

ОПД.Р.03 СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА СПЕЦГЛАВЫ МЕХАНИКИ КОНСТРУКЦИЙ

Учебное пособие

Учебное пособие структурно состоит из двух частей. В первой части изложены общие сведения о композиционных волокнистых материалах и композитных конструкциях. Приведены основы прикладной методики для расчета многослойных композитных балок и даны решения некоторых практических задач расчета композитных балок. Вторая часть пособия посвящена методу конечных элементов. Изложены основы метода с применением вариационных принципов механики. Подробно рассмотрено получение расчетных соотношений для стержневых элементов и плоских четырехугольных элементов первого и второго порядка. Обсуждаются вопросы практической реализации МКЭ на персональных компьютерах.

В приложениях приведены описания лабораторной работы "Испытание многослойной композитной балки на изгиб" и учебной вычислительной программы для расчетного анализа композитных балок. Дается справочная информация о свойствах композиционных материалов.

Материал учебного пособия рекомендуется студентам, изучающим специальные дисциплины по механике конструкций или занимающимся научно-исследовательской работой в области механики деформируемого тела, а также для аспирантов.

1. Композиционные материалы и конструкции

Основной тенденцией научно-технического развития в машиностроении является создание качественной, надежной и экономичной техники. Кроме конструктивного совершенствования разрабатываемых изделий важную роль в решении этой задачи играет создание и применение новых конструкционных материалов.

В любом техническом изделии можно выделить так называемую *несущую (силовую) конструкцию*. Под *несущей конструкцией* понимается структурная часть изделия, воспринимающая основные нагрузки и обеспечивающая работоспособность изделия в целом. В таком же смысле существует и понятие *несущего конструктивного элемента*. Дальнейшее изложение учебного материала касается рассмотрения именно несущих конструкций и конструктивных элементов с позиций обеспечения их прочности, жесткости и устойчивости как качественных характеристик работоспособности технического изделия.

1.1. Основные понятия

В практике создания новых изделий различного назначения хорошо освоено применение традиционных конструкционных материалов, в основном металлических сплавов [1]. Выбор материалов определяется различными требованиями: эксплуатационными, технологическими, экономическими.

В большинстве технических областей наиболее широко применяются конструкционные *углеродистые и легированные стали*. Углеродистые стали представляют все еще значительную часть современной металлопродукции, главным образом за счет своей дешевизны. Для многих конструкций они подходят за счет удовлетворительных механических свойств в сочетании с хорошими технологическими качествами. Низколегированные конструкционные стали ненамного дороже углеродистых сталей, но по сравнению с ними имеют лучшие механические характеристики и эксплуатационные свойства, что приводит к большему экономическому эффекту. Улучшенным комплексом эксплуатационных свойств обладают высокопрочные среднелегированные стали. Механические свойства этих сталей

заметно повышаются после применения различных упрочняющих технологических методов. Наконец, высоким уровнем комплекса механических свойств обладают высокопрочные высоколегированные стали. Эти стали содержат, как правило, значительное количество различных легирующих элементов (никеля, титана, бериллия, алюминия, молибдена, хрома и др.), но относительная стоимость их является наиболее высокой. Однако стали этого класса все более широко применяются в первую очередь для ответственных конструкций и конструктивных элементов.

В определенных технических отраслях (например, авиационно-космической) широкое распространение получили так называемые «легкие» конструкционные материалы – *алюминиевые и магниевые сплавы*. Эти материалы наряду с малой плотностью обладают и хорошими механическими свойствами, в том числе и при повышенных температурах, являются коррозионно-стойкими сплавами, хорошо поддаются различным технологическим способам обработки (прокатке, прессованию, штамповке и т.д.). Наиболее известны алюминиевые сплавы типа дюралюминов (Д1, Д16, Д16Т, Д18 и т.д.) и алюминий-магниевого сплавы (АМг2, АМг5, АМг6 и др.), характеризующиеся хорошим сочетанием прочности и пластичности. Кроме того, для различных изделий применяются алюминиевые ковочные сплавы (АК6, АК8), высокопрочные алюминиевые сплавы (В93, В95, В96Ц1) и новые алюминиевые сплавы (1420, 1933), обладающие повышенной вязкостью разрушения при высокой прочности. Среди магниевых сплавов наибольшее применение получили деформируемые сплавы (МА2, МА5, ВМ65 и др.), которые нередко используются и при повышенных температурах (до 300°C). Применению алюминиевых сплавов способствует богатая сырьевая база и относительно невысокая стоимость их получения.

Титановые сплавы считаются возможным заменителем коррозионно-стойких сталей и алюминиевых сплавов. Эти сплавы образуют класс легких, прочных, коррозионноустойчивых и термостойких материалов, хорошо поддающихся холодной и горячей обработке (резанию, вытяжке, штамповке и т.п.). По механическим свойствам титановые сплавы разделяются на сплавы нормальной прочности, высокопрочные, жаропрочные, повышенной пластичности. В различных технических отраслях (авиационно-

но-космической, судостроении, криогенной, газовой, нефтяной и т.д.) применяются такие сплавы, как ВТЗ, ВТ5, ВТ15, ОТ4 и др. Более широкое использование титановых сплавов сдерживается, главным образом, относительно высокой стоимостью их промышленного производства.

Однако возможности традиционных материалов в плане их использования в несущих конструкциях практически ограничены. Например, для наиболее распространенных конструкционных материалов значения предела прочности (σ_s) и модуля упругости (E) составляют:

- легированные стали $\sigma_s = 1600 - 2200$ МПа, $E = 190 - 210$ ГПа;
- титановые сплавы $\sigma_s = 900 - 1200$ МПа, $E = 110 - 120$ ГПа;
- алюминиевые сплавы $\sigma_s = 450 - 550$ МПа, $E = 70 - 72$ ГПа.

Поэтому основные надежды в области создания перспективных конструкций связаны с применением новых, нетрадиционных материалов. Среди таких материалов особое место занимают композиционные материалы волокнистой структуры.

Композиционным (или композитом) называется материал, состоящий из двух или более разнородных компонентов. Компонентами волокнистых композитов являются армирующие волокна (наполнитель) и пластичная матрица (связующее). Обладая каждый в отдельности существенно различными свойствами, эти компоненты, соединенные вместе, образуют совершенно новый материал, часто с уникальными свойствами.

Творцом композитов по праву считается природа. Примерами природных композитов, так называемых *биокомпозитов*, являются древесина, стебли и листья растений, кожа, кости, мышечные ткани и т.д. Так, в дереве прочные длинные волокна целлюлозы связаны мягким, податливым лигнином. Секреты природных композитов человеком постигались и использовались в своих целях еще в древности: например, при изготовлении саманного кирпича в глину добавляли солому; упрочняли керамику растительными волокнами. Уже тогда было замечено, что за счет выбора компонентов, их структурной ориентации, объемного содержания можно получить новые материалы с улучшенными свойствами.

На разработку и промышленное освоение первых композиционных материалов ушло всего 15-20 лет. Это очень мало, если учитывать, что ранее только на поисковые работы по новым материалам затрачивалось в среднем 25 лет, прежде чем начиналось их промышленное освоение. Впервые волокнистые композиты появились в авиационно-космической техни-

ке. И это неслучайно. Дело в том, что для многих несущих конструкций комплекс технических требований включает не только требования по прочности, жесткости, устойчивости, но и требования малой материалоемкости. Все эти требования связаны как с конструкцией, так и с механическими свойствами материалов. Для пояснения рассмотрим общую схему расчета стержневой системы с использованием известных формул из курса сопротивления материалов (или механики материалов и конструкций).

Условия прочности как ограничения на максимальные напряжения (σ_{max} , τ_{max}) в конструкции включают использование прочностных характеристик материала и имеют вид:

$$\sigma_{max} \leq \frac{\sigma_{пред}}{n}, \quad \tau_{max} \leq \frac{\tau_{пред}}{n}, \quad (1.1)$$

где $\sigma_{пред}$, $\tau_{пред}$ – предельные напряжения для материала (σ_1 , $\sigma_{0.2}$ – предел текучести и условный предел текучести; $\sigma_в$ и $\sigma_{вс}$ – пределы прочности на растяжение и сжатие; $\tau_т$, $\tau_{0.2}$, $\tau_в$ – предел текучести, условный предел текучести и предел прочности на сдвиг); n – коэффициент запаса.

Условие жесткости как ограничение на максимальные перемещения (δ_{max}) в конструкции включает использование упругих характеристик материала и имеет вид:

$$\delta_{max} \leq [\delta], \quad (1.2)$$

где $[\delta]$ – допускаемое перемещение.

Перемещения в упругой стержневой системе определяются с помощью интеграла Мора

$$\delta = \int_l \frac{N_1 N ds}{EF} + \int_l \frac{M_{x1} M_x ds}{EJ_x} + \int_l \frac{M_{y1} M_y ds}{EJ_y} + \int_l \frac{M_{\kappa 1} M_\kappa ds}{GJ_\kappa} + \int_l \frac{Q_{x1} Q_x ds}{GF} + \int_l \frac{Q_{y1} Q_y ds}{GF},$$

где E , G – модуль упругости и модуль сдвига материала; N , ..., Q_y – внутренние силовые факторы в сечении стержня от заданной нагрузки; N_1 , ..., Q_{y1} – внутренние силовые факторы в сечении стержня от единичной нагрузки; EF , ..., GF – параметры жесткости стержня.

Условие устойчивости, т.е. ограничение на напряжения в сжатых элементах конструкции может включать использование как упругих (E), так и прочностных ($\sigma_{пред}$) характеристик материала и имеет вид:

$$\sigma_{сж} \leq \frac{\sigma_{кр}}{[n]_y}, \quad (1.3)$$

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \text{ при } \sigma_{кр} \leq \sigma_{лц}; \quad \sigma_{кр} = \sigma_{пред} - (\sigma_{пред} - \sigma_{лц}) \frac{\lambda^2}{\lambda_{пред}^2} \text{ при } \sigma_{кр} > \sigma_{лц},$$

где $\sigma_{сж}$ – действующие сжимающие напряжения (по абсолютной величине); $\sigma_{кр}$ – критические напряжения; $\sigma_{лц}$ – предел пропорциональности материала при сжатии; λ и $\lambda_{пред}$ – гибкость стержня и предельная гибкость; $[n]_y$ – нормативный коэффициент запаса устойчивости.

Материалоемкость конструкции определяется такими характеристиками материала, как плотность ρ [кг/м³] или удельный вес $\gamma = \rho g$ [Н/м³].

Для оценки эффективности материала в создании *прочной, жесткой и легкой конструкции* используются удельные характеристики материала:

- *удельная прочность* $\lambda_{\sigma} = \frac{\sigma_{в}}{\gamma}$ [м], (1.4)

- *удельная жесткость* $\lambda_E = \frac{E}{\gamma}$ [м]. (1.5)

Чем больше значения параметров λ_{σ} и λ_E , тем выше эффективность применения материала.

Таблица 1.1

| Материал | γ , кН/м ³ | $\sigma_{в}$, МПа | E , ГПа | λ_{σ} , м | λ_E , м |
|---------------------------|------------------------------|--------------------|-----------|------------------------|-------------------|
| Ст30 | 78 | 360 | 210 | $0,46 \cdot 10^4$ | $2,7 \cdot 10^6$ |
| легированная сталь 30ХГСА | 78 | 735 | 215 | $0,94 \cdot 10^4$ | $2,75 \cdot 10^6$ |
| дюралюминий Д16Т | 28 | 480 | 72 | $1,7 \cdot 10^4$ | $2,6 \cdot 10^6$ |
| магниевый сплав МА5 | 17 | 315 | 42 | $1,6 \cdot 10^4$ | $2,5 \cdot 10^6$ |
| титановый сплав ВТ5 | 45 | 850 | 105 | $1,9 \cdot 10^4$ | $23 \cdot 10^6$ |
| стеклопластик | 21 | 1500 | 60 | $7,1 \cdot 10^4$ | $2,9 \cdot 10^6$ |
| углепластик | 15 | 1400 | 180 | $9,3 \cdot 10^4$ | $12 \cdot 10^6$ |
| органоластик | 13,5 | 1600 | 90 | $11,9 \cdot 10^4$ | $6,7 \cdot 10^6$ |
| бороластик | 20 | 1600 | 210 | $8 \cdot 10^4$ | $10,5 \cdot 10^6$ |

Для сравнения в табл. 1.1 приведены физико-механические свойства и удельные характеристики некоторых традиционных и композиционных материалов. Из композиционных материалов рассмотрены полимерные композиты с однонаправленным армированием – стеклопластик, углепластик, органопластик и боропластик. Как видно из таблицы, композиты по приведенным характеристикам λ_{σ} и λ_E значительно превосходят традиционные материалы.

1.2. Компоненты композиционных материалов

В структуре композита можно выделить два компонента:

- *наполнитель* (армирующие волокна) – прочный и жесткий волокнистый материал;
- *матрица* (связующее) – вязкопластичный материал.

Назначение этих компонентов в создании нового материала разное. Наполнитель должен обеспечивать необходимые прочностные и жесткостные свойства композита. Матрица обеспечивает органичное и монолитное соединение компонентов в композите, распределяет действующие напряжения по объему материала, главным образом, создавая равномерное нагружение волокон (как «силового каркаса» композита). Поэтому используемые пары «наполнитель-матрица» должны быть совместимы друг с другом, т.е. обеспечивать прочную связь соединения волокон с матрицей при условии сохранения в наибольшей степени исходных механических свойств компонентов. Свойства композита нельзя определить только по свойствам компонентов, без учета их взаимодействия. Таким образом, *механические свойства создаваемого материала (композита) определяются тремя основными группами параметров: прочностью и жесткостью армирующих волокон, прочностью и жесткостью матрицы, прочностью связи на границе волокно-матрица.*

Содержание компонентов в композите принято оценивать коэффициентами объемного содержания волокон (V_v) и матрицы (V_m):

$$V_v = \frac{V_v}{V}, \quad V_m = \frac{V_m}{V}, \quad V_v + V_m = 1, \quad (1.6)$$

где V – полный объем композита; V_v , V_m – объемы волокон и матрицы, соответственно.

Часто объемное содержание компонентов выражается в % ($V_b \cdot 100\%$, $V_m \cdot 100\%$), коэффициент V_b называется *степенью армирования композита*.

Армирующие волокна. Армирующие волокна должны удовлетворять комплексу эксплуатационных и технологических требований. К первым относятся требования в обеспечении необходимых механических свойств (прочностных, жесткостных), физических свойств (плотности, термостабильности), химической стойкости и т.п. Ко вторым относятся технологичность волокон, определяющая возможность применения высокопроизводительных процессов для создания композитов и композитных изделий.

Армирующие волокна применяются в виде моноволокон, нитей, проволочек, жгутов, лент, сеток, тканей.

В композитах в качестве армирующих волокон используются различные материалы. Их можно представить в виде нескольких групп.

Первую группу образуют *стеклянные, углеродные, органические (арамидные) и борные волокна*. Для них характерны высокие прочностные свойства наряду с малой плотностью материала. Стекловолоконные волокна являются однородными и изотропными материалами. Органические, углеродные и борные волокна имеют ярко выраженные анизотропные свойства. Отметим некоторые характерные признаки этих волокон.

Стекловолоконные волокна обладают высокими прочностными свойствами, низкой теплопроводностью, теплостойкостью и химической стойкостью в агрессивных средах. Хорошо налажено промышленное производство стекловолоконных волокон, чему способствуют большие запасы исходного сырья и применение высокотехнологичных процессов. В настоящее время получение композитов на основе стекловолоконных волокон (стеклопластиков) является наиболее дешевым по сравнению с производством других композитов.

Углеродные волокна по ряду показателей обладают уникальными физико-химическими свойствами, что делает соответствующие композиционные материалы наиболее перспективными во многих технических областях. Для них характерны высокие показатели удельной прочности и жесткости, теплостойкости и химической стойкости. Существуют углеродные волокна высокомодульные ($E_1 = 300-700$ ГПа, $\sigma_1^+ = 2000-2500$ МПа) и высокопрочные ($E_1 = 200-250$ ГПа, $\sigma_1^+ = 2500-3200$ МПа). В настоящее

время более широкое применение композитов с углеродными волокнами сдерживается относительно высокой стоимостью их получения.

Все более широкое применение органических волокон связано с прогрессом в области создания и производства синтетических материалов. Высокомодульные и высокопрочные волокна на основе арамидов обладают широким спектром эксплуатационных свойств: низкая плотность и высокая удельная прочность, повышенные усталостные характеристики, термостабильность, негорючесть, хорошие диэлектрические свойства.

Впервые арамидные волокна появились под торговой маркой «кевлар» фирмы «Дюпон» в 1971 г. Наибольшее применение получили два вида этих волокон: кевлар-29 и кевлар-49, а также композиционные материалы на их основе.

Использование борных волокон в композитах определяется повышенными характеристиками статической и усталостной прочности, высоким значением модуля упругости, жаростойкостью. Чаще всего применяются борвольфрамовые волокна (тип В/В), получаемые в реакторах осаждением бора на вольфрамовую нить диаметром 12,5 мкм. Применение борных волокон ограничивается их относительно высокой стоимостью производства.

Свойства некоторых волокон этой группы [2] представлены в табл. 1.2.

Ко второй группе относятся *металлические волокна*: проволоки из стали, титана, вольфрама, бериллия, ниобия и других металлов и их сплавов. Такие материалы для волокон применяются чаще всего для того, чтобы придать композитам ряд необходимых эксплуатационных свойств, например, в условиях низких температур используются материалы на основе стальных и бериллиевых волокон; при умеренных и высоких температурах – материалы с вольфрановыми и молибденовыми волокнами. Металлические волокна считаются однородными и изотропными. Механические свойства некоторых металлических волокон [2] представлены в табл. 1.2.

К третьей группе можно отнести такие волокна, как *базальтовые* и *сапфировые*, на основе карбида кремния, полиэтиленовые. Большей частью это перспективные материалы. Для сравнения приведем основные физико-механические свойства волокон из карбида кремния:

$$\rho = 3300 \text{ кг/м}^3; E_1 = 400\text{-}500 \text{ ГПа}; G_{12} = 170 \text{ ГПа}; \sigma_1^+ = 2000\text{-}4000 \text{ МПа}.$$

Таблица 1.2

Физико-механические свойства волокон

| Волокна | ρ , кг/м ³ | E_1 , ГПа | σ_1^+ , МПа |
|---------------------------------|----------------------------|-------------|--------------------|
| <i>Стекланные</i> | | | |
| ВМ-1 | 2580 | 95 | 4200 |
| КС-7А | 2560 | 74 | 2000 |
| <i>Углеродные</i> | | | |
| ВМН-4 | 1710 | 270 | 2210 |
| Кулон | 1900 | 400-600 | 2000 |
| ЛУ-4 | 1700 | 250 | 3000-3500 |
| Элур | 1600 | 150 | 2000 |
| <i>Органические (арамидные)</i> | | | |
| Армос | 1450 | 140-142 | 5000-5500 |
| СВМ | 1430 | 125-135 | 3800-4200 |
| Терлон | 1450 | 130-160 | 3300-3600 |
| <i>Борные</i> | | | |
| В/В (Россия) | 2500 | 394 | 2950-3500 |
| Авсо, В/В (США) | 2500 | 390-400 | 3390-3470 |
| Toshiba, В/В (Япония) | 2500 | 363-393 | 3300-3600 |
| <i>Металлические</i> | | | |
| алюминиевые | 2700 | 70 | 290 |
| бериллиевые | 1850 | 310 | 1100 |
| титановые | 4500 | 110-120 | 550 |
| стальные (ВНС-9) | 7800 | 200 | 3500-3800 |
| молибденовые | 10200 | 334 | 1800-2000 |
| вольфрамовые | 19350 | 410 | 3300 |

В таблице использованы обозначения:

ρ – плотность материала;

σ_1^+ – предел прочности на растяжение вдоль волокна на базе 10 мм;

E_1 – модуль упругости вдоль волокна

Матричные материалы. К материалу матрицы предъявляют определенные эксплуатационные и технологические требования: по механическим и физико-химическим свойствам, устойчивости к воздействию внешней среды и др. Кроме того, материал матрицы оказывает определяющее влияние на выбор технологического метода изготовления композитных изделий, а также параметров технологического процессов.

Применяемые матричные материалы можно разделить на четыре группы: *полимерные, металлические, керамические и углеродные.*

В качестве *полимерной матрицы* используются терморезактивные и термопластичные связующие (так называемые реактопласты и термопласты). Термопласты способны размягчаться и затвердевать при изменении температуры; реактопласты отличаются тем, что при нагревании в них происходят необратимые структурные и химические превращения. К терморезактивным связующим относятся эпоксидные, полиэфирные, фенолформальдегидные и др. смолы. К термопластичным связующим относятся роливсан, нейлон, полиэтилены, полипропилен, полиамиды и др. Физико-механические свойства некоторых полимерных матриц [2] приведены в табл. 1.3.

Таблица 1.3

Физико-механические свойства полимерных матриц

| Материал матрицы | ρ , кг/м ³ | E , ГПа | $\sigma_{вр}$, МПа | $\sigma_{вс}$, МПа |
|------------------------------------------------|----------------------------|-----------|---------------------|---------------------|
| <i>Отвержденные терморезактивные связующие</i> | | | | |
| эпоксидные | 1250 | 2,4-4,2 | 35-100 | 90-160 |
| фенолформальдегидные | 1250 | 7-11 | 40-70 | 100-125 |
| полиэфирные | 1275 | 2,8-3,8 | 30-70 | 80-150 |
| <i>Термопластичные связующие</i> | | | | |
| роливсан НВ-1 | 1160 | 1,5-2,5 | 50-70 | - |
| нейлон 6,5 | 1140 | 2,8 | 83 | - |

Наибольшее применение для создания композиционных материалов и конструкций имеют реактопласты, в частности, эпоксидные связующие (смолы). Этому способствуют такие их свойства, как высокие механические характеристики, большая технологичность, хорошая адгезия к различным волокнам.

В *металлических композиционных материалах* в качестве матрицы используются главным образом легкие металлы и их сплавы: алюминиевые, магниевые, титановые. Наибольшее распространение получили алюминиевые сплавы, которые хорошо поддаются различным видам пластического деформирования, литью, технологическим процессам порошковой металлургии. Среди этих материалов можно отметить: деформируемые алюминиевые сплавы марок АМг и АМц (основные добавки – магний Mg и марганец Mn); упрочняемые дюралюмины Д1, Д6, Д16 и др. и сплавы марок АВ, АК, В95; литейные сплавы – силумины. Магниевые сплавы (МА2-1, МА5, МА8 и др.) обладают малой плотностью, хорошими прочностными свойствами. Деформируемые титановые сплавы (марки ВТ1-0, ОТ4-1, ВТ14 и др.) отличает, в частности, способность сохранять высокие прочностные свойства при повышенных температурах (300 ... 450°С). Однако магниевые и титановые сплавы заметно уступают по технологичности алюминиевым сплавам. Некоторые характеристики металлических матриц [2] приведены в табл. 1.4.

Таблица 1.4

Физико-механические свойства металлических матриц

| Материал матрицы | ρ , кг/м ³ | E , ГПа | $\sigma_{вр}$, МПа | $\sigma_{0,2}$, МПа | δ , % |
|------------------|----------------------------|-----------|---------------------|----------------------|--------------|
| алюминий | 2700 | 68-72 | 60-360 | 35-200 | 3-25 |
| магний | 1740 | 37-43 | 250-310 | 120-190 | 8-15 |
| титан | 4500 | 110-115 | 360-1050 | 265-900 | 6-40 |

Керамические матричные материалы (керамики) характеризуются высокой температурой плавления, стойкостью к окислению в агрессивных средах, прочностью при сжатии, сохраняющейся при высоких температурах. Термостойкие композиционные материалы получают с применением новых видов керамики на основе высокоогнеупорных оксидов алюминия, бериллия, магния, тория, ванадия.

Углеродная матрица по своим физико-химическим свойствам подобна углеродному волокну. В то же время материал матрицы обладает рядом качеств, придающих уникальные свойства композиту в целом: высокая термостойкость, хорошие прочностные свойства, низкая плотность, высо-

кая теплопроводность, окислительная стойкость.

1.3. Классификация композиционных материалов

Важнейшее преимущество композитов по сравнению с традиционными материалами заключается в возможности создания из них изделий - композитных конструкций и конструктивных элементов - с заранее заданными свойствами, наиболее полно соответствующими характеру и условиям работы таких изделий. Это достигается различными способами: соответствующим выбором компонентов, объемным содержанием компонентов в композите, структурной ориентацией волокон в матрице. Поэтому большой выбор материалов для волокон и матрицы, а также структурные особенности формирования композита позволяют получить многообразие композиционных материалов.

Чтобы отразить особенности композитов и ориентироваться в их многообразии, рассмотрим два типа классификации композиционных материалов (*КМ*), в основу которых положены определенные характерные признаки.

Классификация КМ по типу матрицы (рис. 1.1).

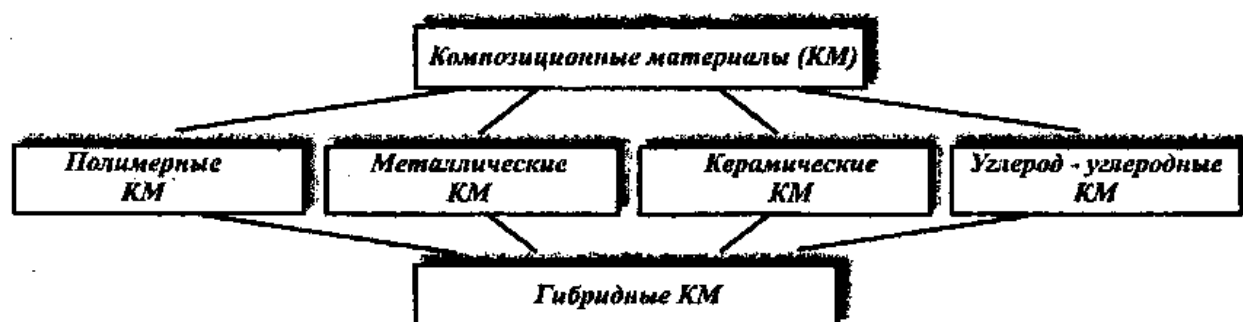


Рис. 1.1

В зависимости от типа матрицы композиты разделяются на следующие разновидности:

- полимерные композиционные материалы (*ПКМ*);
- металлические композиционные материалы (*МКМ*);
- керамические композиционные материалы (*ККМ*);
- углерод-углеродные композиционные материалы (*УУКМ*).

В полимерных композиционных материалах используются полимерные матрицы - термореактивные и термоластичные связующие. В качестве наполнителя применяются армирующие волокна из различных материа-

лов, с различной структурой (нити, ткани и т.д.). Поэтому именно для изделий из полимерных КМ характерно большое разнообразие эксплуатационных характеристик. Наибольшее распространение получили КМ на основе стеклянных, углеродных, органических и борных волокон. Такие полимерные КМ имеют и соответствующие названия: *стеклопластики, углепластики, органопластики, боропластики*. Чаще всего полимерные КМ применяются с объемным содержанием волокна $V_v = 0,6...0,75$, т.е. степень армирования составляет 60-75%.

К основным достоинствам полимерных композиционных материалов можно отнести *высокие удельные прочностные и жесткостные характеристики; химическую стойкость к агрессивным средам*. Кроме того, получение таких композиционных материалов и конструкций высокотехнологично: легко соединяются компоненты, применяются как многие традиционные техпроцессы (прессование и др.), так и новые (например, намотка).

В металлических КМ (*металлокомпозитах*) сочетаются достоинства традиционных материалов (металлических сплавов) с достоинствами композитов вообще. В металлокомпозитах в качестве матрицы используются, главным образом, легкие металлы и их сплавы: алюминиевые, магниевые, титановые. Армирующие волокна выполняются из металлических и неметаллических материалов. Применение металлических сплавов для матрицы и высокопрочных и высокомодульных волокон, имеющих хорошие прочностные и жесткостные свойства поперек волокон и на сдвиг, существенно повышает эффективность металлокомпозитов. В результате, им свойственны высокие значения прочностных характеристик, модулей упругости, ударной вязкости. Эти материалы сохраняют стабильность своих прочностных и жесткостных характеристик в более широком диапазоне изменения температур, чем полимерные КМ. Наиболее распространенным типом металлокомпозитов является *бороалюминий*, но применяются и такие материалы, как *углеалюминий* и *сталеалюминий*. Металлокомпозиты имеют степень армирования в широких пределах 20-80%.

Керамические КМ (*керамокомпозиты*) применяются с металлическими и неметаллическими волокнами. В качестве металлических обычно используются волокна вольфрама, молибдена, ниобия, стали. Для керамических КМ с металлическими волокнами характерны высокие показатели

термостойкости и ударной вязкости, но степень армирования не превышает 25%, т.к. иначе возрастает пористость материала и происходит его разрушение. В качестве неметаллических используются углеродные и керамические (из карбида кремния) волокна. Для углекерамических КМ степень армирования составляет 50–60%. Некоторое преимущество имеют керамика-керамические КМ, т.к. использование однородных материалов для матрицы и волокон повышает стойкость композита к окислению при высоких температурах, уменьшает анизотропию свойств. Керамические КМ могут работать до очень высоких температур порядка 1500-1800°С.

Углерод-углеродные КМ представляют собой карбонизированную или графитовую матрицу, армированную углеродными или графитовыми волокнами. (Карбонизированные волокна и матрица содержат 80-90% углерода, графитизированные – свыше 99% углерода.) Углеродная матрица обеспечивает высокую термостойкость композита и наибольшую эффективность реализации свойств углеродных волокон. Поэтому основные преимущества УУКМ состоят в повышенной теплостойкости, высокой термopрочности, малой плотности, стойкости к тепловому удару и облучению. Степень армирования в УУКМ обычно составляет 35-55%.

Свойства некоторых композиционных материалов приведены в *Приложении 3*.

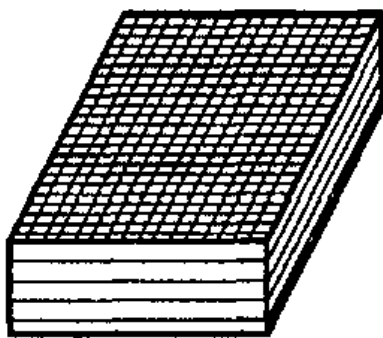
Классификация КМ по типу армирования (рис. 1.2). В зависимости от типа армирования, т.е. по структурному признаку, композиты разделяются на следующие разновидности:

- *одномерноармированные композиционные материалы* (рис. 1.2,а);
- *двухмерноармированные композиционные материалы* (рис. 1.2,б);
- *пространственно армированные композиционные материалы* (рис. 1.2,в);
- *хаотически армированные композиционные материалы* (рис. 1.2,г).

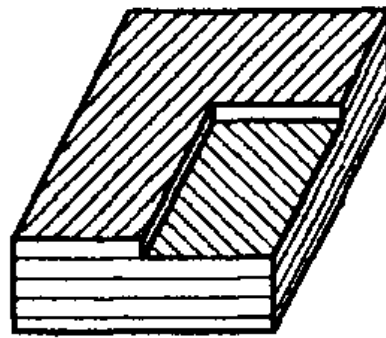
Свойства композита как нового материала в существенной степени зависят не только от свойств волокон и матрицы, от их объемного содержания, но и от способа армирования. Чаще всего используются непрерывные волокна в виде нитей, лент, жгутов; реже применяются короткие (измельченные) волокна. Как правило, композиты образуются из слоев с параллельно расположенными однонаправленными волокнами.



а) одномерное армирование

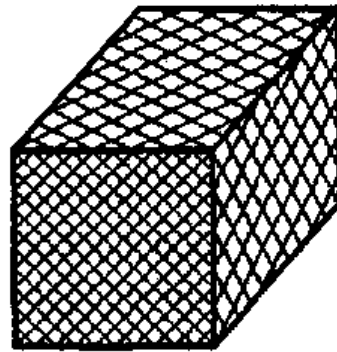
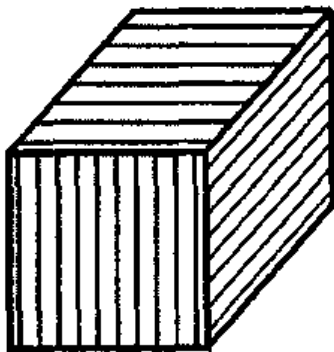


ортогональное

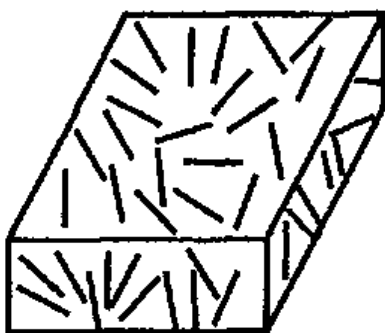


симметричное перекрестное

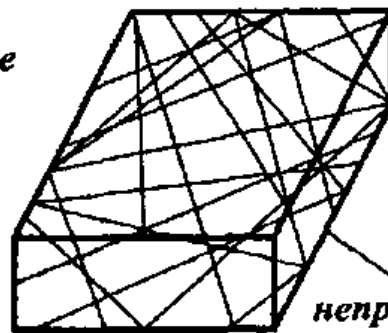
б) двухмерное армирование



в) пространственное армирование



*короткие
волокна*



*непрерывные
волокна*

г) хаотическое армирование

Рис.1.2

Если применяется одномерное (однонаправленное) армирование, то прочностные и жесткостные свойства (σ_a , E) для композита в наибольшей степени реализуются в направлении волокон. В других направлениях эти свойства могут очень сильно отличаться: например, для одномерноармированных углепластиков $\sigma_{a1}/\sigma_{a2} = 30 \dots 50$, $E_1/E_2 = 15 \dots 100$, где индекс «1» относится к характеристикам вдоль волокон, индекс «2» - поперек волокон. Следовательно, такие композиты будут наиболее эффективны в применении для конструктивных элементов, работающих в условиях одноосного напряженного состояния.

Двухмерноармированные композиты часто используют тканые армирующие материалы. Такие композиты обычно называют *текстолитами* (например, стеклотекстолит, углетекстолит и др.). Ткани различаются по типу переплетения волокон (полотняное, сатиновое, ситцевое и др.), от соотношения волокон в основе и утке (уточные нити имеют наибольшее искривление, т.к. проходят поперек основных нитей). Прочностные и жесткостные характеристики текстолитов в направлении основы выше, чем в направлении утка.

Среди двухмерноармированных композитов широко применяются и многослойные КМ, образованные последовательной укладкой нескольких отдельных слоев (так называемых *монослоев*), по-разному ориентированных в общей структуре композита. Каждый монослой представляет одномерноармированный материал, может иметь упругие характеристики, отличные от других слоев. Но за счет различной укладки волокон в слоях получается композит с обобщенными прочностными и жесткостными свойствами. Чаще всего применяются *ортогонально армированные* КМ и *симметрично (перекрестно) армированные* КМ (см. рис. 1.2,б). Последние состоят из $2n$ чередующихся слоев, из которых в n слоях армирующие волокна расположены под углом $+\varphi$ к оси, а в других n слоях – под углом $-\varphi$. схема укладки слоев $[\pm\varphi]$. Монослои могут иметь одинаковую или разную толщину. Кроме того, применяются и многослойные КМ, чередующие слои с различным направлением волокон (углом φ): например, композиты со схемами укладки слоев $[0^\circ/45^\circ/90^\circ/-45^\circ]$, $[30^\circ/-30^\circ/90^\circ]$ и т.д.

Основная цель двухмерноармированных композитов – выровнять прочностные и жесткостные свойства материала в плоскости. При этом,

конечно, значения прочностных характеристик и модулей упругости будут меньше соответствующих значений этих параметров для монослоя вдоль волокон. А в направлении, поперечном к плоскости армирования, эти характеристики будут гораздо хуже. Поэтому двухмерноармированные композиты применяются для конструктивных элементов, работающих в условиях двухосного напряженного состояния (оболочки, пластинки).

Пространственное армирование позволяет наилучшим образом формировать свойства композитов в том случае, если их нужно реализовать примерно в равной степени во всех направлениях. Для этого применяются различные схемы расположения волокон по трем и более направлениям (схемы армирования 3D, 4D и т.д.). В частности, пространственное, многонаправленное армирование является наиболее перспективным для УУКМ: в зависимости от типа волокон и их сочетания можно получить композиты с широким диапазоном изменения свойств.

Хаотически армированные КМ получаются в результате соединения матрицы с неориентированными непрерывными или короткими волокнами. По удельным характеристикам такие КМ заметно уступают материалам с другим видом армирования. Основными достоинствами хаотически армированных КМ являются хорошая технологичность и сравнительно низкая стоимость, в связи с чем их часто применяют для изготовления деталей несилового назначения. При этом наиболее распространены КМ, содержащие хаотически расположенные короткие волокна. Но с увеличением длины волокон и степени их ориентации механические свойства КМ повышаются.

Гибридные композиционные материалы. Гибридными КМ называются материалы, содержащие в своем составе три компонента и более. Такое сочетание компонентов позволяет еще больше регулировать свойства композита. Чаще применяются *полиармированные гибридные* КМ, состоящие из одной матрицы и армирующих волокон различного вида (например, *стеклеуглепластик, органоуглепластик*). Волокна используются в виде нитей или тканей. Реже применяются *полиматричные гибридные* КМ, состоящие из армирующих волокон одного вида и двух и более матричных материалов, имеющих поверхности раздела.

Существуют две основные причины получения и применения гибрид-

ных композиционных материалов: 1) повышение эксплуатационных характеристик композита за счет дополнительного компонента; 2) снижение стоимости композитного изделия. Например, повышение содержания углеродного волокна в стеклоуглепластике увеличивает прочность и модуль упругости композита, снижает плотность материала, но повышает стоимость композиционного материала и изделий из него по сравнению со стеклопластиком. Применение органоуглепластиков основано на хорошем совмещении арамидных и углеродных волокон благодаря близким значениям коэффициента линейного расширения. Можно добиться улучшения свойств таких гибридных КМ: добавление углеродных волокон повышает сдвиговые характеристики обычного органопластика, а использование арамидных волокон улучшает свойства ударной вязкости углепластика.

1.4. Трехслойные композитные конструкции

Трехслойные конструкции представляют особый класс композитных конструкций. В них сочетаются достоинства композиционных материалов и рациональная компоновка структурных элементов для получения прочных, жестких и легких несущих конструкций различного назначения в виде оболочек, пластин, панелей, балок. При заданных основных эксплуатационных показателях трехслойные конструкции обладают значительно меньшей массой по сравнению с дискретно подкрепленными или многослойными композитными конструкциями. Материалы несущих слоев и заполнителя подбирают так, чтобы обеспечить необходимый комплекс эксплуатационных свойств.

Трехслойные структуры были одними из первых композитных конструкций, получившими признание и применение. Впервые трехслойные конструкции были использованы в 1820г. для уменьшения массы несущих элементов. Но промышленное применение этой идеи началось только в 30-х годах 20-го века, и связано оно было с успехами производства клеевых соединений в ряде стран.

Трехслойная конструкция состоит из двух тонких несущих слоев, выполненных из высокопрочного материала, и легкого заполнителя между ними (рис. 1.3). Назначение этих структурных элементов различное.

Несущие слои воспринимают основные (нормальные) напряжения в конструкции, обеспечивают жесткость на изгиб пакета в целом и жесткость на сдвиг в плоскости несущих слоев. Заполнитель обеспечивает конструктивную связь несущих слоев для их совместной работы и восприни-

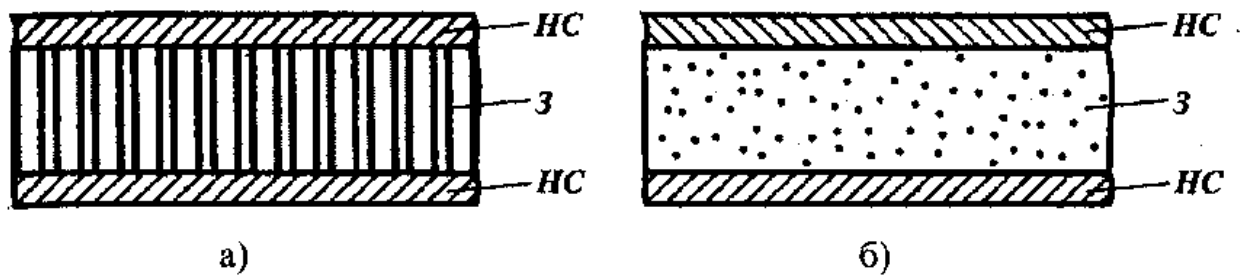


Рис. 1.3

мает поперечные касательные напряжения. Толщина заполнителя намного больше толщины несущих слоев, а прочностные характеристики и плотность материала заполнителя значительно ниже соответствующих показателей материала несущих слоев. Заполнитель должен быть легким и жестким. По типу заполнителя различают трехслойные конструкции с дискретным заполнителем (рис. 1.3,а) и сплошным заполнителем (рис. 1.3,б).

Эффективность трехслойных конструкций проявляется, главным образом, для несущих конструктивных элементов, работающих на изгиб: за счет расположения несущих слоев на относительно большом расстоянии между ними значительно возрастает изгибная жесткость (по аналогии с балками стандартного профиля – двутавром, швеллером). При этом за счет надлежащего выбора материалов несущих слоев и заполнителя трехслойные конструкции могут иметь и другие необходимые эксплуатационные показатели: хорошие тепло- и звукоизоляционные свойства, вибростойкость, высокую степень поглощения энергии.

В зависимости от выполнения несущих слоев трехслойные конструкции могут быть симметричными и несимметричными (или асимметричными). Симметричная конструкция получается в том случае, если несущие слои выполнены из одного материала и одинаковой толщины. В несимметричных трехслойных конструкциях может иметь место геометрическая асимметрия (несущие слои из одного материала, но различной толщины) или физическая асимметрия (несущие слои одинаковой толщины, но из разного материала). Причины применения несимметричных трехслойных конструкций могут быть разные: использование материала, хорошо работающего на сжатие (для обеспечения устойчивости сжатого несущего слоя); для получения конструкции наименьшей массы; для обеспечения специальных функциональных свойств (например, минимальной теплопроводности, радиопрозрачности) и т.п. Несущие слои чаще всего изготов-

ливаются из высокопрочных полимерных КМ (стеклопластика, углепластика, боропластика, органопластика), чтобы получить лучшие показатели по удельной прочности и жесткости. При необходимости для несущих слоев применяются металлокомпозиты (например, бороалюминий) и металлические сплавы (алюминиевые, титановые, высоколегированные стали).

Конструкции заполнителей могут быть самыми разнообразными, в литературе их приведено более трехсот. Заполнители подразделяются на *дискретные, сплошные и комбинированные (армированные)*.

Дискретный заполнитель обычно имеет пространственную регулярную структуру, присоединяется к несущим слоям не по всей их поверхности, а дискретно. По форме регулярной ячейки дискретные заполнители бывают различного типа: сотовые (шестигранные), трубчатые (цилиндрические), квадратные, коробчатые, гофрированные и т.п. Наибольшее техническое применение получили *сотовые заполнители* (рис. 1.4). В шести-

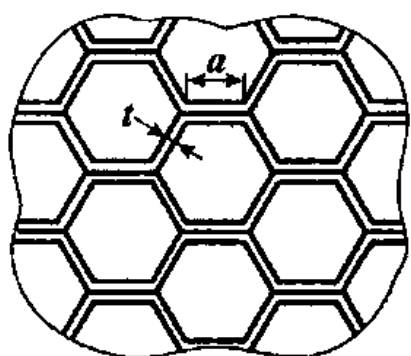


Рис. 1.4

гранных сотах материал используется наиболее экономично, такой заполнитель обладает более высоким пределом прочности, чем заполнитель с другой формой ячейки. Дискретные заполнители чаще всего изготавливаются из тонкой металлической фольги толщиной 0,02 ... 0,075 мм (из алюминиевых, алюминий-магниевого, титановых сплавов, сталей). Применяются и не-

металлические материалы для дискретных заполнителей: пластики, стеклоткани; хлопчатобумажные ткани и специальные бумаги, пропитанные определенным составом. В местах приложения локальной нагрузки на трехслойную конструкцию дискретный заполнитель обычно усиливают: увеличивают толщину фольговой ленты, уменьшают размеры ячеек, вводят дополнительную ленту и т.п.

В качестве *сплошного заполнителя* применяют различные пеноматериалы (так называемые *пенопласты* или *пенопластмассы*). Пенопласты имеют ячеистую структуру и относительно высокие прочностные и жесткостные характеристики. Получили распространение вспенивающиеся пенопласты на основе полистирола типа ПСБ, фенолформальдегидные пено-

пласты типа ФК-20, ФК-40 и пенополиуретановые пенопласты типа ПУ. Для них характерно значительное возрастание прочностных и жесткостных характеристик с увеличением плотности материала заполнителя. Поэтому свойства таких заполнителей изменяются в широком диапазоне. Выбор пеноматериала зависит не только от упругих, механических свойств и плотности, но и других показателей: термостойкости, вибростойкости, водопоглощения, звукопоглощения, стойкости к маслам и топливу и др.

Комбинированный заполнитель чаще всего представляет собой сплошной заполнитель, армированный высокопрочными волокнами для увеличения прочностных и жесткостных свойств. Нередко в состав пенопластов вводят мелкодисперсный алюминий для повышения прочностных свойств и их стабильности при работе трехслойных конструкций в условиях высоких температур.

Свойства некоторых заполнителей приведены в *Приложении 3*.

В заключение кратко отметим основные преимущества и недостатки трехслойных конструкций. К преимуществам можно отнести:

- малую массу и экономичность по сравнению с традиционными подкрепленными конструкциями; причем массовая эффективность тем выше, чем больше удельная жесткость и прочность несущих слоев;

- большую удельную прочность, высокую удельную жесткость и устойчивость при продольном сжатии;

- хорошие характеристики по усталостной прочности и долговечности (выше, чем у дискретно подкрепленных конструкций);

- хорошие тепло- и звукоизолирующие свойства;

- высокие показатели энергопоглощения;

- технологические преимущества (невысокая трудоемкость изготовления и сборки за счет уменьшения числа стыков и опорных элементов в конструкции, отсутствие дополнительных операций правки после пайки или сварки и др.).

В то же время трехслойным конструкциям свойственны и некоторые недостатки: снижение прочности клеевых соединений в процессе эксплуатации за счет старения клея; жесткие требования к технологическому процессу и его стабильности; необходимость применения эффективных методов и аппаратуры для неразрушающего контроля соединений заполнителя

и несущих слоев, расслоения и др. дефектов.

Более подробные сведения о трехслойных конструкциях можно найти в специальной литературе [3].

1.5. Технологические процессы изготовления композитных конструкций

На начальном этапе производство композитов сдерживалось высокими ценами на сырье и относительно медленными и дорогими способами получения этих материалов. Сейчас в этой области наблюдается существенный прогресс, и темпы ежегодного производства КМ в технически развитых странах являются очень высокими.

Создание конструкций из композиционных материалов имеет ряд характерных признаков, принципиально отличающих композитные конструкции от конструкций из традиционных материалов. В начале 80-х годов 20-го века был сформулирован основной принцип создания композиционных изделий, согласно которому вопросы выбора материалов, проектирования конструкции и разработки технологического процесса составляют единый взаимосвязанный процесс [4]. Таким образом, ставится и решается единая проблема «*материал-конструкция-технология*». В связи с этим вопросы технологии занимают важное место в решении этой проблемы.

Технологические методы, применяемые для создания композитных конструкций, включают как традиционные методы металлообработки, так и новые методы, отражающие специфику разрабатываемых композитных изделий. В отличие от традиционных металлообрабатывающих технологий процессы производства изделий из композитов имеют определенные преимущества: позволяют существенно повысить коэффициент использования материала и довести его до значений 0,8-0,95; сокращается количество технологических операций для изделий сложной формы; устраняются некоторые сборочные операции (сварка, клепка) заменой их клеевыми и клеомеханическими соединениями, которые образуются непосредственно при формовании. В результате может быть достигнуто снижение трудоемкости производства изделий из КМ в 1,5-2,5 раза по сравнению с аналогичными металлическими изделиями. При этом процесс производства композитных изделий представляет собой сложную многоуровневую систему взаимосвязанных технологических операций.

Технологические методы для полимерных КМ. Технология изготовления деталей из полимерных КМ включает такие основные операции: *подготовку армирующего наполнителя и связующего; совмещение арматуры с матрицей; формообразование детали; отверждение связующего в композитном материале (изделии); механическую доработку детали; контроль качества.* Для совмещения армирующих волокон с матрицей (связующим) применяются прямые и непрямые способы. К прямым относятся такие способы, при которых изделие формируется непосредственно из исходных компонентов КМ. Непрямыми способами называют такие, при которых изделие образуется из полуфабрикатов. В этом случае пропитка армирующих волокон связующим представляет самостоятельную операцию получения предварительно пропитанных материалов (*препрегов*) – нитей, жгутов, лент и тканей, которые после подсушивания частично отверждают.

Для переработки полимерных КМ в изделия различных размеров и конфигурации применяют многие технологические процессы формования [4]: *контактное формование, формование с эластичной диафрагмой, формование давлением, прессование в формах, пултрузия, намотка.* Контактное формование позволяет изготавливать изделия практически любых размеров, но достаточно простой конфигурации. Это весьма экономичный метод. Однако получаемые изделия обладают довольно большим разбросом механических и упругих свойств. Методами прессования (прямыми, литьевыми) получают детали и узлы различного назначения, формы и размеров, обладающие высокой механической прочностью и жесткостью. При пултрузии осуществляется протяжка волокон, пропитанных связующим и собранных в жгут, через клинообразную нагретую фильеру, где происходит уплотнение и отверждение материала.

Уникальным технологическим методом, разработанным для изготовления композитных конструкций, является *метод непрерывной намотки.* Особенностью этого метода является то, что *при намотке одновременно создаются композиционный материал и конструкция, причем с определенными (заданными) свойствами.*

Процесс намотки заключается в укладке волокон в виде нити, жгута, ленты или ткани на вращающуюся или неподвижную оправку, имеющую

конфигурацию внутренней поверхности изделия. После получения необходимой толщины и структуры материала производится отверждение готового изделия и удаление оправки. Технологические оправки разделяются на цельные, разборные и разрушаемые. Применяются и комбинированные оправки, включающие возможность одноразового и многократного использования.

Различают способы «сухой» и «мокрой» намотки. При «сухой» намотке армирующие волокна перед формованием предварительно пропитывают связующим на пропиточных машинах. Это позволяет добиться наиболее равномерного содержания связующего любого типа, повысить производительность процесса намотки. Способ «мокрой» намотки отличается тем, что пропитка армирующих волокон связующим и намотка на оправку совмещены. Преимущество этого способа в том, что требуется меньшее контактное давление формования. Как следствие можно применять оборудование с меньшей мощностью привода. (Наиболее универсальным оборудованием для намотки являются станки токарного типа.) Создание контактного давления формования может осуществляться технологическим натяжением армирующих волокон, локальным прижимом уплотняющим роликом или с применением того и другого одновременно. В зависимости от типа укладки волокон существуют различные *способы намотки*: прямая (окружная), спиральная, продольно-поперечная, спирально-перекрестная и др. Это позволяет изготавливать изделия различной конфигурации, «управлять» получением необходимых упругих и механических свойств композиционного материала (изделия), варьировать технологические стадии и физико-химические процессы образования структуры композита, использовать однослойную или многослойную укладку и т.д. Кроме того, совершенствование методов намотки и их широкое применение обеспечивается и возможностями автоматизации технологического процесса. Метод непрерывной намотки особенно эффективен при изготовлении композитных оболочек вращения сложной формы с различными схемами армирования. Наиболее эффективна укладка волокон (нитей, жгутов и т.д.) в направлении действия главных напряжений, т.е. структура армирования композиционного материала учитывает напряженное состояние, которое возникает в созданной конструкции при ее нагружении. Методы намотки

применяются для изготовления баллонов высокого давления цилиндрической и сферической формы, баков, корпуса ракетных двигателей, стволов орудий и корпуса снарядов, трубопроводов различного назначения и др. изделий.

Технологические методы изготовления конструкций из металлических КМ. Существует большое разнообразие технологических процессов получения и обработки изделий из металлокомпозитов [2, 4]. В зависимости от агрегатного состояния металлической матрицы различают газо- и парофазные методы, жидкофазные, твердофазные и комбинированные.

На предварительной стадии изготовления деталей и конструкций получают однослойные полуфабрикаты в виде волокон с покрытиями, жгутов, лент, сеток. Впоследствии их используют в качестве элементов сборных многослойных заготовок (лент, листов, полос, плит, труб, проволоки). Затем они подвергаются процессам формообразования, раскроя, сварки, механической обработки. Для получения сборных заготовок используются различные способы и методы: укладка и намотка волокон в матрице; метод плазменного напыления металлической матрицы; методы непрерывного литья матричного материала. Для повышения качества изделий из металлокомпозитов на стадии получения полуфабрикатов обеспечивается равномерная укладка волокон в матрице, отсутствие окисления поверхности волокон, непопадание загрязнений (например, из атмосферы цеха) на контактные поверхности компонентов материала.

Газо- и парофазные методы используются, в основном, для нанесения технологических покрытий на волокна и детали для придания им особых свойств. Для этого применяются плазменные, газоплазменные, электродуговые и другие методы напыления металлической матрицы. Из жидкофазных процессов получения КМ широко применяются методы пропитки заготовок: вакуумная, компрессионная, вакуумно-компрессионная, пропитка расплавленной матрицы под давлением.

Наибольшее распространение получили твердофазные процессы, которые могут быть статическими, динамическими, импульсными. Часто применяется процесс диффузионной сварки под давлением для твердофазного совмещения матрицы и волокна. Процесс сварки происходит без расплавления основного металла в результате нагрева и сдавливания соеди-

няемых деталей. В месте сварки осуществляется диффузия (распространение) одного материала в другой. Обычно процесс диффузионной сварки проводят в вакууме при определенной температуре, а поверхности соединяемых деталей предварительно тщательно зачищают и подгоняют. При этом наличие вакуума не только обеспечивает более интенсивное протекание процесса, но и повышает его качество. Однако для металлокомпози- тов, состоящих из пластичной малопрочной матрицы и высокотвердого наполнителя, процесс сварки часто упрощается: вместо вакуума сварка проводится в среде инертных газов, а иногда и в воздушной среде. Исходные материалы применяются в разном виде: матрица чаще всего используется в виде фольги металлов или сплавов, наполнитель – в виде нитевидных кристаллов, волокон, проволок, жгутов, тканей, сеток. Для осуществления диффузионной сварки деталей или полуфабрикатов из КМ используется специальное оборудование и оснастка, мощные прессы, автоклавы и др. Основной операцией процесса диффузионной сварки под давлением является прессование. Именно при выполнении этой операции происходит соединение отдельных заготовок в компактный материал, т.е. осуществляется формование изделия. В отличие от прессования как традиционного метода обработки металлов давлением данный процесс протекает в замкнутом объеме (в пресс-форме) и с незначительной пластической деформацией материала матрицы. Существуют четыре разновидности процесса прессования: прессование в замкнутых пресс-формах и между обогреваемыми плитами; ступенчатое прессование; изостатическое или автоклавное прессование; динамическое горячее прессование. Среди импульсных методов наиболее широко применяется сварка взрывом. Взрывное прессование позволяет изготавливать изделия сложной формы, крупногабаритные изделия или полуфабрикаты, получение которых обычными методами сварки затруднено или невозможно. Как правило, сварку взрывом применяют для изготовления изделий из слоистых КМ, содержащих либо разнородные металлические слои, либо пластичную матрицу и высокопрочную проволоку в качестве наполнителя.

Технологические методы изготовления конструкций из углерод-углеродных материалов. Как уже отмечалось, для УУКМ самым распространенным является многонаправленное пространственное армирование,

позволяющее получить композиционные материалы с необходимыми свойствами. Такие образования называются пространственными армирующими структурами (ПАС), а составляющие их компоненты – элементами пространственных армирующих структур (ЭПАС). На практике используются семь хорошо сбалансированных схем армирования, а также их модификации. Пространственные армирующие структуры получают плетением волокнистых жгутов или сборкой из жестких стержней. Изготовление стержней осуществляется на специальных установках, где ориентированные углеродные волокна пропитываются терморезактивными и термопластичными смолами, протягиваются через отверстие определенной формы (фильеру) для уплотнения и формования по заданному профилю, а затем в двух термокамерах проводятся операции сушки, дополнительного уплотнения и термообработки. Для усовершенствования процесса изготовления ПАС пустотелых тел вращения, а также для оптимизации соотношения цены и качества УУКМ изделий разработаны и применяются разные технологические способы: намотка нитей в двух направлениях между металлическими стержнями, которые потом заменяются нитями; намотка нитей в двух или трех направлениях на специальных приспособлениях; прошивка нитью слоев ткани в радиальном направлении и т.д.

Механическая обработка композитов. Для изготовления деталей из композиционных материалов требуемых размеров и качества поверхности применяют как традиционные методы механической обработки, так и новые. В качестве традиционных видов механической обработки используются точение, сверление, разрезка, зенкерование, нарезка резьбы, шлифование и др. В то же время при обработке резанием композитных деталей необходимо принимать во внимание ряд особенностей. К ним относятся:

- анизотропия свойств КМ, в связи с чем существует различие при обработке детали вдоль и поперек волокон; сильно сказывается на качестве обработки и схема армирования КМ;

- слоистая структура КМ; нередко наблюдается «разлохмачивание» перерезанных волокон, расслоение материала и другие явления, ухудшающие качество обработанной поверхности детали;

- для обработки композитных деталей, имеющих высокотвердый наполнитель, необходимо применять инструмент из сверхтвердых материа-

лов;

- интенсивное абразивное воздействие наполнителя, особенно при обработке деталей из высокопрочных полимерных КМ, имеющих стеклянные, борные, углеродные волокна;

- в большинстве случаев невозможно применение смазочноохлаждающих жидкостей из-за высокого влагопоглощения многих КМ (это приводит к необратимому изменению физико-механических свойств материала);

- специфические требования техники безопасности из-за выделения мельчайших частиц материала при резании.

Кроме того, необходимо принимать во внимание, что при механической обработке происходит перерезание волокон армирующих волокон поверхностных слоев КМ (это приводит к снижению прочности композитных изделий до 20%), изменяется шероховатость поверхности изделия (влияет на такие качества материала, как влагопоглощение, прочностные характеристики, износостойкость и т.д.).

К новым, нетрадиционным относятся методы, основанные на использовании энергии водяной струи, лазерные методы, различные комбинированные методы. Новые методы чаще всего используются в тех случаях, когда традиционные методы не позволяют получить те или иные технологические параметры изделия. Например, для получения отверстий малого диаметра (0,05 мм и менее) используются лазерные установки.

В последние годы промышленные лазеры успешно применяют для резки деталей из полимерных КМ, что обеспечивает получение точных, чистых резов при высоких скоростях резания. Есть и другие преимущества лазерной резки композитных деталей по сравнению с механическим резанием: отсутствие силы резания (поэтому нет опасности расслоения и расщепления разрезаемого материала); отсутствие особых требований к рабочей среде, малая зона термического воздействия; упрощается технологическая оснастка и оборудование.

К высокоэффективным методам обработки композиционных материалов относится и ультразвуковая механическая обработка. Этот метод основан на явлениях, сопровождающих процессы введения ультразвуковых колебаний в рабочую среду или в зону контакта инструмента с обрабатываемым материалом.

мой поверхностью. За счет подбора частоты, амплитуды колебаний и их направления относительно скорости резания можно оптимизировать процесс ультразвуковой обработки. Практика показывает, что весьма эффективна ультразвуковая обработка композитов и керамики специальными алмазными инструментами. Например, сверление глубоких отверстий малого диаметра (2 - 8 мм), фрезерование пазов и канавок, доводка изделий в виде тел вращения.

Изготовление трехслойных конструкций. В технологическом плане трехслойные конструкции имеют ряд достоинств: невысокая трудоемкость при проектировании сборочных узлов за счет уменьшения числа стыков и опорных элементов конструкции; меньшее число деталей, составляющих узел или агрегат, по сравнению с подкрепленными конструкциями другого типа, высокое качество внешней поверхности. Для соединения несущих слоев и заполнителя применяются различные способы. Трехслойные сотовые панели соединяются сваркой металлических несущих слоев или с помощью вкладышей различных конструкций. Вкладыши крепятся сваркой, болтовым соединением; возможно и комбинированное соединение. Для клеевого соединения используются жидкие и пленочные клеи различных марок (ВК-200, ВС-10Т, ВК-3 и др.). Для повышения прочности клеевого соединения сотового заполнителя с несущими слоями применяют специальные клеевые пленки, армированные стеклосетками, уменьшают размеры ячеек, заполняют соты пенопластом и др. Кроме того, при соединении металлических структурных элементов (несущих слоев и заполнителя) применяется и пайка.

Для соединения трехслойных клееных панелей из неметаллических материалов между собой и с элементами каркаса вместо заполнителя закладывают, как правило, профили, вкладыши, втулки различной формы и т.п. Если стык трехслойной панели работает на растяжение или сжатие, то применяются специальные технологические варианты сборки панелей с помощью болтовых соединений и клеев. Для изготовления крупногабаритных оболочечных трехслойных панелей (например, параболического рефлектора, отсеков космических ракет и аппаратов и т.д.) применяются технологические процессы на базе различных методов формования [4].

Сотовая структура является наиболее распространенным типом дис-

кретного заполнителя трехслойных конструкций. Существует два основных процесса изготовления сотовой структуры: 1) процесс растяжения – пакет листов (из металлической фольги или другого материала), предварительно соединенный по исходным линиям, растягивается, одновременно образуя ячеистую структуру; преимущества процесса – одностадийность операции; 2) процесс рифления – листы исходного материала предварительно подвергаются рифлению; причем некоторые материалы термофиксируются, а затем склеиваются или соединяются другим способом.

Важным элементом техпроцесса производства трехслойной сотовой конструкции является выбор клея. Клеи должны обеспечить прочность и жесткость соединения, исключить пористость и отслоения в области контакта соединяемых конструктивных элементов. Для этого технологический процесс производства трехслойной сотовой конструкции обязательно должен удовлетворять трем условиям: использовать давление; использовать температуру (в соответствии с величиной давления и временем отверждения клея); наличие соответствующего инструмента и оборудования.

1.6. Области применения композиционных материалов

Сфера применения композиционных материалов весьма обширна, причем постоянно расширяется по мере развития технического прогресса. Это вызвано необходимостью повышения эксплуатационных характеристик создаваемых технических изделий, улучшения потребительских качеств товаров и многими другими причинами. Специфические свойства композитов и возможности реализации конструкторских разработок открывают широкие возможности для развития различных отраслей техники. Применение композитов позволяет снизить массу конструкций в 1,3-1,5 раза, материалоемкость – в 1,6-3,5 раза, энергоемкость производства – в 8-10 раз и трудоемкость изготовления – в 1,5-3 раза. Использование композитов приводит к резкому уменьшению потерь от коррозии, а также в 1,5-3 раза увеличивает ресурс техники.

Остановимся лишь на некоторых областях применения КМ, наиболее ярко отразивших совершенствование конструкций и изделий за счет использования новых материалов.

Авиационно-космическая техника. В этой области впервые начали применяться композиционные материалы, т.к. масса летательных аппара-

тов имеет огромное значение: оказывает прямое влияние на основные эксплуатационные показатели (дальность полета, расход топлива, полезную нагрузку и др.). Использование композитов позволяет уже сейчас снизить 15-20% массы по сравнению с конструкциями из традиционных материалов.

Первые высокопрочные композиты в виде армированных пластиков появились в начале 40-х годов 20-го века, а в середине 40-х годов уже успешно применялись стеклопластики. В нашей стране в авиационной технике различные стеклопластики начали использовать при создании спортивных планеров (в начале 60-х годов), а затем – в самолетных конструкциях. В отечественной авиации наиболее заметно композиты были представлены в конструкциях транспортного самолета «Руслан», самолетов «ИЛ-96», «ТУ-204». Композиционные материалы использовались при создании космических аппаратов «Колумбия», «Буран» и др. Применение композитов в ракетно-космической технике подняло на качественно новый уровень самолетостроение. Новые модели дозвуковых и особенно сверхзвуковых самолетов все в большей степени используют композиционные материалы. Показательным примером является американский спортивный самолет «Вояджер», полностью сделанный из композиционных материалов, благодаря чему летчики совершили на нем беспосадочный облет земного шара в 1987 году.

Промышленное создание и применение новых композиционных материалов, особенно с улучшенными свойствами, в авиационной, ракетной и космической технике в будущем будет возрастать, что определяется требованиями улучшения экономических характеристик, уменьшения массы и стоимости технических изделий. В конце 20-го века в отечественной авиационной и ракетно-космической технике доля композитов в общей массе конструкции составляла [4]: для пассажирских самолетов – 15-25%; для транспортных самолетов – 15-25%, для боевых самолетов – 25-30%, для боевых вертолетов – 45-55%, для космических аппаратов – 15-20%, для стратегических ракет с жидкостным ракетным двигателем (ЖРД) – 25-30%, для стратегических ракет с ракетным двигателем твердого топлива (РДТТ) – 75-80%.

В самолетах композиты используются для изготовления отсеков фюз-

зеляжа, обшивки крыльев, стоек шасси, дисков компрессоров газотурбинных двигателей и т.д. В ракетно-космической технике из композитов выполняются отсеки, баки, высокопрочные и высокожесткие штанги ферм, панели, антенны, рефлекторы космических аппаратов и станций и др. Для изготовления этих конструктивных элементов используются такие материалы, как углепластик, стеклопластик, боропластик, бороалюминий. Керамические и углерод-углеродные КМ применяются для изготовления конструктивных узлов, работающих при высоких температурах: носовых обтекателей ракет, сопловых блоков, вкладышей критического сечения двигателей (ЖРД и РДТТ), лопаток турбин и т.д.

Особо следует отметить применение в этой технической области трехслойных конструкций, в виде которых делаются обечайки и днища баков, обшивка самолетов, межбаковые перегородки, панели солнечных батарей, солнечные газотурбинные установки, параболические антенны, рефлекторы и др.

Автомобилестроение. Прогресс в автомобилестроении непосредственно связан с разработкой новых, композиционных материалов и техпроцессов создания композитных конструкций. Поэтому использование композитов, главным образом полимерных КМ, стало одним из магистральных направлений совершенствования автомобильных конструкций. Ведущие зарубежные фирмы США, Франции, Италии, Германии, Японии, Швеции и др. стран разрабатывают свои программы и проекты создания автомобилей с максимальным использованием композиционных материалов. Эта тенденция замены традиционных материалов на КМ для изготовления различных деталей легковых и грузовых автомобилей началась в конце 80-х годов 20-го века и, по оценке специалистов, достигнет пика к середине настоящего столетия [5]. На основе функционально-стоимостного анализа приоритеты в выборе материалов для автомобиля располагаются следующим образом: экономичность, снижение массы, оптический и стилистический эффект, технологичность, функциональные требования (ударная прочность, жесткость, теплоустойчивость и т.п.), преимущества при текущем ремонте, коррозионная стойкость.

В настоящее время более широкое применение КМ в автомобилестроении сдерживается их относительно высокой стоимостью. По мере ее

снижения все большее число деталей, особенно несущих элементов конструкций, будет изготавливаться из КМ. При этом ведущим направлением является создание блочных, больших структурных сегментов из КМ, позволяющих облегчать сборку и ремонт автомобиля, снижать массу изделий и энергозатраты. Необходимость уменьшения массы автомобиля очевидна: по мнению специалистов, снижение массы на 10% позволяет экономить 10-20% топлива. Кроме того, улучшаются и другие характеристики автомобиля: скорость, маневренность и т.п.

Постоянно расширяется номенклатура деталей легковых и грузовых автомобилей, изготавливаемых из композиционных материалов: кузовные детали, бамперы, детали подвески, рамы, баки горючего, детали топливной системы, керамические роторы и другие детали двигателя, крылья, детали тормозной системы, корпус коробки скоростей, детали подкапотного пространства и многие другие конструктивные элементы. Если в начале для большинства деталей из КМ применялись *стеклопластики*, то сейчас серьезную конкуренцию им оказывают *углепластики*, которые имеют более высокие удельные прочностные и жесткостные характеристики. В первую очередь это касается *несущих (силовых) элементов конструкций*: рессора, бампер, кузов, детали трансмиссии и т.п. Сдерживающим фактором более широкого применения углепластиков является их относительно высокая стоимость; поэтому нередко применяются *гибридные КМ (стеклоуглепластики)*. В качестве примера можно отметить преимущества использования композиционных материалов для рессор легковых и грузовых автомобилей [5]. *Рессоры из КМ по сравнению со стальными имеют уникальные свойства: масса снижается на 50-80%, повышается коррозионная стойкость, появляется возможность создания принципиально новой конструкции подвески, низкий коэффициент линейного температурного расширения, крайне низкие тепло- и электропроводность, способность значительно снизить внутреннее трение в рессорах и шум.*

Применение композиционных материалов расширяется и для деталей, работающих в сложных условиях (при сочетании воздействия напряжений и среды – топлива, масла, тепла, грязи и т.п.). К ним относятся днище кузова, детали подкапотного пространства, топливные баки, трубопроводы, картеры, маслосборники и др. Органические волокна типа «Кевлар-29»

применяются для изготовления корда, идущего на армирование шин.

Общим недостатком изделий из КМ является сложность утилизации и повторной переработки отходов производства и деталей, снятых с автомобилей, отработавших свой ресурс. Однако эти недостатки в большей мере относятся к полимерным КМ на основе термореактивного связующего. Термопластичные связующие экологически безвредны при переработке и эксплуатации, а потому КМ на их основе находят все более широкое применение в автомобилестроении [5].

Судостроение. Композиты в виде стеклопластиков начали применяться в судостроении еще в 40-х годах прошлого века, т.е. практически с начала их промышленного производства. Здесь сказалось удачное сочетание нескольких свойств КМ: высокой удельной прочности, долговечности, стойкости к морской среде, простоты эксплуатации и ремонта, проявления немагнитных и диэлектрических свойств и др. Кроме того, возможность варьирования жесткостных свойств КМ в широком диапазоне позволяет конструкторам проектировать и использовать гибкие элементы, что нельзя было получить с использованием металлических сплавов. При выборе КМ особое внимание обращают на стабильность прочностных и жесткостных свойств в морской воде.

Композиты, главным образом стеклопластики, используются для создания судов различных размеров гражданского и военного назначения, а также для разнообразных элементов судовых конструкций, таких, как обтекатели, корпусные и полукорпусные детали, палубные надстройки, мачты, резервуары, поплавки и буи. Трехслойные панели используются в отделке интерьеров судов. Часто практически полностью изготавливаются из стеклопластика малые суда (прогулочные катера, яхты, шлюпки, моторные лодки) с корпусом длиной 5-25 м. Полимерные КМ применяются для создания глубоководных спасательных судов.

Стеклопластики наиболее широко применяются в судостроении вследствие своей дешевизны по сравнению с другими КМ. Однако в последние годы резко возрос интерес к углепластикам, органопластикам, боропластикам как КМ с улучшенными свойствами. Они применяются для кораблей с хорошими эксплуатационными характеристиками: военноморских судов различного типа, кораблей на подводных крыльях и на воз-

душной подушке и др. Возрастание стоимости нередко компенсируется низкими расходами на эксплуатацию и ростом полезной нагрузки (топлива, вооружения).

Легкая промышленность. Различные отрасли легкой промышленности осваивают производство изделий и товаров из композиционных материалов. В силу своих уникальных свойств особенно прогрессивно новые материалы применяют в спортивной индустрии, в производстве товаров для активного отдыха. Благодаря применению композитов для изготовления спортивного снаряжения значительно выросли достижения спортсменов в различных видах спорта. И здесь в наибольшей степени нашли применение полимерные композиционные материалы (стеклопластики, углепластики, органопластики), из которых изготавливаются лыжи и лыжные палки, теннисные ракетки, шесты, хоккейные клюшки, лодки и весла, удильца, велосипеды, спортивные автомобили и многие другие изделия. Можно привести показательный пример использования гибридных КМ в спортивной продукции известной финской фирмы «Пелтонен», которая выпускает целую серию лыжных палок из стеклоуглепластика: различное содержание стеклянных и углеродных волокон позволяет предлагать потребителю соответствующие изделия надлежащего качества с различным соотношением «стоимость-масса».

Другие технические отрасли. В связи с очевидной перспективностью композиционных материалов неуклонно увеличивается потребность и доля их применения в различных отраслях промышленности и строительства. Только в период 1990-1996гг. доля композитов в различных технических отраслях выросла в 10 раз. При этом в энергетическом машиностроении применение композитов выросло на 40%, в нефтяной и газовой промышленности – на 15%, в химическом машиностроении – на 20%, в строительстве – на 10% и т.д. В этих отраслях композиты как эффективная замена традиционных материалов используются для сосудов высокого давления, баллонов, емкостей и резервуаров; опор, балок и каркасов; контейнеров для хранения и транспортировки взрывчатых и агрессивных веществ; трубопроводов и газоходов и др. [4].

В *строительстве* все шире применяют новые строительные материалы со специально армированной и ячеистой структурой, особенно в круп-

ногабаритных сооружениях. Базальтобетонные конструкции позволяют не только сэкономить применение стали, но и существенно продлить срок службы зданий и сооружений. Из композиционных материалов делают перегородки для немагнитных строительных конструкций. Трехслойные конструкции активно применяют в домостроении для изготовления дверей, перегородок, панелей сборных домов, конструктивных отделочных блоков и др. деталей.

В *трубопроводном транспорте* применение КМ вместо традиционных материалов, главным образом сталей, уже приносит значительный экономический эффект. Повышение надежности и безопасности, коррозионной стойкости, уменьшение стоимости изготовления, прокладки и использования трубопроводов различного назначения и многие другие факторы являются результатом применения композиционных материалов.

Можно отметить применение композитов для изготовления *тросов, канатов, кабелей резинотехнических изделий*. Например, композиты на основе органических волокон «Кевлар-29» и «Кевлар-49» быстро заменили стальные канаты при глубоководных исследованиях. Использование волокон типа «Кевлар» в кабелях уменьшает стоимость транспортных работ и позволяет использовать более экономичное оборудование.

В основе дальнейшего роста промышленного производства композитов лежат многолетний удачный опыт их применения и результаты новых исследований. Эффективность применения новых материалов будет определяться их значимостью на рынках сбыта и экономическими показателями. Некоторые сведения о новых перспективных материалах можно получить в трудах международной конференции [6].

1.7. Расчет композитных многослойных балок

Композитные балки становятся распространенными конструктивными элементами различного назначения. Именно применение композиционных материалов позволяет обеспечить не только необходимую прочность и жесткость, но и малую массу балки по сравнению с металлическими балками.

Строго говоря, композитный материал является неоднородным. При этом различают два уровня неоднородности композиционного материала: *микрон неоднородность*, определяемая соединением двух разнородных компонентов – волокон и матрицы (рис. 1.5), и *макрон неоднородность*, связан-

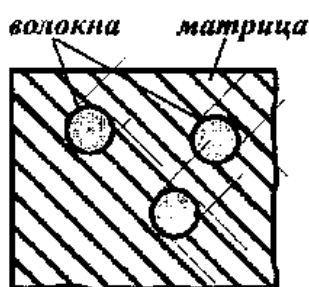


Рис. 1.5

ная с наличием в материале различно ориентированных микронеоднородных слоев. Учитывая малый диаметр волокон и их равномерное распределение по объему, каждый слой можно считать условно однородным и анизотропным. При этом слои композиционного материала обладают некоторыми осредненными механическими свойствами в характерных направлениях (модулями упругости, коэффициентами Пуассона, пределами прочности). В расчетном анализе композитных конструкций такие свойства считаются известными. Слои могут выполняться из разных материалов, различной толщины, с различными углами армирования (направлением волокон) и т.д. При расчете композитных конструкций обычно учитывается только второй уровень неоднородности материала, т.е. считается, что материал состоит из совокупности условно однородных слоев, осредненные свойства которых известны.

1.7.1. Структура композитных балок

Конструктивно композитные балки могут быть представлены по-разному: полностью изготовлены из определенного композиционного материала; иметь многослойную структуру (рис. 1.6,а), в которой слои выполнены из различных композиционных материалов; в виде трехслойной балки (рис. 1.6,б).

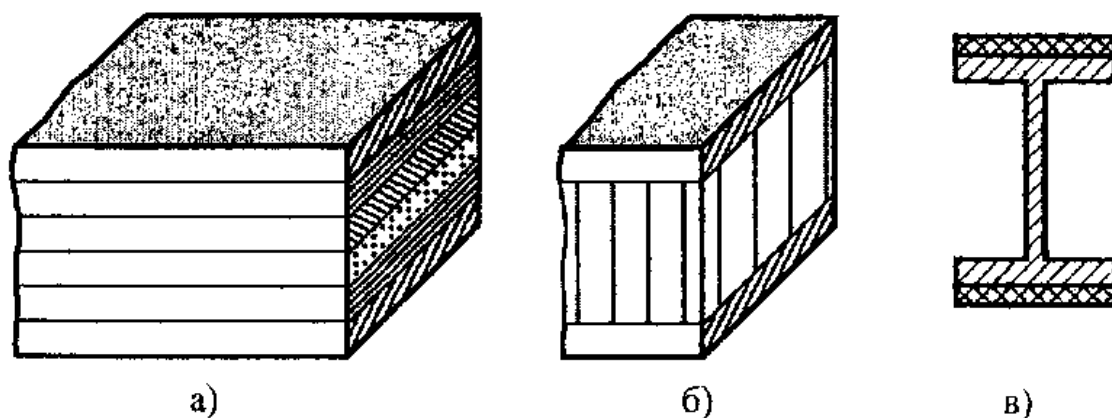


Рис. 1.6

Композиционные материалы можно использовать и для усиления металлических балок. Например, применение накладок из однонаправленного углепластика или боропластика повышает жесткость и прочность дюралюминиевой балки (рис. 1.6,в), т.к. модуль упругости и прочностные свой-

ства вдоль волокон этих композитов выше, чем у дюралюминия. Таким образом, при проектировании композитных балок необходимо учитывать как механические свойства используемых материалов, так и расположение слоев из этих материалов в общей структуре балки. Поэтому механические свойства материала должны быть известны, хотя эта задача не является такой простой, как для традиционных, однородных и изотропных материалов.

1.7.2. Определение свойств композитов

Свойства материала зависят от свойств отдельных компонентов, их объемного содержания, а также и от условий их взаимодействия в композиции. Осредненные упругие характеристики композита можно получить аналитическим путем, моделируя механизм взаимодействия компонентов. Такие задачи обычно рассматриваются в микромеханике композитов, где применяют различные модели на основе ряда допущений. В силу определенной идеализации расчетных моделей, не учитывающих в полной мере реальную структуру композита и особенности технологических методов получения композитов, этот подход предназначен для получения лишь ориентировочных оценок для упругих характеристик композита. Например, в случае однонаправленного композита, для которого известны упругие постоянные волокон и матрицы, нередко используется так называемое правило смеси для определения упругих характеристик композита по формулам [7]:

$$E_1 = v_B E_B + (1 - v_B) E_M, \quad E_2 = \frac{E_B E_M}{v_B E_M + (1 - v_B) E_B},$$

$$G_{12} = \frac{G_B G_M}{v_B G_M + (1 - v_B) G_B}, \quad G_B = \frac{E_B}{2(1 + \mu_B)}, \quad G_M = \frac{E_M}{2(1 + \mu_M)}, \quad (1.7)$$

$$\mu_{12} = v_B \mu_B + (1 - v_B) \mu_M, \quad \mu_{21} = \mu_{12} E_2 / E_1,$$

где v_B – объемное содержание волокон (1.6); $(1 - v_B) = v_M$ – объемное содержание матрицы; E_B, E_M – модули упругости волокна и матрицы;

μ_B, μ_M – коэффициенты Пуассона волокна и матрицы.

Для расчетного анализа композитных конструкций более оправданным является другой подход, связанный с экспериментальным получением механических свойств композита. Для этого проводятся специальные ис-

пытания образцов различной формы (плоских, трубчатых и др.), изготовленных такими же технологическими методами, что и композитные конструкции [2]. Таким образом, подобно стандартным испытаниям образцов из традиционных материалов определяют комплекс механических свойств композиционных материалов заданной структуры. *Методы испытаний и образцы из композиционных материалов определены стандартами.*

Обычно проводят испытания образцов на растяжение, сжатие, сдвиг и изгиб; причем, в основном, для однонаправленных (одномерпоармированных) композитов. Так как волокнистые КМ являются анизотропными материалами, то для них нужно четко определять направление нагрузки и оси упругой симметрии материала.

При рассмотрении слоя однонаправленного композиционного материала вводят две системы координат (рис. 1.7): ортогональную систему координат $(1, 2, 3)$, связанную с направлением армирования, и ортогональную систему координат (x, y, z) , в которой определяются характеристики материала. Ось 1 совпадает с направлением волокон, ось 2 расположена в плоскости армирования, а ось 3 перпендикулярна плоскости армирования.

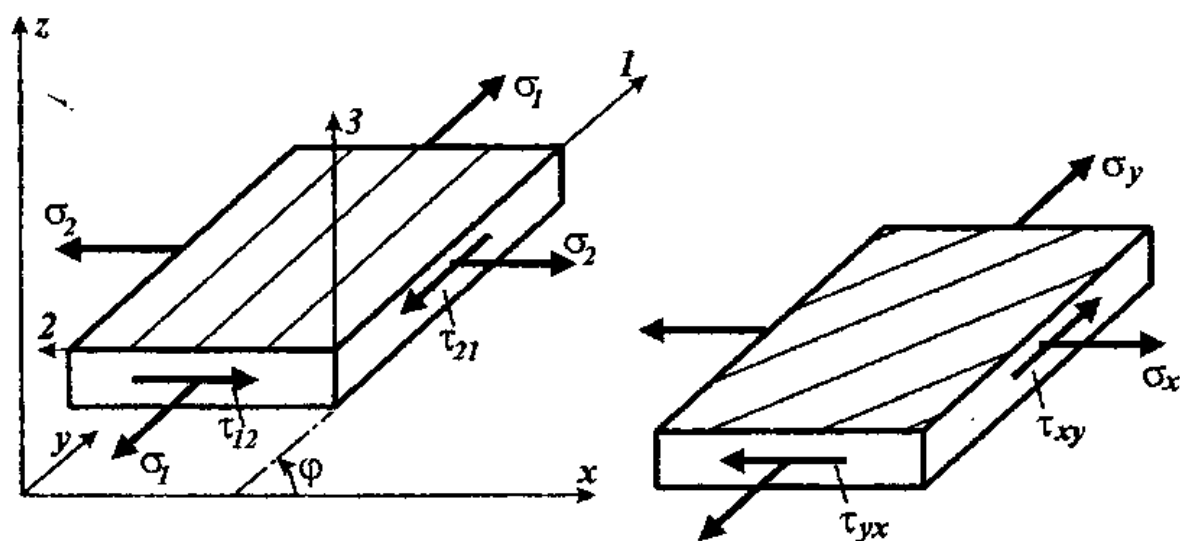


Рис. 1.7

Оси $1, 2, 3$ также называются осями упругой симметрии материала. Аналогично, оси x и y расположены в плоскости армирования, а ось z — перпендикулярно этой плоскости. Испытания образцов проводят так, чтобы оси x, y, z являлись осями нагружения. Причем предпочтительно использовать методы испытания образцов, при которых оси x, y, z и $1, 2, 3$.

совпадают.

Сложная структура волокнистых КМ вызывает, прежде всего, необходимость установления количества упругих и прочностных характеристик, требуемых для паспортизации материала. Число таких характеристик зависит от типа напряженного состояния и типа анизотропии материала.

Например, для традиционных материалов, являющихся однородными и изотропными, число независимых упругих характеристик равно двум, а в качестве них чаще всего используют модуль Юнга E и коэффициент Пуассона μ . При рассмотрении плоского напряженного состояния для композитов чаще всего используется модель *ортотропного материала*, для которого имеются три ортогональные оси упругой симметрии, а соотношения закона Гука включают 4 независимых упругих постоянных: например, модули упругости E_x и E_y , модуль сдвига G_{xy} , коэффициент Пуассона μ_{xy} . При этом имеют место условия симметрии для упругих постоянных материала: $\mu_{21}E_1 = \mu_{12}E_2$, $\mu_{yx}E_x = \mu_{xy}E_y$. Соответственно, экспериментально определяют пределы прочности материала при растяжении и сжатии по осям x и y (и осям упругой симметрии 1 и 2), пределы прочности при сдвиге в плоскости армирования (x, y) и $(1, 2)$.

Трудности экспериментального определения механических свойств композитов связаны и со сложностью создания однородного напряженного состояния в рабочей части образца. Причем трудности возрастают с повышением степени анизотропии материалов, что характерно для композитов с высокопрочными и высокомодульными волокнами: углепластиков, боропластиков, органопластиков. К образцам предъявляются жесткие требования (более строгие, чем для традиционных материалов): по форме и размерам, по способам закрепления и нагружения, по технологии, т.к. композиционный материал очень чувствителен к технологическим дефектам (пористость, искривление волокон и т.д.).

Поэтому чаще всего поступают так же, как и при определении механических свойств однородных материалов: проводят испытания на специальных образцах и получают приведенные упругие характеристики (модули упругости, коэффициенты Пуассона) и механические (прочностные) свойства композиционного материала.

1.7.3. Прикладная методика расчета

Для расчета многослойных композитных балок применяется прикладная методика, построенная с учетом особенностей рассматриваемых конструктивных элементов. При этом используем следующие допущения.

1. Балка рассматривается как одномерная стержневая модель, для которой принимаем кинематическую гипотезу (гипотезу плоских сечений) и статическую гипотезу (не учитываем нормальные напряжения в поперечном направлении).

2. Композитная балка структурно состоит из пакета жестко связанных слоев. Каждый слой выполнен из определенного материала, считается условно однородным; для материала известны упругие и механические характеристики (определенные экспериментально или аналитически). Характеристики балки как системы слоев определяем расчетным путем с учетом физической и геометрической структуры композитной балки.

Допущения, указанные в п.1, такие же, как и в технической теории однородных балок [8]. Поэтому для расчета композитных балок используем известные методы, применяемые в сопротивлении материалов. Особенности, указанные в п.2, вызывают необходимость получения приведенных жесткостных характеристик сечений балки, имеющих физико-геометрическую природу.

Расчетные зависимости для напряжений и перемещений. Получение расчетных зависимостей ограничим рассмотрением плоского изгиба криволинейной балки (рис. 1.8,а). В соответствии с технической теорией изгиба балок напряжения в поперечном сечении заменяются статически эквивалентными внутренними силовыми факторами (силами и моментами), приведенными к некоторой системе координат $Oxyz$, (рис. 1.8,б).

В дальнейшем используются правила знаков для внутренних усилий, напряжений и перемещений, принятые в курсе сопротивления материалов.

Нормальная сила N и изгибающий момент \mathcal{M}_x являются равнодействующими нормальных напряжений σ_z (рис. 1.7,в):

$$N = \int_F \sigma_z dF, \quad \mathcal{M}_x = - \int_F \sigma_z y dF. \quad (1.8)$$

Поперечная сила Q_y определяется как равнодействующая касательных напряжений τ_{zy} :

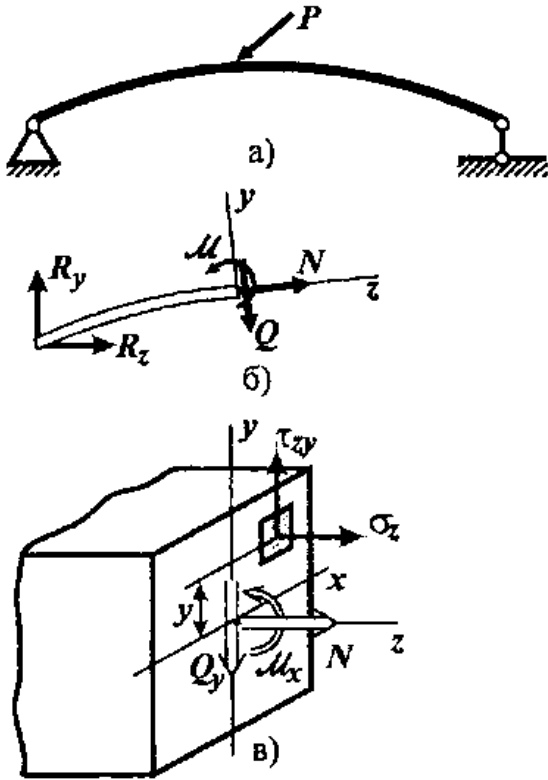


Рис. 1.8

$$Q_y = - \int_F \tau_{zy} dF \quad (1.9)$$

Выражения (1.8) и (1.9) записаны с учетом положительных направлений усилий и напряжений (см. рис. 1.8, в).

С использованием гипотезы плоских сечений (гипотезы Бернулли) линейная деформация ε_z произвольного слоя балки в направлении оси балки (z) определяется через параметры осевой и изгибной деформаций:

$$\varepsilon_z = \varepsilon - yk_x, \quad (1.10)$$

где ε – линейная деформация оси балки; k_x – изменение кривизны оси балки в координатной плоскости Oyz ;

y – расстояние от оси x до рассматриваемого слоя.

На основе статической гипотезы пренебрегаем влиянием нормальных напряжений в поперечном направлении, т.е. принимаем $\sigma_y \approx 0$. Тогда закон Гука можно записать как для одноосного напряженного состояния:

$$\sigma_z = E_z \varepsilon_z.$$

С учетом зависимости (1.10) это выражение примет вид

$$\sigma_z = E_z (\varepsilon - yk_x). \quad (1.11)$$

Подставляя выражение (1.11) в формулы (1.8), получаем соотношения упругости в следующей форме:

$$N = \int_F \sigma_z dF = \int_F E_z (\varepsilon - yk_x) dF = D_{11} \varepsilon + D_{12} k_x,$$

$$M_x = - \int_F \sigma_z y dF = - \int_F E_z y (\varepsilon - yk_x) dF = D_{21} \varepsilon + D_{22} k_x, \quad (1.12)$$

$$D_{11} = \int_F E_z dF, \quad D_{12} = D_{21} = - \int_F E_z y dF, \quad D_{22} = \int_F E_z y^2 dF.$$

Коэффициенты D_{ij} в формулах (1.12) имеют физико-геометрическую природу, т.к. зависят от свойств материала слоя (E_z), формы сечения и структуры слоев разнородных материалов. Для многослойной балки необходимо

учитывать изменение свойств материала по сечению, т.е. $E_z = E_z(x, y)$.

С помощью определенного выбора осей координат выражения (1.12) можно привести к рациональной форме. Выберем систему координат Oxy в сечении так, чтобы выполнялось условие

$$D_{12} = 0. \quad (1.13)$$

Тогда выражения (1.12) примут наиболее простой вид:

$$N = B\varepsilon, \quad M_x = D_x k_x, \quad (1.14)$$

где $B = D_{11}$ — осевая жесткость балки (стержня) на растяжение-сжатие;

$D_x = D_{22}$ — изгибная жесткость балки.

Примечание. В случае однородного материала ($E_z = E = \text{const}$) получаем известные соотношения:

$$D_{11} = EF, \quad D_{12} = D_{21} = -ES_x, \quad D_{22} = EJ_x,$$

где F — площадь сечения; S_x — статический момент сечения; J_x — осевой момент инерции сечения.

Для однородной балки условие (1.13) определяет положение главной центральной оси x сечения ($S_x = 0$).

Из соотношений (1.14) можно выразить параметры деформации ε , k_x и подставить их в выражения (1.10) и (1.11). Тогда получаем расчетные зависимости для линейной деформации и нормальных напряжений в таком виде:

$$\varepsilon_z = \frac{N}{B} - \frac{M_x y}{D_x}, \quad (1.15)$$

$$\sigma_z = E_z \left(\frac{N}{B} - \frac{M_x y}{D_x} \right). \quad (1.16)$$

Для получения формулы касательных напряжений τ_{zy} рассмотрим условия равновесия отсеченной части элемента балки (рис. 1.9, а).

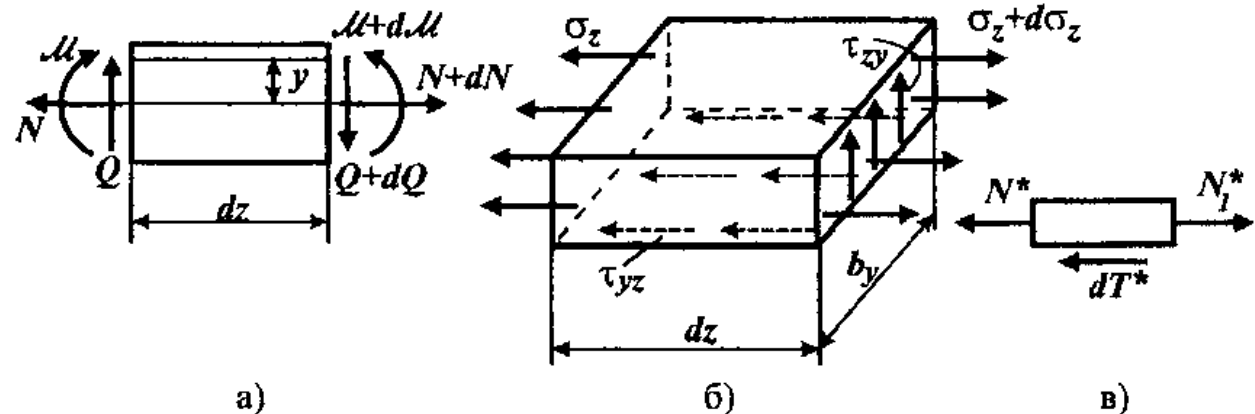


Рис. 1.9

На верхнюю отсеченную часть (продольное сечение сделано на расстоянии y от поверхности приведения) действуют нормальные напряжения σ_z , $(\sigma_z + d\sigma_z)$ и касательные напряжения τ_{zy} в поперечных сечениях, а в продольном сечении действуют касательные напряжения $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ согласно закону парности касательных напряжений (рис. 1.9,б). Напряжения приведем к результирующим силам:

$$N^* = \int_{F^*} \sigma_z dF, \quad N_1^* = \int_{F^*} (\sigma_z + d\sigma_z) dF, \quad dT^* = \tau_{zy} b_{zy} dz, \quad (1.17)$$

где F^* – площадь сечения для отсеченной части элемента, b_y – ширина сечения на уровне y .

Составим уравнение равновесия для отсеченной части элемента балки (рис. 1.9,в):

$$\sum F_z = 0, \quad N_1^* - N^* - dT^* = 0, \quad dT^* = N_1^* - N^*.$$

Подставив соотношения (1.17) в данное уравнение и учитывая зависимость (1.16), получим выражение для касательных напряжений:

$$\tau_{zy} b_{zy} dz = \int_{F^*} d\sigma_z dF, \quad \text{откуда}$$

$$\tau_{zy} = \frac{1}{b_y} \int_{F^*} \frac{d\sigma_z}{dz} dF = \frac{1}{b_y} \int_{F^*} E_z \frac{d}{dz} \left(\frac{N}{B} - \frac{\mathcal{M}_x y}{D_x} \right) dF.$$

Для прямолинейной балки выполняются соотношения $\frac{dN}{dz} = 0$ и дифференциальная зависимость $\frac{d\mathcal{M}_x}{dz} = Q_y$. В итоге можно получить расчетную формулу для касательных напряжений в таком виде:

$$\tau_{zy} = -\frac{Q_y S_E^*}{b_y D_x}, \quad (1.18)$$

где $S_E^* = \int_{F^*} E_z y dF$ – упруго-статический момент отсеченной части сечения.

Примечание. Обращаем внимание, что знаки в выражениях (1.16) и (1.18) отражают соответствие между принятыми положительными направлениями напряжений и внутренних усилий.

Продольные перемещения w , прогибы V и угловые перемещения θ_x сечений балки при плоском изгибе можно вычислять, используя известные

методы, например, метод Максвелла-Мора (метод единичной нагрузки) или метод интегрирования дифференциальных соотношений.

Учет деформации поперечного сдвига. Композиционные материалы обладают наибольшими прочностными и упругими характеристиками в направлении волокон. А прочностные свойства композита, характеризующие связь между слоями, являются относительно низкими. Кроме того, в зависимости от структуры композитной балки в значительной мере могут отличаться и упругие характеристики в различных направлениях. Так, отношения модулей упругости E_z/E_y , E_z/G_{zy} для композитных балок обычно изменяются в пределах $10 \div 100$. Модуль сдвига G_{zy} характеризует поперечную сдвиговую жесткость балки и может оказывать существенное влияние на перемещения и касательные напряжения. Поэтому для балок с низкой сдвиговой жесткостью следует проводить расчеты с учетом деформации поперечного сдвига.

Для таких расчетов в рамках технической теории изгиба балок принимается дополнительная гипотеза. С учетом сравнительной малости размеров поперечных сечений истинная деформация сдвига γ_{zy} , являющаяся переменной по высоте сечения, замещается некоторой осредненной деформацией сдвига $\bar{\gamma}$, постоянной для сечения [9]:

$$\bar{\gamma}(z) = \frac{1}{h_0} \int_0^h \gamma_{zy}(z, y) dy. \quad (1.19)$$

Тогда нужно скорректировать зависимость между прогибом V и углом поворота θ_x сечения. При поперечном изгибе балки сечения остаются плоскими, однако не сохраняют перпендикулярное положение по отношению к оси изогнутой балки.

Угол поворота сечения балки при изгибе с учетом поперечной деформации сдвига получим как разность угловых значений:

$$\theta_x = \theta_x^* + \Delta\theta = \frac{dV}{dz} - \bar{\gamma}, \quad (1.20)$$

где $\theta_x^* = dV/dz$ – угол поворота сечения при чистом изгибе (рис. 1.10,а);

$\Delta\theta = -\bar{\gamma}$ – угол поворота сечения за счет деформации сдвига (рис. 1.10,б).

Осредненную деформацию сдвига $\bar{\gamma}$ можно связать с поперечной силой Q_y , т.к. обе эти величины определены для сечения.

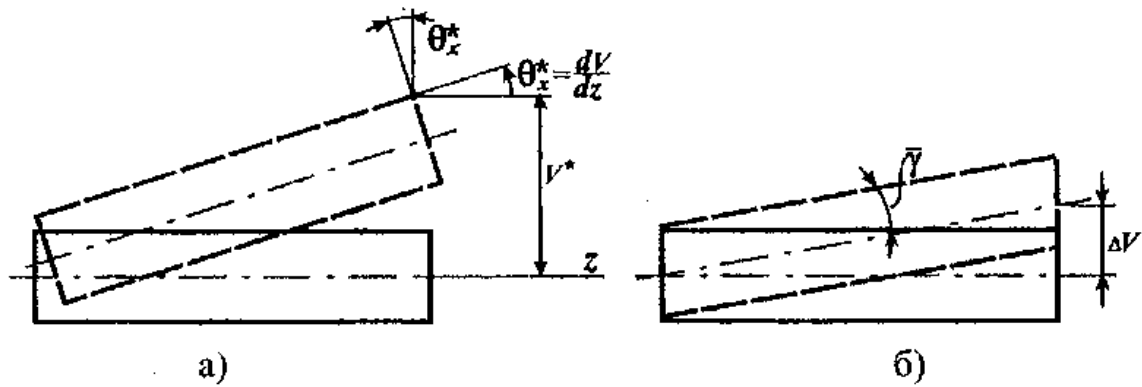


Рис. 1.10

Используя закон Гука при сдвиге

$$\tau_{zy} = G_{zy} \gamma_{zy},$$

получим выражение для приведенной (осредненной) деформации сдвига

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{h} \int_0^h \frac{\tau_{zy}}{G_{zy}} dy. \quad (1.21)$$

Подставив соотношение (1.18) в выражение (1.21), получаем искомую зависимость в следующем виде:

$$Q_y = -K_y \bar{\gamma}, \quad (1.22)$$

$$K_y = \frac{D_x h}{C_y}, \quad C_y = \int_0^h \frac{S_E^* dy}{b_y G_{zy}}, \quad S_E^* = \int_y^h E_z b_y y dy, \quad (1.23)$$

где K_y – жесткость балки на поперечный сдвиг.

Можно сделать и дальнейшее упрощение для вычисления сдвиговой жесткости K_y , если в выражении (1.21) учитывать «средние» касательные напряжения в соответствии с зависимостью $\tau_{zy}(y) = -\frac{Q_y}{b_y h}$ [9]. Тогда для

сдвиговой жесткости балки получим формулу

$$K_y = \frac{h^2}{C_y}, \quad \bar{C}_y = \int_0^h \frac{dy}{b_y G_{zy}}. \quad (1.24)$$

Прогиб V следует определять из дифференциальной зависимости (1.20) с учетом выражения (1.22):

$$\frac{dV}{dz} = \theta_x + \bar{\gamma},$$

$$V = V_0 + \theta_0 z + \int_0^z \left(\int_0^z \frac{M_x dz}{D_x} \right) dz - \frac{Q_y z}{K_y} = V^* + \Delta V. \quad (1.25)$$

В формуле (1.25) прогиб V можно представить в виде двух составляющих: прогиба V^* , определяемого для балки обычными методами без учета деформации сдвига, и дополнительного прогиба ΔV за счет учета деформации поперечного сдвига (см. рис. 1.10).

1.7.4. Определение жесткостных характеристик балки

Вычисление коэффициентов жесткости D_{ij} в формулах (1.12) связано с выбором системы координат Oxy сечения, в которой определены внутренние силовые факторы. Рассмотрим сечение балки, симметричное относительно оси Oy (рис. 1.11,а). Балка состоит из n слоев различной толщины (h_i), материал каждого слоя имеет свои упругие характеристики (обозначим $E_i = E_{xi}$).

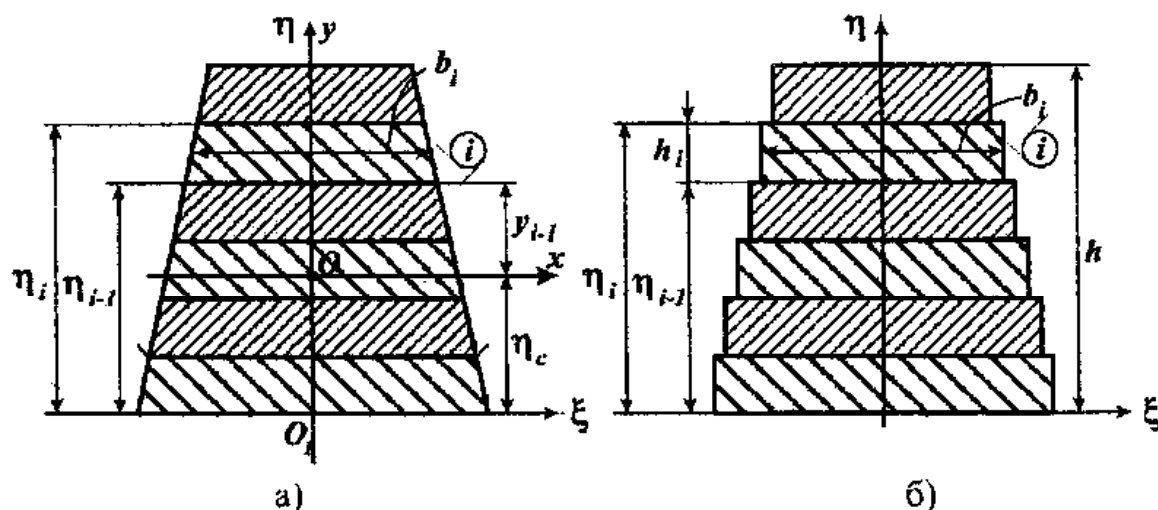


Рис. 1.11

Введем вспомогательную систему координат O, ξ, η , где координата η отсчитывается от нижнего основания сечения. Тогда толщина каждого слоя равна $h_i = \eta_i - \eta_{i-1}$, а ширина b_i условно считается как средняя линия слоя (рис. 1.11,б). Положение оси x определим координатой η_c , которую найдем из условия (1.13):

$$D_{12} = 0 \quad \text{или} \quad \int_F E_z y dF = 0. \quad (1.26)$$

Если исходное сечение перемснной ширины, то условно заменим его сечением со ступенчатого изменяющейся шириной (см. рис. 1.11,б). Для вычисления интеграла (1.26) в новой системе координат используем соотношения:

$$dF = b \cdot d\eta, \quad y = \eta - \eta_c.$$

Тогда получим

$$\int_F E_z y dF = \int_0^h E_z (\eta - \eta_c) b d\eta = \sum_{i=1}^n \int_{\eta_{i-1}}^{\eta_i} E_i (\eta - \eta_c) b_i d\eta = \sum_{i=1}^n E_i b_i \int_{\eta_{i-1}}^{\eta_i} (\eta - \eta_c) d\eta.$$

Введем обозначения:

$$I_{oi} = \int_{\eta_{i-1}}^{\eta_i} d\eta = \eta_i - \eta_{i-1} = h_i, \quad I_o = \sum_{i=1}^n E_i b_i I_{oi} = \sum_{i=1}^n E_i b_i h_i = \sum_{i=1}^n E_i F_i,$$

$$I_{1i} = \int_{\eta_{i-1}}^{\eta_i} \eta d\eta = \frac{1}{2} (\eta_i^2 - \eta_{i-1}^2), \quad I_1 = \sum_{i=1}^n E_i b_i I_{1i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n E_i b_i (\eta_i^2 - \eta_{i-1}^2). \quad (1.27)$$

Тогда условие (1.26) можно записать в компактной форме:

$$I_1 - \eta_c I_o = 0.$$

Из этого уравнения получаем формулу для определения координаты η_c :

$$\eta_c = \frac{I_1}{I_o}. \quad (1.28)$$

По аналогии с сечением однородной балки ось x называется *нейтральной осью*.

Изгибную жесткость D_x также представим через интегралы, аналогичные выражениям (1.27):

$$D_x = \int_F E_z y^2 dF = \int_0^h E_z (\eta - \eta_c)^2 b d\eta = \sum_{i=1}^n E_i b_i \int_{\eta_{i-1}}^{\eta_i} (\eta - \eta_c)^2 d\eta$$

или

$$D_x = I_2 - 2\eta_c I_1 + \eta_c^2 I_o, \quad (1.29)$$

$$I_{2i} = \int_{\eta_{i-1}}^{\eta_i} \eta^2 d\eta = \frac{1}{3} (\eta_i^3 - \eta_{i-1}^3), \quad I_2 = \sum_{i=1}^n E_i b_i I_{2i} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n E_i b_i (\eta_i^3 - \eta_{i-1}^3). \quad (1.30)$$

Интегралы (1.27) и (1.29) можно записать единой формулой

$$I_k = \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^n E_i b_i (\eta_i^{k+1} - \eta_{i-1}^{k+1}), \quad k = 0, 1, 2. \quad (1.31)$$

В соответствии с формулами (1.12) осевая жесткость B и изгибная жесткость D_x балки выражаются через интегралы I_k :

$$B = I_o, \quad D_x = I_2 - \frac{I_1^2}{I_o} = I_2 - \eta_c I_1. \quad (1.32)$$

Для вычисления сдвиговой жесткости K_y , удобно использовать формулу (1.24). Выполнив преобразования, получим (обозначено $G_i = G_{2yi}$):

$$K_y = \frac{h^2}{C_y}, \quad (1.33)$$

$$\bar{C}_y = \sum_{i=1}^n \frac{\eta_i - \eta_{i-1}}{b_i G_i} = \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{b_i G_i}. \quad (1.34)$$

Примечание. Приведенные выражения в форме (1.31) и (1.32) удобны для реализации на компьютерах. Но с точки зрения «физического» смысла полезно показать получение расчетных формул и через такие известные в сопротивлении материалов понятия, как геометрические характеристики плоских сечений [8]: S_x – статический момент сечения, J_x – осевой момент инерции сечения.

Выражение (1.26) можно представить в следующем виде:

$$\int_F E_z y dF = \sum_{i=1}^n \int_{F_i} E_i y dF = \sum_{i=1}^n E_i S_{xi},$$

где

$$S_{xi} = \int_{F_i} y dF = \int_{F_i} (\eta - \eta_c) dF = S_{\xi} - \eta_c F_i, \quad F_i = \int_{F_i} dF = b_i h_i = b_i (\eta_i - \eta_{i-1}) = b_i I_{0i},$$

$$S_{\xi} = \int_{F_i} \eta dF = F_i \bar{\eta}_{ci} = F_i \frac{1}{2} (\eta_i + \eta_{i-1}) = \frac{1}{2} b_i (\eta_i^2 - \eta_{i-1}^2) = b_i I_{1i}.$$

В результате получим выражение (1.28), т.к.

$$\sum_{i=1}^n E_i (S_{\xi} - \eta_c F_i) = \sum_{i=1}^n E_i \left[\frac{1}{2} b_i (\eta_i^2 - \eta_{i-1}^2) - \eta_c b_i (\eta_i - \eta_{i-1}) \right] = I_1 - \eta_c I_0.$$

Аналогично можно получить выражение для изгибной жесткости следующим образом:

$$D_x = \int_F E_z y^2 dF = \sum_{i=1}^n E_i \int_{F_i} y^2 dF = \sum_{i=1}^n E_i J_{xi},$$

где

$$J_{xi} = \int_{F_i} y^2 dF = \int_{F_i} (\eta - \eta_c)^2 dF = J_{\xi} - 2\eta_c S_{\xi} + \eta_c^2 F_i,$$

$$J_{\xi} = \int_{F_i} \eta^2 dF = \int_{\eta_{i-1}}^{\eta_i} b_i \eta^2 d\eta = \frac{1}{3} b_i (\eta_i^3 - \eta_{i-1}^3) = b_i I_{2i}.$$

Подстановка соотношений для J_{ξ} , J_{xi} в формулу для D_x приводит к выражению (1.29).

Таким образом, для нахождения жесткостей многослойной композитной балки необходимо вычислить суммы (1.31), (1.34) и воспользоваться

формулами (1.32) и (1.33).

При вычислении касательных напряжений τ_{zy} по формуле (1.18) необходимо определить упруго-геометрическую характеристику S_E^* для отсеченной части сечения. Практический интерес представляют касательные напряжения, действующие по границе контакта слоев, например с номерами m и $m+1$ ($1 \leq m \leq n-1$). В этом случае

$$S_E^* = \int_{F^*} E_z y dF = \sum_{i=1}^m E_i S_{xi}^* = \sum_{i=1}^m E_i \int_{F_i} y dF = \sum_{i=1}^m E_i b_i \int_{\eta_{i-1}}^{\eta_i} (\eta - \eta_c) d\eta = I_1^* - \eta_c I_0^*.$$

После преобразований получим такое выражение:

$$S_E^* = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m E_i b_i h_i (\eta_i + \eta_{i-1} - 2\eta_c), \quad 1 \leq m \leq n-1. \quad (1.35)$$

Некоторые упрощения в полученные расчетные формулы можно внести для трехслойных балок с легким заполнителем (рис. 1.12).

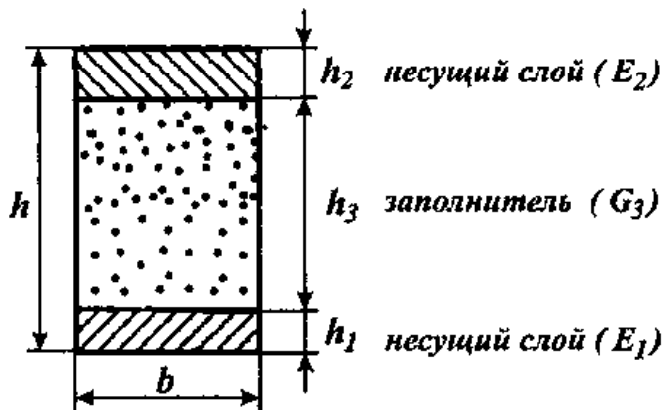


Рис. 1.12

Жесткостные параметры заполнителя существенно меньше (на несколько порядков), чем жесткостные параметры несущих слоев. При вычислении жесткостей B и D_x можно пренебречь влиянием заполнителя (т.е. принять $E_{z,зан} \approx 0$), а при вычислении сдвиговой жесткости K_y пренебречь влиянием

несущих слоев (т.е. принять $G_{2y, не} \rightarrow \infty$). Тогда формулы (1.31) и (1.34), например для сечения постоянной ширины (см. рис. 1.12), примут вид:

$$I_0 = b(E_1 h_1 + E_2 h_2), \quad I_1 = \frac{1}{2} b \left\{ E_1 h_1^2 + E_2 [h^2 - (h_1 + h_3)^2] \right\}$$

$$I_2 = \frac{1}{3} b \left\{ E_1 h_1^3 + E_2 [h^3 - (h_1 + h_3)^3] \right\} \quad (1.36)$$

$$\bar{C}_y = \frac{h_3}{bG_3}, \quad K_y = \frac{bh^2 G_3}{h_3} \approx G_3 F = G_3 bh, \quad h = h_1 + h_2 + h_3.$$

1.7.4. Расчетный анализ многослойной композитной балки с применением персональных компьютеров

Проектирование элементов конструкций в виде композитных балок включает рассмотрение различных вопросов, в частности, связанных с требованиями прочности, жесткости и металлоемкости. В этом случае выбор материалов, в особенности, в случае проектирования многослойных балок, позволяет направленно изменять характеристики балки в соответствии с ее конструктивным назначением, выполнением требуемых ограничений. Рассмотренную прикладную методику можно применить для расчета композитных балок различной конфигурации - многослойных и трехслойных. Примеры простейших расчетов композитных балок приведены в разделе 1.8; они полезны в методическом плане. Однако часто такие расчеты являются довольно трудоемкими, например, для криволинейной балки переменного сечения, для многослойных балок, при необходимости проведения параметрического анализа и др. В таких случаях целесообразно выполнение расчетов с применением вычислительной техники.

На основе прикладной расчетной методики разработана вычислительная программа *COMPOS* для расчета композитных балок на персональном компьютере. Основной акцент в программе делается на возможности анализа многослойных балок с учетом использования различных материалов. Описание программы *COMPOS* дается в Приложении 2. Расчетный анализ проводится для шарнирно-опертой криволинейной балки с постоянным радиусом кривизны оси, нагруженной сосредоточенной радиальной силой в среднем сечении. В соответствии с этим рассмотрим варианты расчета статически определимой и статически неопределимой балки.

Статически определимая балка. Расчетная модель балки показана на рис. 1.13,а, где обозначено: R – радиус оси балки; l – расстояние между опорами; 2α – угол раствора (угловая длина балки); b – ширина сечения балки. Толщина балки h (или высота сечения) может быть переменной.

Балка выполняется многослойной (рис. 1.13,б), толщина h ; отдельных слоев может быть переменной величиной. Вследствие очевидного соотношения $tg\alpha = \sqrt{2R}$ можно задавать только два из трех геометрических параметров.

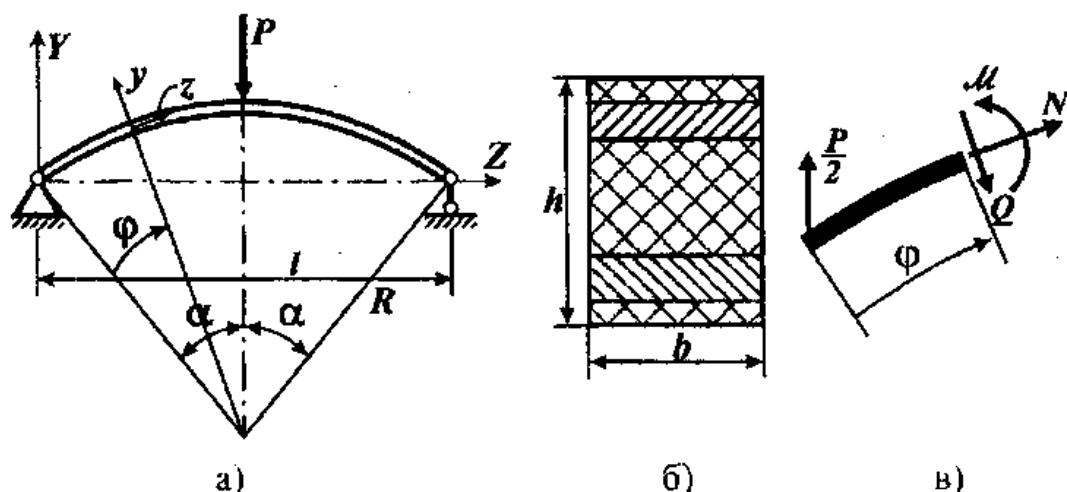


Рис. 1.13

Для определения внутренних силовых факторов применим метод сечений. Для круговой балки удобно использовать криволинейную координату φ , фиксируя сечение (рис. 1.13,а,в). Тогда для внутренних силовых факторов в произвольном сечении балки получим следующие выражения:

участок $\theta \leq \varphi \leq \alpha$

$$N(\varphi) = -0,5P \sin(\alpha - \varphi), \quad Q(\varphi) = 0,5P \cos(\alpha - \varphi), \quad \mathcal{M}(\varphi) = 0,5PR[\sin \alpha - \sin(\alpha - \varphi)]; \quad (1.37)$$

участок $\alpha \leq \varphi \leq 2\alpha$

$$N(\varphi) = 0,5P \sin(\alpha - \varphi), \quad Q(\varphi) = -0,5P \cos(\alpha - \varphi), \quad \mathcal{M}(\varphi) = 0,5PR[\sin \alpha + \sin(\alpha - \varphi)]. \quad (1.38)$$

Линейная деформация, нормальные и касательные напряжения в сечении балки вычисляются с использованием выражений (1.15), (1.16) и (1.18). Входящие в эти выражения осевая, изгибная и сдвиговая жесткости балки (B , D_x , K_y) вычисляются по формулам (1.32) и (1.33) с учетом зависимостей (1.31) и (1.34). Причем для балки переменной толщины определение жесткостей необходимо осуществлять для каждого сечения. При определении напряжений τ_{xy} на границе слоев используется выражение (1.35).

Для определения перемещений сечений балки применяется метод единичной нагрузки с использованием интеграла Мора. Например, при вычислении перемещений V_y (прогибов) в вертикальном направлении используется формула

$$V_y = \int_{\varphi} \frac{N_1 N R d\varphi}{B} + \int_{\varphi} \frac{Q_1 Q R d\varphi}{K_y} + \int_{\varphi} \frac{\mathcal{M}_1 \mathcal{M} R d\varphi}{D_x}, \quad (1.39)$$

где $N(\varphi)$, $Q(\varphi)$, $\mathcal{M}(\varphi)$ – функции внутренних усилий в сечении балки при

действии заданной нагрузки (силы P); $N_1(\varphi)$, $Q_1(\varphi)$, $M_1(\varphi)$ – функции внутренних усилий в сечении балки при действии единичной вертикальной силы $\bar{P}_y=1$, приложенной в сечении $\varphi = \alpha_0$, где определяется перемещение.

Единичное состояние балки показано на рис. 1.14,а.

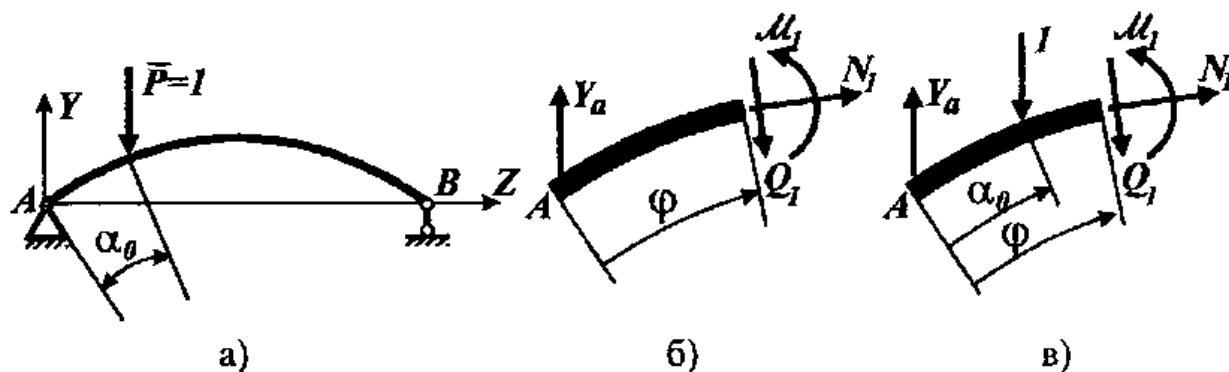


Рис. 1.14

Выражения для внутренних усилий в поперечных сечениях балки для единичного состояния имеют вид:

участок $0 \leq \varphi \leq \alpha_0$ (рис. 1.14,б)

$$N_1(\varphi) = Y_a \sin(\alpha - \varphi), \quad Q_1(\varphi) = -Y_a \cos(\alpha - \varphi), \quad M_1(\varphi) = -Y_a R [\sin \alpha - \sin(\alpha - \varphi)]; \quad (1.40)$$

участок $\alpha_0 \leq \varphi \leq 2\alpha$ (рис. 1.14,в)

$$N_1(\varphi) = -Y_b \sin(\alpha - \varphi), \quad Q_1(\varphi) = Y_b \cos(\alpha - \varphi), \\ M_1(\varphi) = -Y_a R [\sin \alpha - \sin(\alpha - \varphi)] + R [\sin(\alpha - \alpha_0) - \sin(\alpha - \varphi)], \quad (1.41)$$

где $Y_a = 0,5[1 + \sin(2\alpha - \alpha_0)/\sin \alpha]$, $Y_b = 1 - Y_a$ – вертикальные реакции в опорах.

При вычислении интегралов (1.39) следует учитывать, что внутренние усилия изменяются по длине балки, а для балки переменной толщины изменяются и жесткости. Кроме того, каждый из интегралов, входящих в выражение (1.39), вследствие использования различных функций (1.37), (1.38), (1.40) и (1.41) на участках интегрирования необходимо представить в виде суммы трех интегралов в зависимости от значения углового параметра α_0 :

$$V_y = \sum_{j=1}^3 V_{y,j}(\varphi), \quad (1.42)$$

при $\alpha_0 < \alpha$, $j=1$ $0 \leq \varphi \leq \alpha_0$, $j=2$ $\alpha_0 \leq \varphi \leq \alpha$, $j=3$ $\alpha \leq \varphi \leq 2\alpha$,

при $\alpha_0 > \alpha$, $j=1$ $0 \leq \varphi \leq \alpha$, $j=2$ $\alpha \leq \varphi \leq \alpha_0$, $j=3$ $\alpha_0 \leq \varphi \leq 2\alpha$.

В частных случаях при $\alpha_0 = 0$, $\alpha_0 = \alpha$ и $\alpha_0 = 2\alpha$ получим два участка

интегрирования ($j = 1, 2$).

При расчете балки переменной толщины необходимо задаться аналитическим выражением, определяющим изменение толщины по длине балки, или, например, использовать линейную интерполяцию толщины на каком-либо участке

$$h(\varphi) = h_i + (h_{i+1} - h_i)(\varphi - \varphi_i)/(\varphi_{i+1} - \varphi_i), \quad (1.43)$$

где φ_i, φ_{i+1} – угловые координаты крайних сечений на участке; h_i, h_{i+1} – значения толщины в этих сечениях.

Для вычисления перемещений V_j по формуле (1.39) в балке переменной толщины необходимо использовать численное интегрирование. Например, рационально применять квадратурные формулы Гаусса

$$\int_a^b f(\varphi) d\varphi = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n H_i f(\xi_i), \quad (1.44)$$

где n – число точек интегрирования; ξ_i, H_i – абсциссы и весовые коэффициенты в i -ой точке интегрирования.

Статически неопределимая балка. Для расчета статически неопределимой балки (рис. 1.15,а) воспользуемся методом сил. В качестве основной системы примем рассмотренную выше статически определимую балку. Соответствующая эквивалентная система показана на рис. 1.15,б.

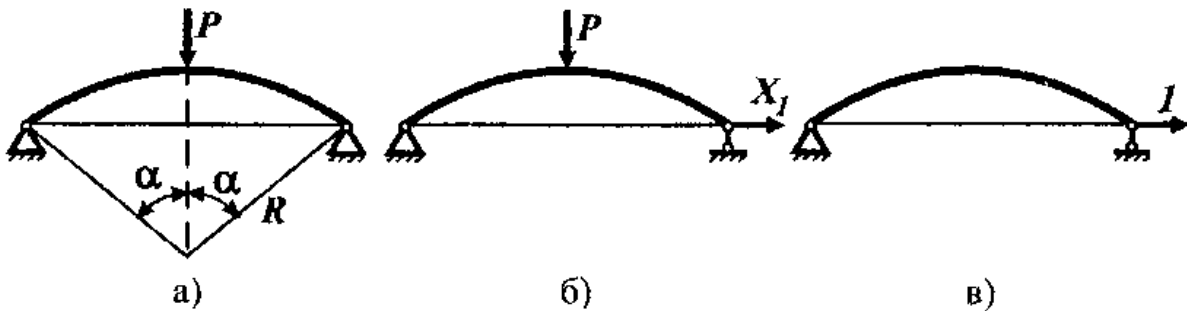


Рис. 1.15

Каноническое уравнение метода сил записывается в обычной форме [8]:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{1p} = 0, \quad (1.45)$$

где коэффициенты δ_{11}, δ_{1p} имеют смысл горизонтальных перемещений сечения статически определимой балки при $\varphi = 2\alpha$ при действии силы $\overline{X}_1 = 1$ (рис. 1.15,в) и заданной нагрузки, соответственно.

Для вычисления коэффициентов δ_{11} и δ_{1p} используются интегралы

Мора (1.39), которые принимают вид:

$$\delta_{11} = \int_0^{2\alpha} \frac{N_1^2 R d\varphi}{B} + \int_0^{2\alpha} \frac{Q_1^2 R d\varphi}{K_y} + \int_0^{2\alpha} \frac{\mathcal{M}_1^2 R d\varphi}{D_x},$$

$$\delta_{1p} = \int_0^{2\alpha} \frac{N_1 N_p R d\varphi}{B} + \int_0^{2\alpha} \frac{Q_1 Q_p R d\varphi}{K_y} + \int_0^{2\alpha} \frac{\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_p R d\varphi}{D_x}. \quad (1.46)$$

Функции внутренних усилий $N_p(\varphi)$, $Q_p(\varphi)$, $\mathcal{M}_p(\varphi)$ для грузового состояния определяются выражениями (1.37) и (1.38), а функции внутренних усилий для единичного состояния имеют вид:

$$N_1(\varphi) = \cos(\alpha - \varphi), \quad Q_1(\varphi) = \sin(\alpha - \varphi), \quad \mathcal{M}_1(\varphi) = R[\cos(\alpha - \varphi) - \cos\alpha], \quad 0 \leq \varphi \leq 2\alpha \quad (1.47)$$

Для балки переменной толщины коэффициенты δ_{11} и δ_{1p} вычисляются с использованием формулы численного интегрирования (1.44).

Если балка имеет упругую связь (с известной жесткостью c) в одной из

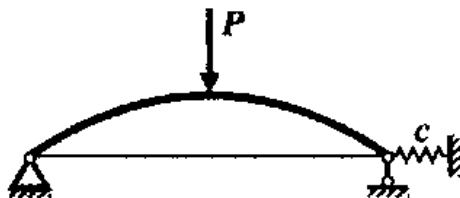


Рис. 1.16

опор (рис. 1.16), то каноническое уравнение можно записать в таком виде:

$$(\delta_{11} + 1/c) \cdot X_1 + \delta_{1p} = 0. \quad (1.48)$$

После определения реакции X_1 внутренние усилия в произвольном сечении балки

можно вычислить с использованием принципа суперпозиции:

$$N(\varphi) = N_p + N_1 X_1, \quad Q(\varphi) = Q_p + Q_1 X_1, \quad \mathcal{M}(\varphi) = \mathcal{M}_p + \mathcal{M}_1 X_1. \quad (1.49)$$

Дальнейший расчет ведется так же, как и для статически определимой балки.

1.8. Примеры расчета композитных балок

Ниже приведены некоторые задачи расчета композитных балок с применением прикладной методики. При рассмотрении задач акцент сделан не только на методическую основу решения, но и на анализ полученных результатов.

Пример 1. Двухслойная балка

Балка, состоящая из двух разнородных материалов, представляет простейший вариант композитной конструкции. Типичным примером является так называемая биметаллическая балка, изготовленная из двух различных материалов (металлов), которые соединены друг с другом так, чтобы работать как единое целое. Рассмотрим особенности распределения де-

формаций и напряжений в двухслойной композитной балке и сравнительный анализ применения различных материалов для такой балки.

Сравним максимальные напряжения в сечении балки для трех конструктивных вариантов (основной материал – дюралюминий):

- 1) однородная балка из дюралюминия толщиной h ;
- 2) биметаллическая балка «дюралюминий-сталь» (толщины h_1 и h_2 , $h_1+h_2=h$);
- 3) композитная балка «дюралюминий-стеклотекстолит» ($h_1+h_2=h$).

Сечение двухслойной балки показано на рис. 1.17,а.

Для расчета примем $b = 6$ см, $h_1 = 8$ см, $h_2 = 2$ см, $h = 10$ см, изгибающий момент $\mathcal{M} = -10$ кН·м.

Характеристики материалов:

- дюралюминий $E_u = 72$ ГПа, $\sigma_{0,2} = 260$ МПа, $\rho_c = 2700$ кг/м³;
- сталь $E_c = 200$ ГПа, $\sigma_{0,2} = 800$ МПа, $\rho_c = 7800$ кг/м³;
- стеклотекстолит $E_{cm} = 26$ ГПа, $\rho_{cm} = 2300$ кг/м³, $\sigma_{вр} = 550$ МПа, $\sigma_{вс} = 250$ МПа.

Расчет балки выполняем в следующей последовательности.

Определяем положение нейтральной оси сечения (см. рис. 1.17,а).

$$\eta_0 = 0, \eta_1 = 8 \text{ см}, \eta_2 = 10 \text{ см};$$

$$1) \eta_c = h/2 = 5 \text{ см};$$

$$2) I_0 = E_1 b h_1^3 + E_2 b h_2^3, \quad I_1 = \frac{1}{2} b [E_1 (\eta_1^2 - \eta_0^2) + E_2 (\eta_2^2 - \eta_1^2)];$$

$$\eta_c = \frac{I_1}{I_0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{0,72 \cdot 64 + 2 \cdot 36}{0,72 \cdot 8 + 2 \cdot 2} \approx 6,05 \text{ см};$$

$$3) \eta_c = \frac{I_1}{I_0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{0,72 \cdot 64 + 0,26 \cdot 36}{0,72 \cdot 8 + 0,26 \cdot 2} \approx 4,41 \text{ см}.$$

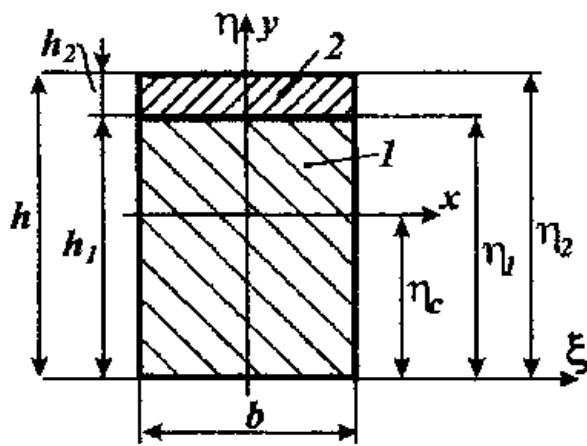
Определяем изгибную жесткость D_x балки.

$$1) D_x = E_u J_x = E_u \frac{b h^3}{12} = 0,72 \cdot 10^8 \frac{6 \cdot 10^3}{12} 10^{-8} = 360 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$2) D_x = I_2 \cdot \eta_c I_1, \quad I_2 = \frac{1}{3} b [E_1 (\eta_1^3 - \eta_0^3) + E_2 (\eta_2^3 - \eta_1^3)];$$

$$I_1 = \frac{1}{2} 6 (0,72 \cdot 10^8 \cdot 64 + 2 \cdot 10^8 \cdot 36) 10^{-6} = 35400 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$I_2 = \frac{1}{3} 6 (0,72 \cdot 10^8 \cdot 512 + 2 \cdot 10^8 \cdot 488) 10^{-8} = 2690 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$



а)

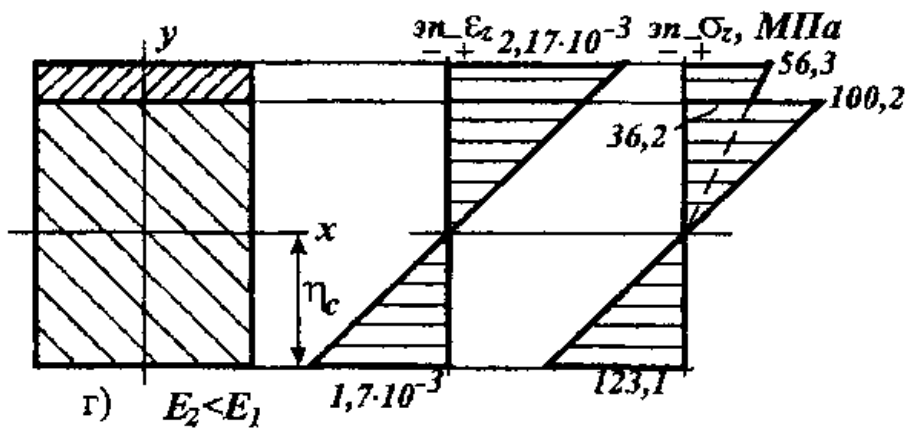
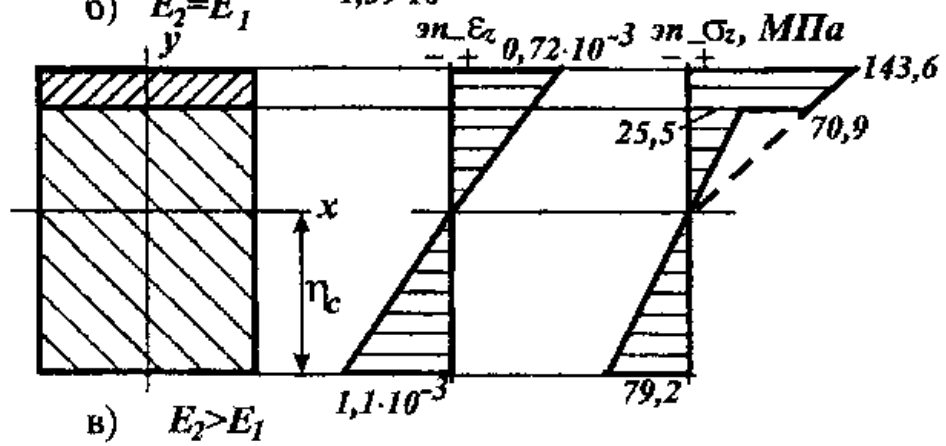
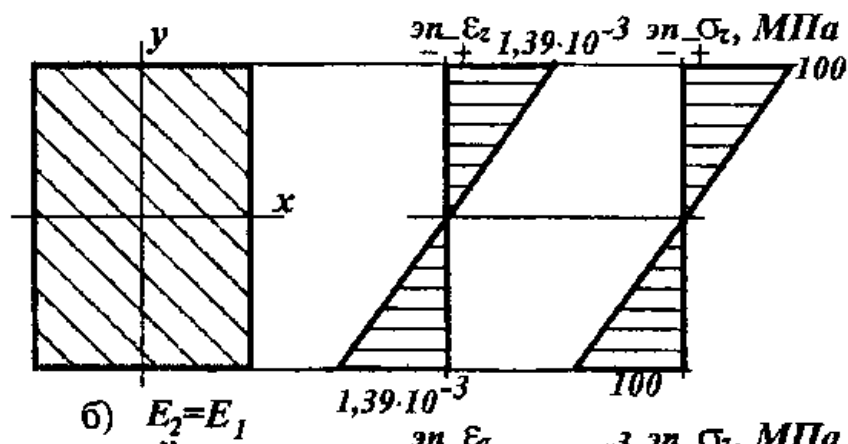


Рис. 1.17

$$D_x = 2690 - 6,05 \cdot 10^{-2} \cdot 35400 = 550 \text{ кН}\cdot\text{м}^2;$$

$$3) I_1 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (0,72 \cdot 10^8 \cdot 64 + 0,26 \cdot 10^8 \cdot 36) \cdot 10^{-6} = 16600 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$I_2 = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot (0,72 \cdot 10^8 \cdot 512 + 0,26 \cdot 10^8 \cdot 488) \cdot 10^{-8} = 990 \text{ кН}\cdot\text{м}^2;$$

$$D_x = 990 - 4,41 \cdot 10^{-2} \cdot 16600 = 258 \text{ кН}\cdot\text{м}^2.$$

Распределение деформаций в сечении балки определяется зависимостью

$$\varepsilon_z = -\frac{\mathcal{M}y}{D_x}.$$

Вследствие принятой гипотезы плоских сечений продольная деформация ε_z по высоте сечения изменяется по линейному закону независимо от структуры балки (рис. 1.17,б-г).

Распределение нормальных напряжений в сечении для каждого слоя балки определяется зависимостью

$$\sigma_{z,i} = -E_i \frac{\mathcal{M}y}{D_x}, \quad i = 1, 2, \quad y = \eta - \eta_c.$$

Для построения эпюры напряжений вычислим значения нормальных напряжений на наружной (σ_i^H) и внутренней (σ_i^B) поверхностях каждого слоя ($i = 1, 2$):

$$1) \sigma_z^{max} = \frac{\mathcal{M}}{W_x} = \frac{10^4}{100 \cdot 10^{-6}} = 10^8 \text{ Па} = 100 \text{ МПа};$$

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{6 \cdot 10^2}{6} = 100 \text{ см}^3;$$

$$2) \sigma_{z,1}^H = -E_1 \frac{\mathcal{M}}{D_x} (\eta_1 - \eta_c) = 0,72 \cdot 10^5 \frac{10^4 (8 - 6,05) \cdot 10^{-2}}{0,55 \cdot 10^6} = 25,5 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{z,1}^B = -E_1 \frac{\mathcal{M}}{D_x} (\eta_0 - \eta_c) = 0,72 \cdot 10^5 \frac{10^4 (0 - 6,05) \cdot 10^{-2}}{0,55 \cdot 10^6} = -79,2 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{z,2}^H = -E_2 \frac{\mathcal{M}}{D_x} (\eta_2 - \eta_c) = 2 \cdot 10^5 \frac{10^4 (10 - 6,05) \cdot 10^{-2}}{0,55 \cdot 10^6} = 143,6 \text{ МПа};$$

$$3) \sigma_{z,1}^H = -E_1 \frac{\mathcal{M}}{D_x} (\eta_1 - \eta_c) = 0,72 \cdot 10^5 \frac{10^4 (8 - 4,41) \cdot 10^{-2}}{0,258 \cdot 10^6} = 100,2 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{z,1}^B = -E_1 \frac{\mathcal{M}}{D_x} (\eta_0 - \eta_c) = 0,72 \cdot 10^5 \frac{10^4 (0 - 4,41) \cdot 10^{-2}}{0,258 \cdot 10^6} = -123,1 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{z,2}'' = -E_2 \frac{\mu}{D_x} (\eta_2 - \eta_c) = 26 \cdot 10^3 \frac{10^4 (10 - 4,41) \cdot 10^{-2}}{0,258 \cdot 10^6} = 56,3 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{z,2}' = -E_2 \frac{\mu}{D_x} (\eta_1 - \eta_c) = 26 \cdot 10^3 \frac{10^4 (8 - 4,41) \cdot 10^{-2}}{0,258 \cdot 10^6} = 36,2 \text{ МПа}.$$

Эпюры нормальных напряжений σ_z для рассматриваемых вариантов балки приведены на рис. 1.17,б-г.

Сравнивая распределения напряжений и значения максимальных напряжений для двух вариантов композитной балки и для однородной балки, можно отметить следующее:

а) введение слоя материала при $E_2 > E_1$ приводит к уменьшению напряжений в основном материале и увеличению напряжений в материале с большим модулем упругости, а введение слоя материала при $E_1 > E_2$ приводит к обратному эффекту;

б) учитывая, что стеклотекстолит имеет лучшие прочностные характеристики на растяжение, целесообразно размещать стеклотекстолитовую накладку на балке со стороны растянутых волокон.

Сопоставим жесткостные и весовые характеристики балки для трех вариантов.

Имеет место условие $D_x^{(2)} > D_x^{(1)} > D_x^{(3)}$. Так как максимальные прогибы в балках обратно пропорциональны жесткостям, то получим, соответственно, условие $V_{\max}^{(3)} > V_{\max}^{(1)} > V_{\max}^{(2)}$. Причем

$$\frac{V_{\max}^{(3)}}{V_{\max}^{(1)}} = \frac{0,36}{0,258} = 1,4; \quad \frac{V_{\max}^{(2)}}{V_{\max}^{(1)}} = \frac{0,36}{0,55} = 0,65.$$

Следовательно, по сравнению с дюралюминиевой балкой для композитной балки со стеклотекстолитовым слоем прогибы увеличиваются на 40%, а для биметаллической балки прогибы уменьшаются на 34,5%.

Изменение весовой характеристики (массы m) двухслойной балки по сравнению с однородной балкой определяется соотношением:

$$\frac{m}{m_1} = \frac{\rho_1 F_1 + \rho_2 F_2}{\rho_1 F_1} = \frac{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2}{\rho_1 h}$$

В результате расчетов получим:

- для биметаллической балки $\frac{m_2}{m_1} = \frac{2,7 \cdot 8 + 7,8 \cdot 2}{2,7 \cdot 10} = 1,38;$

- для композитной балки
$$\frac{m_3}{m_1} = \frac{2,7 \cdot 8 + 2,3 \cdot 2}{2,7 \cdot 10} = 0,97.$$

Пример 2. Многослойная композитная балка

Для шарнирно опертой многослойной балки (рис. 1.18,а) подобрать нагрузку из условия, чтобы коэффициент запаса прочности был не меньше 3.

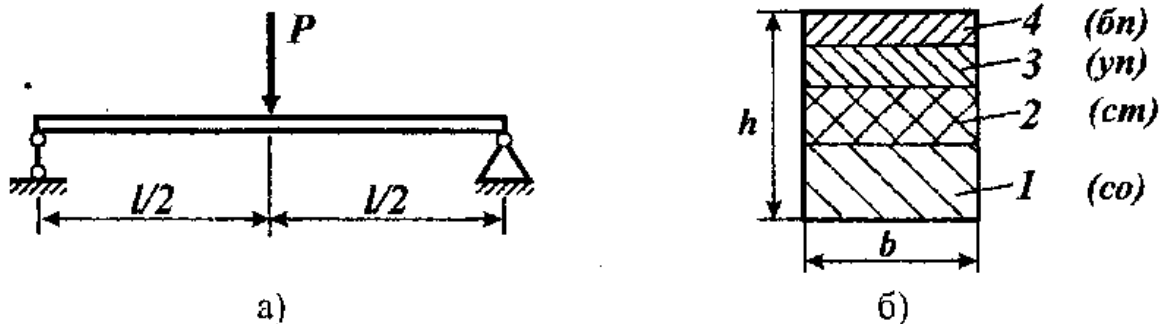


Рис. 1.18

Характеристики материалов слоев балки (рис. 1.18,б):

1 – стеклопластик однонаправленный (со), $h_1 = 5$ мм,

$E_z = 57$ ГПа, $G_{zy} = 2,8$ ГПа, $\sigma_{ар} = 1750$ МПа, $\sigma_{ас} = 650$ МПа, $\tau_a = 48$ МПа.

2 – стеклотекстолит (см), $h_2 = 10$ мм,

$E_z = 30$ ГПа, $G_{zy} = 2,27$ ГПа, $\sigma_{ар} = 520$ МПа, $\sigma_{ас} = 260$ МПа, $\tau_a = 40$ МПа.

3 – углепластик (yn), $h_3 = 2$ мм,

$E_z = 180$ ГПа, $G_{zy} = 1,6$ ГПа, $\sigma_{ар} = 1100$ МПа, $\sigma_{ас} = 450$ МПа, $\tau_a = 27$ МПа.

4 – боропластик (bn), $h_4 = 3$ мм,

$E_z = 210$ ГПа, $G_{zy} = 3,4$ ГПа, $\sigma_{ар} = 1600$ МПа, $\sigma_{ас} = 2400$ МПа, $\tau_a = 102$ МПа.

Размеры балки: $b = 50$ мм, $h = 20$ мм, $l = 1$ м.

Расчет балки выполняем в следующей последовательности.

Определяем жесткость балки, используя расчетные формулы:

$$I_k = \frac{b}{k+1} \sum_{i=1}^4 E_{zi} (\eta_i^{k+1} - \eta_{i-1}^{k+1}), \quad k = 0, 1, 2;$$

$$\eta_0 = 0, \eta_1 = 5 \text{ мм}, \eta_2 = 15 \text{ мм}, \eta_3 = 17 \text{ мм}, \eta_4 = h = 20 \text{ мм};$$

$$I_0 = b \sum_{i=1}^4 E_{zi} (\eta_i - \eta_{i-1}) = b \sum_{i=1}^4 E_i h_i = 50 \cdot (57 \cdot 5 + 30 \cdot 10 + 180 \cdot 2 + 210 \cdot 3) \cdot 10^3 = 78,7 \text{ МН};$$

$$I_1 = \frac{1}{2} b \sum_{i=1}^4 E_i (\eta_i^2 - \eta_{i-1}^2) = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot [57 \cdot 25 + 30 \cdot (15^2 - 5^2) + 180 \cdot (17^2 - 15^2) + 210 \cdot (20^2 - 17^2)] \cdot 10^6 = 1,06 \text{ МН} \cdot \text{м};$$

$$I_2 = \frac{1}{3} b \sum_{i=1}^4 E_i (\eta_i^3 - \eta_{i-1}^3) = \frac{1}{3} \cdot 50 \cdot [57 \cdot 5^3 + 30 \cdot (15^3 - 5^3) + 180 (17^3 - 15^3) + 210 \cdot (20^3 - 17^3)] \cdot 10^{-6} = 17,16 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\eta_c = \frac{I_1}{I_0} = \frac{1,06}{78,75} = 0,0134 \text{ м} = 13,4 \text{ мм};$$

$$B = I_0 = 78,75 \text{ МН}; \quad D_x = I_2 - \eta_c I_1 = 17,16 - 0,0134 \cdot 1,06 \cdot 10^3 = 3 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\bar{C}_y = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^4 \frac{h_i}{G_{zy,i}} = \frac{1}{50} \left(\frac{5}{2,8} + \frac{10}{2,2} + \frac{2}{1,6} + \frac{3}{3,4} \right) \cdot 10^{-3} = 0,17 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}^2}{\text{МН}};$$

$$\bar{K}_y = \frac{h^2}{C_y} = \frac{0,02^2}{0,17 \cdot 10^{-3}} = 2,35 \text{ МН}.$$

Определяем нормальные напряжения в опасном сечении.

Для этого используем расчетные формулы и значения координат:

$$\sigma_{z,i} = -E_i \frac{\mathcal{M}_{\max}}{D_x} y, \quad \mathcal{M}_{\max} = \frac{Pl}{4} = 0,25P;$$

$$y_0 = -\eta_c = -13,4 \text{ мм}, \quad y_1 = \eta_1 - \eta_c = -8,4 \text{ мм}, \quad y_2 = \eta_2 - \eta_c = 1,6 \text{ мм},$$

$$y_3 = \eta_3 - \eta_c = 3,6 \text{ мм}, \quad y_4 = \eta_4 - \eta_c = 3,6 \text{ мм}.$$

Нормальные напряжения на наружной ($\sigma_{z,i}''$) и внутренней ($\sigma_{z,i}'$) поверхности каждого слоя равны:

$$\sigma_{z,1}'' = 57 \cdot 10^6 \cdot \frac{0,25P}{3} \cdot 8,4 \cdot 10^{-3} = 39,9 \cdot 10^3 P;$$

$$\sigma_{z,1}' = 57 \cdot 10^6 \cdot \frac{0,25P}{3} \cdot 13,4 \cdot 10^{-3} = 63,65 \cdot 10^3 P;$$

$$\sigma_{z,2}'' = -30 \cdot 10^6 \cdot \frac{0,25P}{3} \cdot 1,6 \cdot 10^{-3} = -4 \cdot 10^3 P;$$

$$\sigma_{z,2}' = 30 \cdot 10^6 \cdot \frac{0,25P}{3} \cdot 8,4 \cdot 10^{-3} = 21 \cdot 10^3 P;$$

$$\sigma_{z,3}'' = -180 \cdot 10^6 \cdot \frac{0,25P}{3} \cdot 3,6 \cdot 10^{-3} = -54 \cdot 10^3 P;$$

$$\sigma_{z,3}' = -180 \cdot 10^6 \cdot \frac{0,25P}{3} \cdot 1,6 \cdot 10^{-3} = -24 \cdot 10^3 P;$$

$$\sigma_{z,4}'' = -210 \cdot 10^6 \cdot \frac{0,25P}{3} \cdot 6,6 \cdot 10^{-3} = -115,5 \cdot 10^3 P;$$

$$\sigma_{z,4}' = -210 \cdot 10^6 \cdot \frac{0,25P}{3} \cdot 3,6 \cdot 10^{-3} = -63 \cdot 10^3 P.$$

Нетрудно убедиться, что наименьший запас прочности получается для углепластикового слоя вследствие низкой прочности на сжатие:

$$n_a = \frac{\sigma_{sc}}{|\sigma_{z,3}^n|} = 3 \quad \text{или} \quad |\sigma_{z,3}^n| = \frac{\sigma_{sc}}{n_a} = \frac{450}{3} = 150 \text{ МПа}.$$

Отсюда получим значение допускаемой нагрузки:

$$54 \cdot 10^3 P_{дон} = 150 \cdot 10^3, \quad P_{дон} = 2,78 \text{ кН}.$$

При данной нагрузке нормальные напряжения в слоях балки равны:

$$\sigma_{z,1}^a = 177 \text{ МПа}, \quad \sigma_{z,1}^n = 111 \text{ МПа}, \quad \sigma_{z,2}^a = 58,4 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{z,2}^n = -11,1 \text{ МПа}, \quad \sigma_{z,3}^a = -66,7 \text{ МПа}, \quad \sigma_{z,3}^n = -150 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{z,4}^a = -175 \text{ МПа}, \quad \sigma_{z,4}^n = -321,1 \text{ МПа}.$$

Определяем касательные напряжения в сечении, где действует максимальная поперечная сила $Q_{max} = -0,5P_{дон} = -1,39 \text{ кН}$.

Выражение для касательных напряжений на границе слоев имеет вид:

$$\tau_{zy} = \frac{Q_{max} S_E^*}{b D_x} = \frac{Q_{max}}{D_x} \cdot \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m E_i h_i (\eta_i + \eta_{i-1} - 2\eta_c), \quad 1 \leq m \leq 3.$$

Вычисляем значения касательных напряжений на границах слоев (для верхнего и нижнего слоев используются индексы «в» и «и»):

$$\tau_{zy,1}^a = 0;$$

$$\tau_{zy,1}^n = \tau_{zy,2}^a = -\frac{1,39}{3} [57 \cdot 5 \cdot (5 - 2 \cdot 13,4)] \cdot 10^{-3} = 2,88 \text{ МПа};$$

$$\tau_{zy,2}^n = \tau_{zy,3}^a = 2,88 - \frac{1,39}{3} [30 \cdot 10 \cdot (20 - 2 \cdot 13,4)] \cdot 10^{-3} = 3,83 \text{ МПа};$$

$$\tau_{zy,3}^n = \tau_{zy,4}^a = 3,83 - \frac{1,39}{3} [180 \cdot 2 \cdot (32 - 2 \cdot 13,4)] \cdot 10^{-3} = 1,96 \text{ МПа};$$

$$\tau_{zy,4}^n = 0.$$

Эпюры нормальных $\sigma_z(y)$ и касательных $\tau_{zy}(y)$ напряжений в сечении балки показаны на рис. 1.19.

Примечание. Если изменить направление нагрузки или слои уложить в обратном порядке, то получим $P_{дон} = 3,2 \text{ кН}$, т.е. в этом случае получается большее значение допустимой нагрузки, что выгодно.

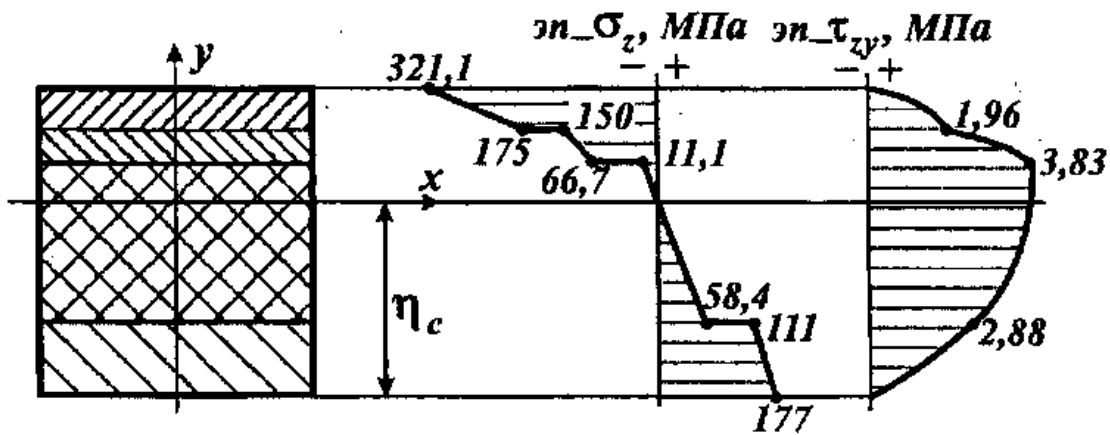


Рис. 1.19

Определяем максимальный прогиб балки.

Рассмотрим определение прогиба с учетом деформации поперечного сдвига и оценим уточнение расчетных значений максимального прогиба по сравнению с результатами при использовании классической теории изгиба балок. Согласно выражению (1.25) максимальный прогиб можно представить в виде двух составляющих:

$$V_{max} = V_{max}^* + \Delta V_{max}.$$

Каждую из составляющих максимального прогиба определим по способу Верещагина. Для этого построим эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для грузового и единичного состояний балки (рис. 1.20).

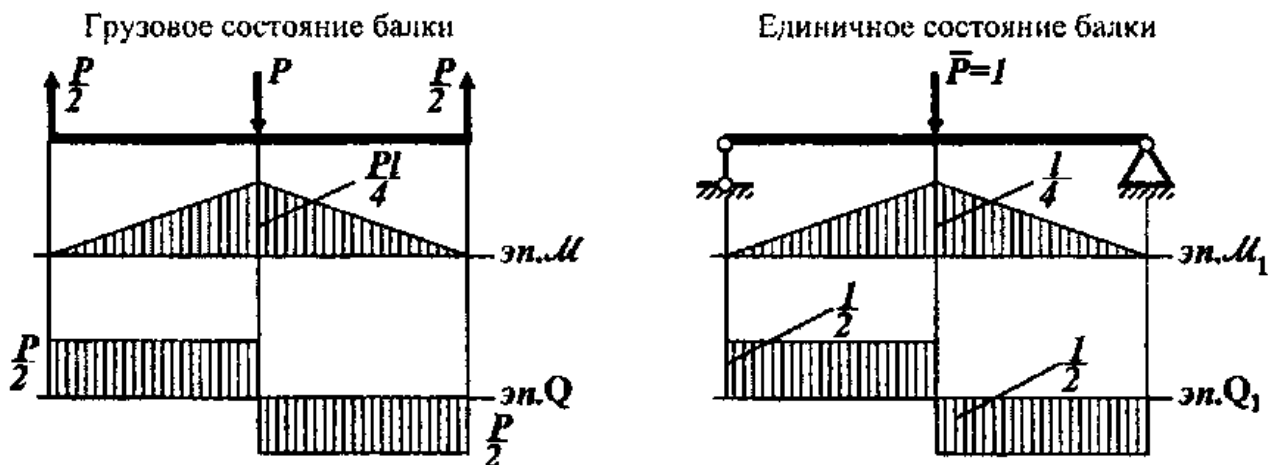


Рис. 1.20.

Выполнив «перемножение» соответствующих эпюр изгибающих моментов и поперечных сил, получим следующие выражения:

$$V_{max}^* = \frac{Pl^3}{48D_x}, \quad \Delta V_{max} = \frac{Pl}{2K_y}.$$

Значение максимального прогиба будет равно:

$$V_{max} = \frac{Pl^3}{48D_x} \left(1 + \frac{12D_x}{K_y l^2}\right) = \frac{2,78 \cdot 1^3}{48 \cdot 3} \left(1 + \frac{12 \cdot 3}{2350 \cdot 1^2}\right) = 1,93 \cdot 10^{-2} (1 + 0,0153) =$$

$$= 1,96 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 1,96 \text{ см.}$$

Уточнение значения максимального прогиба за счет учета деформации поперечного сдвига составило 1,5%. Такая незначительная поправка объясняется относительно большой сдвиговой жесткостью балки в поперечном направлении.

Пример 3. Трехслойная балка с легким наполнителем

Трехслойные балки обладают, как правило, низкой сдвиговой жесткостью в поперечном направлении, что приводит к необходимости применения уточненной расчетной модели для определения перемещений. В качестве примера рассмотрим четырехточечный изгиб трехслойной балки (рис. 1.21,а).

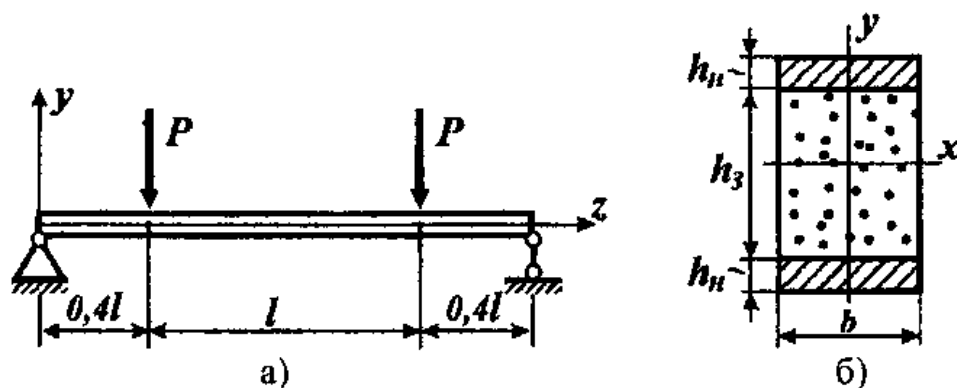


Рис. 1.21

Геометрические параметры балки и нагрузка:

$$h_n = 1 \text{ мм}, h_3 = 18 \text{ мм}, b = 60 \text{ мм}, l = 300 \text{ мм}, P = 500 \text{ Н.}$$

Сечение балки имеет симметричную структуру (рис. 1.21,б). Заполнитель выполнен из пенопласта, который имеет такие характеристики:

$$E_3 = 45 \text{ МПа}, G_3 = 35 \text{ МПа}, \tau_s = 0,25 \text{ МПа}, \rho_3 = 450 \text{ кг/м}^3.$$

Рассмотрим два конструктивных варианта использования материалов для несущих слоев балки.

Вариант 1. Титановый сплав *BT5* с характеристиками

$$E_2 = 107 \text{ ГПа}, G_{xy} = 41 \text{ ГПа}, \sigma_{sp} = 770 \text{ МПа}, \sigma_{sc} = 720 \text{ МПа}, \rho = 4500 \text{ кг/м}^3.$$

Вариант 2. Углепластик *КМУ-1в* с характеристиками

$$E_2 = 180 \text{ ГПа}, G_{xy} = 5 \text{ ГПа}, \sigma_{sp} = 1000 \text{ МПа}, \sigma_{sc} = 540 \text{ МПа}, \rho = 1550 \text{ кг/м}^3.$$

Расчет балки выполняем в следующей последовательности.

Вычисляем сдвиговую жесткость балки, используя формулы:

$$K_y = \frac{h^2}{C_y}, \quad \bar{C}_y = \sum_{i=1}^3 \frac{h_i}{b_i G_i} = \frac{1}{b} \left(2 \cdot \frac{h_n}{G_{zy,n}} + \frac{h_3}{G_{zy,3}} \right) = \frac{h_3}{b G_3} \left(1 + \frac{2h_n}{h_3} \cdot \frac{G_3}{G_n} \right) \approx \frac{h_3}{b G_3}.$$

Тогда получим:

$$K_y = \frac{h^2 b}{h_3} G_3 = G_3 b h \left(1 + \frac{2h_n}{h_3} \right) = 35 \cdot 10^3 \cdot 60 \cdot 20 \cdot 10^{-6} \left(1 + \frac{2 \cdot 1}{18} \right) = 46,7 \text{ кН}.$$

Определяем изгибную жесткость балки.

Нетрудно убедиться, что изгибной жесткостью заполнителя можно пренебречь. Для вычисления жесткости D_x можно воспользоваться формулами (1.32) и (1.36), причем очевидно, что $\eta_c = h/2 = 10$ мм. Пренебрегая моментом инерции сечения полок относительно своих центральных осей, можно приближенно определить изгибную жесткость балки выражением:

$$D_x = 2E_n F_n y_{c,n}^{-2} = 2E_n b h_n \left(\frac{h_n + h_3}{2} \right)^2.$$

Тогда для расчетных вариантов получим:

1) балка с титановыми несущими слоями

$$D_x = 2 \cdot 1,07 \cdot 10^{11} \cdot 60 \cdot 1 \left(\frac{1+18}{2} \right)^2 \cdot 10^{-12} = 1158,8 \text{ Н} \cdot \text{м}^2;$$

2) балка с угленастиковыми несущими слоями

$$D_x = 2 \cdot 1,8 \cdot 10^{11} \cdot 60 \cdot 1 \left(\frac{1+18}{2} \right)^2 \cdot 10^{-12} = 1949,4 \text{ Н} \cdot \text{м}^2.$$

Определяем максимальные нормальные напряжения в балке.

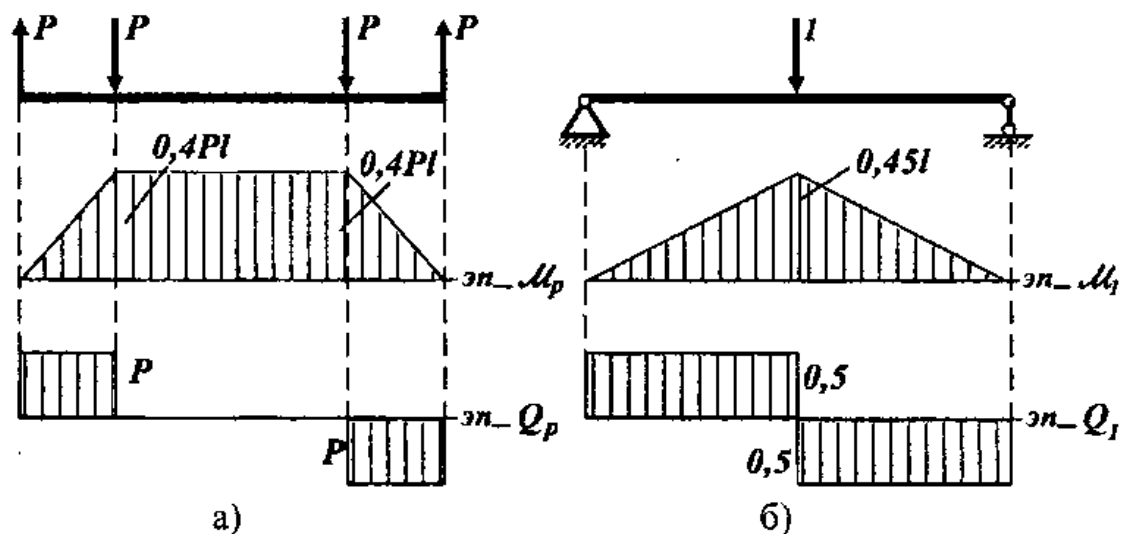


Рис. 1.22

Из эпюры изгибающих моментов (рис. 1.22,а) видно, что наибольшие нормальные напряжения возникают на участке чистого изгиба балки. Распределение напряжений в сечении балки определяется выражением:

$$\sigma_{z,i} = -E_i \frac{\mathcal{M} \cdot y}{D_x}, \quad i = 1, 2, 3;$$

расчетное значение момента $\mathcal{M} = -0,4 Pl = -60 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

Так как изгибная жесткость D_x определена только с учетом несущих слоев, то максимальные напряжения не зависят от материала несущих слоев и равны:

$$\sigma_{max} = E_n \frac{|\mathcal{M}|}{D_x} \cdot \frac{h_3}{2} = 1,07 \cdot 10^5 \cdot \frac{60}{1158,8} \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 55,4 \text{ МПа.}$$

Максимальные нормальные напряжения в заполнителе будут зависеть от материала несущих слоев, т.к. чем больше изгибная жесткость D_x , тем меньше эти напряжения. Для расчетных вариантов получим:

1) балка с титановыми несущими слоями

$$\sigma_{max,3} = E_3 \frac{|\mathcal{M}|}{D_x} \cdot \frac{h_3}{2} = 45 \cdot \frac{60}{1158,8} \cdot 9 \cdot 10^{-3} = 0,021 \text{ МПа};$$

2) балка с углепластиковыми несущими слоями

$$\sigma_{max,3} = E_3 \frac{|\mathcal{M}|}{D_x} \cdot \frac{h_3}{2} = 45 \cdot \frac{60}{1949,4} \cdot 9 \cdot 10^{-3} = 0,0125 \text{ МПа.}$$

Касательные напряжения в поперечном сечении балки воспринимаются заполнителем. Максимальные касательные напряжения в заполнителе на участке поперечного изгиба балки (см. рис. 1.22,а) можно определить так же, как и для однородной балки прямоугольного сечения:

$$\tau_{max} \approx \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_p}{bh_3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{500}{60 \cdot 18 \cdot 10^{-6}} = 0,69 \cdot 10^6 \text{ Па} = 0,69 \text{ МПа.}$$

Определяющими в расчете на прочность рассматриваемой трехслойной балки являются касательные напряжения в заполнителе.

Вычисляем максимальный прогиб балки.

Максимальный прогиб (в среднем сечении балки) можно определить по способу Верещагина. Эпюры \mathcal{M}_1 и Q_1 для единичного состояния балки приведены на рис. 1.22,б. Составляющие полного прогиба V_{max} в соответствии с выражением (1.25) за счет изгиба (V_{max}^*) и за счет поперечного

сдвига (ΔV_{max}) определяем «перемножением» соответствующих эпюр:

$$V_{max}^* = \frac{1}{D_x} \cdot 2 \left[\frac{1}{2} \cdot 0,4Pl \cdot 0,4l \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,2l + 0,4Pl \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{(0,45 + 0,2)l}{2} \right] = 0,15 \frac{Pl^3}{D_x},$$

$$\Delta V_{max} = \frac{1}{K_y} \cdot 2 \cdot P \cdot 0,4l \cdot \frac{1}{2} = \frac{0,4Pl}{K_y}.$$

Тогда выражение для полного максимального прогиба балки примет вид:

$$V_{max} = V_{max}^* + \Delta V_{max} = V_{max}^* \left(1 + \frac{\Delta V_{max}}{V_{max}^*} \right) = 0,15 \frac{Pl^3}{D_x} (1 + \bar{\Delta}),$$

$$\bar{\Delta} = 2,66 \frac{D_x}{K_y l^2}.$$

Определим значения поправочного коэффициента $\bar{\Delta}$ и максимального прогиба V_{max} для трехслойных балок с различными несущими слоями.

Вариант 1. Балка с титановыми несущими слоями:

$$\bar{\Delta} = 2,66 \frac{1158,8}{4,57 \cdot 10^4 \cdot 0,3^2} = 0,73;$$

$$V_{max} = 0,15 \frac{500 \cdot 0,3^3}{1158,8} (1 + 0,73) = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 3 \text{ мм}.$$

Вариант 2. Балка с углепластиковыми несущими слоями:

$$\bar{\Delta} = 2,66 \frac{1949,4}{4,57 \cdot 10^4 \cdot 0,3^2} = 1,23;$$

$$V_{max} = 0,15 \frac{500 \cdot 0,3^3}{1949,4} (1 + 1,23) = 2,3 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 2,3 \text{ мм}.$$

Приведенные результаты показывают существенное влияние сдвиговой жесткости при определении перемещений в трехслойных балках с легким заполнителем. Так, для балки с углепластиковыми несущими слоями прогиб в 2,23 раза больше по сравнению с прогибом, определенным по классической модели (без учета поперечного сдвига).

Применение сотового заполнителя позволяет увеличить сдвиговую жесткость трехслойной балки. Например, при использовании заполнителя из алюминиевой фольги АМгН толщиной $t = 0,05$ мм с шестигранной формой ячейки (сторона ячейки $a = 6$ мм, см. рис. 1.4) приведенный модуль сдвига заполнителя в поперечной плоскости можно определить следующим образом [3]:

$$G'_3 = 1,2G_M \frac{t}{\sqrt{3a}} = 1,2 \cdot 2,8 \cdot 10^4 \cdot \frac{0,05}{\sqrt{3 \cdot 6}} = 161,8 \text{ МПа,}$$

где $G_M = 28$ ГПа – модуль сдвига материала АМгН.

Тогда сдвиговая жесткость балки будет равна:

$$K'_y = K_y \frac{G'_3}{G_3} = 46,7 \cdot \frac{161,8}{35} = 216 \text{ кН.}$$

Значения поправочных коэффициентов в формулах для прогиба за счет учета поперечного сдвига для расчетных вариантов будут равны:

1) балка с титановыми несущими слоями

$$\bar{\Delta}' = 2,66 \frac{D_x}{K'_y l^2} = \bar{\Delta} \frac{G_3}{G'_3} = 0,73 \frac{35}{161,8} = 0,158;$$

2) балка с углепластиковыми несущими слоями

$$\bar{\Delta}' = \bar{\Delta} \frac{G_3}{G'_3} = 1,23 \frac{35}{161,8} = 0,266.$$

Следовательно, для трехслойной балки с сотовым наполнителем заметно уменьшаются максимальные прогибы:

1) балка с титановыми несущими слоями

$$V_{max} = V_{max}^* (1 + \bar{\Delta}') = 2 \text{ мм};$$

2) балка с углепластиковыми несущими слоями

$$V_{max} = V_{max}^* (1 + \bar{\Delta}') = 1,3 \text{ мм.}$$

Трехслойная балка с углепластиковыми несущими слоями оказывается не только более жесткой по сравнению с балкой с титановыми несущими слоями, но и более легкой. Погонная масса балки определяется выражением

$$\bar{m} = \frac{m}{L} = b(2\rho_n h_n + \rho_3 h_3).$$

Сопоставление масс балок с пенопластовым наполнителем и несущими слоями из различных материалов

$$\frac{\bar{m}_T}{\bar{m}_Y} = \frac{2 \cdot 4,5 \cdot 0,1 + 0,15 \cdot 1,8}{2 \cdot 1,55 \cdot 0,1 + 0,15 \cdot 1,8} = 2,02$$

показывает двукратный весовой выигрыш трехслойной балки с углепластиковыми несущими слоями.

2. Метод конечных элементов

В развитии *метода конечных элементов* (МКЭ) удачно сочетались идеи строительной механики и прикладной математики. Первые работы по МКЭ появились в середине 50-х годов 20-го века (термин «конечный элемент» впервые введен в 1960г.), хотя некоторые идеи метода использовались, начиная с 20-х годов, при расчете сложных систем как стержневых конструкций. Характерно, что МКЭ был разработан и введен инженерами-исследователями и лишь после этого математиками проводилось обоснование метода (кстати, проводится и сейчас, т.к. МКЭ непрерывно развивается). Не случайно и то, что появление и бурное развитие МКЭ связано с прогрессом в области вычислительных машин (появлением ЭВМ второго поколения), т.к. решение практических задач по МКЭ может быть осуществлено только при использовании вычислительной техники. МКЭ имеет наглядное физическое представление, что не в последнюю очередь обеспечило его широкую популярность среди исследователей, особенно инженеров.

В настоящее время метод конечных элементов является фундаментальным методом механики, наиболее широко применяющимся в расчетной практике для решения многих сложных задач. Его отличает простая механическая трактовка, логичность изложения, универсальность в решении различных задач, удобство и эффективность численной реализации. МКЭ позволяет легко учитывать различные параметры расчетного объекта: сложность геометрии, изменение свойств материалов в объеме, условия взаимодействия с другими объектами (нагрузки и граничные условия) и др. При этом современные ЭВМ, в первую очередь персональные компьютеры, используются не только для вычислительных операций при решении задач, но и для реализации имеющихся графических средств, дающих возможность наглядного геометрического представления конструктивного объекта в виде расчетной модели и визуализации расчетных результатов. В настоящее время МКЭ достиг высокой степени развития. Метод применяется не только в механике деформируемого тела, но и в термомеханике, механике жидкости и газа, биомеханике, электротехнике и в других научных областях. По сути, МКЭ является одним из *методов математического моделирования* и может эффективно применяться при решении любых

задач, описываемых дифференциальными уравнениями.

2.1. Основные понятия

В МКЭ используется представление сплошного тела в виде совокупности элементов конечных размеров, которые называются *конечными элементами*. Поведение каждого элемента описывается с помощью выбранной системы аппроксимирующих функций внутри элемента, т.е. создается *модель конечного элемента*. Конечный элемент имеет заданное число узлов, в каждом из которых определены некоторые *степени свободы* как *узловые параметры* (например, перемещения, силы и др.). Таким образом, *тело представляется в виде дискретного набора конечных элементов, связанных только в узлах, и наделяется определенным числом степеней свободы, т.е. создается конечно-элементная модель тела*.

Основными этапами решения прикладных задач механики деформируемого тела по МКЭ являются:

- 1) разбиение тела (конструкции) на конечные элементы;
- 2) вычисление характеристик конечных элементов и составление разрешающей системы алгебраических уравнений относительно неизвестных узловых параметров модели;
- 3) подстановка граничных условий;
- 4) решение системы алгебраических уравнений;
- 5) определение компонент напряженно-деформированного состояния тела (деформаций и напряжений в произвольных точках тела).

Второй этап представляет так называемую *процедуру объединения по элементам* (сборка конечно-элементной модели). Применение специальных аппроксимирующих функций для моделирования поведения конечного элемента и процедура поэлементного объединения являются ключевыми вопросами в МКЭ, определяющими его особенность и вычислительную эффективность.

Важным шагом в расчете по МКЭ является выбор типового элемента для дискретной модели тела (конструкции). В расчетной практике используются разнообразные типовые конечные элементы, которые можно классифицировать по характерным признакам.

Наиболее общим подходом является разделение на *одномерные, двумерные и трехмерные конечные элементы*. Это определяется типом ре-

шаемой задачи механики, характеризуемой ее математическим описанием. Соответственно, с помощью таких моделей элементов можно исследовать одноосное, двухосное или трехосное напряженное состояние тела (конструкции).

В зависимости от геометрической формы могут применяться различные конечные элементы:

- *прямолинейные, криволинейные* (одномерные элементы, рис. 2.1);
- *треугольные, прямоугольные и четырехугольные* (двухмерные элементы, рис. 2.2);
- *тетраэдральные, призматические, шестигранные* (трехмерные элементы, рис. 2.3).



Рис. 2.1



Рис. 2.2

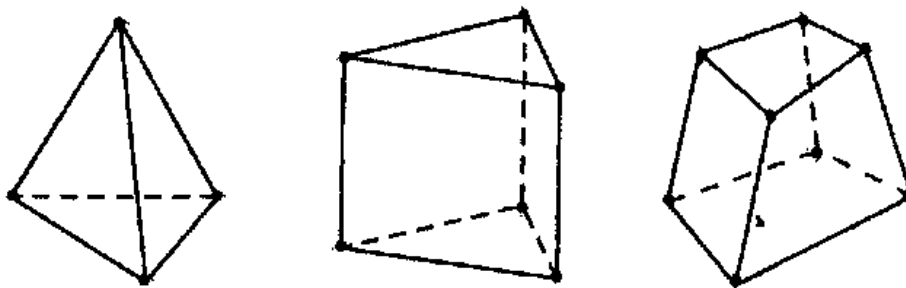


Рис. 2.3

Любая двумерная область может быть разделена на треугольники; отчасти это объясняет большое распространение в расчетной практике треугольных конечных элементов. Прямоугольные и четырехугольные элементы реже применяются, но при решении некоторых двумерных задач они являются более рациональными (например, при расчете оболочек). Тетраэдральные и призматические трехмерные элементы, которые также называются, соответственно, четырехгранными и пятигранными элемен-

тами, удобны для трехмерного конечно-элементного моделирования. Однако чаще всего в расчетах используются шестигранные элементы, которые за их внешний вид иногда называют «кирпичиками».

Для соответствующего представления поведения конечного элемента можно использовать различное количество узлов в элементе и число степеней свободы в узле. В целом, эти параметры элемента определяют общее число степеней свободы для элемента. От этого зависит порядок используемых аппроксимирующих функций, т.е. точность описания поведения элемента. Например, при анализе плоского напряженного состояния используются плоские треугольные элементы с тремя узлами (элементы первого порядка) или шестью узлами (элементы второго порядка), имеющие две степени свободы в каждом узле – перемещения u и v (рис. 2.4,а).

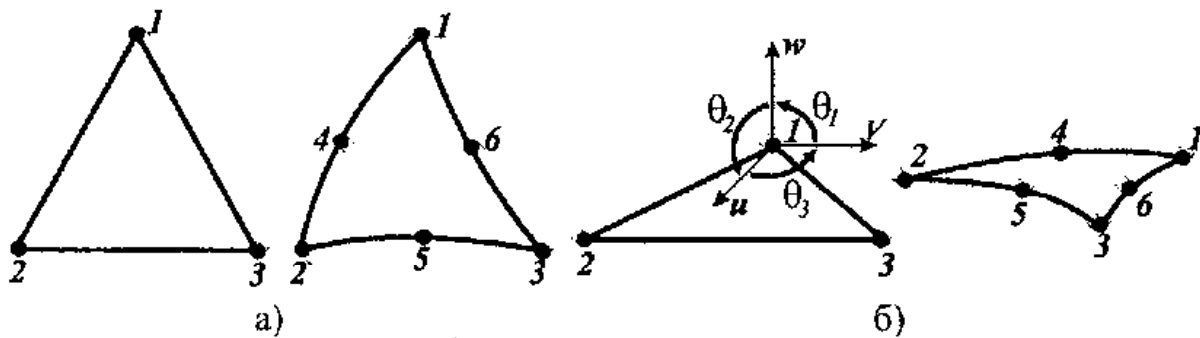


Рис. 2.4

В то же время, для анализа оболочек используются треугольные элементы с тремя или шестью узлами (рис. 2.4,б) или четырехугольные элементы с четырьмя или восьмью узлами, имеющие шесть степеней свободы в узле – три линейных перемещения u , v , w и три угловых перемещения θ_x , θ_y , θ_z . Аналогичный подход используется и для получения различных моделей одномерных и трехмерных элементов. Обычно выгоднее применять элементы с узловыми параметрами только в вершинах, т.к. вершины являются общими узлами для большего числа элементов, чем узлы на сторонах, ребрах или боковых гранях элементов. Как правило, это приводит к уменьшению размера системы алгебраических уравнений МКЭ, главным образом, за счет сокращения ширины ленты уравнений.

Очевидно, что точность конечно-элементного решения можно повысить либо путем увеличения числа элементов, либо путем повышения порядка аппроксимирующих функций, т.е. числа степеней свободы элемента. Другими словами, этого можно добиться, применяя простые элементы, но

в большом количестве или сложные элементы, но в меньшем количестве. От этого зависит эффективность численного решения задачи, т.е. точность результатов и временные затраты.

Выбор КЭ определяется и используемой расчетной схемой реальной конструкции. На рис. 2.5 приведены некоторые примеры разбиения конструкций или отдельных ее объектов на типовые элементы.

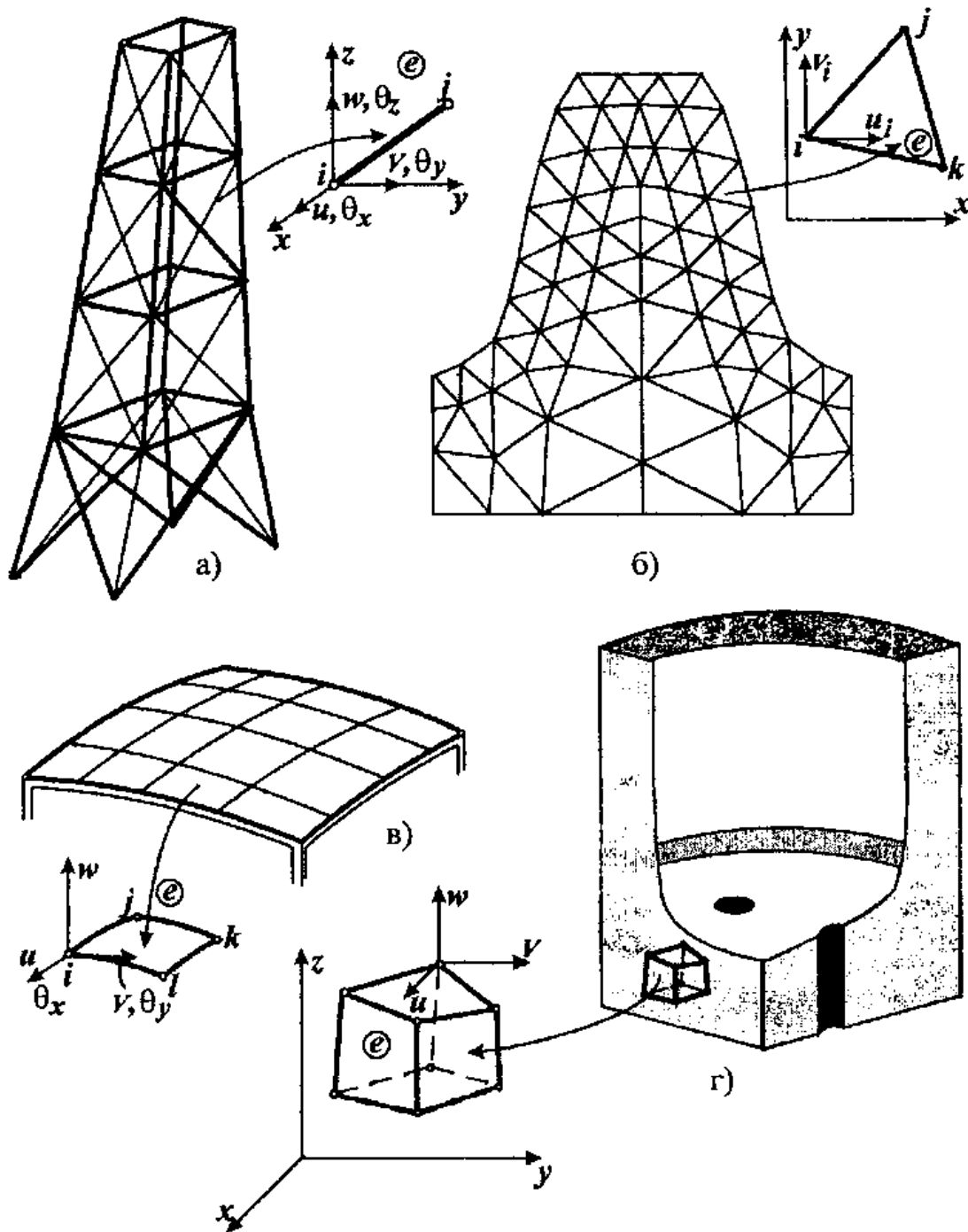


Рис. 2.5

Для расчета пространственной стержневой конструкции (рис. 2.5,а) используется одномерный (стержневой) элемент («e») с шестью степенями свободы в узле. При расчетном анализе отдельного зуба колеса зубчатой передачи (рис. 2.5,б) можно использовать плоские треугольные элементы с двумя степенями свободы в узле. Для расчета оболочечных конструкций (рис. 2.5,в) рационально использование четырехугольных криволинейных (оболочечных) элементов с пятью степенями свободы в узле. При исследовании массивных конструкций, например, сосуда высокого давления реактора (рис. 2.5,г) применяются шестигранные восьмиузловые трехмерные элементы с тремя степенями свободы в узле. Часто целесообразно проводить расчет по МКЭ в несколько этапов. Например, расчет трубопроводной системы (рис. 2.6,а) можно сначала проводить с использованием стержневых элементов, а затем при анализе наиболее напряженной зоны – тройникового соединения цилиндрических труб (рис. 2.6,б) – использовать оболочечные элементы. При необходимости можно реализовать и третий этап – расчет этого соединения или его части с применением трехмерных элементов.

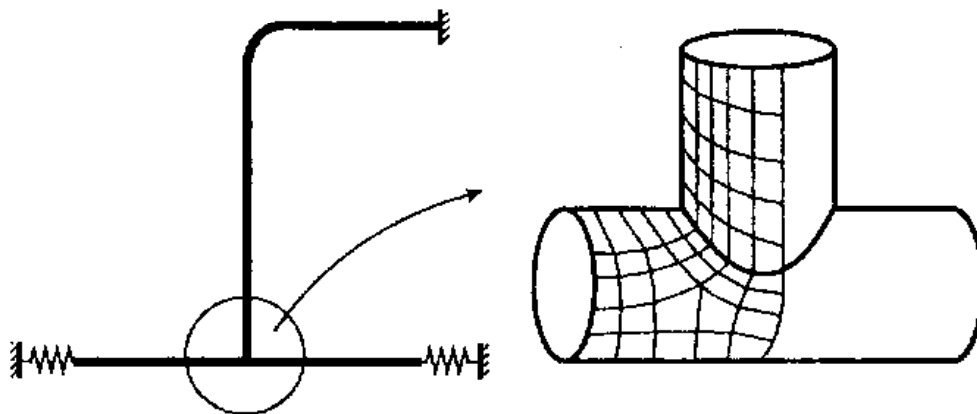


Рис. 2.6

Характеристики конечного элемента получаются с применением вариационной формулировки задачи, выбирая основные переменные и способы аппроксимации их внутри элемента. По этому признаку существующие модели конечных элементов можно отнести к четырем основным видам: *совместные, равновесные, смешанные и гибридные модели.*

Преобладающее применение на практике получил МКЭ в варианте *метода перемещений* с использованием *совместных моделей.* (Первые работы по МКЭ были основаны именно на таком подходе.) В качестве узловых степеней свободы принимаются обобщенные перемещения (чаще все-

го линейные и угловые перемещения в узлах). Внутри элемента используется аппроксимация только для перемещений, при этом обеспечивается совместность (непрерывность) перемещений на границах соседних элементов. Основной характеристикой таких элементов является *матрица жесткости*.

Гораздо реже применяется МКЭ в варианте метода сил с использованием *равновесных моделей*. В качестве узловых параметров принимаются обобщенные силы (силы и моменты), через которые строится аппроксимация усилий (напряжений) внутри элемента, удовлетворяющая уравнениям равновесия. Основной характеристикой таких элементов является *матрица податливости*.

Смешанные и гибридные модели элементов используются в варианте *смешанного метода*. Для *смешанной модели* используется независимая аппроксимация нескольких (двух или трех) переменных внутри элемента (перемещения, деформации, напряжения). В *гибридных моделях* также используется аппроксимация нескольких переменных, причем не только внутри элемента, но и на его границе (например, внутри элемента задается независимая аппроксимация перемещений и напряжений, на границе элемента – независимо другая аппроксимация перемещений). В целом, смешанные и гибридные модели являются более сложными, чем совместные модели элементов. Их основное преимущество – повышение точности решения МКЭ, особенно по напряжениям. В общем случае, если в качестве узловых параметров используются перемещения и усилия, в смешанных и гибридных моделях получаются матрицы смешанного вида, а для конечно-элементной модели конструкции – знаконеопределенная система алгебраических уравнений, что требует специальных процедур ее решения. Однако возможны специальные формы аппроксимации переменных в элементе, которые позволяют получить разрешающую систему уравнений в таком же виде, что и в методе перемещений, сохраняя все достоинства смешанного подхода. Такие смешанные и гибридные модели имеют определенные преимущества по сравнению с совместными моделями, особенно в расчете пластин, оболочек и трехмерных конструкций.

В настоящее время МКЭ продолжает развиваться в различных направлениях. Часто, как и при создании метода, определяющую роль играет

инженерная интуиция. Например, весьма эффективно применяются несо-
вместные модели метода перемещений, хотя для них нет еще достаточного
теоретического обоснования.

2.2. Вариационные методы решения задач механики

Имеется упругое твердое тело, на которое действуют объемные силы
 $\{p_0\}$ (p_x, p_y, p_z – компоненты объемных сил) и поверхностные силы $\{p_s\}$ на

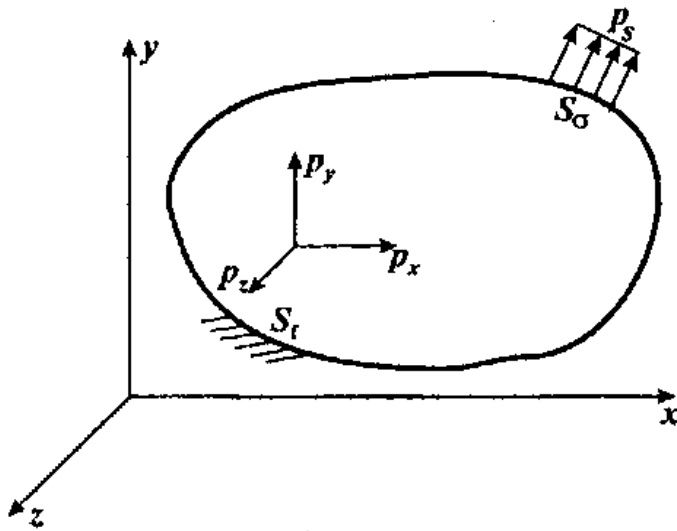


Рис 2.7

части поверхности S_σ (рис.
2.7). Тело закреплено в прос-
транстве на части поверхно-
сти (S_Γ) с помощью некоторых
связей, т.е. заданы кинемати-
ческие граничные условия на
части поверхности S_Γ . При на-
грузении в теле возникают
перемещения, деформации и
напряжения, которые необхо-
димо определить из решения
задачи.

Полная система уравнений, описывающая напряженно-деформиро-
ванное состояние упругого тела, в матричной форме имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} [B]^T \{\sigma\} + \{p\} &= 0 \\ \{\varepsilon\} &= [B]\{f\} \\ \{\sigma\} &= [D]\{\varepsilon\} \end{aligned} \right\} \in V, \quad (2.1)$$

$$[B_s]^T \{\sigma\} = \{p_s\} \in S_\sigma, \quad \{f\} = \{f_s\} \in S_\Gamma, \quad (2.2)$$

где $\{\sigma\}$ – вектор напряжений; $\{\varepsilon\}$ – вектор деформаций; $\{f\} = \{u, v, w\}^T$ – век-
тор перемещений; $[B]$ – матрица дифференциальных операторов; $[D]$ –
матрица упругости; $\{p_0\} = \{p_x, p_y, p_z\}^T$ – вектор объемных сил; $\{p_s\}$ – вектор
поверхностных сил на границе S_σ ; $\{f_s\} = \{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}^T$ – вектор известных пе-
ремещений на границе S_Γ .

Первое матричное уравнение (2.1) представляет собой уравнения рав-
новесия; второе уравнение выражает условия совместности деформаций
(соотношения Коши); третье уравнение является законом Гука для мате-
риала тела. Таким образом, система уравнений (2.1) включает статические,

кинематические и физические уравнения для деформированного тела. Наконец, зависимости (2.2) формулируют статические и кинематические граничные условия. Прямое решение задач механики путем интегрирования полной системы дифференциальных уравнений при заданных граничных условиях возможно лишь в частных случаях.

Применение вариационного способа является наиболее общим подходом в решении задач механики. Его преимущества особенно проявились в условиях широкого использования ЭВМ. Вариационный способ базируется на использовании какого-либо вариационного принципа механики, связанного с функционалом определенного вида. При этом равновесное состояние деформируемой системы соответствует условию стационарности функционала, который имеет энергетическую природу.

Условие стационарности функционала эквивалентно основным уравнениям (2.1), которые описывают поведение упругой системы. При этом вариационная формулировка имеет и ряд преимуществ по сравнению со способом прямого решения: 1) функционал инвариантен к преобразованию координат, что дает возможность получать основные уравнения для упругой системы в произвольных координатах; 2) можно сделать оценку точности приближенного решения (часто можно получить верхнюю и нижнюю границы решения). Поэтому вариационные принципы являются основой для формулировки и применения различных приближенных (численных) методов, давая не только путь решения, но и условия существования и сходимости таких методов.

2.2.1. Вариационное исчисление (основные понятия)

Целью вариационного исчисления является нахождение функции, которая доставляет заданному функционалу стационарное значение. Под функционалом понимается некоторая переменная (скалярная) величина, зависящая от функции (и ее производных).

Пусть задан функционал в виде

$$\Phi(f) = \int_a^b F(x, f, f') dx, \quad (2.3)$$

где F – функция от $f(x)$, первой производной $f'(x)$ и независимой переменной x .

Находится стационарное значение функционала Φ относительно ва-

риаций по f на множестве допустимых функций, удовлетворяющих общим красвым условиям.

Напомним, что вариацией называется малое возможное изменение какой-либо величины или функции. Например, вариации перемещений δu , δv , δw рассматриваются как малые возможные перемещения, совместные с наложенными на систему связями. Операции вариации и дифференцирования переставимы (свойство коммутативности): $\frac{d}{dx}(\delta f(x)) = \delta(f'(x))$.

Вариация функционала равна приращению функционала в результате вариации функции и ее производных (главная часть приращения):

$$\delta \Phi(f) = \int_a^b [F(x, f + \delta f, f' + \delta f') - F(x, f, f')] dx \approx \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial f} \delta f + \frac{\partial F}{\partial f'} \delta f' \right) dx. \quad (2.4)$$

Здесь использовано разложение

$$F(x, f + \delta f, f' + \delta f') = F(x, f, f') + \frac{\partial F}{\partial f} \delta f + \frac{\partial F}{\partial f'} \delta f' + R(\delta f, \delta f'),$$

где пренебрегается остаток $R(\delta f, \delta f')$ как величина более высокого порядка малости.

Условие стационарности функционала Φ по f требует, чтобы выполнялось

$$\delta \Phi = 0. \quad (2.5)$$

Преобразуем правую часть выражения (2.4) с помощью интегрирования по частям

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial f'} \delta f' dx = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial f'} \frac{d}{dx}(\delta f) dx = \frac{\partial F}{\partial f'} \delta f \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial f'} \right) \delta f dx.$$

В итоге получаем

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial f'} \right) \right] \delta f dx + \frac{\partial F}{\partial f'} \delta f \Big|_a^b = 0. \quad (2.6)$$

Равенство (2.6) должно соблюдаться при произвольной вариации δf . Это выполняется при условиях:

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial f'} \right) = 0, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial F}{\partial f'} \delta f \Big|_a^b = 0. \quad (2.8)$$

Таким образом, имеем естественный вариационный принцип для нахождения решения f дифференциального уравнения (2.7), удовлетворяющего краевому условию (2.8). Искомая функция доставляет функционалу $\Phi(f)$ стационарное значение относительно вариаций по f на множестве функций, удовлетворяющих краевым условиям. Дифференциальное уравнение (2.7) называется *уравнением Эйлера*, соответствующим вариационному принципу, согласно которому требуется получить стационарное значение функционала Φ . Краевое условие (2.8) называется *естественным краевым условием*, т.к. оно автоматически выполняется для функции f , доставляющей функционалу Φ стационарное значение. (Заданные краевые условия называются *главными краевыми условиями*.)

2.2.2. Потенциальная энергия деформации

В процессе нагружения упругое тело накапливает энергию, которая называется потенциальной энергией деформации. Эта энергия представляет собой работу внутренних сил. Так как внутренние силы являются силами сопротивления деформации, то работа внутренних сил всегда противоположна по знаку работе внешних сил. При статическом нагружении перемещения точек тела возрастают от нуля до конечной величины вместе с ростом внутренних сил. Для линейно упругого тела зависимость между внутренними силами и перемещениями является линейной. Например, при растяжении стержня (рис. 2.8,а) потенциальная энергия деформации как работа результирующих внутренних сил $N = \sigma F$ на перемещениях $u = \varepsilon l$ численно равна площади под графиком $N(u)$, т.е. $U = \frac{1}{2} Nu$.

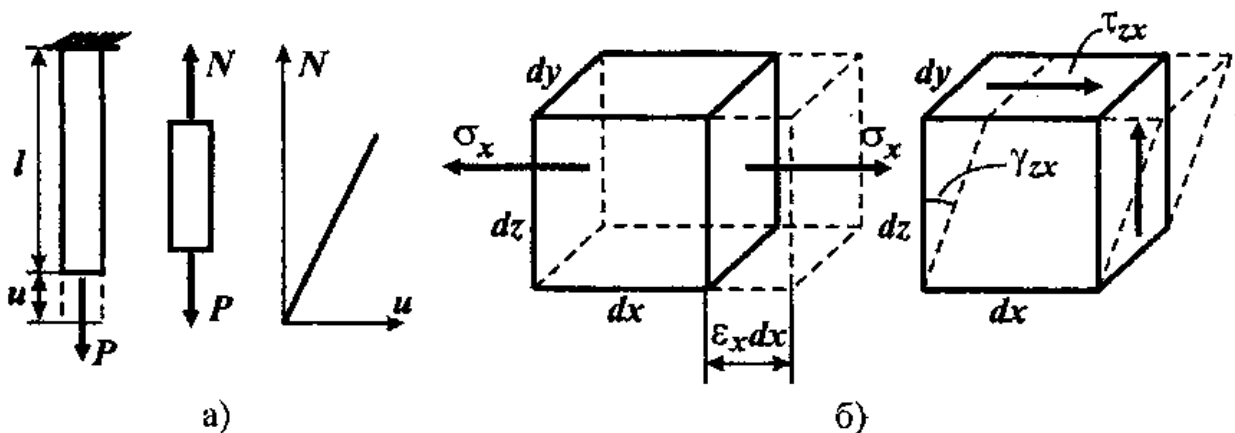


Рис. 2.8

Если рассматривать напряженно-деформированное состояние нагруженного тела, то потенциальную энергию деформации можно получить, используя принцип суперпозиции (считаем материал изотропным). Для элемента, находящегося под действием только нормальных напряжений σ_x , соответствующая сила $\sigma_x dydz$ совершает работу на перемещениях $\varepsilon_x dx$ (на рис. 2.8,б левая грань элемента условно считается неподвижной), которая равна

$$dU_1 = \frac{1}{2} \sigma_x dydz \cdot \varepsilon_x dx = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x dx dy dz.$$

При действии на элемент только касательных напряжений в какой-либо плоскости работу совершают сдвигающие силы $\tau_{zx} dx dy$ на перемещениях $\gamma_{zx} dz$ (на рис. 2.8,б нижняя грань элемента условно считается неподвижной).

Объединяя работу от нормальных напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ и касательных напряжений $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ для всего тела объемом V , получаем выражение для энергии деформации

$$U = \int_V \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dV$$

или в матричной форме

$$U = \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV. \quad (2.9)$$

Энергия деформации в единице объема тела называется *удельной потенциальной энергией деформации* U_0 :

$$U = \int_V U_0 dV,$$

$$U_0 = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \dots + \tau_{zx} \gamma_{zx}) = \frac{1}{2} \{\sigma\}^T \{\varepsilon\}. \quad (2.10)$$

В вариационных принципах механики используется и понятие *удельной дополнительной энергии деформации*

$$W_0 = \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} - U_0. \quad (2.11)$$

Так как удельная потенциальная энергия деформации U_0 представляет площадь под графиком $\sigma(\varepsilon)$, то дополнительная энергия W_0 представляет площадь, дополняющую U_0 до прямоугольника $\sigma \times \varepsilon$ (рис. 2.9). Для линейной зависимости $\sigma(\varepsilon)$ очевидно равенство

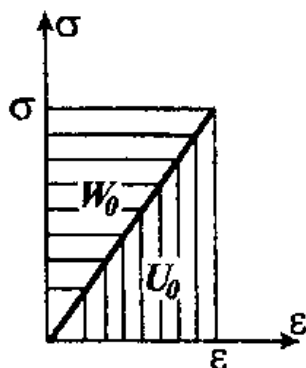


Рис. 2.9

$$W_0 = U_0.$$

Для нелинейной зависимости $\sigma(\varepsilon)$ функции U_0 и W_0 не равны. Например, в случае одноосного растяжения $U_0 = \int_0^{\varepsilon_x} \sigma_x d\varepsilon_x$.

$$U_0 = \int_0^{\varepsilon_x} \sigma_x d\varepsilon_x.$$

В механике часто используется понятие потенциала (*потенциальной функции*), связанного с рассмотрением консервативной механической системы.

Консервативными считаются силы, работа которых на любом допустимом перемещении тела, к которому они приложены, не зависит от пути деформирования, а определяется только начальным и конечным состояниями тела. Механическая система, состоящая из упругого тела и действующих на него консервативных внешних сил, называется консервативной. Такая система обладает потенциалом (потому что консервативные силы называются также и потенциальными). Для упругого тела удельная энергия деформации является потенциальной функцией (упругим потенциалом), т.е. внутренние силы являются консервативными. Для линейно упругого тела справедливы такие свойства:

$$\{\sigma_x\} = \frac{\partial U_0}{\partial \{\varepsilon_x\}}, \dots, \{\tau_{zx}\} = \frac{\partial U_0}{\partial \{\gamma_{zx}\}}, \quad \{\varepsilon_x\} = \frac{\partial W_0}{\partial \{\sigma_x\}}, \dots, \{\gamma_{zx}\} = \frac{\partial W_0}{\partial \{\tau_{zx}\}}$$

или в матричной форме

$$\{\sigma\} = \frac{\partial U_0}{\partial \{\varepsilon\}}, \quad \{\varepsilon\} = \frac{\partial W_0}{\partial \{\sigma\}}. \quad (2.12)$$

Соответственно, для этих выражений функция U_0 называется упругим потенциалом напряжений, а функция W_0 – упругим потенциалом деформаций.

2.2.3. Принцип виртуальной работы

(*принцип возможных перемещений*)

При нагружении в упругом теле возникают истинные перемещения f_i , деформации ε_i и напряжения σ_i , удовлетворяющие всем уравнениям (2.1) и (2.2). Допустим, что упругие перемещения точек тела из состояния равновесия получили кинематически возможные перемещения δu , δv , δw (возможные вариации), т.е. перемещения, отвечающие наложенным связям и

не нарушающие условия сплошности (неразрывности) тела:

$$\tilde{f}_i = f_i + \delta f_i, \quad \tilde{\varepsilon}_i = \varepsilon_i + \delta \varepsilon_i, \quad \tilde{\sigma}_i = \sigma_i$$

(индекс «*i*» относится к соответствующей компоненте перемещения, деформации, напряжения). Здесь перемещения \tilde{f}_i являются непрерывными, дифференцируемыми и однозначными функциями координат, удовлетворяющих условиям на части поверхности S_f , а кроме того, справедливы соотношения Коши.

На возможных перемещениях внешние и внутренние силы совершают возможную работу. Возможная работа внутренних сил (изменение потенциальной энергии деформации) будет равна

$$\delta U(f) = \int_V (\{\sigma_x\} \delta\{\varepsilon_x\} + \dots + \{\tau_{zx}\} \delta\{\gamma_{zx}\}) dV = \int_V \{\sigma\}^T \delta\{\varepsilon\} dV = \int_V \delta\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV. \quad (2.13)$$

В принципе возможных перемещений удельная потенциальная энергия деформации выражается через деформации, которые однозначно связаны с основными неизвестными – перемещениями:

$$U_0 = U_0(\varepsilon_x, \dots, \gamma_{zx}) = U(f). \quad (2.14)$$

Примечание. 1. При определении возможной работы значения и направления сил считаются неизменными, поэтому множитель 1/2 отсутствует. 2. Величины σ_i не зависят от δf_i , т.к. берутся перед тем, как производится варьирование по перемещениям.

Возможная работа внешних сил равна

$$\begin{aligned} \delta A_p(f) &= \int_V (p_x \delta u + p_y \delta v + p_z \delta w) dV + \int_{S_\sigma} (p_{x\sigma} \delta u + p_{y\sigma} \delta v + p_{z\sigma} \delta w) dS = \\ &= \int_V \delta\{f\}^T \{p_0\} dV + \int_{S_\sigma} \delta\{f\}^T \{p_s\} dS. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Принцип виртуальной работы формулируется следующим образом: для системы, находящейся в положении равновесия, возможная работа всех внешних сил равна возможной работе внутренних сил, т.е.

$$\delta U = \delta A_p \quad \text{или} \quad \delta U - \delta A_p = 0. \quad (2.16)$$

Возможная работа определяется как работа внешних и внутренних сил (напряжений) на кинематически возможных бесконечно малых вариациях перемещений.

Уравнение (2.16) называется уравнением в вариациях, т.к. в общем случае имеют смысл δU , δA_p , а не U и A_p . Этот вариационный принцип является наиболее общим, т.к. справедлив для любой системы, в том числе

неупругой и неконсервативной. Для консервативной системы, имеющей потенциалы внешних и внутренних сил, уравнение (2.16) можно записать в форме вариационного уравнения

$$\delta(U - A_p) = 0. \quad (2.17)$$

Из уравнения (2.16) в силу произвольности возможных перемещений могут быть получены уравнения равновесия в качестве уравнений Эйлера и статические граничные условия как естественные краевые условия.

2.2.4. Принцип минимума потенциальной энергии системы (вариационный принцип Лагранжа)

Для консервативной системы можно ввести понятие полной потенциальной энергии системы (функционал Лагранжа)

$$\Pi_L = U - A_p = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - \int_V \{f\}^T \{p_0\} dV - \int_{S_\sigma} \{f\}^T \{p_s\} dS - A_p. \quad (2.18)$$

Здесь $\Pi_p = -A_p$ называется потенциалом внешних сил.

Формулировка принципа Лагранжа: из всех возможных перемещений, удовлетворяющих заданным кинематическим граничным условиям, истинные перемещения в положении равновесия системы соответствуют условию стационарности (минимума) полной потенциальной энергии деформации, т.е.

$$\delta\Pi_L = 0 \text{ или } \delta(U - A_p) = 0 \rightarrow \Pi_L = \min. \quad (2.19)$$

Вариационное уравнение Лагранжа записывается в виде

$$\int_V \delta\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - \int_V \delta\{f\}^T \{p_0\} dV - \int_{S_\sigma} \delta\{f\}^T \{p_s\} dS = 0. \quad (2.20)$$

В соответствии с зависимостью (2.16), учитывая выражение (2.9) и закон Гука, выражение для потенциальной энергии деформации может быть записано через перемещения:

$$U(\varepsilon) = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dV = U(f) = \frac{1}{2} \int_V ([B] \{f\})^T [D] ([B] \{f\}) dV.$$

Таким образом, вариационное уравнение (2.20) выражается только через основные неизвестные – перемещения.

Из уравнения (2.20) могут быть получены уравнения равновесия (как уравнения Эйлера) и статические граничные условия. Вместе с необходимыми условиями данного вариационного принципа (соблюдение уравнений неразрывности и кинематических граничных условий) получается

полная система уравнений для деформируемого тела (2.1), (2.2).

Для задач механики принцип Лагранжа является экстремальным принципом, т.к. его выполнение для равновесного состояния тела соответствует условию минимума полной потенциальной энергии системы.

Для консервативной системы, обладающей полной энергией Π_L , возможны следующие случаи равновесного положения:

- устойчивое (условие минимума)

$$\Pi_L = \min, \delta\Pi_L = 0, \delta^2\Pi_L > 0,$$

- неустойчивое (условие максимума)

$$\Pi_L = \max, \delta\Pi_L = 0, \delta^2\Pi_L < 0,$$

- безразличное (условие минимакса)

$$\Pi_L = \text{const}, \delta\Pi_L = 0, \delta^2\Pi_L = 0.$$

Эти условия составляют сущность теоремы Лагранжа-Дирихле и определяют достаточный критерий для оценки состояния равновесия консервативной системы.

Энергетическая трактовка устойчивого положения равновесия такова: если система обладает минимумом полной энергии, то любое отклонение системы из этого положения будет сопровождаться превышением приращения потенциальной энергии деформации δU над приращением работы внешних сил δA_p , и тело будет стремиться вернуться в исходное равновесное положение.

2.2.5. Принцип виртуальной дополнительной работы (принцип возможных изменений напряжений)

Рассматривается упругое тело, находящееся в равновесии при заданных объемных $\{p_0\}$ и поверхностных $\{p_s\}$ силах, удовлетворяющих статическим граничным условиям на части поверхности S_σ . Предполагается, что напряжения в теле испытывают малые изменения (вариации) от положения равновесия, а перемещения не изменяются, т.е.

$$\tilde{\sigma}_i = \sigma_i + \delta\sigma_i, \quad \tilde{f}_i = f_i, \quad \tilde{\varepsilon}_i = \varepsilon_i.$$

При этом статически возможные напряжения $\delta\sigma$ не нарушают условия равновесия тела.

Возможное изменение напряжений приводит к изменению дополнительной энергии деформации:

$$\delta W(\sigma) = \int_V (\varepsilon_x \delta \sigma_x + \dots + \gamma_{zx} \delta \tau_{zx}) dV. \quad (2.21)$$

При этом удельная дополнительная энергия деформации выражается через основные неизвестные – напряжения:

$$W_0(\sigma) = W_0(\sigma_x, \dots, \tau_{zx}). \quad (2.22)$$

Возможная работа за счет изменения внешних сил равна

$$\delta A'_p(\sigma) = \int_V (u \delta p_x + v \delta p_y + w \delta p_z) dV + \int_{S_f} (\bar{u} \delta p_{xs} + \bar{v} \delta p_{ys} \delta v + \bar{w} \delta p_{zs}) dS. \quad (2.23)$$

Если $\delta\{p_0\} = 0$ (в объеме V) и $\delta\{p_s\} = 0$ (на части поверхности S_σ), то выражение (2.23) примет вид:

$$\delta A'_p(\sigma) = \int_{S_f} (\bar{u} \delta p_{xs} + \bar{v} \delta p_{ys} \delta v + \bar{w} \delta p_{zs}) dS = \int_{S_f} \{f_s\} \delta\{p_s\} dS. \quad (2.24)$$

Принцип виртуальной дополнительной работы (принцип возможных изменений напряжений) можно сформулировать так: для системы, удовлетворяющей условиям совместности деформаций, возможная работа всех внешних сил равна возможной работе внутренних сил, т.е.

$$\delta W = \delta A'_p \quad \text{или} \quad \delta W - \delta A'_p = 0. \quad (2.25)$$

Здесь возможная работа определяется как работа статически возможных бесконечно малых вариаций внешних сил и напряжений (внутренних сил) на действительных перемещениях системы.

Уравнение (2.25) является уравнением в вариациях. Этот принцип соблюдается при любых соотношениях между напряжениями и деформациями.

Используя выражения (2.9), (2.21) и (2.24), уравнение (2.25) в матричной форме принимает вид

$$\int_V \{\varepsilon\}^T \delta\{\sigma\} dV - \int_{S_f} \{f_s\}^T \delta\{p_s\} dS = 0. \quad (2.26)$$

Для консервативной системы уравнение в вариациях может быть записано в форме вариационного уравнения

$$\delta(W - A'_p) = 0. \quad (2.27)$$

Из уравнения (2.26) могут быть получены уравнения совместности деформаций (как уравнения Эйлера) и кинематические граничные условия (как естественные краевые условия). Вместе с необходимыми условиями данного вариационного принципа (удовлетворение уравнениям равновесия

и статическим граничным условиям) получается полная система уравнений для деформируемого тела.

Как видно, формулировки принципа возможных перемещений (2.16) и принципа возможных изменений напряжений (2.25) симметричны, т.е. существует определенная аналогия этих вариационных принципов (обычно говорят, что эти принципы имеют двойственную форму). Эта аналогия (двойственность) формулировок обоих принципов заключается в том, что необходимые условия для одного принципа являются естественными условиями для другого принципа (т.е. вытекающими из вариационной формулировки), и наоборот.

2.2.6. Принцип минимума дополнительной энергии (вариационный принцип Кастильяно)

Для консервативной линейно упругой системы выражение для дополнительной работы внутренних и внешних сил может быть записано в виде

$$\Pi_K = W - A'_p,$$

$$\Pi_K(\sigma) = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - \int_{S_f} \{f_s\}^T \{p_s\} dS. \quad (2.28)$$

Выражение (2.28) называется *функционалом Кастильяно*.

Принцип Кастильяно можно сформулировать так: *из всех статически возможных напряжений истинными являются те, которые обеспечивают условие стационарности (минимума) дополнительной энергии системы, т.е.*

$$\delta \Pi_K = 0 \quad \text{или} \quad \delta(W - A'_p) = 0 \rightarrow \Pi_K = \min. \quad (2.29)$$

Используя выражение (2.28), уравнение (2.29) можно записать в форме вариационного уравнения:

$$\int_V \{\varepsilon\}^T \delta\{\sigma\} dV - \int_{S_f} \{f_s\}^T \delta\{p_s\} dS = 0. \quad (2.30)$$

Из уравнения (2.30) для вариационной задачи могут быть получены уравнения неразрывности деформаций (как уравнения Эйлера) и кинематические граничные условия (как естественные краевые условия). Как и принцип Лагранжа, *принцип Кастильяно является экстремальным вариационным принципом, при котором выполняются условия минимума:*

$$\Pi_K = \min, \quad \delta \Pi_K = 0, \quad \delta^2 \Pi_K > 0.$$

Оба эти принципа называются двойственными, т.к. необходимыми

условиями одной вариационной формулировки являются естественные условия другой.

2.2.7. Смешанные вариационные принципы

Рассмотренные выше классические (экстремальные) вариационные принципы основывались на изменении только одних величин – перемещений f_i или напряжений σ_i . Кроме этого существуют так называемые смешанные вариационные принципы, основанные на вариации нескольких величин. Однако для смешанных принципов утрачивается свойство экстремальности, и они формулируются через условие стационарности соответствующего функционала.

Вариационный принцип Рейсснера предполагает одновременную и независимую вариацию компонент перемещений и напряжений, т.е.

$$\tilde{f}_i = f_i + \delta f_i, \quad \tilde{\varepsilon}_i = \varepsilon_i + \delta \varepsilon_i, \quad \tilde{\sigma}_i = \sigma_i + \delta \sigma_i.$$

При этом считается, что выполняются соотношения упругости.

Соответствующий функционал может быть получен исходя из выражения для потенциальной энергии системы. По определению, согласно выражению (2.11), выполняется равенство

$$W(\sigma) + U(\varepsilon) = \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV.$$

Откуда получаем выражение

$$U(\varepsilon) = \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV - W(\sigma) = \int_V \left(\{\sigma\}^T \{\varepsilon\} - \frac{1}{2} \{\sigma\}^T [D]^{-1} \{\sigma\} \right) dV.$$

Тогда смешанный функционал Рейсснера может быть записан в форме

$$\begin{aligned} \Pi_R(\sigma, f) = U - A_p = & \int_V \left(\{\sigma\}^T \{\varepsilon\} - \frac{1}{2} \{\sigma\}^T [D]^{-1} \{\sigma\} \right) dV - \\ & - \int_V \{f\}^T \{p_0\} dV - \int_{S_\sigma} \{f\}^T \{p_s\} dS - \int_{S_f} \{f - f_s\}^T \{p_s\} dS. \end{aligned} \quad (2.31)$$

При этом выполняются соотношения Коши $\{\varepsilon\} = [B]\{f\}$. Кроме того, в поверхностный интеграл входят как заданные граничные усилия $\{p_s\}$, так и заданные граничные перемещения $\{f_s\}$.

Используя условие стационарности смешанного функционала (2.31)

$\delta \Pi_R(\sigma, f) = 0$, $\Pi_R(\sigma, f) \Rightarrow$ к стационарному значению, получаем соответствующее вариационное уравнение Рейсснера.

Вследствие произвольности выражений δf_i , $\delta \sigma_i$ из вариационного уравнения можно получить уравнения равновесия и уравнения неразрывности деформаций (как уравнения Эйлера), а естественными краевыми условиями будут статические и кинематические граничные условия.

Вариационный принцип Ху-Вашингу предполагает одновременную и независимую вариацию компонент перемещений, деформаций и напряжений

$$\tilde{f}_i = f_i + \delta f_i, \quad \tilde{\varepsilon}_i = \varepsilon_i + \delta \varepsilon_i, \quad \tilde{\sigma}_i = \sigma_i + \delta \sigma_i.$$

При этом используется обобщенный вариационный функционал вида

$$\begin{aligned} \Pi_0(f, \varepsilon, \sigma) = & \frac{1}{2} \int_V \{(\varepsilon)^T [D] \{\varepsilon\} dV + \int_V \{\sigma\}^T ([B] \{f\} - \{\varepsilon\}) dV - \\ & - \int_V \{f\}^T \{p_0\} dV - \int_{S_\sigma} \{f\}^T \{p_s\} dS - \int_{S_f} (\{f - f_s\})^T \{p_s\} dS. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Используя условие стационарности смешанного функционала (2.32)

$$\delta \Pi_0(f, \varepsilon, \sigma) = 0, \quad \delta \Pi_0(f, \varepsilon, \sigma) \Rightarrow \text{к стационарному значению,}$$

получаем соответствующее вариационное уравнение Ху-Вашингу.

Из вариационного уравнения Ху-Вашингу могут быть получены соотношения (2.1) как уравнения Эйлера, а статические и кинематические граничные условия (2.2) будут естественными краевыми условиями.

В вариационных методах механики, которые составляют основу большинства приближенных (численных) методов, применяются как экстремальные (классические), так и смешанные вариационные формулировки, соответствующие условиям стационарности. Преимущество использования экстремальных принципов заключается в предельных свойствах соответствующих функционалов, что позволяет сформулировать условия сходимости приближенных решений. Смешанные вариационные принципы приводят к уравнениям с производными более низкого порядка, чем в уравнениях классических вариационных принципов. Поэтому достоинством смешанных вариационных принципов является ослабление требований к выбору допускаемых функций f_i , ε_i , σ_i . Это позволяет расширить класс решаемых задач на основе смешанных вариационных методов. Кроме того, в смешанных вариационных формулировках можно добиться одинаковой точности для всех варьируемых функций, в то время как для экстремальных формулировок лучшая точность достигается только для ос-

новных функций (перемещений или напряжений).

Кроме рассмотренных смешанных вариационных формулировок, существуют так называемые гибридные вариационные формулировки. Для них характерна вариация переменных не только внутри объема тела, но и на границе. Такие формулировки являются более громоздкими, чем смешанные, и применяются сравнительно редко.

2.3. Вариационная формулировка МКЭ

Наиболее общая формулировка МКЭ основывается на применении вариационных принципов, которым подчиняется поведение механической системы. В вариационных принципах используются функционалы определенного типа, имеющие энергетическую природу. Функционалы представляют обобщенные функции, описывающие поведение механической системы. Например, функционалом является полная потенциальная энергия системы. Условие стационарности функционалов (в частности, условие экстремальности) выражает определенные свойства механической системы. Подробности вариационных формулировок МКЭ можно найти в специальной литературе [10-14]. В дальнейшем изложении для получения основных соотношений МКЭ применяется смешанная вариационная формулировка, обладающая достаточной общностью и гибкостью в разработке конечно-элементных моделей.

Рассматривается упругая система, закрепленная в пространстве с помощью связей, исключающих перемещение ее как жесткого целого, и нагруженная внешними силами. В каждой точке системы вводятся векторы перемещений $\{f\}$, деформаций $\{\varepsilon\}$ и напряжений $\{\sigma\}$ с компонентами в направлении соответствующих осей принятой системы координат. Получение основных зависимостей МКЭ наиболее удобно представить в матричной форме.

Компоненты напряжений и деформаций связаны обобщенным законом Гука

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}, \quad (2.33)$$

где $[D]$ – матрица упругости, содержащая упругие характеристики материала.

Компоненты перемещений и деформаций связаны дифференциальными зависимостями

$$\{\varepsilon\} = [B]\{f\}, \quad (2.34)$$

где $[B]$ – матрица дифференциальных операторов.

Воспользуемся смешанным функционалом Рейсснера в форме (2.31). В качестве независимых переменных используются перемещения $\{f\}$ и деформации $\{\bar{\varepsilon}\}$ (обозначение с чертой наверху принято, чтобы отличить эти деформации от деформаций, определяемых через перемещения из зависимостей (2.34)). При этом деформации $\{\bar{\varepsilon}\}$ и напряжения $\{\bar{\sigma}\}$ связаны законом Гука (2.33).

Тогда смешанный функционал

$$\Pi_R(f, \bar{\varepsilon}) = \int_{\Omega} \{\bar{\sigma}\}^T \{\varepsilon\} d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{\bar{\sigma}\}^T \{\bar{\varepsilon}\} d\Omega - A_p$$

с учетом соотношения (2.33) и симметричности матрицы упругости ($[D]^T = [D]$) примет такой вид:

$$\begin{aligned} \Pi_R(f, \bar{\varepsilon}) &= \int_{\Omega} (\{\bar{\varepsilon}\}^T [D] \{\varepsilon\} - \frac{1}{2} \{\bar{\varepsilon}\}^T [D] \{\bar{\varepsilon}\}) d\Omega - A_p, \\ A_p &= \int_{\Omega} \{f\}^T \{p_0\} d\Omega + \int_{\omega} \{f\}^T \{p_s\} d\omega, \end{aligned} \quad (2.35)$$

где A_p – работа внешних объемных $\{p_0\}$ и поверхностных $\{p_s\}$ сил; Ω , ω – область и граница области, где определен функционал Π_R (область Ω может рассматриваться как объем V , поверхность S или длина L).

Упругая система представляется в виде совокупности конечных элементов, т.е. $\Omega = \sum_e \Omega^e$. Учитывая вклад каждого элемента в полную энергию системы, применительно к функционалу (2.35) можно записать:

$$\Pi_R = \sum_e \Pi_R^e, \quad \Pi_R^e = \int_{\Omega^e} (\{\bar{\varepsilon}\}^T [D] \{\varepsilon\} - \frac{1}{2} \{\bar{\varepsilon}\}^T [D] \{\bar{\varepsilon}\}) d\Omega - A_p^e, \quad (2.36)$$

где индекс «e» относится к отдельному конечному элементу.

Будем рассматривать независимую аппроксимацию перемещений и деформаций в элементе:

$$\{f\} = [\phi] \{\delta^e\}, \quad (2.37)$$

$$\{\bar{\varepsilon}\} = [P] \{\alpha\}, \quad (2.38)$$

где $[\phi]$ – матрица аппроксимирующих функций перемещений (функций формы элемента), $\{\delta^e\}$ – вектор узловых перемещений элемента;

$[P]$ – матрица аппроксимации деформаций; $\{\alpha\}$ – вектор обобщенных параметров.

Используя соотношение (2.34), получим зависимость

$$\{\varepsilon\} = [C]\{\delta^e\}, \quad \{C\} = [B][\phi]. \quad (2.39)$$

Подстановка соотношений (2.37) и (2.38) в функционал (2.36) с учетом зависимости (2.39) приводит к следующему выражению:

$$\begin{aligned} \Pi_R^e = \int_{\Omega^e} \{\alpha\}^T \left[([P]^T [D][C])\{\delta^e\} - \frac{1}{2} \{\alpha\}^T [P]^T [D][P]\{\alpha\} \right] d\Omega - \\ - \left(\int_{\Omega^e} \{\delta^e\}^T \{\phi\}^T \{p_0\} d\Omega + \int_{\omega^e} \{\delta^e\}^T \{\phi\}^T \{p_s\} d\omega \right). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Определяющее матричное уравнение МКЭ для упругой системы (конечно-элементной модели) и основные соотношения для конечного элемента получаются из условия стационарности функционала $\delta\Pi_R = 0$. Так как вектор $\{\alpha\}$ связан только с отдельным элементом, то с учетом выражения (2.36) имеет место условие

$$\delta\Pi_R^e(\{\alpha\}) = 0.$$

Применив это условие к функционалу (2.40), вектор $\{\alpha\}$ может быть выражен через вектор узловых перемещений элемента $\{\delta^e\}$. После исключения вектора $\{\alpha\}$ из выражения (2.40) общий функционал системы, зависящий только от вектора узловых перемещений $\{\delta\}$, примет вид:

$$\Pi_R = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [K] \{\delta\} - (A_p + \sum_i R_i \delta_i). \quad (2.41)$$

Здесь учтено и действие узловых сил R_i , которым соответствуют узловые перемещения δ_i .

Из условия стационарности функционала

$$\delta\Pi_R(\{\delta\}) = 0$$

получим матричное уравнение равновесия системы:

$$[K]\{\delta\} - \{F\} = 0, \quad (2.42)$$

$$[K] = \sum_e [K^e], \quad \{F\} = \sum_e \{F^e\} + \sum_i R_i. \quad (2.43)$$

В приведенных соотношениях обозначено:

$[K]$ – матрица жесткости системы (конструкции);

$\{F\}$ – вектор эквивалентной узловой нагрузки системы;

$\{\delta\}$ – вектор узловых перемещений системы;

$[K^e]$ – матрица жесткости элемента;

$\{F^e\}$ – вектор эквивалентных узловых сил элемента.

При разработке смешанных моделей элементов можно использовать *модифицированный смешанный вариационный принцип Рейсснера*. Условно представим деформацию в виде двух частей $\{\varepsilon_1\}$, $\{\varepsilon_2\}$ (соответственно и $\{\bar{\varepsilon}_1\}$, $\{\bar{\varepsilon}_2\}$). Примем, что для одной части деформации точно выполняются соотношения (2.34), т.е. $\{\bar{\varepsilon}_1\} = \{\varepsilon_1\}$. Тогда модифицированный функционал Π_R^* может быть определен для независимых переменных – вектора перемещений $\{f\}$ и вектора деформаций $\{\bar{\varepsilon}_2\}$ в следующем виде:

$$\Pi_R^*(f, \bar{\varepsilon}_2) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \{\varepsilon_1\}^T [D_1] \{\varepsilon_1\} + \{\bar{\varepsilon}_2\}^T [D_2] \{\varepsilon_2\} - \frac{1}{2} \{\bar{\varepsilon}_2\}^T [D_2] \{\bar{\varepsilon}_2\} \right) d\Omega - A_p. \quad (2.44)$$

Матрицы $[D]$ и $[B]$ удобно представить в блочной форме:

$$[D] = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} [B_1] \\ [B_2] \end{bmatrix}.$$

Вместо (2.38) используем аппроксимацию только для деформаций $\{\bar{\varepsilon}_2\}$:

$$\{\bar{\varepsilon}_2\} = [P] \{\alpha\}. \quad (2.45)$$

Условие стационарности функционала $\delta \Pi_R^*(\{\alpha\}) = 0$ позволяет исключить вектор $\{\alpha\}$; тогда опять приходим к выражению (2.41).

Наконец, если в функционале (2.35) принять $\{\bar{\varepsilon}\} = \{\varepsilon\}$, то приходим к функционалу Лагранжа, который применяется для МКЭ в варианте метода перемещений. Функционал Лагранжа, зависящий только от перемещений, имеет вид

$$\Pi_L(f) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\}) d\Omega - A_p. \quad (2.46)$$

Подстановка соотношения (2.37) в функционал (2.46) сразу приводит к выражению (2.41), а условие $\delta \Pi_L(\{\delta\}) = 0$ соответствует условию минимума полной потенциальной энергии системы.

2.4. Основные соотношения для конечного элемента

Необходимые соотношения для различных моделей элементов получаются исходя из условия стационарности соответствующего функционала. Ниже приводятся такие соотношения для двух вариантов смешанной модели и совместной модели конечного элемента в варианте метода перемещений.

Смешанная модель элемента на основе функционала Рейсснера (2.35) получается с использованием матричных соотношений:

$$[K^e] = [G]^T [H]^{-1} [G], \quad (2.47)$$

$$[G] = \int_{\Omega^e} [P]^T [D] [C] d\Omega, \quad [H] = \int_{\Omega^e} [P]^T [D] [P] d\Omega, \quad (2.48)$$

$$\{\bar{\varepsilon}\} = [P] \{\alpha\}, \quad \{\alpha\} = [H]^{-1} [G] \{\delta^e\}. \quad (2.49)$$

Смешанная модель элемента на основе модифицированного функционала Рейсснера (2.44) получается с использованием соотношений:

$$[K^e] = [K_1^e] + [K_2^e], \quad (2.50)$$

$$[K_1^e] = \int_{\Omega^e} [C_1]^T [D_1] [C_1] d\Omega, \quad [K_2^e] = [G_2]^T [H_2]^{-1} [G_2],$$

$$\{C_1\} = [B_1] \|\phi\|, \quad \{C_2\} = [B_2] \|\phi\|, \quad [B]^T = ([B_1], [B_2]), \quad (2.51)$$

$$[G_2] = \int_{\Omega^e} [P]^T [D_2] [C_2] d\Omega, \quad [H_2] = \int_{\Omega^e} [P]^T [D_2] [P] d\Omega,$$

$$\{\bar{\varepsilon}_2\} = [P] \{\alpha\}, \quad \{\alpha\} = [H_2]^{-1} [G_2] \{\delta^e\}. \quad (2.52)$$

Модель элемента метода перемещений на основе функционала Лагранжа (2.46) получается с использованием соотношений:

$$[K^e] = \int_{\Omega^e} [C]^T [D] [C] d\Omega, \quad (2.53)$$

$$\{C\} = [B] \|\phi\|.$$

Вектор узловых сил элемента для всех моделей определяется выражением:

$$\{F^e\} = \int_{\Omega^e} \|\phi\|^T \{p_0\} d\Omega + \int_{\omega^e} \|\phi\|^T \{p_s\} d\omega. \quad (2.54)$$

Определенное преимущество в алгоритмизации и численной реализации МКЭ на компьютерах дает представление матричных характеристик элемента в блочной форме в зависимости от количества узлов элемента.

Для конечного элемента, имеющего m узлов, можно записать:

$$[K^e] = \begin{bmatrix} [K_{11}] & \cdot & [K_{1m}] \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ [K_{m1}] & \cdot & [K_{mm}] \end{bmatrix}; \quad \{F^e\} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \cdot \\ \{F_m\} \end{Bmatrix}; \quad \{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \cdot \\ \{\delta_m\} \end{Bmatrix}. \quad (2.55)$$

В соответствии с этим зависимости (2.37) и (2.39) примут вид:

$$\{f\} = \sum_{i=1}^m [\phi_i] \{\delta_i\}, \quad \{\varepsilon\} = \sum_{i=1}^m [C_i] \{\delta_i\}, \quad [\phi] = [[\phi_1], \dots, [\phi_m]], \quad [C_i] = [B][\phi_i], \quad (2.56)$$

где матрицы $[\phi_i]$, $[C_i]$, соответственно, имеют одинаковую структуру для каждого i -го узла. В этом случае нетрудно представить блоки матрицы жесткости элемента (2.55) для соответствующих моделей конечных элементов:

- смешанная модель

$$[K_{ij}] = [G_i]^T [H]^{-1} [G_j], \quad [G_i] = \int_{\Omega^e} [P]^T [D] [C_i] d\Omega; \quad i, j = 1, \dots, m; \quad (2.57)$$

- модифицированная смешанная модель

$$[K_{1ij}] = \int_{\Omega^e} [C_{1i}]^T [D_1] [C_{1j}] d\Omega, \quad [K_{2ij}] = [G_{2i}]^T [H_2]^{-1} [G_{2j}], \quad (2.58)$$

$$[G_{2i}] = \int_{\Omega^e} [P]^T [D_2] [C_{2i}] d\Omega;$$

- модель метода перемещений

$$[K_{ij}] = \int_{\Omega^e} [C_i]^T [D] [C_j] d\Omega. \quad (2.59)$$

Блоки вектора узловой нагрузки элемента имеют вид

$$\{F_i\} = \int_{\Omega^e} [\phi_i]^T \{p_0\} d\Omega + \int_{\omega^e} [\phi_i]^T \{p_s\} d\omega. \quad (2.60)$$

Важнейшей характеристикой элемента, определяющей эффективность расчетов по МКЭ, является матрица жесткости элемента $[K^e]$. Физический смысл матрицы жесткости таков: каждый ее коэффициент k_{ij}^e численно равен реакции в i -ом узле в i -ом направлении при единичном перемещении по j -ому направлению при условии отсутствия перемещений по всем другим узловым степеням свободы.

2.5. Аппроксимация переменных для моделей конечных элементов

2.5.1. Общие требования к функциям аппроксимации

Численное решение, полученное по МКЭ, является приближенным, т.е. всегда отличается от истинного (точного) решения. К важнейшим характеристикам численного решения относятся точность и сходимость. *Точность* – это мера близости численного (приближенного) решения к истинному решению. *Сходимость* – это постепенное приближение численного решения к истинному по мере последовательного уточнения вычислительных параметров (числа элементов, числа степеней свободы). Точность и сходимость решения МКЭ во многом зависят от выбора функций аппроксимации переменных для модели конечного элемента.

Повысить точность приближенного решения можно как за счет увеличения числа используемых элементов (путем измельчения сетки элементов), так и за счет повышения порядка аппроксимации на элементе (при фиксированной сетке элементов). С практической точки зрения очевидно, что наилучшим будет выбор такой аппроксимации, которая обеспечивает максимальную (требуемую) точность решения при минимальных вычислительных затратах.

Надлежащая аппроксимация в МКЭ обеспечивает *непрерывность переменных* не только на границе между элементами, но и по всему телу. Например, при одинаковых перемещениях в общих узлах для смежных элементов обеспечивается непрерывность перемещений и на границе этих элементов. В таком случае определенные интегралы, входящие в вариационные формулировки, могут быть заменены суммой соответствующих интегралов по каждому элементу. Непрерывность функций аппроксимации является важнейшим свойством для использования соответствующей вариационной формулировки. Возможность вычисления функционала накладывает определенные ограничения на класс допустимых функций аппроксимации. Если в функционале старшая производная имеет порядок r , то аппроксимация должна обеспечивать непрерывность функции и ее производных « $r-1$ » порядка (так называемая C^{r-1} - непрерывность). Например, при решении задач теории упругости с использованием функционала Лагранжа (2.46) $r=1$, и допустимые функции перемещений должны быть

класса C^0 . В этом случае достаточно, чтобы перемещения были непрерывны внутри элемента и на границе смежных элементов (требования геометрической или кинематической совместности). При использовании функционала Кастильяно функции, аппроксимирующие напряжения, должны удовлетворять условиям статической совместности: обеспечивать выполнение уравнений равновесия внутри элемента и непрерывность напряжений на границе смежных элементов.

Смешанные функционалы по сравнению с классическими функционалами включают большее число соотношений в качестве уравнений Эйлера и естественных условий. Вследствие этого меньше условий накладывается на выбор аппроксимирующих функций для используемых переменных, что облегчает их построение. Так, применение функционала (2.35) допускает использование аппроксимирующих функций для f_i и $\bar{\epsilon}_i$ определенной гладкости. Так как перемещения f_i входят в функционал через деформации ϵ_i , то требования к ним определяются видом матрицы $[B]$, т.е. порядком старшей производной функции f_i . В то же время, деформации $\bar{\epsilon}_i$ входят в функционал (2.35) без производных. Поэтому для них допускается использование аппроксимирующих функций, имеющих разрывы первого рода на границе.

Однако не всегда такое облегчение приводит к улучшению процедуры решения по МКЭ, т.к. может ухудшиться сходимость метода. Поэтому целесообразно стремиться к удовлетворению максимального числа соотношений, что обеспечит монотонную сходимость метода. Регулируя порядок используемых функций аппроксимации, можно добиться высокой скорости сходимости метода при относительно малых вычислительных затратах. Во многих практических случаях этим условиям соответствует применение квадратичных элементов и функционала Лагранжа, для которого получается и наиболее простая процедура аппроксимации.

2.5.2. Процедура аппроксимации

Процедура аппроксимации переменных в элементе является важным этапом общего процесса решения по МКЭ. Особенностью аппроксимации переменных в МКЭ является то, что функции аппроксимации строятся отдельно на каждом элементе и называются *базисными функциями элемента*. Таким образом, базисные функции носят локальный характер, отличны от

нуля только для смежных элементов. Процедура аппроксимации для элемента однотипна, поэтому достаточно просто алгоритмизируется для всей системы. Причем вследствие использования базисных функций процедура аппроксимации в элементе не зависит от конфигурации рассматриваемой области. Локальный характер аппроксимации приводит к тому, что разрешающая система уравнений МКЭ является редкозаполненной, как правило, хорошо обусловленной, имеет ленточную симметричную структуру – это выгодно отличает МКЭ в вычислительном плане.

Наибольшее практическое применение в МКЭ имеет использование аппроксимирующих (базисных) функций в виде полиномов. В таком случае проще всего удовлетворить критериям сходимости приближенного решения МКЭ. Обычно в МКЭ применяются два способа представления базисных функций:

- а) базисные функции в общей системе координат;
- б) базисные функции в локальной системе координат (функции формы).

Базисные функции в общей системе координат. Аппроксимирующие функции содержат коэффициенты в виде обобщенных параметров. Предпочтительно использование полных полиномов, т.к. это обеспечивает свойство геометрической инвариантности (неизменности) базисных функций по отношению к системе координат. Число коэффициентов в полиномах равно числу степеней свободы в элементе, т.е. принятая модель элемента с конкретным числом степеней свободы определяет порядок используемых полиномов (степень или порядок аппроксимации функций переменных).

Например, в одномерном элементе с m узлами и одной степенью свободы в узле u (осевое перемещение) для аппроксимации используется полный полином $m-1$ порядка

$$u(x) = \sum_{i=1}^m a_i x^{i-1}.$$

Коэффициенты a_i имеют смысл обобщенных параметров, определяются из узловых условий и выражаются через узловые перемещения.

Если элемент имеет два узла (см. рис. 2.1) с координатами x_1 и x_2 в общей системе координат, то аппроксимация является линейной

$$u(x) = a_1 + a_2x.$$

Используя условия, что в узлах функция перемещений принимает значения узловых степеней свободы $u(x_1) = u_1$, $u(x_2) = u_2$, получим систему уравнений относительно коэффициентов a_i . В результате аппроксимация перемещений примет вид

$$u(x) = L_1(x)u_1 + L_2(x)u_2 \quad \text{или} \quad u = [\phi]\{\delta\}, \quad [\phi] = [L_1 \ L_2], \quad \{\delta\}^T = \{u_1 \ u_2\},$$

$$L_1(x) = (x_2 - x)/(x_2 - x_1), \quad L_2(x) = -(x_1 - x)/(x_2 - x_1).$$

Базисные функции $L_1(x)$, $L_2(x)$ называются линейными *полиномами Лагранжа*. Аналогичным образом строится аппроксимация для одномерного элемента, имеющего три или четыре узла, используя полиномы Лагранжа более высокого порядка. *Базовые точки* x_1, x_2, \dots, x_m чаще всего располагаются равномерно по длине элемента, хотя это и не обязательно.

Для плоского треугольного элемента с тремя узлами ($m=3$) и двумя степенями свободы u, v в узле (см. рис. 2.4,а) функции аппроксимации в двухмерной декартовой системе координат (x, y) представляются в виде полных полиномов первого порядка с обобщенными коэффициентами a_i :

$$u(x,y) = a_1 + a_2x + a_3y, \quad v(x,y) = a_4 + a_5x + a_6y.$$

Для плоского треугольного элемента с шестью узлами ($m=6$, см. рис. 2.4,а) при аппроксимации применяются полные полиномы второго порядка

$$u(x,y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + a_5x^2 + a_6y^2,$$

$$v(x,y) = a_7 + a_8x + a_9y + a_{10}xy + a_{11}x^2 + a_{12}y^2.$$

Используя узловые условия, можно выразить коэффициенты a_i через узловые перемещения и представить аппроксимацию перемещений через базисные функции $L_i(x,y)$ в общей системе координат:

$$\{f\} = [\phi]\{\delta\}, \quad \{f\} = \{u, v\}, \quad \{\delta\}^T = \{u_1, v_1, \dots, u_m, v_m\}, \quad [\phi] = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & \dots & L_m & 0 \\ 0 & L_1 & \dots & 0 & L_m \end{bmatrix}.$$

Функции формы. В МКЭ более удобно использование локальной (или естественной) системы координат, привязанной к элементу так, чтобы значения координат в узлах менялись в пределах от -1 до 1 . В таком случае аппроксимация переменных осуществляется с использованием так называемых *функций формы* N_i^e , принимающих значение 1 в узле « i » и равных нулю во всех других узлах элемента. Например, для одномерного элемента с m узлами аппроксимация перемещений u с использованием локальной нормализованной координаты ξ имеет вид

$$u(\xi) = \sum_{i=1}^m N_i(\xi) u_i, \quad -1 \leq \xi \leq 1,$$

где u_i – узловые перемещения.

Для функций формы элемента выполняется условие

$$\sum_{i=1}^m N_i = 1,$$

которое является одним из критериев сходимости.

Одним из способов повышения точности аппроксимации является использование различного числа узлов в элементе: соответственно, кроме линейной, получают квадратичную, кубическую и т.д. аппроксимации. На рис. 2.10 показаны линейные и квадратичные функции формы для одномерного элемента «e»:

а) $m = 2$, линейные полиномы Лагранжа (рис. 2.10,а)

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi), \quad N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi);$$

б) $m = 3$, квадратичные полиномы Лагранжа (рис. 2.10,б)

$$N_1(\xi) = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi), \quad N_2(\xi) = 1-\xi^2, \quad N_3(\xi) = \frac{1}{2}\xi(1+\xi).$$

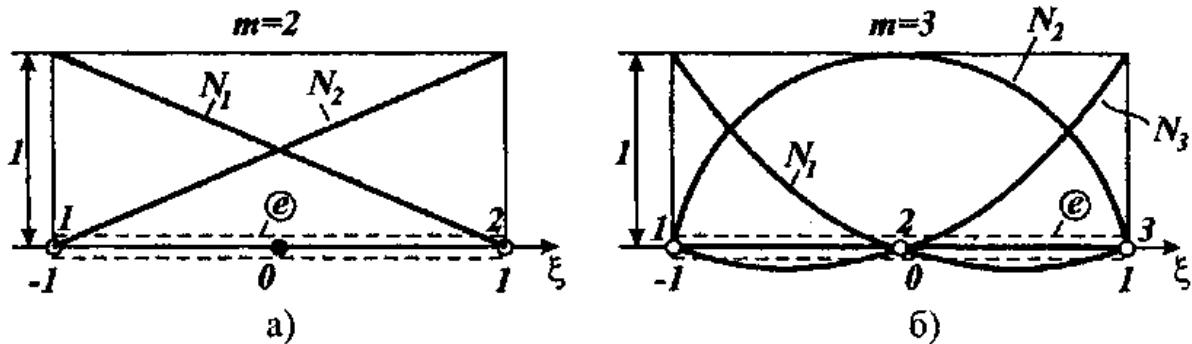


Рис. 2.10

Рассмотренные функции формы являются одномерными полиномами Лагранжа в локальной системе координат, соответственно первого и второго порядка.

Другим способом повышения порядка аппроксимации является использование в качестве узловых параметров производных функции. Так, для одномерного элемента с двумя узлами и узловыми степенями свободы $u_i, (du/d\xi)_i$ аппроксимирующая функция представляется через кубические полиномы Эрмита H_{0i}, H_{1i} :

$$u(\xi) = \sum_{i=1}^2 \left[H_{0i}(\xi)u_i + H_{1i}(\xi) \left(\frac{du}{d\xi} \right)_i \right],$$

$$H_{01} = (2-3\xi+\xi^3)/4, H_{02} = (2+3\xi-\xi^3)/4, H_{11} = (1-\xi-\xi^2+\xi^3)/4, H_{12} = (-1-\xi+\xi^2+\xi^3)/4.$$

Например, такая аппроксимация применяется для балочных конечных элементов, использующих в качестве степеней свободы прогибы и углы поворота узловых сечений.

Преимущество использования локальной системы координат проявляется и в том, что нормализуется и упрощается процедура интегрирования по элементу, причем иногда интегрирование можно выполнить в аналитическом виде. Чаще всего функции формы используются для двухмерных и трехмерных элементов с применением изопараметрической техники.

2.5.3. Изопараметрические элементы

Для конечных элементов произвольной формы удобно использование изопараметрической техники представления переменных. *Изопараметрическими называются элементы, в которых геометрия и переменные описываются с помощью одних и тех же функций формы.*

Например, для рассмотренного выше двухузлового одномерного элемента осевая координата x может определяться с использованием тех же функций формы, что и перемещение u :

$$x(\xi) = \sum_{i=1}^2 N_i(\xi)x_i, \quad u(\xi) = \sum_{i=1}^2 N_i(\xi)u_i, \quad -1 \leq \xi \leq 1.$$

Более наглядное представление об изопараметрических элементах дает рассмотрение двухмерного анализа.

Для определения функций формы плоского конечного элемента вводится локальная нормализованная система координат (ξ, η) , в которую отображается плоский элемент произвольной формы из системы координат (x, y) . Идея заключается в том, что элемент произвольной формы приводится к элементу правильной формы, для которого легко построить аппроксимирующие функции. Вид функций формы зависит от формы элемента (треугольной, четырехугольной) и числа узлов m в элементе.

Координаты и перемещения точек плоского элемента определяются с помощью одних и тех же функций формы $N_i(\xi, \eta)$:

$$x = \sum_{i=1}^m N_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^m N_i y_i, \quad u = \sum_{i=1}^m N_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^m N_i v_i, \quad (2.61)$$

где x_i, y_i – узловые значения координат; u_i, V_i – узловые перемещения; m – число узлов в элементе. Локальные координаты в элементе изменяются в пределах $-1 \leq \xi \leq 1, -1 \leq \eta \leq 1$.

Вся изопараметрическая техника основана на применении численного интегрирования (в переменных ξ, η) для вычисления матрицы жесткости $[K^e]$ и вектора нагрузки $\{F^e\}$ элемента. При этом необходимо сделать два преобразования.

Во-первых, производные функций формы в системе координат (x, y) выражаются через производные в локальной нормализованной системе координат (ξ, η) :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = |J| \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = |J|^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}, \quad (2.62)$$

$$|J| = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{Bmatrix}, \quad \frac{\partial p}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial N_i}{\partial \lambda} p_i, \quad p \rightarrow x, y, \quad \lambda \rightarrow \xi, \eta, \quad (2.63)$$

где $[J]$ – матрица Якоби.

Во-вторых, элемент площади преобразуется следующим образом:

$$dxdy = |J| d\xi d\eta, \quad (2.64)$$

где $|J| = \det\{J\}$ – определитель матрицы Якоби (якобиан).

Вычисление матрицы $[K^e]$ и вектора $\{F^e\}$ сводится к численному интегрированию с применением квадратурных формул. Чаще всего используются квадратуры Гаусса порядка $n_i \times n_i$:

$$\int \int_{xy} |Q(x, y)| dxdy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |Q_1(\xi, \eta)| d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} H_i H_j |Q_1(a_i, a_j)|, \quad (2.65)$$

где n_i – число точек интегрирования в каждом направлении; H_i, H_j – весовые коэффициенты; a_i, a_j – абсциссы (координаты ξ, η точек интегрирования).

Выбор порядка интегрирования (n_i) зависит от порядка интегрируемых функций. Поэтому для различных элементов существует оптимальный порядок интегрирования, обеспечивающий необходимую сходимость

решения МКЭ при минимальных вычислительных затратах.

Если рассматриваются элементы постоянной толщины h , то для двумерной области вычисляются интегралы вида

$$|I| = \int_{V^e} Q dV = h \int_{S^e} Q dS.$$

При численном интегрировании для элементов первого и второго порядка достаточно использовать квадратуры (2.65) второго порядка, т.е. принять $n_i = 2$, $H_i = H_j = 1$, $a_i = \pm \sqrt{3}/3$, $a_j = \pm \sqrt{3}/3$.

2.5.4. Особенности аппроксимации переменных

Для рассматриваемых конечно-элементных моделей (совместных и смешанных моделей) переменными являются перемещения. Число неизвестных коэффициентов в аппроксимации перемещений всегда равно числу степеней свободы элемента n_e . Поэтому порядок (степень) используемых полиномов зависит от количества узлов и числа степеней свободы в узле, т.е. от числа степеней свободы элемента.

При разработке моделей элементов в МКЭ наибольшее внимание уделяется свойствам матрицы жесткости элемента, т.к. они определяют эффективность создаваемой модели элемента и метода в целом. К числу основных таких свойств матрицы жесткости элемента можно отнести следующие:

- 1) инвариантность (независимость) матрицы жесткости по отношению к глобальной системе координат;
- 2) вычислительная эффективность матрицы жесткости;
- 3) правильность ранга матрицы жесткости элемента;
- 4) возможность с любой степенью точности аппроксимировать по энергии любые возможные перемещения (в том числе и перемещения элемента как жесткого целого).

Использование метода перемещений на основе матрицы (2.53) в общем удовлетворяет первым трем условиям. Однако во многих задачах (например, при расчете криволинейных балок и оболочек, толстых пластин, трехмерных тел и др.) удовлетворить последнему условию в рамках метода перемещений довольно трудно. Это приводит к необходимости применять элементы высокого порядка (повышать порядок аппроксимации за счет увеличения n_e). При этом резко возрастают вычислительные затраты, что в

целом снижает эффективность применения таких элементов.

Для смешанных моделей элементов при выбранной аппроксимации перемещений за счет надлежащего задания независимой аппроксимации деформаций достаточно просто выполнить и четвертое условие. Важно, что при этом можно использовать простейшие элементы с наименьшим числом степеней свободы, а это всегда предпочтительно в вычислительном отношении. При этом для смешанных моделей необходимым условием является выполнение правильности ранга матрицы жесткости элемента (в методе перемещений оно всегда выполняется)

$$r_k \geq n_e - n_r, \quad (2.66)$$

где r_k – ранг матрицы жесткости; n_r – число степеней свободы, соответствующее перемещениям элемента как жесткого целого.

Условие (2.66) определяет свойство невырожденности матрицы жесткости $[K^e]$. Невыполнение этого условия означает, что в аппроксимирующих функциях перемещений присутствуют члены, не относящиеся к перемещениям элемента как жесткого целого, но также не дающие вклада в энергию деформации. Оптимальным для элемента является выполнение условия

$$r_k = n_e - n_r. \quad (2.67)$$

Для матрицы жесткости (2.53) метода перемещений часто имеет место условие $r_k > n_e - n_r$, и для выполнения равенства (2.67) необходимо использовать специальные способы улучшения матрицы жесткости.

Для матрицы жесткости (2.47) смешанной модели ранг будет равен

$$r_k = \min(n_e, n_\alpha),$$

где n_α – размерность вектора $\{\alpha\}$ в аппроксимации (2.38).

Из условия (2.66) следует ограничение на параметр n_α :

$$n_\alpha \geq n_e - n_r. \quad (2.68)$$

Поэтому, выбирая соответствующую аппроксимацию деформаций (2.38), можно добиться необходимого ранга матрицы жесткости элемента.

Для матрицы жесткости (2.50) смешанной модели модифицированного функционала при использовании соответствующей аппроксимации (2.45) фактически проводится коррекция ранга матрицы жесткости, чтобы добиться выполнения условия (2.67).

Преимущества смешанных моделей по сравнению с совместными мо-

делями метода перемещений наиболее сильно проявляются для простейших типов конечных элементов, особенно при использовании криволинейных (оболочечных) элементов. Для элементов высокого порядка такие преимущества не столь ярки, они касаются, в основном, уточнения малых составляющих деформаций и напряжений.

2.6. Стержневые модели конечных элементов

Для получения характеристик стержневых элементов используется техническая теория стержней [8].

2.6.1. Прямолинейный стержневой элемент

Прямолинейный стержневой элемент пространственной деформации имеет два узла по шесть степеней свободы в каждом узле (рис. 2.11, а).

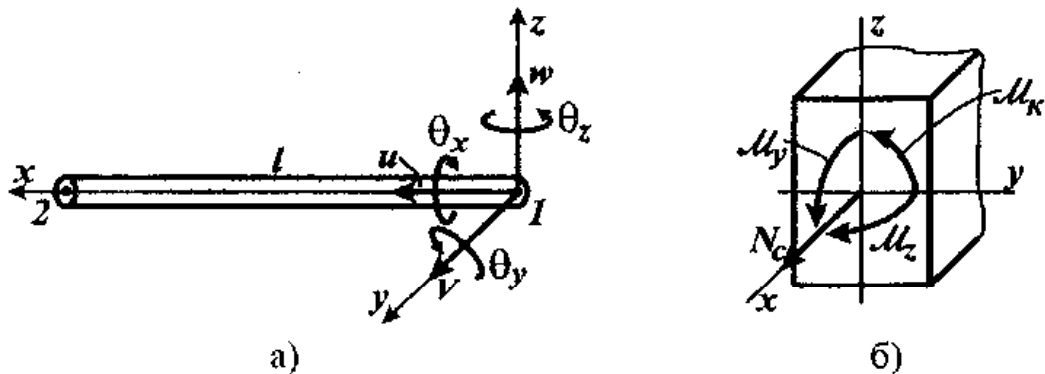


Рис. 2.11

Элемент работает на растяжение-сжатие в осевом направлении, на кручение и на изгиб – в двух плоскостях xz и xy . Матрица жесткости элемента получается в явном виде по методу перемещений.

Вектор узловых перемещений для отдельного узла имеет вид

$$\{\delta_i\} = \{u_i, v_i, w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}\}^T, \quad i = 1, 2. \quad (2.69)$$

Векторы перемещений $\{f\}$ и деформаций $\{\varepsilon\}$ для элемента

$$\{f\} = \{u, v, w, \theta_x\}^T, \quad \theta_y = -\frac{dw}{dx}, \quad \theta_z = \frac{dv}{dz}, \quad (2.70)$$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, k_y, k_z, k_x\}^T \quad (2.71)$$

связаны дифференциальными зависимостями (2.34) через оператор

$$[B] = \begin{bmatrix} ()' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -()'' & 0 \\ 0 & -()'' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ()' \end{bmatrix}, \quad ()' = \frac{d()}{dx}, \quad ()'' = \frac{d^2()}{dx^2}.$$

Для аппроксимации перемещений применяются полные полиномы с коэффициентами a_i , являющимися обобщенными параметрами:

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2 x, \\ v &= a_3 + a_4 x + a_5 x^2 + a_6 x^3, \\ w &= a_7 + a_8 x + a_9 x^2 + a_{10} x^3, \\ \theta_x &= a_{11} + a_{12} x. \end{aligned}$$

Используя эти аппроксимирующие функции для представления узловых значений перемещений (2.69) с учетом выражений (2.70), можно получить функции формы $[\phi]$ элемента, а затем - матрицу $[C]$.

Матрица упругости $[D]$ определяет связь между деформациями $\{\varepsilon\}$ и внутренними усилиями $\{Y\}$ (результатирующими напряжениями) в поперечном сечении стержня. Соотношения упругости представляются в виде:

$$\begin{aligned} \{Y\} &= [D]\{\varepsilon\}, \quad \{Y\} = \{N_c, M_y, M_z, M_k\}^T, & (2.72) \\ [D] &= \begin{bmatrix} B_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_k \end{bmatrix}, & \begin{aligned} B_x &= EF_c, \\ D_y &= EJ_y, \\ D_z &= EJ_z, \\ D_k &= GJ_k, \quad G = E/2(1+\mu), \end{aligned} \end{aligned}$$

где B_x, D_y, D_z, D_k - параметры жесткости стержня; E, G, μ - модуль Юнга, модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала стержня; F_c, J_y, J_z, J_k - площадь, осевые моменты инерции и момент инерции кручения поперечного сечения стержня; N_c, M_y, M_z, M_k - нормальная сила, изгибающие и крутящий моменты в поперечном сечении стержня; y, z - главные оси инерции сечения (рис. 2.11,б).

Матрица жесткости прямолинейного элемента длиной l , полученная в результате интегрирования выражения (2.53) по длине элемента ($\Omega^e = l$), приведена в *Приложении 4*.

При действии на конечный элемент погонной нагрузки постоянной интенсивности $\{q\} = \{q_x, q_y, q_z\}^T$ из выражения (2.54) можно получить вектор эквивалентной узловой нагрузки:

$$\{F^e\} = \left\{ \frac{1}{2} q_x l, \frac{1}{2} q_y l, \frac{1}{2} q_z l, 0, -\frac{1}{12} q_z l^2, \frac{1}{12} q_y l^2, \frac{1}{2} q_x l, \frac{1}{2} q_y l, \frac{1}{2} q_z l, 0, \frac{1}{12} q_z l^2, -\frac{1}{12} q_y l^2 \right\}^T.$$

Вычисление напряжений в отдельных сечениях элемента осуществляется через внутренние усилия. Чаще всего определяющими являются нор-

мальные напряжения, максимальная величина которых в сечении вычисляется для опасной точки (y_0, z_0) :

$$\sigma(y_0, z_0) = \pm \frac{N_c}{F_c} \pm \frac{M_y}{J_y} z_0 \pm \frac{M_z}{J_z} y_0$$

(знаки перед слагаемыми выбираются из условия $\sigma = \sigma^{\max}$).

2.6.2. Криволинейный стержневой элемент

Для криволинейных конечных элементов немаловажным является выбор аппроксимации перемещений, обеспечивающей достаточно полный учет перемещений элемента как жесткого целого. В методе перемещений необходимо либо выделять в явном виде такие составляющие перемещений, либо использовать аппроксимации высокого порядка для всех компонентов перемещения. Матрица жесткости элемента не может быть получена в явном виде, а для стержня переменной кривизны такой подход и вовсе малоэффективен. Применение смешанного метода позволяет легко обойти эти трудности. Причем смешанные модели получаются довольно простыми и весьма эффективными. Наиболее рациональным подходом является использование смешанной модели элемента на основе соотношений (2.47-2.49), а для частных случаев – элементов кругового и прямолинейного стержня постоянного сечения – матрица жесткости получается в явном виде.

Элемент плоского стержня пространственной деформации (рис. 2.12,а) определен в криволинейной системе координат (x, y, z) .

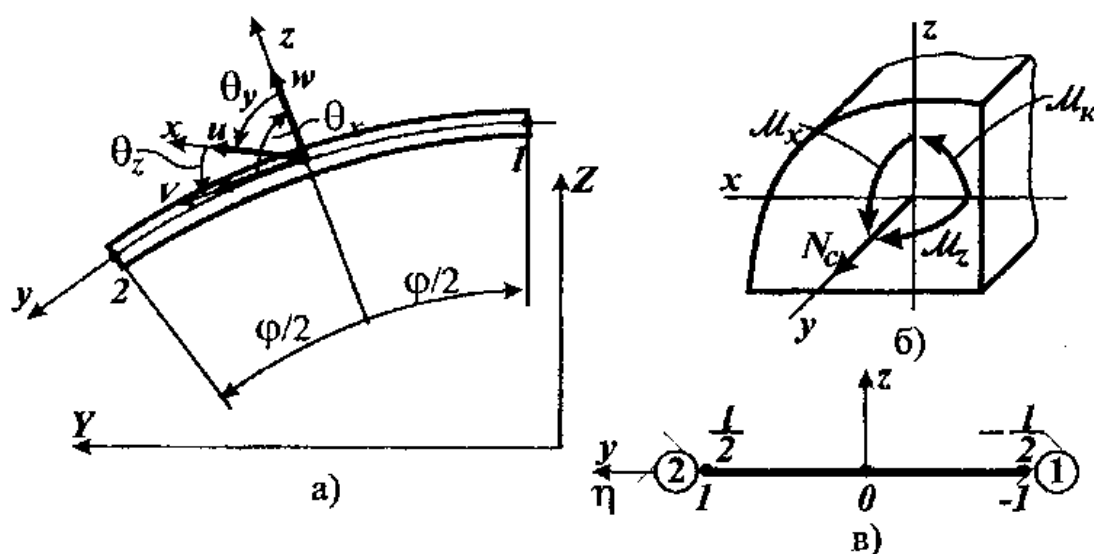


Рис. 2.12

Векторы перемещений и деформаций имеют вид:

$$\{f\} = \{u, v, w, \theta_y\}^T, \quad \{\varepsilon\} = \{\varepsilon_y, k_x, k_z, k_\kappa\}^T, \quad (2.73)$$

а угловые перемещения определяются зависимостями

$$\theta_x = -\frac{v}{R_c} + \frac{dw}{dy}, \quad \theta_z = -\frac{du}{dy}, \quad (2.74)$$

где R_c – радиус кривизны оси стержня в рассматриваемой точке.

Матрица дифференциальных операторов имеет вид:

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & ()' & k_c & 0 \\ 0 & k_c()' - k_c^2 R_c' & -()'' & 0 \\ ()'' & 0 & 0 & k_c \\ -k_c()' & 0 & 0 & ()' \end{bmatrix}, \quad ()' = \frac{d()}{dy}, \quad ()'' = \frac{d^2()}{dy^2}, \quad k_c = \frac{1}{R_c}. \quad (2.75)$$

Соотношения упругости приведем для общего случая, когда оси x, z не являются главными в сечении (рис. 2.12,б):

$$\{Y\} = [D]\{\varepsilon\}, \quad \{Y\} = \{N_c, M_x, M_z, M_\kappa\}^T, \quad (2.76)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} B_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_x & D_{xz} & 0 \\ 0 & D_{xz} & D_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_\kappa \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} B_y &= EF_c, \\ D_x &= EJ_x, \quad D_z = EJ_z, \\ D_{xz} &= EJ_{xz}, \\ D_\kappa &= GJ_\kappa, \quad G = E/2(1+\mu), \end{aligned}$$

где $F_c, J_x, J_z, J_{xz}, J_\kappa$ – площадь, осевые и центробежный моменты инерции, момент инерции кручения поперечного сечения стержня (если x, z – главные центральные оси инерции сечения, то $D_{xz} = 0$).

Для аппроксимации геометрии и перемещений конечного элемента вводится локальная нормализованная система координат (рис. 2.12,в), где безразмерная координата $\eta = 2y/l$ изменяется в пределах $-1 \leq \eta \leq 1$. Для криволинейной координаты y стержня используется аппроксимация

$$y = \sum_{i=1}^2 L_i(\eta) y_i, \quad (2.77)$$

$$L_i(\eta) = \frac{1}{2}(1 + \eta_0), \quad \eta_0 = \eta \eta_i, \quad i = 1, 2 \quad (\eta_1 = -1, \eta_2 = 1),$$

где L_i – одномерные полиномы Лагранжа первого порядка.

В общем случае для стержня переменной кривизны радиус оси R_c определяется как радиус кривизны плоской кривой, заданной в параметриче-

ской форме $Z = Z(y)$, $Y = Y(y)$ и аппроксимируемой с использованием кубических полиномов Эрмита:

$$q = \sum_{i=1}^2 \left[H_{0i}(\eta) q_i + H_{1i}(\eta) \left(\frac{dq}{d\eta} \right)_i \right], \quad q \rightarrow Y, Z, \quad \left(\frac{dq}{d\eta} \right)_i = \left(\frac{dq}{dy} \right)_i \left(\frac{dy}{d\eta} \right)_i, \quad (2.78)$$

$$R_c(y) = \frac{[(Z')^2 + (Y')^2]^{\frac{3}{2}}}{|Z'Y'' - Y'Z''|}, \quad ()' = \frac{d()}{dy}, \quad ()'' = \frac{d^2()}{dy^2}, \quad (2.79)$$

$$H_{0i}(\eta) = \frac{1}{4}(2 + 3\eta_0 - \eta_0^3), \quad H_{1i}(\eta) = \frac{1}{4}\eta_i(1 + \eta_0)(\eta_0^2 - 1), \quad \eta_0 = \eta\eta_i, \quad (2.80)$$

где y_i, q_i – узловые значения координат; $H_i(\eta), H_{1i}(\eta)$ – одномерные полиномы Эрмита.

Применение аппроксимаций (2.77 - 2.80) для элемента криволинейного стержня произвольной геометрии приводит к необходимости использования техники численного интегрирования при получении матрицы жесткости элемента.

Аппроксимация перемещений осуществляется в нормализованной системе координат с использованием выражений:

$$u = \sum_{i=1}^2 \left(H_{0i} u_i - \frac{1}{2} l H_{1i} \theta_{zi} \right), \quad v = \sum_{i=1}^2 L_i v_i, \quad (2.81)$$

$$w = \sum_{i=1}^2 \left(H_{0i} w_i + \frac{1}{2} \frac{l}{R_c} H_{1i} v_i + \frac{1}{2} l H_{1i} \theta_{xi} \right), \quad \theta_y = \sum_{i=1}^2 L_i \theta_{yi}.$$

Вектор перемещений для узла имеет вид (2.69), а матрица $[\phi]$ формируется в соответствии с выражениями (2.81), (2.77) и (2.80).

Для данного элемента $n_e = 12$, $n_r = 6$, поэтому $n_a \geq 6$, и аппроксимация деформаций (2.38) осуществляется в виде:

$$\bar{\varepsilon}_y = \alpha_1, \quad \bar{k}_x = \alpha_2 + \alpha_3 \eta, \quad \bar{k}_z = \alpha_4 + \alpha_5 \eta, \quad \bar{k}_\kappa = \alpha_6. \quad (2.82)$$

Матрица жесткости плоского стержневого элемента с круговой осью ($R_c = \text{const}$), полученная в явном виде путем интегрирования выражения (2.48) и последующего матричного перемножения (2.47), приведена в Приложении 4. В частном случае для прямолинейного стержня $k_c = 0$ ($R_c = \infty$) и при условии $D_{xz} = 0$ полученная матрица жесткости совпадает с ранее рассмотренной в разделе 2.6.1.

2.6.3. Преобразования координат

В МКЭ следует различать глобальную (общую) и локальную (местную) системы координат. Глобальная система координат задается для всей конструкции, состоящей из совокупности элементов. Локальная система координат связана с отдельным элементом. В частном случае оси локальной и глобальной систем координат могут совпадать, но в общем случае они взаимно ориентированы произвольным образом.

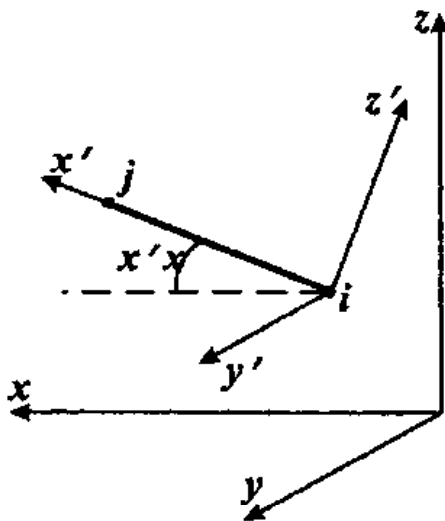


Рис. 2.13

Матрица жесткости и вектор узловой нагрузки стержневого элемента получаются в местной системе координат, а общая система уравнений МКЭ (2.42) формируется в единой системе координат – глобальной. Поэтому для характеристик конечного элемента выполняются прямые (для матрицы $[K^e]$ и вектора $\{F^e\}$) и обратные (для вектора $\{\delta^e\}$) преобразования координат, которые удобно представить с использованием блочной формы (2.55):

$$[K_{ij}] = [T_i]^T [K_{ij}'] [T_j], \quad [F_i] = [T_i]^T [F_i'], \quad \{\delta_i'\} = [T_i] \{\delta_i\}, \quad i, j = 1, \dots, m, \quad (2.83)$$

$$[T_i] = \begin{bmatrix} [\lambda_i] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [\lambda_i] \end{bmatrix}; \quad [\lambda_i] = \begin{bmatrix} \lambda_{x'x} & \lambda_{x'y} & \lambda_{x'z} \\ \lambda_{y'x} & \lambda_{y'y} & \lambda_{y'z} \\ \lambda_{z'x} & \lambda_{z'y} & \lambda_{z'z} \end{bmatrix}, \quad (2.84)$$

где (x', y', z') – местная система координат элемента (рис. 2.13), (x, y, z) – глобальная система координат, $[T_i]$ – матрица преобразований для i -го узла элемента, $[\lambda_i]$ – матрица направляющих косинусов (например, $\lambda_{x'x}$ – косинус угла между осями x' и x).

Матрица $[T_i]$ является ортогональной, т.е. $[T_i]^{-1} = [T_i]^T$. Для прямолинейных стержневых элементов очевидно, что $[T_i] = [T_j]$. Косинусы углов между осями определяются с использованием соотношений аналитической геометрии. Например, если ось x' направить по оси стержня, то направление одной из двух других осей (y' или z') можно задать произвольно, т.е. выбрать соответствующую плоскость ($x'z'$ или $x'y'$). После этого направ-

ляющие косинусы определяются через координаты узлов элемента в глобальной системе координат $(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j)$. Можно отметить, что при расчете криволинейного стержня использование прямолинейных конечных элементов (криволинейная ось заменяется ломаной линией) приводит к необходимости преобразований (2.83), а использование криволинейных конечных элементов позволяет обойтись без преобразований координат с точным представлением геометрии конструкции.

2.7. Модели плоских конечных элементов

2.7.1. Основные зависимости плоской теории упругости

При решении плоской задачи теории упругости различают два случая: *плоское напряженное состояние* и *плоская деформация*. При плоском напряженном состоянии все напряжения действуют в одной плоскости (или параллельно одной плоскости). Плоская деформация характеризует такое напряженное состояние, при котором смещения точек тела происходят только в одной плоскости. В дальнейшем принимается, что нагружение тела производится в некоторой плоскости (или параллельно ей), т.е. компоненты напряжения зависят только от координат x и y (рис. 2.14).

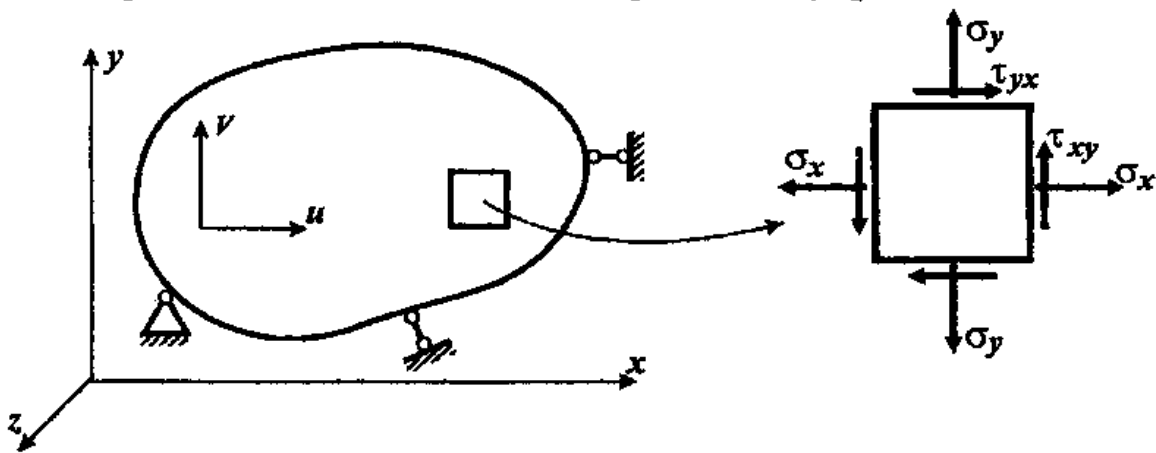


Рис. 2.14

Таким образом, в каждой точке тела перемещение представляется двумя компонентами $u(x,y)$, $v(x,y)$, а компонентами напряженного состояния являются:

- *плоское напряженное состояние*

$$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \sigma_z = 0, \tau_{xz} = \tau_{zx} = 0, \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0;$$

- *плоская деформация ($\varepsilon_z = 0$)*

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y), \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx} = 0, \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0.$$

Компоненты деформации связаны с перемещениями дифференциальными соотношениями (формулы Коши):

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.85)$$

Обобщенный закон Гука определяет связь напряжений с деформациями:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}, \quad \{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T, \quad \{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T. \quad (2.86)$$

Матрица упругости $[D]$ для *изотропного материала* имеет вид:

• *плоское напряженное состояние*

$$[D] = \bar{E} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mu}_1 \end{bmatrix}; \quad \bar{E} = \frac{E}{1-\mu^2}, \quad \bar{\mu}_1 = \frac{1-\mu}{2}; \quad (2.87)$$

• *плоская деформация*

$$[D] = \bar{E} \begin{bmatrix} 1 & \bar{\mu} & 0 \\ \bar{\mu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mu}_1 \end{bmatrix}; \quad \bar{E} = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{1-\mu}, \quad \bar{\mu}_1 = \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}.$$

Если рассматривается композитная конструкция, то необходимо принимать во внимание, что композиты являются анизотропными материалами, а их свойства, в частности, зависят от структуры армирования композита. Например, для наиболее распространенных многослойных композитных конструкций с симметричной $[\pm\phi]$ и ортогональной $[90^\circ/0^\circ]$ схемами армирования (см. рис. 1.2,б) можно использовать *модель ортотропного материала*. В этом случае матрица упругости для плоского напряженного состояния примет вид:

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix}; \quad d_{11} = \frac{E_x}{1-\mu_{xy}\mu_{yx}}; \quad d_{22} = \frac{E_y}{1-\mu_{xy}\mu_{yx}}; \quad (2.88)$$

$$d_{12} = d_{21} = \mu_{yx}d_{11}; \quad d_{33} = G_{xy}; \quad E_x\mu_{yx} = E_y\mu_{xy},$$

где модули упругости E_x , E_y , модуль сдвига G_{xy} , коэффициенты Пуассона μ_{xy} , μ_{yx} называются техническими постоянными упругости многослойного композиционного материала.

При решении задач по МКЭ в варианте метода перемещений или с ис-

пользованием модифицированного смешанного метода учитываются только кинематические граничные условия (задаются значения \bar{u}_i, \bar{v}_i в отдельных узлах границы тела)

$$u_i = \bar{u}_i, \quad v_i = \bar{v}_i, \quad (2.89)$$

а статические граничные условия (в напряжениях) удовлетворяются лишь приближенно.

Для получения расчетных соотношений плоских конечных элементов используется изопараметрическая техника, изложенная в разделе 2.5.3.

2.7.2. Плоский четырехузловой элемент

Простейшим четырехугольным конечным элементом произвольной ориентации в плоскости является элемент первого порядка с четырьмя угловыми узлами (рис. 2.15,а). Элемент в локальной системе координат показан на

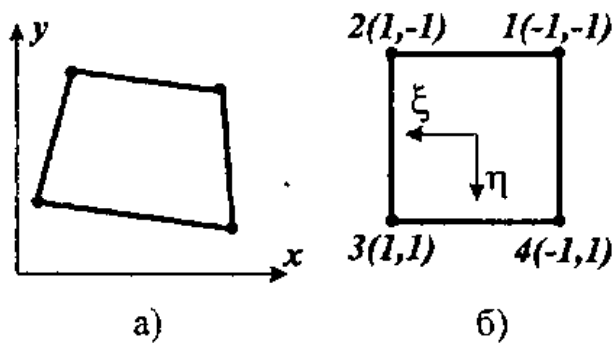


Рис. 2.15

рис. 2.15,б: значения ξ_i, η_i в узлах приведены в скобках после номера узла согласно принятой внутренней нумерации узлов в элементе. Аппроксимация перемещений и координат осуществляется согласно выражениям (2.61) при $m = 4$.

Функциями формы являются двумерные полиномы Лагранжа:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0), \quad \xi_0 = \xi \xi_i, \quad \eta_0 = \eta \eta_i, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (2.90)$$

Рассмотрим получение блоков матрицы жесткости элемента для трех моделей четырехугольного элемента (для определенности взят случай плоского напряженного состояния).

Для модели элемента в варианте метода перемещений блочные матрицы имеют вид:

$$[\phi_i] = \begin{Bmatrix} N_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N_i \end{Bmatrix}; \quad [B] = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{Bmatrix}; \quad [C_i] = \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ \mathbf{0} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{Bmatrix}. \quad (2.91)$$

Компоненты матрицы $[C_i]$ получаются с использованием зависимости (2.62), а производные функций формы в системе координат (ξ, η) определяются из выражений (2.90) дифференцированием:

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{1}{4} \xi_i (1 + \eta_0), \quad \frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{1}{4} \eta_i (1 + \xi_0).$$

Для смешанной модели элемента вводится независимая аппроксимация компонентов деформации с учетом условий (2.68), т.е. при $n_e = 8$, $n_r = 3$, $n_\alpha \geq 5$:

$$\bar{\varepsilon}_x = \alpha_1 + \alpha_2(\xi + \eta), \quad \bar{\varepsilon}_y = \alpha_3 + \alpha_4(\xi + \eta), \quad \bar{\gamma}_{xy} = \alpha_5. \quad (2.92)$$

Члены $\alpha_i(\xi + \eta)$ введены для сохранения инвариантных свойств матрицы жесткости элемента при произвольной ориентации четырехугольника в общей системе координат. Тогда, согласно выражению (2.38), получим:

$$[P] = [[P_1], [P_2], [P_3]], \quad |P_1| = [1, \xi + \eta], \quad |P_2| = [1, \xi + \eta], \quad |P_3| = 1.$$

Подынтегральные выражения для матриц $[H]$ и $[G_i]$ легко вычисляются аналитически.

Для модели смешанного элемента в модифицированном варианте целесообразно ввести независимую аппроксимацию только сдвиговой деформации в виде

$$\bar{\gamma}_{xy} = \alpha. \quad (2.93)$$

Тогда матричные соотношения примут вид:

$$[K_{ij}] = h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [C_{1i}]^T [D_1] [C_{1j}] |J| d\xi d\eta, \quad [K_{2ij}] = \frac{Gh}{S^e} [\bar{C}_{2i}]^T [\bar{C}_{2j}]; \quad (2.94)$$

$$[C_{1i}] = \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix}, \quad [C_{2i}] = \left[\frac{\partial N_i}{\partial y}, \frac{\partial N_i}{\partial x} \right], \quad [\bar{C}_{2i}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [C_{2i}] |J| d\xi d\eta;$$

$$[D_1] = \bar{E} \begin{bmatrix} 1 & \mu \\ \mu & 1 \end{bmatrix}, \quad [D_2] = G, \quad [H_2] = GS^e, \quad \alpha = \frac{1}{S^e} \sum_{i=1}^4 [\bar{C}_{2i}] \{\delta_i\},$$

где S^e — площадь элемента, G — модуль сдвига материала.

2.7.3. Плоский восьмиузловой элемент

Элементы второго порядка являются наиболее эффективными в семействе изопараметрических элементов, т.к. позволяют достаточно точно аппроксимировать как поле перемещений, так и сложную геометрию тела

по границе. Кроме того, как показывает расчетная практика, такие элементы оптимальны и по вычислительным затратам.

Элемент имеет восемь узлов, расположенных по сторонам (рис. 2.16,а); поэтому граница элемента может быть аппроксимирована квадратичной параболой.

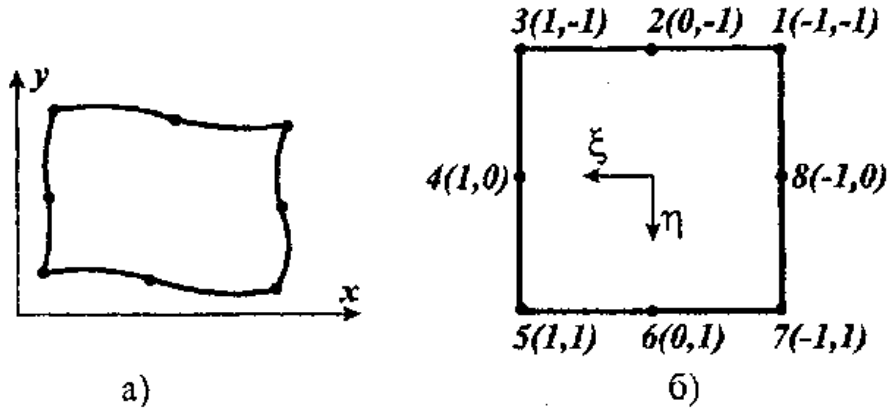


Рис. 2.16

Перемещения и координаты представляются в виде аппроксимаций (2.61) при $m = 8$.

Функции формы элемента в системе координат (ξ, η) имеют вид:

- для угловых узлов

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1+\xi_0)(1+\eta_0)(\xi_0+\eta_0-1), \quad i = 1, 3, 5, 7;$$

- для промежуточных узлов

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta_0), \quad i = 2, 6; \quad N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1+\xi_0)(1-\eta^2), \quad i = 4, 8. \quad (2.95)$$

Значения координат ξ_i, η_i в узлах элемента приведены на рис. 2.16,б. Восьмиузловой элемент является высокоточным. Поэтому для решения задач плоской теории упругости достаточно эффективным является применение метода перемещений. При использовании блочных матриц (2.91) производные функций формы в системе координат (ξ, η) имеют вид:

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{1}{4}\xi_i(1+\eta_0)(2\xi_0+\eta_0), \quad \frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{1}{4}\eta_i(1+\xi_0)(2\eta_0+\xi_0), \quad i = 1, 3, 5, 7;$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = -\xi(1+\eta_0), \quad \frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{1}{2}\eta_i(1-\xi^2), \quad i = 2, 6;$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\xi_i(1-\eta^2), \quad \frac{\partial N_i}{\partial \eta} = -\eta(1+\xi_0), \quad i = 4, 8.$$

Блоки матрицы жесткости $[K_{ij}]$ и вектора нагрузки $\{F_i\}$ элемента определяются из выражений (2.59), (2.60). В частности, при действии равномерной погонной нагрузки q по стороне элемента длиной l , значения узловых сил в соответствующих узлах элемента приведены на рис. 2.17,а.

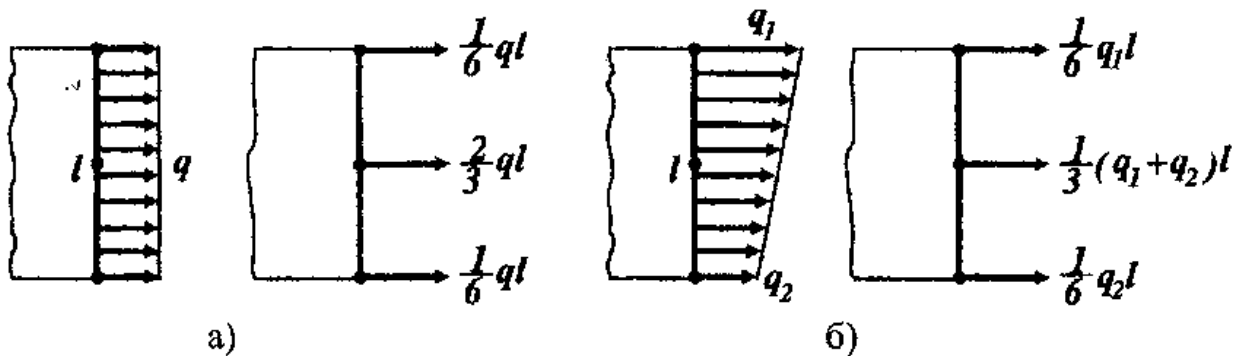


Рис. 2.17

Для стороны элемента, вдоль которой погонная нагрузка меняется линейно, значения соответствующих узловых сил приведены на рис. 2.17,б.

2.8. Некоторые вопросы реализации МКЭ на персональных компьютерах

Практическая реализация МКЭ для решения прикладных задач требует рассмотрения самых различных вопросов: разработки методов решения различного класса задач (статика и динамика, линейные и нелинейные и т.д.), моделирования реальных конструкций, создания библиотеки элементов и др. Не затрагивая специальные вопросы, рассмотрим ряд общих вопросов, необходимых и полезных для начального практического освоения МКЭ как с точки зрения использования готовых расчетных программ, так и разработки новых вычислительных алгоритмов и программ. При этом остановимся на анализе двухмерных задач (плоской задачи теории упругости) с применением плоских элементов как наиболее показательных, т.к. использование одномерных элементов в этом плане не вызывает каких-либо принципиальных трудностей. Основные этапы расчета по МКЭ представлены в разделе 2.1, а здесь делается акцент на способах их практической реализации, возможных вариантах представления (кодирования) исходной информации при решении задач по МКЭ на персональных компьютерах.

2.8.1. Дискретизация области на элементы

При построении двумерной конечно-элементной модели процедура дискретизации тела или расчетной области включает два основных этапа:

- 1) разбиение области на типовые элементы;
- 2) нумерация элементов и узлов.

Разбиение области на конечные элементы осуществляется в зависимости от выбранного типа элемента, геометрии области и, в какой-то степени, от инженерной интуиции. В то же время нумерация узлов требует определенного порядка, чтобы минимизировать вычислительные затраты. Нумерация элементов задает порядок формирования в программе глобальной матрицы жесткости тела. Для того чтобы система алгебраических уравнений получилась минимальной ширины, необходимо последовательно нумеровать узлы в направлении наименьшей стороны области разбиения. В качестве примера на рис. 2.18,а показана прямоугольная область, которая разбита на четырехузловые плоские элементы с двумя степенями свободы в узле (номера узлов обозначены арабскими цифрами, номера элементов приведены в кружочках).

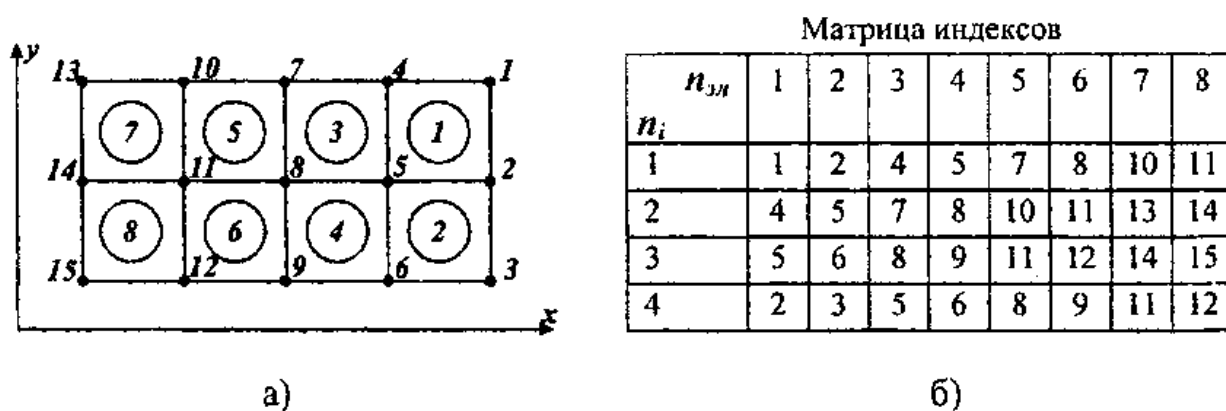


Рис. 2.18

Наименьшая полуширина ленты nb симметричной системы алгебраических уравнений вычисляется по формуле

$$nb = (\max_r + 1)ndf,$$

где ndf – число степеней свободы в узле, \max_r – максимальная разность номеров узлов в отдельном элементе.

Для приведенной на рис. 2.18,а схемы получим: $ndf=2$, $\max_r=4$, $nb=10$.

Представление в программе связанной системы элементов определяется двумя информационными массивами:

- 1) матрица глобальных координат x_i, y_i узлов;
- 2) матрица индексов, определяющая нумерацию узлов по элементам.

В матрице индексов для каждого элемента записываются глобальные номера узлов в порядке следования локальных номеров узлов элемента.

Например, для рассмотренной схемы разбиения области на элементы (см. рис. 2.18,а) и принятого порядка нумерации узлов для четырехугольного элемента первого порядка (см. рис. 2.15,б) матрица индексов приведена на рис. 2.18,б, где используются обозначения: $n_{эл}$ – номер элемента, n_i – номер локального узла элемента.

2.8.2. Учет граничных условий и нагрузки

Система матричных уравнений МКЭ (2.42) формируется относительно узловых перемещений, поэтому задаются только кинематические граничные условия. Например, для плоской задачи – условия вида (2.89). Возможны различные способы кодирования информации граничных условий. Можно использовать два массива, один из которых содержит номера граничных узлов, а второй – последовательный набор индексов 0 и 1, которые обозначают: 0 – перемещение в соответствующем направлении разрешено, 1 – перемещение запрещено. Число таких цифровых индексов для узла равно числу степеней свободы в узле. Например, для плоской задачи код «01» для i -ого граничного узла означает: $u_i \neq 0, v_i = 0$; для стержневой конструкции код «111000» означает: $u_i = 0, v_i = 0, w_i = 0, \theta_{xi} \neq 0, \theta_{yi} \neq 0, \theta_{zi} \neq 0$. Неоднородные граничные условия можно задавать аналогичным образом, но с введением индексов, соответствующих известным перемещениям.

Статические граничные условия учитываются добавлением известных узловых сил в вектор нагрузки. Распределенная нагрузка (в объеме, по поверхности или по линии) задается для соответствующих элементов и затем учитывается в векторе узловой нагрузки элемента согласно соотношениям (2.54). Сосредоточенная нагрузка учитывается непосредственной подстановкой соответствующих компонентов вектора $\{R\}$ в общий вектор узловой нагрузки $\{F\}$ (2.43). Кодирование информации по нагрузке может быть осуществлено в виде массива, включающего номера узлов, в которых задана нагрузка, величину и направление нагрузки (по какой координате). Часто распределенную нагрузку заменяют сосредоточенными силами в узлах исходя из физических соображений, что упрощает подготовку исход-

ной информации. Если используется сосредоточенная нагрузка, то точка ее приложения должна быть узловой, что необходимо учесть при разбиении области на элементы.

2.8.3. Формирование и решение системы уравнений МКЭ

Система разрешающих алгебраических уравнений МКЭ (2.42) получается путем формирования (сборки) общей матрицы жесткости $[K]$ и вектора узловой нагрузки $\{F\}$ конечно-элементной модели. Для этого используется процедура объединения по элементам в форме (2.43), т.е. матрица жесткости матрицы $[K^e]$ и вектор узловых сил $\{F^e\}$ элемента прибавляются к матрице $[K]$ и вектору $\{F\}$ сразу после вычисления. Процедура объединения управляется с помощью матрицы индексов. Так как связь элементов осуществляется только через общие узлы, то матрица $[K]$ содержит много нулей, т.е. матрица коэффициентов системы уравнений является редкоструктурной. За счет упорядоченной нумерации узлов конечно-элементной модели матрица жесткости $[K]$ принимает компактную ленточную структуру, в которой ненулевые коэффициенты расположены по главной диагонали и вблизи нее (рис. 2.19,а). Вследствие симметрии матрицы жесткости

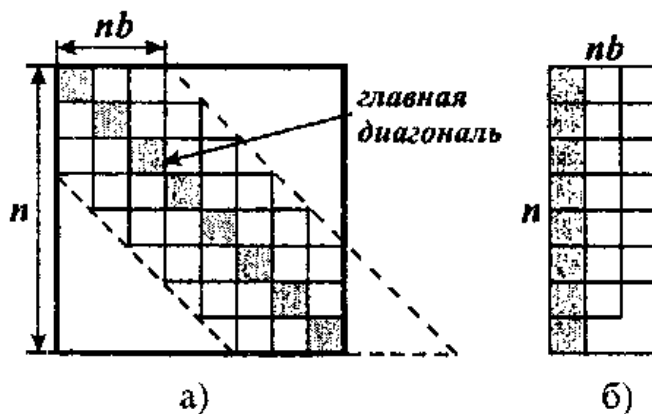


Рис. 2.19

элемента $[K^e]$ для нее вычисляется только симметричная часть (верхняя треугольная часть квадратной матрицы). Общая матрица жесткости $[K]$ также является симметричной относительно главной диагонали. Поэтому матрица компактно форми-

руется в виде прямоугольного двумерного массива $S(n, nb)$ с полушириной ленты nb и числом неизвестных узловых перемещений n (рис. 2.19,б). Матрица индексов позволяет рациональным образом «рассылать» в программе коэффициенты матрицы жесткости $[K^e]$ и вектора нагрузки $\{F^e\}$ каждого элемента в соответствующие места матрицы $[K]$ и вектора $\{F\}$. Причем эти коэффициенты, соответствующие различным конечным элементам, суммируются в ячейках матрицы и вектора, определяемого для одного и того же номера узла.

Перед решением системы алгебраических уравнений необходимо подставить граничные условия. Это может быть осуществлено одним из двух способов. В первом способе при подстановке однородных граничных условий обнуляется строка и столбец общей матрицы жесткости $[K]$ (кроме диагонального члена) и коэффициент вектора нагрузки $\{F\}$, соответствующие запрещаемой степени свободы. Во втором способе (способе Б. Айронса) в соответствующую ячейку на главной диагонали общей матрицы жесткости подставляется большое число (например, 10^{20}). При втором способе можно наиболее просто учесть и неоднородные граничные условия: в вектор нагрузки подставляется это же большое число, умноженное на заданную величину перемещения. Оба способа легко реализуются при формировании системы уравнений МКЭ.

Для решения линейной системы алгебраических уравнений используются хорошо разработанные методы вычислительной математики – прямые и итерационные. Среди прямых методов чаще всего используется *метод Гаусса*, для которого требуется наименьшее количество операций исключения. Процедура решения по методу Гаусса включает два этапа – прямой и обратный ход. При прямом ходе в уравнениях последовательно исключаются неизвестные с учетом симметричной и ленточной структуры системы уравнений, в результате чего исходная матрица превращается в треугольную. Используя обратный ход, определяются неизвестные из решения полученной преобразованной системы уравнений. В МКЭ с неизвестными перемещениями все диагональные члены матрицы жесткости $[K]$ являются положительными и наибольшими по величине среди коэффициентов данной строки. Это позволяет реализовать наиболее "быстрый" вариант метода Гаусса – без выбора главного члена (диагональные члены являются ведущими в процессе исключения).

2.8.4. Вычисление напряжений

В результате решения системы алгебраических уравнений получается общий вектор узловых перемещений $\{\delta\}$ конечно-элементной модели. Для вычисления деформаций и напряжений используется информация для элемента. Поэтому с помощью матрицы индексов из вектора $\{\delta\}$ формируется вектор $\{\delta\}$ для каждого рассматриваемого элемента. В моделях метода перемещений деформации вычисляются согласно зависимостям (2.39), в

смешанных моделях - согласно зависимостям (2.49) или (2.39) и (2.52), предварительно определив вектор коэффициентов $\{\alpha\}$. Для различных элементов процедура вычисления напряжений может быть разной. Для стержневых элементов сначала определяются внутренние усилия согласно соотношениям (2.72), (2.76), а затем вычисляются напряжения в опасных точках. Для плоских элементов в любой точке элемента в первую очередь определяются компоненты деформации, а затем соответствующие напряжения вычисляются с использованием закона Гука (2.86). На границе смежных элементов значения напряжений, вычисленные в отдельных элементах, не совпадают; поэтому проводят осреднение результатов по напряжениям. Чаще всего вычисляются напряжения в узловых точках элементов, а затем определяются узловые напряжения как средние значения по элементам, соединяющихся в данном узле:

$$\sigma_i = \frac{1}{k} \sum_{e=1}^k \sigma_i^{(k)},$$

где k – число элементов, содержащих i -ый узел.

Для изопараметрических элементов наиболее точно напряжения определяются в точках интегрирования. Поэтому иногда применяется процедура билинейной интерполяция узловых значений напряжений в элементе через значения напряжений в точках интегрирования. Можно заметить, что для простых элементов применение смешанных моделей часто дает лучшие результаты по напряжениям, чем в совместных моделях, за счет "интегрального" представления поля деформаций/напряжений в элементе.

2.9. Решение задач о концентрации напряжений

Важные прикладные задачи, решаемые с применением МКЭ, связаны с практическим исследованием эффектов концентрации напряжений в деталях с отверстиями, выточками, галтелями и т.д. В зонах резкого изменения геометрии деталей наблюдается локальное повышение напряжений. Величина наибольших напряжений зависит от геометрии концентратора напряжений, его относительных размеров, способа нагружения детали. В качестве примера рассмотрим численный анализ концентрации напряжений в плоской пластинке постоянной толщины h с круговым центральным отверстием при равномерном осевом растяжении (рис. 2.20,а).

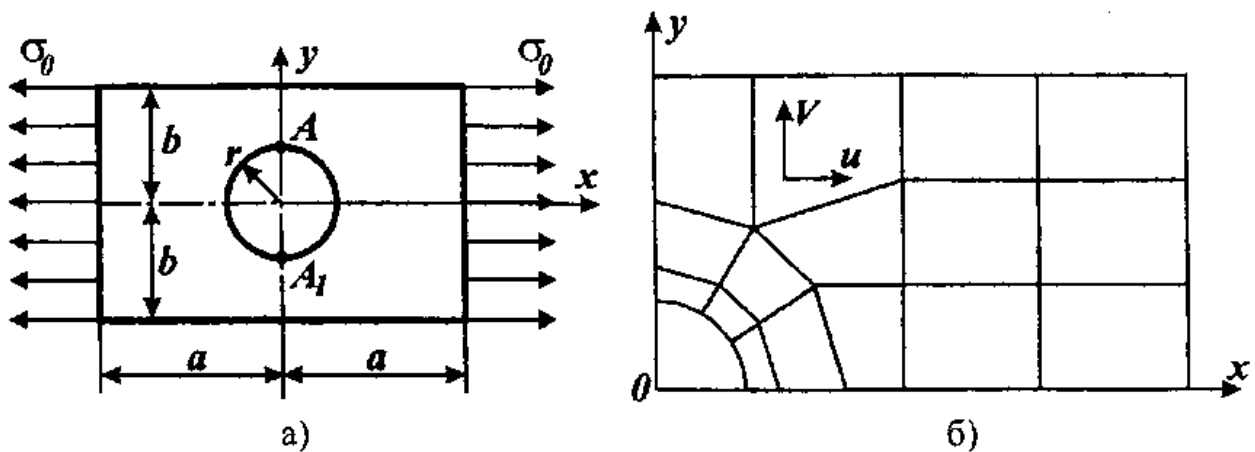


Рис. 2.20

С учетом симметрии пластинки относительно выбранных координатных осей Ox и Oy расчетная область представляет 1/4 часть пластинки (рис. 2.20,б). В связи с наличием криволинейной границы расчетной области решение по МКЭ целесообразно проводить с использованием элементов второго порядка. Наибольшие напряжения возникают на краю отверстия в площадках, параллельных направлению растяжения (т.А и т.А₁ на рис. 2.20,а). Как известно, концентрация напряжений характеризуется быстрым уменьшением величины напряжений при удалении от границ концентратора. Поэтому при конечно-элементном моделировании можно использовать нерегулярную сетку элементов (см. рис. 2.20,б) для минимизации вычислительных затрат. В зоне концентрации напряжений область разбивается на элементы малых размеров, а при удалении от нее размеры используемых элементов увеличиваются. При расчетном анализе номинальные напряжения σ_0 приводились к контурной погонной нагрузке $q_x = \sigma_0 h$. Действие этой нагрузки на сторонах контурных элементов заменялось соответствующими узловыми силами (см. рис. 2.17,а). Таким образом учитывались статические граничные условия. Кинематические граничные условия задаются для узлов, в которых запрещены перемещения. С учетом симметрии геометрии и нагрузки кинематические граничные условия имеют вид:

- для контурных узлов вдоль оси θx $V = 0$ ($u \neq 0$);
- для контурных узлов вдоль оси θy $u = 0$ ($V \neq 0$).

Некоторые расчетные результаты для пластины приведены на рис. 2.21. На рис. 2.21,а показано распределение нормальных напряжений σ_x и σ_y в характерных сечениях пластинки – по плоскостям симметрии θx и θy .

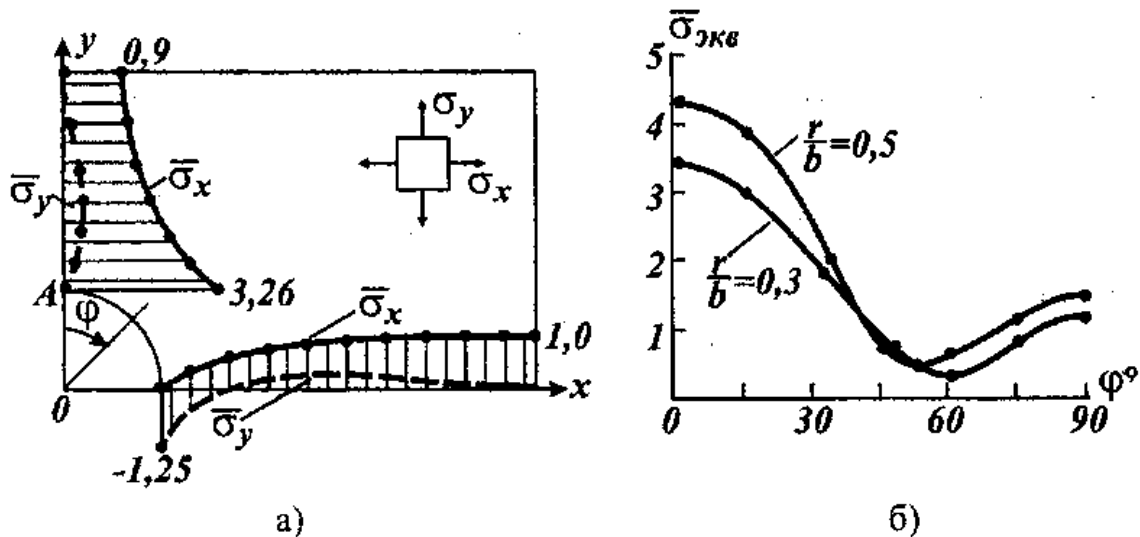


Рис. 2.21

Напряжения приведены в относительной форме $\bar{\sigma} = \sigma / \sigma_0$. Изменение эквивалентных напряжений $\sigma_{экв}$ по контуру отверстия для двух значений отношения r/b приведено на рис. 2.21,б. Эквивалентные напряжения определялись по 4-ой теории прочности

$$\sigma_{экв} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2},$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ - главные напряжения.

Для оценки концентрации напряжений используется теоретический коэффициент концентрации напряжений $\alpha_\sigma = \sigma_{экв}^{max} / \sigma_0$. Практический интерес представляет анализ влияния формы концентратора и его геометрических параметров на величину коэффициента α_σ . Применение МКЭ позволяет сделать такой анализ, результаты которого можно использовать и при разработке практических рекомендаций по уменьшению концентрации напряжений в реальных деталях.

Изучение концентрации напряжений с применением МКЭ в пластинках с различными геометрическими нерегулярностями (концентраторами) является предметом учебного задания [15].

Лабораторная работа

Испытание многослойной композитной балки на изгиб

Цель работы:

- ознакомление с композитными волокнистыми материалами и композитными балками многослойной структуры;
- экспериментальное определение нормальных напряжений и перемещений в двухопорной многослойной композитной балке-рессоре;
- расчетный анализ многослойной композитной балки-рессоры;
- сравнение экспериментальных и расчетных результатов.

Описание экспериментальной установки. Общий вид экспериментальной установки для испытания на изгиб балки-рессоры показан на рис. П.1.1,а.

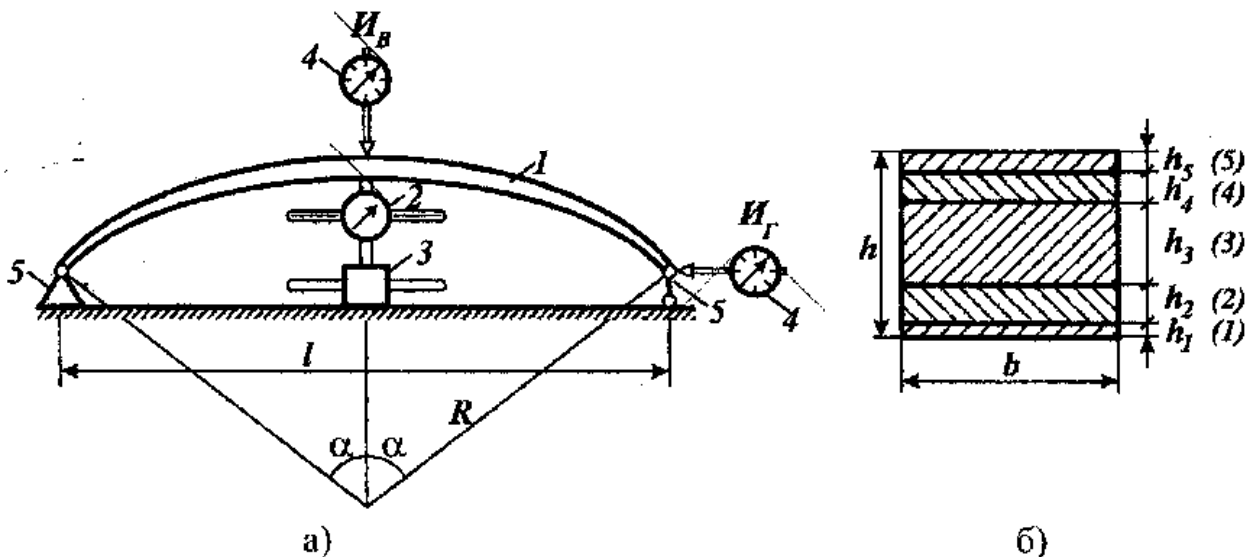


Рис. П.1.1

1 – композитная балка; 2 – динамометр; 3 – винтовое нагрузочное устройство; 4 – индикатор перемещений; 5 – опоры

Установка состоит из криволинейной композитной балки, шарнирно-неподвижной и шарнирно-подвижной опор, силового узла, включающего винтовое устройство для передачи на балку радиальной нагрузки и динамометра сжатия для определения величины нагрузки. Балка изготовлена с постоянным радиусом R кривизны оси, переменной толщины, имеет слоистую структуру (рис. П.1.1,б): пять слоев балки выполнены из определен-

ных композитных материалов.

Значения геометрических параметров экспериментальной балки:

$$R = 1000 \text{ мм}, l = 1186,4 \text{ мм}, \alpha = 36,4^\circ, b = 75,3 \text{ мм}.$$

Упругие характеристики используемых материалов и толщины слоев балки следующие:

слои 1, 3, 5 – стеклотекстолит (стеклопластик тканый)

$$E_z = 30 \text{ ГПа}, G_{zy} = 2,2 \text{ ГПа}, h_1 = h_5 = 1 \text{ мм}; \quad (\text{П.1.1})$$

слой 2 – стеклопластик одномерноармированный

$$E_z = 45 \text{ ГПа}, G_{zy} = 4,0 \text{ ГПа}; h_2 = 5 \text{ мм};$$

слой 4 – углепластик

$$E_z = 120 \text{ ГПа}, G_{zy} = 3,5 \text{ ГПа}, h_4 = 4 \text{ мм}.$$

Слои 1, 2, 4 и 5 имеют постоянные толщины, а средний слой выполнен переменной толщины ($h_3 = var$). Значения толщины h отдельных сечений балки в зависимости от криволинейной координаты s , отсчитываемой от левой опоры, по длине балки приведены в табл. П.1.1.

Таблица П.1.1

| | | | | | | | | |
|----------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| N сеч | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| s , мм | 0 | 100 | 180 | 270 | 395 | 470 | 560 | 635 |
| h , мм | 13,4 | 14,7 | 16,0 | 17,7 | 21,5 | 21,7 | 21,7 | 21,8 |
| N сеч | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| s , мм | 710 | 785 | 860 | 930 | 1010 | 1080 | 1220 | 1270 |
| h , мм | 20,9 | 20,0 | 19,1 | 18,3 | 17,5 | 16,6 | 15,7 | 15,5 |

Методика испытаний. Для испытания балка устанавливается на двух опорах таким образом, что одна из опор является шарнирно-неподвижной, а другая – шарнирно-подвижной, обеспечивая свободное смещение опорного сечения балки в горизонтальном направлении. Нагрузка в виде сосредоточенной радиальной силы прикладывается в среднем сечении балки с помощью специального винтового устройства; величина нагрузки определяется с помощью динамометра сжатия.

Задачей экспериментального исследования композитной балки-рессоры является определение нормальных напряжений в балке (изменения напряжений по длине балки и распределения напряжений в опасном сечении) и характерных перемещений (максимального прогиба и горизонтального смещения опорного сечения балки).

Экспериментальная методика определения нормальных напряжений основана на применении метода электротензометрии. В соответствии с задачей исследования на наружной и внутренней поверхностях балки наклеены 10 тензодатчиков с базой $S = 5$ мм, которые подсоединяются к измерительному прибору ИДЦ-1.

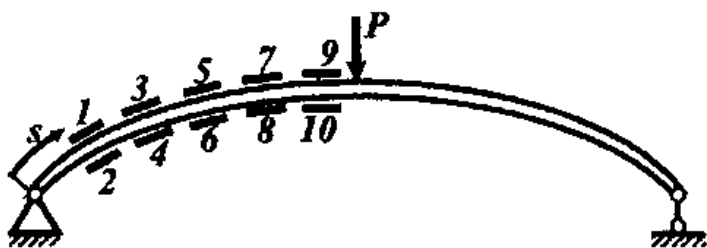


Рис. П.1.2

Схема расположения тензодатчиков показана на рис. П.1.2, значения осевой координаты s для сечений, где расположены соответствующие пары тензодатчиков, приведены в табл. П.1.2.

Таблица П.1.2

| | | | | | |
|----------|------|------|------|------|-------|
| N т/д | 1, 2 | 3, 4 | 5, 6 | 7, 8 | 9, 10 |
| s , мм | 214 | 314 | 414 | 514 | 614 |

В месте расположения каждого тензодатчика (в «тензоточке») по его направлению измеряется линейная деформация, которая определяется по формуле

$$\epsilon_{z(j)} = m_{\epsilon} \Delta n_j, \quad j = 1 \div 10, \quad (\text{П.1.2})$$

где $m_{\epsilon} = 10^{-5}$ — цена деления шкалы прибора ИДЦ-1 по деформациям; Δn_j — изменение показаний прибора на ступень нагружения (ΔP), соответствующее j -му тензодатчику.

Экспериментальные значения нормальных напряжений в исследуемых тензоточках определяются по закону Гука

$$\sigma_{z(j)} = E_z \epsilon_{z(j)}, \quad j = 1 \div 10, \quad (\text{П.1.3})$$

где $\epsilon_{z(j)}$ — линейная деформация в месте расположения j -го тензодатчика, E_z — модуль продольной упругости стеклотекстолита (материала крайних слоев балки), значение которого приведено в (П.1.1).

Для определения перемещений используются два индикатора часового типа (см. рис. П.1.1,а): вертикальный индикатор (I_v) установлен над балкой посередине пролета; горизонтальный индикатор (I_r) установлен со стороны шарнирно-подвижной опоры балки. Индикаторы закрепляются на

индикаторных стойках и своими подвижными штоками упираются в поверхность балки.

По показаниям индикаторов определяются перемещения в рассматриваемых сечениях балки:

$$V_{max} = m_u \cdot \Delta n_b, \quad u_0 = m_u \cdot \Delta n_r, \quad (\text{П.1.4})$$

где $m_u = 0,01$ мм/дел – цена деления шкалы индикатора; $\Delta n_b, \Delta n_r$ – разности показаний индикаторов на ступень нагружения (ΔP).

Проведение испытаний и обработка опытных данных. Испытание проводится при ступенчатом приложении нагрузки с помощью силового винта. Для каждой нагрузки P_i ($i = 1, 2$) снимаются показания прибора ИДЦ-1 для всех тензодатчиков и показания двух индикаторов, которые вносят в таблицу результатов испытания (табл. П.1.3).

Таблица П.1.3

Результаты испытания балки

| Нагрузка | | m/d (1) | | ... | | m/d (10) | | ин-р И _в | | ин-р И _г | |
|-----------------|----------------------|---------|--------------|-----|--|----------|-----------------|---------------------|--------------|---------------------|--------------|
| P_i, H | $\Delta P, \text{H}$ | n_1 | Δn_1 | | | n_{10} | Δn_{10} | n_b | Δn_b | n_r | Δn_r |
| 200 | 600 | | | | | | | | | | |
| 800 | | | | | | | | | | | |

После проведения испытания балки необходимо обработать опытные данные. Для этого подсчитываются разности Δn_i для ступени нагружения $\Delta P = P_2 - P_1$ и вносят в таблицу результатов испытания.

Экспериментальные результаты. Определение экспериментальных значений нормальных напряжений и построение эпюр напряжений провести в следующей последовательности:

- определить линейные деформации по формуле (П.1.2) в десяти тензоточках;
- определить нормальные напряжения по формуле (П.1.3);
- построить эпюру нормальных напряжений $\sigma_z(y)$ в сечении, где расположены тензодатчики 9 и 10.

Для построения эпюры нормальных напряжений $\sigma_z(y)$ в рассматриваемом сечении (рис. П.1.3,а) приведем следующую процедуру:

- 1) используя полученные значения деформаций для тензоточек 9 и 10, эпюру линейных деформаций $\epsilon_z(y)$ в сечении представим в виде прямой

линии (рис. П.1.3,б) на основе гипотезы плоских сечений (эпюру лучше построить в определенном масштабе);

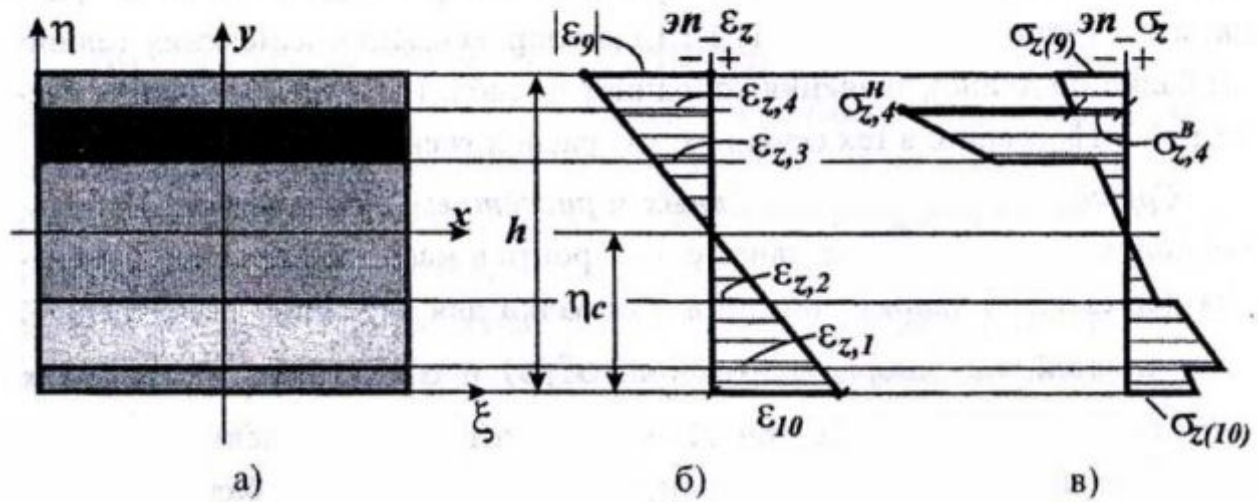


Рис. П.1.3

2) вычислим значение координаты η_c , определяющей положение нейтральной линии в сечении, по формуле

$$\eta_c = \frac{h \cdot \varepsilon_{10}}{|\varepsilon_9| + \varepsilon_{10}}, \quad (\text{П.1.4})$$

(эту формулу легко получить из подобия треугольников на рис. П.1.3,б);

3) используя значения толщин h_i слоев для рассматриваемого сечения балки и полученное значение координаты η_c , из эпюры $\varepsilon_z(y)$ определяем значения деформации $\varepsilon_{z,i}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) на границах слоев балки; также это можно сделать, используя выбранный масштаб для эпюры $\varepsilon_z(y)$;

4) вычисляем значения нормальных напряжений $\sigma_{z,i}$ на границах слоев балки по закону Гука

$$\sigma_{z,i}^a = E_{z,i}^a \varepsilon_{z,i}, \quad \sigma_{z,i}^h = E_{z,i}^h \varepsilon_{z,i}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (\text{П.1.5})$$

используя значения модулей упругости (П.1.1) для материалов верхнего (a) и нижнего (h) граничных слоев; таким образом, для каждой координаты η_i (или y_i) получим два значения напряжения;

5) по полученным значениям напряжений строим эпюру нормальных напряжений $\sigma_z(y)$ в сечении (рис. П.1.3,в).

Расчетные результаты. Определение расчетных значений линейных деформаций, нормальных напряжений и перемещений провести на персо-

линии (рис. П.1.3,б) на основе гипотезы плоских сечений (эпюру лучше построить в определенном масштабе);

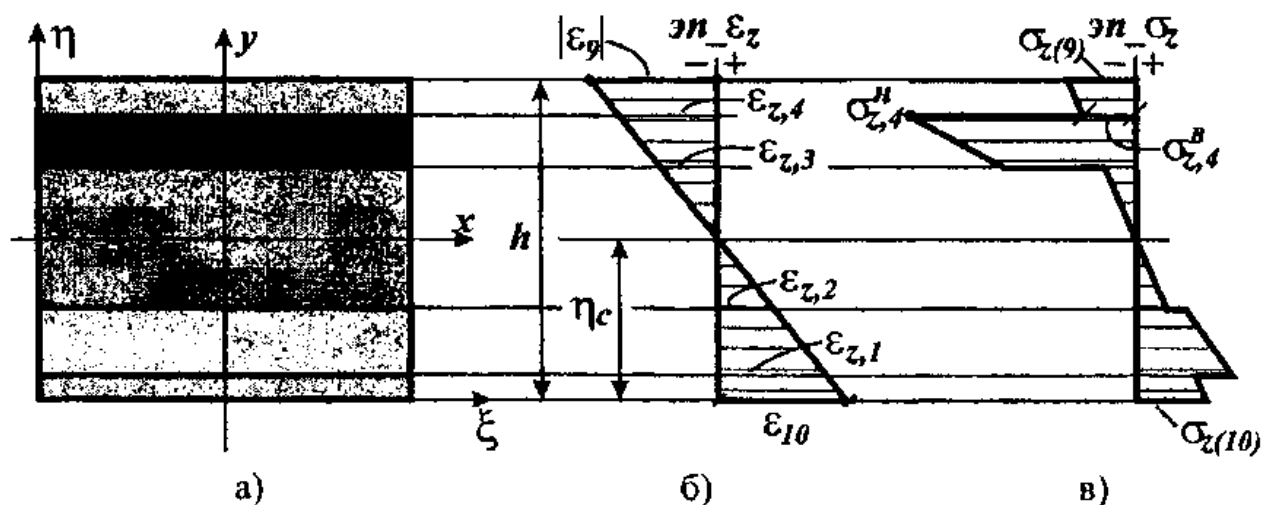


Рис. П.1.3

2) вычислим значение координаты η_c , определяющей положение нейтральной линии в сечении, по формуле

$$\eta_c = \frac{h \cdot \varepsilon_{10}}{|\varepsilon_9| + \varepsilon_{10}}, \quad (\text{П.1.4})$$

(эту формулу легко получить из подобия треугольников на рис. П.1.3,б);

3) используя значения толщин h_i слоев для рассматриваемого сечения балки и полученное значение координаты η_c , из эпюры $\varepsilon_z(y)$ определяем значения деформации $\varepsilon_{z,i}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) на границах слоев балки; также это можно сделать, используя выбранный масштаб для эпюры $\varepsilon_z(y)$;

4) вычисляем значения нормальных напряжений $\sigma_{z,i}$ на границах слоев балки по закону Гука

$$\sigma_{z,i}^* = E_{z,i}^* \varepsilon_{z,i}, \quad \sigma_{z,i}^n = E_{z,i}^n \varepsilon_{z,i}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (\text{П.1.5})$$

используя значения модулей упругости (П.1.1) для материалов верхнего ($*$) и нижнего (n) граничных слоев; таким образом, для каждой координаты η_i (или y_i) получим два значения напряжения;

5) по полученным значениям напряжений строим эпюру нормальных напряжений $\sigma_z(y)$ в сечении (рис. П.1.3,в).

Расчетные результаты. Определение расчетных значений линейных деформаций, нормальных напряжений и перемещений провести на персо-

нальном компьютере с использованием вычислительной программы *COMPOS*. Для подготовки исходных данных использовать геометрические параметры балки, упругие характеристики материалов, значения координаты s и толщины h из табл. П.1.1 (для аппроксимации изменения толщины балки по длине), значения координат из табл. П.1.2 для получения расчетной информации в тех сечениях, где расположены тензодатчики.

Сравнение экспериментальных и расчётных результатов. Используя полученные расчетные данные, построить в масштабе графики изменения нормальных напряжений по длине балки для наружной и внутренней поверхностей, т.е. эпюры напряжений $\sigma_z^h(s)$ и $\sigma_z^o(s)$. На этих графиках нанести (например, в виде точек) экспериментальные значения нормальных напряжений для наружной и внутренней поверхностей балки, используя значения напряжений, соответственно, в тензоточках 1, 3, 5, 7, 9 и 2, 4, 6, 8, 10 и значения осевой координаты из табл. П.1.2. Эпюры экспериментальных напряжений приближенно могут быть представлены как некоторые кривые, равноудаленные от экспериментальных точек.

Полученные значения экспериментальных и расчетных линейных деформаций, нормальных напряжений, координаты нейтральной линии и перемещений внести в таблицу результатов (табл. П.1.4).

Таблица П.1.4

Сравнение результатов

| Параметры | ε_9 | ε_{10} | σ_9 , МПа | σ_{10} , МПа | η_{cs} , мм | V_{max} , мм | u_0 , мм |
|-------------|-----------------|--------------------|------------------|---------------------|------------------|----------------|------------|
| Эксперимент | | | | | | | |
| Расчет | | | | | | | |
| ξ , % | | | | | | | |

Относительное расхождение (ξ в процентах) между экспериментальными и расчетными результатами вычислить по формуле:

$$\xi\% = \left| \frac{A_э - A_p}{A_э} \right| \cdot 100\% , \quad (\text{П.1.6})$$

где $A_э$, A_p – экспериментальное и расчетное значения параметра.

Учебная вычислительная программа *COMPOS*

Вычислительная программа *COMPOS* является учебной программой для расчетного анализа многослойных композитных балок с применением прикладной методики, изложенной в *разделе 1.7*. В программе реализован расчет криволинейной или прямолинейной балки с шарнирными опорами при нагружении в среднем сечении сосредоточенной силой (трехточечный изгиб). Рассматриваются случаи расчета статически определимой и статически неопределимой балок. Основной целью применения учебной программы является изучение особенностей распределения напряжений и деформаций в сечениях многослойной композитной балки, расчетный анализ многослойных композитных балок для различных геометрических параметров балки и физических (упругих) характеристик материала.

На рис. П.2.1 приведено управляющее меню программы¹.

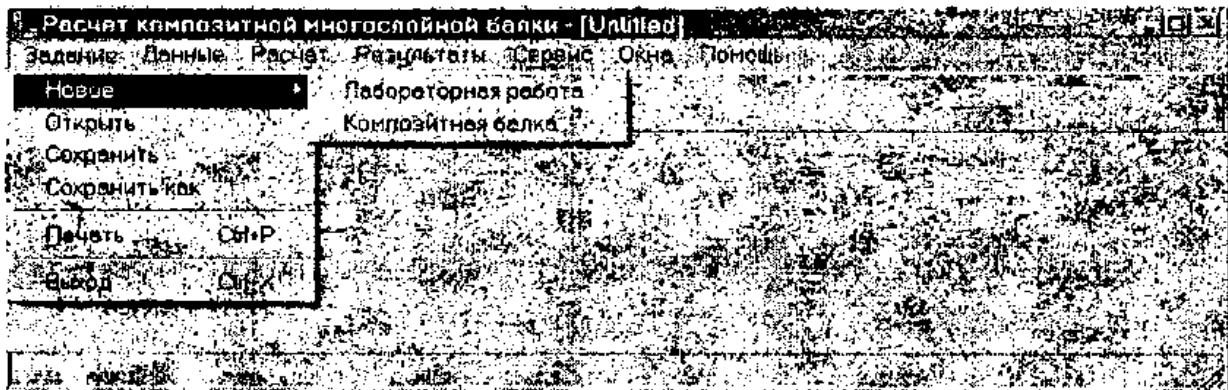


Рис. П.2.1

В строке заголовка отражено название выполняемого задания. Строка меню, расположенная ниже, содержит названия команд для выполнения различных стадий расчетного анализа балки. При вызове любой из команд открывается доступ еще к одному меню. Меню команды «*Задание*» показано на рис. П.2.1. Вначале необходимо ввести исходные данные. Возможны два варианта.

Если задание выполняется с самого начала, то можно использовать команду «*Новое*» с всплывающим меню. При активизации одной из команд этого меню («*Лабораторная работа*» и «*Композитные балки*») мож-

¹ Оболочка программы разработана инженер-программистом В.В. Михайловым

но получить доступ к окну ввода исходных данных для расчета экспериментальной многослойной композитной балки-рессоры или композитной балки выбранной структуры.

Если на диске компьютера имеется файл данных для выполняемого задания (полный или неполный), то можно его использовать, выполнив команду «Открыть» из меню команды «Задание». Далее выбрать необходимый файл данных и перейти к команде «Данные» в строке меню для редактирования исходных данных задания.

Ввод исходных данных осуществляется пользователем в диалоговом режиме. Окно диалога для подготовки данных «Лабораторная работа» приведено на рис. П.2.2.

Рис. П.2.2

Криволинейная балка переменного сечения имеет пять слоев из различных материалов. Необходимо ввести следующие расчетные данные (где необходимо, указаны единицы измерения величин):

- нагрузку (величину силы P);
- геометрические параметры балки;
- число слоев балки, толщины слоев среднего сечения балки и упругие характеристики материалов (см. П.1.1);
- число расчетных сечений и значения осевой координаты для них,

включая координаты сечений балки, где расположены тензодатчики (см. табл. П.1.2);

- номер сечения для отображения эпюры напряжений в сечении;
- число сечений, значения осевой координаты и толщины балки для ряда выбранных сечений (см. табл. П.1.1) - для интерполяции толщины балки в любом сечении;
- степень статической неопределимости балки.

Примечание. Для слоя 3 переменной толщины ввести значение толщины, равное нулю; в программе толщина этого слоя для каждого сечения определяется расчетным путем.

Окно диалога «Композитные балки» для подготовки данных приведено на рис. П.2.3.

| | |
|------------------------------------------------------------|--------------------------------------|
| Нагрузка (Н) | 1000.00 |
| Радиус оси криволинейной балки (мм) | 800.00 |
| Расстояние между опорами (мм) | 600.00 |
| Ширина сечения балки (мм) | 20.00 |
| Число слоев композитной балки | 3 |
| Толщина балки (мм) | Начальная: 6.50, Максимальная: 12.00 |
| Степень статической неопределимости балки | 1 |
| Относительное горизонтальное смещение опорного сечения | 0 |
| Число сечений для выходной информации (для половины балки) | 7 |

Рис. П.2.3

Рассматриваются балки, симметричные относительно вертикальной плоскости (кроме опорных связей). Поэтому геометрические данные и упругие характеристики материалов задаются только для половины балки.

Необходимо ввести следующие исходные данные для балки:

- нагрузку (величину силы P);
- геометрические параметры балки;
- число слоев композитной балки, толщины слоев и упругие характеристики материалов;

- значения начальной и максимальной толщины балки, т.е. толщины опорного и среднего сечений балки;
- степень статической неопределенности (0 или 1);
- относительное горизонтальное смещение опорного сечения, задавая отношение $u_0/u_{max} \leq 1.0$ (моделируется упругая связь в одной из опор);
- число сечений, в которых выводится полученная расчетная информация для балки (с учетом симметрии балки).

Примечание. При расчете балки переменной толщины для соответствующего слоя (одного для балки) ввести значение толщины, равной нулю; в программе толщина этого слоя для каждого сечения определяется расчетным путем.

После подготовки данных необходимо сохранить их на диске, выполнив команду «Сохранить как» из меню команды «Задание». При этом нужно ввести какое-либо имя задания (это имя присваивается всем рабочим файлам, которые создаются в процессе работы программы). (Команда «Сохранить» из этого меню автоматически сохранит ранее использованное имя задания.)

Программа выполнит расчет балки при использовании команды «Расчет» управляющего меню.

После выполнения расчета можно перейти к просмотру графических результатов, воспользовавшись командой «Результаты» управляющего меню. Меню команды «Результаты» показано на рис. П.2.4.

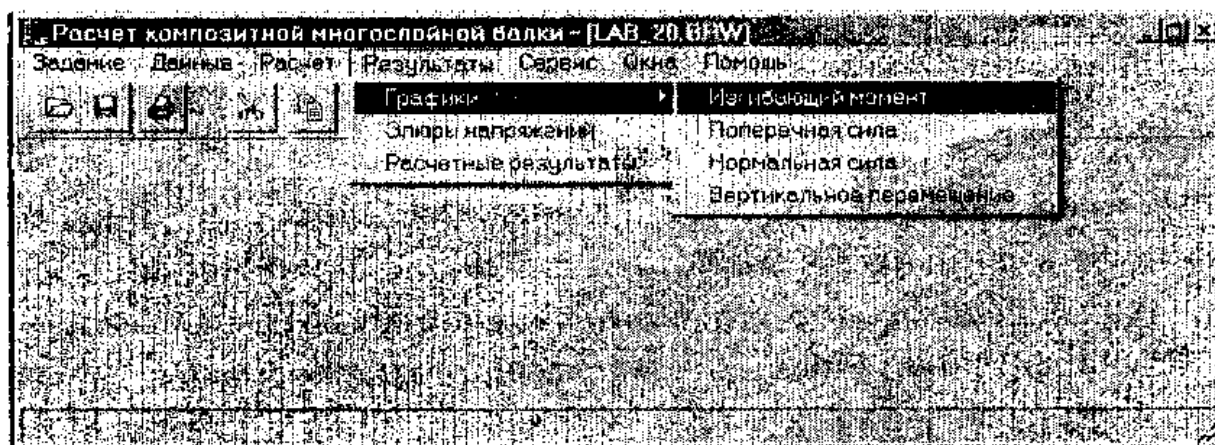


Рис. П.2.4

Команда «Графики» имеет всплывающее меню, при реализации соответствующих команд которого на экран монитора отображаются эпюры

внутренних силовых факторов и вертикального перемещения сечения (прогиба) по длине балки. С помощью команды «Эпюры напряжений» на экране монитора отображаются эпюры линейной деформации, нормальных и касательных напряжений для выбранного сечения балки. Выполнение команды «Листинг» приводит к отображению на экране расчетных результатов для их просмотра (рис. П.2.5).

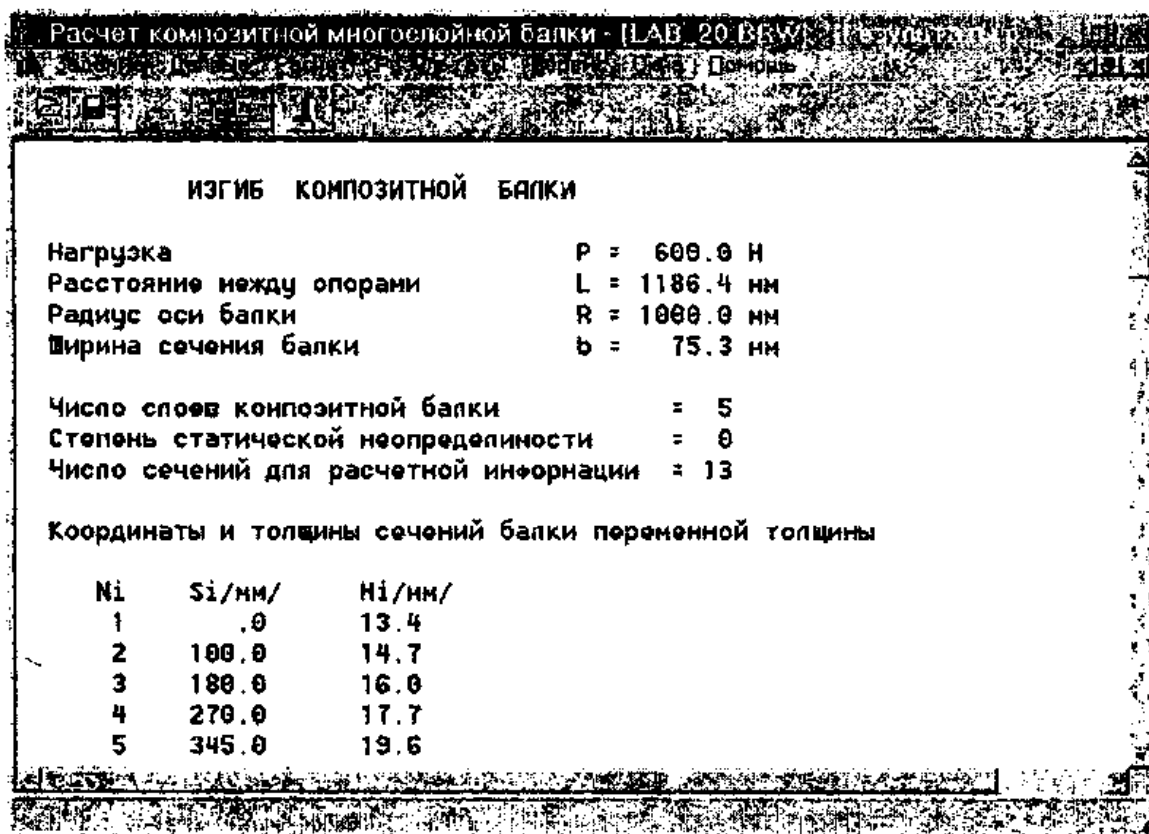


Рис. П.2.5

Упругие характеристики волокнистых композиционных материалов

Таблица П.3.1

Традиционные конструкционные материалы

| № | Материал | E , ГПа | G , ГПа | μ | ρ , г/см ³ |
|---|------------------------|-----------|-----------|-------|----------------------------|
| 1 | сталь | 200 | 77 | 0,3 | 7,8 |
| 2 | титановый сплав | 105 | 39 | 0,35 | 4,5 |
| 3 | алюминиевый сплав | 72 | 27 | 0,33 | 2,7 |
| 4 | магниевый сплав | 43 | 17 | 0,31 | 1,8 |
| 5 | дерево (вдоль волокон) | 11 | 0,55 | - | 0,6-0,9 |

Обозначения: E – модуль упругости, G – модуль сдвига, μ – коэффициент Пуассона, ρ – плотность материала

Таблица П.3.2

Армирующие волокна (наполнитель)

| № | Материал | E , ГПа | μ | ρ , г/см ³ |
|----|--------------------------------|-----------|-------|----------------------------|
| 1 | стекловолокно ВМ-1 | 95 | 0,25 | 2,58 |
| 2 | стекловолокно УП-73 | 83 | 0,25 | 2,4 |
| 3 | стекловолокно Е-стекло | 73,5 | 0,25 | 2,54 |
| 4 | стекловолокно М-стекло | 110 | 0,25 | 2,89 |
| 5 | углеродное волокно ВМН-3 | 250 | 0,33 | 1,71 |
| 6 | углеродное волокно Кулон | 400-600 | 0,33 | 1,9 |
| 7 | углеродное волокно Торнел-500 | 245 | 0,33 | 1,8 |
| 8 | углеродное волокно AS3 | 190 | 0,33 | 1,8 |
| 9 | углеродное волокно Карболон-L | 380 | 0,33 | 1,95 |
| 10 | органическое волокно СВМ | 130 | 0,3 | 1,43 |
| 11 | органическое волокно АРМОС | 140 | 0,3 | 1,45 |
| 12 | органическое волокно Терлон | 130-160 | 0,3 | 1,45 |
| 13 | органическое волокно Кевлар-29 | 69-77 | 0,3 | 1,45 |
| 14 | органическое волокно Кевлар-49 | 130-140 | 0,3 | 1,45 |
| 15 | борное волокно В/В | 400 | 0,3 | 2,5 |

Таблица П.3.3

Полимерные связующие (матрица)

| № | Материал | E , ГПа | μ | ρ , г/см ³ |
|---|----------------------|-----------|-----------|----------------------------|
| 1 | эпоксидные связующие | 2-4 | 0,34-0,38 | 1,23-1,3 |
| 2 | термопласты | 1,2-4,2 | 0,37 | 1,2-1,3 |
| 3 | роливсаны | 1,5-2,5 | 0,36 | 1,15-1,17 |
| 4 | фенолформальдегидные | 7-11 | 0,38 | 1,2-1,3 |
| 5 | кремнийорганические | 6,8-10 | 0,37 | 1,3-1,5 |

Таблица П.3.4

Однонаправленные полимерные композиционные материалы

| № | Материал | E_1 , ГПа | E_2 , ГПа | G_{12} , ГПа | μ_{12} |
|----|---------------------------|-------------|-------------|----------------|------------|
| 1 | стеклопластик | 57 | 9 | 5,2 | 0,25 |
| 2 | стеклопластик | 70 | 12,2 | 5,0 | 0,25 |
| 3 | стеклопластик | 46,5 | 7 | 7 | 0,25 |
| 4 | стеклопластик DX210 | 37,8 | 10,1 | 4,9 | 0,29 |
| 5 | углепластик | 180 | 6,2 | 4,9 | 0,3 |
| 6 | углепластик P313 | 142,8 | 9,13 | 5,49 | 0,3 |
| 7 | углепластик AS/4397 | 128,5 | 9,78 | 5,42 | 0,3 |
| 8 | углепластик A/3004 | 114,2 | 8,1 | 3,94 | 0,3 |
| 9 | углепластик КМУ-1 | 160 | 11 | 4 | 0,3 |
| 10 | углепластик КМУ-4 | 180 | 12 | 5 | 0,3 |
| 11 | углепластик КМУ-1л | 120 | 10 | 4 | 0,3 |
| 12 | углепластик КМУ-2л | 81 | 8 | 3 | 0,3 |
| 13 | углепластик КМУ-2у | 140 | 10 | 4 | 0,3 |
| 14 | углепластик HMS/DX209 | 188,8 | 6,0 | 2,7 | 0,3 |
| 15 | углепластик HTS/DX210 | 103,4 | 7,6 | 3,8 | 0,3 |
| 16 | углепластик HMS/DX210 | 172,7 | 7,2 | 3,8 | 0,29 |
| 17 | органопластик Kevlar 49/E | 69 | 4,52 | 2,48 | 0,41 |
| 18 | органопластик | 72 | 4,9 | 2,0 | 0,25 |
| 19 | органопластик | 82 | 5,1 | 1,8 | 0,31 |
| 20 | боропластик | 162 | 19 | 5,2 | 0,25 |
| 21 | боропластик | 210 | 19 | 6,2 | 0,25 |
| 22 | боропластик | 208,9 | 19,8 | 5,0 | 0,25 |
| 23 | боропластик | 250 | 20 | 9,8 | 0,22 |
| 24 | углеалюминий | 120-200 | 60-125 | 35-55 | 0,33 |
| 25 | бороалюминий | 130-245 | 70-150 | 35-63 | 0,3 |

Обозначения: E_1 – модуль упругости вдоль волокон, E_2 – модуль упругости поперёк волокон, G_{12} – модуль сдвига, μ_{12} – главный коэффициент Пуассона ($E_1\mu_{21}=E_2\mu_{12}$)

Таблица П.3.5

Тканые полимерные композиционные материалы

| № | Материал | E_x , ГПа | E_y , ГПа | G_{xy} , ГПа | μ_{xy} |
|----|--------------------------|-------------|-------------|----------------|------------|
| 1 | стеклопластик | 46 | 18 | 4,5 | 0,2 |
| 2 | стеклопластик | 26,6 | 20 | 4,3 | 0,32 |
| 3 | стеклопластик | 30 | 25 | 6,1 | 0,37 |
| 4 | стеклопластик | 25 | 17 | 4,3 | 0,47 |
| 5 | стеклопластик | 25,0 | 29,8 | 4,46 | 0,52 |
| 6 | стеклопластик | 30,5 | 19,6 | 4,75 | 0,22 |
| 7 | стеклопластик | 33,6 | 9,3 | 6,3 | 0,48 |
| 8 | стеклопластик | 23,1 | 10,6 | 9,1 | 0,6 |
| 9 | стеклопластик | 14,5 | 14,5 | 10,5 | 0,48 |
| 10 | углепластик | 12 | 13,5 | 8,5 | 0,34 |
| 11 | углепластик | 64,7 | 64,7 | 4,5 | 0,652 |
| 12 | углепластик | 15,9 | 15,9 | 4,8 | 0,16 |
| 13 | углепластик | 154 | 37 | 7,9 | 0,35 |
| 14 | органоластик | 40,8 | 20,4 | 11,2 | 0,26 |
| 15 | органоластик | 25,6 | 22,3 | 12,7 | 0,24 |
| 16 | органоластик | 20,3 | 16,3 | 8,7 | 0,35 |
| 17 | органоластик (Kevlar 49) | 31 | 26 | 2,0 | 0,25 |
| 18 | органоластик (Kevlar 49) | 27,6 | 21,5 | 2,0 | 0,25 |
| 19 | органостеклопластик | 110 | 3,6 | 2,2 | 0,26 |
| 20 | боростеклоткань | 152 | 23 | 14 | 0,27 |
| 21 | боростеклоткань | 118 | 56 | 30 | 0,28 |
| 22 | боростеклоткань | 87 | 68 | 41 | 0,27 |
| 23 | боропластик | 86 | 85 | 40 | 0,29 |
| 24 | боропластик | 54 | 53 | 24 | 0,3 |
| 25 | боропластик | 18 | 18 | 55 | 0,848 |

Обозначения: E_x , E_y – модули упругости в продольном и поперечном направлениях, G_{xy} – модуль сдвига, μ_{xy} – коэффициент Пуассона ($E_x\mu_{yx}=E_y\mu_{xy}$)

Таблица П.3.6

Металлические композиционные материалы

| № | Материал | E_1 , ГПа | E_2 , ГПа | G_{12} , ГПа | μ_{12} |
|----|---------------|-------------|-------------|----------------|------------|
| 1 | бороалюминий | 250 | 130 | 60 | 0,33 |
| 2 | бороалюминий | 160 | 90 | 28 | 0,33 |
| 3 | бороалюминий | 65 | 40 | 15 | 0,33 |
| 4 | бороалюминий | 220 | 120 | 45 | 0,33 |
| 5 | бороалюминий | 93 | 50 | 18 | 0,33 |
| 6 | бороалюминий | 74 | 40 | 19 | 0,33 |
| 7 | бороалюминий | 136,7 | 77,9 | 28 | 0,33 |
| 8 | бороалюминий | 191,5 | 118,8 | 45 | 0,33 |
| 9 | бороалюминий | 245 | 139,1 | 53 | 0,33 |
| 10 | сталеалюминий | 72,8 | 39 | 17 | 0,33 |
| 11 | сталеалюминий | 89,7 | 47 | 21 | 0,33 |
| 12 | сталеалюминий | 143 | 75 | 29 | 0,33 |
| 13 | углеалюминий | 154 | 33 | 15 | 0,3 |
| 14 | углеалюминий | 130 | 37 | 12 | 0,3 |

Таблица П.3.7

*Лёгкие наполнители (сплошные и дискретные)
для трёхслойных конструкций*

| № | Материал | E_1 , ГПа | G_{12} , ГПа | μ | ρ , г/см ³ |
|---|---------------------------------------|-------------|----------------|-------|----------------------------|
| 1 | пенопласты ПХВ | 0,01-0,045 | 0,02-0,14 | 0,4 | 0,1-0,5 |
| 2 | пенопласты ФФ, ФК | 0,002-0,025 | 0,03-0,2 | 0,4 | 0,1-0,45 |
| 3 | пенопласты ПУ, ППУ | 0,002-0,028 | 0,03-0,25 | 0,4 | 0,1-0,5 |
| 4 | сотовый шестигранный (алюминиевый) | ≈ 0 | 0,05-0,25 | 0 | 0,03-0,8 |
| 5 | сотовый шестигранный (титановый) | ≈ 0 | 0,07-0,4 | 0 | 0,03-0,9 |
| 6 | сотовый шестигранный (стальной) | ≈ 0 | 0,12-0,75 | 0 | 0,04-1,0 |
| 7 | сотовый шестигранный (бумажный) | ≈ 0 | 0,04-0,2 | 0 | 0,025-0,2 |
| 8 | сотовый шестигранный (тканевый) | ≈ 0 | 0,08-0,4 | 0 | 0,03-0,3 |

Матрицы жесткости стержневых элементов

Матрица жесткости элемента $[K^e]$ имеет размерность (12×12) и является симметричной относительно главной диагонали. Ниже приводятся только ненулевые коэффициенты $K^e(i, j)$ для верхней треугольной части матрицы.

Коэффициенты матрицы жесткости прямолинейного стержневого элемента:

$$\begin{aligned} K^e(1,1) &= B_x/l, K^e(1,7) = -B_x/l, K^e(2,2) = 12D_z/l^3, K^e(2,6) = 6D_z/l^2, K^e(2,8) = -12D_z/l^3, \\ K^e(2,12) &= 6D_z/l^2, K^e(3,3) = 12D_y/l^3, K^e(3,5) = -6D_y/l^2, K^e(3,9) = -12D_y/l^3, K^e(3,11) = 6D_y/l^2, \\ K^e(4,4) &= D_x/l, K^e(4,10) = -D_x/l, K^e(5,5) = 4D_y/l, K^e(5,9) = 6D_y/l^2, K^e(5,11) = 2D_y/l, K^e(6,6) = 4D_z/l, \\ K^e(6,8) &= -6D_z/l^2, K^e(6,12) = 2D_z/l, K^e(7,7) = B_x/l, K^e(8,8) = 12D_z/l^3, K^e(8,12) = -6D_z/l^2, \\ K^e(9,9) &= 12D_y/l^3, K^e(9,11) = 6D_y/l^2, K^e(10,10) = D_x/l, K^e(11,11) = 4D_y/l, K^e(12,12) = 4D_z/l; \\ B_x &= EF_c, D_y = EJ_y, D_z = EJ_z, D_x = GJ_k. \end{aligned}$$

Коэффициенты матрицы жесткости криволинейного стержневого элемента ($R_c = \text{const}$):

$$\begin{aligned} K^e(1,1) &= 12D_z/l^3 + k_c^2 D_x/l, K^e(1,2) = -6k_c D_{xz}/l, K^e(1,3) = -12D_{xz}/l^2, K^e(1,4) = -6D_{xz}/l, \\ K^e(1,5) &= -k_c D_x/l - k_c^2 D_x/l, K^e(1,6) = -6D_z/l^2, K^e(1,7) = -12D_z/l^3 - k_c^2 D_x/l, K^e(1,8) = -6k_c D_{xz}/l, \\ K^e(1,9) &= 6D_{xz}/l^2, K^e(1,10) = -6D_{xz}/l, K^e(1,11) = k_c D_x/l + k_c D_x/l, K^e(1,12) = -6D_z/l^2, \\ K^e(2,2) &= a^2 B_y/4 + 3k_c^2 D_x/l, K^e(2,3) = k_c(6D_x/l^2 - aB_y/4), K^e(2,4) = 3k_c D_x/l - abB_y/4, \\ K^e(2,5) &= k_c^2 D_{xz}/l, K^e(2,6) = 3k_c D_{xz}, K^e(2,7) = 6k_c D_{xz}/l, K^e(2,8) = -a^2 B_y/4 + 3k_c^2 D_x/l, \\ K^e(2,9) &= -k_c(6D_x/l^2 + aB_y/4), K^e(2,10) = 3k_c D_x/l + abB_y/4, K^e(2,11) = -k_c^2 D_{xz}/l, K^e(2,12) = 3k_c D_{xz}, \\ K^e(3,3) &= 12D_x/l^3 + k_c^2 B_y/4, K^e(3,4) = 6D_x/l^2 + k_c b B_y/4, K^e(3,5) = 2k_c D_{xz}/l^2, K^e(3,6) = 6D_{xz}/l, \\ K^e(3,7) &= 6D_{xz}/l^2, K^e(3,8) = k_c(6D_x/l^2 + aB_y/4), K^e(3,9) = -12D_x/l^3 + k_c^2 B_y/4, \\ K^e(3,10) &= 6D_x/l^2 - k_c b B_y/4, K^e(3,11) = -2k_c D_{xz}/l^2, K^e(3,12) = 6D_{xz}/l, K^e(4,4) = 4D_x/l + b^2 B_y/4, \\ K^e(4,5) &= 2k_c D_{xz}/l, K^e(4,6) = 4D_{xz}/l, K^e(4,7) = 6D_{xz}/l, K^e(4,8) = 3k_c D_x/l + abB_y/4, \\ K^e(4,9) &= -K^e(3,10), K^e(4,10) = 2D_x/l - b^2 B_y/4, K^e(4,12) = 2D_{xz}/l, K^e(5,5) = 2bk_c D_z + D_x/l, \\ K^e(5,6) &= 2k_c D_{xz}/l, K^e(5,7) = K^e(1,11), K^e(5,8) = k_c^2 D_{xz}/l, K^e(5,9) = -2k_c D_{xz}/l^2, \\ K^e(5,11) &= bk_c D_z - D_x/l, K^e(6,6) = 4D_z/l, K^e(6,7) = 6D_z/l^2, K^e(6,8) = 3k_c D_{xz}, K^e(6,9) = -6D_{xz}/l, \\ K^e(6,10) &= 2D_{xz}/l, K^e(6,12) = 2D_z/l, K^e(7,7) = K^e(1,1), K^e(7,8) = 6k_c D_{xz}/l, K^e(7,9) = -12D_{xz}/l^2, \\ K^e(7,10) &= 6D_{xz}/l, K^e(7,11) = K^e(1,5), K^e(7,12) = 6D_z/l^2, K^e(8,8) = K^e(2,2), K^e(8,9) = -K^e(2,3), \\ K^e(8,10) &= K^e(2,4), K^e(8,11) = -k_c^2 D_{xz}/l, K^e(8,12) = 3k_c D_{xz}, K^e(9,9) = K^e(3,3), K^e(9,10) = -K^e(3,4), \\ K^e(9,11) &= 2k_c D_{xz}/l^2, K^e(9,12) = -6D_{xz}/l, K^e(10,10) = K^e(4,4), K^e(10,11) = -2k_c D_{xz}/l, \\ K^e(10,12) &= 4D_{xz}/l, K^e(11,11) = K^e(5,5), K^e(11,12) = -2k_c D_{xz}/l, K^e(12,12) = 4D_z/l; \\ k_c &= 1/R_c, b = k/l/6, a = 2(1 - 3b^2)/l, B_y = EF_c, D_x = EJ_x, D_z = EJ_z, D_{xz} = EJ_{xz}, D_k = GJ_k. \end{aligned}$$

Список литературы

1. Конструкционные материалы: Справочник / Под ред. Б.Н. Арзамасова. – М.: Машиностроение, 1990. 688 с.
2. Композиционные материалы: Справочник / В.В. Васильев, В.Д.Протасов, В.В. Болотин и др.; Под общ. ред. В.В. Васильева, Ю.М.Таринопольского. – М.: Машиностроение, 1990. 512 с.
3. Расчет трехслойных конструкций: Справочник / В.Н. Кобелев, Л.М. Коварский, С.И. Тимофеев. – М.: Машиностроение, 1984. 304 с.
4. Буланов И.М., Воробей В.В. Технология ракетных и аэрокосмических конструкций из композиционных материалов: Учеб. для вузов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998. 516 с.
5. Устинов В.А. Применение полимеров в современном автомобилестроении // Автомобильная промышленность США. Ч. I-III. 1993. №1. с.18 – 21; 1993. №2. С. 20 – 24; 1993. №3. С. 17 – 22.
6. Теория и практика технологий производства изделий из композиционных материалов и новых металлических сплавов – 21 век // Труды международной конференции 30 января – 2 февраля 2001. – М.: МГУ, 2001.
7. Прочность, устойчивость, колебания: Справочник. Т.2 / Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. 463с.
8. Скопинский В.Н., Захаров А.А. Соппротивление материалов. Часть 1: Учебное пособие – М.: МГИУ, 2001. 135с.
9. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1988. 272 с.
10. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: МИР, 1975. 541с.
11. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. – М.: МИР, 1984. 428с.
12. Розин Л.А. Стержневые системы как системы конечных элементов. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1976. 232с.
13. Розин Л.А. Вариационные постановки задач для упругих систем. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. 224с.
14. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: МИР, 1979. 392с.

15. Скопинский В.Н. Расчетный анализ плоского напряженного состояния на персональных компьютерах: Методическая разработка для самостоятельной работы студентов. – М.: МГИУ, 1998. 62с.