциплин впервые встречаются с теорией матриц в курсе высшей математики, где им даются основные понятия матричной алгебры. Там же показано применение теории матриц к решению систем линейных алгебраических уравнений. Это все, что дает курс высшей математики будущему инженеру строителю. Для изучения строительной механики этих сведений, полученных на первом курсе обучения явно недостаточно. Поэтому в данном пособии в начале кратко изложен материал матричной алгебры, известный из курса высшей математики, а именно сложение, умножение и обращение матриц. Далее излагаются понятия собственных чисел и собственных векторов матриц. Формулируется полная проблема собственных значений матриц. Дается один из методов решения этой проблемы – метод итераций.

В пособии изложены следующие матричные методы: теория перемещений, методы статического расчета: методы сил и перемещений, определение критической нагрузки при расчете на устойчивость, методы динамического расчета конструкций при действии гармонической и произвольной нагрузки.

Последний раздел посвящен использованию теории матриц в методе конечных элементов. Здесь также рассмотрено решение статических задач, задач устойчивости и динамики стержневых систем.

## ОБОЗНАЧЕНИЯ

$A(\omega)$	-	амплитудно-частотная характеристика (АЧХ)
$\Gamma$	-	матрица потерь системы (диссипативная матрица)
$D$	-	матрица податливости системы
$\delta_{ij}$	-	единичные перемещения (элементы матрицы податливости)
$G$	-	матрица податливости, используемая для перемножения эпюр
$k(t)$	-	импульсная переходная функция
$\delta(t)$	-	обобщенная функция Дирака
$\delta^*$	-	логарифмический декремент колебаний
$\gamma$	-	коэффициент потерь материала системы
$H$	-	парциальная матрица
$K$	-	матрица жесткости системы
$K_G$	-	матрица геометрической жесткости
$r_{ij}$	-	единичные реакции (элементы матрицы жесткости)
$L, l$	-	матрица собственных значений, собственные значения
$m, m$	-	матрица масс системы и масса материальной точки
$\mu$	-	динамический коэффициент
$p, p$	-	диагональная матрица собственных частот и частота (собственных) свободных колебаний
$\theta$	-	техническая частота собственных колебаний системы в герцах
$x, y, z$	-	оси координат
$t$	-	Время
$\Phi$	-	матрица собственных векторов
$\bar{\varphi}_i$	-	собственные векторы
$Y$	-	матрица ортонормированных собственных векторов
$\bar{\psi}_i$	-	ортонормированный собственный вектор
$\Phi^*(\omega)$	-	передаточная функция
$\varphi(\omega)$	-	фазово-частотная характеристика (ФЧХ)
$\omega$	-	частота возмущения (частота вынужденных колебаний)
$u, v, w, u, v, w$	-	матрицы перемещений и перемещения по направлению $x, y, z$ соответственно
$\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$	-	проекции скоростей точек на оси координат $x, y, z$
$\ddot{u}, \ddot{v}, \ddot{w}$	-	проекции ускорений точек на оси координат $x, y, z$
$Z$	-	обобщенные перемещения

## 1. Краткие сведения из теории матриц

Матрица – прямоугольная таблица размером  $m \times n$  ( $m$  – количество строк,  $n$  – количество столбцов). Порядок матриц определяется числами  $m$  и  $n$ . Если  $m = 1$ ,  $n$  любое число имеем матрицу строку. Если  $m$  любое число,  $n = 1$  – матрицу столбец. Иногда матрицу столбец называют вектором и обозначают  $\vec{A}, \vec{B}, \dots$ . Если  $m = n$  матрица называется квадратной. Единичная матрица – квадратная матрица, у которой на главной диагонали расположены элементы равные единице, а остальные элементы равны нулю.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}; \quad \vec{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}; \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix};$$
$$C = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad \dots \quad c_n];$$

Выше приведены прямоугольная матрица  $A$ , матрица столбец (вектор)  $\vec{B}$ , единичная матрица -  $E$ ; матрица строка  $C$ .

Элемент матрицы  $A$  -  $a_{ij}$  есть число расположенное на пересечении  $i$ -й строки и  $j$  – го столбца.

$$A = [a_{ij}]; \quad \vec{B} = [b_j]; \quad C = \{c_i\}.$$

Примеры некоторых числовых матриц приведены ниже

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & 7 & -9 \\ 4 & 8 & -8 \end{bmatrix}; \quad \vec{D} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}; \quad F = [3 \quad 2 \quad 1 \quad 0]$$

### 1.1. Действия над матрицами

#### 1.1.1. Умножение матрицы на число

Пусть  $A$  – матрица,  $\alpha$  – число.  $C = \alpha \cdot A$ ;  $c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$ .

Элемент матрицы произведения  $C$  есть произведение элемента матрицы  $A$  на общий множитель  $\alpha$ .



Пример №1:

Дано:  $\alpha = 5$ ;  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ . Найти  $C = \alpha \cdot A$ .

Решение:

$$C = 5 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 10 \end{bmatrix}.$$

### 1.1.2. Сложение матриц

Если  $A$  и  $B$  – матрицы одного порядка  $m \times n$ . Можно определить матрицу  $C$  как сумму матриц  $A$  и  $B$ :

$$C = A + B; \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Элемент матрицы суммы:  $C$  есть сумма элементов матриц  $A$  и  $B$ . При сложении матриц справедлив переместительный закон:

$$A + B = B + A.$$

Пример №2:

Дано:  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ;  $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ . Найти:  $C = A + B$ .

Решение:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

### 1.1.3. Произведение матриц

Если  $A$  порядка  $m \times n$  и  $B$  порядка  $n \times k$ , то матрица  $C$  порядка  $m \times k$  есть произведение матриц  $A$  и  $B$ :

$$C = A \cdot B; \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk}.$$

Элемент матрицы произведения  $C$  равен сумме произведений элементов  $i$  – й строки матрицы  $A$  на элементы  $k$  – го столбца матрицы  $B$ .

При умножении матриц не справедлив переместительный закон:

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Пример №3:

Дано:  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ ;  $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ . Найти:  $C = A \cdot B$ ;  $D = B \cdot A$ .

Решение:

$$\begin{aligned} C &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 & 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 & 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 & 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 2 & 3 \cdot (-3) + 4 \cdot 1 \\ 5 \cdot (-1) + 6 \cdot 3 & 5 \cdot (-2) + 6 \cdot 2 & 5 \cdot (-3) + 6 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 9 & 2 & -5 \\ 13 & 2 & -9 \end{bmatrix}. \\ D &= \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (-1) \cdot 1 + (-2) \cdot 3 + (-3) \cdot 5 & (-1) \cdot 2 + (-2) \cdot 4 + (-3) \cdot 6 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 5 & 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -22 & -28 \\ 14 & 20 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

#### 1.1.4. Транспонирование матриц

$$B = A^T; \quad A = B^T; \quad (A^T)^T = A.$$

Операция транспонирования матрицы есть замена строк ее столбцами и наоборот:  $b_{ij} = a_{ji}$ .

Пример №4:

Дано:  $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ . Найти:  $B = A^T$ .

Решение:

$$B = A^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -3 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}.$$

#### 1.1.5. Обращение матриц

Матрица  $B$  есть обратная по отношению к матрице  $A$ , если выполняются следующие зависимости

$$B = A^{-1}; \quad A = B^{-1}; \quad A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{21}^* & \dots & \dots & A_{n1}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* & \dots & \dots & A_{n2}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n}^* & A_{2n}^* & \dots & \dots & A_{nn}^* \end{bmatrix}; \quad \det A - \text{определитель матрицы } A;$$

$A_{ij}^*$  – алгебраическое дополнение элемента  $ij$  матрицы  $A$ .

$$A_{ij}^* = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}.$$

Алгебраическое дополнение находится как определитель, составленный из элементов матрицы  $A$ , в которой вычеркнуты  $i$ -я строка и  $j$ -й столбец. Знак алгебраического дополнения определяется знаком определителя, умноженным на  $(-1)^{i+j}$ .

Мы привели здесь только один способ, который можно использовать для обращения матриц невысокого порядка. Другие способы обращения матриц не приводим, так как предполагаем, что для обращения матриц высокого порядка будет использоваться вычислительная техника.

Пример №5:

Дано:  $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$ . Найти:  $B = A^{-1}$ .

Решение:

Определитель матрицы  $A$ :

$$\begin{aligned} \det A &= 4 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 4(6 \cdot 8 - 3 \cdot 3) - 2(2 \cdot 8 - 3 \cdot 1) + 1(2 \cdot 3 - 6 \cdot 1) = \\ &= 4 \cdot 39 - 2 \cdot 13 + 0 = 156 - 26 = 130. \end{aligned}$$

Алгебраические дополнения матрицы  $A$ :

$$A_{11}^* = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 6 \cdot 8 - 3 \cdot 3 = 48 - 9 = 39;$$

$$A_{22}^* = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 4 \cdot 8 - 1 \cdot 1 = 32 - 1 = 31;$$

$$A_{33}^* = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 4 \cdot 6 - 2 \cdot 2 = 24 - 4 = 20;$$

$$A_{12}^* = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 8 - 1 \cdot 3) = -16 + 3 = -13;$$

$$A_{13}^* = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 6 = 6 - 6 = 0;$$

$$A_{21}^* = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 8 - 3 \cdot 1) = -16 + 3 = -13;$$

$$A_{23}^* = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(4 \cdot 3 - 1 \cdot 2) = -12 + 2 = -10;$$

$$A_{31}^* = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 6 \cdot 1 = 6 - 6 = 0;$$

$$A_{32}^* = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(4 \cdot 3 - 2 \cdot 1) = -12 + 2 = -10.$$

Обратная матрица:

$$B = A^{-1} = \frac{1}{130} \cdot \begin{bmatrix} 39 & -13 & 0 \\ -13 & 31 & -10 \\ 0 & -10 & 20 \end{bmatrix}.$$

## 1.2. Собственные числа и собственные векторы матриц

$$A \cdot \vec{\varphi} = \vec{\varphi} \cdot \lambda. \quad (1.1)$$

Если для квадратной матрицы  $A$  можно найти вектор  $\vec{\varphi}$  и число  $\lambda$ , отвечающие выражению (1.1), то этот вектор и это число называются собственным значением и собственным вектором матрицы  $A$ .

Решение (1.1) на первый взгляд несложно. В частности, из (1.1) следует система линейных уравнений, коэффициенты которых выражаются через элементы матрицы  $A$  и собственные числа  $\lambda$ :

$$(A - \lambda \cdot E) \cdot \bar{\varphi} = 0. \quad (1.2)$$

Система однородных линейных уравнений (1.2) имеет ненулевое решение  $\bar{\varphi} \neq \theta$  в том случае, если определитель матрицы коэффициентов равен нулю:

$$|A - \lambda \cdot E| = 0. \quad (1.3)$$

Для матрицы  $A$  – порядка  $n$  уравнение (1.3) есть алгебраическое уравнение степени  $n$ , решив которое можно найти  $n$  собственных чисел  $\lambda_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ , после их подстановки в (1.3) и решения  $n$  систем однородных линейных уравнений  $n$  – го порядка можно получить  $n$  – собственных векторов.

Пример №6:

Дано:  $A = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ .

Найти: собственные числа  $\lambda_i$ , собственные векторы  $\bar{\varphi}_i$ .

Решение: составим характеристическое уравнение (1.3):

$$\begin{vmatrix} 8 - \lambda & 7 \\ 7 & 8 - \lambda \end{vmatrix} = (8 - \lambda)^2 - 49 = 0,$$

Корни этого уравнения есть собственные числа матрицы  $A$ :  $\lambda_1 = 15$ ,  $\lambda_2 = 1$ . Находим собственные векторы, подставив значение  $\lambda_1 = 15$  в (1.2):

$$(8 - 15) \cdot \varphi_{11} + 7 \cdot \varphi_{21} = 0,$$

откуда  $\varphi_{21} / \varphi_{11} = 1$ , из условия нормирования  $\varphi_{11}^2 + \varphi_{21}^2 = 1$  находим  $\varphi_{11} = 0.707$ ,  $\varphi_{21} = 0.707$ . Аналогично находим компоненты второго собственного вектора, после подстановки в (1.2)  $\lambda_2 = 1$ :

$$(8 - 1) \cdot \varphi_{12} + 7 \cdot \varphi_{22} = 0,$$

откуда  $\varphi_{12} / \varphi_{22} = -1$ , из условия нормирования  $\varphi_{12}^2 + \varphi_{22}^2 = 1$  находим  $\varphi_{12} = -0.707$ ,  $\varphi_{22} = 0.707$ .

Таким образом, найдены матрицы собственных значений  $A = \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,

и собственных векторов  $\Phi = \begin{bmatrix} 0.707 & -0.707 \\ 0.707 & 0.707 \end{bmatrix}$ .

Из изложенного выше следует, что описанный метод хорош только для матриц невысокого порядка и приводит к существенным вычислительным трудностям при больших  $n$ .

Для матриц высокого порядка очень эффективен способ итераций, который состоит в следующем: задаются произвольным вектором  $\bar{\varphi}_0$ , затем используют (1.1), проводя вычисления по схеме:

$$\lambda_1 \cdot \bar{\varphi}_1 = A \cdot \bar{\varphi}_0, \quad \lambda_2 \cdot \bar{\varphi}_2 = A \cdot \bar{\varphi}_1 \dots \dots \dots \lambda_{i-1} \cdot \bar{\varphi}_{i-1} = A \cdot \bar{\varphi}_i. \quad (1.4)$$

до тех пор, пока в пределах требуемой точности  $\lambda_{i-1}$ ,  $\bar{\varphi}_{i-1}$  не совпадут с  $\lambda_i$ ,  $\bar{\varphi}_i$ .

В (1.4)  $i$  это не номер собственного значения, а номер приближения для одного и того же собственного числа. Процесс (1.4) довольно быстро сходится к большему по величине собственному числу и к соответствующему ему собственному вектору. Следовательно, методом итераций можно найти только старшее собственное число.

Пример №7:

Дано:  $A = \begin{bmatrix} 16 & 12 & 8 & 4 \\ 12 & 45 & 50 & 31 \\ 8 & 50 & 68 & 46 \\ 4 & 31 & 46 & 37 \end{bmatrix}$ .

Найти старшее собственное число соответствующий ему собственный вектор.

Решение: зададим нормальный вектор:  $\bar{\varphi}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  после чего действуем

по (1.4).

После первой итерации находим

$$\begin{bmatrix} 0,08648269 & 6 \\ 0,54051685 & 1 \\ 0,73510291 & 8 \\ 0,49727550 & 3 \end{bmatrix} \cdot 92,504053965 = \begin{bmatrix} 16 & 12 & 8 & 4 \\ 12 & 45 & 50 & 31 \\ 8 & 50 & 68 & 46 \\ 4 & 31 & 46 & 37 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

После второй итерации:

$$\begin{bmatrix} 0,10815323 & 7 \\ 0,53274383 & 2 \\ 0,69111107 & 2 \\ 0,47629021 & 9 \end{bmatrix} \cdot 139,568367 \cdot 9 = \begin{bmatrix} 16 & 12 & 8 & 4 \\ 12 & 45 & 50 & 31 \\ 8 & 50 & 68 & 46 \\ 4 & 31 & 46 & 37 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,08648269 & 6 \\ 0,54051685 & 1 \\ 0,73510291 & 8 \\ 0,49727550 & 3 \end{bmatrix}.$$

.....

После четвертой итерации:  $\rho = \lambda = 139.658735$ ,  $\bar{\varphi} = \begin{bmatrix} 0.111867 \\ 0.534312 \\ 0.690210 \\ 0.474980 \end{bmatrix}$ .

### 1.3. Полная проблема собственных значений. Метод итераций.

Простота и легкость программирования метода итераций для определения старшего собственного числа объясняет стремление применить этот метод к определению остальных собственных чисел, т.е. применить метод итераций к решению полной проблемы собственных значений.

Равенство (1.1) записано для одного собственного числа. Матричный аналог этого равенства выглядит следующим образом:

$$A \cdot \Phi = \Phi \cdot \Lambda, \quad (1.5)$$

где  $\Lambda$  - диагональная матрица  $n$  - го порядка на главной диагонали которой расположены собственные числа.  $\Phi = [\bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_2 \dots \bar{\varphi}_n]$  матрица, составленная из собственных векторов, записанных по столбцам.

Отметим очень важное свойство собственных векторов – свойство ортогональности:  $\bar{\varphi}_i^T \cdot \bar{\varphi}_k = 0$  при  $i \neq k$ . В матричной форме это условие записывается так:  $\Phi^T \cdot \Phi = \rho^2$ , где  $\rho^2$  - диагональная матрица. Обычно нормируют собственные вектора:  $\rho^2 = E$ , тогда условие ортогональности примет вид:

$$\Phi^T \cdot \Phi = E, \quad (1.6)$$

где  $E$  – единичная матрица.

Из (1.6) следует, что для нормированных собственных векторов

$$\Phi^T = \Phi^{-1}, \quad \Phi = \Phi^T. \quad (1.7)$$

а также

$$\bar{\varphi}_i^T \cdot \bar{\varphi}_i = 1. \quad (1.8)$$

В результате очередной итерации по формулам (1.4) получаем

$$A \cdot \bar{\varphi}_{i-1} = \bar{f}_i, \quad (1.9)$$

где  $\bar{\varphi}_{i-1}$  - нормированный, а  $\bar{f}_i$  – ненормированный вектор. Находим нормирующий множитель

$$\rho^2 = \bar{f}_i^T \cdot \bar{f}_i \quad (1.10)$$

и затем нормированный вектор

$$\bar{\varphi}_i = \bar{f}_i / \rho_i. \quad (1.11)$$

Отсюда имеем

$$\bar{f}_i = \rho_i \cdot \bar{\varphi}_i. \quad (1.12)$$

Сравнивая с (1.4), замечаем, что нормирующий множитель после очередной итерации

$$\rho_i = \lambda_i. \quad (1.13)$$

В (1.9) –(1.13)  $i$  – номер итерации, а не номер собственного числа.

С учетом (1.7) выражение (1.5) можно записать в виде:

$$A = \Phi \cdot \Lambda \cdot \Phi^T. \quad (1.14)$$

Переходя к векторной форме записи, получим:

$$A = \begin{bmatrix} \bar{\varphi}_1 & \bar{\varphi}_2 & \bar{\varphi}_3 & \dots & \bar{\varphi}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\varphi}_1^T \\ \bar{\varphi}_2^T \\ \bar{\varphi}_3^T \\ \dots \\ \bar{\varphi}_n^T \end{bmatrix}.$$

После перемножения матриц в правой части, имеем:

$$A = \lambda_1 \cdot \bar{\varphi}_1 \cdot \bar{\varphi}_1^T + \lambda_2 \cdot \bar{\varphi}_2 \cdot \bar{\varphi}_2^T + \dots + \lambda_n \cdot \bar{\varphi}_n \cdot \bar{\varphi}_n^T. \quad (1.15)$$

Обозначим

$$A_i = A_{i-1} - \lambda_i \cdot \bar{\varphi}_i \cdot \bar{\varphi}_i^T. \quad (1.16)$$





Применив метод итераций к  $A_1$ , находим

$$\lambda_2 = 18,03255539, \bar{\varphi}_2 = \begin{bmatrix} 0,83032444 \\ 0,38148064 \\ -0,17889447 \\ -0,36473362 \end{bmatrix}.$$

По формуле (1.16) вычисляем

$$A_2 = A_1 - \lambda_2 \cdot \bar{\varphi}_2 \cdot \bar{\varphi}_2^T = \begin{bmatrix} 1,819933 & -2,05954 & -0,10475 & 2,040393 \\ -2,05954 & 2,504679 & -0,27381 & -1,9346 \\ -0,10475 & -0,27381 & 0,890801 & -0,96177 \\ 2,040393 & -1,9346 & -0,96177 & 3,093297 \end{bmatrix}.$$

Применив метод итераций к  $A_2$ , находим

$$\lambda_3 = 6,577921363, \bar{\varphi}_3 = \begin{bmatrix} 0,51869146 \\ -0,55996851 \\ -0,0907676 \\ 0,63965279 \end{bmatrix}.$$

По формуле (1.16) вычисляем

$$A_3 = A_2 - \lambda_3 \cdot \bar{\varphi}_3 \cdot \bar{\varphi}_3^T = \begin{bmatrix} 0,050204 & -0,14898 & 0,204941 & 2,040393 \\ -0,14898 & 0,442075 & -0,60815 & 0,421511 \\ 0,204941 & -0,60815 & 0,836607 & -0,57986 \\ 2,040393 & 0,421511 & -0,57986 & 0,401903 \end{bmatrix}.$$

Применив метод итераций к  $A_3$ , находим

$$\lambda_4 = 1,730788224, \bar{\varphi}_4 = \begin{bmatrix} -0,17031205 \\ 0,505389274 \\ -0,695246378 \\ 0,481879613 \end{bmatrix}.$$

Применив еще раз формулу (1.16), находим

$$A_4 = A_3 - \lambda_4 \cdot \bar{\varphi}_4 \cdot \bar{\varphi}_4^T = \begin{bmatrix} 3,38E-14 & 1,53E-13 & 1,97E-13 & 1,35E-13 \\ 1,53E-13 & 7,3E-13 & 9,48E-13 & 6,48E-13 \\ 1,97E-13 & 9,48E-13 & 1,23E-12 & 8,37E-13 \\ 1,35E-13 & 6,48E-13 & 8,37E-13 & 5,76E-13 \end{bmatrix}.$$

Элементы матрицы  $A_4$ , которые должны быть равны нулю, позволяют оценить точность расчетов. Как видно, погрешность имеет порядок  $10^{-12}$ , что очень хорошо, если учесть значения элементов матрицы  $A_3$ , имеющие порядок  $10^0$ .

#### 1.4. Функции матриц

Из (1.14) с учетом (1.6) следует

$$\begin{aligned} A^2 &= \Phi \cdot A \cdot \Phi^T \cdot \Phi \cdot A \cdot \Phi^T = \Phi \cdot A^2 \cdot \Phi^T \\ A^3 &= \Phi \cdot A^2 \cdot \Phi^T \cdot \Phi \cdot A \cdot \Phi^T = \Phi \cdot A^3 \cdot \Phi^T \\ &\dots\dots\dots \\ A^n &= \Phi \cdot A^n \cdot \Phi^T \end{aligned} \quad (1.18)$$

Пусть  $f(\lambda)$  – функция  $\lambda$ , допускающая разложение в ряд Маклорена, тогда из (1.18) следует:

$$f(A) = \Phi \cdot f(A) \cdot \Phi^T. \quad (1.19)$$

Формула (1.19) дает определение функции, аргументом которой является матрица  $A$ . Эту функцию несложно найти, зная собственные числа матрицы  $f(A)$ , а это числа  $f(\lambda_i)$ . Таким образом, формула (1.19) позволяет построить алгебру матриц на основе обычной алгебры, заменяя любые алгебраические преобразования матриц, преобразованиями собственных чисел.

В частности, можно записать:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \Phi \cdot A^{-1} \cdot \Phi^T, \\ \sin(A) &= \Phi \cdot \sin(A) \cdot \Phi^T, \\ \cos(A) &= \Phi \cdot \cos(A) \cdot \Phi^T. \end{aligned} \quad (1.20)$$

На следующих страницах приведены примеры вычисления функций матрицы  $A$ .

Пример №9: Дано:  $A = \begin{bmatrix} 16 & 12 & 8 & 4 \\ 12 & 45 & 50 & 31 \\ 8 & 50 & 68 & 46 \\ 4 & 31 & 46 & 37 \end{bmatrix}$ . В предыдущем при-

мере были найдены собственные числа и собственные векторы этой матрицы. Составим матрицы собственных векторов и собственных чисел:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0,11186716 & 0,83032444 & 0,51869146 & -0,1703121 \\ 0,53431208 & 0,38148064 & -0,55996851 & 0,50538927 \\ 0,6902105 & -0,17889447 & -0,0907676 & -0,6952464 \\ 0,4749798 & -0,36473362 & 0,63965279 & 0,48187961 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 139,658735 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18,0325554 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6,57792136 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,73078822 \end{bmatrix}.$$

Найти:  $A^{-1}, \sin(A), \cos(A)$ .

Решение:

$$A^{-1} = \Phi \cdot A^{-1} \cdot \Phi^T, \sin(A) = \Phi \cdot \sin(A) \cdot \Phi^T, \cos(A) = \Phi \cdot \cos(A) \cdot \Phi^T. \quad (1.21)$$

Элементарно просто находим:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0,00716031 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,05545526 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,15202371 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,57777144 \end{bmatrix},$$

$$\sin(A) = \begin{bmatrix} 0,98991538 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,72909625 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2904873 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,98722857 \end{bmatrix},$$

$$\cos(A) = \begin{bmatrix} 0,14165994 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,68441118 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,95687885 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,15931021 \end{bmatrix}.$$

И затем по (1.21) выполняем перемножения, получаем

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0,09598214 & -0,07589286 & 0,05357142 & -0,01339286 \\ -0,07589286 & 0,20535714 & -0,19642857 & 0,08035714 \\ 0,05357142 & -0,19642857 & 0,28571429 & -0,19642857 \\ -0,01339286 & 0,08035714 & -0,19642857 & 0,20535715 \end{bmatrix},$$

$$\sin(A) = \begin{bmatrix} -0,38349041 & -0,3411209 & 0,28795385 & 0,28876041 \\ -0,3411209 & 0,51974964 & 0,08270777 & 0,48905184 \\ 0,28795385 & 0,08270777 & 0,92784037 & -0,07065466 \\ 0,28876041 & 0,48905184 & -0,07065466 & 0,4744354 \end{bmatrix},$$

$$\cos(A) = \begin{bmatrix} 0,72645081 & -0,03895747 & -0,15463887 & 0,13080518 \\ -0,03895747 & 0,39939575 & 0,11014709 & -0,4408146 \\ -0,15463887 & 0,11014709 & 0,02026693 & 0,08891503 \\ 0,13080518 & -0,4408146 & 0,08891503 & 0,47752627 \end{bmatrix}.$$

Легко проверить, что  $A \cdot A^{-1} = E$ ,  $\cos^2(A) + \sin^2(A) = E$ .

## 2. Матрицы в статике сооружений

### 2.1. Матричная форма определения перемещений

Для определения перемещений применяется формула Мора:

$$\Delta_{ik} = \sum_{lj} \int \frac{\bar{S}_i \cdot S_k \cdot dS}{B_j}, \quad (2.1)$$

где  $\bar{S}_i$  - единичное внутреннее усилие по направлению искомого перемещения;  $S_k$  - внутреннее усилие от заданной нагрузки;  $B_j$  - жесткость поперечного сечения для данного вида деформаций.

Для вычисления интеграла (2.1) используем формулу трапеций при аппроксимации подинтегральных функций прямыми линиями, или формулу Симпсона при аппроксимации  $\bar{S}_i$  линейной функцией, а  $S_k$  квадратной параболой,  $B_j$  в обоих случаях считаем постоянной на всем участке.

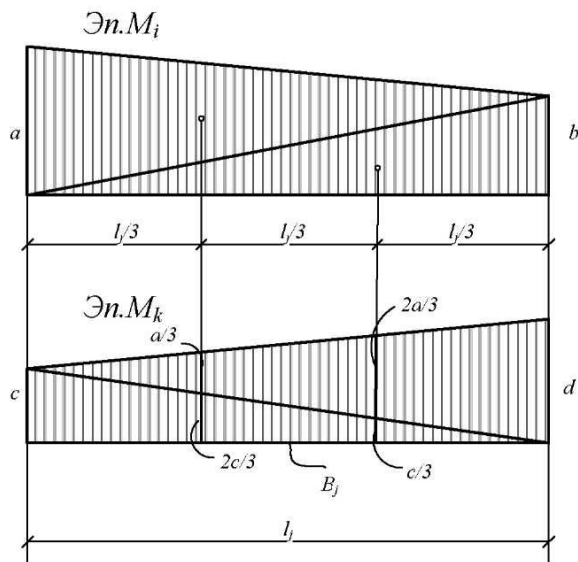


Рис.2.1. Умножение линейных участков эпюр.

$$\Delta_{ik} = \frac{l_j}{B_j} \cdot \left[ 0.5a \cdot \left( \frac{d}{3} + \frac{2c}{3} \right) + 0.5b \cdot \left( \frac{2d}{3} + \frac{c}{3} \right) \right] + \frac{l_j}{B_j} \cdot \frac{2f}{3} \cdot \left( e - \frac{a+b}{2} \right) = \frac{l_j}{6B_j} \cdot (ac + 4ef + bd.)$$

Учитываем, что  $f = \frac{c+d}{2}$ .

Рассмотрим участок длиной  $l_j$ , жесткостью  $B_j$ , внутренние усилия на концах эпюры  $\bar{S}_j$  равны  $a, b$  и  $c, d$  на концах эпюры  $S_k$ , и  $e, f$  в серединах участков тех же эпюр. Перемножаем эпюры  $M_i$  и  $M_k$  по правилу Верещагина:

$$\Delta_{ik} = \frac{l_j}{B_j} \cdot \left[ 0.5a \cdot \left( \frac{1}{3}d + \frac{2}{3}c \right) + 0.5b \cdot \left( \frac{2}{3}d + \frac{1}{3}c \right) \right] = \frac{l_j}{6B_j} \cdot (2ac + 2bd + ad + bc).$$

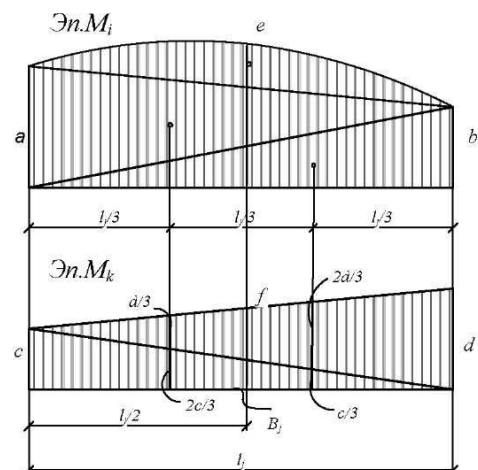


Рис.2.2. Умножение параболической и линейной эпюр

Полученные формулы легко записать в матричной форме:

$$\Delta_{ik} = \bar{S}_i^T \cdot G_j \cdot \bar{S}_k. \quad (2.2)$$

В формуле (2.2) обозначены:

$$\bar{S}_i = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}; \bar{S}_k = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}; G_j = \frac{l_j}{6B_j} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

для прямолинейных участков эпюр  $\bar{S}_i$  и  $\bar{S}_k$  и

$$\bar{S}_i = \begin{bmatrix} a \\ e \\ b \end{bmatrix}; \bar{S}_k = \begin{bmatrix} c \\ f \\ d \end{bmatrix}; G_j = \frac{l_j}{6B_j} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

для криволинейной эпюры  $\bar{S}_k$ , которая аппроксимируется квадратной параболой.

В тех случаях, когда эпюра внутренних усилий имеет более сложный вид, например вид ломаной линии, состоящей из прямолинейных или криволинейных отрезков, выделяем отдельные отрезки эпюр, закон изменения усилия на которых одинаков. Всё это приводит к необходимости назначать отдельные участки на эпюрах. Назначают границы участков в начале и на конце эпюры, в точках появления или исчезновения нагрузок, в точках изменения закона жесткости и в точках перелома оси стержня. На границах участков в столбец выписывают значения внутренних усилий для прямолинейных участков. На криволинейных участках между граничными значениями выписывают значение в середине участка. Если значения на обоих эпюрах усилий, на двух соседних, примыкающих друг к другу участках одинаковы, то они записываются один раз. При этом значения в матрице податливости  $G$ , суммируются и записываются на главной диагонали матрицы с тем же номером, что и номер усилия на эпюрах.

Пример №10:

Дано:

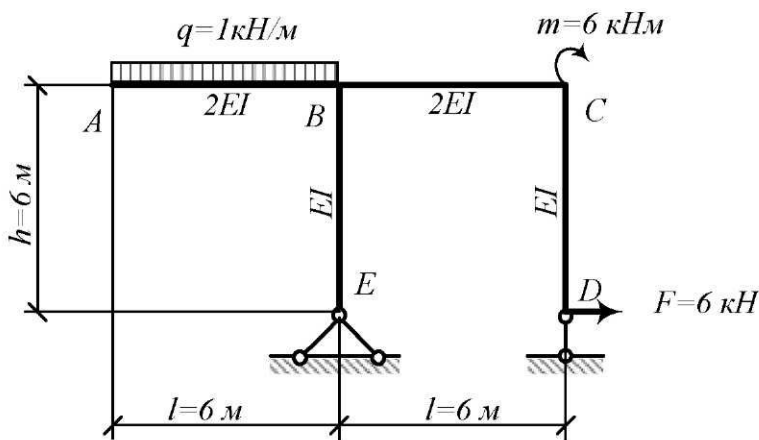


Рис.2.3. К примеру №10.

Рама загружена, направленной вниз, равномерно распределенной нагрузкой  $q=1$  кН/м, сосредоточенной силой  $F=6$  кН и парой сил с моментом  $m=6$  кНм.

Найти вертикальное перемещение точки А, горизонтальные перемещения точек А, В, С и D, угол поворота сечения С.

Решение:

Строим эпюру изгибающих моментов  $M_F$  от действия заданной нагрузки (Рис.2.4.). Для определения перемещений задаем вспомогательные единичные нагружения  $F_1=1$ ,  $F_2=1$ ,  $F_3=1$  и  $m=1$  и строим единичные эпюры изгибающих моментов (Рис.2.5):

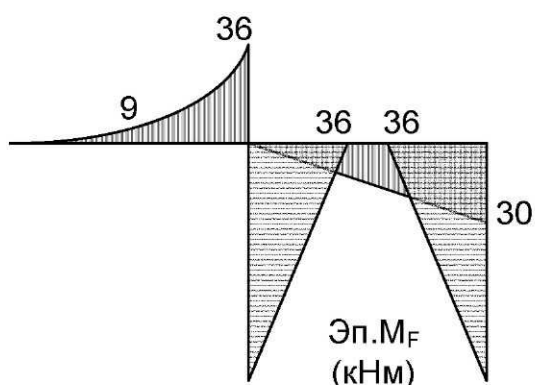


Рис.2.4. Эпюра изгибающих моментов к примеру №10

$$\bar{Эн.}\bar{M}_1, \bar{Эн.}\bar{M}_2, \bar{Эн.}\bar{M}_3, \bar{Эн.}\bar{M}_4 \dots$$

Составляем исходные матрицы. С этой целью разбиваем раму на участки: 1-й участок – консоль ригеля рамы, 2-й участок – ригель рамы между стойками, 3-й участок – левая стойка, 4-й участок – правая стойка рамы.

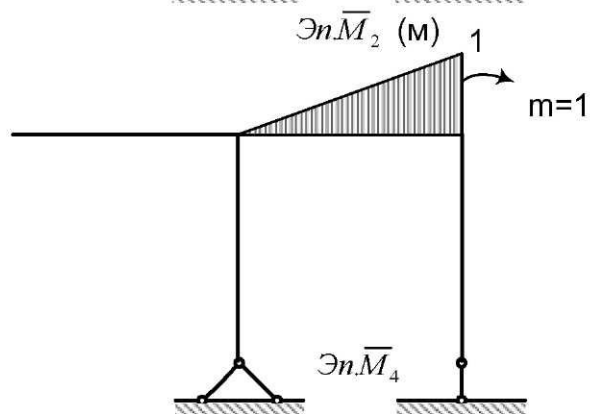
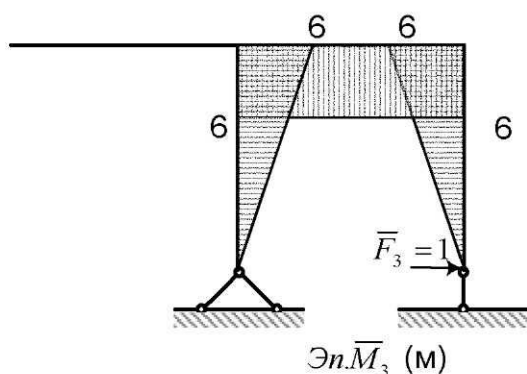
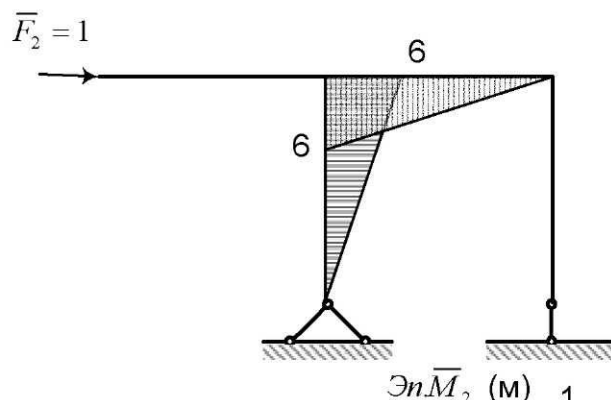
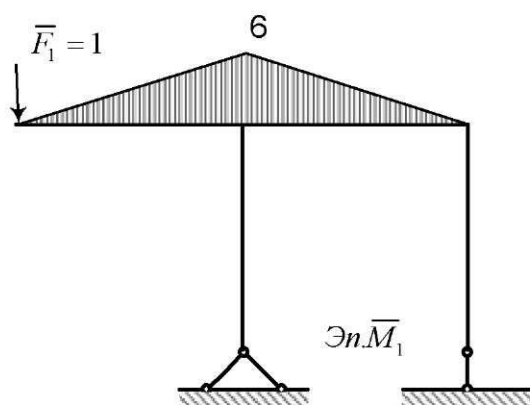


Рис.2.5. Единичные эпюры изгибающих моментов (к примеру №10)

Так как на консоли эпюра моментов криволинейна, берем ординаты в трех точках, кроме ординат на концах пишем ординату в середине участка. На остальных участках выписываем только ординаты на концах участков.

Составляем исходные матрицы:

$$M_F = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 36 \\ 0 \\ -30 \\ 36 \\ 0 \\ -36 \\ 0 \end{bmatrix}; \bar{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; G = \frac{1}{EJ} \cdot \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Перемножим матрицы:

$$G \cdot M_F = \frac{1}{EJ} \cdot \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 36 \\ 0 \\ -30 \\ 36 \\ 0 \\ -36 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{EJ} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 18 \\ 18 \\ -15 \\ -30 \\ 72 \\ 36 \\ -72 \\ -36 \end{bmatrix}.$$

$$\Delta = \bar{M}^T \cdot G \cdot M_F = \frac{1}{EJ} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 6 & 6 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 18 \\ 18 \\ -15 \\ -30 \\ 72 \\ 36 \\ -72 \\ -36 \end{bmatrix} = \frac{1}{EJ} \cdot \begin{bmatrix} 72 \\ 522 \\ -54 \\ -30 \end{bmatrix}.$$

вертикальное перемещение точки А, и горизонтальные перемещения точек А, В, и С:

$$\Delta_A^{верт} = \frac{72 \text{кН} \cdot \text{м}^3}{EJ};$$

$$\Delta_A^{гор} = \Delta_B^{гор} = \Delta_C^{гор} = \frac{522 \text{кН} \cdot \text{м}^3}{EJ};$$



горизонтальное перемещение точки D:

$$\Delta_D^{гор} = \frac{-54кН \cdot м^3}{EJ};$$

угол поворота сечения C:

$$\varphi_C = \frac{-30кН \cdot м^2}{EJ}.$$

**Пример №11:**

Дано:

балка А – Е, нагруженная направленной вниз равномерно распределенной нагрузкой  $q=2$  кН/м и двумя сосредоточенными силами  $F_1=10$  кН и  $F_2=5$  кН. Жесткость балки  $EJ$  постоянная.

Найти:

углы поворотов сечений А и Е и вертикальные перемещения сечений С и Е.

Решение:

(см. Рис.2.6)

Строим эпюру изгибающих моментов от заданной нагрузки  $\text{Эп.}M_F$ . Выбираем вспомогательные состояния балки, загрузив ее единичными моментами  $m_A=1$ ,

$m_E=1$  для определения углов поворотов, и единичными силами  $F_C=1$  и  $F_E=1$ . Строим эпюры изгибающих моментов  $\text{Эп.}M_{AM}$ ,  $\text{Эп.}M_{CF}$ ,  $\text{Эп.}M_{EF}$  и  $\text{Эп.}M_{EM}$ .

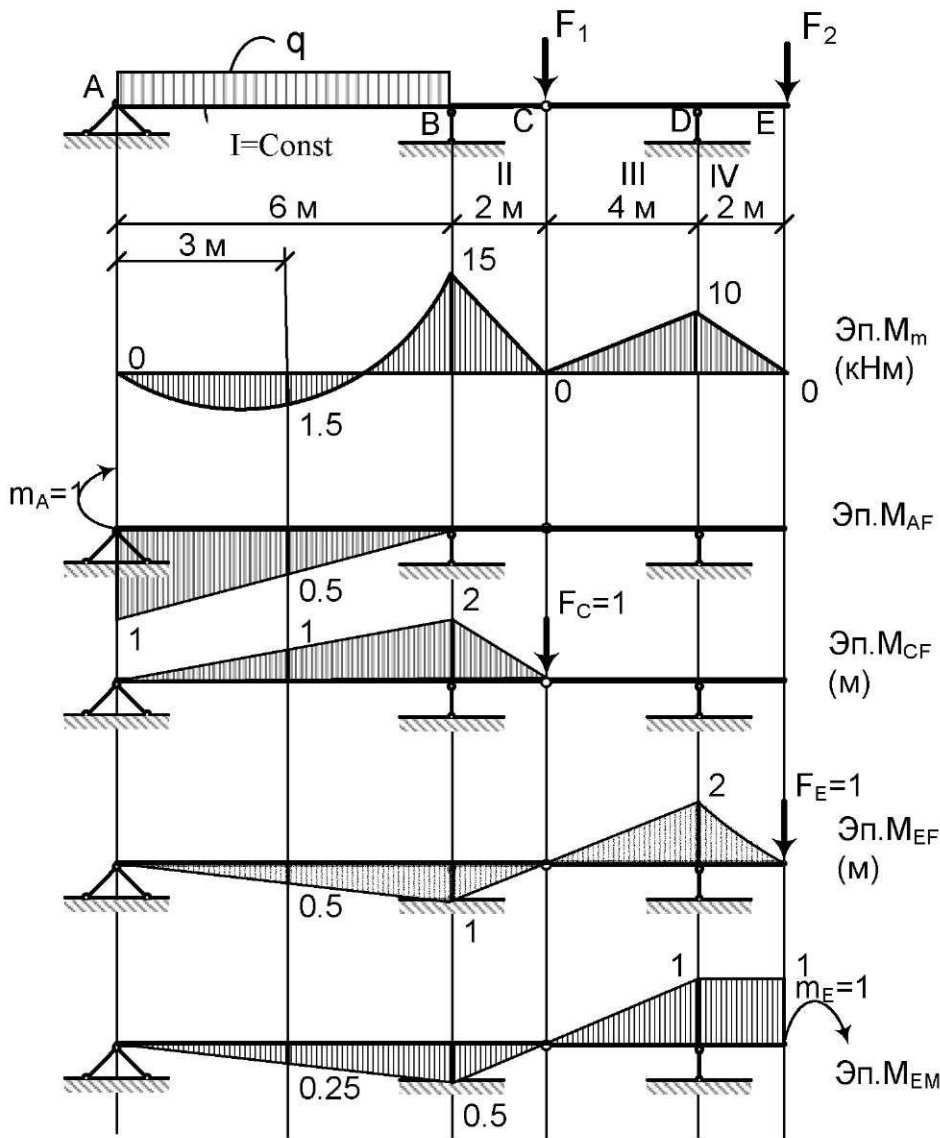


Рис.2.6. К примеру №11

$m_E=1$  для определения углов поворотов, и единичными силами  $F_C=1$  и  $F_E=1$ . Строим эпюры изгибающих моментов  $\text{Эп.}M_{AM}$ ,  $\text{Эп.}M_{CF}$ ,  $\text{Эп.}M_{EF}$  и  $\text{Эп.}M_{EM}$ .

Формируем матрицы изгибающих моментов  $\bar{M}$  и  $M_F$  и матрицу податливости  $G$ . Разбиваем балку на участки I, II, III, IV. На участке I, где эпюра изгибающих моментов криволинейна, введем дополнительное сечение посередине. На границах участков изгибающие моменты в конце предыдущего равны моментам в начале следующего на всех эпюрах, поэтому в матрицах  $\bar{M}$  и  $M_F$  записываем их один раз. Введем основную длину  $l_0$  и основную жесткость  $EI_0$ . Вычислим коэффициенты:  $\beta_j = \frac{l_j \cdot EI_0}{EI_j \cdot l_0}$ , примем

$l_0=2$  м,  $EI_0=EI$ :

$$\beta_1 = 6EI/2EI = 3, \beta_2 = 2EI/2EI = 1, \beta_3 = 4EI/2EI = 2, \beta_4 = 2EI/2EI = 1.$$

Формируем матрицы  $M_F$ ,  $\bar{M}$ ,  $G$ :

$$M_F = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.5 \\ -15 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & -1 & 0.5 & 0.25 \\ 0 & -2 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad G = \frac{2}{6EI} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Перемножим матрицы:

$$G \cdot M_F = \frac{1}{3EI} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1.5 \\ -15 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3EI} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 18 \\ -75 \\ -35 \\ -60 \\ -10 \end{bmatrix};$$

$$\Delta = MGM_F = \frac{1}{3EI} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.5 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 18 \\ -75 \\ -35 \\ -60 \\ -10 \end{bmatrix} = \frac{1}{3EI} \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 132 \\ 54 \\ 37 \end{bmatrix}.$$

Ответ:

$$\varphi_A = \frac{3кН \cdot м^2}{EI}; \quad \varphi_B = \frac{44кН \cdot м^2}{EI}; \quad \Delta_C^{верт} = \frac{18кН \cdot м^3}{EI}; \quad \Delta_E^{верт} = \frac{37кН \cdot м^3}{3EI}.$$

## 2.2. Метод сил

Канонические уравнения метода сил в матричной форме имеют вид

$$[\delta] \cdot X + [A] = 0, \quad (2.5)$$

где  $[\delta]$  – матрица единичных перемещений  $\delta_{ij}$  – перемещение по направлению неизвестного  $X_i$  от действия неизвестных  $X_j = 1$ ,  $[A]$  – матрица перемещений по направлению неизвестных в основной системе от заданной нагрузки:

$$[\delta] = \bar{M}^T \cdot G \cdot \bar{M}, \quad [A] = \bar{M}^T \cdot G \cdot M_0. \quad (2.6)$$

В формулах (2.6) принято  $M_0$  – матрица изгибающих моментов в основной системе метода сил,  $\bar{M}$  – матрица единичных изгибающих моментов от  $X=1$ ,  $G$  – матрица податливости.

Из (2.5), (2.6) находим неизвестные

$$X = -[\delta]^{-1} \cdot [A] = -(\bar{M}^T \cdot G \cdot \bar{M})^{-1} \cdot \bar{M}^T \cdot G \cdot M_0. \quad (2.7)$$

Расчетные изгибающие моменты определяются следующим образом

$$M_{расч} = M_0 + \bar{M} \cdot X,$$

или с учетом (2.7)

$$M_{расч} = M_0 - \bar{M} \cdot (\bar{M}^T \cdot G \cdot \bar{M})^{-1} \cdot \bar{M}^T \cdot G \cdot M_0. \quad (2.8)$$

Несложные преобразования приводят к формулам

$$M_{расч} = U \cdot M_0; \quad (2.9) \quad U = E - \bar{M} \cdot (\bar{M}^T \cdot G \cdot \bar{M})^{-1} \cdot \bar{M}^T \cdot G, \quad (2.10)$$

где  $U$  – матрица раскрытия статической неопределенности.

Для проверок расчетов выполняемых по формулам (2.6) – (2.10) выполняются универсальные проверки коэффициентов канонических уравнений

$$\sum_{i,k=1}^n \delta_{ik} = \bar{M}_S^T \cdot G \cdot \bar{M}_S; \quad \sum_{i=1}^n \Delta_i = \bar{M}_S^T \cdot G \cdot M_0.$$

После определения  $M_{расч}$  выполняется деформационная проверка

$$\bar{M}^T \cdot G \cdot M_{расч} = 0. \quad (2.11)$$

В случае выполнения проверки (2.11) с точностью не хуже 3% строим эпюру  $Q$ , используя дифференциальные зависимости при изгибе

$$Q = \frac{dM_{расч}}{dz};$$

что для случаев действия на участки рамы равномерно распределенной нагрузки интенсивности  $q$  приводит к простой формуле

$$Q_{\frac{лев}{прав}} = \pm \frac{q \cdot l_{уч}}{2} + \frac{M_{прав} - M_{лев}}{l_{уч}}, \quad (2.12)$$

где  $Q_{\frac{лев}{прав}}$  – значения перерезывающей силы на левом и на правом концах

участка,  $l_{уч}$  - длина участка,  $M_{прав}$ ,  $M_{лев}$  изгибающие моменты на правом и левом концах участка.

После построения эпюры  $Q_{расч}$  вырезаем жесткие узлы рамы, показываем внутренние и внешние силы, действующие на них, из уравнений равновесия узлов определяем нормальные силы на участках рамы, прилегающих к рассматриваемому узлу.

Пример №12. Построить эпюры изгибающих моментов, перерезывающих и нормальных сил для рамы, показанной на Рис.2.7. Количество неизвестных  $n=3k-ш=3*2-4=2$ . Выбираем основную систему, отбросив две лишние связи, заменив их действие неизвестными  $X_1$ ,  $X_2$  (Рис.2.8).

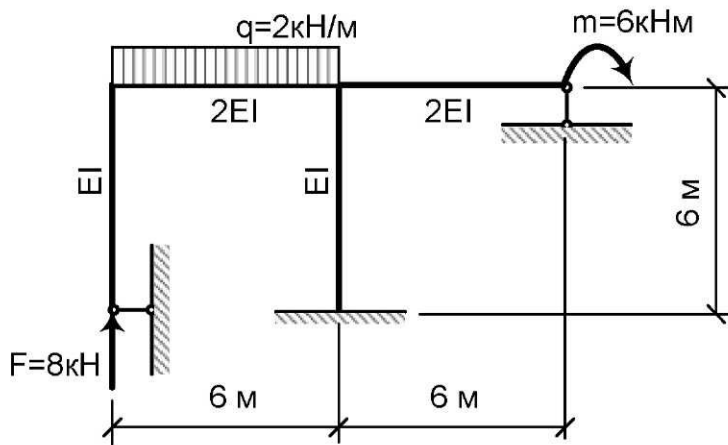


Рис.2.7. К примеру №12

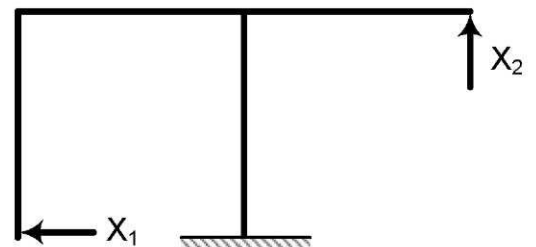


Рис.2.8. Основная система с лишними неизвестными

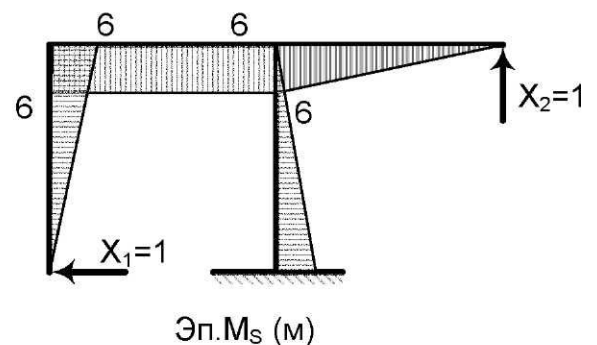
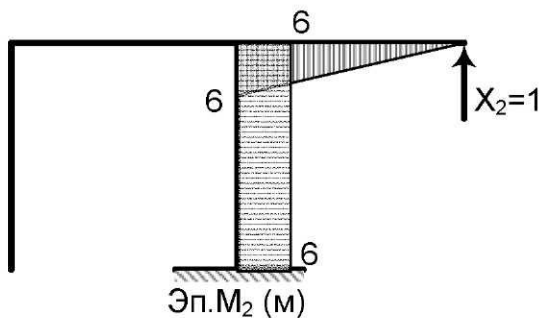
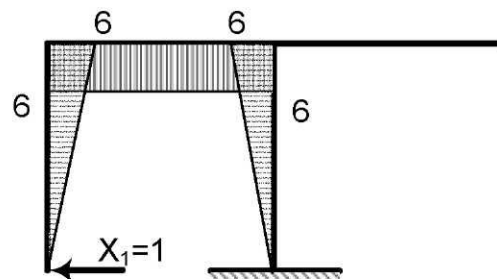
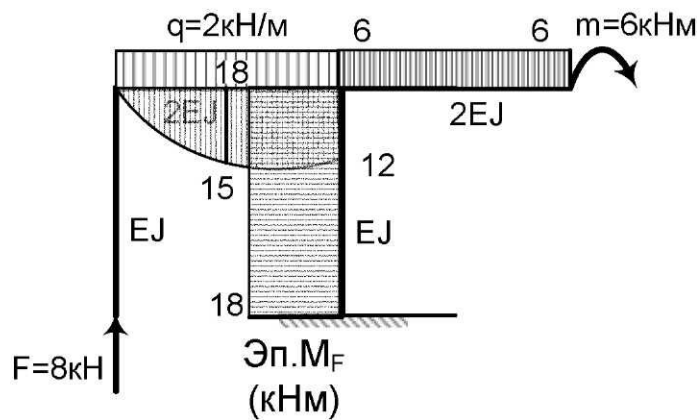


Рис.2.9. Грузовая, единичные и суммарная единичная эпюры изгибающих моментов

Строим эпюру изгибающих моментов в основной системе от заданной нагрузки:  $\text{Эп.}M_{\theta}$ , и эпюры изгибающих моментов от  $X_1=1$ ,  $X_2=1$ :  $\text{Эп.}M_1$  и  $\text{Эп.}M_2$ . Строим суммарную единичную эпюру от совместного действия  $X_1=X_2=1$  (Рис.2.9). Составляем грузовую матрицу  $M_{\theta}$ , единичные матрицы  $\bar{M}$ ,  $\bar{M}_s$  и матрицу податливости  $G$ :

$$M_{\theta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \\ 12 \\ -6 \\ -6 \\ 18 \\ 18 \end{bmatrix}; \quad \bar{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 0 \\ 6 & 0 \\ 6 & 0 \\ 0 & 6 \\ 0 & 0 \\ 6 & -6 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}; \quad G = \frac{6}{6EI} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Перемножим матрицы

$$G \cdot \bar{M} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 0 \\ 6 & 0 \\ 6 & 0 \\ 0 & 6 \\ 0 & 0 \\ 6 & -6 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 15 & 0 \\ 12 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 6 \\ 0 & 3 \\ 12 & -18 \\ 6 & -18 \end{bmatrix};$$

$$[\delta] = \bar{M}^T \cdot G \cdot \bar{M} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 252 & -108 \\ -108 & 252 \end{bmatrix}; \quad [\Delta] = \bar{M}^T \cdot G \cdot M_{\theta} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 540 \\ -702 \end{bmatrix}.$$

Универсальные проверки:

$$\sum_{i,k=1}^n \delta_{ik} = \frac{288}{EI};$$

$$G \cdot \bar{M}_s = \frac{1}{EI} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} = \frac{1}{EI} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \\ 12 \\ 3 \\ 6 \\ 3 \\ -6 \\ -12 \end{bmatrix};$$

$$\overline{M}_S^T \cdot G \cdot \overline{M}_S = \frac{288}{EJ}.$$

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i = \frac{-162}{EI}; \quad \overline{M}_S^T \cdot G \cdot M_0 = \frac{-162}{EI}.$$

выполнены, так как  $\sum_{i,k=1}^n \delta_{ik} = \overline{M}_S^T \cdot G \cdot \overline{M}_S$ ,  $\sum_{i=1}^n \Delta_i = \overline{M}_S^T \cdot G \cdot M_0$ .

$$\text{Определитель } \det[\delta] = \frac{1}{(EI)^2} (252 \cdot 252 - 108 \cdot 108) = \frac{51840}{(EI)^2}.$$

Алгебраические дополнения:

$$EI\tilde{\delta}_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 252 = 252; \quad EI\tilde{\delta}_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-108) = 108, \quad EI\tilde{\delta}_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 252 = 252.$$

$$\text{Обратная матрица } [\delta]^{-1} = \frac{EI}{51840} \begin{bmatrix} 252 & 108 \\ 108 & 252 \end{bmatrix}.$$

Неизвестные

$$X = -[\delta]^{-1} \cdot [A] = -\frac{EI}{51840} \begin{bmatrix} 252 & 108 \\ 108 & 252 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 540 \\ -702 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.1625 \\ 2.2875 \end{bmatrix}.$$

Расчетная эпюра изгибающих моментов

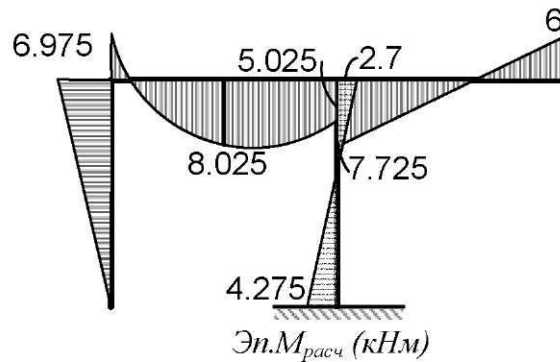


Рис.2.10. Расчетная эпюра изгибающих моментов к примеру №12

$$M_{расч} = M_0 + \overline{M} \cdot X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \\ 12 \\ -6 \\ -6 \\ 18 \\ 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 0 \\ 6 & 0 \\ 6 & 0 \\ 0 & 6 \\ 0 & 0 \\ 6 & -6 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1.1625 \\ 2.2875 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6.975 \\ 8.025 \\ 5.025 \\ 7.725 \\ -6 \\ -2.7 \\ 4.275 \end{bmatrix}.$$

## Деформационная проверка

$$\bar{M}^T \cdot G \cdot M_{расч} = \begin{bmatrix} 6 & 15 & 12 & 3 & 0 & 0 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 3 & -18 & -18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -6.975 \\ 8.025 \\ 5.025 \\ 7.725 \\ -6 \\ -2.7 \\ 4.275 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -137.025 + 137.025 \\ 94.95 - 94.95 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Проверка выполнена.

Используя (2.12), строим расчетную эпюру перерезывающих сил. Вырезаем жесткие узлы рамы, составляем уравнения равновесия для них, из которых определяем нормальные силы в элементах рамы. Строим расчетную эпюру нормальных сил (Рис.2.11).

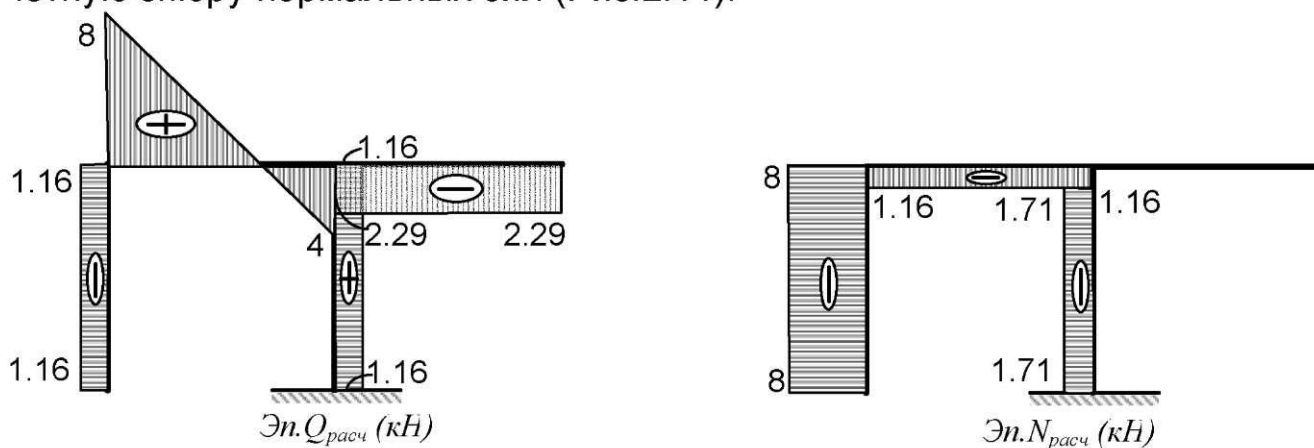


Рис.2.11. Расчетные эпюры перерезывающих  $Q$  и нормальных  $N$  сил

С помощью построенных эпюр определяем реакции в заданной раме. Изображаем раму с внешними нагрузками и опорными реакциями (Рис.2.12). Составляем уравнения равновесия полученной системы сил.

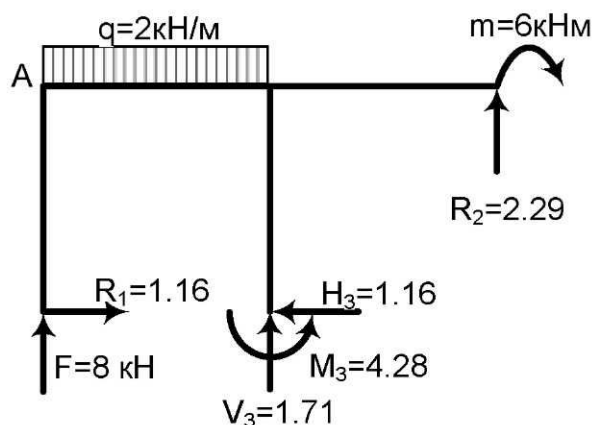


Рис.2.12. Нагрузки и реакции. К примеру №12

$$\begin{aligned} \sum X &= R_1 - H_3 = 1.16 - 1.16 = 0; \\ \sum Y &= F - q \cdot 6 + V_3 + R_2 = 8 - 2 \cdot 6 + 1.71 + 2.29 = 0; \\ \sum m_A &= R_1 \cdot 6 - q \cdot 6 \cdot 3 + V_3 \cdot 6 - H_3 \cdot 6 + M_3 - m + R_2 = \\ &= 1.16 \cdot 6 - 2 \cdot 6 \cdot 3 + 1.71 \cdot 6 - 1.16 \cdot 6 + 4.28 - 6 + 2.29 \cdot 12 = 48.98 - 48.96 = 0.02 \neq 0; \\ \varepsilon &= 0.02 \cdot 100 / 48.98 = 0.0408\%. \end{aligned}$$

Уравнения равновесия выполняются с высокой точностью.

### 2.3. Метод перемещений

Канонические уравнения метода перемещений

$$[r] \cdot Z + [R] = 0, \quad (2.13)$$

где  $[r]$  - единичная матрица реакций,  $[R]$  - матрица реакций от заданной нагрузки,  $Z$  - матрица неизвестных перемещений.

Одним из способов получения матриц, является способ вычисления коэффициентов и свободных членов уравнения (2.13) перемножением эпюр:

$$[r] = \bar{M}^T \cdot G \cdot \bar{M}; \quad (2.14)$$

$$[R] = -\bar{M}^T \cdot G \cdot M_0^*. \quad (2.15)$$

В выражениях (2.14), (2.15)  $\bar{M}$  - матрица единичных эпюр изгибающих моментов, столбцами этой матрицы являются ординаты единичных эпюр изгибающих моментов, построенных с помощью таблиц реакций.  $M_0^*$  - грузовая матрица изгибающих моментов в любой основной системе метода сил от действия заданной нагрузки.  $G$  - матрица податливости, сформированная из блоков (2.3), (2.4).

Решение уравнения (2.13) имеет вид

$$Z = -[r]^{-1} \cdot [R] = (\bar{M}_s^T \cdot G \cdot \bar{M}_s)^{-1} \cdot \bar{M}_s^T \cdot G \cdot M_0^*. \quad (2.16)$$

Расчетная матрица изгибающих моментов вычисляется по формуле

$$M_{расч} = M_0 + \bar{M} \cdot Z = M_0 + \bar{M} \cdot (\bar{M}^T \cdot G \cdot \bar{M})^{-1} \cdot \bar{M}^T \cdot G \cdot M_0^*. \quad (2.17)$$

В (2.17)  $M_0$  - грузовая матрица изгибающих моментов в основной системе метода перемещений.

Для проверок расчетов выполняемых по формулам (2.14) – (2.15) выполняются универсальные проверки коэффициентов канонических уравнений

$$\sum_{i,k=1}^n r_{ik} = \bar{M}_s^T \cdot G \cdot \bar{M}_s; \quad \sum_{i=1}^n R_i = \bar{M}_s^T \cdot G \cdot M_0^*,$$

где  $\bar{M}_s$  - суммарная единичная матрица-столбец, в которой выписаны ординаты эпюры, построенной по таблице единичных реакций.

После определения  $M_{расч}$  выполняется деформационная проверка

$$\bar{M}^{*T} \cdot G \cdot M_{расч} = 0, \quad (2.18)$$



где  $\bar{M}^*$  - матрица единичных моментов, полученная в любой основной системе метода сил.

В случае выполнения проверки (2.18) с точностью не хуже 3% строим эпюру  $Q$ , используя дифференциальные зависимости при изгибе

$$Q = \frac{dM_{расч}}{dz};$$

что для случаев действия на участки рамы равномерно распределенной нагрузки интенсивности  $q$  приводит к простой формуле

$$Q_{\frac{лев}{прав}} = \pm \frac{q \cdot l_{уч}}{2} + \frac{M_{прав} - M_{лев}}{l_{уч}}, \quad (2.19)$$

где  $Q_{\frac{лев}{прав}}$  - значения перерезывающей силы на левом и на правом концах участка,  $l_{уч}$  - длина участка,  $M_{прав}$ ,  $M_{лев}$  изгибающие моменты на правом и левом концах участка.

После построения эпюры  $Q_{расч}$  вырезаем жесткие узлы рамы, показываем внутренние и внешние силы, действующие на них, из уравнений равновесия узлов определяем нормальные силы на участках рамы, прилегающих к рассматриваемому узлу.

Пример №13. Построить эпюры изгибающих моментов, перерезывающих и нормальных сил для рамы, изображенной на Рис.2.14.

Степень кинематической неопределенности рамы  $n = n_y + n_n = 1+1=2$ .

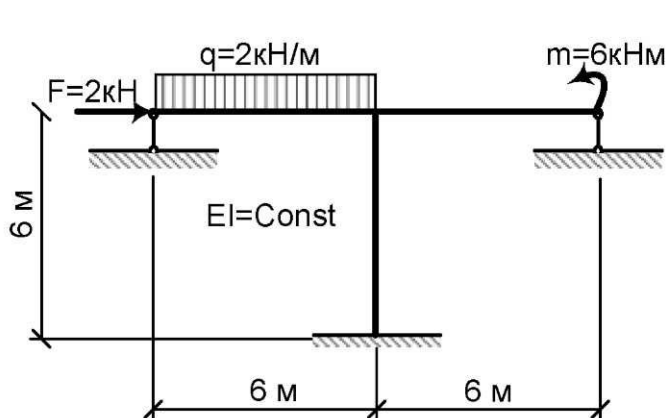


Рис.2.14. К примеру №13

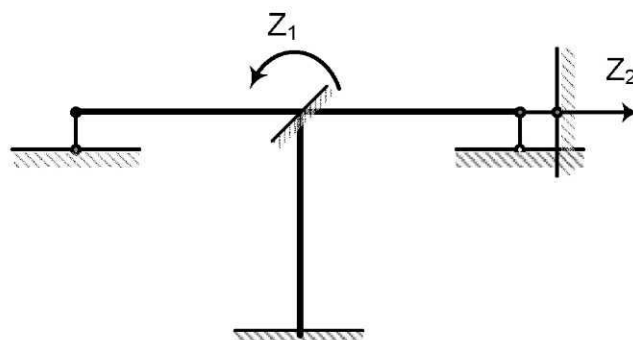


Рис.2.15. Основная система.

Основная система с неизвестными  $Z_1$  и  $Z_2$  изображена на Рис.2.15.

Строим эпюры изгибающих моментов от заданной нагрузки в основной системе метода перемещений (Рис.2.16) и в основной системе метода сил (Рис.2.17)

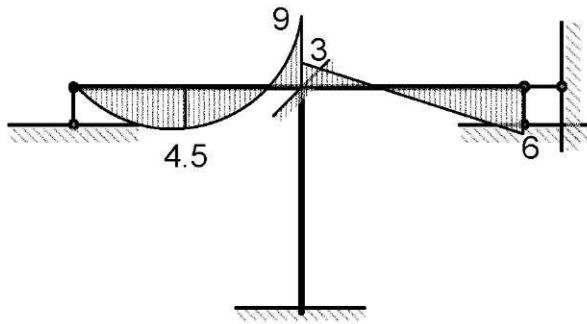


Рис.2.16. Эпюра  $M_0$

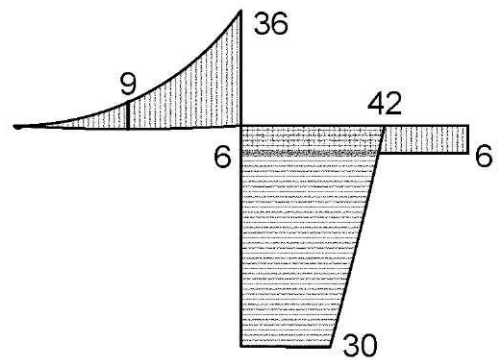


Рис.2.17. Эпюра  $M_0^*$

Используя таблицы реакций, строим единичные эпюры изгибающих моментов (Рис.2.18, 2.19) и суммарную единичную эпюру (Рис.2.20).

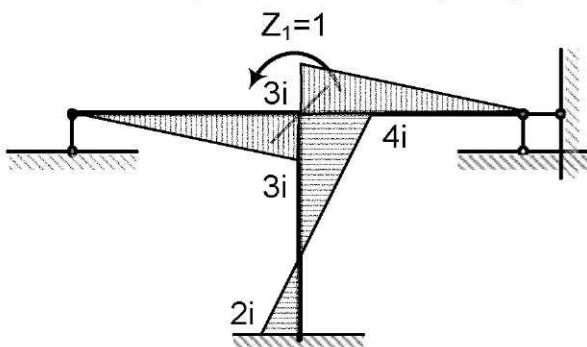


Рис.2.18. Эпюра  $M_1$

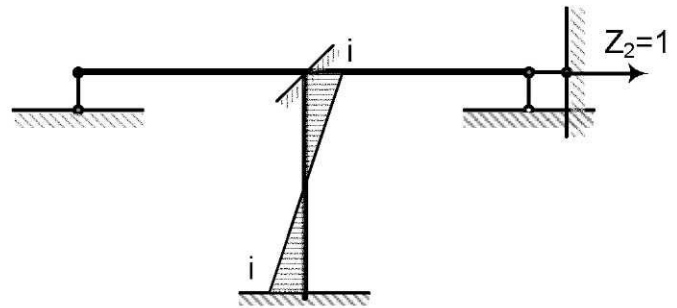


Рис.2.19. Эпюра  $M_2$

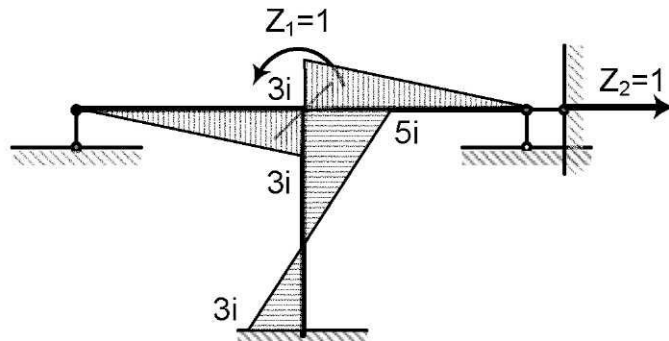


Рис.2.20. Эпюра  $M_s$

На Рис.2.18 – 2.20  $i = \frac{EI}{L}$ . Формируем матрицы  $M_0$ ,  $M_0^*$ ,  $\bar{M}$ ,  $\bar{M}_s$ :

$$M_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4.5 \\ -9 \\ -3 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad M_0^* = \begin{bmatrix} 0 \\ -9 \\ -36 \\ 6 \\ 6 \\ -42 \\ -30 \end{bmatrix}; \quad \bar{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1.5i & 0 \\ 3i & 0 \\ -3i & 0 \\ 0 & 0 \\ -4i & -i \\ 2i & i \end{bmatrix}; \quad \bar{M}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.5i \\ 3i \\ -3i \\ 0 \\ -5i \\ 3i \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{G} = \frac{1}{6i} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Перемножим матрицы

$$\mathbf{G} \cdot \bar{\mathbf{M}} = \frac{1}{6i} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1.5i & 0 \\ 3i & 0 \\ -3i & 0 \\ 0 & 0 \\ -4i & -i \\ 2i & i \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 0 \\ 3 & 0 \\ -6 & 0 \\ -3 & 0 \\ -6 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$[\mathbf{r}] = \bar{\mathbf{M}}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \bar{\mathbf{M}} = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3 & -6 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1.5i & 0 \\ 3i & 0 \\ -3i & 0 \\ 0 & 0 \\ -4i & -i \\ 2i & i \end{bmatrix} = \frac{i}{6} \cdot \begin{bmatrix} 60 & 6 \\ 6 & 2 \end{bmatrix};$$

$$[\mathbf{R}] = -\bar{\mathbf{M}}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{M}_0^* = -\frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3 & -6 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -9 \\ -36 \\ 6 \\ 6 \\ -42 \\ -30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Выполним универсальную проверку найденных коэффициентов:

$$\mathbf{G} \cdot \bar{\mathbf{M}}_s = \frac{1}{6i} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1.5i \\ 3i \\ -3i \\ 0 \\ -5i \\ 3i \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \\ -6 \\ -3 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{M}}_s^T \cdot \mathbf{G} \cdot \bar{\mathbf{M}}_s = \frac{37i}{3}; \quad \sum r_{ik} = \frac{37i}{3}.$$

$$-\bar{\mathbf{M}}_s^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{M}_\theta^* = -\frac{1}{6} \cdot [0 \quad 6 \quad 3 \quad -6 \quad -3 \quad -7 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -9 \\ -36 \\ 6 \\ 6 \\ -42 \\ -30 \end{bmatrix} = -8; \quad \sum R_i = -8.$$

Проверки единичных и грузовых коэффициентов выполняются, так как  $\bar{\mathbf{M}}_s^T \cdot \mathbf{G} \cdot \bar{\mathbf{M}}_s = \sum r_{ik}$ ;  $\bar{\mathbf{M}}_s^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{M}_\theta^* = \sum R_i$ .

Обратная матрица единичных коэффициентов:

$$[\mathbf{r}]^{-1} = \frac{1}{14i} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 60 \end{bmatrix}.$$

Вектор неизвестных:

$$\mathbf{Z} = -[\mathbf{r}]^{-1} \cdot [\mathbf{R}] = -\frac{1}{14i} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 60 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{14i} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -84 \end{bmatrix} = \frac{1}{i} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Расчетная эпюра изгибающих моментов:

$$\mathbf{M}_{расч} = \mathbf{M}_\theta + \bar{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4.5 \\ -9 \\ -3 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1.5i & 0 \\ 3i & 0 \\ -3i & 0 \\ 0 & 0 \\ -4i & -i \\ 2i & i \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{i} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4.5 \\ -9 \\ -3 \\ 6 \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Для выполнения деформационной проверки построим единичные эпюры изгибающих моментов в основной системе метода сил (Рис.2.21)

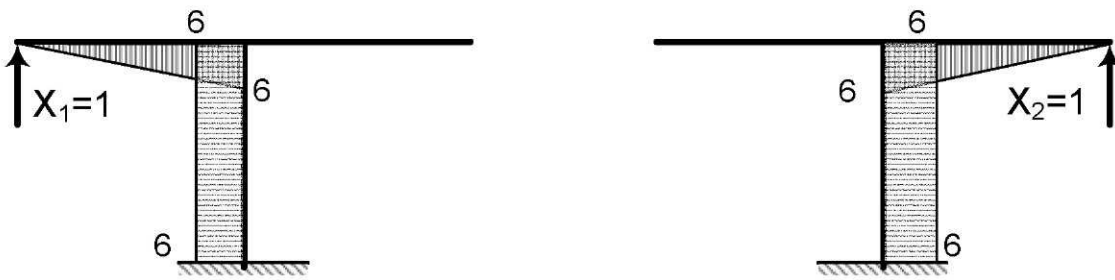


Рис.2.21. Эпюры  $M^*1$ ,  $M^*2$  от  $X_1=X_2=1$  в основной системе метода сил  
 Формируем матрицу  $\bar{M}^*$ , перемножаем матрицы:

$$\bar{M}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \\ 6 & 0 \\ 0 & 6 \\ 0 & 0 \\ 6 & -6 \\ 6 & -6 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G} \cdot \mathbf{M}_{расч} = \frac{1}{6i} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4.5 \\ -9 \\ -3 \\ 6 \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{6i} \begin{bmatrix} 0 \\ 18 \\ -9 \\ 0 \\ 9 \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix};$$

$$\bar{M}^{*T} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{M}_{расч} = \frac{1}{i} \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 18 \\ -9 \\ 0 \\ 9 \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -15 \\ 6 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Погрешность расчета  $\varepsilon = 0\% < 3\%$ .

Строим расчетную эпюру изгибающих моментов

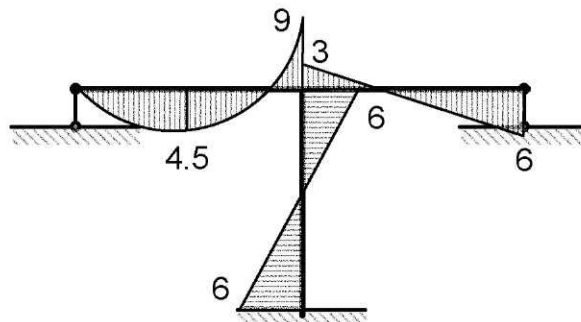


Рис.2.22. Эпюра  $M_{расч}$  (кНм)

Используя (2.19), построим расчетную эпюру перерезывающих сил. Вырезаем жесткий узел рамы, составляем уравнения равновесия для него, из которых определяем нормальные силы в элементах рамы. Строим расчетную эпюру нормальных сил. Эпюры  $Q_{расч}$  и  $N_{расч}$  показаны на Рис.2.23, 2.24.

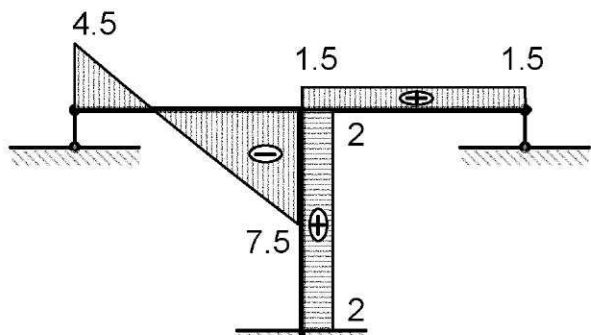


Рис.2.23. Эпюра  $Q_{расч}$  (кН)

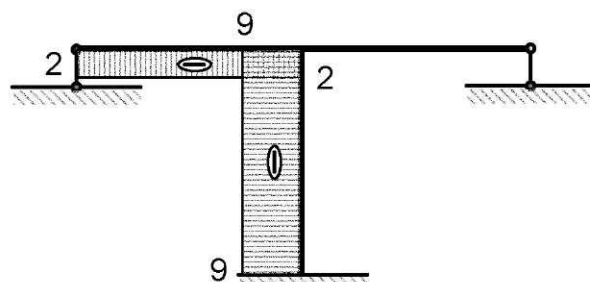


Рис.2.24. Эпюра  $N_{расч}$  (кН)

Используя эпюры внутренних усилий, находим реакции опорных связей рамы. Выполняем статическую проверку, составив уравнения равновесия:

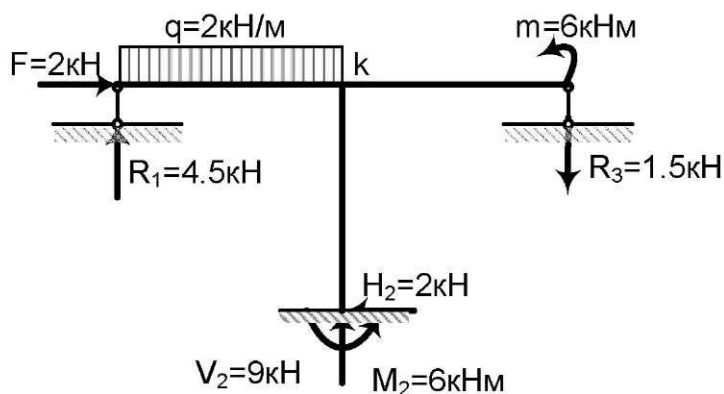


Рис.2.25. Реакции опор рамы

$$\sum X = F - H_2 = 2 - 2 = 0;$$

$$\sum Y = R_1 - q \cdot 6 + V_2 - R_3 = 4.5 - 2 \cdot 6 + 9 - 1.5 = 0;$$

$$\begin{aligned} \sum m_k &= R_1 \cdot 6 - q \cdot 6 \cdot 3 + H_2 \cdot 6 - M_2 - m + R_3 \cdot 6 = \\ &= 4.5 \cdot 6 - 2 \cdot 6 \cdot 3 + 2 \cdot 6 - 6 - 6 + 1.5 \cdot 6 = 48 - 48 = 0. \end{aligned}$$

Проверка выполнена точно.

### 3. Матрицы в теории устойчивости сооружений.

#### Определение критических сил в рамах методом А.Ф.Смирнова.

Рассмотрим определение перемещений по формуле Мора в матричной форме в случае узлового нагружения рам сосредоточенными силами. Деформации такой рамы после потери устойчивости показаны на Рис.3.1:

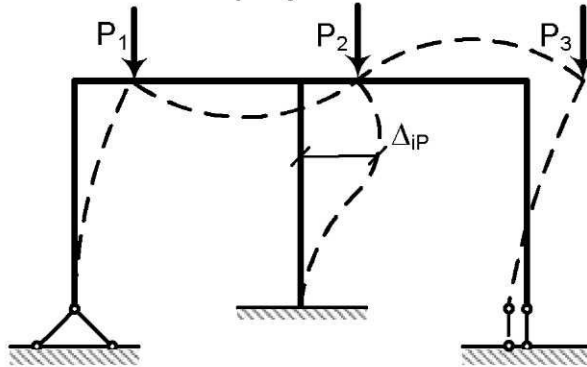


Рис.3.1. Схема потери устойчивости рамы

$$\Delta_{ip} = \bar{\bar{M}}_i \cdot G^* \cdot M_p. \quad (3.1)$$

В формуле (3.1)  $\bar{\bar{M}}_j$  – изгибающий момент от единичной силы, направленной также как определяемое перемещение.  $G^*$  – матрица податливости системы, вид которой рассмотрим позже.  $M_p$  – матрица изгибающих моментов от заданной нагрузки. При узловой передаче внешней нагрузки изгибающие моменты в элементах рамы будут выражены через параметр нагрузки и поперечные перемещения:

$$M_p = U \cdot M_{p0} = \rho \cdot U \cdot H \cdot [A], \quad (3.2)$$

где  $\rho$  – критический параметр,  $U$  – матрица раскрытия статической неопределимости (2.10),  $H$  – некоторая числовая матрица,  $[A]$  – вектор поперечных перемещений точек рамы. После подстановки (3.2) в (3.1) получим выражение:

$$\Delta_{ip} = \bar{\bar{M}}_i \cdot G^* \cdot \rho \cdot U \cdot H \cdot [A].$$

Выбрав в качестве точек «i» те же точки, что при построении матрицы  $[A]$ , окончательно получаем:

$$[A] = \rho \cdot \bar{\bar{M}} \cdot G^* \cdot U \cdot H \cdot [A], \quad (3.3)$$

где  $U$  – матрица раскрытия статической неопределимости (2.10):

$$U = E - \bar{\bar{M}} \cdot (\bar{\bar{M}}^T \cdot G \cdot \bar{\bar{M}})^{-1} \cdot \bar{\bar{M}}^T \cdot G.$$

В формуле  $\bar{\bar{M}}$  – матрица изгибающих моментов от единичных значений неизвестных  $X_j = 1$  метода сил.  $G$  – матрица податливости, состоящая из блоков

$$G_j = \frac{l_j}{6EJ_j} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

В формуле (3.3)  $\overline{\overline{M}}$  - матрица изгибающих моментов от единичных сил, прикладываемых по направлению определяемых перемещений системы.

Обозначим

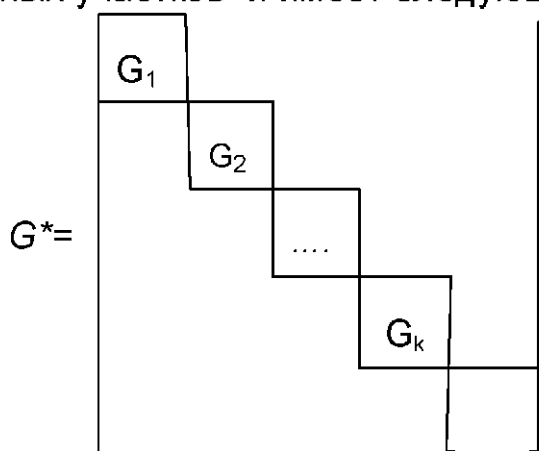
$$C = \overline{\overline{M}} \cdot G^* \cdot U \cdot H; \quad \lambda = \frac{1}{\rho}. \quad (3.4)$$

Подставим (3.4) в (3.3), получим

$$C \cdot \Delta = \lambda \cdot \Delta. \quad (3.5)$$

Формула (3.5) показывает, что  $\lambda$  и  $\Delta$  есть собственное значение и собственный вектор матрицы  $C$ .

Рассмотрим формирование матрицы податливости  $G^*$ . Матрица податливости всей системы формируется из матриц податливости отдельных участков и имеет следующую структуру



$G_k$  – блок матрицы на  $k$ -ом участке.  
Вид матрицы  $G_k$  зависит от типа участка (какую деформацию он испытывает).

Рис.3.2. Матрица податливости системы при ее расчете на устойчивость

1) Участок, испытывающий только изгиб

The diagram shows a horizontal beam element. Above the beam, a double-headed arrow indicates a length  $L_k$ . Below the beam, another double-headed arrow indicates a stiffness  $B_k$ .

$$G = \frac{l_k}{6B_k} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{l_0}{48B_0} \begin{bmatrix} 16\beta_k & 8\beta_k \\ 8\beta_k & 16\beta_k \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

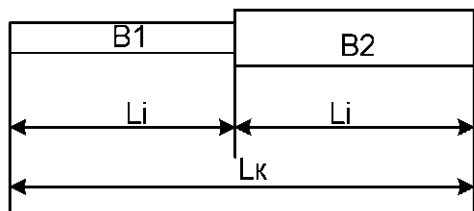
где :  $l_0$ -длина любого участка , принятого за основной,  $B_0$ -жесткость любого участка , принятого за основную.

$$\beta_k = \frac{l_k B_0}{l_0 B_k}$$



2) Участки, испытывающие деформацию сжатие с изгибом. Для такого участка вид матрицы  $G_k$  зависит от того на сколько панелей разбита его длина.

а) Длина участка разбита на две панели:

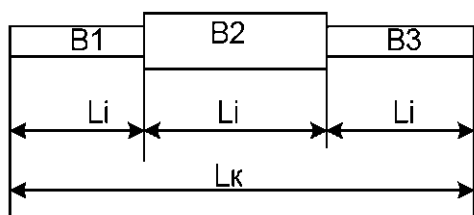


$l_k$  -длина участка,  $l_i$ -длина панели

$$\beta_1 = \frac{l_i B_0}{l_0 B_1}; \beta_2 = \frac{l_i B_0}{l_0 B_2}$$

$$G_k = \frac{l_0}{48B_0} \begin{bmatrix} 14\beta_1 & 12\beta_1 & -2\beta_1 \\ 6\beta_1 - 2\beta_2 & 20(\beta_1 + \beta_2) & 6\beta_2 - 2\beta_1 \\ -2\beta_2 & 12\beta_2 & 14\beta_2 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

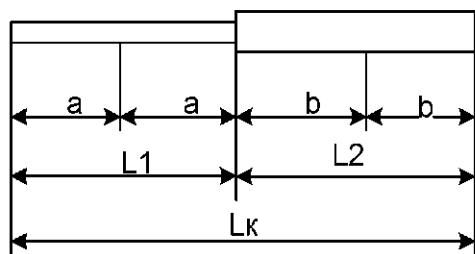
б) Длина участка разбита на три панели:



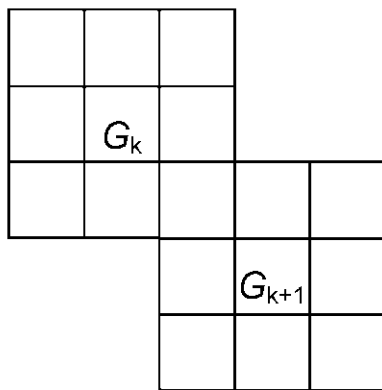
$$\beta_1 = \frac{l_i B_0}{l_0 B_1}; \beta_2 = \frac{l_i B_0}{l_0 B_2}; \beta_3 = \frac{l_i B_0}{l_0 B_3}$$

$$G_k = \frac{l_0}{48B_0} \begin{bmatrix} 14\beta_1 & 12\beta_1 & -2\beta_1 & 0 \\ 6\beta_1 - \beta_2 & 20\beta_1 + 17\beta_2 & 9\beta_2 - 2\beta_1 & -\beta_2 \\ -\beta_2 & 9\beta_2 - 2\beta_3 & 20\beta_3 + 17\beta_2 & 6\beta_3 - \beta_2 \\ 0 & -2\beta_3 & 12\beta_3 & 14\beta_3 \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

в) Длина участка разбита на четыре и более панелей:



В этом случае общая длина сжато-изогнутого элемента komponуется из подучастков с двумя или тремя панелями.



Соответственно komponуется матрица податливости (Рис.3.3).

Рис.3.3. Схема объединения соседних участков

Формирование матрицы  $H$ .

Матрица  $H$ -числовая матрица размером  $(\mu \times m)$ , преобразующая вектор перемещений  $\bar{y}$  в эпюру моментов грузового состояния.

$$\bar{M}_0 = PH\bar{y};$$

Для построения матрицы  $H$  необходимо определить изгибающие моменты во всех расчетных сечениях основной системы от узловых нагрузок и построить эпюру  $M_0$

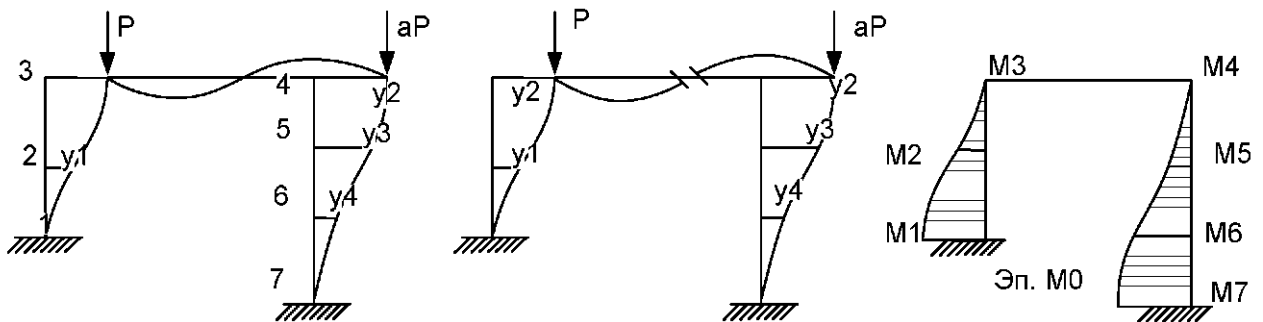


Рис.3.4. Схема для построения матрицы  $H$

Эпюра  $M_0$  строится со стороны растянутых волокон с учетом деформированного состояния системы.

$$M_1 = Py_2, M_2 = P(y_2 - y_1), M_3 = 0, M_4 = 0, M_5 = -\alpha P(y_2 - y_3),$$

$$M_6 = -\alpha P(y_2 - y_4), M_7 = -\alpha Py_2$$

$$M_{\theta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}.$$

В матрицу  $H$  вписываются коэффициенты при перемещениях из каждого уравнения.

Пример №14. Найти критическую нагрузку для рамы, показанной на Рис.3.5.

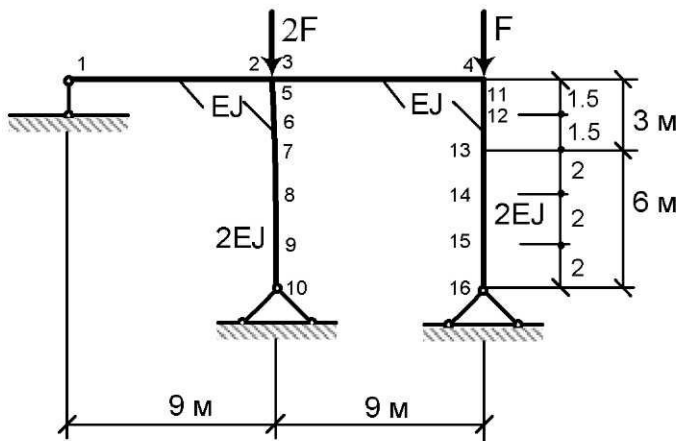


Рис.3.5. К примеру №14

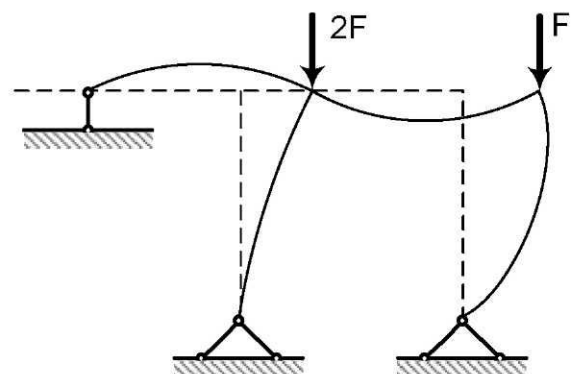


Рис.3.6. Форма потери устойчивости рамы.

Для составления матрицы податливости разобьем раму на участки. На Рис.3.5. показаны сечения на границах участков. Коэффициенты, входящие в блоки матриц податливости  $G$  и  $G^*$ , приведены ниже:

$$\beta_o = \frac{2}{2EI} = \frac{1}{EI}; \quad \beta_1 = \beta_2 = \frac{9 \cdot 2EI}{2 \cdot EI} = 9; \quad \beta_3 = \beta_4 = \frac{1.5 \cdot 2EI}{2 \cdot EI} = 1.5;$$

$$\beta_5 = \beta_6 = \beta_7 = \frac{2 \cdot 2EI}{2 \cdot 2EI} = 1; \quad \beta_8 = \beta_9 = \frac{1.5 \cdot 2EI}{2 \cdot EI} = 1.5; \quad \beta_{10} = \beta_{11} = \beta_{12} = \frac{2 \cdot 2EI}{2 \cdot 2EI} = 1.$$

Матрица податливости  $G$  участвует в вычислениях матрицы  $U$ :

$$G = \frac{1}{48EI} \cdot \begin{bmatrix} 144 & 72 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 72 & 144 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 144 & 72 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 72 & 144 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 48 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 40 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 32 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 32 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 48 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 40 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 32 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Матрицу податливости  $G^*$  формируем, используя (3.6) – (3.8)

$$G^* = \frac{1}{48EI} \cdot \begin{bmatrix} 144 & 72 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 72 & 144 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 144 & 72 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 72 & 144 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21 & 18 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 60 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 18 & 35 & 12 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 37 & 7 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 7 & 37 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 12 & 14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21 & 18 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 60 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 18 & 35 & 12 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 37 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 7 & 37 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 12 \end{bmatrix}$$

Выберем основную систему и построим единичные эпюры  $M_1$  и  $M_2$

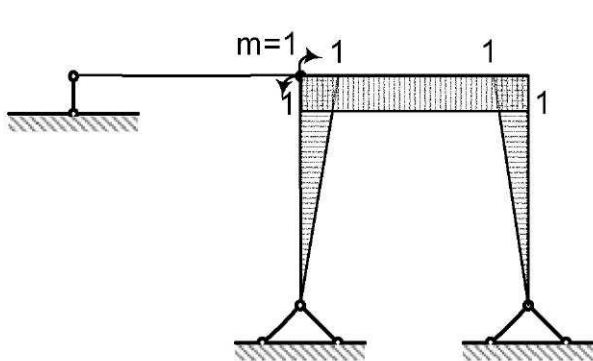


Рис.3.7. Эпюра  $M_2$ .

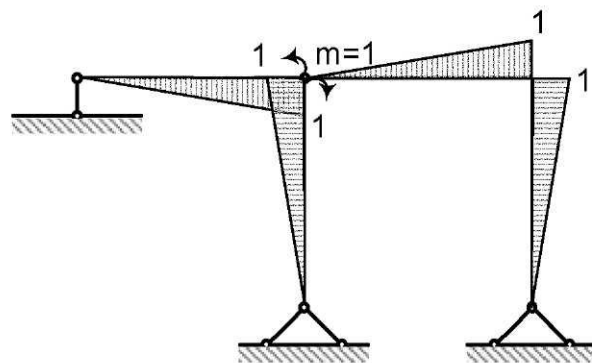


Рис.3.8. Эпюра  $M_1$ .

Составим матрицу  $\overline{M}^T$ :

$$\overline{M}^T = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 0 & 18 & 0 & -18 & 18 & 15 & 12 & 8 & 4 & 0 & -18 & -15 & -12 & -8 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 18 & -18 & -15 & -12 & -8 & -4 & 0 & 18 & 15 & 12 & 8 & 4 & 0 \end{bmatrix};$$

По формуле (2.10) вычисляем матрицу  $U$ .

Для составления матрицы  $H$  покажем основную систему в деформированном состоянии и вычислим изгибающие моменты в сечениях рамы

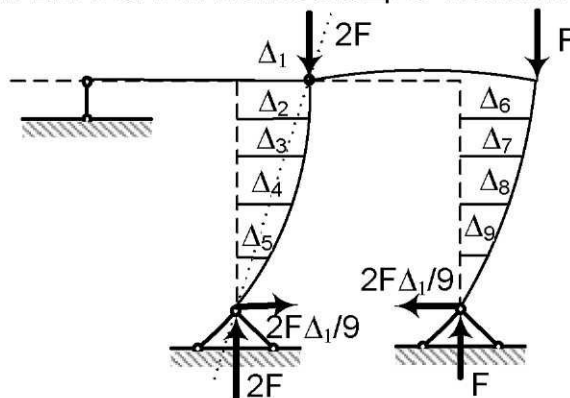


Рис.3.9. Основная система в деформированном состоянии

$$M_{04} = -3F \cdot \Delta_1; M_{06} = -2F \cdot \left( \Delta_2 - \Delta_1 \cdot \frac{15}{18} \right); M_{07} = -2F \cdot \left( \Delta_3 - \Delta_1 \cdot \frac{6}{9} \right); M_{08} = -2F \cdot \left( \Delta_4 - \Delta_1 \cdot \frac{4}{9} \right);$$

$$M_{09} = -2F \cdot \left( \Delta_5 - \Delta_1 \cdot \frac{2}{9} \right); M_{011} = -3F \cdot \Delta_1; M_{012} = -F \cdot \left( \Delta_6 + 2\Delta_1 \cdot \frac{15}{18} \right);$$

$$M_{013} = -F \cdot \left( \Delta_7 + 2\Delta_1 \cdot \frac{6}{9} \right); M_{014} = -F \cdot \left( \Delta_8 + 2\Delta_1 \cdot \frac{4}{9} \right); M_{015} = -F \cdot \left( \Delta_9 + 2\Delta_1 \cdot \frac{2}{9} \right).$$

$$M_{01} = M_{02} = M_{03} = M_{05} = M_{010} = M_{016} = 0$$

Формируем матрицу

$$M_\theta = F \cdot H \cdot \Delta,$$

где

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.66667 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.33333 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.88889 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.44444 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.66667 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1.33333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -0.88889 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -0.44444 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\overline{M}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & -7.5 & -6 & -4 & -2 & -7.5 & -6 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.13888 & -0.11111 & -0.074074 & -0.037037 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.11111 & -0.22222 & -0.148148 & -0.074074 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.074074 & -0.148148 & -0.24691 & -0.12346 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.037037 & -0.074074 & -0.12346 & -0.17284 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & -7.5 & -6 & -4 & -2 & -7.5 & -6 & -4 & -2 \\ -7.5 & -6.25 & -5 & -3.33333 & -1.66667 & -7.5 & -6 & -4 & -2 \\ -6 & -5 & -4 & -2.66667 & -1.33333 & -6 & -6 & -4 & -2 \\ -4 & -3.33333 & -2.66667 & -1.77778 & -0.88889 & -4 & -4 & -4 & -2 \\ -2 & -1.66667 & -1.33333 & -0.88889 & -0.44444 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Строим единичные эпюры для определения перемещений (Рис.3.10).  
Формируем матрицу  $\overline{\overline{M}}$ :

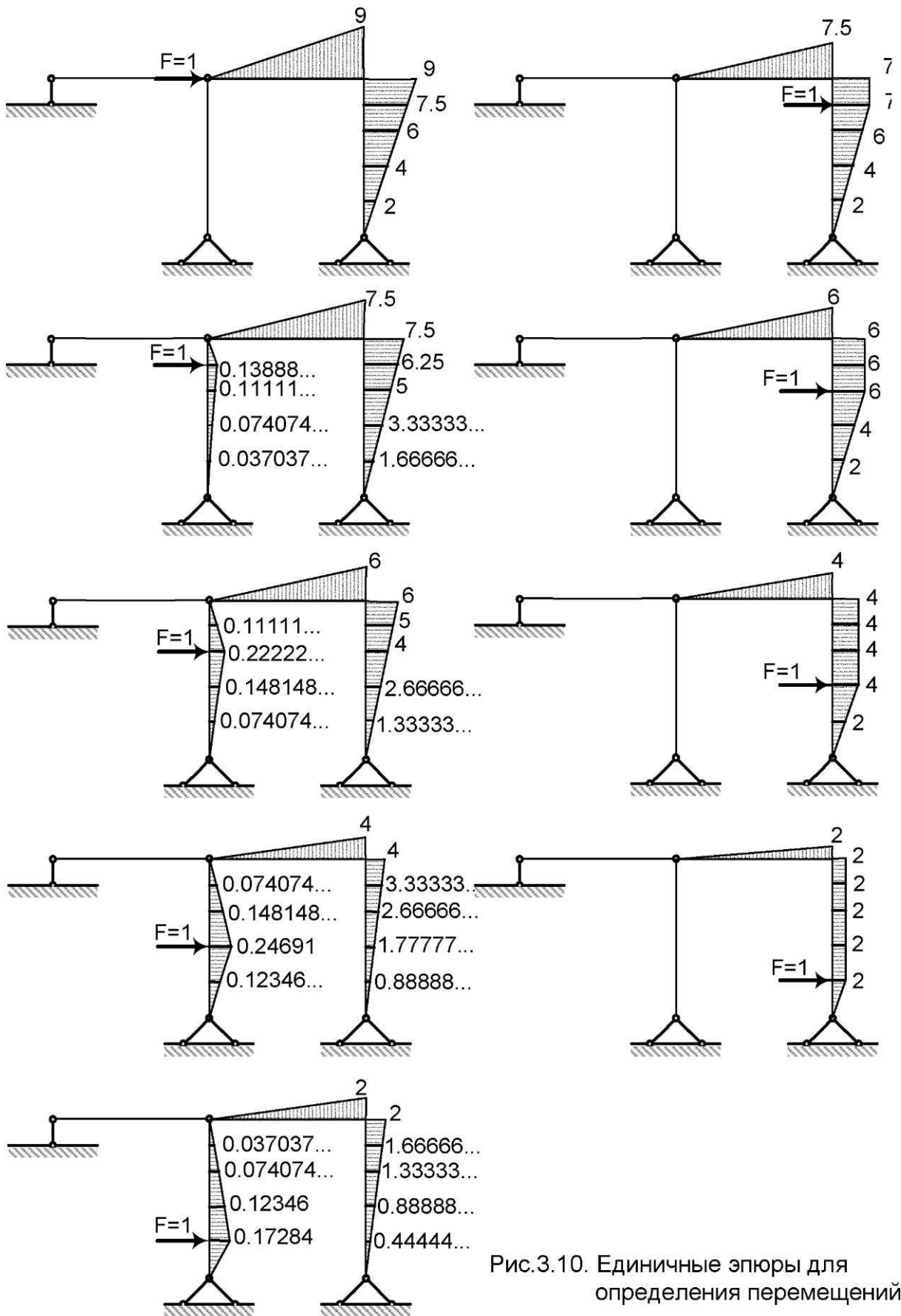


Рис.3.10. Единичные эпюры для определения перемещений

Перемножаем матрицы по формуле (3.4), получаем

$$C = \begin{bmatrix} 1139.50 & 596.58 & 399.33 & 212.12 & 106.06 & 421.71 & 46.03 & 127.94 & 36.97 \\ 948.06 & 514.38 & 341.08 & 184.21 & 91.10 & 353.14 & 39.51 & 107.23 & 31.11 \\ 756.32 & 414.50 & 281.79 & 157.13 & 76.56 & 283.42 & 32.22 & 86.10 & 25.05 \\ 503.54 & 275.42 & 188.58 & 116.42 & 58.43 & 189.40 & 21.79 & 57.57 & 16.78 \\ 251.57 & 137.43 & 93.88 & 59.67 & 37.39 & 94.84 & 10.99 & 28.83 & 8.42 \\ 976.79 & 528.12 & 354.04 & 187.78 & 93.89 & 428.94 & 73.48 & 140.11 & 43.06 \\ 789.72 & 438.71 & 294.10 & 155.98 & 77.99 & 356.65 & 98.95 & 156.01 & 51.00 \\ 532.55 & 300.75 & 201.61 & 106.93 & 53.47 & 233.62 & 60.19 & 156.53 & 67.27 \\ 268.10 & 152.86 & 102.47 & 54.35 & 27.17 & 115.57 & 32.76 & 84.83 & 70.41 \end{bmatrix}.$$

Методом итераций находим старшее собственное число и собственный вектор этой матрицы:

$$\lambda = 2533; \quad \bar{\varphi}^T = [0.487 \quad 0.411 \quad 0.331 \quad 0.222 \quad 0.111 \quad 0.443 \quad 0.374 \quad 0.260 \quad 0.133];$$

$$\lambda = \frac{48EI}{F}; \quad F_{кр} = \frac{EI}{52.8}.$$

Для оценки точности расчета выберем другую основную систему, построим единичные эпюры от неизвестных метода сил

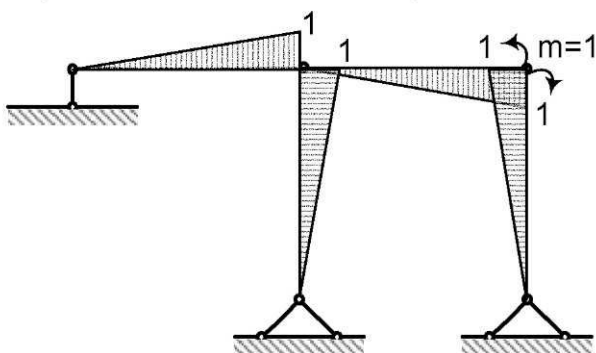


Рис.3.11. Эпюра  $M_2$

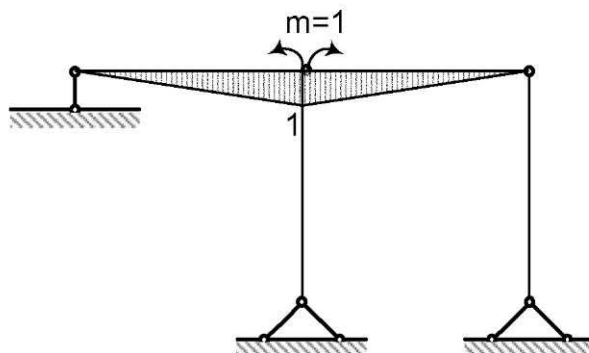


Рис.3.12. Эпюра  $M_1$ .

Составим матрицу  $\bar{M}$ :

$$M^T = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 0 & 18 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 0 & 18 & -18 & -15 & -12 & -8 & -4 & 0 & 18 & 15 & 12 & 8 & 4 \end{bmatrix}.$$

По формуле (2.10) вычисляем матрицу  $U$ , используя прежнюю матрицу  $G$ .



Для составления матрицы  $H$  покажем основную систему в деформированном состоянии и вычислим изгибающие моменты в сечениях рамы

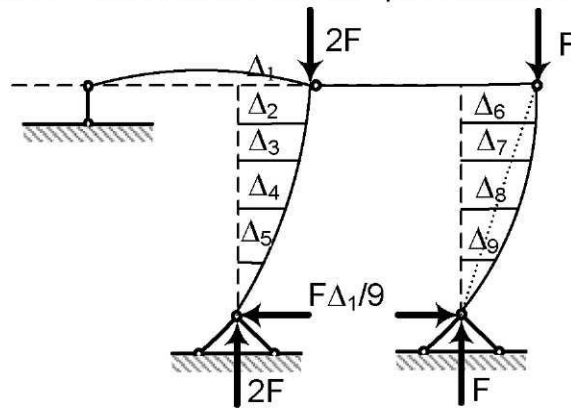


Рис.3.13. Основная система №2 в деформированном состоянии

$$M_{02} = -3F \cdot \Delta_1; M_{05} = -3F \cdot \Delta_1; M_{06} = -F \cdot \left( 2\Delta_2 + \frac{5}{6} \Delta_1 \right); M_{07} = -F \cdot \left( 2\Delta_3 + \frac{6}{9} \Delta_1 \right);$$

$$M_{08} = -F \cdot \left( 2\Delta_4 + \frac{4}{9} \Delta_1 \right); M_{09} = -F \cdot \left( 2\Delta_5 + \frac{2}{9} \Delta_1 \right); M_{012} = -F \cdot \left( \Delta_6 - \Delta_1 \cdot \frac{15}{18} \right);$$

$$M_{013} = -F \cdot \left( \Delta_7 - \Delta_1 \cdot \frac{6}{9} \right); M_{014} = -F \cdot \left( \Delta_8 - \Delta_1 \cdot \frac{4}{9} \right); M_{015} = -F \cdot \left( \Delta_9 - \Delta_1 \cdot \frac{2}{9} \right).$$

$$M_{01} = M_{03} = M_{04} = M_{011} = M_{016} = 0$$

Формируем матрицу

$$M_o = F \cdot H \cdot \Delta,$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.83333 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.66667 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.44444 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.22222 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.83333 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.66667 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0.44444 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0.22222 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Строим единичные эпюры для определения перемещений (Рис.3.14).

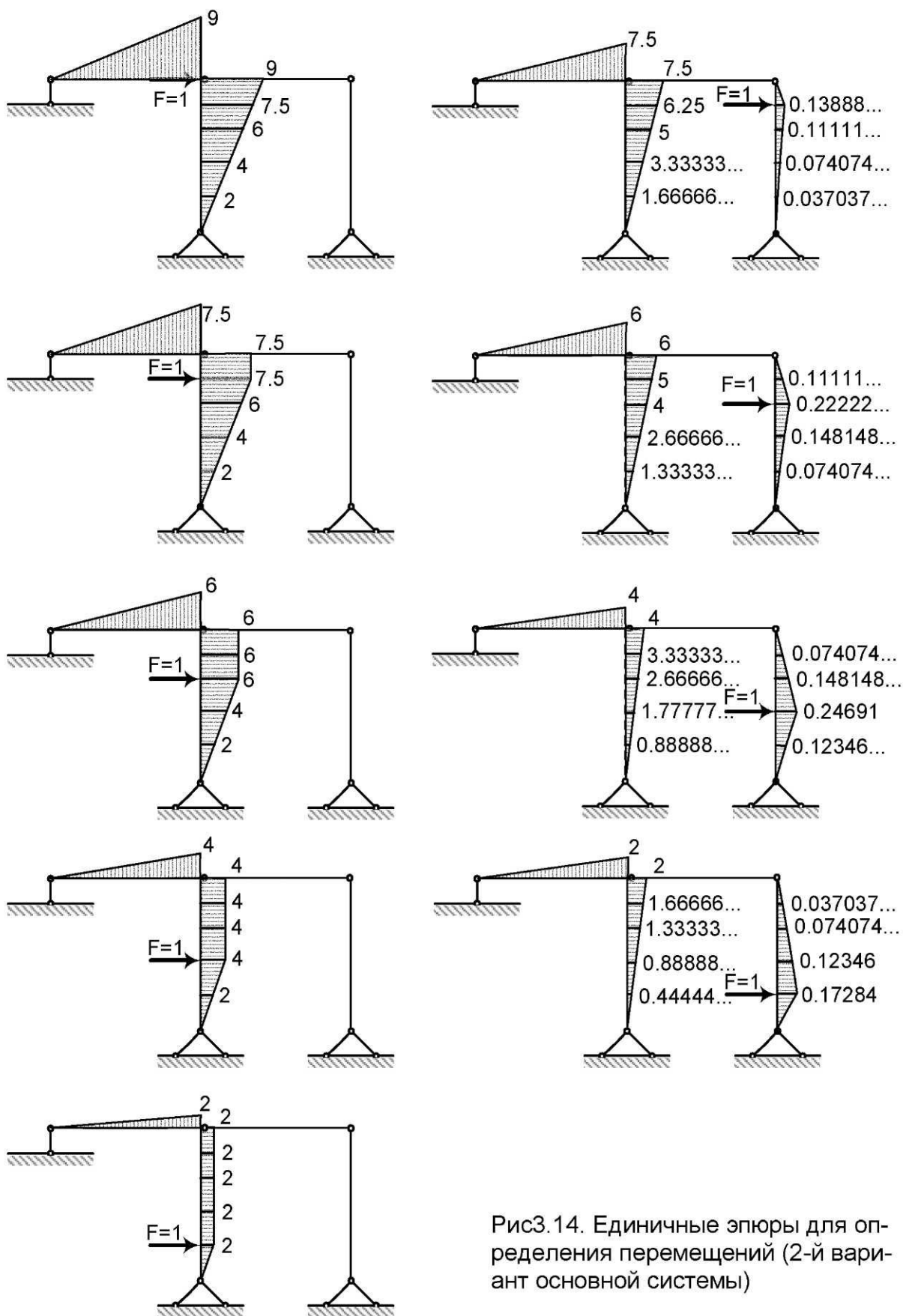


Рис.3.14. Единичные эпюры для определения перемещений (2-й вариант основной системы)

Формируем матрицу  $\overline{\overline{M}}$ :

$$\overline{\overline{M}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & -7.5 & -6 & -4 & -2 & -7.5 & -6 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & -7.5 & -6 & -4 & -2 & -7.5 & -6 & -4 & -2 \\ -7.5 & -7.5 & -6 & -4 & -2 & -6.25 & -5 & -3.33333 & -1.66667 \\ -6 & -6 & -6 & -4 & -2 & -5 & -4 & -2.66667 & -1.33333 \\ -4 & -4 & -4 & -4 & -2 & -3.33333 & -2.66667 & -1.77778 & -0.88889 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -1.66667 & -1.33333 & -0.88889 & -0.44444 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.13888 & -0.11111 & -0.074074 & -0.037037 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.11111 & -0.22222 & -0.14815 & -0.074074 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.074074 & -0.14815 & -0.24691 & -0.12346 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.037037 & -0.074074 & -0.12346 & -0.17284 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Перемножаем матрицы по формуле (3.4), находим

$$C = \begin{bmatrix} 1049.5 & 956.6 & 167.9 & 296.1 & 94.1 & 241.7 & 162.0 & 85.9 & 43.0 \\ 860.9 & 952.2 & 210.2 & 313.8 & 102.9 & 216.9 & 145.4 & 77.1 & 38.6 \\ 669.6 & 788.7 & 248.5 & 338.8 & 115.4 & 181.6 & 121.8 & 64.6 & 32.3 \\ 440.3 & 517.5 & 172.1 & 331.0 & 143.5 & 125.2 & 83.9 & 44.5 & 22.3 \\ 218.3 & 256.3 & 82.4 & 178.6 & 145.3 & 63.9 & 42.8 & 22.7 & 11.4 \\ 877.6 & 800.6 & 142.3 & 248.0 & 79.0 & 210.0 & 138.9 & 75.3 & 37.2 \\ 703.0 & 642.3 & 115.0 & 199.0 & 63.5 & 169.5 & 115.8 & 65.1 & 31.6 \\ 469.3 & 429.1 & 77.3 & 133.0 & 42.5 & 112.6 & 77.4 & 49.3 & 24.7 \\ 234.9 & 214.8 & 38.8 & 66.6 & 21.3 & 56.1 & 38.5 & 25.4 & 16.5 \end{bmatrix}$$

Методом итераций определяем старшее собственное число и собственный вектор этой матрицы:

$$\lambda = 2628;$$

$$\overline{\varphi}^T = [0.481 \quad 0.447 \quad 0.384 \quad 0.270 \quad 0.139 \quad 0.405 \quad 0.326 \quad 0.218 \quad 0.109];$$

$$\lambda = \frac{48EJ}{F}; \quad F_{xp} = \frac{EJ}{54.8}.$$

Отличие от предыдущего значения составляет 3.65%, что показывает достаточно хорошую точность расчета.

## 4. Матрицы в динамике сооружений

### 4.1. Динамический расчет систем со многими степенями свободы

#### 4.1.1. Произвольная нагрузка

Решение задач динамики стержневых систем с конечным числом степеней свободы сводится к решению матричного уравнения:

$$K \cdot \bar{v} + m \cdot \ddot{\bar{v}} = \bar{P}(t), \quad (4.1)$$

в котором  $K$  – матрица жесткости системы,  $m$  – матрица масс,

Решение уравнения (4.1) будем искать в виде разложения:

$$\bar{v}(t) = \Phi \cdot \bar{a}(t), \quad (4.2)$$

где  $\Phi$  – некоторая квадратная матрица,  $\bar{a}(t)$  – вектор коэффициентов, зависящих от времени.

После подстановки (4.2) в (4.1), умножения на  $\Phi^T$  слева получаем

$$\Phi^T \cdot K \cdot \Phi \cdot \bar{a}(t) + \Phi^T \cdot m \cdot \Phi \cdot \ddot{\bar{a}}(t) = \Phi^T \cdot \bar{P}(t) \quad (4.3)$$

Обозначим

$$\Psi = m^{0.5} \Phi \quad (4.4)$$

получим

$$\Psi^T (m^{-0.5})^T \cdot K \cdot m^{-0.5} \Psi \cdot \bar{a}(t) + \Psi^T \cdot \Psi \cdot \ddot{\bar{a}}(t) = (m^{-0.5} \Psi)^T \cdot \bar{P}(t).$$

Обозначим  $K_m = (m^{-0.5})^T \cdot K \cdot m^{-0.5}$ , тогда

$$\Psi^T \cdot K_m \cdot \Psi \cdot \bar{a}(t) + \Psi^T \cdot \Psi \cdot \ddot{\bar{a}}(t) = (m^{-0.5} \Psi)^T \cdot \bar{P}(t). \quad (4.5)$$

В качестве матрицы  $\Psi$  выберем матрицу нормированных собственных векторов матрицы  $K_m$ . Тогда

$$\Psi^T \cdot K_m \cdot \Psi = A, \quad (4.6) \quad A - \text{матрица собственных значений матрицы } K_m,$$

$$\Psi^T \cdot \Psi = E, \quad (4.7) \quad E - \text{единичная матрица.}$$

После подстановки (4.6) и (4.7) в (4.5) получаем векторное равенство:

$$\ddot{\bar{a}}(t) + A \cdot \bar{a}(t) = \bar{b}(t), \quad (4.8) \quad \bar{b}(t) = (m^{-0.5} \Psi)^T \cdot \bar{P}(t). \quad (4.9)$$

Из обыкновенных неоднородных дифференциальных уравнений (4.8) находим коэффициенты  $\bar{a}(t)$  и согласно (4.2) решение поставленной задачи:

$$\bar{v}(t) = \Phi \cdot \bar{a}(t) = m^{-0.5} \cdot \Psi \cdot \bar{a}(t). \quad (4.10)$$

Уравнение (4.8) представляет собой систему независимых линейных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\ddot{a}_i(t) + p_i^2 \cdot a_i(t) = b_i(t), \quad (4.11)$$

где  $p_i$  – собственная частота  $i$ -й формы колебаний. Для получения решения уравнения (4.11) при действии на систему произвольной нагрузки  $\bar{P}(t)$  достаточно знать импульсную переходную функцию (ИПФ), которая

представляет собой решение этого уравнения при  $b(t) = \delta(t)$ ,  $\delta(t)$  – дельта-функция Дирака.

$$\ddot{k}_i(t) + p_i^2 \cdot k_i(t) = \delta(t) \quad (4.12)$$

Решение уравнения (4.12) хорошо известно:

$$k_i(t) = \frac{\sin(p_i \cdot t)}{p_i}, \quad (4.13)$$

тогда решение (4.11) при любом  $b(t)$ , действующем при  $t > 0$ , имеет вид

$$a_i(t) = \int_0^t \frac{\sin p_i(t - \tau)}{p_i} b_i(\tau) d\tau,$$

или с учетом (4.9)

$$a_i(t) = \int_0^t \frac{\sin p_i(t - \tau)}{p_i} \psi_i^T \sqrt{m}^T \bar{P}(\tau) d\tau$$

и в матричной форме

$$\bar{a}(t) = \int_0^t K_i(t - \tau) \cdot \Psi^T \cdot \sqrt{m}^T \bar{P}(\tau) d\tau.$$

Примем  $\bar{P}(t) = T(t) \cdot \bar{P}$ , тогда, обозначив

$$\lambda_i(t) = \int_0^t k_i(t - \tau) \cdot T(t) \cdot dt, \quad (4.14)$$

$$\bar{a}(t) = \Lambda(t) \cdot \Psi^T \cdot \sqrt{m}^T \bar{P}. \quad (4.15)$$

$\Lambda(t)$  - диагональная матрица, элементами которой являются функции (4.14).

Из (4.10) определяем динамические перемещения

$$\bar{v} = \sqrt{m}^{-1} \Psi \cdot \Lambda(t) \cdot \Psi^T \sqrt{m}^T \bar{P} = \sqrt{m}^{-1} \left( \sum_1^n H_i \lambda_i(t) \right) \sqrt{m}^T \bar{P}, \quad (4.16)$$

где

$$H_i = \bar{\psi}_i \cdot \bar{\psi}_i^T - \quad (4.17)$$

парциальная матрица.

Формулы, полученные в этом разделе, относятся к случаю отсутствия диссипативных сил. В таких системах после исчезновения возмущающих нагрузок механическая энергия остается постоянной, вследствие чего колебания с течением времени не затухают.

Для учета диссипативных сил в уравнение движения (4.1) необходимо ввести дополнительное слагаемое, учитывающее силы неупругого сопротивления движению. Из-за многообразия сил сопротивления (внешнего трения сухого и вязкого, внутреннего трения в материале и т.п.), и представления их различными моделями неупругого сопротивления (линейными и нелинейными, зависящими и независящими от частоты или амплитуды и т.д.) колебаний, невозможно однозначно ввести диссипативное слагаемое в (4.1).

В настоящее время нормативными документами рекомендуется использовать физически реализуемые модели сопротивления. К этим моделям относятся: скорректированная модель Фохта (вязкого трения) и частотно-независимая модель внутреннего трения.

Эти модели допускают разложение линейных операторов диссипативных сил по формам операторов упругих сил, в результате поиска решения (4.1) в виде такого разложения (4.10) приходим к решению системы независимых линейных уравнений относительно коэффициентов  $a(t)$ .

Для решения динамической задачи при любом воздействии на систему достаточно получить импульсную переходную функцию для уравнения типа (4.11).

Не приводя выкладок для разных моделей внутреннего сопротивления, запишем результат, используемый в инженерной практике:

$$k_i(t) = \exp\left(-\frac{\gamma}{2} p_i \cdot t\right) \frac{\sin(p_i^* \cdot t)}{p_i}. \quad (4.18)$$

Решение задачи представлено формулой (4.16), в которой вместо (4.13) используется импульсная переходная функция (4.18).

#### 4.1.2. Гармоническая нагрузка

Рассмотрим колебания системы при действии на неё гармонической нагрузки:  $\bar{P}(t) = \bar{P}_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$ ,  $\bar{P}(t) = \bar{P}_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$  или  $\bar{P}(t) = \bar{P}_0 \cdot \exp(i \cdot \omega \cdot t)$ . Функция нагрузки  $f(t) = \sin(\omega \cdot t)$ ,  $f(t) = \cos(\omega \cdot t)$  или  $f(t) = \exp(i \cdot \omega \cdot t)$ . Используя формулы Эйлера:

$$\sin(x) = \frac{\exp(i \cdot x) - i \cdot \exp(-i \cdot x)}{2i}, \quad \cos(x) = \frac{\exp(i \cdot x) + i \cdot \exp(-i \cdot x)}{2},$$

достаточно рассмотреть случай  $\bar{P}(t) = \bar{P}_0 \cdot \exp(i \cdot \omega \cdot t)$ .

Для диссипативной системы уравнение движения системы с моделью внутреннего трения по скорректированному Фохту имеет вид:

$$m \cdot \ddot{\bar{v}} + \Gamma \cdot \dot{\bar{v}} + K \cdot \bar{v} = \bar{P}(t), \quad (4.19)$$

где  $\Gamma$  - диссипативная матрица.

Подставив в (4.19)  $\bar{v}(t) = \bar{v}_0 \cdot \exp(i\omega t)$ ,  $\bar{P}(t) = \bar{P}_0 \cdot \exp(i\omega t)$ , после сокращения на  $\exp(i\omega t)$ , получим:

$$-\omega^2 m \cdot \bar{v}_0 + i\omega \cdot \Gamma \cdot \bar{v}_0 + K \cdot \bar{v}_0 = \bar{P}_0. \quad (4.20)$$

Решение уравнения (4.20) ищем в виде разложения по собственным формам  $\Phi$  матриц  $K$ ,  $m$ :

$$\bar{v}_0 = \Phi \bar{a}_0. \quad (4.21)$$

После подстановки (4.21) в (4.20), умножения полученного на  $\Phi^T$  слева, с учетом выражений, определяющих собственные значения и собственные векторы:

$$\Phi^T K \Phi = p^2, \quad \Phi^T m \Phi = E, \quad \Phi^T \Gamma \Phi = \gamma p \quad (4.22)$$

получаем 
$$-\omega^2 \bar{a}_0 + i\omega \cdot \gamma p \bar{a}_0 + p^2 \bar{a}_0 = \bar{b}_0, \quad (4.23)$$

где 
$$\bar{b}_0 = \Phi^T \bar{P}_0. \quad (4.24)$$

Система дифференциальных уравнений (4.23) в силу диагональности матриц  $p$ ,  $\gamma$ , представляет собой систему независимых уравнений:

$$-\omega^2 a_{0j} + i\omega \cdot \gamma_j p_j a_{0j} + p_j^2 a_{0j} = b_{0j},$$

из которых находим 
$$a_{0j} = \Phi_j^*(\omega) b_{0j},$$

где  $b_{0j} = \bar{\varphi}_j^T \bar{P}_0$ , 
$$\Phi_j^*(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + i\gamma \cdot p_j \omega + p_j^2} = A_j(\omega) \cdot \exp(i\varphi_j(\omega)), \quad (4.25)$$

$\Phi_j^*(\omega)$  - передаточная функция,  $A_j(\omega)$ - амплитудно-частотные характеристики (АЧХ),  $\varphi_j(\omega)$ - фазово-частотные характеристики (ФЧХ) для  $j$ -й формы:

мы: 
$$A_j(\omega) = \frac{1}{p_j^2 \sqrt{(1 - \bar{\omega}_j^2)^2 + \gamma^2 \bar{\omega}_j^2}}, \quad \varphi_j(\omega) = \arctg\left(\frac{\gamma \cdot \bar{\omega}_j}{1 - \bar{\omega}_j^2}\right), \quad \bar{\omega}_j = \frac{\omega}{p_j}. \quad (4.26)$$

После подстановки в (4.21) найденных выражений получим

$$\bar{v}_0 = \Phi \cdot \Phi^*(\omega) \cdot \Phi^T \cdot \bar{P}_0,$$

или 
$$\bar{v}_0 = D(\omega) \cdot \bar{P}_0, \quad (4.27)$$

где 
$$D(\omega) = m^{-1/2} \cdot D_m(\omega) \cdot m^{-1/2} \quad (4.28)$$

- гармоническая матрица податливости,

$$D_m(\omega) = \Psi \cdot \Phi^*(\omega) \cdot \Psi^T = \sum_{j=1}^n \Phi_j^*(\omega) \cdot H_j, \quad (4.29)$$

$\Psi = \sqrt{m} \cdot \Phi$ ,  $H_j = \bar{\Psi}_j \cdot \bar{\Psi}_j^T$  - парциальная матрица,  $\Phi_j^*(\omega)$ - передаточные функции.

Для консервативных систем передаточные функции величины действительные, поэтому амплитуды  $\bar{v}_0$  (4.27) величины действительные. Для диссипативных систем передаточные функции (4.25) величины комплексные и  $\bar{v}_0 = \text{Re}(\bar{v}_0) + i \cdot \text{Im}(\bar{v}_0)$  - величина комплексная,  $\text{Re}(\bar{v}_0)$ - действительная часть  $\bar{v}_0$ ,  $\text{Im}(\bar{v}_0)$  - мнимая часть  $\bar{v}_0$ . Действительную амплитуду находим по формуле:  $|\bar{v}_0| = \sqrt{[\text{Re}(\bar{v}_0)]^2 + [\text{Im}(\bar{v}_0)]^2}$ .

Для систем с редким спектром частот упростим вычисление амплитуд колебаний. При  $\omega \approx p_k$  амплитудно-частотная характеристика (АЧХ)

$$A_k(\omega) = \frac{1}{\gamma \cdot p_k^2}, \quad \varphi_k(\omega) = \frac{\pi}{2}, \quad A_j(\omega) = \frac{1}{p_j^2 - p_k^2}, \quad \varphi_j(\omega) \approx 0, \pi; \quad \text{т.е. при } \gamma \ll 1$$

$$A_k(\omega) \gg A_j(\omega), \quad \bar{v}_0 \approx \frac{1}{\gamma \cdot p_k^2} m^{-1/2} \cdot H_k \cdot m^{-1/2} \cdot \bar{P}_0. \quad (4.30)$$

Такие значения амплитуд принимаем для любых резонансных зон  $|\omega - p_k| < 0.2 \cdot p_k$ .

При других значениях  $\omega$

$$\bar{v}_0 \approx m^{-1/2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{p_j^2 - \omega^2} \cdot H_j \cdot m^{-1/2} \cdot \bar{P}_0. \quad (4.31)$$

## 4.2. Определение внутренних усилий

Внутренние усилия можно определить от действия на каждую массу системы сил упругости:  $\bar{F}(t) = K \cdot \bar{v}(t)$ .

Силы упругости согласно уравнению движения (4.19)

$$\bar{F}(t) = \bar{P}(t) - m \cdot \ddot{\bar{v}}(t) - \bar{R}(t). \quad (4.32)$$

Внутренние усилия определим по формуле

$$\bar{S}_{расч}(t) = L_S \cdot F(t) = L_S \cdot K \cdot \bar{v}(t), \quad (4.33)$$

где  $L_S$  - матрица влияния внутренних усилий:

$$D = L_S^T \cdot G \cdot L_S = L_{S0}^T \cdot U \cdot G \cdot U \cdot L_{S0}, \quad L_S = U \cdot L_{S0},$$

$L_S$  - матрица влияния внутренних усилий,  $L_{S0}$  - матрица влияния внутренних усилий, построенная в основной системе метода сил,  $U$  - матрица раскрытия статической неопределимости (2.10).

### 4.3.1 Внутренние усилия при произвольном возмущении

При произвольной нагрузке  $\bar{P}(t) = \bar{P}_0 \cdot f(t)$  перемещения определяются по (4.16), тогда

$$\bar{v}(t) = D(t) \cdot \bar{P}_0 = m^{1/2} \cdot \Psi \cdot \Lambda(t) \cdot \Psi^T \cdot m^{1/2} \cdot \bar{P}_0,$$

$$\text{матрица жесткости } K = \sqrt{m} \cdot K_m \cdot \sqrt{m} = \sqrt{m} \cdot \Psi \cdot p^2 \cdot \Psi^T \cdot \sqrt{m}, \quad (4.34)$$

где  $p^2$  - диагональная матриц квадратов собственных частот (собственных значений матрицы  $K_m$ ).

После подстановки выражений для  $K$  и  $\bar{v}(t)$  в (4.33) получим

$$\bar{S}_{расч}(t) = L_S \cdot F(t) = L_S \cdot \sqrt{m} \cdot \Psi \cdot p^2 \cdot \Lambda(t) \cdot \Psi^T \cdot \sqrt{m}^{-1} \cdot \bar{P}_0, \quad (4.35)$$

$$\text{или} \quad \bar{S}_{расч}(t) = L_S \cdot \sqrt{m} \left( \sum_{j=1}^n p_j^2 \cdot \lambda_j(t) \cdot H_j \right) \cdot \sqrt{m}^{-1} \cdot \bar{P}_0, \quad (4.36)$$

$$\text{где} \quad \lambda_j(t) = \int_{-\infty}^t k_j(t-\tau) f(\tau) d\tau; \quad k_j(t) = \frac{1}{p_{\lambda j}} \cdot \exp\left(-\frac{\gamma}{2} p_j t\right) \cdot \sin(p_{\lambda j} t); \quad (4.37)$$

$$p_{\lambda j} = p_j \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}}.$$



### 4.3.2 Внутренние усилия при гармонической нагрузке

При гармонической нагрузке  $\bar{P}(t) = \bar{P}_0 \cdot \exp(i\omega \cdot t)$  амплитуды перемещений определяются по (4.27)

$$\bar{v}_0 = D(\omega) \cdot \bar{P}_0 = m^{-1/2} \cdot \Psi \cdot \Phi^*(\omega) \cdot \Psi^T \cdot m^{-1/2} \cdot \bar{P}_0. \quad (4.38)$$

Амплитуды сил упругости  $\bar{F}_0 = K \cdot \bar{v}_0$ .

Амплитуды внутренних усилий определим по формуле

$$\bar{S}_{0\text{расч}} = L_S \cdot \bar{F}_0 = L_S \cdot K \cdot \bar{v}_0.$$

После подстановки (4.34), (4.38) получаем

$$\bar{S}_{0\text{расч}} = L_S \cdot \sqrt{m} \cdot \Psi \cdot p^2 \cdot \Phi^*(\omega) \cdot \Psi^T \cdot \sqrt{m}^{-1} \cdot \bar{P}_0, \quad (4.39)$$

или 
$$\bar{S}_{0\text{расч}} = L_S \cdot \sqrt{m} \cdot \left( \sum_{j=1}^n p_j^2 \cdot \Phi_j^*(\omega) \cdot H_j \right) \cdot \sqrt{m}^{-1} \cdot \bar{P}_0, \quad (4.40)$$

где  $\Phi_j^*(\omega)$  вычисляется по (4.25) для диссипативных с затуханием по «скорректированному» Фохту систем.

Для систем с редким спектром частот можно использовать формулы (4.30) и (4.31) при определении  $\bar{v}_0$ , тогда

$$\bar{S}_{0\text{расч}} = \left( \left( \frac{1}{\gamma \bar{\omega}_k} \cdot L_S \cdot \sqrt{m} \cdot H_k \cdot \sqrt{m}^{-1} \cdot \bar{P}_0 \right)^2 + \left( L_S \cdot \sqrt{m} \cdot \left( \sum_{j \neq k} \frac{1}{1 - \bar{\omega}_j^2} \cdot H_j \right) \cdot \sqrt{m}^{-1} \cdot \bar{P}_0 \right)^2 \right)^{1/2} \quad \text{при } |\omega - p_k| \leq 0.2 \cdot p_k, \quad (4.41)$$

$$\bar{S}_{0\text{расч}} = L_S \cdot \sqrt{m} \cdot \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{1 - \bar{\omega}_j^2} \cdot H_j \right) \cdot \sqrt{m}^{-1} \cdot \bar{P}_0 \quad \text{при } |\omega - p_k| > 0.2 \cdot p_k, \quad (4.42)$$

где  $\bar{\omega}_j = \frac{\omega}{p_j}$ .

### 4.3. Примеры динамического расчета конструкций

Рассмотрим применение полученных формул для расчета стержневых систем. Уравнение движения системы с конечным числом степеней свободы имеет вид (4.19)

$$m \cdot \ddot{\bar{v}} + \Gamma \cdot \dot{\bar{v}} + K \cdot \bar{v} = \bar{P}(t),$$

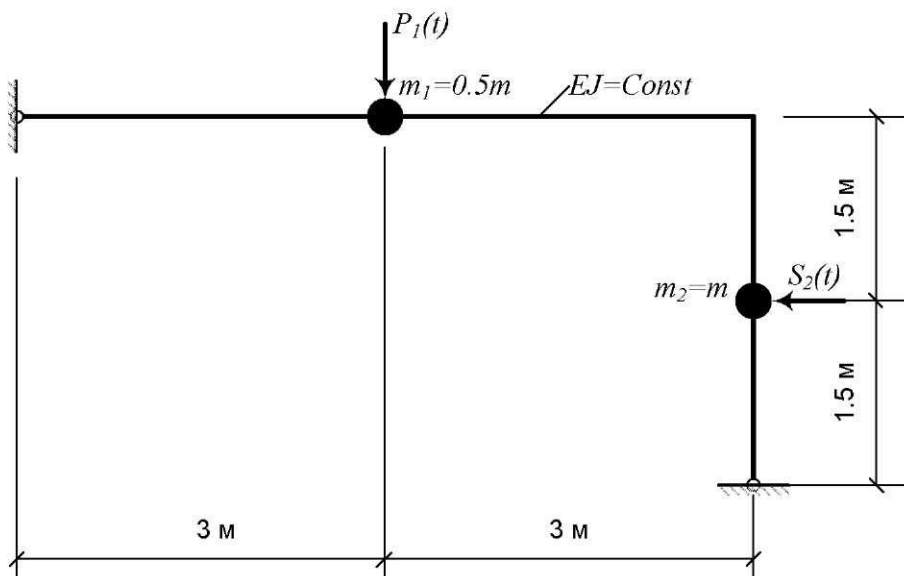
где  $\bar{v}$  - обобщенные перемещения. Количество обобщенных перемещений равно числу степеней свободы системы. В реальных системах количество степеней свободы бесконечно большое число. Задача инженера-расчетчика состоит в том, чтобы из бесконечно большого количества выбрать несколько определяющих перемещений, дающих наибольший вклад в результаты расчета, и принять их за обобщенные перемещения. Затем необходимо составить матрицу жесткости  $K$  или матрицу податливости  $D$ . Какую из этих матриц составлять определяют по характеру задачи. Диссипативную матрицу  $\Gamma$  составляют в тех случаях, когда в системе присутствуют специальные демпферы, либо поглощение энергии при колебаниях определяется внешними факторами. Если поглощение энергии происходит вследствие внутреннего трения в материале конструкции можно обойтись без определения этой матрицы. Матрицу масс  $m$  составляют либо диагональной, заменяя распределенную массу системы сосредоточенными массами в узлах системы, либо матрица  $m$  не диагональная, что происходит при учете распределенной массы системы.

Пример 15. Динамический расчет рамы

Для заданной рамы (рис.4.1) требуется:

1. *Определить частоты и формы собственных колебаний системы. Поперечные сечения элементов рамы из двутавра №33 (осевой момент инерции сечения  $I=9840 \text{ см}^4$ , модуль упругости  $E = 2.14 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ , сосредоточенная масса  $m=1000 \text{ кг}$ ).*
2. *Построить эпюру изгибающих моментов от действия вибрационной нагрузки  $P_1(t) = P_1 \sin(\omega \cdot t)$  при частоте вынужденных колебаний  $\omega = (p_1 + p_2) / 2$ .*
3. *Найти максимальный изгибающий момент от импульсного воздействия  $S_2(t) = S_{20} \cdot \delta(t)$ ,  $S_{20} = 10 \text{ кН} \cdot \text{с}$*

Решение: Задача выполняет чисто учебную цель. Система имеет две степени свободы, определяющих положение двух сосредоточенных масс в плоскости рамы. Матрица масс системы принята диагональной, так как распределенную массу системы не учитываем. Составим исходные матрицы: матрицу податливости  $D$  и матрицу масс  $m$ .



1. Заданная система один раз статически неопределима. Для раскрытия статической неопределимости в жесткий узел рамы введем шарнир. Неизвестный изгибающий момент обозначим  $X_1$ . Построим единичную эпюру изгибающих моментов от  $X_1=1$ . (См. Рис.4.2.)

Рис.4.1. Схема рамы с двумя степенями свободы

Составим матрицы:

$$G = \frac{1.5}{6EJ} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

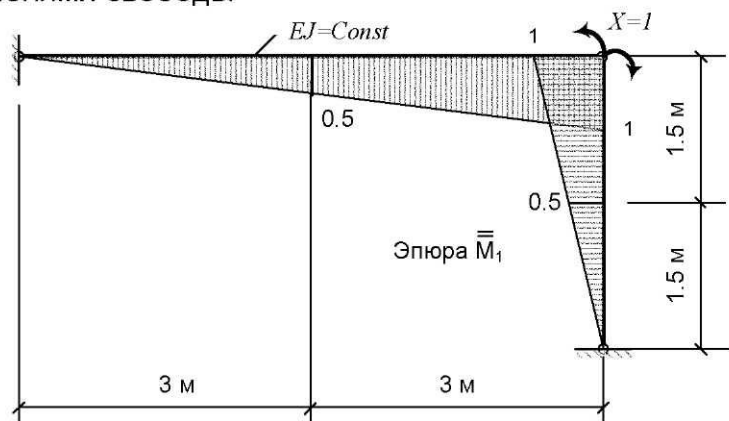


Рис.4.2. Единичная эпюра изгибающих моментов от  $X=1$

$$\bar{M}^T = \frac{1}{2} \cdot [0 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 0].$$

По (2.10) вычислим матрицу, раскрывающую статическую неопределимость системы:

$$U = E - \bar{M} \cdot (\bar{M}^T G \bar{M})^{-1} \bar{M}^T G.$$

Вычисляем  $\bar{M}^T G = \frac{1}{8EJ} [2 \quad 12 \quad 15 \quad 6 \quad 1]$ ,  $\delta = \bar{M}^T G \bar{M} = 3$ ,  $\delta^{-1} = \frac{1}{3}$ .

$$\bar{M} \cdot \delta^{-1} \bar{M}^T G = \frac{1}{48} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 12 & 15 & 6 & 1 \\ 4 & 24 & 30 & 12 & 2 \\ 2 & 12 & 15 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad U = \frac{1}{48} \cdot \begin{bmatrix} 48 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 36 & -15 & -6 & -1 \\ -4 & -24 & 18 & -12 & -2 \\ -2 & -12 & -15 & 42 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 48 \end{bmatrix}.$$

По направлению колебаний масс в основной системе прикладываем единичные силы и строим эпюры изгибающих моментов от этих сил (Рис.4.3).

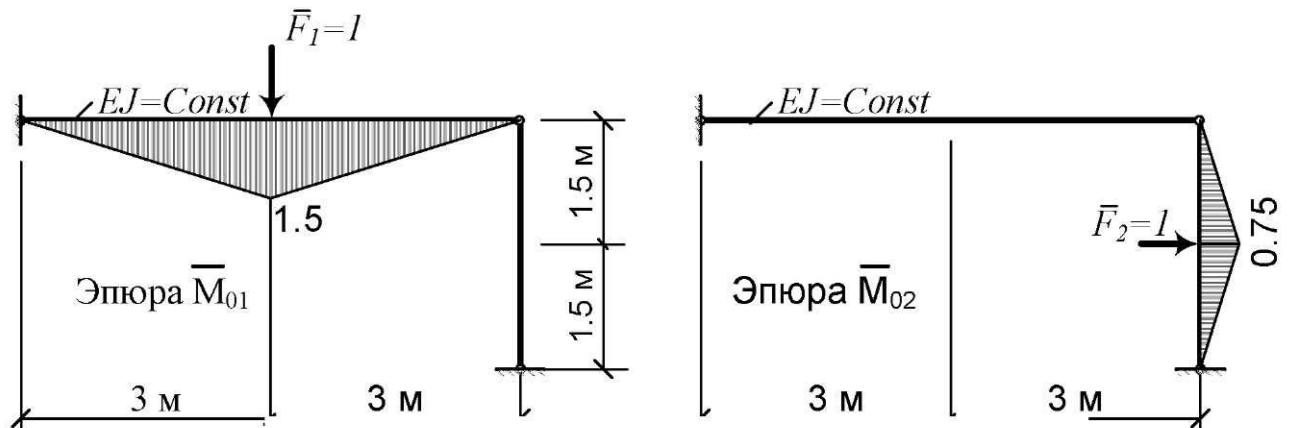


Рис.4.3. Эпюры изгибающих моментов от  $F_i=1$

Составим матрицу  $\bar{M}_o = \frac{3}{4} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Вычислим матрицу  $\bar{M} = U \cdot \bar{M}_o$ :

$$\bar{M} = \frac{1}{48} \cdot \begin{bmatrix} 48 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 36 & -15 & -6 & -1 \\ -4 & -24 & 18 & -12 & -2 \\ -2 & -12 & -15 & 42 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 48 \end{bmatrix} \cdot \frac{3}{4} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{32} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 36 & 3 \\ -24 & 6 \\ -12 & -21 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица податливости  $D = \bar{M}^T \cdot G \cdot \bar{M}$  и масс  $m$  системы:

$$D = \frac{1}{4 \cdot 32^2 EJ} \begin{bmatrix} 0 & 36 & -24 & -12 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -21 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 36 & 3 \\ -24 & 6 \\ -12 & -21 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{256 EJ} \cdot \begin{bmatrix} 720 & 108 \\ 108 & 117 \end{bmatrix}, \quad m = \frac{m}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Вычисляем матрицу  $D_m = \sqrt{m} \cdot D \cdot \sqrt{m}$ :

$$D_m = \frac{m}{512EJ} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 720 & 108 \\ 108 & 117 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{m}{EJ} \begin{bmatrix} 1.40625 & 0.29831 \\ 0.29831 & 0.45703 \end{bmatrix}.$$

Методом итераций находим собственные значения  $\rho_1$ , ортонормальный собственный вектор  $\bar{\psi}_1$  и первую парциальную матрицу  $H_1$  матрицы

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.40625 & 0.29831 \\ 0.29831 & 0.45703 \end{bmatrix};$$

$$\rho_1 = 1.492214, \quad \bar{\psi}_1 = \begin{bmatrix} 0.9609 \\ 0.276903 \end{bmatrix}, \quad H_1 = \begin{bmatrix} 0.923325 & 0.26608 \\ 0.26608 & 0.076675 \end{bmatrix}$$

Первая собственная частота системы  $p_1 = \sqrt{\frac{EJ}{\rho_1 m}} = 0.81862 \sqrt{\frac{EJ}{m}}$ .

Вычисляем матрицу  $A_2 = A_1 - \rho_1 H_1$ :

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1.40625 & 0.29831 \\ 0.29831 & 0.45703 \end{bmatrix} - 1.492214 \begin{bmatrix} 0.923325 & 0.26608 \\ 0.26608 & 0.076675 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.028452 & -0.09873 \\ -0.09873 & 0.342614 \end{bmatrix}.$$

Методом итераций находим

$$\rho_2 = 0.371066, \quad \bar{\psi}_2 = \begin{bmatrix} 0.276903 \\ -0.9609 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} 0.076675 & -0.26608 \\ -0.26608 & 0.923325 \end{bmatrix}.$$

Вторая собственная частота системы  $p_2 = \sqrt{\frac{EJ}{\rho_2 m}} = 1.64163 \sqrt{\frac{EJ}{m}}$ .

Частота вынужденных колебаний  $\omega_0 = (p_1 + p_2)/2 = 1.23 \sqrt{\frac{EJ}{m}}$ . Амплитуды внутренних усилий находим по формуле (4.36):

$$M_{\text{дин}} = L_M \cdot \sqrt{m} \cdot \left( \sum_{j=1}^n p_j^2 \cdot \Phi_j^*(\omega) \cdot H_j \right) \cdot \sqrt{m}^{-1} \cdot \bar{P}_0,$$

где  $L_M = \bar{M}$ ,  $\Phi_j^*(\omega)$  - передаточные функции, определяемые по (4.25) (затухание не учитываем т.к.  $|\omega - p_j| > 0.2 p_j$ ):

$$\Phi_1^*(\omega) = \frac{1}{p_1^2 - \omega^2}, \quad \Phi_2^*(\omega) = \frac{1}{p_2^2 - \omega^2}$$

После подстановки значений в (4.36) получим

$$M_{\text{дин}} = \frac{\bar{M} \cdot \sqrt{m} \cdot H_1 \cdot \sqrt{m}^{-1} \cdot \bar{P}_0}{1 - \bar{\omega}_1^2} + \frac{\bar{M} \cdot \sqrt{m} \cdot H_2 \cdot \sqrt{m}^{-1} \cdot \bar{P}_0}{1 - \bar{\omega}_2^2},$$

где  $\bar{\omega}_j = \frac{\omega_0}{p_j}$ ,  $\bar{\omega}_1 = \frac{1.23}{0.81862} = 1.5025$ ,  $\bar{\omega}_2 = \frac{1.23}{1.64163} = 0.7493$ ,

$$\frac{1}{1-\bar{\omega}_1^2} = -0.7952, \quad \frac{1}{1-\bar{\omega}_2^2} = 2.2802$$

Далее находим

$$\frac{\sqrt{m}H_1\sqrt{m}^{-1}\bar{P}_0}{1-\omega_1^2} = -0.7952 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.92332 & 0.26608 \\ 0.26608 & 0.076675 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.73423 \\ -0.2992 \end{bmatrix} P_1$$

$$\frac{\sqrt{m}H_2\sqrt{m}^{-1}\bar{P}_0}{1-\omega_2^2} = 2.2802 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.07675 & -0.26608 \\ -0.26608 & 0.923325 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.175 \\ -0.858 \end{bmatrix} P_1$$

$$\frac{\sqrt{m}H_1\sqrt{m}^{-1}\bar{P}_0}{1-\omega_1^2} + \frac{\sqrt{m}H_2\sqrt{m}^{-1}\bar{P}_0}{1-\omega_2^2} = \begin{bmatrix} -0.55923 \\ -1.1572 \end{bmatrix} \cdot P_1$$

$$M_{дин} = \bar{M} \cdot \left( \frac{\sqrt{m}H_1\sqrt{m}^{-1}\bar{P}_0}{1-\omega_1^2} + \frac{\sqrt{m}H_2\sqrt{m}^{-1}\bar{P}_0}{1-\omega_2^2} \right) =$$

$$M_{дин} = \frac{1}{32} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 36 & 3 \\ -24 & 6 \\ -12 & -21 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0.55923 \\ -1.1572 \end{bmatrix} \cdot P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.7376 \\ 0.2024 \\ 0.9691 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot P_1.$$

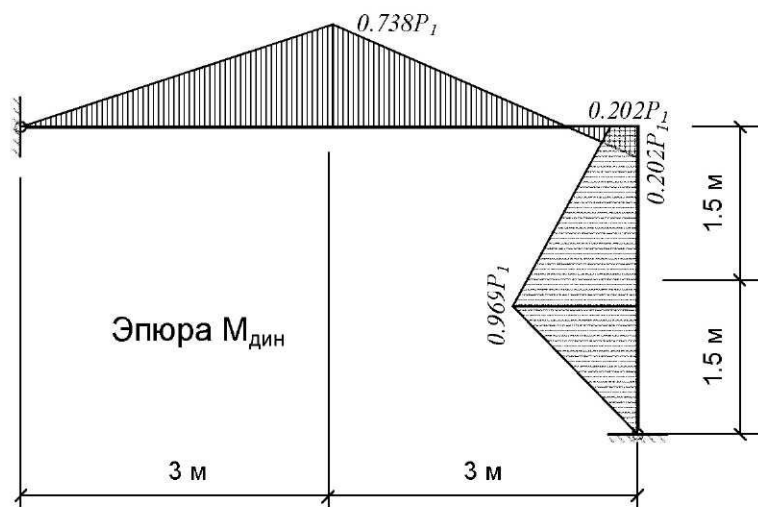


Рис.4.4. Эпюра амплитуд динамических изгибающих моментов

Внутренние усилия от импульсного воздействия находим по формуле (4.36):

$$\bar{M}_{\text{Дин}}(t) = L_S \cdot \sqrt{m} \left( \sum_{j=1}^n p_j^2 \cdot \lambda_j(t) \cdot H_j \right) \cdot \sqrt{m}^{-1} \cdot \bar{P}_0, \quad (*)$$

где  $L_M = \bar{M}$ ,  $\lambda_j(t) = \int_{-\infty}^t k_j(t-\tau) \cdot f(\tau) \cdot d\tau$ .

Учтем затухание колебаний по «скорректированной» гипотезе Фохта:

$$k_j(t) = \frac{1}{p_j} \cdot \exp\left(-\frac{\gamma}{2} p_j t\right) \cdot \sin(p_j t),$$

Нагрузка на систему мгновенный импульс

$$S_2(t) = S_2 \cdot \delta(t), \quad f(t) = \delta(t),$$

тогда

$$\lambda_j(t) = \int_{-\infty}^t k_j(t-\tau) \cdot \delta(\tau) \cdot d\tau = k_j(t) = \frac{1}{p_j} \cdot \exp\left(-\frac{\gamma}{2} p_j t\right) \cdot \sin(p_j t),$$

в котором принято, что  $p_{1j} \approx p_j$  для реальных конструкционных материалов. Коэффициент потерь принимаем:  $\gamma = 0.025$  для расчета на прочность металлических конструкций.  $\bar{P}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ S_2 \end{bmatrix} = S_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

После подстановки этих выражений в (\*) получим

$$\bar{M}_{\text{Дин}}(t) = \bar{M} \cdot \sqrt{m} \left( \sum_{j=1}^2 p_j \cdot \exp\left(-\frac{\gamma}{2} p_j t\right) \cdot \sin(p_j t) \cdot H_j \right) \cdot \sqrt{m}^{-1} \cdot \bar{P}_0,$$

или

$$M_{j(\text{дин})} = \bar{M} \left( p_1 \exp\left(-\frac{\gamma}{2} p_1 t\right) \sin(p_1 t) \sqrt{m} H_1 \sqrt{m}^{-1} + p_2 \exp\left(-\frac{\gamma}{2} p_2 t\right) \sin(p_2 t) \sqrt{m} H_2 \sqrt{m}^{-1} \right) \bar{P}_0$$

$$\bar{M} \sqrt{m} H_1 \sqrt{m}^{-1} \bar{P}_0 = \frac{S_2}{32} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 36 & 3 \\ -24 & 6 \\ -12 & -21 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.923325 & 0.26608 \\ 0.26608 & 0.076675 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = S_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0.21526 \\ -0.13392 \\ -0.32214 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{M}\sqrt{m}H_2\sqrt{m}^{-1}\bar{P}_0 = \frac{S_2}{32} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 36 & 3 \\ -24 & 6 \\ -12 & -21 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.07675 & -0.26608 \\ -0.26608 & 0.923325 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = S_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -0.16838 \\ 0.22767 \\ -0.23241 \\ 0 \end{bmatrix}$$

После подстановки вычисленных выражений и  $p_1 = 0.81862\sqrt{\frac{EJ}{m}}$ ,

$$p_2 = 1.64163\sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

$$\bar{M}_{\text{дин}} = 0.81862 \cdot S_2 \sqrt{\frac{EJ}{m}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.21526 \\ -0.13392 \\ -0.32214 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \exp(-0.025\pi \cdot \bar{t}) \cdot \sin(2\pi \cdot \bar{t}) +$$

$$+ 2.005 \begin{bmatrix} 0 \\ -0.16838 \\ 0.22767 \\ -0.23241 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \exp(-0.0501\pi \cdot \bar{t}) \cdot \sin(4.01\pi \cdot \bar{t}), \quad \bar{t} = \frac{p_1 t}{2\pi}$$

$$M_{\text{дин}}^{\max}(t) = S_2 \sqrt{\frac{EJ}{m}} f(t),$$

$$f(t) = (0.26371 \cdot \exp(-0.025\pi \cdot \bar{t}) \cdot \sin(2\pi \cdot \bar{t}) + 0.38146 \cdot \exp(-0.0501\pi \cdot \bar{t}) \cdot \sin(4.01\pi \cdot \bar{t}))$$

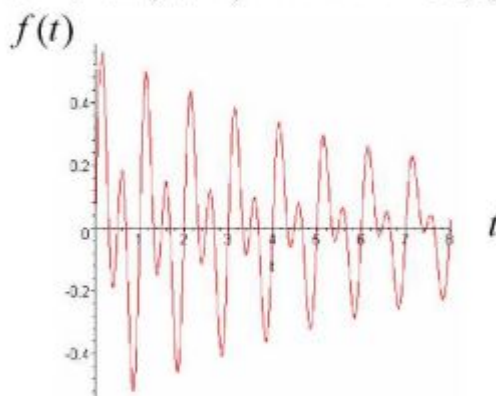


Рис.4.5. График изменения максимального динамического момента от действия  $S_2 = 10 \text{ кН} \cdot \text{сек}$

$$\bar{M}_{\text{дин}}^{\max} = 0.56 \cdot S_2 \sqrt{\frac{EJ}{m}} = 0.56 \sqrt{\frac{2.14 \cdot 9840 \cdot 10^3}{1000}} \cdot S_2 = 81.26 \cdot S_2 = 81.26 \cdot 10 = 812.6 \text{ кНм}.$$



Пример 16. Динамический расчет фермы железнодорожного моста

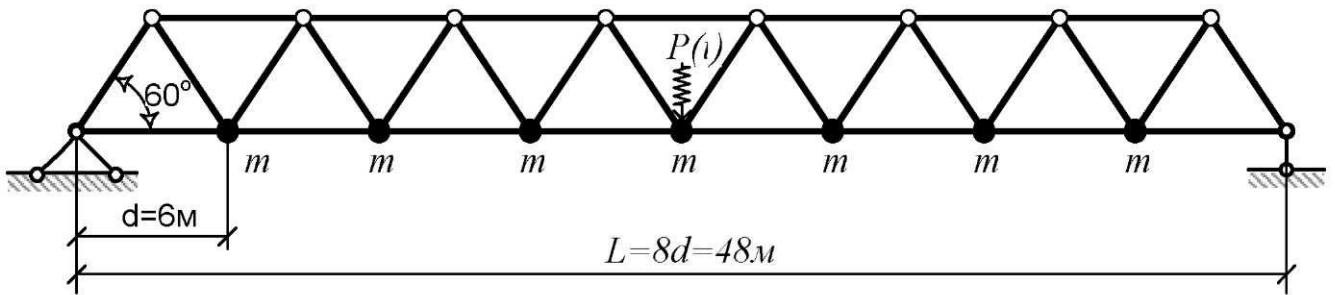


Рис.4.6. Расчетная схема мостовой фермы

Мостовая ферма длиной 48 м имеет 8 панелей по 6 м, угол наклона раскоса к горизонтали  $60^\circ$ . Площади элементов нижнего пояса и раскосов равны  $A = 100 \text{ см}^2$ , площади элементов верхнего пояса равны  $2A$ . Материал фермы сталь 3 с модулем упругости  $E = 2.1 \cdot 10^5 \text{ Мпа}$ . Масса фермы  $m_{\text{ферм}} = 49680 \text{ кг}$ . При движении состава по мостовой ферме действует импульсная динамическая нагрузка, возникающая в результате прохождения рельсовых стыков колесными парами. При длине рельса 25 м на ферме может располагаться один или два рельсовых стыка. Для упрощения расчета примем, что рельсовый стык расположен в середине длины мостовой фермы. Таким образом, нагрузка от колес  $P(t)$  проходящего по мосту состава приложена в середине мостовой фермы. Приведем массу фермы к нижним узлам решетки. Расчетная схема мостовой фермы приведена на Рис.3.19. Таким образом имеем систему с 7 степенями свободы, нагруженную нагрузкой  $P(t)$ , приложенной к центральной массе. Требуется найти перемещение в середине пролета и наибольшие внутренние усилия в поясах фермы.

Перемещения находим по формуле (4.27), (4.29) :

$$\bar{v} = \sqrt{m}^{-1} \left( \sum_{j=1}^n \lambda_j(t) \cdot H_j \right) \sqrt{m}^{-1} \cdot \bar{P}_0, \quad (*)$$

а внутренние усилия по формуле (4.36):

$$\bar{N}_{\text{расч}}(t) = L_N \sqrt{m} \left( \sum_{j=1}^n p_j^2 \cdot \lambda_j(t) \cdot H_j \right) \sqrt{m}^{-1} \cdot \bar{P}_0, \quad (**)$$

в которых:  $L_N$  – матрица влияния внутренних усилий,  $m = mE$  - матрица масс,  $E$ - единичная матрица,  $H_i$  – парциальная матрица,  $\bar{P}_0 = [000S000]^T$  - вектор амплитуд нагрузки,  $p_j^2$  - квадрат собственной частоты.

$$\lambda_i(t) = \int_{-\infty}^t k_i(t-\tau) \cdot f(\tau) \cdot d\tau.$$

Для составления матрицы влияния внутренних усилий  $L_m$  в нижние узлы фермы последовательно прикладываем силы  $F_j=1$  (см. рис.3.21), находим внутренние усилия и записываем их значения в  $j$ -й столбец.

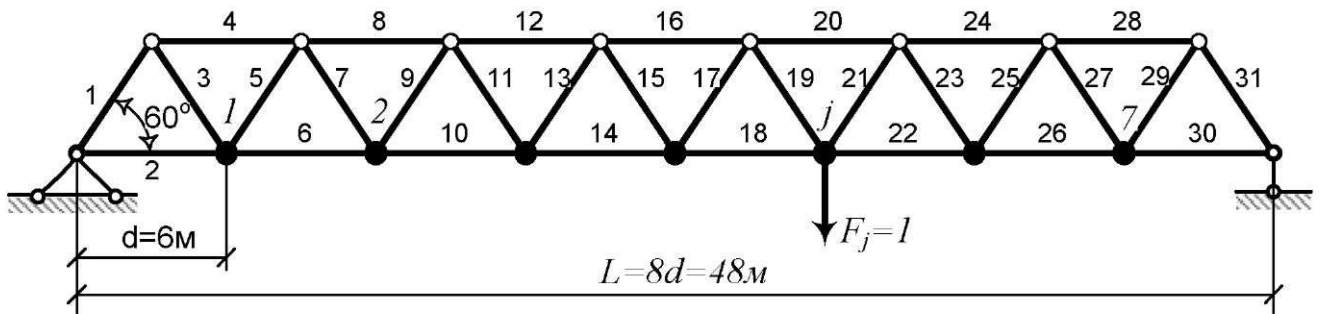


Рис.4.7. Загружение фермы нагрузками  $F_j=1$  для составления матрицы  $L_N$

$$L_N = \begin{pmatrix} -1,010363 & -0,86603 & -0,72169 & -0,57735 & -0,43301 & -0,28868 & -0,144338 \\ 0,505181 & 0,433013 & 0,360844 & 0,288675 & 0,216506 & 0,144338 & 0,072169 \\ 1,010363 & 0,866025 & 0,721688 & 0,57735 & 0,433013 & 0,288675 & 0,144338 \\ -1,010363 & -0,86603 & -0,72169 & -0,57735 & -0,43301 & -0,28868 & -0,144338 \\ 0,144338 & -0,86603 & -0,72169 & -0,57735 & -0,43301 & -0,28868 & -0,144338 \\ 0,938194 & 1,299038 & 1,082532 & 0,866025 & 0,649519 & 0,433013 & 0,216506 \\ -0,144338 & 0,866025 & 0,721688 & 0,57735 & 0,433013 & 0,288675 & 0,144338 \\ -0,866025 & -1,73205 & -1,44338 & -1,1547 & -0,86603 & -0,57735 & -0,288675 \\ 0,144338 & 0,288675 & -0,72169 & -0,57735 & -0,43301 & -0,28868 & -0,144338 \\ 0,793857 & 1,587713 & 1,80422 & 1,443376 & 1,082532 & 0,721688 & 0,360844 \\ -0,144338 & -0,28868 & 0,721688 & 0,57735 & 0,433013 & 0,288675 & 0,144338 \\ -0,721688 & -1,44338 & -2,16506 & -1,73205 & -1,29904 & -0,86603 & -0,433013 \\ 0,144338 & 0,288675 & 0,433013 & -0,57735 & -0,43301 & -0,28868 & -0,144338 \\ 0,649519 & 1,299038 & 1,948557 & 2,020726 & 1,515544 & 1,010363 & 0,505181 \\ -0,144338 & -0,28868 & -0,43301 & 0,57735 & 0,433013 & 0,288675 & 0,144338 \\ -0,577350 & -1,1547 & -1,73205 & -2,3094 & -1,73205 & -1,1547 & -0,577350 \\ 0,144338 & 0,288675 & 0,433013 & 0,57735 & -0,43301 & -0,28868 & -0,144338 \\ 0,505181 & 1,010363 & 1,515544 & 2,020726 & 1,948557 & 1,299038 & 0,649519 \\ -0,144338 & -0,28868 & -0,43301 & -0,57735 & 0,433013 & 0,288675 & 0,144338 \\ -0,433013 & -0,86603 & -1,29904 & -1,73205 & -2,16506 & -1,44338 & -0,721688 \\ 0,144338 & 0,288675 & 0,433013 & 0,57735 & 0,721688 & -0,28868 & -0,144338 \\ 0,360844 & 0,721688 & 1,082532 & 1,443376 & 1,80422 & 1,587713 & 0,793857 \\ -0,144338 & -0,28868 & -0,43301 & -0,57735 & -0,72169 & 0,288675 & 0,144338 \\ -0,288675 & -0,57735 & -0,86603 & -1,1547 & -1,44338 & -1,73205 & -0,866025 \\ 0,144338 & 0,288675 & 0,433013 & 0,57735 & 0,721688 & 0,866025 & -0,144338 \\ 0,216506 & 0,433013 & 0,649519 & 0,866025 & 1,082532 & 1,299038 & 0,938194 \\ -0,144338 & -0,28868 & -0,43301 & -0,57735 & -0,72169 & -0,86603 & 0,144338 \\ -0,144338 & -0,28868 & -0,43301 & -0,57735 & -0,72169 & -0,86603 & -1,010363 \\ 0,144338 & 0,288675 & 0,433013 & 0,57735 & 0,721688 & 0,866025 & 1,010363 \\ 0,072169 & 0,144338 & 0,216506 & 0,288675 & 0,360844 & 0,433013 & 0,505182 \\ -0,144338 & -0,28868 & -0,43301 & -0,57735 & -0,72169 & -0,86603 & -1,010363 \end{pmatrix}$$

Матрица  $G$  содержит ненулевые элементы на главной диагонали, т.е.

$G = \text{diag}[g_j]$ ,  $g_j = \frac{d}{EA}$  - для элементов нижнего пояса и раскосов,  $g_j = \frac{d}{2EA}$  - для элементов верхнего пояса.

Матрицу податливости системы находим по формуле (3.40). Для статически определимой фермы  $U = E$ , получаем

$$D = L_N^T G L_N = \frac{d}{EA} \begin{bmatrix} 6,417 & 8,75 & 9,583 & 9,167 & 7,75 & 5,583 & 2,917 \\ 8,75 & 16 & 17,917 & 17,333 & 14,75 & 10,667 & 5,583 \\ 9,583 & 17,917 & 23,75 & 23,5 & 20,25 & 14,75 & 7,75 \\ 9,167 & 17,333 & 23,5 & 26,667 & 23,5 & 17,333 & 9,167 \\ 7,75 & 14,75 & 20,25 & 23,5 & 23,75 & 17,917 & 9,583 \\ 5,583 & 10,667 & 14,75 & 17,333 & 17,917 & 16 & 8,75 \\ 2,917 & 5,583 & 7,75 & 9,167 & 9,583 & 8,75 & 6,416 \end{bmatrix},$$

где  $d$  –  $b_m$  длина панели фермы,  $E = 2.1 \cdot 10^5$  МПа,  $A = 100$  см<sup>2</sup> – площадь сечения раскоса.

Методом итераций находим собственные значения  $\lambda_j$  и собственные векторы  $\bar{\psi}_j$  матрицы  $D_m = \sqrt{m} D \sqrt{m} = mD$ :

$$\lambda_1 = 101,6 \frac{md}{EA}, \lambda_2 = 9,812 \frac{md}{EA}, \lambda_3 = 3,202 \frac{md}{EA}, \lambda_4 = 1,667 \frac{md}{EA}, \lambda_5 = 1,105 \frac{md}{EA},$$

$$\lambda_6 = 0,8550 \frac{md}{EA}, \lambda_7 = 0,7415 \frac{md}{EA},$$

$$\bar{\psi}_1 = \begin{bmatrix} 0,1913 \\ 0,3536 \\ 0,4619 \\ 0,5 \\ 0,4619 \\ 0,3536 \\ 0,1913 \end{bmatrix}, \bar{\psi}_2 = \begin{bmatrix} 0,3536 \\ 0,5 \\ 0,3536 \\ 0 \\ -0,3536 \\ -0,5 \\ -0,3536 \end{bmatrix}, \bar{\psi}_3 = \begin{bmatrix} 0,4619 \\ 0,3536 \\ -0,1913 \\ -0,5 \\ -0,1913 \\ 0,3536 \\ 0,4619 \end{bmatrix}, \bar{\psi}_4 = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \\ -0,5 \\ 0 \\ 0,5 \\ 0 \\ -0,5 \end{bmatrix}, \bar{\psi}_5 = \begin{bmatrix} 0,4619 \\ -0,3536 \\ -0,1913 \\ 0,5 \\ -0,1913 \\ -0,3536 \\ 0,4619 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\psi}_6 = \begin{bmatrix} 0,3536 \\ -0,5 \\ 0,3536 \\ 0 \\ -0,3536 \\ 0,5 \\ -0,3536 \end{bmatrix}, \bar{\psi}_7 = \begin{bmatrix} 0,1913 \\ -0,3536 \\ 0,4619 \\ -0,5 \\ 0,4619 \\ -0,3536 \\ 0,1913 \end{bmatrix}.$$

Собственные частоты  $p_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}$ :

$$p_1 = 0,0992\sqrt{\frac{EA}{md}}, p_2 = 0,3192\sqrt{\frac{EA}{md}}, p_3 = 0,5588\sqrt{\frac{EA}{md}}, p_4 = 0,7746\sqrt{\frac{EA}{md}},$$

$$p_5 = 0,9512\sqrt{\frac{EA}{md}}, p_6 = 1,0815\sqrt{\frac{EA}{md}}, p_7 = 1,1613\sqrt{\frac{EA}{md}}.$$

После подстановки значений:  $E = 2.1 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$ ,  $A = 100 \text{ см}^2$ ,  $d = 600 \text{ см}$ ,  
 $m = m_{\text{ферм}} / 8 = 6210 \text{ кг}$  вычисляем технические собственные частоты

$$\theta_j = \frac{p_j}{2\pi}: \quad \theta_1 = 3.75 \text{ гц}, \theta_2 = 12.07 \text{ гц}, \theta_3 = 21.13 \text{ гц}, \theta_4 = 29.28 \text{ гц}, \theta_5 = 35.96 \text{ гц},$$

$$\theta_6 = 40.88 \text{ гц}, \theta_7 = 43.9 \text{ гц}.$$

Парциальные матрицы  $H_j = \bar{\psi}_j \cdot \bar{\psi}_j^T$ :

$$H_1 = \begin{vmatrix} 0,03661 & 0,06765 & 0,08839 & 0,09567 & 0,08839 & 0,06765 & 0,03661 \\ 0,06765 & 0,125 & 0,16332 & 0,17678 & 0,16332 & 0,125 & 0,06765 \\ 0,08839 & 0,1633 & 0,21339 & 0,23097 & 0,21339 & 0,16332 & 0,08839 \\ 0,09567 & 0,1768 & 0,23097 & 0,25 & 0,23097 & 0,17678 & 0,09567 \\ 0,08839 & 0,1633 & 0,21339 & 0,23097 & 0,21339 & 0,16332 & 0,08839 \\ 0,06765 & 0,125 & 0,16332 & 0,17678 & 0,16332 & 0,125 & 0,06765 \\ 0,03661 & 0,06765 & 0,08839 & 0,09567 & 0,08839 & 0,06765 & 0,03661 \end{vmatrix}$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 0,125 & 0,1768 & 0,125 & 0 & -0,125 & -0,1768 & -0,125 \\ 0,1768 & 0,25 & 0,1768 & 0 & -0,1768 & -0,25 & -0,1768 \\ 0,125 & 0,1768 & 0,125 & 0 & -0,125 & -0,1768 & -0,125 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,125 & -0,1768 & -0,125 & 0 & 0,125 & 0,1768 & 0,125 \\ -0,1768 & -0,25 & -0,1768 & 0 & 0,1768 & 0,25 & 0,1768 \\ -0,125 & -0,1768 & -0,125 & 0 & 0,125 & 0,1768 & 0,125 \end{vmatrix}$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} 0,21339 & 0,16332 & -0,0884 & -0,23097 & -0,0884 & 0,16332 & 0,21339 \\ 0,16332 & 0,125 & -0,0676 & -0,17678 & -0,0676 & 0,125 & 0,16332 \\ -0,0884 & -0,0676 & 0,03661 & 0,09567 & 0,03661 & -0,0676 & -0,0884 \\ -0,231 & -0,1768 & 0,09567 & 0,25 & 0,09567 & -0,1768 & -0,231 \\ -0,0884 & -0,0676 & 0,03661 & 0,09567 & 0,03661 & -0,0676 & -0,0884 \\ 0,16332 & 0,125 & -0,0676 & -0,17678 & -0,0676 & 0,125 & 0,16332 \\ 0,21339 & 0,16332 & -0,0884 & -0,23097 & -0,0884 & 0,16332 & 0,21339 \end{vmatrix}$$

$$H_4 = \begin{vmatrix} 0,25 & 0 & -0,25 & 0 & 0,25 & 0 & -0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,25 & 0 & 0,25 & 0 & -0,25 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0 & -0,25 & 0 & 0,25 & 0 & -0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,25 & 0 & 0,25 & 0 & -0,25 & 0 & 0,25 \end{vmatrix}$$

$$H_5 = \begin{vmatrix} 0,21339 & -0,1633 & -0,0884 & 0,23097 & -0,0884 & -0,1633 & 0,21339 \\ -0,1633 & 0,125 & 0,06765 & -0,17678 & 0,06765 & 0,125 & -0,1633 \\ -0,0884 & 0,06765 & 0,03661 & -0,09567 & 0,03661 & 0,06765 & -0,0884 \\ 0,23097 & -0,1768 & -0,0957 & 0,25 & -0,0957 & -0,1768 & 0,23097 \\ -0,0884 & 0,06765 & 0,03661 & -0,09567 & 0,03661 & 0,06765 & -0,0884 \\ -0,1633 & 0,125 & 0,06765 & -0,17678 & 0,06765 & 0,125 & -0,1633 \\ 0,21339 & -0,1633 & -0,0884 & 0,23097 & -0,0884 & -0,1633 & 0,21339 \end{vmatrix}$$

$$H_6 = \begin{vmatrix} 0,125 & -0,1768 & 0,125 & 0 & -0,125 & 0,17678 & -0,125 \\ -0,1768 & 0,25 & -0,1768 & 0 & 0,1768 & -0,25 & 0,1768 \\ 0,125 & -0,1768 & 0,125 & 0 & -0,125 & 0,17678 & -0,125 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,125 & 0,17678 & -0,125 & 0 & 0,125 & -0,1768 & 0,125 \\ 0,1768 & -0,25 & 0,1768 & 0 & -0,1768 & 0,25 & -0,1768 \\ -0,125 & 0,17678 & -0,125 & 0 & 0,125 & -0,1768 & 0,125 \end{vmatrix}$$

$$H_7 = \begin{vmatrix} 0,03661 & -0,0676 & 0,08839 & -0,09567 & 0,08839 & -0,0676 & 0,03661 \\ -0,0676 & 0,125 & -0,1633 & 0,17678 & -0,1633 & 0,125 & -0,0676 \\ 0,08839 & -0,1633 & 0,21339 & -0,23097 & 0,21339 & -0,1633 & 0,08839 \\ -0,0957 & 0,17678 & -0,231 & 0,25 & -0,231 & 0,17678 & -0,0957 \\ 0,08839 & -0,1633 & 0,21339 & -0,23097 & 0,21339 & -0,1633 & 0,08839 \\ -0,0676 & 0,125 & -0,1633 & 0,17678 & -0,1633 & 0,125 & -0,0676 \\ 0,03661 & -0,0676 & 0,08839 & -0,09567 & 0,08839 & -0,0676 & 0,03661 \end{vmatrix}$$

После подстановки  $m$ ,  $H_j$  и  $\bar{P}_0$  получается

$$\bar{v} = \frac{S}{m} (p_1^{-1} \lambda_1(t) \begin{bmatrix} 0,09567 \\ 0,17678 \\ 0,23097 \\ 0,25 \\ 0,23097 \\ 0,17678 \\ 0,09567 \end{bmatrix} + p_3^{-1} \lambda_3(t) \begin{bmatrix} -0,23097 \\ -0,17678 \\ 0,09567 \\ 0,25 \\ 0,09567 \\ -0,17678 \\ -0,23097 \end{bmatrix} + p_5^{-1} \lambda_5(t) \begin{bmatrix} 0,23097 \\ -0,17678 \\ -0,09567 \\ 0,25 \\ -0,09567 \\ -0,17678 \\ 0,23097 \end{bmatrix} + p_7^{-1} \lambda_7(t) \begin{bmatrix} -0,09567 \\ 0,17678 \\ -0,23097 \\ 0,25 \\ -0,23097 \\ 0,17678 \\ -0,09567 \end{bmatrix}.$$

Максимальные вертикальные перемещения получаются для узла 4 нижнего пояса  $v_4 = 0,25 \frac{S}{m} (p_1^{-1} \lambda_1(t) + p_3^{-1} \lambda_3(t) + p_5^{-1} \lambda_5(t) + p_7^{-1} \lambda_7(t))$ . (A)

Наиболее напряженными являются 14 и 16 стержни поясов фермы. При статической нагрузке стержень 14 растянут, а стержень 16 сжат. Динамические, нормальные усилия в этих стержнях получаются из (\*\*), если в матрице  $\bar{N}_{расч}(t)$  оставить 14 и 16 строки. После перемножения получается

$$N_{14\text{дин}} = S \cdot (1,824p_1\lambda_1(t) + 0,16165p_3\lambda_3(t) + 0,03222p_5\lambda_5(t) + 0,00286p_7\lambda_7(t)), \quad (\text{Б})$$

$$N_{16\text{дин}} = -S \cdot (1,8962p_1\lambda_1(t) + 0,2338p_3\lambda_3(t) + 0,1044p_5\lambda_5(t) + 0,07502p_7\lambda_7(t)). \quad (\text{В})$$

Для определения закона изменения нагрузки во времени  $f(\tau)$  примем, что все колесные пары передают одинаковое кратковременное воздействие на стык при его прохождении. Будем считать это воздействие мгновенным импульсом, величина которого равна  $S$ . На Рис.3.20. изображены два соседних четырехосных вагона.

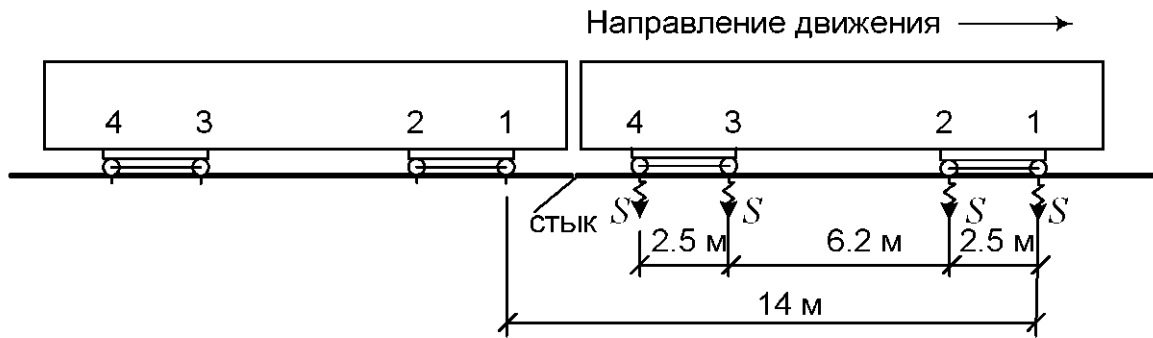


Рис.4.8. Сцепка двух четырехосных вагонов

Из этого рисунка видно, что через стык прошли четыре оси первого вагона и от каждой оси был передан импульс  $S$ . В составе может быть примерно 50 вагонов, т.е. примерно 50 раз повторится воздействие группы импульсов  $S$  от колес на осях 1 – 4. Время, через которое повторяется это воздействие равно длине вагона деленной на его скорость. Обозначим это время через  $\Delta t$ . Нагрузка, передаваемая через рельсовый стык, когда через него проходит 4-я полуось  $n$ -го вагона  $P(t) = S \cdot f(t)$ , где

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} (\delta(t + j \cdot \Delta t) + \delta(t + \Delta t_1 + j \cdot \Delta t) + \delta(t + \Delta t_2 + j \cdot \Delta t) + \delta(t + \Delta t_3 + j \cdot \Delta t)), \quad (\text{Г})$$

$\delta(t)$  - дельта функция Дирака,  $\Delta t_1 = \frac{2.5}{14} \Delta t$  - время прохождения пути равного

расстоянию между 4-й и 3-й тележками,  $\Delta t_2 = \frac{8.7}{14} \Delta t$  время прохождения

пути равного расстоянию между 4-й и 2-й тележками,  $\Delta t_3 = \frac{11.2}{14} \Delta t$  - время прохождения пути равного расстоянию между 4-й и 1-й тележками.

По формуле (3.69) находится матрица  $A(t)$ , элементы которой

$$\lambda_j(t) = \int_{-\infty}^0 \frac{\exp(-\gamma p_j(t-\tau))}{p_{1j}} \sin(p_{1j}(t-\tau)) f(\tau) d\tau, \quad p_{1j} = p_j \sqrt{1-\gamma^2/4}.$$

После подстановки в это выражение  $f(t)$  из (Г) и интегрирования получается

$$\lambda_j(t) = \sum_{k=0}^3 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\exp(-\gamma p_j(t + \Delta t_k + i \cdot \Delta t))}{p_{1j}} \sin(p_{1j}(t + \Delta t_k + i \cdot \Delta t)), \Delta t_0 = 0. \quad (\text{Д})$$

Упростим полученную функцию, полагая  $n \rightarrow \infty$ . Рассмотрим выражения  $\sum_{j=0}^{\infty} \exp(-j \cdot x) \cdot \sin(j \cdot y)$  и  $\sum_{j=0}^{\infty} \exp(-j \cdot x) \cdot \cos(j \cdot y)$ . В книге [2] даны формулы (1.461)

$$\sum_{j=0}^{\infty} \exp(-i \cdot x) \cdot \sin(i \cdot y) = \frac{\sin(y)}{2(\operatorname{ch}(x) - \cos(y))},$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \exp(-i \cdot x) \cdot \cos(i \cdot y) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{2(\operatorname{ch}(x) - \cos(y))} - \frac{1}{2},$$

с помощью которых, получаем из (Д):

$$\lambda_j(t) = \sum_{k=0}^3 \frac{\exp(-\gamma p_j(t + \Delta t_k))}{p_{1j}} \left( \sin(p_{1j}(t + \Delta t_k)) \cdot \left( \frac{\operatorname{sh}(\gamma p_{1j} \Delta t)}{2(\operatorname{ch}(\gamma p_{1j} \Delta t) - \cos(p_{1j} \Delta t))} + \frac{1}{2} \right) + \right. \\ \left. + \cos(p_{1j}(t + \Delta t_k)) \cdot \frac{\sin(p_{1j} \Delta t)}{2(\operatorname{ch}(\gamma p_{1j} \Delta t) - \cos(p_{1j} \Delta t))} \right). \quad (\text{Е})$$

При  $\gamma = 0$

$$\lambda_j(t) = \sum_{k=0}^3 \frac{1}{p_{1j}} (\sin(p_j(t + \Delta t_k)) \cdot \frac{1}{2} + \\ + \cos(p_j(t + \Delta t_k)) \cdot \frac{\sin(p_j \Delta t)}{2(1 - \cos(p_j \Delta t))}) = \sum_{k=0}^3 \frac{\cos(p_j(2t + 2\Delta t_k - \Delta t))}{2 p_j \sin(\frac{p_j \Delta t}{2})}.$$

Знаменатель полученного выражения может стать равным нулю и при этом  $\lambda_j(t) \rightarrow \infty$ , то есть будем иметь случай резонанса. Таким образом, резонанс наступает при  $\sin(\frac{p_j \Delta t}{2}) = 0$  или  $\frac{p_j \Delta t}{2} = \nu \cdot \pi$ ,  $\nu = 0, 1, 2, \dots$ . Откуда

$$\Delta t = \frac{2\nu\pi}{p_j} = \frac{\nu}{\theta_j},$$

где  $\theta_j$  - собственная частота в герцах,  $\Delta t$  - время прохождения поездом расстояния равного длине вагона. Это время есть отношение длины вагона к скорости поезда

$$\Delta t = \frac{L_{\text{ваг}}}{v_{\text{поезда}}}.$$

Отсюда 
$$v_{\text{поезда}} = \frac{L_{\text{ваг}} \theta_j}{\nu}, \quad (\text{Ж})$$

есть скорость поезда, при которой возникают резонансные колебания фермы моста.

Формула (Е) получена для случая бесконечно длинного состава  $n \rightarrow \infty$ . Используя (Е), можно получить формулу для конечного  $n = 50$ :

$$\lambda_{50j}(t) = \lambda_j(t) - \lambda_j(t + 50 * \Delta t).$$

Логарифмический декремент колебаний примем по [1]  $\delta^* = 0.07$ , тогда 
$$\gamma = \frac{0.07}{\pi}$$

Величина импульса  $S$  зависит от типа вагонов, от скорости движения поезда, от неподрессоренной массы вагона и др. Например, в таблице 6.10 книги [1] дано значение  $S = 520 \text{ Н} \cdot \text{с}$  для четырехосного вагона, движущегося со скоростью  $53.3 \text{ км/час}$  по мосту с пролетом  $45 \text{ м}$ . В этой же книге приведена формула 
$$S = k v_{\text{поезда}} (1 - 0.012 v_{\text{поезда}}) \sqrt{m'}$$
,

где  $k$  – некоторый коэффициент,  $m'$  - неподрессоренная масса,  $v_{\text{поезда}}$  - скорость поезда в  $\text{м/сек}$ . Используя эту формулу и данные  $S=520 \text{ Н} \cdot \text{сек}$ ,  $v_{\text{поезда}}=53.3 \text{ км/час}$ , находим

$$S = 520 \cdot \frac{v_{\text{поезда}} (1 - 0.012 v_{\text{поезда}} / 3.6)}{53.3 (1 - 0.012 \cdot 53.3 / 3.6)} = 11.864 \cdot v_{\text{поезда}} (1 - 0.00333 \cdot v_{\text{поезда}}),$$

где  $v_{\text{поезда}}$  - скорость поезда в  $\text{км/час}$ .

В нашем случае пролет фермы  $48 \text{ м}$ . Скорость движения поезда, при которой возникают резонансные колебания определим по формуле (Ж) для

$$\theta_1 = 3.75 \text{ гц}, \quad L_{\text{ваг}} = 14 \text{ м}: \quad v_{\text{поезда}} = \frac{14 \cdot 3.75}{\nu} = \frac{52.5}{\nu} \text{ м/сек} = \frac{189}{\nu} \text{ км/час},$$

В таблице 3.1 приведены значения резонансных скоростей и соответствующие им импульсы для  $\nu = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Таблица 3.1

$\nu$	1	2	3	4	5	6
$v_{\text{поезда}} (\text{км/час})$	189	94.5	63	47.25	37.8	31.6
$S (\text{Н} \cdot \text{сек})$	830	768	590	472	392	335
$v_{4\text{max}} (\text{мм})$		5.7	1.1	0.77	3.2	
$N_{14} (\text{кН})$		330			180	
$N_{16} (\text{кН})$		370			190	



По формулам (Е), (А), (Б), (В) при вычисляем  $v_4$ ,  $N_{14}$ ,  $N_{16}$ . Используем программный пакет *Maple10*. На Рис.3.22 – 3.26 приведены графики функций  $v_4$ ,  $N_{14}$ ,  $N_{16}$ . В таблице 3.1 приведены максимальные значения  $v_4$ ,  $N_{14}$ ,  $N_{16}$ .

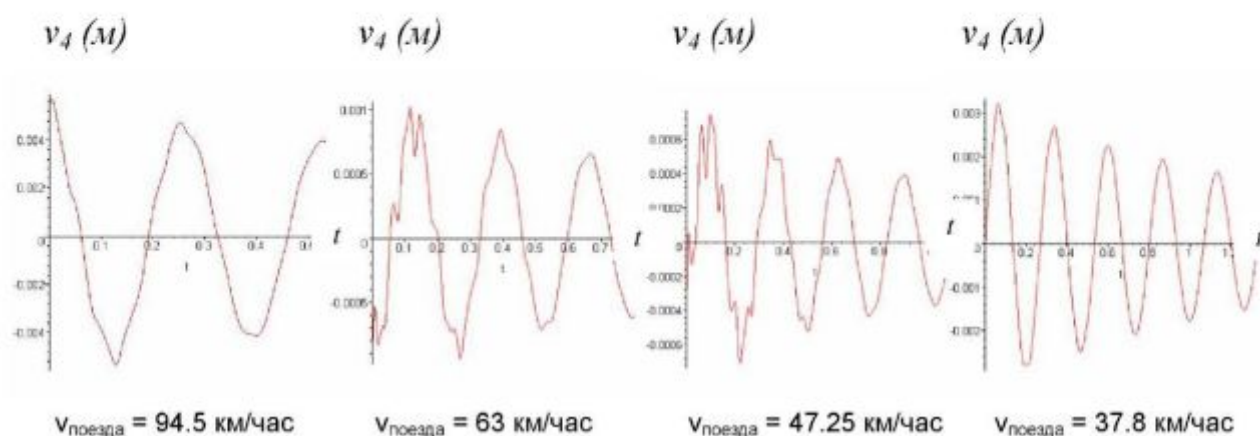


Рис.4.9. Перемещения узла 4 при скорости поезда  $v_{\text{поезда}}$

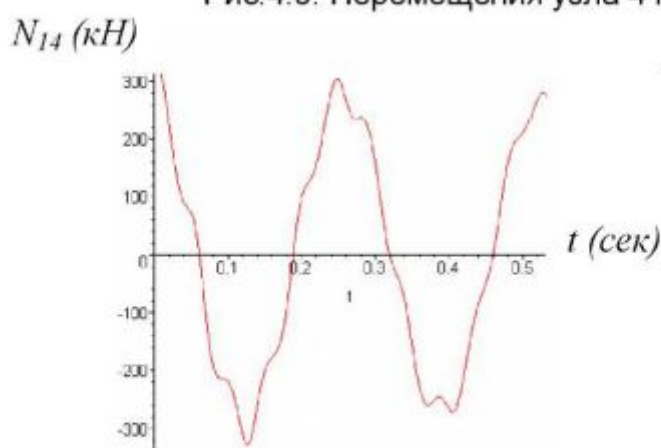


Рис.4.10. Внутренняя сила в 14 стержне при скорости поезда  $v_{\text{поезда}} = 94.5 \text{ км/час}$

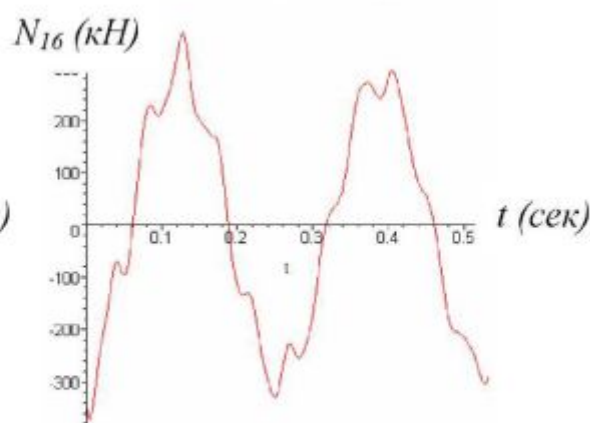


Рис.4.11. Внутренняя сила в 16 стержне при скорости поезда  $v_{\text{поезда}} = 94.5 \text{ км/час}$

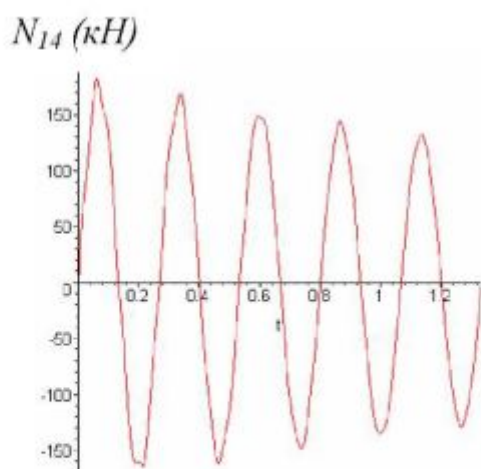


Рис.4.12. Внутренняя сила в 14 стержне при скорости поезда  $v_{\text{поезда}} = 37.8 \text{ км/час}$

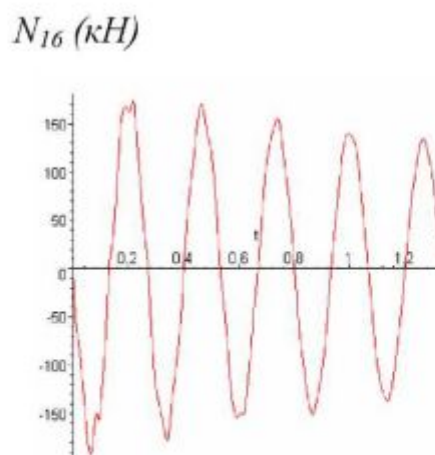


Рис.4.13. Внутренняя сила в 16 стержне при скорости поезда  $v_{\text{поезда}} = 37.8 \text{ км/час}$

Перемещения и внутренние усилия от статического воздействия масс  $m=6210\text{кг}$ :

$$\bar{v}_{cm} = D \cdot \bar{P}_{cm}; \quad \bar{N}_{cm} = L_N \cdot \bar{P}_{cm}; \quad \bar{P}_{cm} = mg[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T.$$

Для получения  $v_{4cm}$  достаточно умножить четвертую строку матрицы  $D$  на вектор  $\bar{P}_{cm}$ . После умножения получим  $v_{4cm}=22.5\text{мм}$ . Для получения  $N_{14cm}$  и  $N_{16cm}$  достаточно умножить соответственно строки 14 и 16 на вектор  $\bar{P}_{cm}$ . После умножения получим  $N_{14ст} = 1588\text{кН}$ ,  $N_{16ст} = -1639\text{кН}$ .

Динамические коэффициенты по перемещениям

при скорости поезда 37.8 км/час  $\mu = 1 + \frac{3.2}{22.5} = 1.14$ ,

при скорости поезда 94.5 км/час  $\mu = 1 + \frac{5.7}{22.5} = 1.25$ .

Динамические коэффициенты по внутренним усилиям

при скорости поезда 37.8 км/час  $\mu_{14} = 1 + \frac{180}{1588} = 1.11$ ,  $\mu_{16} = 1 + \frac{190}{1639} = 1.12$ ,

при скорости поезда 94.5 км/час  $\mu_{14} = 1 + \frac{330}{1588} = 1.21$ ,  $\mu_{16} = 1 + \frac{370}{1639} = 1.23$ .

## 5. Матрицы и метод конечных элементов

Метод конечных элементов (МКЭ) и матричные методы расчета неразрывно связаны. Более того, МКЭ без матриц невозможно ни излагать, ни применять.

Изложим основы метода конечных элементов для плоских стержневых систем. При определении перемещений будем учитывать только изгибающие моменты, перерезывающие силы не учитываем, нормальные силы учитываем только в расчетах устойчивости сооружений и в динамических задачах.

В общем случае уравнения движения стержневой системы записываем в матричной форме

$$m \cdot \ddot{\bar{Z}} + \Gamma \cdot \dot{\bar{Z}} + (K - K_G) \cdot \bar{Z} = \bar{P}, \quad (5.1)$$

где  $\bar{Z}$  - вектор обобщенных перемещений узлов системы,  $\bar{P}$  - вектор узловых обобщенных нагрузок,  $K$  - матрица жесткости системы,  $K_G$  - матрица геометрической жесткости,  $\Gamma$  - диссипативная матрица,  $m$  - матрица масс.

При статическом расчете из (5.1) имеем

$$K \cdot \bar{Z} = \bar{P}. \quad (5.2)$$

При расчетах на устойчивость

$$(K - K_G) \cdot \bar{Z} = 0. \quad (5.3)$$

Конструкция разбивается на отдельные элементы. Точки соединения элементов называются узлами. Таким образом, узлы являются границами соседних элементов. Перемещения в пределах элемента выражаются через обобщенные перемещения  $\bar{Z}$  на его границах. Элементы матрицы жесткости  $K = [r_{ij}]$   $r_{ij}$  - обобщенная сила упругости по направлению  $i$ -го обобщенного перемещения от  $Z_j = 1$ .

### 5.1. Статический расчет стержневых систем

Для примера составим уравнения (5.2) для одноэтажной рамы, изображенной на Рис.5.1.

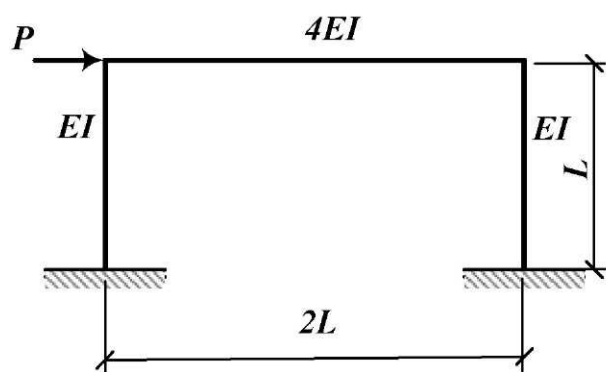


Рис.5.1а. Одноэтажная рама.

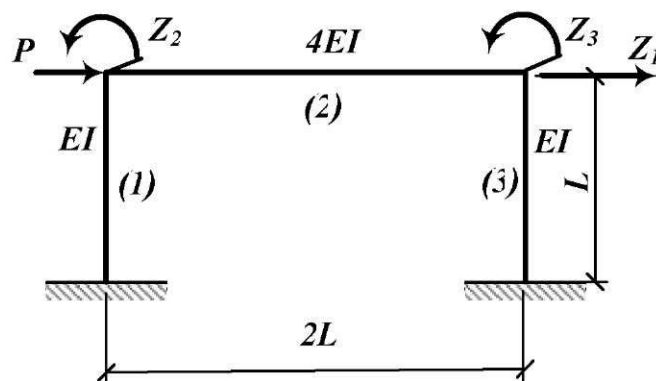


Рис.5.1б. Расчетная схема одноэтажной рамы.

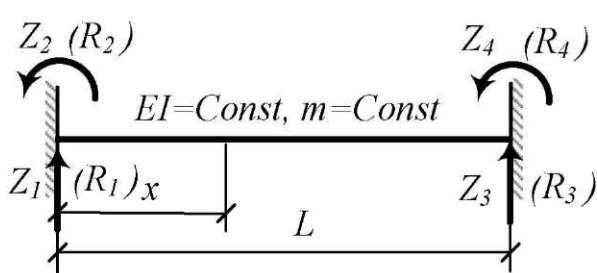
Разделим раму на отдельные элементы. В качестве конечных элементов

выберем стойки и ригель рамы. Таким образом, имеем три конечных элемента, соединенных в узлах, в которых сходится левая стойка с ригелем и ригель соединяется с правой стойкой. В качестве обобщенных перемещений принимаем горизонтальное перемещение ригеля  $Z_1$ , угол поворота левого узла  $Z_2$  и угол поворота правого узла  $Z_3$ .

Элементы матрицы жесткости стержневого элемента (см. Рис.5.2) вычисляются (также как единичные реакции в методе перемещений) по формулам:

$$r_{ij} = \int_0^L \frac{\overline{M}_i(x) \cdot \overline{M}_j(x) dx}{EI(x)} = \int_0^L EI(x) \psi_i''(x) \psi_j''(x) dx, \quad (5.4)$$

где  $\psi_i(x)$ ,  $\psi_i''(x)$  - функции и их вторые производные по  $x$ , интерполирующие перемещения точек в пределах конечного элемента. Зададим эти функции в виде полиномов Эрмита:



$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3; \\ \psi_2(x) &= x\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2; \\ \psi_3(x) &= 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3; \\ \psi_4(x) &= \frac{x^2}{L}\left(\frac{x}{L} - 1\right). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Рис.5.2. Стержневой конечный элемент

По смыслу аппроксимирующие функции  $\psi_i$  есть перемещения точек оси элемента при  $Z_i=1$ ,  $Z_j=0$   $i \neq j$ .

После подстановки (5.5), в (5.4) и вычислений находим узловые силы упругости равные узловым реакциям  $R_{yi}$  :

$$\begin{bmatrix} R_{y1} \\ R_{y2} \\ R_{y3} \\ R_{y4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{bmatrix}; \quad (5.6)$$

где

$$[r_{ij}] = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6 & 3L & -6 & 3L \\ 3L & 2L^2 & -3L & L^2 \\ -6 & -3L & 6 & -3L \\ 3L & L^2 & -3L & 2L^2 \end{bmatrix}, \quad (5.7)$$

матрица жесткости стержневого элемента.

В развернутой форме уравнение (5.2) имеет вид

$$\begin{aligned}
 r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n &= P_1, \\
 r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n}Z_n &= P_2, \\
 &\dots\dots\dots \\
 r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nn}Z_n &= P_n,
 \end{aligned}
 \tag{5.8}$$

Элементы матрицы жесткости конструкции  $r_{ij}$  могут быть вычислены сложением элементов матриц жесткости стержневых элементов в определенной последовательности. Такой метод называется прямым методом жесткостей. На рис.5.3 продемонстрирован этот метод для системы, приведенной на рис.5.1.

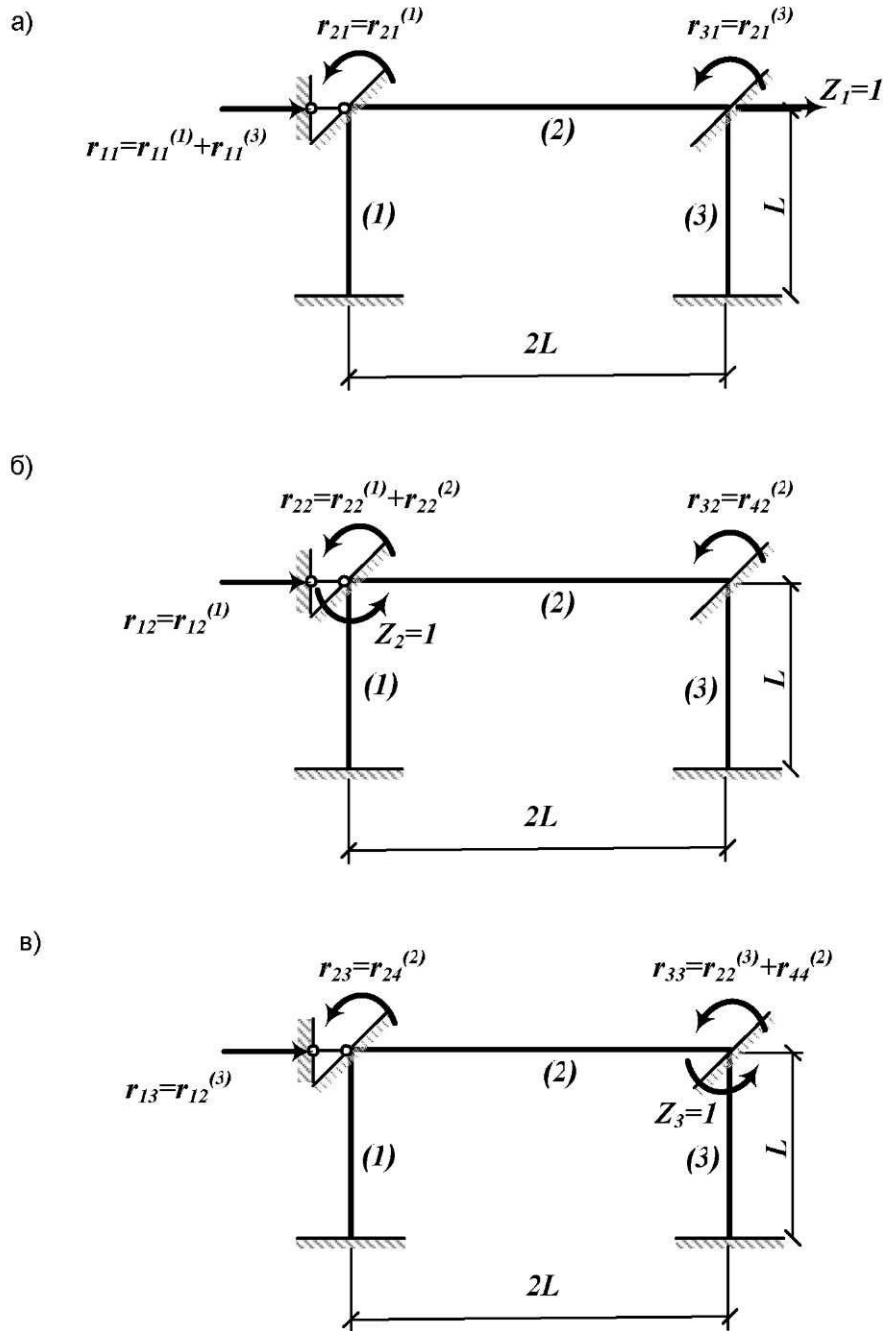


Рис.5.3. Вычисление элементов матрицы жесткости системы.  
а) при  $Z_1=1$ , б) при  $Z_2=1$ , в) при  $Z_3=1$ .

На рис.5.3 показана основная система метода перемещений, дело в том, что в стержневой системе коэффициенты жесткости (элементы матрицы жесткости) равны реакциям во введенных связях основной системы метода перемещений. То есть коэффициенты жесткости можно определять так же, как единичные реакции в методе перемещений.

Для системы изображенной на рис.5.1 по формулам на рис.5.3 и по (5.7) получим

$$r_{11} = r_{11}^{(1)} + r_{11}^{(3)} = \frac{12EI}{L^3} + \frac{12EI}{L^3} = \frac{24EI}{L^3}, \quad r_{21} = r_{21}^{(1)} = \frac{6EI}{L^2}, \quad r_{31} = r_{31}^{(3)} = \frac{6EI}{L^2},$$

$$r_{12} = r_{12}^{(1)} = \frac{6EI}{L^2}, \quad r_{22} = r_{22}^{(1)} + r_{22}^{(2)} = \frac{4(EI)}{L} + \frac{4(4EI)}{2L} = \frac{12EI}{L}, \quad r_{32} = r_{32}^{(2)} = \frac{2(4EI)}{2L} = \frac{4EI}{L},$$

$$r_{13} = r_{13}^{(1)} = \frac{6EI}{L^2}, \quad r_{23} = r_{23}^{(2)} = \frac{2(4EI)}{2L} = \frac{4EI}{L}, \quad r_{33} = r_{33}^{(3)} + r_{33}^{(2)} = \frac{4(EI)}{L} + \frac{4(4EI)}{2L} = \frac{12EI}{L}.$$

Верхние индексы в круглых скобках указывают на номер элемента, например,  $r_{ij}^{(k)}$  указывает на то, что  $r_{ij}$  вычисляется по (5.7) для  $k$  – го элемента.

Таким образом, матрица жесткости для системы на рис.5.1:

$$K = [r_{ij}] = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 3L & 3L \\ 3L & 6L^2 & 2L^2 \\ 3L & 2L^2 & 6L^2 \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

Вектор узловых нагрузок для той же системы:

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Решение уравнения (5.2) имеет вид

$$\bar{Z} = K^{-1} \cdot \bar{P}$$

Обратная матрица жесткости, называется матрицей податливости

$$D = K^{-1} = \frac{L}{EI} \begin{bmatrix} \frac{2L^2}{39} & -\frac{L}{52} & -\frac{L}{52} \\ -\frac{L}{52} & \frac{21}{208} & \frac{5}{208} \\ -\frac{L}{52} & -\frac{5}{208} & \frac{21}{208} \end{bmatrix}.$$

Матрица обобщенных перемещений для системы на рис.5.1:

$$\bar{Z} = D \cdot \bar{P} = \frac{PL^2}{52EI} \begin{bmatrix} \frac{8L}{3} \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Внутренние силы (изгибающие моменты) вычислим по формуле:

$$M_{расч} = \bar{M} \cdot \bar{Z},$$

где  $\bar{M}$  - единичная матрица, столбцы которой есть ординаты эпюр изгибающих моментов от  $Z_i = 1, i = 1, 2, 3$ .

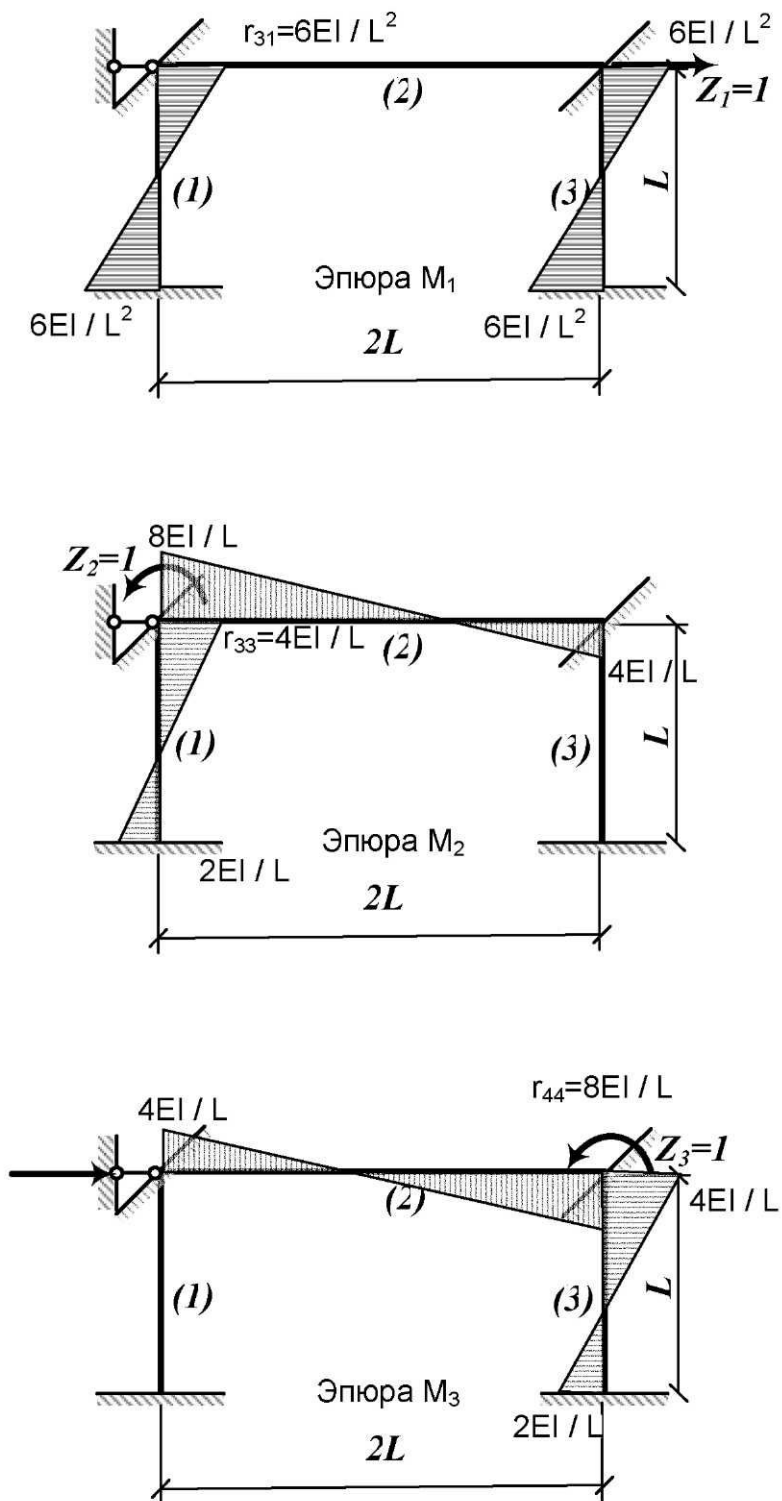


Рис.5.4. Единичные эпюры метода перемещений

Составим единичную матрицу, выписав в столбцы ординаты эпюр  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$ . Положительные знаки на эпюрах принимаем для ординат отложенных справа или снизу. Получим единичную матрицу  $\bar{M}$ :

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & \frac{8EI}{L} & -\frac{4EI}{L} \\ 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{8EI}{L} \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{4EI}{L} \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix}$$

Вычисляем расчетную эпюру изгибающих моментов:

$$M_{расч} = \bar{M} \cdot \bar{Z} = \begin{bmatrix} \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & \frac{8EI}{L} & -\frac{4EI}{L} \\ 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{8EI}{L} \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{4EI}{L} \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix} \cdot \frac{PL^2}{52EI} \begin{bmatrix} \frac{8L}{3} \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{PL}{26} \cdot \begin{bmatrix} -7 \\ 6 \\ 6 \\ -6 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

На рис.5.5 показана расчетная эпюра изгибающих моментов в раме, изображенной на рис.5.1.

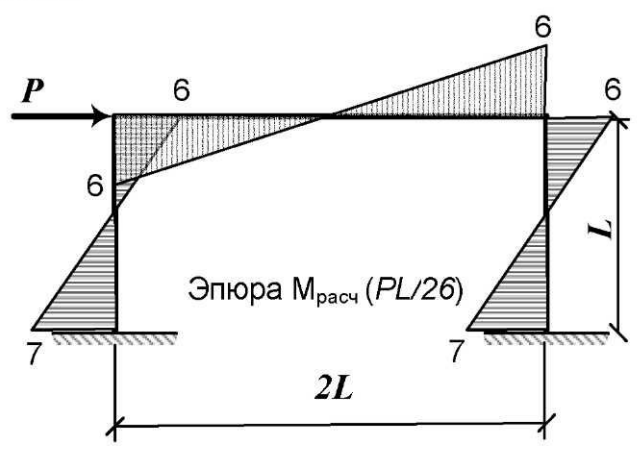


Рис.5.5 Эпюра  $M_{расч} (PL/26)$



Пример, приведенный выше (Рис.5.1), рассчитан с помощью программы Maple10. Расчет приведен ниже:

> restart;

> K:=2\*EI/L^3\*⟨⟨12|3\*L|3\*L⟩,⟨3\*L|6\*L^2|2\*L^2⟩,⟨3\*L|2\*L^2|6\*L^2⟩⟩;

$$K := \begin{bmatrix} \frac{24EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L} & \frac{4EI}{L} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & \frac{12EI}{L} \end{bmatrix}$$

> PP:=⟨⟨P⟩,⟨0⟩,⟨0⟩⟩;

$$PP := \begin{bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

> Z:=K^(-1).PP;

$$Z := \begin{bmatrix} \frac{2L^3P}{39EI} \\ -\frac{L^2P}{52EI} \\ -\frac{L^2P}{52EI} \end{bmatrix}$$

> M:=⟨⟨-6\*EI/L^2|-2\*EI/L|0⟩,⟨6\*EI/L^2|4\*EI/L|0⟩,⟨0|-8\*EI/L|-4\*EI/L⟩,⟨0|4\*EI/L|8\*EI/L⟩,⟨-6\*EI/L^2|0|-4\*EI/L⟩,⟨6\*EI/L^2|0|2\*EI/L⟩⟩;

$$M := \begin{bmatrix} -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{2EI}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{8EI}{L} & -\frac{4EI}{L} \\ 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{8EI}{L} \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{4EI}{L} \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix}$$

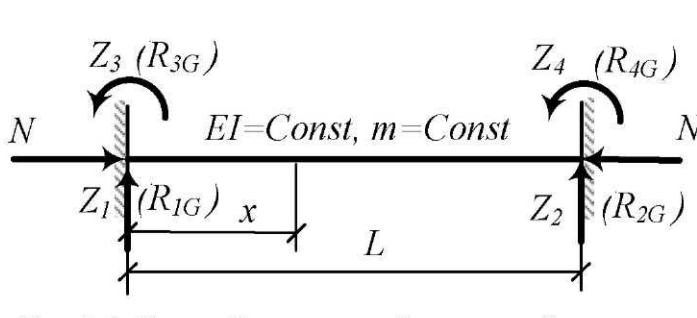
> MP:=M.Z;

$$MP := \begin{bmatrix} -\frac{7LP}{26} \\ \frac{3LP}{13} \\ \frac{3LP}{13} \\ -\frac{3LP}{13} \\ -\frac{3LP}{13} \\ \frac{7LP}{26} \end{bmatrix}$$

## 5.2. Расчеты стержневых систем на устойчивость

При расчетах конструкций на устойчивость используем уравнение (5.3), в котором матрица жесткости  $K$  определяется так же, как при статическом расчете, а матрица геометрической жесткости  $K_G$  вычисляется методом сложения жесткостей отдельных элементов.

Матрица геометрической жесткости для отдельного элемента (Рис.5.6)



$$\begin{bmatrix} R_{G1} \\ R_{G2} \\ R_{G3} \\ R_{G4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{G11} & r_{G12} & r_{G13} & r_{G14} \\ r_{G21} & r_{G22} & r_{G23} & r_{G24} \\ r_{G31} & r_{G32} & r_{G33} & r_{G34} \\ r_{G41} & r_{G42} & r_{G43} & r_{G44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{bmatrix},$$

где  $r_{Gij} = \int_0^L N(x) \psi'_i(x) \psi'_j(x) dx$  (5.10)

Рис.5.6. Сжатый стержневой конечный элемент - компонент матрицы геометрической жесткости сжатого конечного элемента. Функции  $\psi_i(x)$  определены формулами (5.5).

Вычисляя по (5.10), (5.5) при  $N(x) = N = Const$ , получаем

$$[r_{Gij}] = \frac{N}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

геометрическую матрицу жесткости стержневого элемента.

Рассмотрим стойки с различными закреплениями концов (Рис. 5.7).

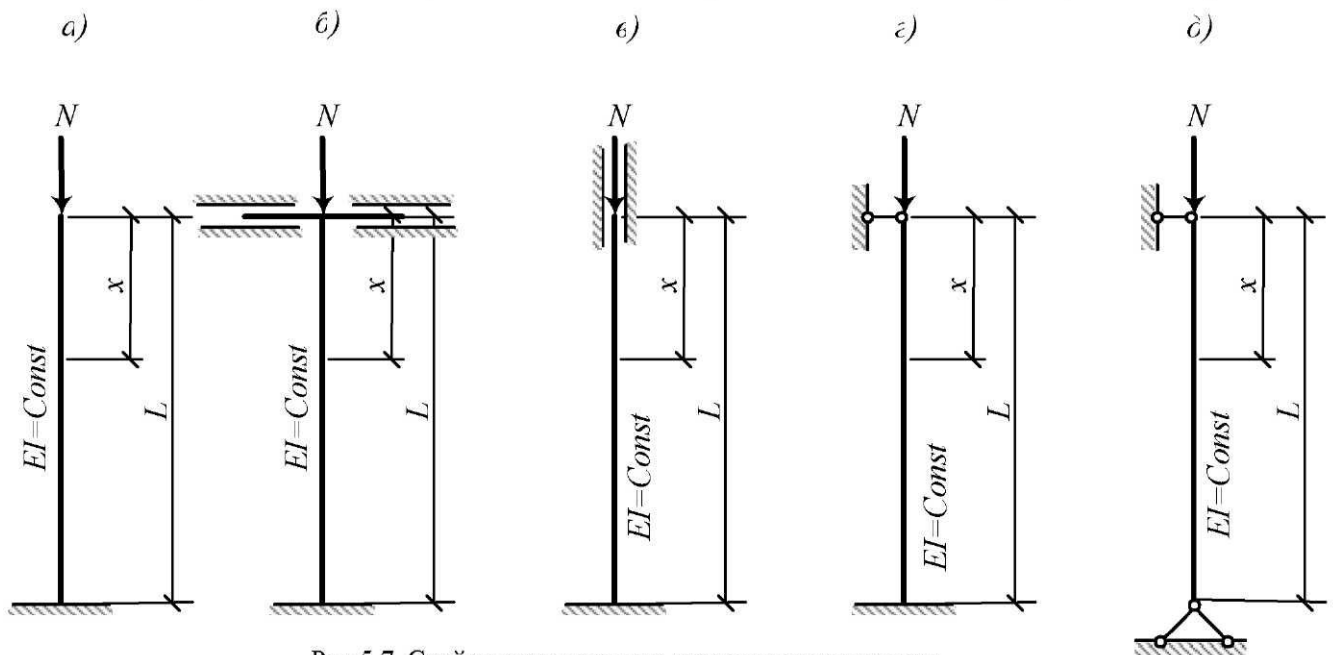


Рис.5.7. Стойки с различными закреплениями концов

На Рис.5.7а изображена стойка со свободным верхним концом. На рис.5.8

показана расчетная схема этой стойки, принятая в виде одного конечного элемента с двумя неизвестными перемещениями свободного конца:  $Z_1$  и  $Z_2$ .

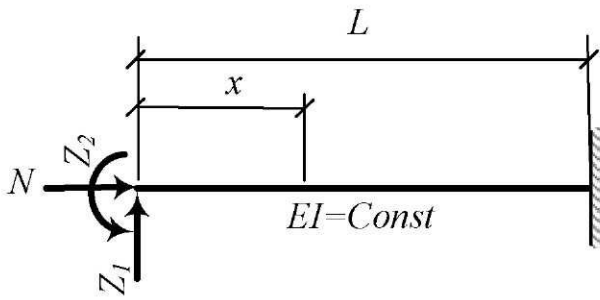


Рис.5.8. Стойка со свободным концом

Матрица жесткости для стойки вычисляется с помощью (5.7):

$$\mathbf{K} = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6 & 3L \\ 3L & 2L^2 \end{bmatrix}.$$

Матрица геометрической жесткости вычисляется по (5.11):

$$\mathbf{K}_G = \frac{N}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L \\ 3L & 4L^2 \end{bmatrix}.$$

После подстановки найденных значений в (5.3) получаем

$$\left( \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6 & 3L \\ 3L & 2L^2 \end{bmatrix} - \frac{N}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L \\ 3L & 4L^2 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} = 0. \quad (5.12)$$

После простых преобразований (5.12) приводится к виду

$$\left( \frac{4EI}{9L^2} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 3L \\ 3L & 2L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4L^2 & -3L \\ -3L & 36 \end{bmatrix} - N \cdot \mathbf{E} \right) \cdot \bar{\mathbf{Z}} = 0.$$

В том случае, когда  $\bar{\mathbf{Z}} \neq \mathbf{0}$ , необходимо чтобы детерминант матрицы, стоящей в скобках, был равен нулю. Это приводит к решению уравнения:

$$\begin{vmatrix} 15 - \lambda & 90L \\ 6L^3 & 63L^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

где 
$$\lambda = \frac{N \cdot 9L^2}{4EI}, \quad (5.13)$$

или, раскрывая определитель, получаем квадратное уравнение:

$$\lambda^2 - (15 + 63L^2) \cdot \lambda + (945 - 540L^2) \cdot L^2 = 0,$$

корни которого равны

$$\lambda_1 = 5.59, \quad \lambda_2 = 72.4.$$

Из (5.13) находим наименьшую критическую силу

$$N_1 = \lambda_1 \cdot \frac{4EI}{9L^2} = 5.59 \cdot \frac{4EI}{9L^2} = 2.49 \cdot \frac{EI}{L^2}.$$

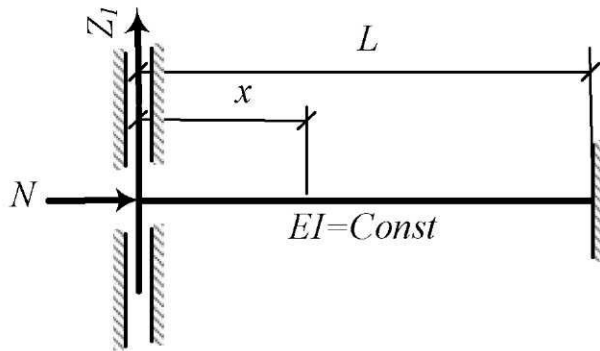
Точное значение критической силы для этой стойки

$$N_1 = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2} = 2.47 \cdot \frac{EI}{(2L)^2}.$$

Погрешность МКЭ составила 0.81%.

На рис.5.7б изображена стойка с плавающей заделкой на верхнем конце. На рис.5.9 показана расчетная схема этой стойки, принятая в виде од-

ного конечного элемента с одним неизвестным поступательным перемещением конца:  $Z_1$ .



Матрица жесткости и матрица геометрической жесткости для неё вычисляется с помощью (5.7), (5.11) :

$$\mathbf{K} = \frac{2EI}{L^3} \cdot [6],$$

$$\mathbf{K}_G = \frac{N}{30L} \cdot [36]$$

Рис.5.9. Стойка с плавающей заделкой на конце. После подстановки найденных значений в (5.3) получаем

$$\left( \frac{2EI}{L^3} \cdot 6 - \frac{N}{30L} \cdot 36 \right) \cdot Z_1 = 0.$$

При  $Z_1 \neq 0$ ,

$$\frac{2EI}{L^3} \cdot 6 - \frac{N}{30L} \cdot 36 = 0,$$

откуда

$$N_1 = 10 \cdot \frac{EI}{L^2}.$$

Точное значение критической силы для этой стойки

$$N_1 = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = 9.87 \frac{EI}{L^2}.$$

Погрешность МКЭ составила 1.3%.

На рис.5.7в изображена стойка со связями, препятствующими перемещениям и повороту концевых сечений.

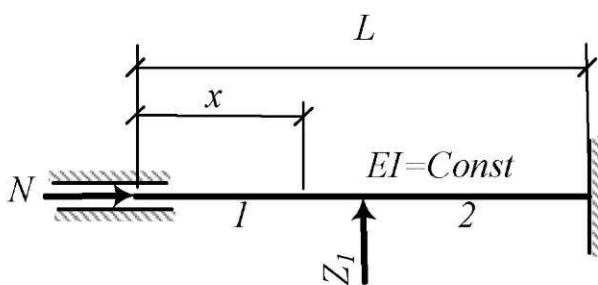


Рис.5.10. Стойка с заземленными концами.

На рис.5.10 показана расчетная схема этой стойки, принятая в виде двух конечных элементов с одним неизвестным поступательным перемещением середины стойки:  $Z_1$ .

Матрица жесткости и матрица геометрической жесткости для неё вычисляется с помощью выражений (5.7), (5.11)

$$\mathbf{K} = [r_{11}] = [r_{33}^{(1)} + r_{11}^{(2)}] = \frac{2EI}{(0.5L)^3} [6 + 6] = \frac{2EI}{(0.5L)^3} [12],$$

$$\mathbf{K}_G = [r_{11G}] = [r_{33G}^{(1)} + r_{11G}^{(2)}] = \frac{N}{30 \cdot (0.5L)} [36 + 36] = \frac{N}{30 \cdot (0.5L)} [72].$$

После подстановки найденных значений в (5.3) получаем

$$\left(\frac{2EI}{(0.5L)^2}[12] - \frac{N}{30}[72]\right) \cdot Z = 0,$$

откуда находим при  $Z \neq 0$ ,  $N = \frac{40EI}{L^2}$ . Точное значение критической силы для этой стойки

$$N = \frac{\pi^2 EI}{(0.5L)^2} = 39.48 \frac{EI}{L^2}.$$

Погрешность МКЭ составила 1.3%.

На рис.5.7г изображена стойка с жестко заделанным и шарнирно опертым концами.

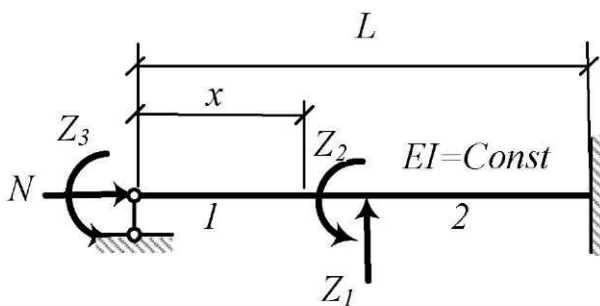


Рис.5.11. Стойка с заделанным и шарнирно опертым концами.

На рис.5.11 показана расчетная схема этой стойки, принятая в виде двух конечных элементов с тремя неизвестными: поступательным перемещением середины стойки  $Z_1$ , углом поворота среднего сечения  $Z_2$  и углом поворота шарнирно опертого сечения  $Z_3$ .

С помощью (5.7) вычисляются элементы матрицы жесткости:

$$\begin{aligned} r_{11} &= r_{33}^{(1)} + r_{11}^{(2)} = \frac{2EI}{(0.5L)^3}(6 + 6) = \frac{2EI}{(0.5L)^3}(12), \\ r_{12} &= r_{21} = r_{34}^{(2)} + r_{12}^{(2)} = \frac{2EI}{(0.5L)^3} \cdot (-3L/2 + 3L/2) = 0, \\ r_{13} &= r_{31} = r_{32}^{(1)} = \frac{2EI}{(0.5L)^3} \cdot (-3L/2) = -\frac{2EI}{(0.5L)^3} \cdot (1.5L), \\ r_{22} &= r_{44}^{(1)} + r_{22}^{(2)} = \frac{2EI}{(0.5L)^3} \cdot (L^2/2 + L^2/2) = \frac{2EI}{(0.5L)^3} \cdot (L^2), \\ r_{23} &= r_{32} = r_{24}^{(1)} = \frac{2EI}{(0.5L)^3} \cdot (0.25L^2), \\ r_{33} &= r_{22}^{(1)} = \frac{2EI}{(0.5L)^3} \cdot (L^2/2). \end{aligned}$$

и с помощью (5.11) вычисляются элементы матрицы геометрической жесткости:

$$\begin{aligned} r_{11G} &= r_{33G}^{(1)} + r_{11G}^{(2)} = \frac{N}{30 \cdot (0.5L)}(36 + 36) = \frac{N}{30 \cdot (0.5L)}(72), \\ r_{12G} &= r_{21G} = r_{34G}^{(2)} + r_{12G}^{(2)} = \frac{N}{30 \cdot (0.5L)} \cdot (3L/2 - 3L/2) = 0, \end{aligned}$$

$$r_{13G} = r_{31G} = r_{32G}^1 = \frac{N}{30 \cdot (0.5L)} \cdot (-3L/2) = -\frac{N}{30 \cdot (0.5L)} \cdot (3L/2),$$

$$r_{22G} = r_{44G}^{(1)} + r_{22G}^{(2)} = \frac{N}{30 \cdot (0.5L)} \cdot (L^2 + L^2) = \frac{N}{30 \cdot (0.5L)} \cdot (2L^2),$$

$$r_{23G} = r_{32G} = r_{24G}^{(1)} = \frac{N}{30 \cdot (0.5L)} \cdot (-L^2/4) = -\frac{N}{30 \cdot (0.5L)} \cdot (L^2/4),$$

$$r_{33G} = r_{22G}^{(1)} = \frac{N}{30 \cdot (0.5L)} \cdot (L^2).$$

После подстановки найденных значений в (5.3) получаем

$$\left( \frac{2EI}{(0.5L)^2} \begin{bmatrix} 12 & 0 & -1.5L \\ 0 & L^2 & 0.25L^2 \\ -1.5L & 0.25L^2 & 0.5L^2 \end{bmatrix} - \frac{N}{30} \begin{bmatrix} 72 & 0 & -1.5L \\ 0 & 2L^2 & -0.25L^2 \\ -1.5L & -0.25L^2 & L^2 \end{bmatrix} \right) \cdot \bar{Z} = \mathbf{0}$$

при  $\bar{Z} \neq \mathbf{0}$ , получим уравнение

$$|\bar{K}^{-1} \cdot \mathbf{K}_G - N \cdot \mathbf{E}| = 0, \quad (5.14)$$

где

$$\bar{K}_G = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 72 & 0 & -1.5L \\ 0 & 2L^2 & -0.25L^2 \\ -1.5L & -0.25L^2 & L^2 \end{bmatrix}.$$

Раскрыв определитель (5.14), получим алгебраическое уравнение третьего порядка, решив которое найдем корни  $N_i$ . Наименьший корень даст величину критической силы для стойки.

Расчет проведем, используя программный пакет *Maple*:

```
> restart;
> EI:=EI:L:=6.:
> with(LinearAlgebra):
> K:=2.*EI/((0.5*L)^2)*<<L^2/2|-1.5*L|L^2/4>,<-
1.5*L|12|0>,<L^2/4|0|L^2>>;
K:=
[ 4.000000000 EI  -2.000000000 EI  2.000000000 EI
-2.000000000 EI  2.666666667 EI  0.
 2.000000000 EI  0.  8.000000000 EI ]
> KG:=1/30*<<L^2|-1.5*L|-L^2/4>,<-1.5*L|72|0>,<-L^2/4|0|2*L^2>>;
KG:=
[ 1.19999999987999994  -0.299999999969999984  -0.299999999969999984
-0.299999999969999984  2.39999999975999988  0.
-0.299999999969999984  0.  2.39999999975999988 ]
> Sob_chisla:=Eigenvalues(K^(-1).KG);
Sob_chisla:=
[ 0.1822572026
EI
0.4793514406
EI
1.738391356
EI ]
```



Наибольшее собственное число матрицы  $K^{-1} \cdot K_G$ :  $1.738391356/EI$  равно обратному значению критической силы для этой стойки:

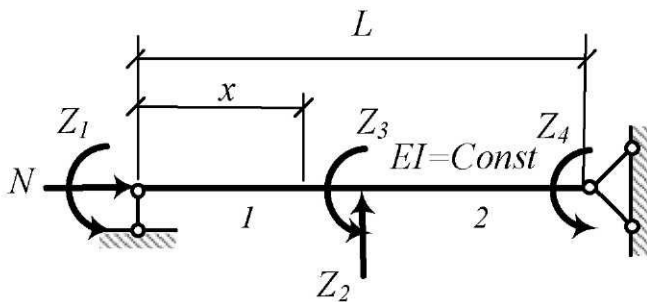
$$N_{\min} = N_1 = 0.57524EI = \frac{20.709EI}{L^2}.$$

Точное значение критической силы для этой стойки

$$N_1 = \frac{\pi^2 EI}{(0.7L)^2} = 20.14 \cdot \frac{EI}{L^2}.$$

Погрешность МКЭ составила  $0.191\%$ .

На рис.5.7д изображена шарнирно опертая стойка. На рис.5.12 показана



расчетная схема этой стойки, принятая в виде двух конечных элементов с четырьмя неизвестными: углами поворотов шарнирно опертых сечений  $Z_1$  и  $Z_4$ , поступательным перемещением середины стойки  $Z_2$  и углом поворота среднего сечения  $Z_2$ .

Рис.5.12. Стойка с шарнирно опертыми концами

С помощью (5.7) вычисляются элементы матрицы жесткости:

$$\begin{aligned} r_{11} = r_{22}^{(1)} &= \frac{2EI}{(0.5L)^3} (L^2/2), & r_{12} = r_{23}^{(1)} &= \frac{2EI}{(0.5L)^3} \cdot (-1.5L) = -\frac{2EI}{(0.5L)^3} \cdot (1.5L), \\ r_{13} = r_{24}^{(1)} &= \frac{2EI}{(0.5L)^3} (L^2/4), & r_{14} &= 0, & r_{22} = r_{33}^{(1)} + r_{11}^{(2)} &= \frac{2EI}{(0.5L)^3} (6 + 6) = \frac{2EI}{(0.5L)^3} (12), \\ r_{23} = r_{34}^{(1)} + r_{12}^{(2)} &= \frac{2EI}{(0.5L)^3} (-1.5L + -1.5L) = 0, & r_{24} = r_{14}^{(2)} &= \frac{2EI}{(0.5L)^3} \cdot (1.5L), \\ r_{33} = r_{44}^{(1)} + r_{22}^{(2)} &= \frac{2EI}{(0.5L)^3} (L^2/2 + L^2/2) = \frac{2EI}{(0.5L)^3} (L^2), & r_{34} = r_{24}^{(2)} &= \frac{2EI}{(0.5L)^3} (L^2/4), \\ r_{44} = r_{44}^{(2)} &= \frac{2EI}{(0.5L)^3} (L^2/2), & r_{21} = r_{12}, & r_{31} = r_{13}, & r_{41} = r_{14}, & r_{32} = r_{23}, & r_{42} = r_{24}, & r_{43} = r_{34}. \end{aligned}$$

и с помощью (5.11) вычисляются элементы матрицы геометрической жесткости:

$$\begin{aligned} r_{11G} = r_{22G}^{(1)} &= \frac{N}{30 \cdot (0.5L)} (L^2), & r_{12G} = r_{23G}^{(1)} &= \frac{N}{30 \cdot (0.5L)} \cdot (-1.5L) = -\frac{N}{30 \cdot (0.5L)} \cdot (1.5L), \\ r_{13G} = r_{24G}^{(1)} &= \frac{N}{30 \cdot (0.5L)} (-L^2/4), & r_{14G} &= 0, \\ r_{22G} = r_{33G}^{(1)} + r_{11G}^{(2)} &= \frac{N}{30 \cdot (0.5L)} (36 + 36) = \frac{N}{30 \cdot (0.5L)} (72), \end{aligned}$$

$$r_{23G} = r_{34G}^{(1)} + r_{12G}^{(2)} = \frac{N}{30 \cdot (0.5L)} (-1.5L + -1.5L) = 0, \quad r_{24G} = r_{14G}^{(2)} = \frac{N}{30 \cdot (0.5L)} \cdot (1.5L),$$

$$r_{33G} = r_{44G}^{(1)} + r_{22G}^{(2)} = \frac{N}{30 \cdot (0.5L)} (L^2 + L^2) = \frac{2EI}{(0.5L)^3} (2L^2),$$

$$r_{34G} = r_{24G}^{(2)} = \frac{N}{30 \cdot (0.5L)} (-L^2/4) = -\frac{N}{30 \cdot (0.5L)} (L^2/4),$$

$$r_{44G} = r_{44G}^{(2)} = \frac{N}{30 \cdot (0.5L)} (L^2/2), \quad r_{21G} = r_{12G}, \quad r_{31G} = r_{13G}, \quad r_{41G} = r_{14G}, \quad r_{32G} = r_{23G}, \quad r_{42G} = r_{24G},$$

$$r_{43G} = r_{34G}.$$

После подстановки найденных значений в (5.3) получаем

$$\left( \frac{2EI}{(0.5L)^2} \begin{bmatrix} L^2/2 & -1.5L & L^2/4 & 0 \\ -1.5L & 12 & 0 & 1.5L \\ L^2/4 & 0 & L^2 & L^2/4 \\ 0 & 1.5L & L^2/4 & L^2/2 \end{bmatrix} - \frac{N}{30} \begin{bmatrix} L^2 & -1.5L & -L^2/4 & 0 \\ -1.5L & 72 & 0 & -1.5L \\ -L^2/4 & 0 & 2L^2 & -L^2/4 \\ 0 & -1.5L & -L^2/4 & L^2 \end{bmatrix} \right) \cdot \bar{Z} = 0,$$

при  $\bar{Z} \neq 0$ , получим уравнение

$$|\bar{K}^{-1} \cdot K_G - N \cdot E| = 0, \quad (5.14)$$

где

$$\bar{K}_G = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} L^2 & -1.5L & -L^2/4 & 0 \\ -1.5L & 72 & 0 & -1.5L \\ -L^2/4 & 0 & 2L^2 & -L^2/4 \\ 0 & -1.5L & -L^2/4 & L^2 \end{bmatrix}.$$

Раскрыв определитель (5.14) получим алгебраическое уравнение четвертого порядка, решив которое найдем корни  $N_i$ . Наименьший корень даст величину критической силы для стойки.

Расчет проведем, используя программный пакет *Maple*:

```
> restart;
> EI:=EI:L:=6.:
> with(LinearAlgebra):
> K:=2.*EI/((0.5*L)^2)*<<L^2/2|-1.5*L|L^2/4|0>>,<-
1.5*L|12|0|1.5*L>,<L^2/4|0|L^2|L^2/4>,<0|1.5*L|L^2/4|L^2/2>>;
K:=
[ 4.000000000 EI  -2.000000000 EI  2.000000000 EI  0.
-2.000000000 EI  2.666666667 EI  0.  2.000000000 EI
2.000000000 EI  0.  8.000000000 EI  2.000000000 EI
0.  2.000000000 EI  2.000000000 EI  4.000000000 EI ]
> KG:=1/30*<<L^2|-1.5*L|-L^2/4|0>>,<-1.5*L|72|0|1.5*L>,<-
L^2/4|0|2*L^2|-L^2/4>,<0|1.5*L|-L^2/4|L^2>>;
KG:=
[ 1.19999999987999994 , -0.299999999969999984 , -0.299999999969999984 , 0.
-0.299999999969999984 , 2.39999999975999988 , 0. , 0.299999999969999984
-0.299999999969999984 , 0. , 2.39999999975999988 , -0.299999999969999984
0. , 0.299999999969999984 , -0.299999999969999984 , 1.19999999987999994 ]
```



> Sob\_chisla:=Eigenvalues (K<sup>-1</sup> .KG) ;

$$Sob\_chisla := \begin{bmatrix} 0.1499999999 \\ EI \\ 0.2796706916 \\ EI \\ 0.7499999999 \\ EI \\ 3.620329309 \\ EI \end{bmatrix}$$

Наибольшее собственное число матрицы  $K^{-1} \cdot K_G$ :  $3.620329309/EI$  равно обратному значению критической силы для этой стойки:

$$N_{min} = N_1 = 0.276217966 EI = \frac{9.943846796 EI}{L^2}.$$

Точное значение критической силы для этой стойки

$$N_1 = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = 9.8696044 \cdot \frac{EI}{L^2}.$$

Погрешность МКЭ составила 0.752%.

Мы провели расчеты всех вариантов стоек постоянной жесткости с различными закреплениями концов по МКЭ. Для стоек с одним подвижным концом стойка рассматривалась состоящей из одного конечного элемента, а для стоек с неподвижными концами – состоящей из двух конечных элементов. Сравнив результаты расчетов с точными решениями видим, что погрешность МКЭ для всех случаев меньше 1.5%.

Определим критический параметр  $N$  для одноэтажной рамы, показанной на рис.5.13. Рама имеет два жестких смещающихся в горизонтальном направлении узла.

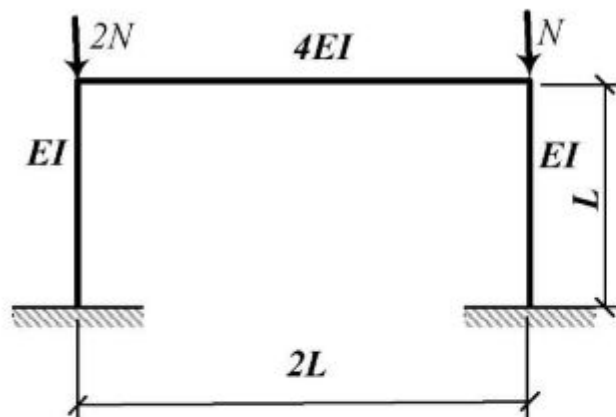


Рис.5.13. Рама со сжатыми стойками.

С помощью (5.7) вычисляются элементы матрицы жесткости:

на рис.5.13. Рама имеет два жестких смещающихся в горизонтальном направлении узла. Расчетная схема принята в виде трех конечных элементов (смотри рис.5.14): левая стойка, ригель и правая стойка. Неизвестными считаем: горизонтальное перемещение ригеля  $Z_1$ , угол поворота левого  $Z_2$  и угол поворота правого узла  $Z_3$ .

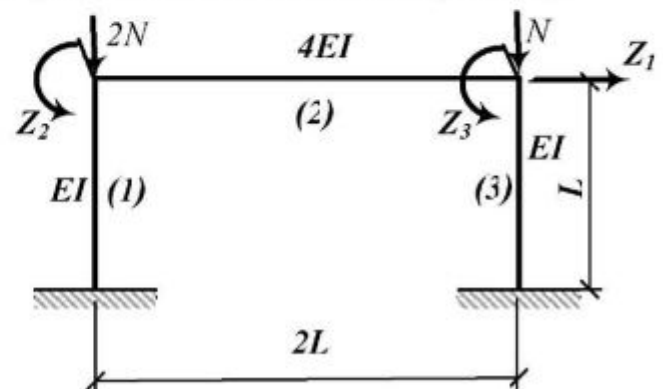


Рис.5.14. Расчетная схема рамы со сжатыми стойками.

$$r_{11} = r_{11}^{(1)} + r_{11}^{(3)} = \frac{12EI}{L^3} + \frac{12EI}{L^3} = \frac{24EI}{L^3}, \quad r_{21} = r_{21}^{(1)} = \frac{6EI}{L^2}, \quad r_{31} = r_{31}^{(3)} = \frac{6EI}{L^2},$$

$$r_{12} = r_{12}^{(1)} = \frac{6EI}{L^2},$$

$$r_{22} = r_{22}^{(1)} + r_{22}^{(2)} = \frac{4L^2(EI)}{L^3} + \frac{4(2L)^2(4EI)}{(2L)^3} = \frac{12EI}{L}, \quad r_{32} = r_{32}^{(2)} = \frac{2(4EI)}{2L} = \frac{4EI}{L},$$

$$r_{13} = r_{13}^{(1)} = \frac{6EI}{L^2}, \quad r_{23} = r_{23}^{(2)} = \frac{2(4EI)}{2L} = \frac{4EI}{L}, \quad r_{33} = r_{33}^{(3)} + r_{33}^{(2)} = \frac{4(EI)}{L} + \frac{4(4EI)}{2L} = \frac{12EI}{L}.$$

и с помощью (5.11) вычисляются элементы матрицы геометрической жесткости:

После подстановки найденных значений в (5.3) получаем

$$\left( \frac{2EI}{L^2} \begin{bmatrix} 12 & 3L & 3L \\ 3L & 6L^2 & 2L^2 \\ 3L & 2L^2 & 6L^2 \end{bmatrix} - \frac{N}{30} \begin{bmatrix} 108 & 6L & 3L \\ 6L & 8L^2 & 0 \\ 3L & 0 & 4L^2 \end{bmatrix} \right) \cdot \bar{\mathbf{Z}} = \mathbf{0},$$

при  $\bar{\mathbf{Z}} \neq \mathbf{0}$ , получим уравнение

$$\left| \mathbf{K}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{K}}_G - \frac{1}{N} \cdot \mathbf{E} \right| = 0, \quad (5.15)$$

где

$$\bar{\mathbf{K}}_G = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 108 & 6L & 3L \\ 6L & 8L^2 & 0 \\ 3L & 0 & 4L^2 \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

Раскрыв определитель (5.15) получим алгебраическое уравнение третьего порядка, решив которое найдем корни  $N_i$ . Наименьший корень даст величину критического параметра для рамы на рис.5.13. Или можно найти собственные числа:  $\lambda_j = \frac{1}{N_j}$ ,  $j=1,2,3$ , для матрицы  $\mathbf{K}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{K}}_G$ . Наибольшее собственное число даст величину обратную критическому параметру.

Расчет проведем, используя программный пакет *Maple*:

```
> restart;
> EI:=EI:L:=6:
> with(LinearAlgebra):
> K:=2.*EI/L^2*«12|3*L|3*L»,«3*L|6*L^2|2*L^2»,«3*L|2*L^2|6*L^2»;
```

$$K := \begin{bmatrix} 0.6666666667 \text{ EI} & 1.000000000 \text{ EI} & 1.000000000 \text{ EI} \\ 1.000000000 \text{ EI} & 12. \text{ EI} & 4. \text{ EI} \\ 1.000000000 \text{ EI} & 4. \text{ EI} & 12. \text{ EI} \end{bmatrix}$$

```
> KG:=1/30*«108|6*L|3*L»,«6*L|8*L^2|0»,«3*L|0|4*L^2»;
```

$$KG := \begin{bmatrix} \frac{18}{5} & \frac{6}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{6}{5} & \frac{48}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{24}{5} \end{bmatrix}$$

> Sob\_chisla:=Eigenvalues(K^(-1).KG);

$$Sob\_chisla := \begin{bmatrix} \frac{0.3612656316}{EI} \\ \frac{0.9785941683}{EI} \\ \frac{6.344755585}{EI} \end{bmatrix}$$

Наибольшее собственное число матрицы  $K^{-1} \cdot K_G$ :  $6.344755585/EI$  равно обратному значению критического параметра для этой рамы (рис.5.13):

$$N_{\min} = N_1 = 0.1576105 EI = \frac{5.67397743 EI}{L^2}.$$

### 5.3. Динамические расчеты стержневых систем

При расчетах конструкций на устойчивость используем уравнение (5.1), в котором матрица жесткости  $K$  вычисляется так же как при статическом расчете.

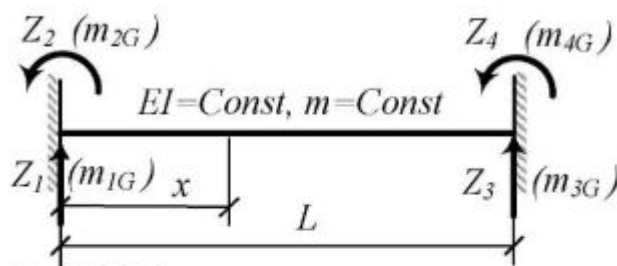


Рис.5.15. К определению матрицы масс стержневого конечного элемента

Матрица масс для отдельного конечного элемента (Рис.5.15)

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{bmatrix},$$

$$\text{где } m_{ij} = \int_0^L m(x) \psi_i(x) \psi_j(x) dx \quad (5.16)$$

компонент матрицы масс конечного элемента. Функции  $\psi_i(x)$  определены формулами (5.5).

Вычисляя по (5.16), (5.5), при  $m(x) = m = Const$ , получаем матрицу масс стержневого конечного элемента:

$$[m_{ij}] = \frac{mL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix}. \quad (5.17)$$

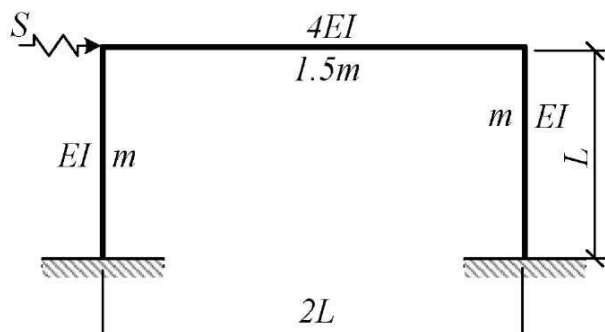


Рис.5.16. Импульсное воздействие на узел одноэтажной рамы.

женного в левом узле (рис.5.16).

Расчетная схема принята в виде трех конечных элементов (смотри рис.5.17): левая стойка, ригель и правая стойка. Неизвестными считаем: горизонтальное перемещение ригеля  $Z_1$ , угол поворота левого  $Z_2$  и угол поворота правого узла  $Z_3$  рамы.

С помощью (5.7), вычисляются элементы матрицы жесткости  $K$ . Элементы матрицы масс вычисляются с помощью (5.17):

При вычислении элемента  $m_{11}$  матрицы масс учтена масса ригеля рамы:

$$1.5m \cdot 2L = 3mL$$

как масса тела, перемещаемого горизонтально.

$$m_{11} = m_{11}^{(1)} + m_{11}^{(3)} + 3mL = \frac{156}{420}mL + \frac{156}{420}mL + 3mL = \frac{786}{210}mL,$$

$$m_{12} = m_{21} = m_{21}^{(1)} = \frac{mL \cdot 22L}{420} = \frac{11mL^2}{210}, \quad m_{13} = m_{31} = m_{31}^{(3)} = \frac{mL \cdot 22L}{420} = \frac{11mL^2}{210},$$

$$m_{22} = m_{22}^{(1)} + m_{22}^{(2)} = \frac{m \cdot L \cdot 4L^2}{420} + \frac{1.5m \cdot (2L) \cdot 4(2L)^2}{420} = \frac{26mL^2}{210},$$

$$m_{23} = m_{32} = m_{24}^{(2)} = \frac{1.5m \cdot (2L) \cdot (-3(2L)^2)}{420} = -\frac{18mL^2}{210},$$

$$m_{33} = m_{22}^{(3)} + m_{44}^{(2)} = \frac{m \cdot L \cdot 4L^2}{420} + \frac{1.5m \cdot (2L) \cdot 4(2L)^2}{420} = \frac{26mL^2}{210}.$$

Таким образом, матрица масс для системы показанной на рис.5.16:

$$\mathbf{m} = \frac{mL}{210} \begin{bmatrix} 786 & 11L & 11L \\ 11L & 26L^2 & -18L^2 \\ 11L & -18L^2 & 26L^2 \end{bmatrix}.$$

Матрица жесткости определяется формулой (5.9)

Для примера рассмотрим решение динамического расчета одноэтажной рамы на действие горизонтального импульса  $S$ , прило-

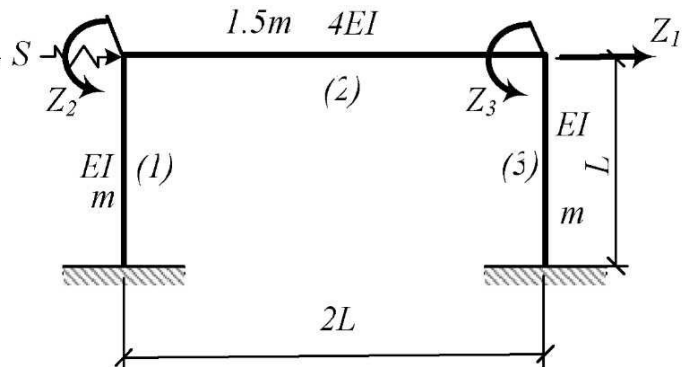


Рис.5.17. Расчетная схема рамы на импульсное воздействие по методу конечных элементов



$$K = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 3L & 3L \\ 3L & 6L^2 & 2L^2 \\ 3L & 2L^2 & 6L^2 \end{bmatrix}.$$

Уравнение движения системы без учета затухания колебаний и внутренних сил статического сжатия получаем из (5.1):

$$m \cdot \ddot{\bar{Z}} + K \cdot \bar{Z} = \bar{P}(t). \quad (5.18)$$

К решению уравнения (5.18) применим метод разложения по собственным формам. Ищем

$$\bar{Z}(t) = \Phi \cdot \bar{a}(t), \quad (5.19)$$

где  $\Phi$  - матрица собственных векторов, отвечающая условию ортогональности

$$\Phi^T \cdot m \cdot \Phi = E, \quad (5.20)$$

$\bar{a}(t)$  - вектор коэффициентов, зависящих от времени. Отметим, что метод разложения по собственным формам изложен в разделе 4. настоящего пособия. Здесь отличие состоит в том, что вместо вектора перемещений  $\bar{v}$  мы имеем дело с вектором обобщенными перемещениями  $\bar{Z}$  и вместо диагональной матрицы масс  $m$  имеем недиагональную, симметричную матрицу  $m$ . Тем не менее, кратко изложим решение нашей задачи.

Подставим (5.19) в (5.18) и умножим результат на матрицу  $\Phi^T$  слева, получим:

$$\Phi^T \cdot m \cdot \Phi \cdot \ddot{\bar{a}}(t) + \Phi^T \cdot K \cdot \Phi \cdot \bar{a}(t) = \Phi^T \cdot \bar{P}(t),$$

учитывая (5.20) и

$$\Phi^T \cdot K \cdot \Phi = A, \quad (5.21)$$

где  $A$  - диагональная матрица собственных чисел, получаем

$$\ddot{\bar{a}}(t) + A \cdot \bar{a}(t) = \bar{b}(t), \quad (5.22)$$

где

$$\bar{b}(t) = \Phi^T \cdot \bar{P}(t)$$

Записав (5.22) в обычной, а не в матричной форме, получаем

$$\ddot{a}_j(t) + A_j \cdot a_j(t) = b_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (5.23)$$

систему независимых обыкновенных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов  $a_j(t)$ .

Решение уравнения (5.23) для случая

$$b_j(t) = \delta(t) \quad (\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = 0 \\ 0 & \text{при } t \neq 0 \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = 1),$$

$\delta(t)$  - дельта-функция Дирака, имеет вид:

$$k_j(t) = \frac{\sin(p_j t)}{p_j}, \quad t > 0 \quad (5.24)$$

и называется импульсной переходной функцией (ИПФ) для консервативной системы,  $p_j = \sqrt{\lambda_j}$ .

Решение уравнения (5.22) при произвольном  $b_j(t)$  выражается интегралом Дюамеля:

$$a_j(t) = \int_0^t k_j(t-\tau) \cdot b_j(\tau) d\tau. \quad (5.25)$$

В матричной форме выражение (5.25) примет вид:

$$\bar{a}(t) = \text{diag}[\lambda_j(t)] \cdot \Phi^T \cdot \bar{P}_0, \quad (5.26)$$

где  $\bar{P}(t) = \bar{P}_0 \cdot f(t)$ ,  $f(t)$  функция времени,

$$\text{diag}[\lambda_j(t)] = \text{diag} \left[ \int_0^t \frac{\sin(p_j(t-\tau)) f(\tau) d\tau}{p_j} \right]$$

- диагональная матрица.

После подстановки (5.26) в (5.19) получаем

$$\bar{Z} = \Phi \cdot \text{diag}[\lambda_j(t)] \cdot \Phi^T \cdot \bar{P}_0. \quad (5.27)$$

Выражение (5.27) дает решение задачи, если известны матрицы собственных векторов  $\Phi$  и матрица собственных чисел  $\Lambda$ . Для их определения служат уравнения (5.20) и (5.21).

В разделе 1.3 предложен метод итераций для определения всех собственных чисел и всех собственных векторов некоторой симметричной матрицы  $A$ . Проблема сводится к решению уравнений:

$$\Phi^T \cdot A \cdot \Phi = \Lambda, \quad \Phi^T \cdot \Phi = E. \quad (5.28)$$

Приведем уравнения (5.20), (5.21) к виду (5.28)

$$\begin{aligned} \Phi^T \cdot m \cdot \Phi &= \Phi^T \sqrt{m} \cdot \sqrt{m} \Phi = \Psi^T \cdot \Psi = E, \\ \Phi^T \cdot K \cdot \Phi &= \Phi^T \sqrt{m} \cdot \sqrt{m}^{-1} K \sqrt{m}^{-1} \cdot \sqrt{m} \Phi = \Psi^T \cdot K_m \cdot \Psi = \Lambda, \end{aligned}$$

где  $\Psi = \sqrt{m} \Phi, \quad \Phi = \sqrt{m}^{-1} \Psi, \quad K_m = \sqrt{m}^{-1} K \sqrt{m}^{-1}. \quad (5.29)$

Полученные выражения имеют вид (5.28):

$$\Psi^T \cdot K_m \cdot \Psi = \Lambda, \quad \Psi^T \cdot \Psi = E$$

и их можно решить методом итераций.

Решение (5.27) преобразуем с помощью (5.29), получим:

$$\bar{Z} = \sqrt{m}^{-1} \Psi \cdot \text{diag}[\lambda_j(t)] \cdot \Psi^T \sqrt{m}^{-1} \cdot \bar{P}_0.$$

Упростим полученное выражение. Рассмотрим произведение матриц:

$$\Psi \cdot \text{diag}[\lambda_j(t)] \cdot \Psi^T = [\bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2 \dots \bar{\psi}_n] \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2(t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\psi}_1^T \\ \bar{\psi}_2^T \\ \dots \\ \bar{\psi}_n^T \end{bmatrix} = \sum_i^n \lambda_i(t) \cdot \bar{\psi}_i \cdot \bar{\psi}_i^T.$$

Обозначим

$$\bar{\psi}_j \cdot \bar{\psi}_j^T = H_j, \quad (5.30)$$

и назовем эту матрицу парциальная матрица собственных форм.

Решение (5.27) можно записать в виде:

$$\bar{Z} = \sqrt{m}^{-1} \left( \sum_1^n \lambda_j(t) \cdot H_j \right) \sqrt{m}^{-1} \cdot \bar{P}_0. \quad (5.31)$$

Итак, необходимо найти все собственные числа и собственные векторы матрицы  $K_m = \sqrt{m}^{-1} K \sqrt{m}^{-1}$ , но предварительно необходимо найти функцию матрицы масс:  $\sqrt{m}^{-1}$ .

В разделе 1.4 функции матриц определены следующим образом:

$$f(A) = \Phi \cdot f(\Lambda) \cdot \Phi^T,$$

где  $\Phi$  – матрица собственных векторов и  $\Lambda$  - матрица собственных чисел матрицы  $A$ . В нашем случае роль  $A$  играет матрица  $m$ .

Находим матрицу собственных чисел  $\Lambda_m$ , и матрицу собственных векторов  $\Phi_m$  матрицы  $m$  после чего вычисляем

$$\sqrt{m}^{-1} = \Phi_m \cdot \sqrt{\Lambda_m}^{-1} \cdot \Phi_m^T.$$

По формуле (5.29) вычисляем  $K_m = \sqrt{m}^{-1} K \sqrt{m}^{-1}$  и находим собственные векторы  $\bar{\psi}_j$ , собственные числа  $\lambda_j$  и парциальные матрицы  $H_j = \bar{\psi}_j \cdot \bar{\psi}_j^T$ .

Решение задачи выражается формулой (5.31)

$$\bar{Z} = \sqrt{m}^{-1} \left( \sum_1^n \lambda_j(t) \cdot H_j \right) \sqrt{m}^{-1} \cdot \bar{P}_0,$$

или

$$\bar{Z} = (\lambda_1(t) \sqrt{m}^{-1} H_1 \sqrt{m}^{-1} + \lambda_2(t) \sqrt{m}^{-1} H_2 \sqrt{m}^{-1} + \lambda_3(t) \sqrt{m}^{-1} H_3 \sqrt{m}^{-1}) \cdot \bar{P}_0.$$

$$\lambda_j(t) = \int_0^t \frac{\sin(p_j(t-\tau))}{p_j} \cdot \delta(\tau) d\tau = \frac{\sin(p_j t)}{p_j}, \quad (5.32)$$

Обозначим  $\bar{A}z_j = \sqrt{m}^{-1} H_j \sqrt{m}^{-1} \bar{P}_0$ , тогда с учетом (5.32):

$$\bar{Z} = \bar{A}z_1 \cdot \frac{\sin(p_1 t)}{p_1} + \bar{A}z_2 \cdot \frac{\sin(p_2 t)}{p_2} + \bar{A}z_3 \cdot \frac{\sin(p_3 t)}{p_3}.$$

Для определения расчетных изгибающих моментов воспользуемся единичной матрицей изгибающих моментов (смотри стр.6), полученной от  $Z_j = 1, j=1, 2, 3$ :

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & \frac{8EI}{L} & \frac{4EI}{L} \\ 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{8EI}{L} \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{4EI}{L} \\ \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix}$$

Расчетные изгибающие моменты определяются как

$$M_{расч} = \bar{M} \cdot \bar{Z}.$$

Описанный выше расчет легко реализуется с помощью программного пакета *Maple*:

> restart;

Исходные данные:

> mm:=200.:L:=3.:

> with(LinearAlgebra):

> m:=Matrix(3,3,mm\*L/210\*[[786,11\*L,11\*L],[11\*L,26\*L^2,-18\*L^2],[11\*L,-18\*L^2,26\*L^2]],datatype=float[4]);

$$m := \begin{bmatrix} 2245.71436 & 94.2857132 & 94.2857132 \\ 94.2857132 & 668.571411 & -462.857147 \\ 94.2857132 & -462.857147 & 668.571411 \end{bmatrix}$$

Вычисление собственных векторов матрицы *m*:

> Fi:=Matrix(3,3,Eigenvectors(m,output=vectors),datatype=float[4]);

$$Fi := \begin{bmatrix} 0.997888625 & 0.0649484992 & -0.635382719 \cdot 10^{-10} \\ 0.0459255241 & -0.705613792 & -0.707106769 \\ 0.0459255241 & -0.705613792 & 0.707106769 \end{bmatrix}$$

> LL:=Matrix(3,1,Eigenvalues(m,output=values),datatype=float[4]);

$$LL := \begin{bmatrix} 2254.39282 \\ 197.035706 \\ 1131.42859 \end{bmatrix}$$

> lamb-

daM:=Matrix(3,3,[[LL[1,1],0,0],[0,LL[2,1],0],[0,0,LL[3,1]]],datatype=float[4]);

$$lambdaM := \begin{bmatrix} 2254.39282 & 0. & 0. \\ 0. & 197.035706 & 0. \\ 0. & 0. & 1131.42859 \end{bmatrix}$$

Квадратный корень из матрицы собственных чисел матрицы *m*:

> lamb-

daM05:=Matrix(3,3,[[sqrt(lambdaM[1,1]),0,0],[0,sqrt(lambdaM[2,2]),0],[0,0,sqrt(lambdaM[3,3])]],datatype=float[4]);



$$\text{lambdaM05} := \begin{bmatrix} 47.4804459 & 0. & 0. \\ 0. & 14.0369406 & 0. \\ 0. & 0. & 33.6367149 \end{bmatrix}$$

Квадратный корень из матрицы  $m$ :

```
> m05:=Fi.lambdam05.Transpose(Fi);
```

$$m_{05} := \begin{bmatrix} 47.33937164 & 1.532667645 & 1.532667641 \\ 1.532667645 & 23.90736434 & -9.729349395 \\ 1.532667641 & -9.729349395 & 23.90736434 \end{bmatrix}$$

Квадратный корень из обратной матрицы  $m$ :

```
> m_05:=Matrix(3,3,m05^(-1),datatype=float[4]);
```

$$m_{_05} := \begin{bmatrix} 0.0212729741 & -0.00229964475 & -0.00229964475 \\ -0.00229964475 & 0.0503791720 & 0.0206497535 \\ -0.00229964475 & 0.0206497535 & 0.0503791720 \end{bmatrix}$$

Жесткость  $EI$ :

```
> EI:=2.*10^11*5010.*10^(-8);
```

Матрица жесткости рамы:

```
>
```

```
K:=Matrix(3,3,2*EI/(L^3)*[[12,3*L,3*L],[3*L,6*L^2,2*L^2],[3*L,2*L^2,6*L^2]],datatype=float[4]);
```

$$K := \begin{bmatrix} 0.8906667 \cdot 10^7 & 0.6680000 \cdot 10^7 & 0.6680000 \cdot 10^7 \\ 0.6680000 \cdot 10^7 & 0.40080000 \cdot 10^8 & 0.13360000 \cdot 10^8 \\ 0.6680000 \cdot 10^7 & 0.13360000 \cdot 10^8 & 0.40080000 \cdot 10^8 \end{bmatrix}$$

Матрица  $Km$ :

```
> Km:=Matrix(3,3,m_05.K.m_05,datatype=float[4]);
```

$$K_m := \begin{bmatrix} 3288.68848 & 999.433655 & 999.433655 \\ 999.433655 & 144478.234 & 120862.078 \\ 999.433655 & 120862.078 & 144478.234 \end{bmatrix}$$

Матрица собственных векторов матрицы  $Km$ :

```
> Fi:=Matrix(3,3,EigenVectors(Km,output=vectors),datatype=float[4]);
```

$$F_i := \begin{bmatrix} -0.999985456 & 0.00539340638 & 0. \\ 0.00381371449 & 0.707096517 & -0.707106769 \\ 0.00381371449 & 0.707096517 & 0.707106769 \end{bmatrix}$$

Собственные числа матрицы  $Km$ :

```
> LL:=Matrix(3,1,EigenVectors(Km,output=values),datatype=float[4]);
```

$$LL := \begin{bmatrix} 3281.06519 \\ 265347.938 \\ 23616.1563 \end{bmatrix}$$

Собственные частоты:

```
> p1:=sqrt(LL[1,1])/(2*Pi);
```

$$p_1 := \frac{28.64029150}{\pi}$$

```
> p3:=sqrt(LL[2,1])/(2*Pi);
```

$$p_3 := \frac{257.5596718}{\pi}$$

```
> p2:=sqrt(LL[3,1])/(2*Pi);
```

$$p_2 := \frac{76.83774510}{\pi}$$

Собственные векторы:

```

> Psi1:=Matrix(3,1,Fi.Matrix(3,1,[[1],[0],[0]],datatype=float[4]));
Psi1 :=  $\begin{bmatrix} -0.999985456 \\ 0.00381371449 \\ 0.00381371449 \end{bmatrix}$ 
> Psi3:=Matrix(3,1,Fi.Matrix(3,1,[[0],[1],[0]],datatype=float[4]));
Psi3 :=  $\begin{bmatrix} 0.00539340638 \\ 0.707096517 \\ 0.707096517 \end{bmatrix}$ 
> Psi2:=Matrix(3,1,Fi.Matrix(3,1,[[0],[0],[1]],datatype=float[4]));
Psi2 :=  $\begin{bmatrix} 0. \\ -0.707106769 \\ 0.707106769 \end{bmatrix}$ 

```

Парциальные матрицы:

```

> H1:=Matrix(3,3,Psi1.Transpose(Psi1),datatype=float[4]);
H1 :=  $\begin{bmatrix} 0.999970913 & -0.00381365907 & -0.00381365907 \\ -0.00381365907 & 0.0000145444183 & 0.0000145444183 \\ -0.00381365907 & 0.0000145444183 & 0.0000145444183 \end{bmatrix}$ 
> H2:=Matrix(3,3,Psi2.Transpose(Psi2),datatype=float[4]);
H2 :=  $\begin{bmatrix} 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0.499999970 & -0.499999970 \\ 0. & -0.499999970 & 0.499999970 \end{bmatrix}$ 
> H3:=Matrix(3,3,Psi3.Transpose(Psi3),datatype=float[4]);
H3 :=  $\begin{bmatrix} 0.0000290888329 & 0.00381365884 & 0.00381365884 \\ 0.00381365884 & 0.499985486 & 0.499985486 \\ 0.00381365884 & 0.499985486 & 0.499985486 \end{bmatrix}$ 

```

➤ Az1:=m\_05.H1.m\_05.Matrix(3,1,[[S0],[0],[0]]);

$$Az1 := \begin{bmatrix} 0.0004532728327 S0 \\ -0.00005472637320 S0 \\ -0.00005472637320 S0 \end{bmatrix}$$

➤ Az2:=m\_05.H2.m\_05.Matrix(3,1,[[S0],[0],[0]]);

$$Az2 := \begin{bmatrix} 0. \\ 0. \\ 0. \end{bmatrix}$$

➤ Az3:=m\_05.H3.m\_05.Matrix(3,1,[[S0],[0],[0]]);

$$Az3 := \begin{bmatrix} 0.9843327693 \cdot 10^{-5} S0 \\ -0.0001575352160 S0 \\ -0.0001575352160 S0 \end{bmatrix}$$

Матрица изгибающих моментов от единичных неизвестных Zi=1:

```

> MM:=Matrix(6,3,[[6*EI/L^2,2*EI/L,0],[-6*EI/L^2,-4*EI/L,0],[0,-8*EI/L,-4*EI/L],[0,4*EI/L,8*EI/L],[-6*EI/L^2,0,-4*EI/L],[6*EI/L^2,0,2*EI/L]]);

```

$$MM := \begin{bmatrix} 0.6679999998 \cdot 10^7 & 0.6680000000 \cdot 10^7 & 0 \\ -0.6679999998 \cdot 10^7 & -0.1336000000 \cdot 10^8 & 0 \\ 0 & -0.2672000000 \cdot 10^8 & -0.1336000000 \cdot 10^8 \\ 0 & 0.1336000000 \cdot 10^8 & 0.2672000000 \cdot 10^8 \\ -0.6679999998 \cdot 10^7 & 0 & -0.1336000000 \cdot 10^8 \\ 0.6679999998 \cdot 10^7 & 0 & 0.6680000000 \cdot 10^7 \end{bmatrix}$$

Значение импульса  $S_0$ :

>  $S_0 := 1$ ;

$S_0 := 1$

Перемещения

>

$Z := Az_1 \cdot \sin(2 \cdot \text{Pi} \cdot p_1 \cdot t) / (2 \cdot \text{Pi} \cdot p_1) + Az_2 \cdot \sin(2 \cdot \text{Pi} \cdot p_2 \cdot t) / (2 \cdot \text{Pi} \cdot p_2) + Az_3 \cdot \sin(2 \cdot \text{Pi} \cdot p_3 \cdot t) / (2 \cdot \text{Pi} \cdot p_3)$ ;

$$Z := \begin{bmatrix} 0.7913202150 \cdot 10^{-5} \sin(57.28058300 t) + 0.1910882947 \cdot 10^{-7} \sin(515.1193436 t) \\ -0.9554088025 \cdot 10^{-6} \sin(57.28058300 t) - 0.3058227534 \cdot 10^{-6} \sin(515.1193436 t) \\ -0.9554088025 \cdot 10^{-6} \sin(57.28058300 t) - 0.3058227534 \cdot 10^{-6} \sin(515.1193436 t) \end{bmatrix}$$

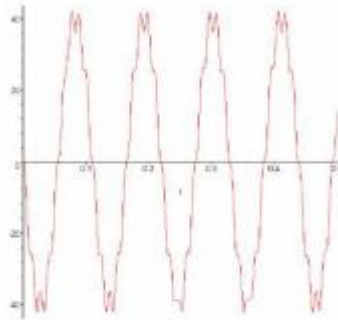
Матрица расчетных изгибающих моментов:

>  $M_{pac} := MM \cdot Z$ ;

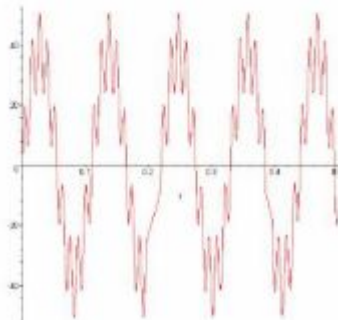
$$M_{pac} := \begin{bmatrix} 46.47805955 \sin(57.28058300 t) - 1.915249012 \sin(515.1193436 t) \\ -40.09592875 \sin(57.28058300 t) + 3.958145004 \sin(515.1193436 t) \\ 38.29278480 \sin(57.28058300 t) + 12.25737596 \sin(515.1193436 t) \\ -38.29278480 \sin(57.28058300 t) - 12.25737596 \sin(515.1193436 t) \\ -40.09592875 \sin(57.28058300 t) + 3.958145004 \sin(515.1193436 t) \\ 46.47805955 \sin(57.28058300 t) - 1.915249012 \sin(515.1193436 t) \end{bmatrix}$$

Графики изгибающих моментов в сечениях 2 и 3:

>  $\text{plot}(M_{pac}[2,1], t=0..0.5)$ ;



>  $\text{plot}(M_{pac}[3,1], t=0..0.5)$ ;





Итак, задача о действии горизонтального единичного импульса  $S = S_0 \cdot \delta(t) = 1 \cdot \delta(t)$  на левый верхний узел одноэтажной рамы, решена. Но при расчете мы пренебрегли диссипативными силами и сжатием стоек рамы. Для учета диссипативных сил в уравнение движения рамы введем диссипативный член:  $\Gamma \cdot \ddot{\bar{Z}}$ , получим

$$m \cdot \ddot{\bar{Z}} + \Gamma \cdot \dot{\bar{Z}} + K \cdot \bar{Z} = \bar{P}, \quad (5.33)$$

где  $\Gamma$  – диссипативная матрица.

Для того чтобы применить к уравнению (5.33) метод разложения по собственным формам необходимо, чтобы матрица  $\Gamma$  имела те же самые собственные векторы  $\Psi$ , что и матрицы  $m$  и  $K$ , то есть матрица  $K_m = \sqrt{m}^{-1} K \sqrt{m}^{-1}$ . Это значит, что  $\Psi \cdot \Gamma \cdot \Psi^T = A_r$ , где  $A_r$  – диагональная матрица. В качестве такой матрицы может быть принята любая функция матрицы  $A$ :  $A_r = f(A)$ . Поскольку собственные числа матрицы  $K_m$  представляют собой квадраты собственных частот колебаний  $p$ , то  $A_r = f(A) = \varphi(p)$ . Представим  $\varphi(p)$  в виде разложения в ряд Маклорена:

$$\varphi(p) = \varphi(0) + \varphi'(0) \cdot p + \frac{\varphi''(0)}{2!} \cdot p^2 + \dots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} \cdot p^n + \dots,$$

Сохраним в этом разложении первый ненулевой член, т.е. примем

$$\varphi(p) = \varphi'(0) \cdot p.$$

Постоянную величину  $\varphi'(0)$  обозначим  $\gamma$ , тогда

$$\varphi(p) = \gamma \cdot p. \quad (5.34)$$

Применим к уравнению (5.33) способ разложения по собственным формам, ищем решение уравнения в виде:

$$\bar{Z} = \Phi \cdot \bar{a}(t). \quad (5.35)$$

После подстановки (5.35) в (5.33), умножения слева на матрицу  $\Phi^T$  получим:

$$\Phi^T m \Phi \cdot \ddot{\bar{a}}(t) + \Phi^T \Gamma \Phi \cdot \dot{\bar{a}}(t) + \Phi^T K \Phi \cdot \bar{a}(t) = \Phi^T \cdot \bar{P}(t),$$

но  $\Phi^T m \Phi = E$ ,  $\Phi^T K \Phi = A = p^2$ ,  $\Phi^T \Gamma \Phi = A_r = \varphi(p)$ , и приняв по (5.34)  $\varphi(p) = \gamma \cdot p$ , получим  $\ddot{\bar{a}}(t) + \gamma p \cdot \dot{\bar{a}}(t) + p^2 \bar{a}(t) = \bar{b}(t)$ , где  $\bar{b}(t) = \Phi^T \bar{P}(t)$ . В обычном (не в матричном) виде уравнения выглядят так:

$$\ddot{a}_j(t) + \gamma p \cdot \dot{a}_j(t) + p^2 \bar{a}_j(t) = \bar{b}_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (5.36)$$

Решение уравнения (5.36) выразим через интеграл Дюамеля

$$a_j(t) = \int_0^t k_j(t - \tau) b_j(\tau) d\tau,$$

где  $k(t)$  импульсная переходная функция диссипативной системы или решение уравнения (5.36) при  $\bar{b}_j(t) = \delta(t)$ . Это решение имеет вид

$$k_j(t) = \frac{1}{p_{1j}} \exp\left(-\frac{\gamma p_j}{2} t\right) \sin(p_{1j} t), \quad (5.37)$$

где  $p_{1j} = p_j \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}}$ . При  $\gamma \ll 1$ , что справедливо для большинства конструкционных материалов, можно считать  $p_{1j} = p_j$  и

$$k_j(t) = \frac{1}{p_j} \exp\left(-\frac{\gamma p_j}{2} t\right) \sin(p_j t). \quad (5.38)$$

Вычислив логарифмический декремент колебаний для функции (5.38), получим  $\delta = \pi \cdot \gamma$ , то есть независящий от частоты  $p$  декремент колебаний.

Вычислим интеграл Дюамеля, используя (5.37) и тот факт, что нагрузка на систему  $\bar{P}(t) = \bar{S}_0 \cdot \delta(t)$ :

$$\begin{aligned} \bar{a}(t) &= \text{diag} \left[ \frac{1}{p_j} \exp\left(-\frac{\gamma p_j}{2} (t - \tau)\right) \sin(p_j (t - \tau)) \delta(\tau) d\tau \right] \Phi^T \bar{S}_0 = \\ &= \text{diag} \left[ \frac{1}{p_j} \exp\left(-\frac{\gamma p_j}{2} t\right) \sin(p_j t) \right] \cdot \Phi^T \bar{S}_0 = \Lambda(t) \cdot \Phi^T \bar{S}_0. \end{aligned}$$

Функция  $\lambda_j(t) = \frac{1}{p_j} \exp\left(-\frac{\gamma p_j}{2} t\right) \sin(p_j t)$ .

Решение задачи дается формулой (5.35)

$$\bar{Z} = \Phi \cdot \bar{a}(t) = \Phi \cdot \text{diag}[\lambda_j(t)] \cdot \Phi^T \bar{S}_0,$$

то есть имеет и вид (5.27), в котором при вычислении функций  $\lambda_j(t)$  используется ИПФ для диссипативной системы (5.38).

Найдем решение той же самой задачи о горизонтальном импульсном воздействии на узел одноэтажной рамы. Материал конструкции обладает коэффициентом потерь  $\gamma = 0.025$ .

Расчет выполним, используя программу *Maple*:

```
> restart;
Исходные данные:
> S0:=1: mm:=200.:L:=3.: gam:=0.025:
> with(LinearAlgebra):
> m:=Matrix(3,3,mm*L/210*[[786,11*L,11*L],[11*L,26*L^2,-
18*L^2],[11*L,-18*L^2,26*L^2]],datatype=float[4]):
Вычисление собственных векторов матрицы m:
> Fi:=Matrix(3,3,EigenVectors(m,output=vectors),datatype=float[4]):
Вычисление собственных чисел матрицы m:
> LL:=Matrix(3,1,Eigenvalues(m,output=values),datatype=float[4]:
Матрица собственных чисел матрицы m:
> lamb-
daM:=Matrix(3,3,[[LL[1,1],0,0],[0,LL[2,1],0],[0,0,LL[3,1]]],datatype
=float[4]):
```

Квадратный корень из матрицы собственных чисел матрицы m:

```

>lamb-
daM05:=Matrix(3,3,[[sqrt(lambdaM[1,1]),0,0],[0,sqrt(lambdaM[2,2]),0],
,[0,0,sqrt(lambdaM[3,3])]],datatype=float[4]):
Квадратный корень из матрицы  $m$ :
> m05:=Fi.lambdM05.Transpose(Fi):
Квадратный корень из обратной матрицы  $m^{-1}$ :
m_05:=Matrix(3,3,m05^(-1),datatype=float[4]):
Жесткость  $EI$ :
> EI:=2.*10^11*5010.*10^(-8):
Матрица жесткости рамы:
>
K:=Matrix(3,3,2*EI/(L^3)*[[12,3*L,3*L],[3*L,6*L^2,2*L^2],[3*L,2*L^2,
6*L^2]],datatype=float[4]):
Матрица  $Km$ :
> Km:=Matrix(3,3,m_05.K.m_05,datatype=float[4]):
Матрица собственных векторов матрицы  $Km$ :
> Fi:=Matrix(3,3,EigenVectors(Km,output=vectors),datatype=float[4]):
Собственные числа матрицы  $Km$ :
> LL:=Matrix(3,1,EigenVectors(Km,output=values),datatype=float[4]):
Собственные частоты:
> p1:=sqrt(LL[1,1])/(2*Pi):
> p3:=sqrt(LL[2,1])/(2*Pi):
> p2:=sqrt(LL[3,1])/(2*Pi):
Собственные векторы:
> Psi1:=Matrix(3,1,Fi.Matrix(3,1,[[1],[0],[0]],datatype=float[4])):
> Psi3:=Matrix(3,1,Fi.Matrix(3,1,[[0],[1],[0]],datatype=float[4])):
> Psi2:=Matrix(3,1,Fi.Matrix(3,1,[[0],[0],[1]],datatype=float[4])):
Парциальные матрицы:
> H1:=Matrix(3,3,Psi1.Transpose(Psi1),datatype=float[4]):
> H2:=Matrix(3,3,Psi2.Transpose(Psi2),datatype=float[4]):
> H3:=Matrix(3,3,Psi3.Transpose(Psi3),datatype=float[4]):
Амплитуды форм колебаний неизвестных:
> Az1:=m_05.H1.m_05.Matrix(3,1,[[S0],[0],[0]]):
> Az2:=m_05.H2.m_05.Matrix(3,1,[[S0],[0],[0]]):
> Az3:=m_05.H3.m_05.Matrix(3,1,[[S0],[0],[0]]):
Матрица изгибающих моментов от единичных неизвестных Zi=1:
> MM:=Matrix(6,3,[[6*EI/L^2,2*EI/L,0],[-6*EI/L^2,-4*EI/L,0],[0,-
8*EI/L,-4*EI/L],[0,4*EI/L,8*EI/L],[-6*EI/L^2,0,-
4*EI/L],[6*EI/L^2,0,2*EI/L]]):

```



Перемещения:

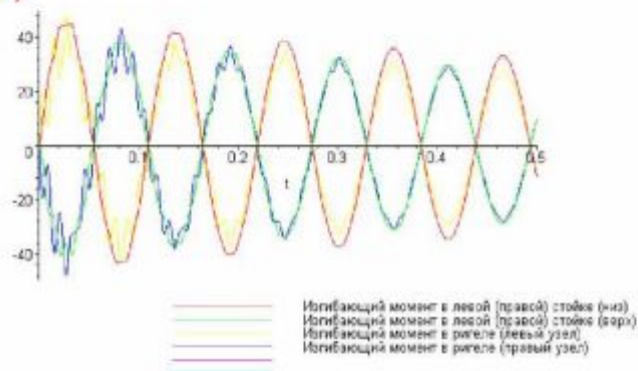
```
>Z:=Az1*exp(-gam*Pi*p1*t)*sin(2*Pi*p1*t)/(2*Pi*p1)+Az2*exp(-gam*Pi*p2*t)*sin(2*Pi*p2*t)/(2*Pi*p2)+Az3*exp(-gam*Pi*p3*t)*sin(2*Pi*p3*t)/(2*Pi*p3):
```

Матрица расчетных изгибающих моментов:

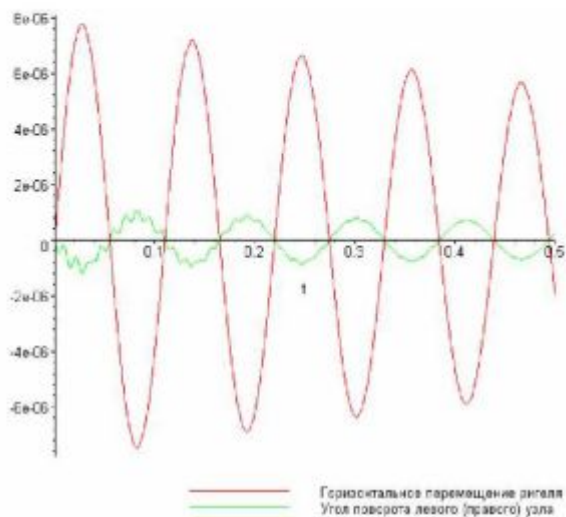
```
>Mpac:=MM.Z:
```

Графики изгибающих моментов в сечениях 2 и 3:

```
>plot(Mpac,t=0..0.5);
```



```
>plot(Z,t=0..0.5);
```



При принятых предпосылках учета внутреннего трения, сложность решение задач для диссипативной и консервативной систем практически не различима. Отличие лишь в виде импульсных переходных функций, используемых в расчетах: по (5.24) - для консервативных и по (5.38) - для диссипативных систем. Предпосылки были сделаны для упрощения расчета, но многочисленные эксперименты с конструкционными материалами в лабораторных условиях и экспериментальные исследования строительных конструкций, установили факт частотной независимости декремента колебаний. И именно в принятой для расчетов модели демпфирования колебаний, прослеживается четкая частотная независимость декремента колебаний ( $\delta = \pi \cdot \gamma$ ,  $\gamma = const$ ). Кроме того, факт учета именно частотно независимого внутреннего трения отражен в СНиПах.

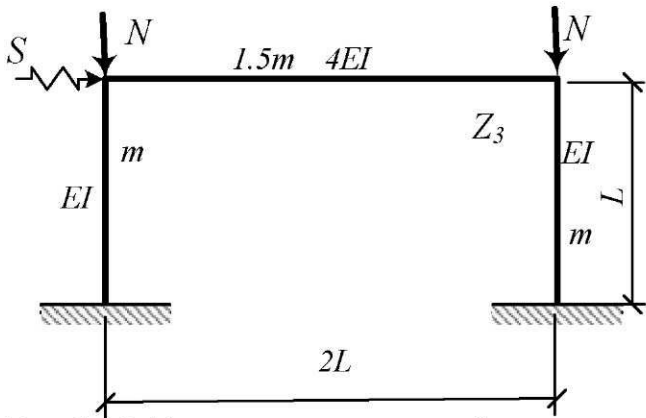


Рис.5.19. Рама со сжатыми стойками, при действии горизонтального импульса.

Рассмотрим пример (Рис.5.19). В отличие от предыдущего примера, нагрузкой кроме горизонтального импульса, действующего на левый узел рамы, является вертикальная узловая сжимающая нагрузка в виде двух сил  $N$ . Силы примем достаточно большими, такими, что по сравнению с ними массовую нагрузку можно не учитывать в статическом расчете. Примем величину этих сил равную значению критического параметра, полученного в примере

расчета этой же рамы на устойчивость (смотри рис.5.13). Итак, положим  $N = \frac{5.7EI}{L^2}$ . В динамическом расчете будем учитывать геометрическую жесткость при формировании исходного уравнения движения, т.е. используем уравнение движения (5.1). Матрицы  $K$ ,  $m$ ,  $\Gamma$  были рассмотрены в предыдущем примере. Получим матрицу геометрической жесткости  $K_G$ . Матрица геометрической жесткости вычисляется так же как при статическом расчете и расчете на устойчивость сложением жесткостей конечных элементов. Расчетная схема задачи приведена на рис.5.20.

Матрицу геометрической жесткости для рамы формируем с помощью (5.11):

$$[r_{Gij}] = \frac{N}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Согласно рис.5.20 элементы матрицы геометрической жесткости получим в виде:

$$r_{11G} = r_{11G}^{(1)} + r_{11G}^{(3)} = \frac{36 \cdot N}{30L} + \frac{36N}{30L} = \frac{72N}{30L}, \quad r_{21G} = r_{21G}^{(1)} = \frac{3L \cdot N}{30L} = \frac{3NL}{30L}, \quad r_{31G} = r_{31G}^{(3)} = \frac{3LN}{30L},$$

$$r_{12G} = r_{12G}^{(1)} = \frac{3L \cdot N}{30L} = \frac{3NL}{30L}, \quad r_{22G} = r_{22G}^{(1)} + r_{22G}^{(2)} = \frac{4L^2(N)}{30L} + \frac{4(2L)^2(0)}{30 \cdot 2L} = \frac{4NL^2}{30L},$$

$$r_{32G} = r_{32G}^{(2)} = \frac{-L^2(0)}{30(2)L} = 0,$$

$$r_{13G} = r_{13G}^{(3)} = \frac{3L(N)}{30L}, \quad r_{23G} = r_{23G}^{(2)} = \frac{-L^2(0)}{30(2L)} = 0, \quad r_{33G} = r_{33G}^{(3)} + r_{33G}^{(2)} = \frac{4L^2N}{30L} + \frac{4L^2(N) \cdot 0}{30(2L)} = \frac{4L^2N}{30L}.$$

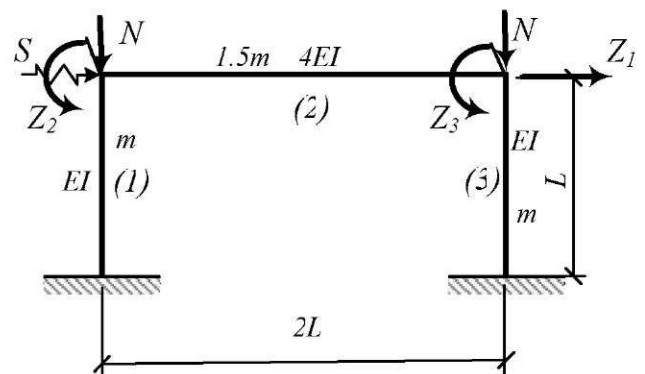


Рис.5.20. Расчетная схема рамы со сжатыми стойками при действии горизонтального импульса.



Матрица геометрической жесткости будет иметь вид:

$$K_G = \frac{N}{30L} \begin{bmatrix} 72 & 3L & 3L \\ 3L & 4L^2 & 0 \\ 3L & 0 & 4L^2 \end{bmatrix}. \quad (5.39)$$

После подстановки принятого значения  $N = \frac{5.7EI}{L^2}$  в (5.39) присваиваем новое значение матрице жесткости:

$$K := K - K_G.$$

Далее решение задачи точно следует решению предыдущего примера. Расчет выполним на ПЭВМ, используя программный пакет *Maple*:

```
> restart;
Исходные данные:
> EI:=2.*10^11*5010.*10^(-8): S0:=1: mm:=200.: g:=9.81: L:=3.:
N:=5.67397743*EI/L^2: gam:=0.025:
> with (LinearAlgebra) :
> m:=Matrix(3,3,mm*L/210*[[786,11*L,11*L],[11*L,26*L^2,-
18*L^2],[11*L,-18*L^2,26*L^2]],datatype=float[4]):
Вычисление собственных векторов матрицы m:
> Fi:=Matrix(3,3,EigenVectors(m,output=vectors),datatype=float[4]):
Вычисление собственных чисел матрицы m:
> LL:=Matrix(3,1,EigenValues(m,output=values),datatype=float[4]):
Матрица собственных чисел матрицы m:
> lambdaM:=Matrix(3,3,[[LL[1,1],0,0],[0,LL[2,1],0],[0,0,LL[3,1]]],datatype=
=float[4]):
Квадратный корень из матрицы собственных чисел матрицы m:
> lambdaM05:=Matrix(3,3,[[sqrt(lambdaM[1,1]),0,0],[0,sqrt(lambdaM[2,2]),0]
,[0,0,sqrt(lambdaM[3,3])]],datatype=float[4]):
Квадратный корень из матрицы m:
> m05:=Fi.lambdaM05.Transpose(Fi):
Квадратный корень из обратной матрицы m^-1:
> m_05:=Matrix(3,3,m05^(-1),datatype=float[4]):
Жесткость EI:
> EI:=2.*10^11*5010.*10^(-8):
Матрица жесткости рамы:
> K:=Matrix(3,3,2*EI/(L^3)*[[12,3*L,3*L],[3*L,6*L^2,2*L^2],[3*L,2*L^2,
6*L^2]],datatype=float[4]):

$$K := \begin{bmatrix} 0.8906667 \cdot 10^7 & 0.6680000 \cdot 10^7 & 0.6680000 \cdot 10^7 \\ 0.6680000 \cdot 10^7 & 0.40080000 \cdot 10^8 & 0.13360000 \cdot 10^8 \\ 0.6680000 \cdot 10^7 & 0.13360000 \cdot 10^8 & 0.40080000 \cdot 10^8 \end{bmatrix}$$

Матрица геометрической жесткости:
> KG:=Matrix(3,3,N/(30*L)*[[72,3*L,3*L],[3*L,4*L^2,0],[3*L,0,4*L^2]],d
atatype=float[4]);
```

$$KG := \begin{bmatrix} 0.505362250 \cdot 10^7 & 631702.813 & 631702.813 \\ 631702.813 & 0.252681125 \cdot 10^7 & 0. \\ 631702.813 & 0. & 0.252681125 \cdot 10^7 \end{bmatrix}$$

> **K:=K-KG;**

$$K := \begin{bmatrix} 0.3853044500 \cdot 10^7 & 0.6048297188 \cdot 10^7 & 0.6048297188 \cdot 10^7 \\ 0.6048297188 \cdot 10^7 & 0.3755318875 \cdot 10^8 & 0.13360000 \cdot 10^8 \\ 0.6048297188 \cdot 10^7 & 0.13360000 \cdot 10^8 & 0.3755318875 \cdot 10^8 \end{bmatrix}$$

Матрица *Km*:

> **Km:=Matrix(3,3,m\_05.K.m\_05,datatype=float[4]);**

$$Km := \begin{bmatrix} 1098.61206 & 698.208801 & 698.208801 \\ 698.208801 & 137167.219 & 115784.344 \\ 698.208801 & 115784.344 & 137167.219 \end{bmatrix}$$

Матрица собственных векторов матрицы *Km*:

> **Fi:=Matrix(3,3,Eigenvalues(Km,output=vectors),datatype=float[4]);**

$$Fi := \begin{bmatrix} -0.999992311 & 0.00392051646 & 0.160881117 \cdot 10^{-10} \\ 0.00277222367 & 0.707101345 & -0.707106769 \\ 0.00277222367 & 0.707101345 & 0.707106769 \end{bmatrix}$$

Собственные числа матрицы *Km*:

> **LL:=Matrix(3,1,Eigenvalues(Km,output=values),datatype=float[4]);**

Собственные частоты:

> **p1:=sqrt(LL[1,1]);**

$$p1 := 33.08686809$$

> **p3:=sqrt(LL[2,1]);**

$$p3 := 502.9467546$$

> **p2:=sqrt(LL[3,1]);**

$$p2 := 146.2288446$$

Собственные векторы:

> **Psi1:=Matrix(3,1,Fi.Matrix(3,1,[[1],[0],[0]],datatype=float[4]));**

$$\Psi1 := \begin{bmatrix} -0.999992311 \\ 0.00277222367 \\ 0.00277222367 \end{bmatrix}$$

> **Psi3:=Matrix(3,1,Fi.Matrix(3,1,[[0],[1],[0]],datatype=float[4]));**

$$\Psi3 := \begin{bmatrix} 0.00392051646 \\ 0.707101345 \\ 0.707101345 \end{bmatrix}$$

> **Psi2:=Matrix(3,1,Fi.Matrix(3,1,[[0],[0],[1]],datatype=float[4]));**

$$\Psi2 := \begin{bmatrix} 0.160881117 \cdot 10^{-10} \\ -0.707106769 \\ 0.707106769 \end{bmatrix}$$



Парциальные матрицы:

```
> H1:=Matrix(3,3,Psi1.Transpose(Psi1),datatype=float(4)) :  
> H2:=Matrix(3,3,Psi2.Transpose(Psi2),datatype=float(4)) :  
> H3:=Matrix(3,3,Psi3.Transpose(Psi3),datatype=float(4)) :
```

Амплитуды форм колебаний неизвестных:

```
> Az1:=m_05.H1.m_05.Matrix(3,1,[[S0],[0],[0]]) :  
> Az2:=m_05.H2.m_05.Matrix(3,1,[[S0],[0],[0]]) :  
> Az3:=m_05.H3.m_05.Matrix(3,1,[[S0],[0],[0]]) :
```

Матрица изгибающих моментов от единичных неизвестных Zi=1:

```
> MM:=Matrix(6,3,[[6*EI/L^2,2*EI/L,0],[-6*EI/L^2,-4*EI/L,0],[0,-8*EI/L,-4*EI/L],[0,4*EI/L,8*EI/L],[-6*EI/L^2,0,-4*EI/L],[6*EI/L^2,0,2*EI/L]]) :
```

Перемещения

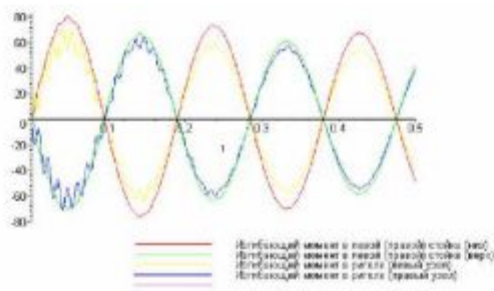
```
> Z:=Az1*exp(-gam*p1*t/2)*sin(p1*t)/(p1)+Az2*exp(-gam*p2*t/2)*sin(p2*t)/(p2)+Az3*exp(-gam*p3*t/2)*sin(p3*t)/(p3) :
```

Матрица расчетных изгибающих моментов:

```
> Mpac:=MM.Z :
```

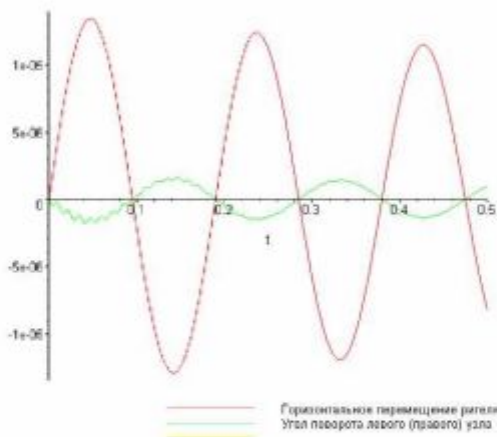
Графики изгибающих моментов в сечениях рамы:

```
> plot(Mpac,t=0..0.5) ;
```



Графики перемещений рамы:

```
> plot(Z,t=0..0.5) ;
```



Сравним результаты расчета без учета и с учетом сжимающих сил. Для удобства анализа графики обобщенных перемещений и изгибающих моментов приведены на рис.5.21 и 5.22. Из этих графиков видно, что перемещения и внутренние усилия при учете сжатия примерно в два раза выше, чем аналогичные значения для рам без учета сжимающих сил. Прав-

да, сжатие стоек принято значительным: сравнимым по порядку с критическим параметром для этой рамы.

Собственные частоты для рам с учетом сжатия отличаются от собственных частот рам без учета сжатия. Особенно сильно различаются низшие частоты, так первые частоты для рам без учета сжатия  $p_1=57\text{ рад/сек}$  и  $p_1=33\text{ рад/сек}$  для рам с учетом сжатия. Это говорит о том, что сжатием при расчете рам с сильно сжатыми элементами пренебрегать нельзя. То же самое можно сказать и о конструкциях с сильно растянутыми элементами. Мы рассмотрели нагрузку в виде мгновенного импульса. При этом воздействии очень просто вычисляется интеграл Дюамеля. В других случаях вычисление этого интеграла еще лет 10 – 15 назад могло поставить в тупик

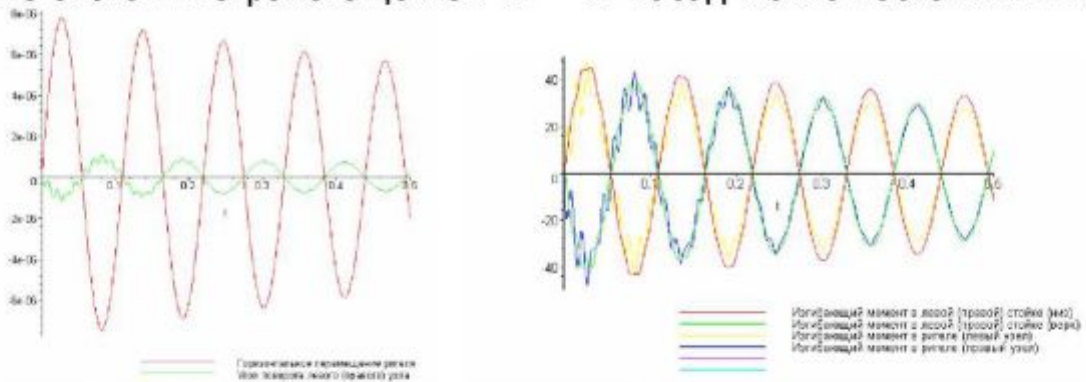


Рис.5.21. Результаты расчета рамы без учета сжатия стоек

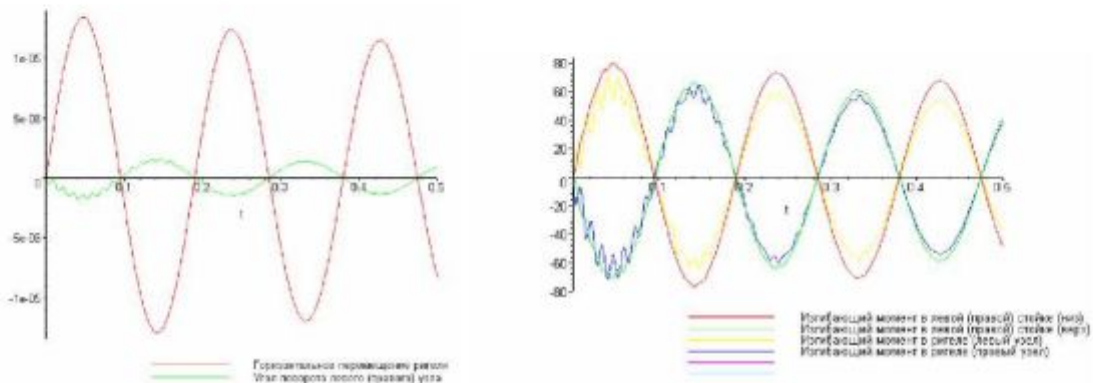


Рис.5.22. Результаты расчета рамы с сильно сжатыми стойками

многих расчетчиков, но в настоящее время при оснащении расчетчика современными ПК и программным обеспечением типа *Maple*, об этой проблеме можно забыть и спокойно браться за динамический расчет на любые воздействия. Учет поглощения энергии не в состоянии создать трудностей в расчете, поскольку, отпали трудности с вычислением интеграла Дюамеля и в расчетах строительных конструкций используется известная импульсная переходная функция, определяемая формулой (5.38).

Еще раз запишем решение уравнения движения (5.1):

$$\bar{Z} = \sqrt{m}^{-1} \left( \sum_1^n \lambda_j(t) \cdot H_j \right) \sqrt{m}^{-1} \cdot \bar{P}_0.$$

Обозначим

$$\bar{Z} = \sum_1^n \lambda_j(t) \cdot \bar{A}_{j}, \quad (5.40)$$

где  $\bar{A}_{j}$  - амплитуда по формам колебаний:

$$\bar{A}_{j} = \sqrt{m}^{-1} H_j \sqrt{m}^{-1} \cdot \bar{P}_0. \quad (5.41)$$

Формулу (5.41) мы уже использовали в программе расчета на импульсные воздействия. В расчетах приведенных ниже будем использовать и формулу (5.40), в которой вычисляем  $\lambda_j(t)$  через интеграл Дюамеля:

$$\lambda_j(t) = \int_0^t \frac{\exp(-i\gamma p_j(t-\tau))}{p_j} \sin(p_j(t-\tau)) \cdot f(\tau) d\tau,$$

где  $f(t)$  – функция нагрузки, определяемая из выражения  $\bar{P}(t) = \bar{P}_0 \cdot f(t)$ .

Для примера, рассмотрим расчет той же одноэтажной рамы, загруженной динамической нагрузкой, создаваемой электродвигателем с неуравновешенным ротором, например, электродвигателем вентилятора, установленного на крыше здания, вблизи опорной стойки рамы. Расчетная схема показана на рис.5.23.

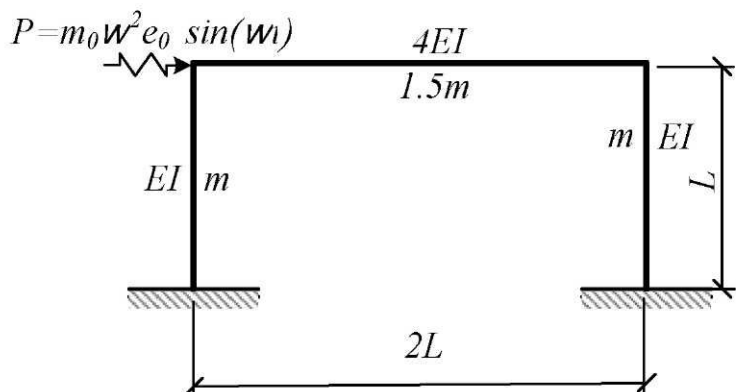


Рис.5.23. Воздействие неуравновешенной массы на узел одноэтажной рамы.

Нагрузка на раму принята в виде горизонтальной силы с амплитудой  $P_0 = m_0 \omega^2 e_0$ , где  $m_0$  – неуравновешенная масса,  $e_0$  – эксцентриситет неуравновешенной массы,  $\omega$  - круговая частота вращения двигателя.

Частоту вращения будем считать переменной, т.е. нагрузка не будет гармонической. Примем следующий закон изменения нагрузки: в промежутке

времени  $0 < t < T_0$  частота вращения двигателя равномерно нарастает  $0 < \omega < \omega_p$ ; в промежутке времени  $T_0 < t < 2T_0$  частота вращения двигателя остается постоянной, равной  $\omega_p$ , где  $\omega_p$  - рабочая частота вращения; и в промежутке времени  $2T_0 < t < 3T_0$  частота вращения двигателя равномерно убывает  $\omega_p > \omega > 0$ .

График, зависимости угловой скорости вращения вала двигателя от времени, приведен на рис.5.24. Закон изменения нагрузки при  $0 < t < T_0$ :

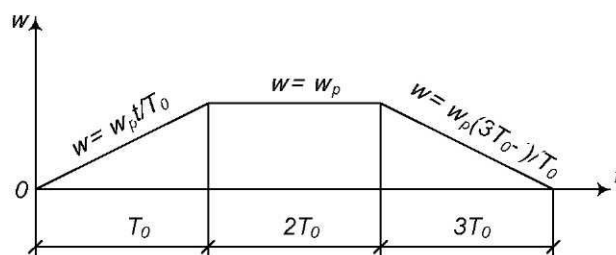


Рис.5.24. Закон изменения частоты вращения.



$$P(t) = \frac{m_0 \omega_p^2 e_0}{T_0^2} \sin(\omega_p t^2 / T_0) \cdot t^2,$$

при  $T_0 < t < 2T_0$ :

$$P(t) = m_0 \omega_p^2 e_0 \sin(\omega_p t),$$

при  $2T_0 < t < 3T_0$ :

$$P(t) = \frac{m_0 \omega_p^2 e_0}{T_0^2} \sin(\omega_p t(3T_0 - t)/T_0) \cdot (3T_0 - t)^2.$$

Обозначим  $P_0 = m_0 \omega_p^2 e_0$  - амплитуду возмущающей силы в рабочем режиме, тогда  $P(t) = P_0 f(t)$ , где:

$$f(t) = \frac{1}{T_0^2} \sin(\omega_p t^2 / T_0) \cdot t^2 \text{ при } 0 < t < T_0,$$

$$f(t) = \sin(\omega_p t) \text{ при } T_0 < t < 2T_0,$$

$$f(t) = \frac{1}{T_0^2} \sin(\omega_p t(3T_0 - t)/T_0) \cdot (3T_0 - t)^2 \text{ при } 2T_0 < t < 3T_0.$$

Проведем вычисления с помощью программного пакета *Maple*:  
при разгоне двигателя

> restart;

Исходные данные:

> S0:=1.: mm:=200.;L:=3.; P0:=3000.; T0:=1.; omega\_r:=104.6;  
gam:=0.025;

> with(LinearAlgebra):

> m:=Matrix(3,3,mm\*L/210\*[[786,11\*L,11\*L],[11\*L,26\*L^2,-  
18\*L^2],[11\*L,-18\*L^2,26\*L^2]],datatype=float[4]);

$$m := \begin{bmatrix} 2245.71436 & 94.2857132 & 94.2857132 \\ 94.2857132 & 668.571411 & -462.857147 \\ 94.2857132 & -462.857147 & 668.571411 \end{bmatrix}$$

Вычисление собственных векторов матрицы  $m$ :

> Fi:=Matrix(3,3,EigenVectors(m,output=vectors),datatype=float[4]):

Вычисление собственных чисел матрицы  $m$ :

> LL:=Matrix(3,1,Eigenvalues(m,output=values),datatype=float[4]):

Матрица собственных чисел матрицы  $m$ :

> lamb-

daM:=Matrix(3,3,[[LL[1,1],0,0],[0,LL[2,1],0],[0,0,LL[3,1]]],datatype=  
=float[4]):

Квадратный корень из матрицы собственных чисел матрицы  $m$ :

> lamb-

daM05:=Matrix(3,3,[[sqrt(lambdaM[1,1]),0,0],[0,sqrt(lambdaM[2,2]),0]  
,[0,0,sqrt(lambdaM[3,3])]],datatype=float[4]):

Квадратный корень из матрицы  $m$ :

> m05:=Fi.lambdam05.Transpose(Fi):

Квадратный корень из обратной матрицы  $m$ :

> m\_05:=Matrix(3,3,m05^(-1),datatype=float[4]);

$$m_{05} := \begin{bmatrix} 0.0212729741 & -0.00229964475 & -0.00229964475 \\ -0.00229964475 & 0.0503791720 & 0.0206497535 \\ -0.00229964475 & 0.0206497535 & 0.0503791720 \end{bmatrix}$$

Жесткость  $EI$ :

> EI:=2.\*10^11\*5010.\*10^(-8):

Матрица жесткости рамы:

>

K:=Matrix(3,3,2\*EI/(L^3)\*[[12,3\*L,3\*L],[3\*L,6\*L^2,2\*L^2],[3\*L,2\*L^2,6\*L^2]],datatype=float[4]);

$$K := \begin{bmatrix} 0.8906667 \cdot 10^7 & 0.6680000 \cdot 10^7 & 0.6680000 \cdot 10^7 \\ 0.6680000 \cdot 10^7 & 0.40080000 \cdot 10^8 & 0.13360000 \cdot 10^8 \\ 0.6680000 \cdot 10^7 & 0.13360000 \cdot 10^8 & 0.40080000 \cdot 10^8 \end{bmatrix}$$

Матрица  $Km$ :

> Km:=Matrix(3,3,m\_05.K.m\_05,datatype=float[4]);

$$Km := \begin{bmatrix} 3288.68848 & 999.433655 & 999.433655 \\ 999.433655 & 144478.234 & 120862.078 \\ 999.433655 & 120862.078 & 144478.234 \end{bmatrix}$$

Матрица собственных векторов матрицы  $Km$ :

> Fi:=Matrix(3,3,EigenVectors(Km,output=vectors),datatype=float[4]);

$$Fi := \begin{bmatrix} -0.999985456 & 0.00539340638 & 0. \\ 0.00381371449 & 0.707096517 & -0.707106769 \\ 0.00381371449 & 0.707096517 & 0.707106769 \end{bmatrix}$$

Собственные числа матрицы  $Km$ :

> LL:=Matrix(3,1,EigenValues(Km,output=values),datatype=float[4]);

$$LL := \begin{bmatrix} 3281.06519 \\ 265347.938 \\ 23616.1563 \end{bmatrix}$$

Собственные частоты:

> p1:=sqrt(LL[1,1]);

$$p1 := 57.28058301$$

> p3:=sqrt(LL[2,1]);

$$p3 := 515.1193435$$

> p2:=sqrt(LL[3,1]);

$$p2 := 153.6754902$$

Собственные векторы:

> Psi1:=Matrix(3,1,Fi.Matrix(3,1,[[1],[0],[0]],datatype=float[4]));

$$\Psi1 := \begin{bmatrix} -0.999985456 \\ 0.00381371449 \\ 0.00381371449 \end{bmatrix}$$



> Psi3:=Matrix(3,1,Fi.Matrix(3,1,[[0],[1],[0]],datatype=float[4]));

$$\Psi_3 := \begin{bmatrix} 0.00539340638 \\ 0.707096517 \\ 0.707096517 \end{bmatrix}$$

> Psi2:=Matrix(3,1,Fi.Matrix(3,1,[[0],[0],[1]],datatype=float[4]));

$$\Psi_2 := \begin{bmatrix} 0. \\ -0.707106769 \\ 0.707106769 \end{bmatrix}$$

Парциальные матрицы:

> H1:=Matrix(3,3,Psi1.Transpose(Psi1),datatype=float[4]);

$$H1 := \begin{bmatrix} 0.999970913 & -0.00381365907 & -0.00381365907 \\ -0.00381365907 & 0.0000145444183 & 0.0000145444183 \\ -0.00381365907 & 0.0000145444183 & 0.0000145444183 \end{bmatrix}$$

> H2:=Matrix(3,3,Psi2.Transpose(Psi2),datatype=float[4]);

$$H2 := \begin{bmatrix} 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0.499999970 & -0.499999970 \\ 0. & -0.499999970 & 0.499999970 \end{bmatrix}$$

> H3:=Matrix(3,3,Psi3.Transpose(Psi3),datatype=float[4]);

$$H3 := \begin{bmatrix} 0.0000290888329 & 0.00381365884 & 0.00381365884 \\ 0.00381365884 & 0.499985486 & 0.499985486 \\ 0.00381365884 & 0.499985486 & 0.499985486 \end{bmatrix}$$

Амплитуды форм колебаний неизвестных:

> Az1:=m\_05.H1.m\_05.Matrix(3,1,[[1.],[0],[0]]);

$$Az1 := \begin{bmatrix} 0.000453272832699999997 \\ -0.0000547263732000000010 \\ -0.0000547263732000000010 \end{bmatrix}$$

> Az2:=m\_05.H2.m\_05.Matrix(3,1,[[1.],[0],[0]]);

$$Az2 := \begin{bmatrix} 0. \\ 0. \\ 0. \end{bmatrix}$$

> Az3:=m\_05.H3.m\_05.Matrix(3,1,[[1.],[0],[0]]);

$$Az3 := \begin{bmatrix} 0.9843327693000000067 \cdot 10^{-5} \\ -0.000157535215999999994 \\ -0.000157535215999999994 \end{bmatrix}$$

Интегралы Дюамеля  $\lambda_j(t) \rightarrow L_j(t)$ :

> L1(t):=P0/(p1\*T0^2)\*Int(exp(-gam\*p1\*(t-x)/2)\*sin(p1\*(t-x))\*sin(omega\_r\*x^2/T0)\*x^2,x=0..t):

> L2(t):=P0/(p2\*T0^2)\*Int(exp(-gam\*p2\*(t-x)/2)\*sin(p2\*(t-x))\*sin(omega\_r\*x^2/T0)\*x^2,x=0..t):



```
> L3(t) := P0 / (p3 * T0^2) * Int (exp (-gam * p3 * (t-x) / 2) * sin (p3 * (t-x)) * sin (omega_r * x^2 / T0) * x^2, x=0..t) :
```

Матрица изгибающих моментов от единичных неизвестных  $Z_i=1$ :

```
> MM:=Matrix(6,3,[[6*EI/L^2,2*EI/L,0],[-6*EI/L^2,-4*EI/L,0],[0,-8*EI/L,-4*EI/L],[0,4*EI/L,8*EI/L],[-6*EI/L^2,0,-4*EI/L],[6*EI/L^2,0,2*EI/L]]) :
```

Перемещения:

```
> Z:=Az1*L1(t)+Az2*L2(t)+Az3*L3(t) :
```

Матрица расчетных изгибающих моментов:

```
> Mрас:=MM.Z :
```

Графики изгибающих моментов в сечениях рамы Mрас:

```
> plot (Mрас, t=0..T0) ;
```

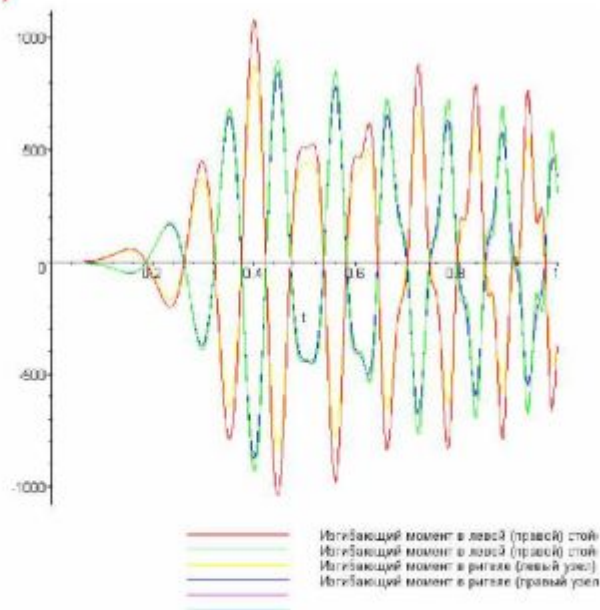
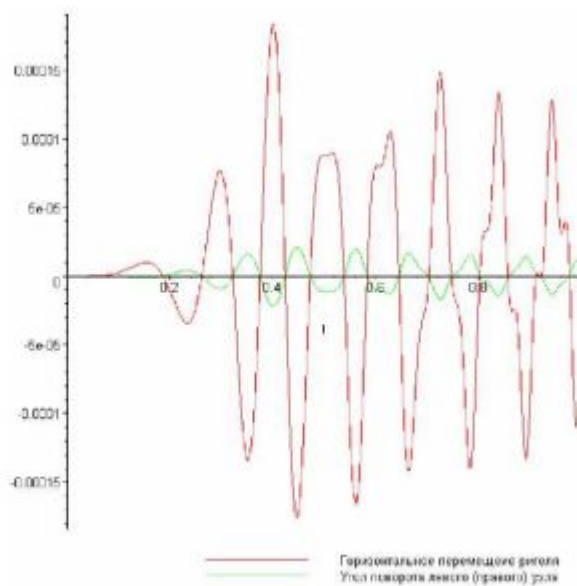


График обобщенных перемещений  $Z_i$ :

```
> plot (Z, t=0..T0) ;
```



при стационарном нагружении

```
> restart;
```

Исходные данные:

```
> S0:=1.: mm:=200.: L:=3.: P0:=3000.: T0:=1.: omega_r:=104.6:  
gam:=0.025:
```

```
> with(LinearAlgebra):
```

```
> m:=Matrix(3,3,mm*L/210*[[786,11*L,11*L],[11*L,26*L^2,-  
18*L^2],[11*L,-18*L^2,26*L^2]],datatype=float[4]):
```

Вычисление собственных векторов матрицы  $m$ :

```
> Fi:=Matrix(3,3,EigenVectors(m,output=vectors),datatype=float[4]):
```

Вычисление собственных чисел матрицы  $m$ :

```
> LL:=Matrix(3,1,EigenVectors(m,output=values),datatype=float[4]):
```

Матрица собственных чисел матрицы  $m$ :

```
> lamb-
```

```
daM:=Matrix(3,3,[[LL[1,1],0,0],[0,LL[2,1],0],[0,0,LL[3,1]]],datatype  
=float[4]):
```

Квадратный корень из матрицы собственных чисел матрицы  $m$ :

```
> lamb-
```

```
daM05:=Matrix(3,3,[[sqrt(lambdaM[1,1]),0,0],[0,sqrt(lambdaM[2,2]),0]  
,[0,0,sqrt(lambdaM[3,3])]],datatype=float[4]):
```

Квадратный корень из матрицы  $m$ :

```
> m05:=Fi.lambM05.Transpose(Fi):
```

Квадратный корень из обратной матрицы  $m$ :

```
> m_05:=Matrix(3,3,m05^(-1),datatype=float[4]):
```

Жесткость  $EI$ :

```
> EI:=2.*10^11*5010.*10^(-8):
```

Матрица жесткости рамы:

```
>
```

```
K:=Matrix(3,3,2*EI/(L^3)*[[12,3*L,3*L],[3*L,6*L^2,2*L^2],[3*L,2*L^2,  
6*L^2]],datatype=float[4]):
```

Матрица  $Km$ :

```
> Km:=Matrix(3,3,m_05.K.m_05,datatype=float[4]):
```

Матрица собственных векторов матрицы  $Km$ :

```
> Fi:=Matrix(3,3,EigenVectors(Km,output=vectors),datatype=float[4]):
```

Собственные числа матрицы  $Km$ :

```
> LL:=Matrix(3,1,EigenVectors(Km,output=values),datatype=float[4]):
```

Собственные частоты:

```
> p1:=sqrt(LL[1,1]):
```

```
> p3:=sqrt(LL[2,1]):
```

```
> p2:=sqrt(LL[3,1]):
```

Собственные векторы:

```
> Psi1:=Matrix(3,1,Fi.Matrix(3,1,[[1],[0],[0]],datatype=float[4])):
```

```
> Psi3:=Matrix(3,1,Fi.Matrix(3,1,[[0],[1],[0]],datatype=float[4])):
```

```
> Psi2:=Matrix(3,1,Fi.Matrix(3,1,[[0],[0],[1]],datatype=float[4])):
```

Парциальные матрицы:

```
> H1:=Matrix(3,3,Psi1.Transpose(Psi1),datatype=float[4]):
```

```
> H2:=Matrix(3,3,Psi2.Transpose(Psi2),datatype=float[4]):
```

```
> H3:=Matrix(3,3,Psi3.Transpose(Psi3),datatype=float[4]):
```



Амплитуды форм колебаний неизвестных:

```
> Az1:=m_05.H1.m_05.Matrix(3,1,[[1.],[0],[0]]):
> Az2:=m_05.H2.m_05.Matrix(3,1,[[1.],[0],[0]]):
> Az3:=m_05.H3.m_05.Matrix(3,1,[[1],[0],[0]]):
> L1(t):=P0/(p1*T0^2)*Int(exp(-gam*p1*(t-x)/2)*sin(p1*(t-x))*sin(omega_r*x^2/T0)*x^2,x=0..T0)+P0/(p1)*Int(exp(-gam*p1*(t-x)/2)*sin(p1*(t-x))*sin(omega_r*x),x=T0..t):
> L2(t):=P0/(p2*T0^2)*Int(exp(-gam*p2*(t-x)/2)*sin(p2*(t-x))*sin(omega_r*x^2/T0)*x^2,x=0..T0)+P0/(p2)*Int(exp(-gam*p2*(t-x)/2)*sin(p2*(t-x))*sin(omega_r*x),x=T0..t):
> L3(t):=P0/(p3*T0^2)*Int(exp(-gam*p3*(t-x)/2)*sin(p3*(t-x))*sin(omega_r*x^2/T0)*x^2,x=0..T0)+P0/(p3)*Int(exp(-gam*p3*(t-x)/2)*sin(p3*(t-x))*sin(omega_r*x),x=T0..t):
```

Матрица изгибающих моментов от единичных неизвестных  $Z_i=1$ :

```
> MM:=Matrix(6,3,[[6*EI/L^2,2*EI/L,0],[-6*EI/L^2,-4*EI/L,0],[0,-8*EI/L,-4*EI/L],[0,4*EI/L,8*EI/L],[-6*EI/L^2,0,-4*EI/L],[6*EI/L^2,0,2*EI/L]]):
```

Перемещения:

```
> Z:=Az1*L1(t)+Az2*L2(t)+Az3*L3(t):
```

Матрица расчетных изгибающих моментов:

```
> Mpac:=MM.Z:
```

Графики изгибающих моментов в сечениях рамы Mpac:

```
> plot(Mpac,t=T0..2*T0);
```

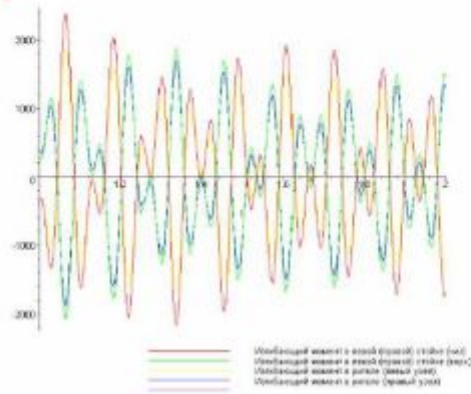
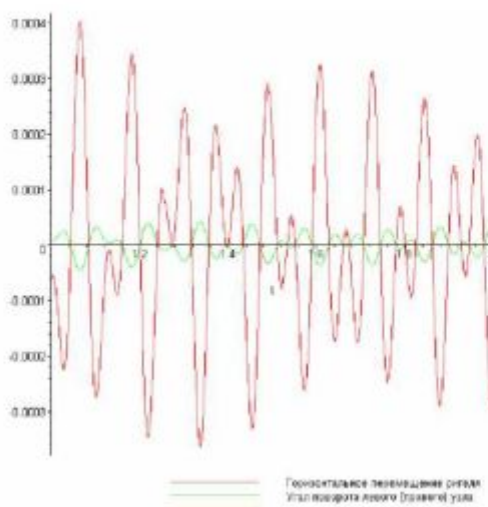


График обобщенных перемещений  $Z_i$ :

```
> plot(Z,t=T0..2*T0);
```



при торможении двигателя

```
> restart;
```

Исходные данные:

```
> S0:=1.: mm:=200.: L:=3.: P0:=3000.: T0:=1.: omega_r:=104.6:
```

```
gam:=0.025:
```

```
> with(LinearAlgebra):
```

```
> m:=Matrix(3,3,mm*L/210*[[786,11*L,11*L],[11*L,26*L^2,-  
18*L^2],[11*L,-18*L^2,26*L^2]],datatype=float[4]):
```

Вычисление собственных векторов матрицы  $m$ :

```
> Fi:=Matrix(3,3,EigenVectors(m,output=vectors),datatype=float[4]):
```

Вычисление собственных чисел матрицы  $m$ :

```
> LL:=Matrix(3,1,EigenVectors(m,output=values),datatype=float[4]):
```

Матрица собственных чисел матрицы  $m$ :

```
> lamb-
```

```
daM:=Matrix(3,3,[[LL[1,1],0,0],[0,LL[2,1],0],[0,0,LL[3,1]]],datatype=  
=float[4]):
```

Квадратный корень из матрицы собственных чисел матрицы  $m$ :

```
> lamb-
```

```
daM05:=Matrix(3,3,[[sqrt(lambdaM[1,1]),0,0],[0,sqrt(lambdaM[2,2]),0]  
,[0,0,sqrt(lambdaM[3,3])]],datatype=float[4]):
```

Квадратный корень из матрицы  $m$ :

```
> m05:=Fi.lambM05.Transpose(Fi):
```

Квадратный корень из обратной матрицы  $m$ :

```
> m_05:=Matrix(3,3,m05^(-1),datatype=float[4]):
```

Жесткость  $EI$ :

```
> EI:=2.*10^11*5010.*10^(-8):
```

Матрица жесткости рамы:

```
>
```

```
K:=Matrix(3,3,2*EI/(L^3)*[[12,3*L,3*L],[3*L,6*L^2,2*L^2],[3*L,2*L^2,  
6*L^2]],datatype=float[4]):
```

Матрица  $Km$ :

```
> Km:=Matrix(3,3,m_05.K.m_05,datatype=float[4]):
```

Матрица собственных векторов матрицы  $Km$ :

```
> Fi:=Matrix(3,3,EigenVectors(Km,output=vectors),datatype=float[4]):
```

Собственные числа матрицы  $Km$ :

```
> LL:=Matrix(3,1,EigenVectors(Km,output=values),datatype=float[4]):
```

Собственные частоты:

```
> p1:=sqrt(LL[1,1]):
```

```
> p3:=sqrt(LL[2,1]):
```

```
> p2:=sqrt(LL[3,1]):
```

Собственные векторы:

```
> Psi1:=Matrix(3,1,Fi.Matrix(3,1,[[1],[0],[0]],datatype=float[4])):
```

```
> Psi3:=Matrix(3,1,Fi.Matrix(3,1,[[0],[1],[0]],datatype=float[4])):
```



```
> Psi2:=Matrix(3,1,Fi.Matrix(3,1,[[0],[0],[1]],datatype=float[4])):
```

Парциальные матрицы:

```
> H1:=Matrix(3,3,Psi1.Transpose(Psi1),datatype=float[4]):
```

```
> H2:=Matrix(3,3,Psi2.Transpose(Psi2),datatype=float[4]):
```

```
> H3:=Matrix(3,3,Psi3.Transpose(Psi3),datatype=float[4]):
```

Амплитуды форм колебаний неизвестных:

```
> Az1:=m_05.H1.m_05.Matrix(3,1,[[1],[0],[0]]):
```

```
> Az2:=m_05.H2.m_05.Matrix(3,1,[[1],[0],[0]]):
```

```
> Az3:=m_05.H3.m_05.Matrix(3,1,[[1],[0],[0]]):
```

Интегралы Дюамеля  $\lambda_j(t) \rightarrow L_j(t)$ :

```
> L1(t):=P0/(p1*T0^2)*Int(exp(-gam*p1*(t-x)/2)*sin(p1*(t-x))*sin(omega_r*x^2/T0)*x^2,x=0..T0)+P0/(p1)*Int(exp(-gam*p1*(t-x)/2)*sin(p1*(t-x))*sin(omega_r*x),x=T0..2*T0)+P0/(p1*T0^2)*Int(exp(-gam*p1*(t-x)/2)*sin(p1*(t-x))*sin(omega_r*x*(3*T0-x)/T0)*(3*T0-x)^2,x=2*T0..t):
```

```
> L2(t):=P0/(p2*T0^2)*Int(exp(-gam*p2*(t-x)/2)*sin(p2*(t-x))*sin(omega_r*x^2/T0)*x^2,x=0..T0)+P0/(p2)*Int(exp(-gam*p2*(t-x)/2)*sin(p2*(t-x))*sin(omega_r*x),x=T0..2*T0)+P0/(p2*T0^2)*Int(exp(-gam*p2*(t-x)/2)*sin(p2*(t-x))*sin(omega_r*x*(3*T0-x)/T0)*(3*T0-x)^2,x=2*T0..t):
```

```
> L3(t):=P0/(p3*T0^2)*Int(exp(-gam*p3*(t-x)/2)*sin(p3*(t-x))*sin(omega_r*x^2/T0)*x^2,x=0..T0)+P0/(p3)*Int(exp(-gam*p3*(t-x)/2)*sin(p3*(t-x))*sin(omega_r*x),x=T0..2*T0)+P0/(p3*T0^2)*Int(exp(-gam*p3*(t-x)/2)*sin(p3*(t-x))*sin(omega_r*x*(3*T0-x)/T0)*(3*T0-x)^2,x=2*T0..t):
```

Матрица изгибающих моментов от единичных неизвестных  $Z_i=1$ :

```
> MM:=Matrix(6,3,[[6*EI/L^2,2*EI/L,0],[-6*EI/L^2,-4*EI/L,0],[0,-8*EI/L,-4*EI/L],[0,4*EI/L,8*EI/L],[-6*EI/L^2,0,-4*EI/L],[6*EI/L^2,0,2*EI/L]]):
```

Перемещения:

```
> Z:=Az1*L1(t)+Az2*L2(t)+Az3*L3(t):
```

Матрица расчетных изгибающих моментов:

```
> Mрас:=MM.Z:
```

Графики изгибающих моментов в сечениях рамы Mрас:

```
> plot(Mрас,t=2*T0..3*T0);
```

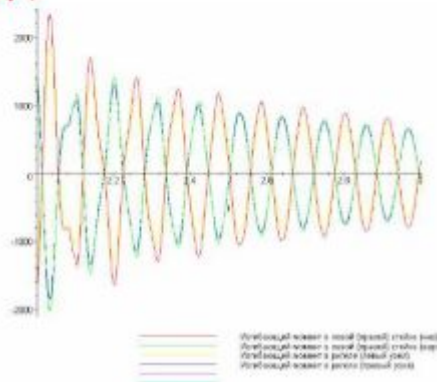
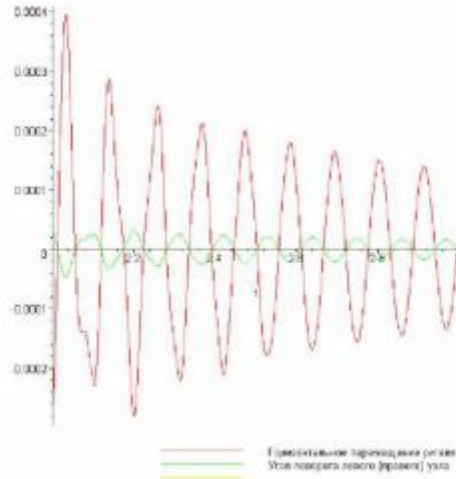


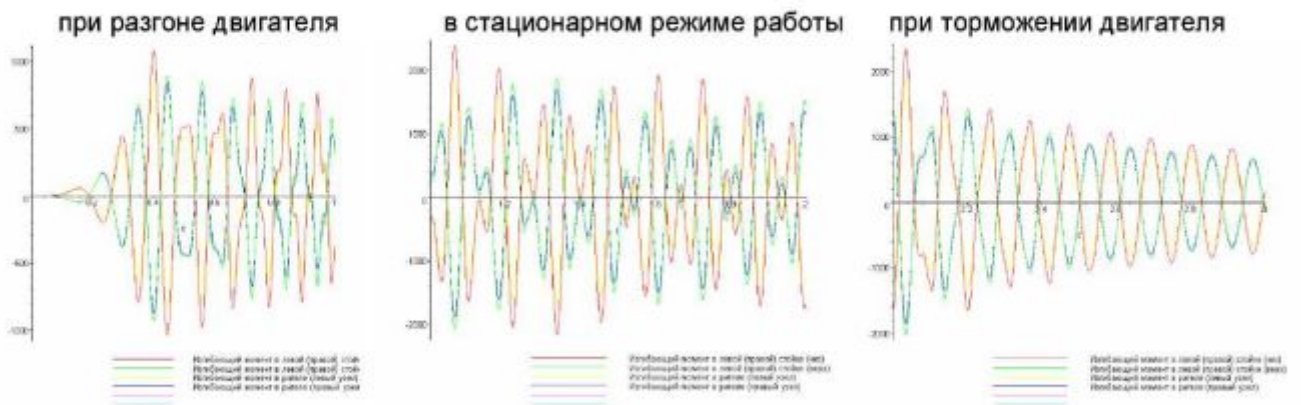
График обобщенных перемещений  $Z_i$ :

`> plot(Z, t=2*T0..3*T0);`



Для анализа результатов расчетов покажем все графики на одном рис.5.25

### Изгибающие моменты в сечениях рамы



### Перемещения узлов рамы



Рис.5.25. Результаты расчета рамы в переходных режимах работы

Из этих графиков видно, что наибольшие усилия и перемещения достигаются при переходе двигателя с режима разгона в стационарный режим и из стационарного режима в режим торможения. Именно и эти моменты внутренние усилия и перемещения достигают наибольших величин.

Рассмотрим стационарные колебания конструкций под действием гармонической нагрузки

$$\bar{P}(t) = \bar{P}_0 \exp(i\omega t). \quad (5.42)$$

Стационарные колебания это колебания конструкций, происходящие в моменты времени после полного затухания свободных колебаний, то есть силы  $\bar{P}_0 \exp(i\omega t)$  действуют очень долго и мы вправе искать решение уравнения (5.1) без учета свободных колебаний. Решение уравнения (5.1) при нагрузке (5.42) ищем в виде:

$$\bar{Z}(t) = \bar{Z}_0 \cdot \exp(i\omega t). \quad (5.43)$$

После подстановки (5.43) в (5.1) после сокращения  $\exp(i\omega t)$  на получим:

$$-\omega^2 m \bar{Z}_0 + i\omega \Gamma \bar{Z}_0 + K \bar{Z}_0 = \bar{P}_0. \quad (5.44)$$

К решению последнего уравнения применим метод разложения по собственным формам. Решение ищем и виде:

$$\bar{Z}_0 = \Phi \cdot \bar{a}_0. \quad (5.45)$$

После подстановки (5.45) в (5.44), умножения слева на  $\Phi^T$  получаем:

$$-\omega^2 \Phi^T m \Phi \bar{a}_0 + i\omega \cdot \Phi^T \Gamma \Phi \bar{a}_0 + \Phi^T K \Phi \bar{a}_0 = \Phi^T \bar{P}_0, \quad (5.46)$$

но, если  $\Phi$  есть собственные формы отвечающие зависимостям

$$\Phi^T m \Phi \bar{a}_0 = E, \quad \Phi^T K \Phi = \Lambda = p^2, \quad (5.47)$$

а

$$\Phi^T \Gamma \Phi = \Lambda_\gamma = f(\Lambda) = \varphi(p).$$

Для частотно-независимого демпфирования по (5.34) принимаем

$$\varphi(p) = \gamma p.$$

После подстановки (5.34) в (5.47), а затем в (5.46) получаем

$$[-\omega^2 + i\gamma\omega p + p^2] \cdot \bar{a}_0 = \Phi^T \bar{P}_0. \quad (5.48)$$

Поскольку матрица частот диагональная, то матрицы  $[-\omega^2 + i\gamma\omega p + p^2]$  и обратная ей матрица тоже диагональные. Обозначим

$$\text{diag}[\Phi^*(\omega)] = [-\omega^2 + i\gamma\omega p + p^2]^{-1} \quad (5.49)$$

и назовем её передаточной матрицей. Диагональные, ненулевые элементы этой матрицы

$$\Phi_j^*(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + i\gamma\omega p_j + p_j^2} -$$

комплексные величины, представляющие собой передаточные функции по соответствующим формам.

Из (5.48) с учетом (5.49) получаем



$$\bar{a}_0 = \text{diag}[\Phi^*(\omega)] \Phi^T \bar{P}_0. \quad (5.50)$$

После подстановки (5.50) в (5.45) находим:

$$\bar{Z}_0 = \Phi \cdot \text{diag}[\Phi^*(\omega)] \cdot \Phi^T \bar{P}_0. \quad (5.51)$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \Phi \cdot \text{diag}[\Phi^*(\omega)] \cdot \Phi^T &= \sqrt{m}^{-1} \left( \sum_1^n \Phi_j^*(\omega) \cdot \Psi_j \Psi_j^T \right) \sqrt{m}^{-1} = \sum_1^n \Phi_j^* \sqrt{m}^{-1} H_j \sqrt{m}^{-1}, \\ \bar{Z}_0 &= \sum_1^n \Phi_j^* \sqrt{m}^{-1} H_j \sqrt{m}^{-1} \bar{P}_0 = \sum_1^n \Phi_j^* \bar{A}_{zj}, \end{aligned} \quad (5.52)$$

где

$$\bar{A}_{zj} = \sqrt{m}^{-1} H_j \sqrt{m}^{-1} \bar{P} -$$

амплитуды по формам.

Для примера рассмотрим раму, показанную на рис.5.23, при действии горизонтальной, гармонической силы  $P(t) = P_0 \exp(i\omega t)$ . Найдем амплитуды перемещений узлов и амплитуды изгибающих моментов в сечениях 1 – 6,

Расчет выполним, используя программный пакет *Maple*.

> restart;

Исходные данные: *mm* - распределенная масса в *H/m*, *L* - размер в *m* (высота стойки), *P0* - амплитуда нагрузки *kH*, *gam* - коэффициент потерь.

> mm:=200.: L:=3.: P0:=3000.: gam:=0.025:

> with(LinearAlgebra):

> m:=Matrix(3,3,mm\*L/210\*[[786,11\*L,11\*L],[11\*L,26\*L^2,-18\*L^2],[11\*L,-18\*L^2,26\*L^2]],datatype=float[4]):

Вычисление собственных векторов матрицы *m*:

> Fi:=Matrix(3,3,EigenVectors(m,output=vectors),datatype=float[4]):

Вычисление собственных чисел матрицы *m*:

> LL:=Matrix(3,1,EigenValues(m,output=values),datatype=float[4]):

Матрица собственных чисел матрицы *m*:

> lamb-

daM:=Matrix(3,3,[[LL[1,1],0,0],[0,LL[2,1],0],[0,0,LL[3,1]]],datatype=float[4]):

Квадратный корень из матрицы собственных чисел матрицы *m*:

> lamb-

daM05:=Matrix(3,3,[[sqrt(lambdaM[1,1]),0,0],[0,sqrt(lambdaM[2,2]),0],[0,0,sqrt(lambdaM[3,3])]],datatype=float[4]):

Квадратный корень из матрицы *m*:

> m05:=Fi.lambM05.Transpose(Fi):

Квадратный корень из обратной матрицы *m*:

> m\_05:=Matrix(3,3,m05^(-1),datatype=float[4]):

Жесткость *EI*:

> EI:=2.\*10^11\*5010.\*10^(-8):

Матрица жесткости рамы:

>

K:=Matrix(3,3,2\*EI/(L^3)\*[[12,3\*L,3\*L],[3\*L,6\*L^2,2\*L^2],[3\*L,2\*L^2,6\*L^2]],datatype=float[4]):

Матрица *Km*:

> Km:=Matrix(3,3,m\_05.K.m\_05,datatype=float[4]):



Матрица собственных векторов матрицы  $Km$ :

```
> Fi:=Matrix(3,3,Eigenvectors(Km,output=vectors),datatype=float[4]):
```

Собственные числа матрицы  $Km$ :

```
> LL:=Matrix(3,1,Eigenvalues(Km,output=values),datatype=float[4]):
```

Собственные частоты:

```
> p1:=sqrt(LL[1,1]):
```

```
> p3:=sqrt(LL[2,1]):
```

```
> p2:=sqrt(LL[3,1]):
```

Собственные векторы:

```
> Psi1:=Matrix(3,1,Fi.Matrix(3,1,[[1],[0],[0]],datatype=float[4])):
```

```
> Psi3:=Matrix(3,1,Fi.Matrix(3,1,[[0],[1],[0]],datatype=float[4])):
```

```
> Psi2:=Matrix(3,1,Fi.Matrix(3,1,[[0],[0],[1]],datatype=float[4])):
```

Парциальные матрицы:

```
> H1:=Matrix(3,3,Psi1.Transpose(Psi1),datatype=float[4]):
```

```
> H2:=Matrix(3,3,Psi2.Transpose(Psi2),datatype=float[4]):
```

```
> H3:=Matrix(3,3,Psi3.Transpose(Psi3),datatype=float[4]):
```

Амплитуды форм колебаний неизвестных:

```
> Az1:=m_05.H1.m_05.Matrix(3,1,[[P0],[0.],[0.]]):
```

```
> Az2:=m_05.H2.m_05.Matrix(3,1,[[P0],[0.],[0.]]):
```

```
> Az3:=m_05.H3.m_05.Matrix(3,1,[[P0],[0.],[0.]]):
```

```
> Fi1(omega):=1/(p1^2-omega^2+I*gam*p1*omega):
```

```
> Fi2(omega):=1/(p2^2-omega^2+I*gam*p2*omega):
```

```
> Fi3(omega):=1/(p3^2-omega^2+I*gam*p3*omega):
```

Матрица изгибающих моментов от единичных неизвестных  $Z_i=1$ :

```
> MM:=Matrix(6,3,[[6*EI/L^2,2*EI/L,0],[-6*EI/L^2,-4*EI/L,0],[0,-8*EI/L,-4*EI/L],[0,4*EI/L,8*EI/L],[-6*EI/L^2,0,-4*EI/L],[6*EI/L^2,0,2*EI/L]]):
```

Перемещения:

```
> Z:=Az1*Fi1(omega)+Az2*Fi2(omega)+Az3*Fi3(omega):
```

Матрица расчетных изгибающих моментов:

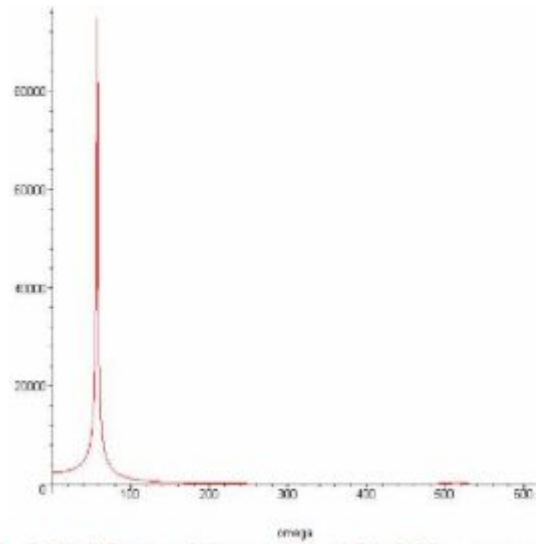
```
> Mpac:=MM.Z:
```

Графики изгибающих моментов в сечениях рамы Mpac:

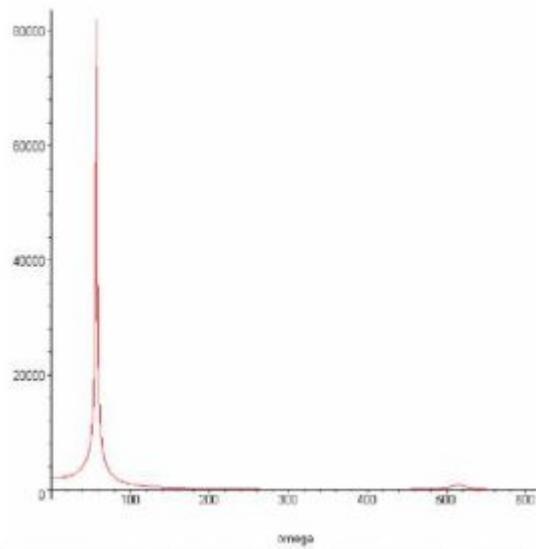
```
>
```

```
M0pac:=Matrix(6,1,[[sqrt(Re(Mpac[1,1])^2+Im(Mpac[1,1])^2)],[sqrt(Re(Mpac[2,1])^2+Im(Mpac[2,1])^2)],[sqrt(Re(Mpac[3,1])^2+Im(Mpac[3,1])^2)],[sqrt(Re(Mpac[4,1])^2+Im(Mpac[4,1])^2)],[sqrt(Re(Mpac[5,1])^2+Im(Mpac[5,1])^2)],[sqrt(Re(Mpac[6,1])^2+Im(Mpac[6,1])^2)]]):
```

```
> plot(sqrt(Re(Mpac[1,1])^2+Im(Mpac[1,1])^2),omega=0...1.2*p3);
```



```
> plot(sqrt(Re(Mpac[2,1])^2+Im(Mpac[2,1])^2), omega=0...1.2*p3);
```



```
> plot(sqrt(Re(Mpac[3,1])^2+Im(Mpac[3,1])^2), omega=0...1.2*p3);
```

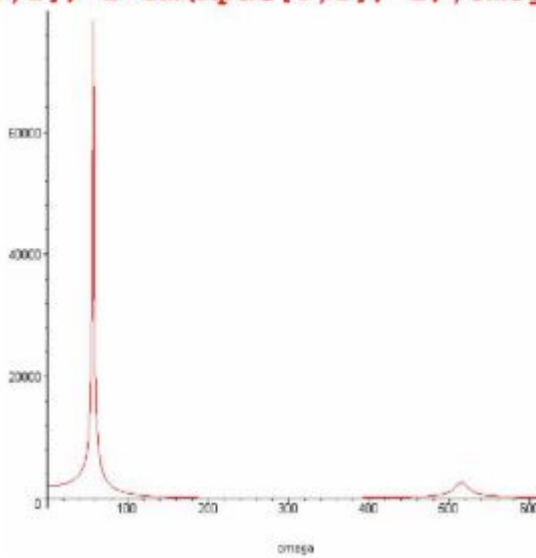
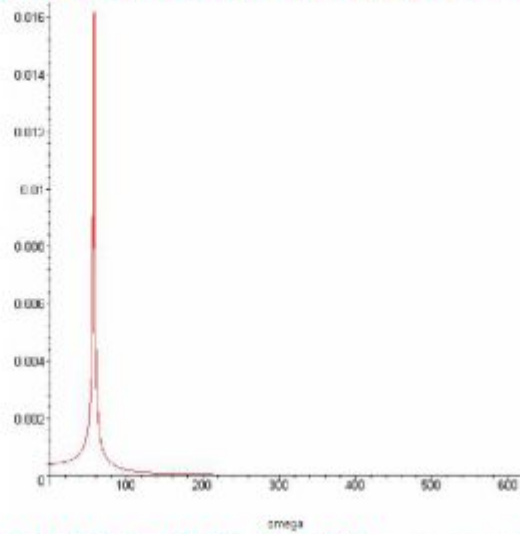
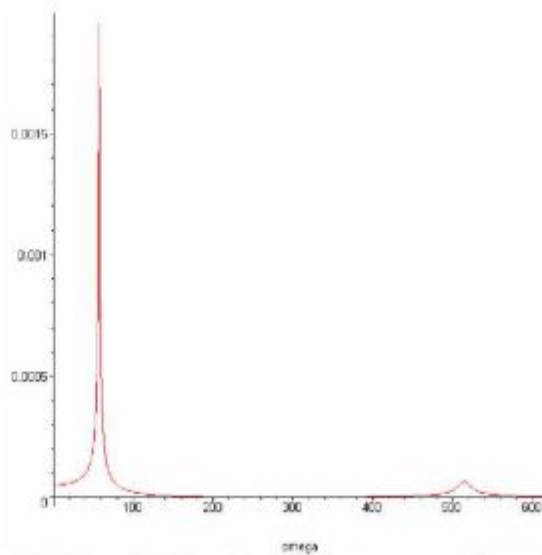


График обобщенных перемещений  $Z_i$ :

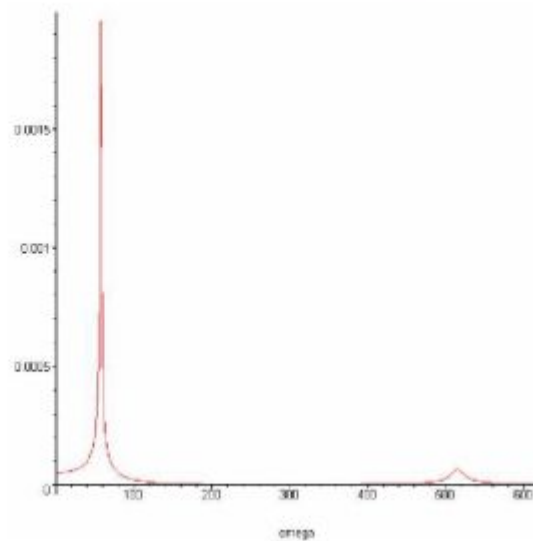
```
> plot(sqrt(Re(Z[1,1])^2+Im(Z[1,1])^2), omega=0..1.2*p3);
```



```
> plot(sqrt(Re(Z[2,1])^2+Im(Z[2,1])^2), omega=0...1.2*p3);
```



```
> plot(sqrt(Re(Z[3,1])^2+Im(Z[3,1])^2), omega=0...1.2*p3);
```



Амплитуды изгибающих моментов при первом резонансе:

```
> omega := p1 ;
```

```
omega := 57.28058301
```

```
> M0pac ;
```

```
97369.21436  
83998.93336  
80221.73404  
80221.73404  
83998.93336  
97369.21436
```

По результатам расчета построим эпюру амплитуд изгибающих моментов при первом резонансе  $\omega = p_1$  (рис.5.26). Основное отличие динамической эпюры изгибающих моментов от статической эпюры состоит в том, что изгибающие моменты в узлах рамы в стойках не равны изгибающим моментам в ригеле. Это связано с наличием узловых сил инерции, равнодействующая которых приводится к паре сил. Согласно принципу Даламбера совокупность внутренних сил упругости и сил инерции, действующих на узел должна быть равна нулю.

На рис.5.27 показаны графики амплитуд изгибающих моментов и графики амплитуд перемещений в характерных точках рамы в зависимости от частоты колебаний.

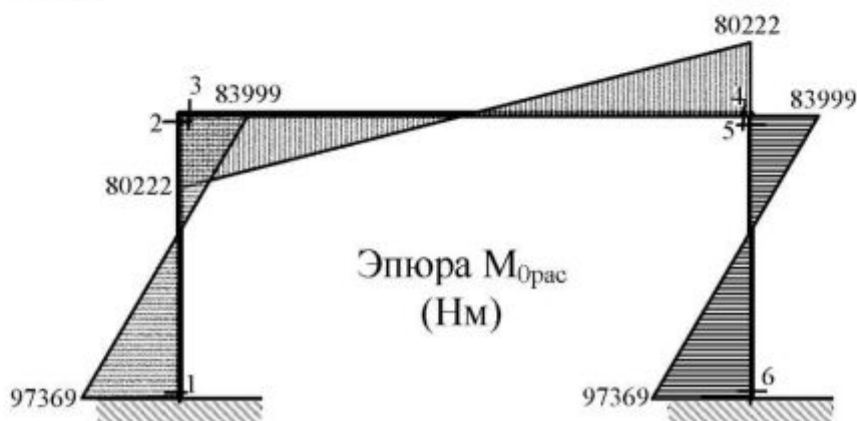


Рис.5.26. Эпюра амплитуд изгибающих моментов в раме при первом резонансе.



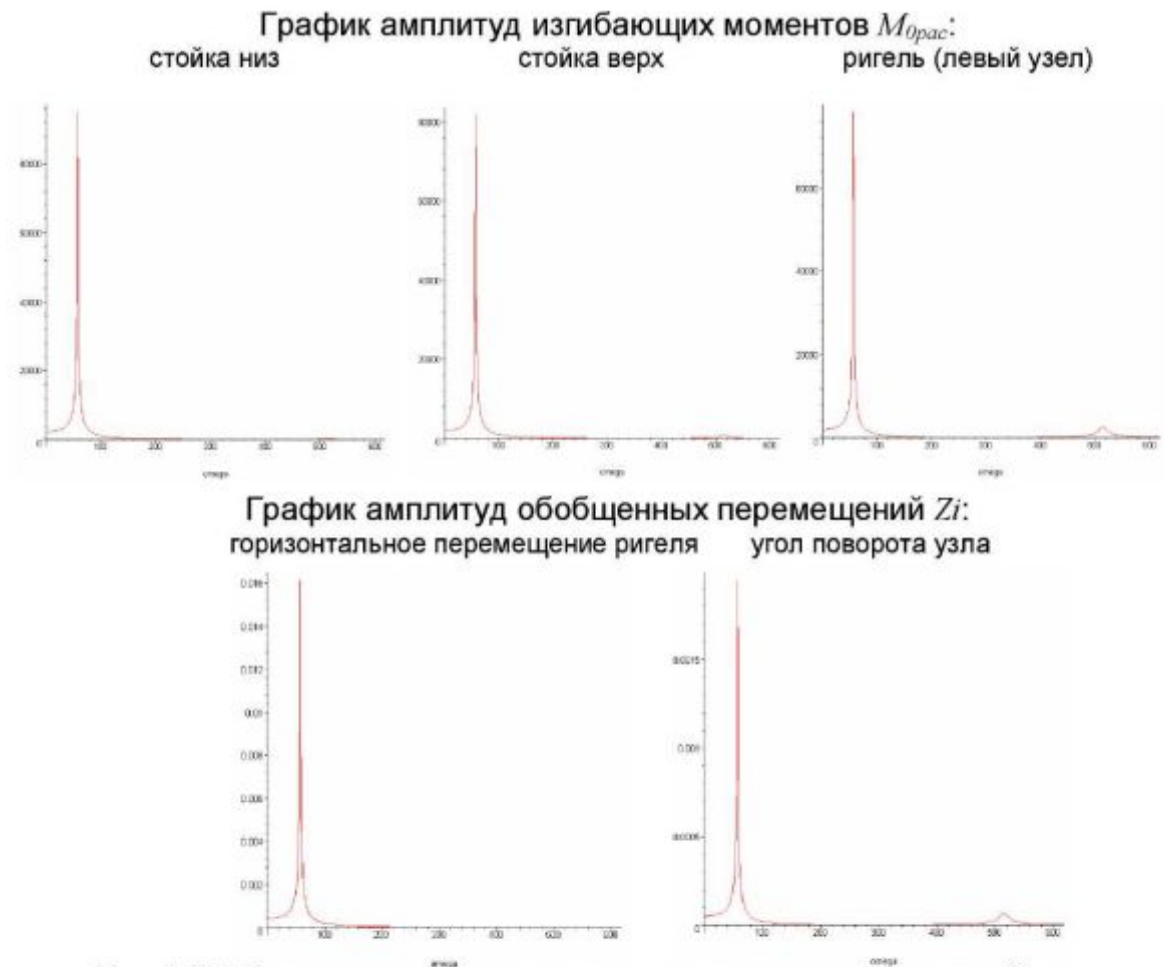


Рис.5.27. Результаты расчета рамы на гармоническое воздействие.

#### 4. Учет внутреннего трения при колебаниях конструкций из разнородных материалов.

В предыдущих разделах мы показали примеры расчета однородных конструкций выполненных из одного материала, то есть таких конструкций, у которых упругие и диссипативные характеристики постоянны и одинаковы для всех элементов. В случаях, когда конструкция выполнена из элементов, материал которых различен, упругие свойства (различные модули упругости) легко учитываются при формировании матрицы жесткости конструкции  $K$ . Диссипативные свойства конструкции учесть сложнее. Если для однородной конструкции при разложении уравнения движения по собственным формам было установлено, что диссипативный член в уравнении движения можно заменить величиной  $\gamma \cdot p$ , в котором  $\gamma = Const$  есть коэффициент потерь материала конструкции. Напомним как была получена эта формула.

Для учета диссипативных сил в уравнение движения рамы введем диссипативный член:  $\Gamma \cdot \dot{Z}$ , получим

$$m \cdot \ddot{\bar{Z}} + \Gamma \cdot \dot{\bar{Z}} + K \cdot \bar{Z} = \bar{P}, \quad (5.33)$$

где  $\Gamma$  – диссипативная матрица.

Для того чтобы применить к уравнению (5.33) метод разложения по собственным формам необходимо, чтобы матрица  $\Gamma$  имела те же самые собственные векторы  $\Psi$ , что и матрицы  $m$  и  $K$ , то есть матрица  $K_m = \sqrt{m}^{-1} K \sqrt{m}^{-1}$ . Это значит, что  $\Psi^T \cdot \Gamma_m \cdot \Psi = A_\Gamma$ , где  $A_\Gamma$  – диагональная матрица. В качестве такой матрицы может быть принята любая функция матрицы  $A$ :  $A_\Gamma = f(A)$ . Поскольку собственные числа матрицы  $K_m$  представляют собой квадраты собственных частот колебаний  $p$ , то  $A_\Gamma = f(A) = \varphi(p)$ . Представим  $\varphi(p)$  в виде разложения в ряд Маклорена:

$$\varphi(p) = \varphi(0) + \varphi'(0) \cdot p + \frac{\varphi''(0)}{2!} \cdot p^2 + \dots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} \cdot p^n + \dots,$$

Сохраним в этом разложении первый ненулевой член, т.е. примем

$$\varphi(p) = \varphi'(0) \cdot p.$$

Постоянную величину  $\varphi'(0)$  обозначим  $\gamma$ , тогда

$$\varphi(p) = \gamma \cdot p. \quad (5.34)$$

Поскольку  $p = \sqrt{A}$ , то  $\varphi(p) = \gamma \sqrt{A}$  и  $\Gamma_m = \Psi \cdot \gamma \sqrt{A} \cdot \Psi^T = \gamma \sqrt{K_m}$ .

Таким образом, уравнение движения (5.33) для однородных систем (выполненных из одного материала) примет вид:

$$m \cdot \ddot{\bar{Z}} + \gamma \sqrt{\sqrt{m} \cdot K \cdot \sqrt{m}} \cdot \dot{\bar{Z}} + K \cdot \bar{Z} = \bar{P}(t). \quad (5.53)$$

Для неоднородных систем, используя соотношения линейной вязкоупругости для гармонических колебаний согласно принципу Больцмана Вольтера можно записать

$$-m \cdot \omega^2 \cdot \bar{Z}_0 \exp(i\omega t) + i \cdot K''(\omega) \cdot \bar{Z}_0 \exp(i\omega t) + K'(\omega) \cdot \bar{Z}_0 \exp(i\omega t) = \bar{P}_0 \exp(i\omega t), \quad (5.54)$$

где  $K'(\omega)$ ,  $K''(\omega)$  – соответственно действительная и мнимая часть комплексной жесткости, которую можно вычислить, если использовать комплексные модули упругости  $i \cdot E''(\omega) + E'(\omega)$ .

В работе [9] приводится значение коэффициента потерь

$$\gamma_j(\omega) = \frac{E_j''(\omega)}{E_j'(\omega)}, \quad (5.55)$$

то есть, вместо  $E_j''(\omega)$  для каждого  $j$ -го элемента, можно подставлять  $\gamma_j(\omega) \cdot E_j'(\omega)$ .

Действительная часть комплексного модуля – медленно меняющаяся функция частоты и для частот учитываемых в практических расчетах конструкций можно принять

$$E_j'(\omega) = E_j, \quad (5.56)$$

тогда  $K'(\omega) = K$ . Мнимая часть комплексной жесткости  $K''(\omega)$  вычисляется с учетом (5.55), (5.56). Уравнение (5.54) можно записать в виде

$$-m \cdot \omega^2 \cdot \bar{Z}_0 + i \cdot K''(\omega) \cdot \bar{Z}_0 + K \cdot \bar{Z}_0 = \bar{P}_0, \quad (5.57)$$

или

$$-m \cdot \omega^2 \cdot \bar{Z}_0 + i \cdot \gamma(\omega) \cdot K \cdot \bar{Z}_0 + K \cdot \bar{Z}_0 = \bar{P}_0, \quad (5.58)$$

где

$$\gamma(\omega) = K'' \cdot K^{-1}. \quad (5.59)$$

Определим функцию  $\gamma(\omega)$ . Найдем собственные значения матрицы  $K'' \cdot K^{-1}$ :

$$\Phi_j^T (K'' \cdot K^{-1}) \Phi_j = \text{diag}[\gamma_j],$$

где  $\text{diag}[\gamma_j]$  - собственные числа и  $\Phi_j$  - собственные формы матрицы  $K'' \cdot K^{-1}$ . В качестве функции  $\gamma(\omega)$  примем функцию, значения которой в точках  $\omega = p_j$  равны  $\gamma(\omega) = \gamma(p_j) = f(\gamma_j)$ .

Решение уравнения (5.58) ищем в виде разложения по собственным формам матрицы  $K$ :

$$\bar{Z}_0 = \Phi \cdot \bar{a}_0, \quad (5.60)$$

тогда

$$-\omega^2 \cdot \Phi^T m \Phi \cdot \bar{a}_0 + i \cdot f(\gamma) \cdot \Phi^T K \Phi \cdot \bar{a}_0 + \Phi^T K \Phi \cdot \bar{a}_0 = \Phi^T \bar{P}_0.$$

Учитывая, что

$$\Phi^T m \Phi = E, \quad \Phi^T K \Phi = \Lambda = p^2, \quad \Phi^T \bar{P}_0 = \bar{b}_0,$$

получим

$$-\omega^2 \cdot \bar{a}_0 + i \cdot f(\gamma) p^2 \cdot \bar{a}_0 + p^2 \cdot \bar{a}_0 = \bar{b}_0. \quad (5.61)$$

При значениях  $\omega = p_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) получим систему уравнений:

$$-p_j^2 \cdot a_{0j} + i \cdot f(\gamma_j) \cdot p_j^2 \cdot a_{0j} + p_j^2 \cdot a_{0j} = b_{0j}, \quad j=1, 2, \dots, n.$$

Последнее выражение можно переписать с учетом того, что  $p_j = \omega_j$ :

$$-\omega_j^2 \cdot a_{0j} + i \cdot f(\gamma_j) \cdot p_j \cdot \omega_j \cdot a_{0j} + p_j^2 \cdot a_{0j} = b_{0j}, \quad j=1, 2, \dots, n.$$

Возвращаясь к матричной записи, получим

$$-\omega^2 \cdot \bar{a}_0 + i \cdot f(\gamma) \cdot p \cdot \omega \cdot \bar{a}_0 + p^2 \cdot \bar{a}_0 = \Phi^T \bar{P}_0.$$

С учетом того, что

$$\Psi^T K_m \Psi = \Lambda = p^2, \quad \Psi^T \sqrt{K_m} \Psi = \sqrt{\Lambda} = p, \quad K_m = \sqrt{m}^{-1} K \sqrt{m}^{-1}, \quad \sqrt{m} \cdot \Phi = \Psi,$$

получим в результате последовательных преобразований:

$$-\omega^2 \cdot \Psi^T \Psi \bar{a}_0 + i \cdot f(\gamma) \cdot \Psi^T \sqrt{K_m} \Psi \cdot \omega \cdot \bar{a}_0 + \Psi^T K_m \Psi \cdot \bar{a}_0 = \Phi^T \bar{P}_0,$$

$$-\omega^2 \cdot \Phi^T m \Phi \cdot \bar{a}_0 + i \cdot \omega \cdot f(\gamma) \cdot \Phi^T \cdot \sqrt{m} \sqrt{K_m} \sqrt{m} \cdot \Phi \cdot \bar{a}_0 + \Phi^T \cdot K \cdot \Phi \cdot \bar{a}_0 = \Phi^T \bar{P}_0,$$

$$-\omega^2 \cdot \Phi^T m \cdot \bar{Z}_0 + i \cdot \omega \cdot f(\gamma) \cdot \Phi^T \cdot \sqrt{\sqrt{m} K \sqrt{m}} \cdot \bar{Z}_0 + \Phi^T \cdot K \cdot \bar{Z}_0 = \Phi^T \bar{P}_0.$$

После сокращения на  $\Phi^T$  и умножения на  $\exp(i\omega t)$  находим:

$$(-\omega^2 \cdot m \cdot \bar{Z}_0 + i \cdot \omega \cdot f(\gamma) \cdot \sqrt{\sqrt{m} K \sqrt{m}} \cdot \bar{Z}_0 + K \cdot \bar{Z}_0) \exp(i\omega t) = \bar{P}_0 \exp(i\omega t).$$

Так как

$\bar{P}(t) = \bar{P}_0 \exp(i\omega t)$ ,  $\bar{Z}(t) = \bar{Z}_0 \exp(i\omega t)$ ,  $\dot{\bar{Z}}(t) = i\omega \cdot \bar{Z}_0 \exp(i\omega t)$ ,  $\ddot{\bar{Z}}(t) = -\omega^2 \bar{Z}_0 \exp(i\omega t)$   
 окончательно получим:

$$m \cdot \bar{Z}(t) + f(\gamma) \cdot \sqrt{\sqrt{m} K \sqrt{m}} \cdot \bar{Z}(t) + K \cdot \bar{Z}(t) = \bar{P}(t). \quad (5.62)$$

Формула (5.62) дает точные результаты в резонансных режимах колебаний (при  $\omega = p_j$ ). В нерезонансных областях влияние затухания колебаний незначительно, поэтому результаты, доставляемые этой формулой также можно считать практически точными.

Функция затухания  $f(\gamma)$  есть функция, аппроксимирующая собственные значения матрицы  $K'' \cdot K^{-1}$ , в которой  $K''$  формируется также как матрица жесткости  $K$  с заменой в ней упругих постоянных произведениями коэффициентов потерь на упругие постоянные материалов элементов.

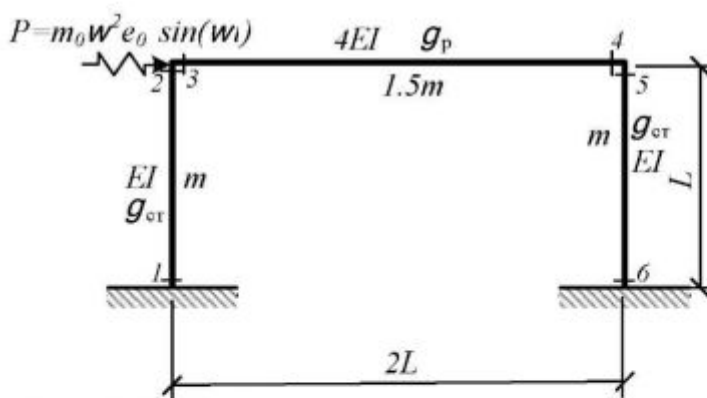


Рис.5.28. Воздействие неуравновешенной массы на узел одноэтажной рамы.

Для примера рассмотрим раму, показанную на рис.5.28, при действии горизонтальной, гармонической силы  $P(t) = P_0 \exp(i\omega t)$ .

Стойки рамы выполнены из предварительно напряженного железобетона, ригель стальной. Найдем амплитуды перемещений узлов и амплитуды изгибающих моментов в сечениях 1–6,

Расчет выполним, используя программный пакет *Maple*.

> restart;

Исходные данные: n - количество неизвестных, mm - распределенная масса в Н/м, L - размер в м (высота стойки), P0 - амплитуда нагрузки кН, gammast - коэффициент потерь материала стойки, gammap - коэффициент потерь материала ригеля, gamma1 - относительный коэффициент потерь при низких частотах колебаний (0 - 5 гц), gamma2 - относительный коэффициент потерь при высоких частотах колебаний (>= 10 гц).

> n1:=3: n:=3: mm:=200.: L:=3.: P0:=3000.: gamma2:=1.: gamma1:=1.:

gammast:=0.025: gammap:=0.01:

> with(LinearAlgebra):

> m:=Matrix(n,n,mm\*L/210\*[[786,11\*L,11\*L],[11\*L,26\*L^2,-18\*L^2],[11\*L,-18\*L^2,26\*L^2]],datatype=float[4]):

Вычисление собственных векторов матрицы m:

> gam:=proc(omega)

> global gamma1,gamma2,n;

> gamma1+Heaviside(omega-10\*evalf(Pi))\*(gamma2-gamma1)\*(omega-10.\*evalf(Pi))/(10.\*evalf(Pi))-Heaviside(omega-



```

20.*evalf(Pi))*((gamma2-gamma1)*(omega-
20.*evalf(Pi))/(10.*evalf(Pi)));
> RETURN(%);
> end:
> plot(gam(x),x=0..100):
> sortirovka:=proc(Fi,sch)
> local i,j,k,bb,S: global n:
> for i from 1 by 1 to n-1 do
> for j from i+1 by 1 to n do
> if sch[j,1]<sch[i,1] then
> bb:=sch[j,1];
> sch[j,1]:=sch[i,1];
> sch[i,1]:=bb;
> for k from 1 to n do
> S[j]:=Fi[k,j];
> Fi[k,j]:=Fi[k,i];
> Fi[k,i]:=S[j];
> end do;
> else
> next;
> end if;
> end do;
> end do;
> end:
> Fi:=Matrix(n,n,3,Eigenvectors(m,output=vectors),datatype=float[4]):
Вычисление собственных чисел матрицы m:
> LL:=Matrix(n,1,Eigenvalues(m,output=values),datatype=float[4]):
Матрица собственных чисел матрицы m:
> lamb-
daM:=Matrix(n,n,[[LL[1,1],0,0],[0,LL[2,1],0],[0,0,LL[3,1]]],datatype
=float[4]):
Квадратный корень из матрицы собственных чисел матрицы m:
> lamb-
daM05:=Matrix(n,n,[[sqrt(lambdaM[1,1]),0,0],[0,sqrt(lambdaM[2,2]),0]
,[0,0,sqrt(lambdaM[3,3])]],datatype=float[4]):
Квадратный корень из матрицы m:
> m05:=Fi.lambdaM05.Transpose(Fi):
Квадратный корень из обратной матрицы m:
> m_05:=Matrix(n,n,m05^(-1),datatype=float[4]):
Жесткость EI:
> EI:=2.*10^11*5010.*10^(-8):
Матрица жесткости рамы:
>
K:=Matrix(n,n,2*EI/(L^3)*[[12,3*L,3*L],[3*L,6*L^2,2*L^2],[3*L,2*L^2,
6*L^2]],datatype=float[4]):
Матрица Km:
> Km:=Matrix(n,n,m_05.K.m_05,datatype=float[4]):
Матрица собственных векторов матрицы Km:

```

```

> Fi:=Matrix(n,n,Eigenvectors(Km,output=vectors),datatype=float[4]):
Собственные числа матрицы Km:
> LL:=Matrix(n,1,Eigenvectors(Km,output=values),datatype=float[4]):
> sortirovka(Fi,LL):
Собственные частоты:
> p1:=sqrt(LL[1,1]):
> pp1:=p1/(2.*evalf(Pi)):
> p2:=sqrt(LL[2,1]):
> pp2:=p2/(2.*evalf(Pi)):
> p3:=sqrt(LL[3,1]):
> pp3:=p3/(2.*evalf(Pi)):
>
K2:=Matrix(n,n,EI/(L^3)*[[24*gammas,6*L*gammas,6*L*gammas],[6*L*gam-
mas,4*L^2*gammas+8*L^2*gammap,4*L^2*gammap],[6*L*gammas,4*L^2*gam-
mas,4*L^2*gammas],n_05.2*gammas],datatype=float[4]):
> K2mK_1m:=K2m.Km^(-1):
>
vect:=Matrix(n,n,Eigenvectors(K2mK_1m,output=vectors),datatype=float
[4]):
>
gammm:=Matrix(n,1,Eigenvectors(K2mK_1m,output=values),datatype=float
[4]):
> sortirovka(vect,gammm):
> vect:
> gammm:
> gam(p1):
> gam(p2):
> gam(p3):
Коэффициенты потерь по собственным формам:
> gamm(1):=gammm[1,1]*gam(pp1):
gamm(1):= 0.0111538460
> gamm(2):=gammm[2,1]*gam(pp2):
gamm(2):= 0.0175000001
> gamm(3):=gammm[3,1]*gam(pp3):
gamm(3):= 0.0250000004

Собственные векторы:
> Psi1:=Matrix(n,1,Fi.Matrix(n,1,[[1],[0],[0]],datatype=float[4])):
> Psi3:=Matrix(n,1,Fi.Matrix(n,1,[[0],[1],[0]],datatype=float[4])):
> Psi2:=Matrix(n,1,Fi.Matrix(n,1,[[0],[0],[1]],datatype=float[4])):
Парциальные матрицы:
> H1:=Matrix(n,n,Psi1.Transpose(Psi1),datatype=float[4]):
> H2:=Matrix(n,n,Psi2.Transpose(Psi2),datatype=float[4]):
> H3:=Matrix(n,n,Psi3.Transpose(Psi3),datatype=float[4]):
Амплитуды форм колебаний неизвестных:
> Az1:=m_05.H1.m_05.Matrix(n,1,[[P0],[0.],[0.]]):
> Az2:=m_05.H2.m_05.Matrix(n,1,[[P0],[0.],[0.]]):

```



```

> Az3:=m_05.H3.m_05.Matrix(n,1,[[P0],[0.],[0.]]) :
> Fi1(omega):=1/(p1^2-omega^2+I*gamma(1)*p1*omega) :
> Fi2(omega):=1/(p2^2-omega^2+I*gamma(2)*p2*omega) :
> Fi3(omega):=1/(p3^2-omega^2+I*gamma(3)*p3*omega) :
Матрица изгибающих моментов от единичных неизвестных Zi=1:
> MM:=Matrix(2*n1,n,[[6*EI/L^2,2*EI/L,0],[-6*EI/L^2,-4*EI/L,0],[0,-
8*EI/L,-4*EI/L],[0,4*EI/L,8*EI/L],[-6*EI/L^2,0,-
4*EI/L],[6*EI/L^2,0,2*EI/L]]) :

```

Перемещения:

```

> Z:=Az1*Fi1(omega)+Az2*Fi2(omega)+Az3*Fi3(omega) :

```

Матрица расчетных изгибающих моментов:

```

> Mpac:=MM.Z :

```

Графики изгибающих моментов в сечениях рамы Mpac:

>

```

M0pac:=Matrix(2*n1,1,[[sqrt(Re(Mpac[1,1])^2+Im(Mpac[1,1])^2),[sqrt(
Re(Mpac[2,1])^2+Im(Mpac[2,1])^2),[sqrt(Re(Mpac[3,1])^2+Im(Mpac[3,1]
)^2)],[sqrt(Re(Mpac[4,1])^2+Im(Mpac[4,1])^2)],[sqrt(Re(Mpac[5,1])^2+
Im(Mpac[5,1])^2)],[sqrt(Re(Mpac[6,1])^2+Im(Mpac[6,1])^2)]]):

```

```

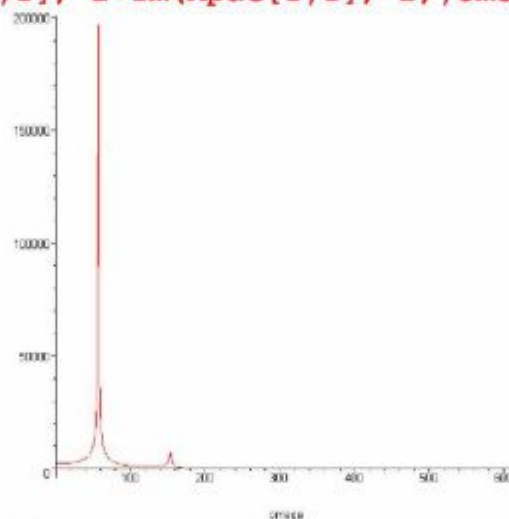
> M0pac[2,1]-M0pac[3,1] :

```

```

> plot(sqrt(Re(Mpac[1,1])^2+Im(Mpac[1,1])^2),omega=0...1.2*p3);

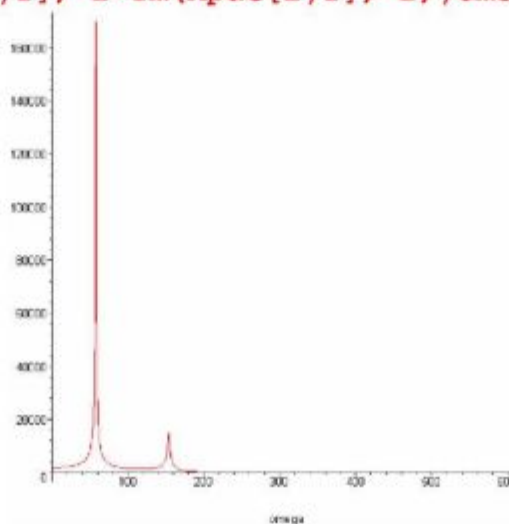
```



```

> plot(sqrt(Re(Mpac[2,1])^2+Im(Mpac[2,1])^2),omega=0...1.2*p3);

```



```
> plot(sqrt(Re(Mpac[3,1])^2+Im(Mpac[3,1])^2),omega=0...1.2*p3);
```

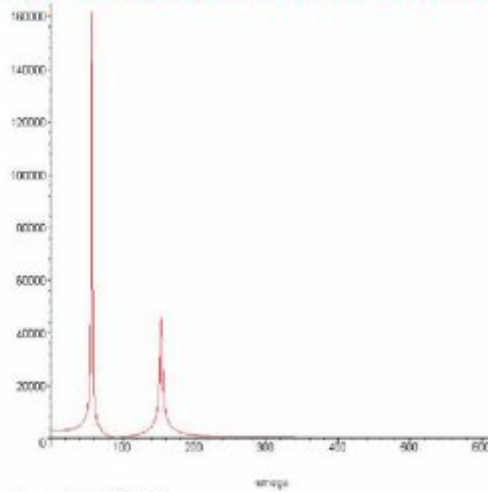
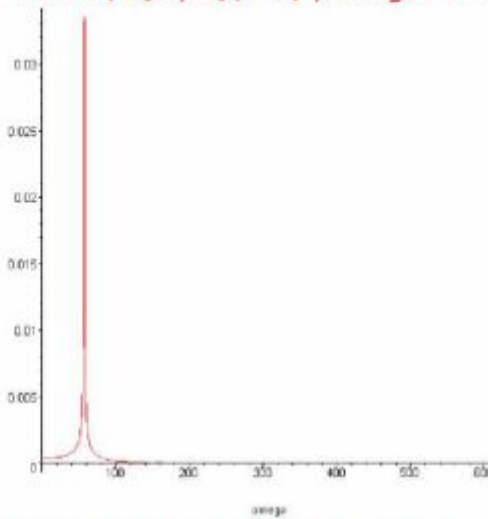
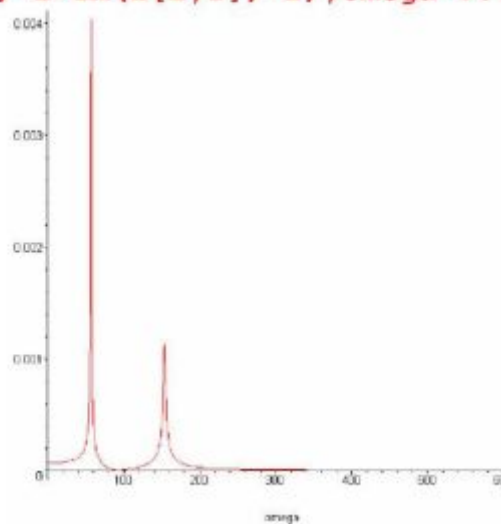


График обобщенных перемещений  $Z_i$ :

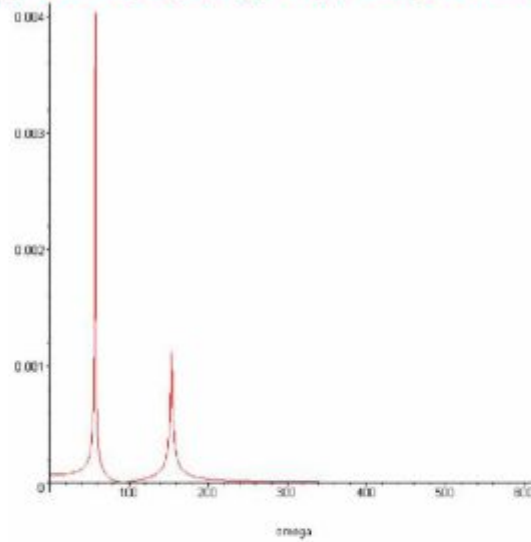
```
> plot(sqrt(Re(Z[1,1])^2+Im(Z[1,1])^2),omega=0...1.2*p3);
```



```
> plot(sqrt(Re(Z[2,1])^2+Im(Z[2,1])^2),omega=0...1.2*p3);
```



```
> plot(sqrt(Re(Z[3,1])^2+Im(Z[3,1])^2),omega=0...1.2*p3);
```



```
> omega:=p1;
```

$\omega := 57.28058301$

```
> M0pac;
```

```
[218240.3612  
188271.5756  
179816.2767  
179816.2767  
188271.5756  
218240.3612]
```

```
> omega:=p2;
```

```
> M0pac;
```

$\omega := 153.6754902$

```
[7170.419245  
14802.64555  
45835.81750  
45835.81750  
14802.64555  
7170.419245]
```

```
> omega:=p3;
```

```
> M0pac;
```

$\omega := 515.1193435$

```
[18.23292027  
0.9948255926  
103.4674582  
103.4674582  
0.9948255926  
18.23292027]
```

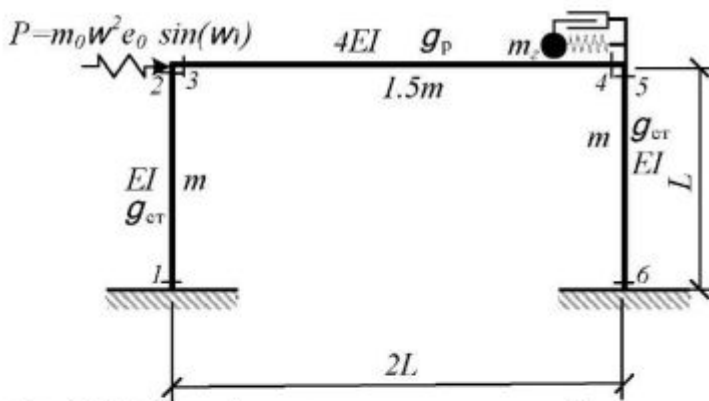


Рис. 5.29. Воздействие неуравновешенной массы на узел одноэтажной рамы.

Рассмотрим раму, показанную на рис.5.29, при действии горизонтальной, гармонической силы  $P(t) = P_0 \exp(i\omega t)$ . Стойки рамы выполнены из предварительно напряженного железобетона, ригель стальной.

На ригеле установлен гаситель горизонтальных колебаний.

Найдем амплитуды перемещений узлов и амплитуды изгибающих моментов в сечениях 1–6,

Расчет выполним, используя программный пакет *Maple*.

Расчет выполним, используя программный пакет *Maple*.

> restart;

Исходные данные: n1 - количество элементов, n - количество неизвестных, mm - распределенная масса в H/м, L - размер в м (высота стойки), P0 - амплитуда нагрузки kH, gammaст - коэффициент потерь материала стойки, gammap - коэффициент потерь материала ригеля, gammарас - коэффициент потерь гасителя, mg - масса гасителя, gamma1 - относительный коэффициент потерь при низких частотах колебаний (0 - 5 гц), gamma2 - относительный коэффициент потерь при высоких частотах колебаний (>= 10 гц).

> n1:=3: n:=4: mm:=200.: L:=3.: P0:=3000.: gamma2:=1.: gamma1:=1.: gammаст:=0.025: gammap:=0.01: gammарас:=0.1: mg:=125.:

> with(LinearAlgebra):

> m:=Matrix(n,n,mm\*L/210\*[[786,11\*L,11\*L,0],[11\*L,26\*L^2,-18\*L^2,0],[11\*L,-18\*L^2,26\*L^2,0],[0,0,0,mg\*210/(mm\*L)]],datatype=float[8]):

Процедура зависимости отношения коэффициентов потерь от частоты:

> gam:=proc(omega)

> global gamma1,gamma2:

> gamma1+Heaviside(omega-10\*evalf(Pi))\*((gamma2-gamma1)\*(omega-10.\*evalf(Pi))/(10.\*evalf(Pi)))-Heaviside(omega-20.\*evalf(Pi))\*((gamma2-gamma1)\*(omega-20.\*evalf(Pi))/(10.\*evalf(Pi))):

> RETURN(%):

> end:

> plot(gam(x),x=0..100):

Процедура сортировки по возрастанию:

> sortirovka:=proc(Fi,sch)

> local i,j,k,bb,S: global n:

> for i from 1 by 1 to n-1 do

> for j from i+1 by 1 to n do

> if sch[j,1]<sch[i,1] then

> bb:=sch[j,1];

> sch[j,1]:=sch[i,1];

> sch[i,1]:=bb;

> for k from 1 to n do



```

> S[j]:=Fi[k,j];
> Fi[k,j]:=Fi[k,i];
> Fi[k,i]:=S[j];
> end do;
> else
> next;
> end if;
> end do;
> end do;
> end:
Вычисление собственных векторов матрицы m:
> Fi:=Matrix(n,n,Eigenvectors(m,output=vectors),datatype=float[8]):
Вычисление собственных чисел матрицы m:
> LL:=Matrix(n,1,Eigenvalues(m,output=values),datatype=float[8]):
Матрица собственных чисел матрицы m:
> lamb-
daM:=Matrix(n,n,[[LL[1,1],0,0,0],[0,LL[2,1],0,0],[0,0,LL[3,1],0],[0,0,0,LL[4,1]]],datatype=float[8]):
Квадратный корень из матрицы собственных чисел матрицы m:
> lamb-
daM05:=Matrix(n,n,[[sqrt(lambdaM[1,1]),0,0,0],[0,sqrt(lambdaM[2,2]),0,0],[0,0,sqrt(lambdaM[3,3]),0],[0,0,0,sqrt(lambdaM[4,4])]],datatype=float[8]):
Квадратный корень из матрицы m:
> m05:=Fi.lambdaM05.Transpose(Fi):
Квадратный корень из обратной матрицы m:
> m_05:=Matrix(n,n,m05^(-1),datatype=float[8]):
Жесткость EI и жесткость гасителя:
> EI:=2.*10^11*5010.*10^(-8): kg:=3281.06519*mg:
Матрица жесткости рамы:
> K:=Matrix(n,n,2*EI/(L^3)*[[12+kg*L^3/(2*EI),3*L,3*L,-kg*L^3/(2*EI)],[3*L,6*L^2,2*L^2,0],[3*L,2*L^2,6*L^2,0],[-kg*L^3/(2*EI),0,0,kg*L^3/(2*EI)]],datatype=float[8]):
Матрица Km:
> Km:=Matrix(n,n,m_05.K.m_05,datatype=float[8]):
Матрица собственных векторов матрицы Km:
> Fi:=Matrix(n,n,Eigenvectors(Km,output=vectors),datatype=float[8]):
Собственные числа матрицы Km:
> LL:=Matrix(n,1,Eigenvalues(Km,output=values),datatype=float[8]):
> sortirovka(Fi,LL):
>
Km_05:=Fi.Matrix(n,n,[[sqrt(LL[1,1]),0,0,0],[0,sqrt(LL[2,1]),0,0],[0,0,sqrt(LL[3,1]),0],[0,0,0,sqrt(LL[4,1])]]).Transpose(Fi):
Собственные частоты:
> p1:=sqrt(LL[1,1]):
> pp1:=p1/(2.*evalf(Pi));
pp1 := 8.095793100

> p2:=sqrt(LL[2,1]):

```



```

> pp2:=p2/(2.*evalf(Pi));
                                     pp2 := 10.26578944

> p3:=sqrt(LL[3,1]);
> pp3:=p3/(2.*evalf(Pi));
                                     pp3 := 24.45821665

> p4:=sqrt(LL[4,1]);
> pp4:=p4/(2.*evalf(Pi));
                                     pp4 := 81.98441440

```

Диссипативная матрица:

```

>
K2:=Matrix(n,n,EI/(L^3)*[[24*gammaст+gammaрас*kg*L^3/(EI),6*L*gammaст,
6*L*gammaст,-
gam-
мас*kg*L^3/(EI)],[6*L*gammaст,4*L^2*gammaст+8*L^2*gammaп,4*L^2*gammaп,0],
[6*L*gammaст,4*L^2*gammaп,4*L^2*gammaст+8*L^2*gammaп,0],[-
gammaст*kg*L^3/(EI),0,0,0],[0,0,0,0],[0,0,0,0],[0,0,0,0],[0,0,0,0]],datatype=float[8]):

```

```

> K2mK_1m:=Km_05^(-1).K2m.Km_05^(-1):
>
vect:=Matrix(n,n,Eigenvectors(K2mK_1m,output=vectors),datatype=float[8]):
>
fgamma:=Matrix(n,1,Eigenvectors(K2mK_1m,output=values),datatype=float[8]):
> sortirovka(vect,fgamma):
> gam(p1):
> gam(p2):
> gam(p3):
> gam(p4):

```

Коэффициенты потерь по собственным формам:

```

> gamm(1):=fgamma[1,1]*gam(p1);
                                     gamm(1) := 0.01115384615

> gamm(2):=fgamma[2,1]*gam(p2);
                                     gamm(2) := 0.01750000001

> gamm(3):=fgamma[3,1]*gam(p3);
                                     gamm(3) := 0.02500000001

> gamm(4):=fgamma[4,1]*gam(p4);
                                     gamm(4) := 0.1000000000

```

Собственные векторы:

```

>
Psi1:=Matrix(n,1,Fi.Matrix(n,1,[[1],[0],[0],[0]],datatype=float[8]))
:
>
Psi2:=Matrix(n,1,Fi.Matrix(n,1,[[0],[1],[0],[0]],datatype=float[8]))

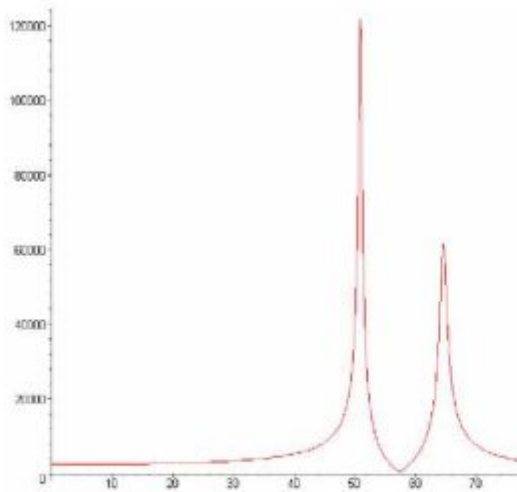
```

```

>
Psi3:=Matrix(n,1,Fi.Matrix(n,1,[[0],[0],[1],[0]],datatype=float[8]))
:
>
Psi4:=Matrix(n,1,Fi.Matrix(n,1,[[0],[0],[0],[1]],datatype=float[8]))
:
Парциальные матрицы:
> H1:=Matrix(n,n,Psi1.Transpose(Psi1),datatype=float[8]):
> H2:=Matrix(n,n,Psi2.Transpose(Psi2),datatype=float[8]):
> H3:=Matrix(n,n,Psi3.Transpose(Psi3),datatype=float[8]):
> H4:=Matrix(n,n,Psi4.Transpose(Psi4),datatype=float[8]):
Амплитуды форм колебаний неизвестных:
> Az1:=m_05.H1.m_05.Matrix(n,1,[[P0],[0.],[0.]]):
> Az2:=m_05.H2.m_05.Matrix(n,1,[[P0],[0.],[0.]]):
> Az3:=m_05.H3.m_05.Matrix(n,1,[[P0],[0.],[0.]]):
> Az4:=m_05.H4.m_05.Matrix(n,1,[[P0],[0.],[0.]]):
> Fii1(omega):=1/(p1^2-omega^2+I*gamma(1)*p1*omega):
> Fii2(omega):=1/(p2^2-omega^2+I*gamma(2)*p2*omega):
> Fii3(omega):=1/(p3^2-omega^2+I*gamma(3)*p3*omega):
> Fii4(omega):=1/(p4^2-omega^2+I*gamma(4)*p4*omega):
Матрица изгибающих моментов от единичных неизвестных Zi=1:
> MM:=Matrix(2*n1+1,n,[[6*EI/L^2,2*EI/L,0],[-6*EI/L^2,-4*EI/L,0],[0,-8*EI/L,-4*EI/L],[0,4*EI/L,8*EI/L],[-6*EI/L^2,0,-4*EI/L],[6*EI/L^2,0,2*EI/L],[-kg,0,0,kg]]):
Перемещения:
> Z:=Az1*Fii1(omega)+Az2*Fii2(omega)+Az3*Fii3(omega)+Az4*Fii4(omega):
Матрица расчетных изгибающих моментов:
> Mpac:=MM.Z:
Графики изгибающих моментов в сечениях рамы Mpac:
>
M0pac:=Matrix(2*n1+1,1,[[sqrt(Re(Mpac[1,1])^2+Im(Mpac[1,1])^2)],[sqrt(Re(Mpac[2,1])^2+Im(Mpac[2,1])^2)],[sqrt(Re(Mpac[3,1])^2+Im(Mpac[3,1])^2)],[sqrt(Re(Mpac[4,1])^2+Im(Mpac[4,1])^2)],[sqrt(Re(Mpac[5,1])^2+Im(Mpac[5,1])^2)],[sqrt(Re(Mpac[6,1])^2+Im(Mpac[6,1])^2)],[sqrt(Re(Mpac[7,1])^2+Im(Mpac[7,1])^2)]]):
> M0pac[2,1]-M0pac[3,1]:
> plot(sqrt(Re(Mpac[1,1])^2+Im(Mpac[1,1])^2),omega=0...1.2*p2);

```





```
> plot(sqrt(Re(Mpac[2,1])^2+Im(Mpac[2,1])^2), omega=0...1.2*p4) :
> plot(sqrt(Re(Mpac[3,1])^2+Im(Mpac[3,1])^2), omega=0...1.2*p4) :
> plot(sqrt(Re(Mpac[7,1])^2+Im(Mpac[7,1])^2), omega=0...1.2*p2) ;
```

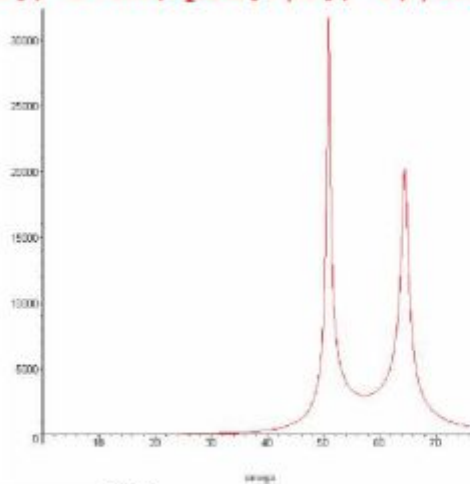
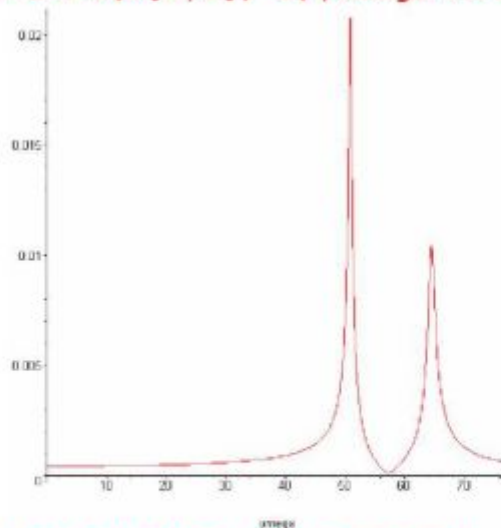
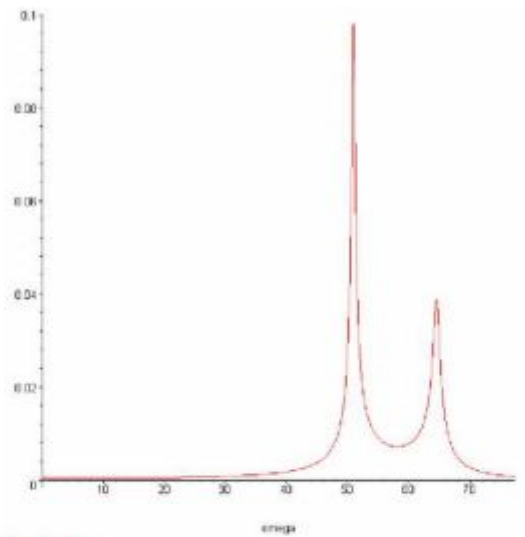


График обобщенных перемещений  $Z_i$ :

```
> plot(sqrt(Re(Z[1,1])^2+Im(Z[1,1])^2), omega=0...1.2*p2) ;
```



```
> plot(sqrt(Re(Z[2,1])^2+Im(Z[2,1])^2), omega=0...1.2*p4) :
> plot(sqrt(Re(Z[3,1])^2+Im(Z[3,1])^2), omega=0...1.2*p4) :
> plot(sqrt(Re(Z[4,1])^2+Im(Z[4,1])^2), omega=0...1.2*p2) ;
```



> omega:=sqrt(3281.06519);

$\omega := 57.28058301$

> M0pac;

```

609.0065030
525.5072004
500.9959160
500.9959160
525.5072004
609.0065030
2988.703283

```

> omega:=p1;

$\omega := 50.86736825$

> M0pac;

```

122037.1417
105135.7653
101408.2657
101408.2657
105135.7653
122037.1417
31768.15078

```

> omega:=p2:

> M0pac:

> omega:=p3:

> M0pac:

> omega:=p4:

> M0pac:

## Контрольные вопросы

### К разделу 1

1. Сформулируйте правила сложения, умножения, транспонирования, и обращения матриц.
2. Что такое собственное значение и собственный вектор матрицы. Сколько собственных значений и собственных векторов имеет матрица.
3. Сформулируйте свойство собственных векторов.
4. Как можно определить собственное значение и собственный вектор матрицы.
5. Сформулируйте полную проблему собственных значений матрицы.
6. Какими методами можно решить полную проблему собственных значений.

### К разделу 2.

1. Как записать формулу определения перемещений в матричной форме.
2. Как формируется матрица податливости системы.
3. Запишите матричный алгоритм метода сил.
4. Запишите в матричной форме формулы для определения коэффициентов канонических уравнений метода сил.
5. Какая формула используется для деформационной проверки.
6. Запишите матричный алгоритм метода перемещений.
7. Запишите в матричной форме формулы для определения коэффициентов канонических уравнений метода перемещений.

### К разделу 3.

1. Сформулируйте матричный алгоритм определения критического параметра по методу проф. Смирнова.
2. Как формируется матрица податливости для сжатых элементов.
3. Как определяется критический параметр из матричного алгоритма.

### К разделу 4.

1. Сформулируйте уравнение движения механической системы в матричной форме.
2. В чем состоит метод разложения по собственным формам.
3. Собственные формы, каких матриц участвуют в разложении.
4. Как определяется парциальная матрица механической системы.
5. Сформулируйте в матричной форме решение задачи определения перемещений для произвольного силового воздействия.
6. Для чего используется интеграл Дюамеля.

7. Запишите формулы для импульсной переходной функции для консервативных систем и диссипативных систем с частотно-независимым демпфированием.
8. Сформулируйте в матричной форме решение задачи определения внутренних сил для произвольного силового воздействия.
9. Сформулируйте в матричной форме решение задачи определения перемещений для гармонического воздействия.
10. Сформулируйте в матричной форме решение задачи определения внутренних сил для гармонического воздействия.

#### К разделу 5.

1. По каким формулам вычисляются элементы матрицы жесткости конечного элемента.
2. По каким формулам вычисляются элементы матрицы геометрической жесткости конечного элемента.
3. По каким формулам вычисляются элементы матрицы масс конечного элемента.
4. Сформулируйте метод разложения по собственным формам.
5. Собственные формы, какой матрицы участвуют в расчетах.
6. Как определяются функции матриц.
7. Сформулируйте в матричной форме решение задачи определения перемещений для произвольного силового воздействия.
8. Сформулируйте в матричной форме решение задачи определения внутренних сил для произвольного силового воздействия.
9. Сформулируйте в матричной форме решение задачи определения перемещений для гармонического воздействия.
10. Сформулируйте в матричной форме решение задачи определения внутренних сил для гармонического воздействия.



## Заключение

В учебном пособии рассмотрено применение матричных методов расчета в строительной механике стержневых систем.

Показано решение задач статики сооружений, по методу сил, методу перемещений и по методу конечных элементов.

Рассмотрены задачи устойчивости стержневых систем. Показано определение критических параметров по методу проф. Смирнова и по методу конечных элементов.

Основной объем занимают динамические задачи. Эти задачи рассмотрены в разделах 4 и 5. В разделе 4 рассмотрена динамика многомассовых систем, а в разделе 5 динамика систем с распределенной массой и учетом сжимающих сил при колебаниях. Кроме того в разделе 5 используется функция матрицы масс при формировании матрицы, которая используется для определения собственных форм.

В каждом разделе приведены примеры расчетов. Где это необходимо используется персональная ЭВМ для расчетов.

### Список литературы:

1. Бондарь Н.Г. Динамика железнодорожных мостов. / Н.Г.Бондарь, И.И.Казей, Б.Ф.Лесохин, Ю.Г.Козьмин. – М., «Транспорт», 1965, -412с.
2. Градштейн И.С. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений / И.С.Градштейн, И.М.Рыжик И.М. – М.: «Наука», 1971. -1108с.
3. Клаф Р., Пензиен Дж. Динамика сооружений. Пер. с англ.-М.: Стройиздат, 1979.-320с.
4. Смирнов А.Ф. Устойчивость и колебания сооружений. – М.: Трансжелдориздат, 1958. -572с.
5. Справочник по динамике сооружений. / Под ред. Б.Г. Корнеева, И.М. Рабиновича. – М.: Стройиздат, 1972. -511с.
6. Смирнов А.Ф. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений. / А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Я. Лащеников, Н.Н. Шапошников; Под ред. А.Ф. Смирнова. – М.: Стройиздат. 1984. -416с.
7. Цейтлин А.И. Свободные колебания систем с частотно-независимым внутренним трением. / А.И. Цейтлин, Ю.Г. Плотников. – «Строительная механика и расчет сооружений», Науч.-техн. журнал Госстроя СССР, 1979, №1. – с.29 – 35.
8. Цейтлин А.И. Прикладные методы решения краевых задач строительной механики – М.: Стройиздат, 1984. -334с.
9. Цейтлин А.И. Методы учета внутреннего трения в динамических расчетах конструкций. / А.И. Цейтлин, А.А. Кусаинов. – Алма-Ата: «Наука» Казахской ССР. 1987. -236с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Введение.....	3
ОБОЗНАЧЕНИЯ.....	4
1. Краткие сведения из теории матриц.....	5
1.1 Действия над матрицами.....	5
1.2. Собственные числа и собственные векторы матриц.....	9
1.3. Полная проблема собственных значений. Метод итераций.....	12
1.4. Функции матриц.....	16
2. Матрицы в статике сооружений.....	18
2.1. Матричная форма определения перемещений.....	18
2.2. Метод сил.....	24
2.3. Метод перемещений.....	29
3. Матрицы в теории устойчивости сооружений.....	
Определение критических сил в рамках методом А.Ф.Смирнова....	36
4. Матрицы в динамике сооружений.....	49
4.1. Динамический расчет систем со многими степенями свободы	49
4.2. Определение внутренних усилий.....	53
4.3. Примеры динамического расчета конструкций.....	55
5. Матрицы и метод конечных элементов.....	72
5.1. Статический расчет стержневых систем.....	72
5.2. Расчеты стержневых систем на устойчивость.....	79
5.3. Динамические расчеты стержневых систем.....	88
5.4. Учет внутреннего трения при колебаниях конструкций из раз- нородных материалов.....	122
Контрольные вопросы.....	137
Заключение.....	139
Список литературы.....	140