

ОПД.Р.03 СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА УСТОЙЧИВОСТЬ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Учебное пособие

Книга посвящена изложению основ теории устойчивости равновесия и движения механических систем. Рассмотрены постановка и методы решения задач устойчивости стержней, пластин и оболочек, вопросы изучения устойчивости движения по первому приближению и с помощью методов Ляпунова. Эти вопросы изложены в соответствии с учебной программой университетского курса «Устойчивость механических систем».

Учебное пособие рассчитано на студентов механических, машиностроительных и строительных специальностей, а также научных работников и аспирантов, занимающихся проблемами устойчивости состояния конструкций.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	5
1. Основные понятия теории упругой устойчивости	8
1.1. Неоднозначность состояний равновесия упругих систем	8
1.2. Признаки устойчивости равновесия консервативной системы.....	9
1.3. Точки бифуркации и критические нагрузки.....	12
1.4. Линеаризованные уравнения	13
2. Методы решения задач устойчивости.....	17
2.1. Полная потенциальная энергия упругого тела.....	17
2.2. Методы определения критических нагрузок.....	18
2.2.1 Статический метод	18
2.2.2. Энергетический метод	21
2.3. Метод Релея – Ритца	23
2.4. Метод Бубнова - Галеркина	25
2.5. Метод конечных разностей	26
3. Устойчивость прямолинейных стержней	28
3.1. Основное линеаризованное уравнение	28
3.2. Приближенные методы решения основного уравнения	32
3.3. Метод начальных параметров.....	33
3.4. Решение задач устойчивости стержней энергетическим методом	35
3.5. Действие осевых сил в пролете стержня.	37
3.6. Устойчивость составных стержней	43
3.7. Устойчивость упругих систем при	46
3.8. Закритические деформации стержней	51
3.9. Учет начальных искривлений оси стержня	55
3.10. Учет эксцентриситета нагрузки	58
3.11. Продольно – поперечный изгиб.....	59
3.12. Устойчивость стержней за пределами упругости.....	62
4. Устойчивость пластин	68
4.1. Постановка задачи и исходные зависимости	68
4.2. Основное линеаризованное уравнение.	72
4.3. Точные решения для прямоугольных пластин	76
4.4. Решение основного уравнения для круглых пластин.....	82
4.5. Приближенные решения основного уравнения	84
4.6. Энергетический критерий устойчивости в форме Брайена	87
4.7. Энергетический критерий устойчивости в форме Тимошенко.....	91
4.8. Формулировка критерия устойчивости через статически возможные усилия	95
4.9. Примеры применения энергетического критерия устойчивости	96
4.10. Закритическое поведение пластин	101
5. Устойчивость цилиндрических оболочек.....	104
5.1. Устойчивость кругового кольца	104
5.2. Основные исходные зависимости для цилиндрической оболочки.....	107
5.3. Устойчивость цилиндрической оболочки при осевом сжатии.....	113
5.4. Определение внешнего критического давления	117

6. Введение в общую теорию устойчивости движения.....	127
6.1. Определение устойчивости движения	127
6.2. Уравнения возмущенного движения.....	129
6.3. Функция Ляпунова.....	131
6.4. Теоремы второго метода Ляпунова.....	135
6.5. Построение функции Ляпунова.....	137
7. устойчивость параметрических систем	150
7.1. Параметрические колебания и резонансы в механических системах .	150
7.2. Устойчивость линейных систем с периодическими коэффициентами	151
7.3. Устойчивость решений уравнений Хилла и Матье	154
7.4. Динамическая устойчивость распределённых систем	158
7.4.1. Уравнения динамической устойчивости.....	159
7.4.2. Сведение к системам обыкновенных дифференциальных уравнений
.....	161
7.4.3. Динамическая устойчивость стержней	162
7.5.3. Флаттер цилиндрических оболочек.....	178
Список использованных источников	184

ВВЕДЕНИЕ

Устойчивостью называется способность механической системы сохранять первоначальную форму равновесия или движения при действии малых посторонних возмущений, чаще всего случайных. Устойчивость системы зависит от ее параметров, характера и величины действующих нагрузок и возмущений. При определенных условиях действие малейших посторонних возмущений может привести к изменению первоначальной формы равновесия. Это явление называется потерей устойчивости. Состояние системы считается устойчивой, если при всяком сколь угодно малом возмущении оно будет весьма мало отклоняться от исходного состояния. Если при указанных возмущениях система удаляется от исходного состояния равновесия или переходит в другое состояние равновесия, то исследуемое исходное состояние системы называется неустойчивым.

Определение устойчивости должно содержать три элемента:

1. Указание на форму равновесия или движения, устойчивость которой исследуется. Нельзя говорить об «устойчивости системы» вообще; можно говорить об устойчивости определенной формы равновесия или определенного движения.
2. Указание на то, по отношению к каким параметрам исследуется устойчивость. Движение может быть устойчиво по отношению к одной группе параметров и быть устойчиво по отношению к одной группе параметров и быть неустойчиво по отношению к другой.
3. Указание класса и величины возмущающих воздействий, вызывающих отклонение от начального состояния равновесия или движения.

Теория устойчивости имеет многочисленные приложения для расчетов механических систем. Однако в традиционно сложившихся учебных программах большинства машиностроительных специальностей вопросами устойчивости равновесия и движения конструкций не уделено должного внимания. Инженер в основном знаком с расчетом на устойчивость только по небольшому разделу устойчивости стержней из общего курса сопротивления материалов.

Улучшение прочностных характеристик традиционных конструкционных материалов, создание и использование новых высокопрочных материалов привело к широкому распространению легких и экономичных конструкций в современном машиностроении. Роль расчетов на устойчивость в проектировании и рациональной эксплуатации таких конструкций существенно возрастает.

Задача об устойчивости механических систем является чрезвычайно важной и в практическом отношении. В природе могут длительно наблюдаться лишь устойчивые явления и процессы и только они реализуемы и имеют практическое значение. Потеря устойчивости в большинстве случаев эквивалентна потере работоспособности конструкций. Поэтому весьма важно определение условий, при которых данное состояние или движение устойчиво.

Учитывая актуальность и важность проблемы устойчивости в последнее время в учебные планы наукоёмких инженерных и механических специальностей (например, «Динамика и прочность машин») включен курс «Устойчивость механических систем». Данное учебное пособие соответствует программе этого курса.

У нас в стране и за рубежом проводится большое количество исследований, написаны множество монографий, диссертаций и научных статей по проблеме устойчивости механических систем. Однако классических учебников по этому курсу нет как у нас, так и в России. Имеющийся материал разбросан по многочисленным монографиям, написанным на основе научных приоритетов авторов, а также по различным спецкурсам, посвященным устойчивости упругих систем или устойчивости движения. Это не только неудобно для студентов, но и теряется логическая связь между разделами курса. Все это явилось основанием для написания данного учебного пособия.

В настоящей работе систематически изложены вопросы устойчивости равновесия упругих систем, а также рассмотрены вопросы устойчивости движения механических систем. Особое внимание уделено формулировке критериев упругой устойчивости, выводу основных соотношений, постановке и методам решения (как точных, так и приближенных) задач устойчивости стержней, пластин и оболочек, применение методов Ляпунова к исследованию устойчивости движения упругих систем. В учебное пособие включены результаты последних исследований по теории упругой устойчивости элементов конструкции, в том числе и собственных: развитие вариационных и энергетических методов, вероятностный подход к проблемам устойчивости; динамическая устойчивость упругих систем, исследование дивергенции и флаттера пластин и оболочек.

Учебное пособие состоит из шести глав. Первые две главы являются вводными. В них приведены основные понятия теории устойчивости, признаки и критерии упругой устойчивости, обоснованы основные соотношения и изложены различные подходы и методы решения задач упругой устойчивости.

В третьей главе рассматриваются разнообразные задачи устойчивости стержней, на примере которых показаны применения различных критериев и методов определения критических нагрузок, изложенные в вводной части. Исследованы закритические деформации стержней, устойчивость за пределом упругости, влияние случайных факторов на устойчивость конструкций, вопросы комбинированного нагружения.

Четвертая глава посвящена устойчивости пластин, в том числе вопросам термоустойчивости круглых и кольцевых пластин, приведены точные и приближенные решения задач. Изложены различные варианты энергетического критерия устойчивости (в форме Брайена, в форме Тимошенко, через статически возможные усилия) с анализом области их эффективного применения.

В пятой главе рассмотрено устойчивость оболочек, выведены уравнения упругой устойчивости по различным теориям оболочек: безмоментная, полубезмоментная теория Власова, с учетом моментного напряженного состоя-

ния. Приведены решения задач устойчивости цилиндрических оболочек при осевом сжатии и радиальном давлении. На основе полубезмоментной теории рассмотрена устойчивость подкрепленных цилиндрических оболочек.

Шестая глава посвящена изучению устойчивости движения: приведены теоремы Ляпунова об устойчивости движения, изложены критерий и методы исследования устойчивости. Уделено большое внимание изучению устойчивости движения по первому приближению и применению второго метода Ляпунова к анализу устойчивости распределенных систем.

В седьмой главе дана теория параметрического резонанса и исследована динамическая устойчивость упругих систем, а также дивергенция и флаттер пластин и цилиндрических оболочек.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ УПРУГОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

1.1. Неоднозначность состояний равновесия упругих систем

При одних и тех же внешних нагрузках и условиях закрепления упругая система может иметь несколько состояний равновесия. Рассмотрим жесткий стержень длиной l , один конец которого закреплен в упругом шарнире, а другой – нагружен вертикальной силой P , сохраняющей свое направление при отклонениях стержня от исходного вертикального положения (рис.1.1.а).

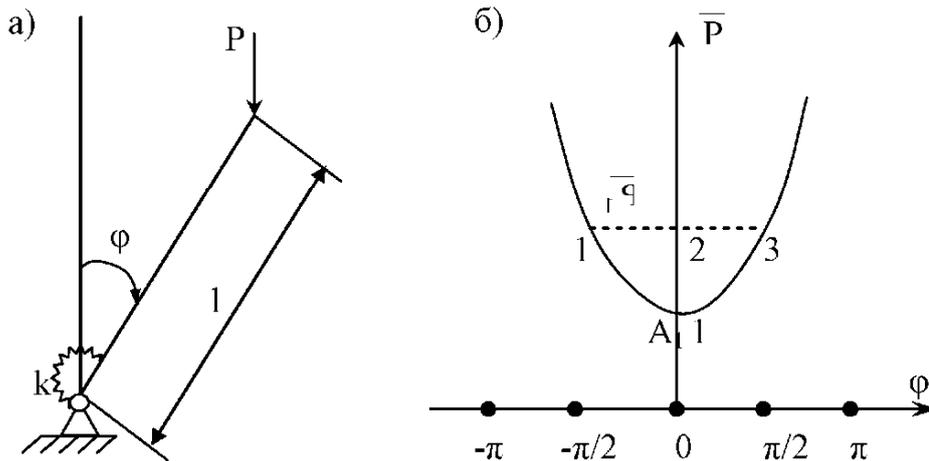


Рисунок 1.1

Запишем уравнение равновесия стержня в отклоненном положении в виде суммы моментов относительно шарнира:

$$Pl \sin \varphi = k\varphi, \quad (1.1)$$

где k – жесткость упругого шарнира.

Это уравнение имеет два независимых решения:

$$1) \varphi=0; 2) P = k\varphi / l \sin \varphi .$$

Эти решения при $|\varphi| < \pi$ показаны на рис.1.1б, где по оси ординат отложена безразмерная сила $\bar{P} = Pl/k$. Как видим, при $\bar{P} < 1$ существует одно решение: $\varphi=0$. При $\bar{P} > 1$ становятся возможными и другие положения равновесия, соответствующие $\varphi \neq 0$. Так, при $\bar{P} = \bar{P}_1$ возможны три различных положения равновесия, соответствующие точкам 1, 2, 3.

Рассмотрим жесткий стержень длиной l , один конец которого шарнирно закреплен, а на другом конце имеется пружина жесткости c , сохраняющая при отклонениях горизонтальное положение (рис 1.2)

Составим уравнение равновесия стержня

$$Pl \sin \varphi = cl \sin \varphi \cdot \cos \varphi. \quad (1.2)$$

Это уравнение имеет несколько независимых решений:

$$1) \varphi = \pi \cdot n, \text{ где } n=0, 1, \dots; 2) P = cl \cos \varphi .$$

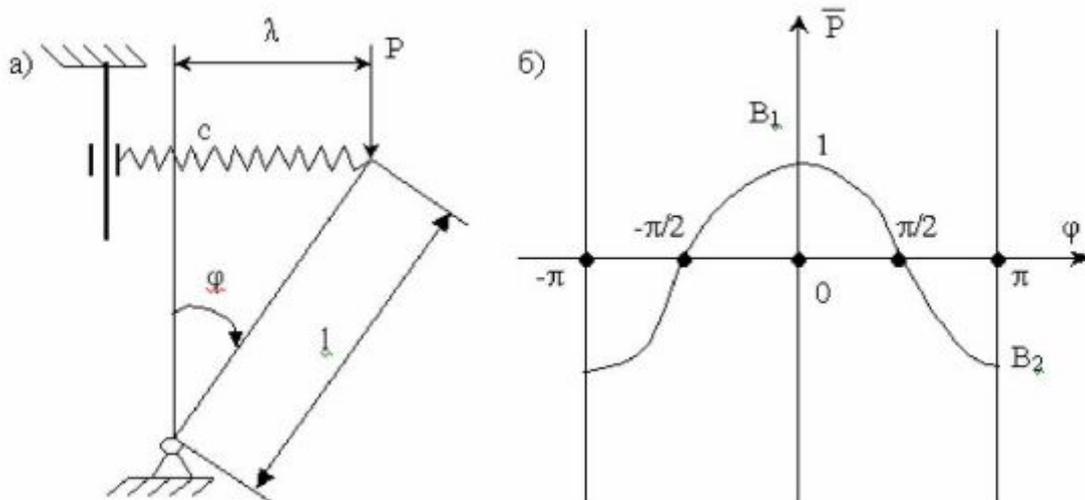


Рисунок 1.2

Эти решения показаны на рис.1.2б, где $\bar{P} = P / cl$. И в этом случае при одной и той же силе система может иметь несколько различных положений равновесия. Так, при $\bar{P} = 0$ возможны четыре различных положения равновесия:

$$\varphi = 0; \pm\pi/2; \pi.$$

Важно подчеркнуть, что неоднозначность положений равновесия может быть обнаружена только в том случае, когда уравнения равновесия составляются для отклоненного положения системы. Напомним, что в линейной теории упругости, как и в курсе сопротивления материалов уравнения равновесия составляются для недеформированной системы («принцип неизменности начальных размеров»). В этом случае обнаруживается только исходная форма равновесия.

В задачу теории упругой устойчивости входит определение возможных различных положений равновесия, выяснение того, какие из них устойчивы, а какие нет.

1.2. Признаки устойчивости равновесия консервативной системы

Консервативными называются упругие системы, нагруженные силами, имеющими потенциал. Эти силы обладают двумя свойствами:

1. величина и направление каждой силы не меняется при деформации системы;
2. работа силы на некотором перемещении системы не зависит от пути следования силы, а зависит только от начального и конечного ее положения.

Известно, что механическая система находится в равновесии, если ее полная потенциальная энергия, то есть энергия внутренних и внешних сил, принимает экстремальные значения. Согласно теореме Лагранжа-Дирехле положение равновесия является устойчивым, если полная потенциальная энергия принимает минимальное значение.

Полная потенциальная энергия упругой системы складывается из внутренней энергии деформации U и потенциала внешних сил:

$$\mathcal{E} = U + \Pi. \quad (1.3)$$

Потенциал внешних сил равен взятому с обратным знаком произведению силы на перемещение точки ее приложения в направлении силы.

Для исследования устойчивости следует составить выражение для полной потенциальной энергии системы в отклоненном состоянии с конечными перемещениями, которая зависит от обобщенных координат системы q_i (степеней свободы системы). Для системы с одной степенью свободы условие равновесия имеет вид:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dq} = 0. \quad (1.4)$$

Если при этом
$$\frac{d^n \mathcal{E}}{dq^n} > 0, \quad (1.5)$$

где n – порядок низшей, отличной от нуля, производной, то равновесие устойчиво.

Исследуем устойчивость равновесия системы, показанной на рис. 1.1:

$$U = 0,5k\varphi^2, \Pi = -Pl(1 - \cos \varphi), \mathcal{E} = 0,5k\varphi^2 - Pl(1 - \cos \varphi).$$

Дифференцируя это выражение по φ имеем

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\varphi} = k\varphi - Pl \sin \varphi, \quad (a)$$

$$\frac{d^2 \mathcal{E}}{d\varphi^2} = k - Pl \cos \varphi. \quad (б)$$

Приравняв выражение (а) нулю, получим уравнение равновесия (1). Исследуя знак второй производной, можно установить, какие из найденных положений равновесия устойчивы. Подставляя первое решение уравнения (1) в (б), получим:

$$\mathcal{E}'' = k - Pl.$$

При $P < k/l$ $\mathcal{E}'' > 0$ и вертикальное положение стержня устойчиво, а при $P > k/l$ $\mathcal{E}'' < 0$ и вертикальное положение неустойчиво. При $P = k/l$ $\mathcal{E}'' = 0$. Поэтому надо найти высшие производные:

при $\varphi = 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}''' &= Pl \sin \varphi = 0, \\ \mathcal{E}^{IV} &= Pl \cos \varphi > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, в этой точке (точка A_1 на рис. 1.1 б) полная потенциальная энергия минимальна и вертикальное положение стержня устойчиво.

Для исследования устойчивости стержня в отклоненном положении подставим второе решение уравнения (1) в выражение (б):

$$\frac{d^2 \mathcal{E}}{d\varphi^2} = k \left(1 - \frac{\varphi}{\operatorname{tg} \varphi}\right).$$

При $|\varphi| < \pi$, $\varphi < \operatorname{tg} \varphi$, $\mathcal{E}'' > 0$, следовательно, отклоненное положение стержня, которое возможно при $P > k/l$, всегда устойчиво. Устойчивые решения на рисунке 1.3 показаны сплошными линиями.

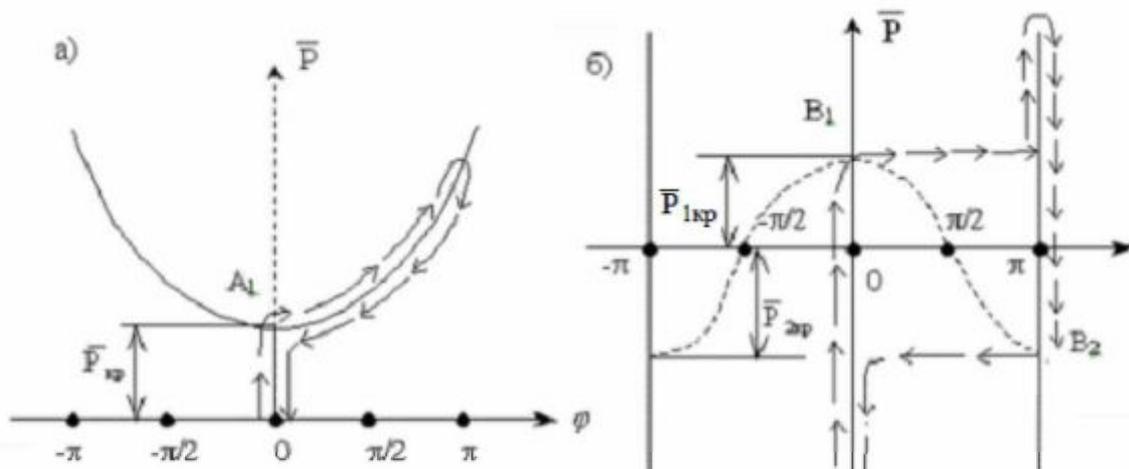


Рисунок 1.3

Проведем исследование устойчивости положений равновесия стержня, показанного на рисунке 1.2:

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} C \lambda^2 = \frac{1}{2} C (l \sin \varphi)^2, \quad P = -Pl(1 - \cos \varphi), \\
 \mathcal{E} &= 0,5Cl^2 \sin^2 \varphi - Pl(1 - \cos \varphi), \\
 \mathcal{E}'' &= Cl^2 \cos 2\varphi - Pl \cos \varphi.
 \end{aligned}
 \tag{в}$$

Подставляя во вторую производную решение $\varphi=0$, получаем:

$$\mathcal{E}'' = Cl^2 - Pl.$$

При $P < Cl$, $\mathcal{E}'' > 0$ и вертикальное положение устойчиво. При $P > Cl$, $\mathcal{E}'' < 0$ и это положение неустойчиво. По знаку четвертой производной легко определить, что при $\varphi=0$ и $P=Cl$ (точка B_1 на рис. 1.3б) положение стержня неустойчиво.

Подставляя в выражение (в) решение $\varphi=\pi$, получаем:

$$\mathcal{E}'' = Cl^2 + Pl.$$

Отсюда заключаем, что при $P > -Cl$ опрокинутое положение стержня устойчиво. Сама точка B_2 также неустойчива.

Подставим теперь во вторую производную второе решение уравнения (2). Тогда получим:

$$\mathcal{E}'' = Cl^2 \cos 2\varphi - Cl^2 \cos^2 \varphi = -Cl^2 \sin^2 \varphi < 0$$

и отклоненное положение равновесия неустойчиво.

Устойчивые решения на рис 1.3 б показаны сплошными линиями.

В системах с n степенями свободы потенциальная энергия зависит от n обобщенных координат:

$$\mathcal{E} = f(q_1, q_2 \dots q_n).$$

Условия минимума \mathcal{E} в этом случае находятся по общим правилам математического анализа, что, вообще говоря, представляет сложную задачу.

Если обобщенные координаты, отсчитываемые от исследуемого положения равновесия, считать малыми величинами, то, разлагая энергию в ряд по степеням малых параметров, получим:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q_i} \right)_0 q_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 q_i q_j + \dots$$

Принимая в равновесном положении $\mathcal{E}_0=0$, учитывая, что по условиям равновесия первые производные равны нулю, и пренебрегая малыми высших порядков, имеем:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} q_i q_j,$$

где

$$C_{ij} = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0.$$

Таким образом, потенциальная энергия является квадратичной формой от обобщенных координат.

Для того чтобы исследуемое положение равновесия было устойчиво необходимо, чтобы квадратичная форма была положительно определенной. Для этого необходимо и достаточно, чтобы дискриминант потенциальной энергии и его главные миноры были положительны, то есть

$$C_{11} > 0, \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \cdot & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{vmatrix} > 0. \quad (1.8)$$

Если хотя бы одно условие не выполнено, то требуются дополнительные исследования.

1.3. Точки бифуркации и критические нагрузки

Для стержня, показанного на рис 1.1 исходное вертикальное положение остается устойчивым до тех пор, пока сила $P \leq k l$. При малейшем превышении этого значения вертикальное положение становится неустойчивым. Так как вокруг точки A_1 существует другое устойчивое положение, то стержень перейдет в это новое отклоненное положение равновесия. На рис. 1.3.a поведение этой системы при нагружении схематически показано стрелками. Для этой системы характерной является точка A_1 , где пересекаются различные решения. Точки, в которых решение расщепляется на две ветви, называются точками бифуркации. Точки на диаграмме нагрузка-перемещение, при переходе через которые исходное состояние равновесия перестаёт быть устойчивым будем называть критическими точками, а соответствующие им нагрузки - критическими нагрузками. Критическая нагрузка – это наибольшая на-

грузка, до которой система сохраняет первоначальное устойчивое положение равновесия.

Система на рис. 1.2 ведет себя качественно иначе. Исходное вертикальное положения устойчиво до тех пор, пока $P < P_{кр} - C l$. Точка бифуркации B_1 и является критической точкой, поскольку при переходе через нее устойчивое исходное положение становится неустойчивым. Но в окрестности точки B_1 нет никаких новых устойчивых положений равновесия. Поэтому потеря устойчивости сопровождается скачкообразным переходом в новое устойчивое положение равновесия (стержень опрокидывается). Поведение системы на рис. 1.3 б показано стрелками.

При разгрузке эти две системы ведут себя по-разному. При уменьшении нагрузки первая система плавно переходит из отклоненного положения равновесия в вертикальное положение. Вторая система проходит через новую точку бифуркации B_2 , где становится неустойчивым опрокинутое положение равновесия. При достижении точки B_2 система возвращается в исходное положение путем перескока. В таких случаях точку B_1 называют верхней критической нагрузкой. Нагрузку, соответствующую точке B_2 называют нижней критической нагрузкой.

Таким образом, встречаются критические точки бифуркации двух типов. В критической точке бифуркации первого типа исходная устойчивая форма равновесия сменяется другой устойчивой формой равновесия, причем точка бифуркации соответствует устойчивому равновесию (точка A_1 на рис.1.3а). В критической точке бифуркации II типа исходная устойчивая форма равновесия сменяется другой неустойчивой формой равновесия, причем точка бифуркации относится к неустойчивому равновесию (точка B_1 на рис. 1.3б). Критические точки первого типа характерны для задач устойчивости упругих стержней и пластин, критические точки второго типа – для задач устойчивости тонких упругих оболочек.

1.4. Линеаризованные уравнения

В рассмотренных выше простейших примерах легко составить и точно решить полные нелинейные уравнения. Такой анализ дает исчерпывающую информацию о всех возможных устойчивых и неустойчивых положениях равновесия. Но в большинстве практически важных задач получение решений нелинейных уравнений невозможно. Поэтому приходится искать приближенные пути исследования устойчивости.

При решении задач упругой устойчивости центральное место занимает определение критических точек бифуркации и критических нагрузок. Но их можно найти с помощью однородных линеаризованных уравнений, минуя решение нелинейных уравнений.

Пусть известна одна какая-то форма равновесия и нужно найти точки бифуркации этой формы. Для этого достаточно найти условия существования других форм равновесия, отличных от исходной, но бесконечно к ней

Для системы с распределенными параметрами, которую можно трактовать как систему с бесконечным числом степеней свободы, линеаризация условий равновесия вблизи исходного положения равновесия приводит к однородным дифференциальным уравнениям. Их решение дает бесконечное число критических нагрузок. Обычно нас интересует их наименьшее значение.

Рассмотрим шарнирно опертый стержень постоянной жесткости, сжатый силой P (рис.1.4).

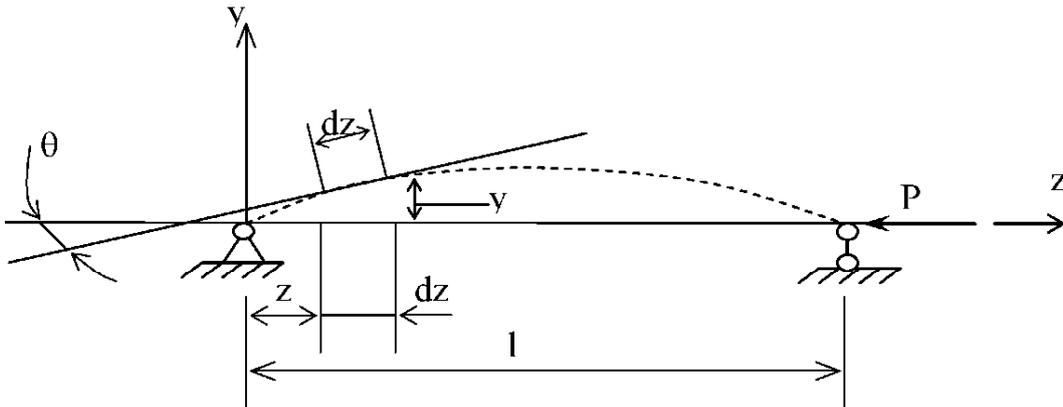


Рисунок 1.4

Найдем условия существования искривленной формы равновесия, бесконечно близких к исходной прямолинейной форме равновесия. Из условия равновесия в искривленном состоянии можно записать

$$M + Py = 0,$$

где

$$M = EI_{\min} \frac{1}{\rho} = EI_{\min} \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}}.$$

Учитывая только линейные члены и обозначая $k^2 = P / EI_{\min}$, получим линейное однородное уравнение

$$y'' + k^2 y = 0. \quad (1.11)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$y = A \sin kz + B \cos kz.$$

Оно должно удовлетворять граничным условиям задачи:

$$1) y(0) = 0; \quad 2) y(l) = 0.$$

Из граничных условий получаем характеристическое уравнение

$$\sin kl = 0.$$

Отсюда получаем множество критических нагрузок и форм равновесия, определенных с точностью до масштаба

$$P_n = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l} n^2, \quad y = A \sin \frac{\pi n z}{l}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Наименьшее значение критической силы $P_{кр} = \pi^2 EI_{\min} / l^2$.

Таким образом, однородные линеаризованные уравнения дают возможность находить критические нагрузки и с точностью до масштаба определять формы потери устойчивости в окрестностях точек бифуркации.

2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ

2.1. Полная потенциальная энергия упругого тела

Пусть к закрепленному неподвижно упругому телу приложена система внешних «мертвых» сил. Потенциальная энергия деформации линейно упругого тела равна

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dV, \quad (2.1)$$

где V – объем тела.

Напряжения и деформации связаны законом Гука:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] & \gamma_{xy} &= \tau_{xy} / G; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] & \gamma_{yz} &= \tau_{yz} / G; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] & \gamma_{xz} &= \tau_{xz} / G. \end{aligned} \quad (2.2)$$

По другому закон Гука можно записать так

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_x; & \sigma_y &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_y; & \sigma_z &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_z; \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}; & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}; & \tau_{xz} &= G\gamma_{xz}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ – объемная деформация;

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \quad \text{-постоянные Ляме.}$$

Соотношения (2) позволяют представить выражение (1) в виде

$$U = G \int_V \left[\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{\nu}{1-2\nu} \theta^2 + \frac{1}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2) \right] dV. \quad (2.4)$$

Для плоского напряженного состояния ($\sigma_z=0$, $\tau_{xz}=0$, $\tau_{yz}=0$)

$$U = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_V \left[\varepsilon_x^2 + 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + 0,5(1-\nu)\gamma_{xy}^2 \right] dV. \quad (2.5)$$

Компоненты деформации можно выразить через перемещения точек тела по соотношениям линейной теории упругости.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial u}{\partial y}; & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Подставив эти зависимости в формулу (4), можно получить выражение для энергии деформаций тела в виде квадратичного положительно определенно-го функционала от перемещений.

Потенциал мертвых объемных производных и поверхностных p сил равен

$$\Pi = - \int_V (F_x u + F_y v + F_z w) dV - \int_{S_1} (p_x u + p_y v + p_z w) dS, \quad (2.7)$$

где S_1 – часть поверхности тела, к которой приложены поверхностные силы. Знаки минус перед интегралами соответствуют тому случаю, когда направление сил и перемещений совпадают. Следовательно, с ростом перемещений потенциал внешних сил уменьшается.

Условие стационарности (экстремума) полной потенциальной энергии (условие равновесия) можно записать в виде вариационного уравнения Лагранжа:

$$\delta \mathcal{E} = \delta U - \delta \Pi = 0. \quad (2.8)$$

Для того, чтобы состояние равновесия было устойчиво, кроме этого должно выполняться условие

$$\Delta \mathcal{E} > 0 \quad (2.9)$$

при любых возможных отклонениях системы от положения равновесия. Отсюда следует условие положительной определенности второй вариации полной энергии системы

$$\delta^2 \mathcal{E} > 0. \quad (2.10)$$

Из вариационного уравнения (8) можно получать дифференциальные уравнения равновесия тела и граничные условия, которые могут быть заданы на поверхности тела.

2.2. Методы определения критических нагрузок

Критическими называются нагрузки на границе перехода системы из устойчивого состояния равновесия в неустойчивое. Для определения критических нагрузок применяется статический, энергетический и динамический метод.

2.2.1 Статический метод

Исследуемой системе задается отклоненная форма равновесия, совпадающая по характеру перемещений с ожидаемой новой формой равновесия после потери устойчивости, и определяются значения нагрузок, способных удерживать систему в новой форме равновесия. Обычно считают, что отклоненная форма равновесия бесконечно близка к исходной, а координаты граничных условий принимаются по исходному состоянию. Определенные таким образом нагрузки считаются критическими, соответствующими безразличному равновесию.

Статический метод пригоден лишь для консервативных сил. Примерами статических уравнений являются уравнения (1.1) и (1.2). Из этих уравнений при $\varphi \rightarrow 0$ получаем значения критических нагрузок:

рис.1.1 $-P_{кр} = k/l$; рис. 1.2 $-P_{кр} = C \cdot l$.

Статический метод в зависимости от способа задания отклоненной формы может иметь несколько разновидностей. Отклоненная форма равновесия для упругого тела в общем случае определяется неизвестной непрерывной функцией, описываемой дифференциальным уравнением. Из этого уравнения (чаще всего линейаризованного) предельным переходом определяются критические нагрузки. При этом получается бесконечное число критических нагрузок, из которых практический интерес представляет наименьшее значение. Примером такого подхода является решение задачи Эйлера об определении критической силы шарнирно опертого стержня.

Иногда отклоненная форма равновесия задается перемещениями конечного числа точек, в силу чего получается система алгебраических уравнений, решение которых дает несколько значений критических нагрузок, из которых выбирают меньшее значение. В тех случаях, когда принимаемое в расчете число степеней свободы меньше действительного, способ становится приближенным. Уравнения равновесия в этом случае являются алгебраическими и имеют вид (1.9), а уравнение для определения критических нагрузок – вид (1.10).

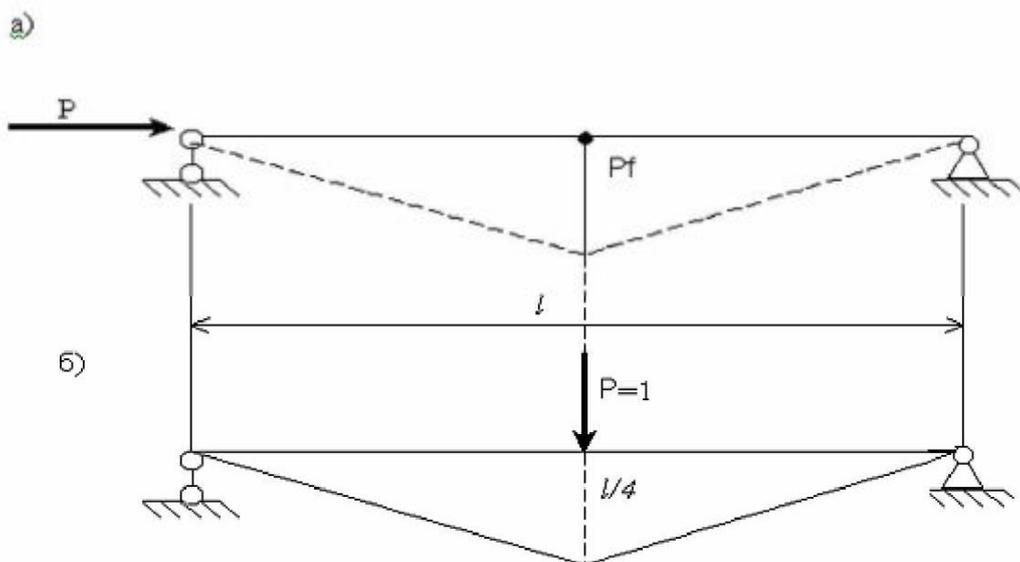


Рисунок 2.1

Применение этого метода покажем на примере задачи Эйлера. Зададим стержню бесконечно малое перемещение, которое сначала будем определять одним параметром – прогибом по середине пролета f (рис.2.1 а), но ординаты будут увеличены в P раз. Перемножением эпюр по способу Верещагина получаем:

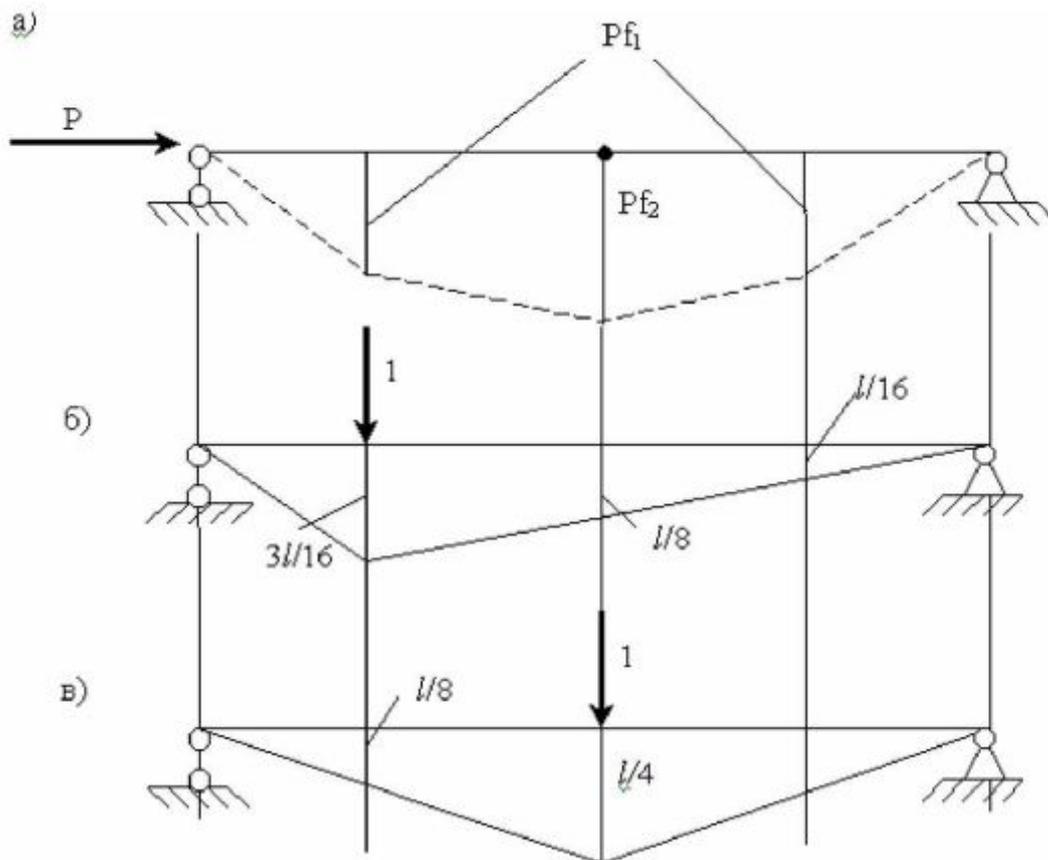


Рисунок 2.2

$$EIf = 2 \cdot \frac{1}{2} Pf \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{4}$$

Отсюда находим $P_{кр} = 12EI / l^2$.

Зададим теперь прогиб стержня двумя параметрами – прогибами в четверти и середине пролета f_1 и f_2 (рис. 2.2). Эпюру изгибающих моментов приближенно представим многоугольником (рис. 2.2а). Перемножая соответствующие эпюры с применением «правила трапеции», можем записать

$$EIf_1 = Pf_1 \frac{l}{8} \frac{2}{3} \left(\frac{3l}{16} + \frac{l}{16} \right) + \frac{Pl}{24} \left(2f_1 \frac{3l}{16} + 2f_2 \frac{l}{8} + f_1 \frac{l}{8} + f_2 \frac{3l}{16} + 2f_2 \frac{l}{8} + 2f_1 \frac{l}{16} + f_2 \frac{l}{16} + f_1 \frac{l}{8} \right);$$

$$EIf_2 = 2 \left[Pf_1 \frac{l}{8} \frac{2}{3} \frac{l}{8} + \frac{Pl}{24} \left(2f_1 \frac{l}{8} + 2f_2 \frac{l}{4} + f_1 \frac{l}{4} + f_2 \frac{l}{8} \right) \right].$$

После упрощений имеем:

$$(5Pl^2 - 96EI)f_1 + 3Pl^2 f_2 = 0;$$

$$6Pl^2 f_1 + (5Pl^2 - 96EI)f_2 = 0.$$

Приравняв нулю определитель этой системы, получим:

$$\lambda^2 - 10\lambda + 7 = 0,$$

где

$$\lambda = 96EI / Pl^2.$$

Наибольший корень этого уравнения равен 9,24. Тогда наименьшая критическая сила:

$$P_{kp} = \frac{96EI}{9,24l^2} = 10,39 \frac{EI}{l^2},$$

что ближе к точному значению $(9,87EI/l^2)$, чем предыдущий результат.

2.2.2. Энергетический метод

Метод основан на анализе полной энергии системы или приращения энергии в возможном отклоненном состоянии равновесия. Системе задается бесконечно малое отклонение от исходного состояния равновесия. Определяется работа внешних сил при этом отклонении δW и приращение потенциальной энергии деформации δU . В безразличном состоянии равновесия приращение полной потенциальной энергии равно нулю, откуда следует, что

$$\delta U = -\delta \Pi = \delta W. \quad (2.11)$$

Отсюда определяется критическая нагрузка, как наименьшая нагрузка, при которой возможны отклонения от исходного состояния, приводящие к $\Delta \mathcal{E} = 0$.

Вновь рассмотрим задачу Эйлера (рис. 1.4). Возьмем элемент стержня dz . Сближение концов этого элемента определяется как разность между длиной dz и проекцией изогнутой линии длиной dz на первоначальную ось стержня

$$\Delta(dz) = dz - dz \cos \theta,$$

где θ — угол поворота рассматриваемого сечения.

Учитывая, что θ мал, и раскладывая косинус в ряд Тейлора, получаем

$$\Delta(dz) = dz \cdot \theta^2 / 2 = 0,5(y')^2 dz.$$

Тогда сближение концов стержня и работа внешних сил равны:

$$\Delta l = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dz, \quad \delta W = P \Delta l. \quad (2.12)$$

Приращение потенциальной энергии в результате изгиба стержня:

$$\delta U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dz = \frac{1}{2} \int_0^l EI (y'')^2 dz. \quad (2.13)$$

Подставляя выражения (12) и (13) в уравнение (11), получаем:

$$P_{kp} = \frac{\int_0^l EI (y'')^2 dz}{\int_0^l (y')^2 dz}. \quad (2.14)$$

Функция y остается неизвестной до тех пор, пока не решено дифференциальное уравнение упругой линии. Однако ею можно задаться приближенно. При этом погрешность в форме упругой линии мало сказывается на величине критической нагрузки, если выполняются условия закрепления стержня. Чем точнее задана форма упругой линии, тем меньше погрешность формулы (14).

Если отклоненную форму трактовать не как любую возможную, а как форму изгиба, при которой имеет место равновесие между внешними и внутренними силами, то справедливо равенство

$$Py = M = EIy''.$$

Следовательно,

$$\delta U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{P^2 y^2}{EI} dz. \quad (2.15)$$

В этом случае равенство (11), которое надо понимать не как условие перехода из устойчивого состояния в неустойчивое, а как условие равенства работы внешних сил потенциальной энергии деформации, даёт следующую критическую силу

$$P_{кр} = \int_0^l (y')^2 dz : \int_0^l y^2 dz / EI. \quad (2.16)$$

Так как общее очертание упругой линии угадывается более точно, чем приближенные значения вторых производных, то формула (16) даёт более точные значения критической силы, чем формула (14).

Если в качестве y принять форму статического прогиба:

$$y = f \sin(\pi z / l),$$

то формулы (14) и (16) дают точное значение критической силы:

$$P_{кр} = 9,87 EI / l^2.$$

Если примем

$$y = fz(l - z),$$

то

$$\int_0^l (y')^2 dz = \int_0^l f^2 (l - 2z)^2 dz = f^2 l^3 / 3; \quad \int_0^l (y'')^2 dz = 4f^2 l.$$

По формуле (14) теперь имеем $P_{кр} = 12EI / l^2$.

Если пользоваться формулой (16), то имеем:

$$\int_0^l y^2 \frac{dz}{EI} = f^2 l^5 / 30EI; \quad P_{кр} = 10EI / l^2.$$

Зададим далее кривую в виде:

$$y = f(3z/l - 4z^3/l^3),$$

которая удовлетворяет не только условиям закрепления стержня, но условию отсутствия момента при $z=0$ и равенству нулю угла поворота при $z=l/2$. В этом случае имеем:

$$y' = f(3/l - 12z^2/l^3); \quad y'' = -f24z/l^3;$$

$$\int_0^l y^2 dz / EI = 17f^2 l / 35EI;$$

$$\int_0^l (y')^2 dz = 24f^2 / 5l; \quad \int_0^l (y'')^2 dz = 48f^2 / l^3.$$

Подставляя все в формулы (14) и (16), получаем, соответственно:

$$P_{кр} = 10EI / l^2 \text{ и } P_{кр} = 9,88EI / l^2.$$

2.2.3. Динамический метод

Общим методом исследования устойчивости является динамический метод, который применим и к неконсервативным системам. Согласно этому методу исследуется движение системы вблизи положения равновесия и ее реакция на малые возмущения. Для исследования устойчивости «в малом» уравнение движения линеаризуется и применяются критерий устойчивости по Ляпунову. Равновесие устойчиво если движение будет колебательным с затуханием.

Если, например, низшая частота собственных колебаний положительна, то равновесие устойчиво, если она равна нулю, то имеет место критическое состояние, и если она мнимая величина, то равновесие неустойчивое. Поэтому критическую нагрузку можно определить как минимальную нагрузку, при которой обращается в ноль первая частота собственных колебаний системы.

Составим уравнение движения для стержня, показанного на рисунке 1.1:

$$I_m \ddot{\varphi} = Pl \sin \varphi - k\varphi,$$

где I_m – момент инерции массы стержня относительно опоры. Линеаризуя это уравнение ($\sin \varphi \approx \varphi$), получаем:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad \omega_0^2 = (k - Pl) / I_m,$$

где ω_0 – частота собственных колебаний.

Отсюда, система устойчива при $P < k/l$ ($\omega_0 > 0$). Критическая сила равна

$$P_{кр} = k/l \quad (\omega_0 = 0).$$

2.3. Метод Релея – Ритца

Метод Релея-Ритца является универсальным методом приближенного решения основной задачи вариационного исчисления – задачи определения экстремумов или стационарных значений функционалов. Сущность его состоит в замене задачи поиска экстремумов функционалов более простой задачей поиска экстремумов функций нескольких переменных. Схему применения метода рассмотрим на примере задачи об устойчивости стержня, которая выбрана только для наглядности изложения и все этапы ее решения, рассуждения и выводы носят общий характер.

Ранее было показано, что при изгибе стержня приращения полной потенциальной энергии определяется выражением:

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_0^l [EI(y'')^2 - P(y')^2] dz. \quad (2.17)$$

Функцию прогиба зададим в виде ряда

$$y(z) = \sum_{i=1}^n c_i f_i(z), \quad (2.18)$$

где c_i – свободные независимые параметры; $f_i(z)$ – допустимые функции задачи, то есть в этом случае дважды дифференцируемые функции, удовлетворяющие геометрическим граничным условиям.

Подставив ряд (18) в выражение (17) и выполнив необходимые операции дифференцирования и интегрирования, преобразуем функционал энергии в функцию n независимых переменных c_i и параметра нагрузки P :

$$\Delta \mathcal{E} = \Phi(c_1, c_2, \dots, c_n, P). \quad (2.19)$$

Необходимое условие стационарности функции Φ сводится к системе n линейных однородных алгебраических уравнений относительно параметров c_i :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.20)$$

В матричной записи эта система имеет вид:

$$A \cdot C - P \cdot B \cdot C = 0, \quad (2.21)$$

где

$$a_{ij} = \int_0^l EI f_i'' f_j'' dz; \quad b_{ij} = \int_0^l f_i' f_j' dz \quad c = [c_1, c_2, \dots, c_n]^T.$$

Условие существования ненулевого решения этой системы приводит к уравнению, из которого могут быть найдены n собственных значений:

$$\det = (A - P \cdot B) = 0. \quad (2.22)$$

Наименьшее из собственных значений равно критической нагрузке.

При практическом использовании метода обычно берутся только несколько членов ряда (18). Поэтому важно удачно выбрать вид первых членов этого ряда, стараясь удовлетворить и некоторым силовым граничным условиям. Отметим, что метод Релея-Ритца всегда приводит к завышенному значению критической нагрузки. Это происходит вследствие того, что ограничивая рядом (18) класс функций, среди которых ищем решение задачи, как бы накладываем на систему дополнительные связи. В результате этого жесткость системы возрастает, что и приводит к завышенному значению критической нагрузки.

В качестве примера рассмотрим сжатый стержень, защемленный одним концом и свободным другим концом. Упругую линию в первом приближении представим в виде:

$$y = c_1 z^2.$$

Это выражение удовлетворяет обоим геометрическим условиям:

$$z=0, \quad y=0, \quad y'=0.$$

Подставляя прогиб в выражение (17), получаем:

$$\Phi = 2EIC_1^2 l - 2PC_1^2 l^3 / 3.$$

Из формулы (20) находим:

$$P_{kp} = 3EI / l^2.$$

Точное решение задачи приводит к коэффициенту $\pi^2/4=2,47$, то есть ошибка составляет около 20%.

Во втором приближении примем:

$$y = c_1 z^2 + c_2 z^4,$$

В этом случае

$$\Phi = 2EI(c_1^2 + 4c_1c_2l^2 + 36c_2^2l^4/5) - 2Pl^3(c_1^2/3 + 4c_1c_2l^4/5 + 4c_2^2l^6/7).$$

Выражение (20) теперь приводит к системе двух уравнений:

$$\begin{aligned} (1 - \bar{P}/3)c_1 + (2 - 2\bar{P}/5)c_2 &= 0, \\ (1 - \bar{P}/5)c_1 + (18/5 - 2\bar{P}/7)c_2 &= 0, \end{aligned}$$

где $\bar{P} = Pl^2 / EI$.

Приравняв определитель нулю, приходим к квадратному уравнению

$$\bar{P}^2 - 45\bar{P} + 105 = 0.$$

Наименьший корень этого уравнения определяет критическую силу:

$$P_{кр} = 2,5 EI l^2,$$

что отличается от точного решения на 1,2 %.

Рассматривая третье приближение

$$y = c_1 z^2 + c_2 z^4 + c_3 z^6$$

приходим к кубическому уравнению, из которого определяем:

$$P_{кр} = 2,48 EI l^2,$$

что отличается от точного лишь на 0,4 %.

2.4. Метод Бубнова - Галеркина

Одним из наиболее универсальных методов приближенного интегрирования дифференциальных уравнений является метод Бубнова-Галеркина. Запишем в общем виде дифференциальное уравнение равновесия системы в отклоненном положении

$$L(z, y, y', y'' \dots) = 0. \quad (2.23)$$

Приближенное решение его представим в виде

$$y = \sum_{i=1}^n c_i g_i(z), \quad (2.24)$$

где c_i – произвольные постоянные; $g_i(z)$ – координатные функции, удовлетворяющие всем граничным (как геометрическим, так и силовым) условиям задачи.

Ряд (24) подставим в уравнение (23) и получим некоторый функционал $\Phi(z, P, c_1, \dots, c_n)$, зависящий от n неизвестных параметров c_n . Основная процедура метода заключается в ортогонализации этого функционала по всем координатным функциям

$$\int_0^l \Phi(z, P, c_1, \dots, c_n) g_i(z) dz = 0, \quad i=1, 2 \dots n. \quad (2.25)$$

В силу однородности уравнения (23) однородной будет и система (25), которая приводится к матричному виду (21). Условие существования не нулевого решения системы приводит к определителю (22), из которого определяется критическая нагрузка.

При практическом использовании этого метода, как и метода Релея-Ритца, приходится ограничиваться небольшим числом членов ряда (24). Точность и трудоемкость решения определяется тем, насколько удачно выбраны

первые функции этого ряда. В задачах устойчивости обычно требуется найти первое собственное значение. Поэтому одним из наиболее естественных и надежных путей выбора первых координатных функций состоит в использовании собственных функций родственной задачи, допускающей точное аналитическое решение.

Метод Бубнова-Галеркина может быть использован не только для решения обыкновенных дифференциальных уравнений, которые характерны для стержней, но и уравнений в частных производных, к которым сводятся условия равновесия пластин и оболочек.

В качестве примера рассмотрим задачу Эйлера. Дифференциальное уравнение продольного изгиба стержней имеет вид

$$(EIy'')'' + Py'' = 0. \quad (2.26)$$

Для шарнирно опертого стержня решение представим в виде:

$$y = c_1 \left[z/l - 2(z/l)^3 + (z/l)^4 \right],$$

который удовлетворяет всем граничным условиям задачи:

$$z=0 \quad y=0, \quad y''=0; \quad z=l, \quad y=0, \quad y''=0.$$

Уравнение (25) теперь можно записать в виде:

$$\int_0^l \left[EI 24 \frac{c_1}{l^4} + 12P \frac{c_1}{l^2} \left(\frac{z^2}{l^2} - \frac{z}{l} \right) \right] \left[\frac{z}{l} - 2\left(\frac{z}{l}\right)^3 + \left(\frac{z}{l}\right)^4 \right] dz = 0.$$

После интегрирования получим:

$$P_{кр} = 9,88EI / l^2,$$

что отличается от точного решения только на 0,13%.

2.5. Метод конечных разностей

Решение дифференциального уравнения равновесия можно получить и без аналитического представления формы упругой поверхности. Для этого достаточно производные в выбранных точках заменить конечными разностями. Применение метода покажем на примере сжатого стержня. Пусть отклоненная форма равновесия описывается уравнением (1.11):

$$y'' + k^2 y = 0, \quad k^2 = P / EI.$$

Разделим стержень на n равных частей длиной $h=l/n$. Вторую производную для некоторой точки i можно приближенно заменить так называемой центральной разностью:

$$y_i'' = (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) / h^2.$$

Тогда уравнение равновесия в этой точке примет вид

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} + (k \cdot h)^2 y_i = 0. \quad (2.27)$$

Такие уравнения можно составить для всех $(n-1)$ внутренних точек, куда будут входить и перемещения крайних точек, которые определяются из геометрических условий закрепления стержня. Таким образом, получаем систему $(n-1)$ алгебраических линейных однородных уравнений относительно y_i .

Условие существования ненулевого решения системы, заключающееся в равенстве нулю ее определителя, приводит к уравнению, из которого находится критическая нагрузка.

В качестве примера рассмотрим задачу Эйлера. Разделим стержень на четыре части (рис. 2.2 а). Составим уравнения (27) для внутренних точек

$$y_0 - 2f_1 + f_2 + (kl/4)^2 f_1 = 0,$$

$$f_1 - 2f_2 + y_3 + (kl/4)^2 f_2 = 0.$$

Учитывая, что $y_0=0$, $y_3=f_1$, и обозначая $\alpha=Pl/16EI$, получаем следующую систему уравнений:

$$(\alpha - 2)f_1 + f_2 = 0,$$

$$2f_1 + (\alpha - 2)f_2 = 0.$$

Приравняв определитель системы нулю, получаем квадратное уравнение

$$\alpha^2 - 4\alpha + 2 = 0.$$

Наименьший корень этого уравнения равен 0,586. Тогда

$$P_{kp} = 9,38EI/l^2,$$

что меньше точного значения на 4,3%.

Если дифференциальное уравнение изгиба имеет вид (26), то необходимо еще выражение для четвертой производной

$$y_i^{IV} = (y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2})/h^4.$$

Метод конечных разностей применим и для решения уравнений в частных производных, которыми описываются отклоненные состояния равновесия пластин и оболочек.

3. УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ

3.1. Основное линейризованное уравнение

Для вывода линейризованного уравнения изгиба стержня примем следующие допущения.

1. Ось стержня идеально прямая и все внешние силы и реакции опор до потери устойчивости действуют вдоль этой оси.

2. Внешние силы «мертвые», то есть при деформациях стержня они не меняют направление.

3. Изменением геометрических размеров стержня в докритическом состоянии можно пренебречь.

4. При потере устойчивости справедлива линейная теория изгиба балок, основанная на гипотезе плоских сечений.

Рассмотрим равновесие элемента стержня длиной dz в отклоненном от исходного состояния (рис.3.1).

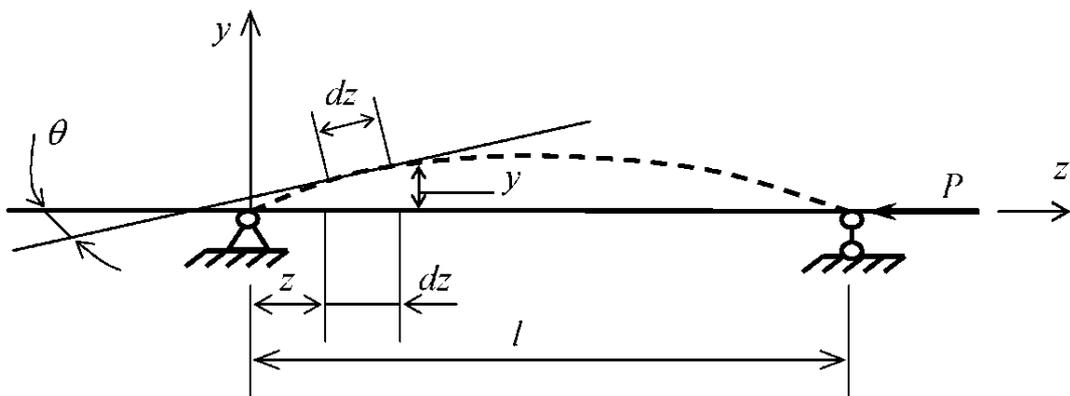


Рис. 3.1.

Поперечные прогибы $y = y(z)$ будем считать бесконечно малыми и во всех уравнениях оставим только величины первого порядка малости, а также полагаем:

$$\theta \approx y'; \quad \sin \theta \approx \theta; \quad \cos \theta \approx 1.$$

Спроектируем все силы на ось Z:

$$-N - Q\theta - qdz - (N + dN) - (Q + dQ)(\theta + d\theta) = 0.$$

Отсюда имеем:

$$N' - (Q\theta)' - q = 0. \quad (a)$$

Спроектировав все силы на ось y, получаем:

$$Q' - (N\theta)' = 0. \quad (b)$$

Второе слагаемое в уравнении (a) можно записать так:

$$(Q\theta)' - (M'\theta)' - [(EJy'')'\theta]'$$

Это слагаемое имеет второй порядок малости и им можно пренебречь. Тогда уравнения (а) и (б) примут вид:

$$N+q=0, \quad Q'=N'\theta+N\theta'$$

Теперь имеем цепочку дифференциальных соотношений:

$$y'=\theta; \quad \theta'=M/EJ; \quad M'=Q; \quad Q'=-q\theta+NM/EJ. \quad (3.1)$$

Дифференцируя третье соотношение с учетом уравнения (б), получаем:

$$(EJy'')''-(Ny')'=0.$$

(3.2)

Это однородное линейное уравнение 4-го порядка является основным уравнением теории упругой устойчивости прямых стержней.

Для однородного стержня должны быть заданы четыре граничных условия (по два на каждом торце). Рассмотрим возможные варианты граничных условий.

1. Шарнирное опирание:

$$а) y=0; б) y''=0 \text{ или } M=0.$$

2. Жесткая заделка:

$$а) y=0; б) y'=\theta=0.$$

3. Свободный край. Здесь должны быть равны нулю изгибающий момент и обобщенная поперечная сила V . При приложении к этому краю сжимающей силы P :

$$V=Q+P\theta=(EJy'')'+Py' \quad (3.3)$$

Поэтому граничные условия запишутся так:

$$M=0 \text{ или } y''=0; \quad EJy'''+Py'=0.$$

4. Плавающая заделка (рис. 3.2а):

$$а) \theta=y=0; б) Q=0 \text{ или } y'''=0.$$

5. Упругое опирание (рис. 3.2б):

$$а) M=0 \text{ или } y''=0; б) Q \mp C_1 y = EJy''' \mp C_1 y = 0.$$

6. Упругий шарнир (рис. 3.2в):

$$а) y=0; б) M \mp C_2 \theta = EJy'' \mp C_2 y = 0.$$

7. Упруго - плавающая заделка (рис. 3.2г):

$$а) \theta=y'=0; б) Q \mp C_1 y = EJy''' \mp C_1 y = 0.$$

Нижний знак в этих формулах соответствует правой опоре.

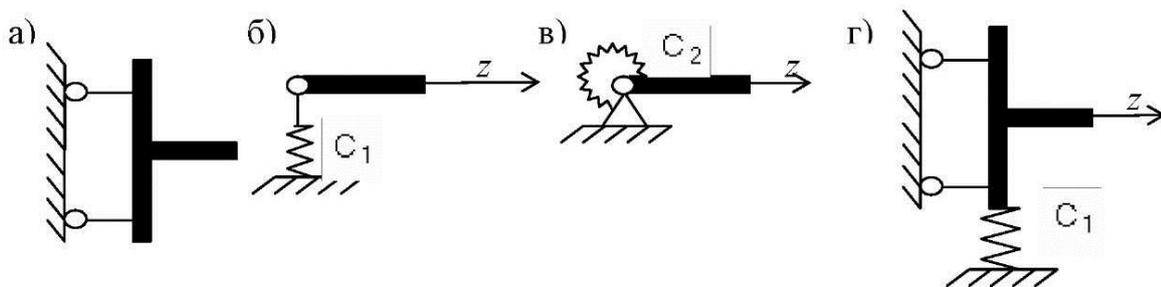


Рис. 3.2

При формулировке силовых граничных условий особого внимания заслуживают те случаи, когда мертвые внешние нагрузки передаются с помо-

щью промежуточных деталей, изменяющих действующие на стержень силы. Примеры такого нагружения приведены на рисунке 3.3. Граничные условия на правом конце стержней будут следующие:

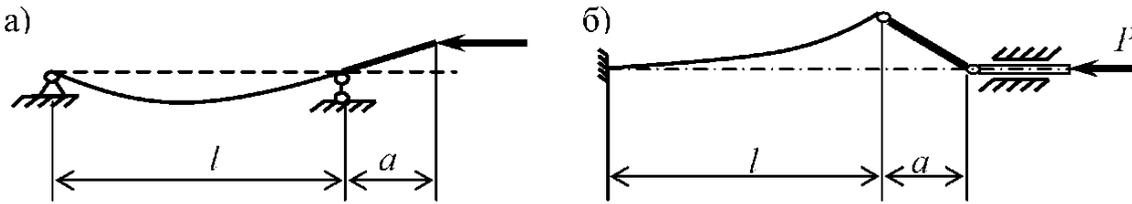


Рис. 3.3

Рис. 3.3а: а) $y(l) = 0$; б) $EJy''(l) - Pa y'(l)$;

Рис. 3.3б: а) $y''(l) = 0$; б) $EJy'''(l) - P y'(l) + Py(l)/a = 0$.

Уравнение (2) имеет точное решение только в некоторых случаях. Например, если стержень постоянной жесткости сжат одной силой P , то уравнение (2) примет вид:

$$y^{IV} + k^2 y'' = 0; \quad k^2 = P/EJ. \quad (3.4)$$

Это уравнение имеет точное решение:

$$y = A_1 \sin kz + A_2 \cos kz + A_3 z + A_4, \quad (3.5)$$

где A_i – произвольные постоянные, определяемые из граничных условий. Подставив в эти условия решения (5), получаем систему четырех однородных линейных уравнений относительно A_i . Из условия равенства нулю определителя этой системы можно найти собственные значения задачи P_n и соответствующие им собственные функции. Наименьшее значение P_n дает критическую силу, а соответствующее ему собственная функция описывает форму потери устойчивости.

В качестве примера рассмотрим стержень, жестко заделанный одним концом ($z = l$) и шарнирно опертый при $z = 0$. Используя граничные условия 1 и 2, получим систему однородных уравнений:

$$\begin{aligned} A_2 + A_4 &= 0, \\ -k^2 A_2 &= 0, \\ A_1 \sin kl + A_2 \cos kl - A_3 l - A_4 &= 0, \\ A_1 k \cos kl - A_2 k \sin kl + A_3 &= 0. \end{aligned}$$

При аналитическом решении задачи удобнее не раскрывать определитель 4-го порядка, а последовательно, исключая неизвестные из системы, выразить A_i через какую-нибудь одну из них, заведомо не равную нулю. В этом примере из первых двух уравнений следует $A_2 = A_4 = 0$. Из третьего уравнения следует, что:

$$A_3 = -(A_1/l) \sin kl.$$

Подставив все в последнее уравнение, получим:

$$A_1 [k \cos kl - (\sin kl)/l] = 0.$$

Отсюда получаем характеристическое уравнение:

$$\operatorname{tg} kl = kl.$$

Наименьший корень этого уравнения $kl=4,49$ дает критическую силу:

$$P_{кр} = 4,49^2 EJ/l^2 = 20,2 EJ/l^2.$$

Собственная функция, соответствующая первому собственному значению, с точностью до масштаба описывает форму изогнутой оси стержня при потере устойчивости:

$$y(z) = \sin \frac{4,49z}{l} - \frac{z}{l} \sin 4,49.$$

Аналогично решается задача и при других закреплениях концов. Во всех случаях выражение для критической силы можно записать в виде:

$$P_{кр} = \pi^2 EJ/(\mu l)^2, \quad (3.6)$$

где μ - коэффициент приведения длины, зависящий от способов закрепления концов стержня.

Для шарнирно опертого стержня, сжатого осевой силой, после двухкратного интегрирования и использования граничных условий, уравнение (2) приводится к уравнению второго порядка:

$$EJ_{(z)} y'' + Py = 0. \quad (3.7)$$

Решение этого уравнения при постоянной жесткости приведено в параграфе 1.4. Возможны точные решения и при некоторых законах изменения жесткости, а также при ступенчато переменном изменении жесткости.

Иногда для понижения порядка основного уравнения в качестве неизвестной вместо прогиба берут угол поворота. Заменяя в уравнении y' на θ и интегрируя один раз, получим:

$$(EJ\theta)' - N\theta = A_1.$$

Если один из торцов стержня не закреплен, то согласно третьему условию закрепления $A_1=0$ и

$$(EJ\theta)' - N\theta = 0. \quad (3.8)$$

Для некоторых практически важных случаев это уравнение имеет точное решение. Так для бруса постоянного сечения, находящегося под действием собственного веса (рис. 3.4), учитывая, что $N=-qz$ и используя подстановку:

$$t = \frac{2}{3} \sqrt{qz^3 / EJ},$$

уравнение (8) можно привести к уравнению Бесселя:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d\theta}{tdt} + \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{1}{t^2} \right] \theta = 0.$$

Решение этого уравнения хорошо изучено; оно сводится к табулированным функциям Бесселя [1]:

$$\theta = t^{1/2} \left[AJ_{1/3} \left(2at^{3/2} / 3 \right) + BJ_{-1/3} \left(2at^{3/2} / 3 \right) \right]; \quad a^2 = ql^3 / EJ.$$

Подчиняя решение граничным условиям:

$$\theta' = 0 \text{ при } Z=0 \quad \text{и} \quad \theta = 0 \text{ при } Z=l,$$

получаем характеристическое уравнение:

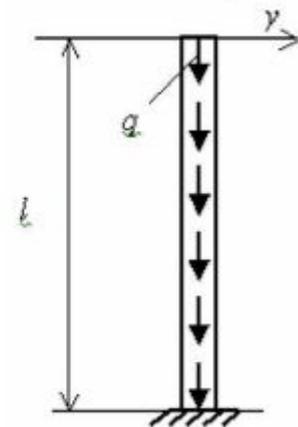


Рис. 3.4

$$J_{-\frac{1}{3}}(2a/3) = 0.$$

Наименьший корень этого уравнения $2a/3 = 1,866$. Тогда $q_{кр} = 7,84 EJ/l^3$.

3.2. Приближенные методы решения основного уравнения

В общем случае при произвольных законах изменения жесткости и продольной силы уравнения (2), (7) и (8) не удается решить аналитически. Тогда для решения задач устойчивости используются приближенные методы. Применение метода конечных разностей уже изложено в параграфе 2.5. На примере уравнения (8) изложим еще один эффективный численный метод определения критических нагрузок.

Введем двумерный вектор состояния, характеризующий перемещения и внутренние силы в произвольном сечении стержня

$$U = [\theta, M]^T,$$

где « T » означает операцию транспонирования.

Дополняя уравнение (8) соотношением:

$$\theta' = M/EJ$$

перепишем их в виде одного матричного уравнения:

$$U' - AU, \quad (3.9)$$

где

$$A_{(z)} = \begin{vmatrix} 0 & 1/EJ_{(z)} \\ N_{(z)} & 0 \end{vmatrix}.$$

Численно решая уравнение (9) при заданных граничных условиях не трудно найти критическую нагрузку при любых законах изменения жесткости и силы. При заданных граничных условиях в начале координат подбирают машинным расчетом параметр нагрузки так, чтобы выполнялись граничные условия на другом торце стержня. Для стержня защемленного одним концом $\theta_{(0)} = 0$, а моментом задаются произвольно (например, $M_{(0)} = 1$). Это допустимо в силу того, что решение однородного уравнения (9) должно быть получено только с точностью до масштаба. Критическую нагрузку определяют из условия равенства нулю момента на свободном торце.

При машинной реализации метода можно взять небольшой шаг интегрирования и производную заменить конечной разностью:

$$U'_i - U_i - U_{i-1}.$$

Разобьем стержень на n участков. Для i -го участка, определяемого точками $(i-1)$ и i , уравнение (9) можно записать в конечных разностях:

$$U_i - R_i U_{i-1}, \quad (3.10)$$

где

$$R_i = \bar{E} + S_i A_i = \begin{vmatrix} 1 & S_i / EJ_i \\ S_i N_i & 1 \end{vmatrix};$$

\bar{E} – единичная матрица; $S_i = Z_i - Z_{i-1}$ – длина i -го участка. Записывая выражения (10) для каждого участка, получим

$$\begin{matrix} U_1 - R_1 U_0, & U_2 - R_2 U_1, & \dots, \\ & & U_n - R_n U_{n-1}. \end{matrix}$$

Производя последовательные исключения U_i , имеем

$$U_n \ R U_0; \ R \ R_n R_{n-1} \dots \ R_1. \quad (3.11)$$

Для стержня с одним зашпелненным и вторым свободным концом

$$U_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ M_0 \end{bmatrix}, \quad U_n = \begin{bmatrix} \theta_n \\ 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}.$$

Подставляя все в уравнение (11), находим уравнение, из которого определяется критическая нагрузка:

$$r_{22}=0.$$

Реализацию метода покажем на примере стержня, показанного на рисунке 3.4. Разобьем его на четыре участка и введем обозначения:

$$S=l/4, \quad c=S/EJ, \quad b=Sq/l, \quad \lambda=cb.$$

Путем перемножения матриц получаем характеристическое уравнение

$$r_{22}=c(N_2-2N_3-3N_4)+c^2N_2N_4-l=0.$$

С учетом того, что

$$N_1=-7b/8, \quad N_2=-5b/8, \quad N_3=-3b/8, \quad N_4=-b/8,$$

это уравнение сводится к квадратному уравнению

$$5\lambda^2-112\lambda-64=0.$$

Наименьший корень $\lambda=0,587$ дает критическую нагрузку

$$q_{кр}=9,39EJ/l^3,$$

что отличается от точного на 19,7%. Увеличивая количество участков, можно получить ответ с необходимой точностью.

В самом общем случае вектор состояния можно записать в виде

$$U=[y, \theta, M, Q]^T.$$

Тогда дифференциальные зависимости (1), из которых вытекает основное уравнение (2), вновь сводятся к уравнению (9) с матрицей

$$A(z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/EJ(z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -q(z) & N/EJ(z) & 0 \end{bmatrix}.$$

Принципиальная схема определения критических нагрузок остается прежней.

3.3. Метод начальных параметров

Вновь рассмотрим стержень, сжатый по концам силой P . Дифференцируя уравнение (5) найдем угол поворота, момент и поперечную силу:

$$\begin{aligned} y' &= \theta - A_1 k \cos kz - A_2 k \sin kz + A_3, \\ y'' &= M/EJ = -A_1 k^2 \sin kz - A_2 k^2 \cos kz, \\ y''' &= Q/EJ = -A_1 k^3 \cos kz - A_2 k^3 \sin kz. \end{aligned} \quad (в)$$

К этим уравнениям добавим уравнение (5) и положим в них $z=0$. Тогда получим четыре уравнения для определения прогиба, угла поворота, момента и поперечной силы в начале координат, которые обозначим y_0, θ_0, M_0, Q_0 , соответственно. Из этой системы выразим постоянные интегрирования через указанные начальные параметры:

$$A_1 = -Q_0/EJk^3, A_2 = -M_0/EJk^2, A_3 = \theta_0 + Q_0/EJk^2, A_4 = y_0 + M_0/EJk^2.$$

Подставив их в уравнения (5) и (6), получим

$$\begin{aligned} y &= y_0 + \theta_0 z + (1 - \cos kz) M_0/EJk^2 + (kz - \sin kz) Q_0/EJk^3, \\ \theta &= \theta_0 + \sin kz \cdot M_0/EJk + (1 - \cos kz) Q_0/EJk^2, \\ M &= M_0 \cos kz + (Q_0/k) \sin kz, \\ Q &= -M_0 k \sin kz + Q_0 \cos kz. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Этот метод определения перемещений и внутренних сил называется методом начальных параметров.

С помощью соотношений (12) легко получить характеристическое уравнение при различных закреплениях концов стержня и определить из них коэффициент μ в выражении (6). Два начальных параметра в уравнениях (12) известны из условия закрепления в начале координат, условия закрепления на другом конце балки дают два однородных уравнения. Из условия равенства нулю определителя этих уравнений находим критическую нагрузку.

На рисунке 3.5 показаны различные случаи закрепления концов стержня и соответствующие им коэффициенты приведения длины.

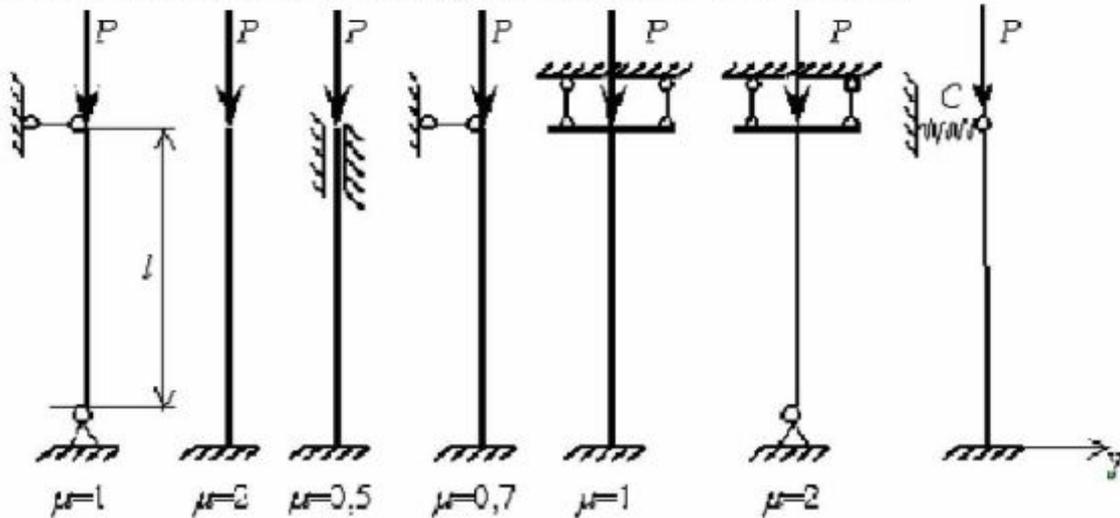


Рис. 3.5

В качестве примера выведем характеристическое уравнение для последнего случая. В начале координат $y_0 = 0, \theta_0 = 0$. Условия на другом конце стержня:

$$\text{а) } M = 0; \quad \text{б) } Q + P\theta - Cy = 0.$$

Используя уравнение (12), получаем систему:

$$\begin{aligned} M_0 \cos kl + (Q_0/k) \sin kl &= 0, \\ -M_0 C(1 - \cos kl)/EJk^2 + Q_0[1 - C(kl - \sin kl)/EJk^3] &= 0. \end{aligned}$$

Из условия равенства нулю определителя имеем:

$$(1 - C/EJk^2) \cos kl + (C/EJk^3) \sin kl = 0$$

или

$$\operatorname{tg} kl = kl - k^3 EJ/C.$$

Это уравнение решается подбором или численно. Если $C=0$ (опора отсутствует), то $\operatorname{tg}kl = -\infty$, $kl = -\pi/2$, $\mu = 2$, получаем второй случай. Если $C=\infty$ (жесткая опора), то $\operatorname{tg}kl = kl$, получаем четвертый случай.

3.4. Решение задач устойчивости стержней энергетическим методом

Задачу определения начального напряженно-деформированного состояния считаем решенной и начальные осевые усилия $N_0(z)$ известными. Сообщим точкам оси стержня поперечные перемещения первого порядка малости. Изменение полной потенциальной энергии при этом представим в виде:

$$\Delta\mathcal{E} = U + V,$$

где U – потенциальная энергия деформации при изгибе, определяемая выражением (2.13); V – изменение потенциальной энергии растяжения стержня, вызванное изгибом. Относительные деформации в осевом направлении, вызванные изгибом, имеют второй порядок малости и равны (см. §2.2)

$$\varepsilon_2 = 0,5(y'')^2.$$

Работа начальных усилий на этих перемещениях равны:

$$V = \int_0^l N_0 \varepsilon_2 dz = \frac{1}{2} \int_0^l N_0 (y'')^2 dz.$$

Таким образом:

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_0^l EJ (y'')^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^l [EJ (y'')^2 + N_0 (y'')^2] dz. \quad (3.13)$$

Из условия $\Delta\mathcal{E}=0$ при дополнительном требовании минимума нагрузки можно найти точки бифуркации исходной формы равновесия и критическую нагрузку. Данный подход называют энергетическим критерием в форме Брайана.

Иногда полезен энергетический критерий в форме С.П. Тимошенко, который записывается так:

$$\Delta\mathcal{E} = U - \int_0^l q(z) u_{2(z)} dz - P u_{2(\ell_1)}, \quad (3.14)$$

где ℓ_1 – координата точки приложения силы P ; $u_{2(z)}$ – дополнительные осевые перемещения второго порядка малости, которые выражаются через поперечные перемещения первого порядка по формуле (2.12):

$$u_{2(z)} = -\frac{1}{2} \int_0^z (y')^2 dz. \quad (3.15)$$

Эта формула справедлива, когда изгиб происходит без дополнительного растяжения оси стержня. Тогда формула (14) примет вид:

$$\Delta\mathcal{E} = U + \frac{1}{2} \int_0^l q(z) \left[\int_0^z (y')^2 dz \right] dz + \frac{P}{2} \int_0^{\ell_1} (y')^2 dz. \quad (3.16)$$

Различие этих критериев состоит в том, что в первом случае надо определить начальное напряженное состояние, а во втором случае этого не требу-

ется. Но формула (15) пригодна только для случая изгиба без растяжения оси. В противном случае она сильно усложняется и преимущество метода теряется.

Рассмотрим примеры решения задач устойчивости стержней энергетическим методом.

Исследуем устойчивость шарнирно опертого стержня при двух вариантах закрепления верхнего конца (рис. 3.6):

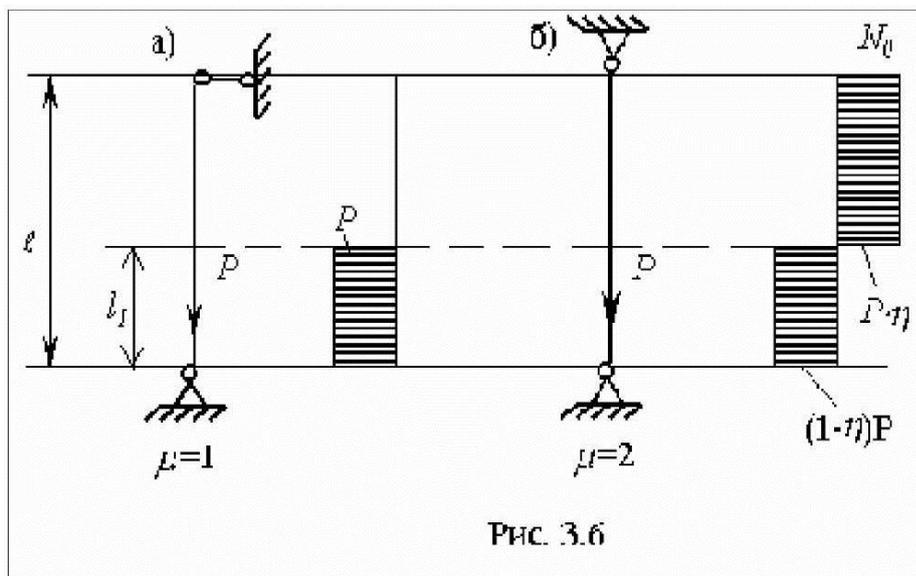


Рис. 3.6

а) верхний конец свободно смещается вдоль оси;

б) верхний конец закреплен неподвижно.

Очевидно, в обоих случаях решение можно получить с помощью ряда:

$$y(z) = \sum_{i=1}^n C_i \sin(i\pi z / l), \quad (\text{г})$$

удовлетворяющего всем граничным условиям.

В первом случае из критерия С.П. Тимошенко, получаем:

$$P = \int_0^l EJ(y'')^2 dz : \int_0^{l_1} (y')^2 dz .$$

При $EJ = \text{const}$ и $l_1 = l/2$, ограничившись первым членом ряда (г), получим:

$$P_{\text{кр}} = 2\pi^2 EJ / l^2 = 19,7 EJ / l^2 .$$

Точное решение дает коэффициент 18,7. Учитывая большее число членов ряда и минимизируя P по параметрам C_i , критическую нагрузку можно найти с любой степенью точности для любого закона изменения жесткости. При практических расчетах удобнее все параметры C_i отнести к C_1 и вести поиск минимума P по безразмерным параметрам $\bar{C}_i = C_i / C_1$.

Во втором случае потеря устойчивости без растяжения оси невозможна. Решение ищем в форме Брайана, предварительно определив зависимость $N_0=N_0(z)$. Тогда по формуле (13) можно записать:

$$P = \int_0^l EJ(y'')^2 dz : \left[(1-\eta) \int_0^{l_1} (y')^2 dz - \eta \int_{l_1}^l (y')^2 dz \right],$$

где

$$\eta = \int_0^{l_1} \frac{dz}{EF(z)} : \int_0^l \frac{dz}{EF(z)}.$$

Пусть $EJ=\text{const}$ и $l_1=l/2$. При одном члене ряда (г) получаем бессмысленный результат $P_{кр}=\infty$. При двух членах ряда:

$$P = \frac{3\pi}{8} \frac{EJ\pi^2}{l^2} (1+16\overline{C_2^2})/\overline{C_2}.$$

Из условия экстремума имеем $\overline{C_2} = 0,25$. Следовательно,

$$P_{кр} = 3\pi EJ(\pi/l)^2,$$

а форма изогнутой оси описывается функцией:

$$y_{(z)} = \sin(\pi z/l) + 0,25 \sin(2\pi z/l).$$

Точное решение задачи $P_{кр}=8\pi^2 EJ/l^2$.

Приближенное решение задачи энергетическим методом не усложняется и в случае действия распределенных продольных сил $q_{(z)}$. Так для схемы 3.6а при постоянных q и EJ , взяв один член ряда (г), из выражения (16) получаем:

$$q_{кр} = 2\pi^2 EJ/l^3 = 19,7 EJ/l^3,$$

что отличается от точного решения на 6,4%.

Для стержня, показанного на рисунке 3.6б, $q_{кр}$ определяем по формуле (13), имея в виду, что:

$$N_0 = ql(z/l - 1/2).$$

Ограничившись двумя членами ряда, получим:

$$q_{кр} = 8,87 \pi^2 EJ/l^3.$$

Взяв, пять членов ряда, получаем коэффициент 8,43. Это значение можно считать точным, так как при дальнейшем увеличении числа членов ряда оно не меняется.

3.5. Действие осевых сил в пролете стержня.

Точные решения

Точным решением будем называть решение, основанное на интегрировании дифференциального уравнения равновесия стержня в отклоненном положении.

Рассмотрим стержень, показанный на рис. 3.7. Он имеет два участка: от левой опоры до силы P и за силой. Рассмотрим каждый из них, принимая

различную систему координат. Определим сначала реакции опор из условия равновесия всего стержня:

$$R = P \cdot y_p / l.$$

I-й участок $0 \leq z \leq a$: $M_{(z)} = P y_1 - R z$.

Дифференциальное уравнение равновесия примет вид:

$$y_1'' + k^2 y_1 = k^2 y_p z / l, \quad k^2 = P / EJ.$$

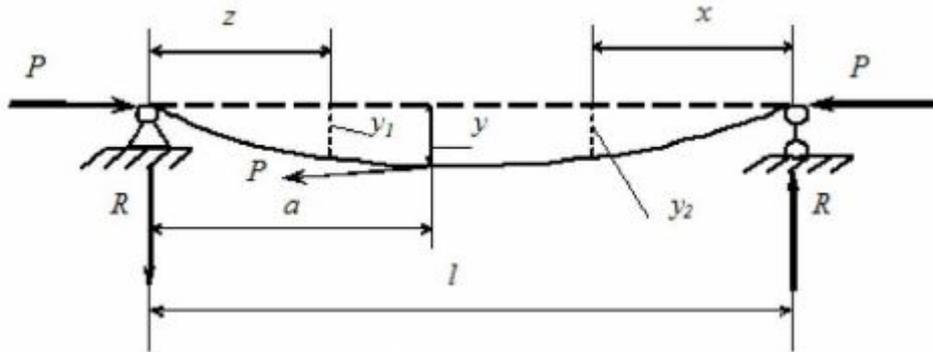


Рис. 3.7

Его решение

$$y_1 = A \sin kz + B \cos kz + y_p z / l.$$

Из условия $z=0$ $y=0$, получим $B=0$. Тогда:

$$y_1 = A \sin kz + y_p z / l, \quad y_1' = k A \cos kz + y_p / l.$$

При $z=a$:

$$y_{1(a)} = y_p = A l \sin ka / (l - a);$$

$$y_{1(a)}' = k A \cos ka + A \sin ka / (l - a).$$

II-й участок $0 \leq x \leq b = l - a$: $M_{(x)} = R x = P y_p x / l$.

Дифференциальное уравнение равновесия примет вид:

$$y_2'' = -k^2 y_p x / l.$$

Интегрируя это уравнение, получаем:

$$y_2' = -k^2 y_p x^2 / 2l + C, \quad y_2 = -k^2 y_p x^3 / 6l + Cx + D.$$

Из условия закрепления на правой опоре имеем $D=0$. Тогда при $x=b$

$$y_{2(b)} = y_p = C b - k^2 y_p b^3 / 6l.$$

Отсюда

$$y_{2(b)} = y_p = C b / (1 + k^2 b^3 / 6l).$$

С учетом этого соотношения:

$$y_{2(b)}' = C \left[1 - \frac{k^2 b^3}{2l(1 + k^2 b^3 / 6l)} \right].$$

Условия сопряжения двух участков имеют вид:

$$y_{1(a)} = y_{2(b)} \quad ; \quad y_{1(a)}' = -y_{2(b)}'.$$

С учетом ранее выведенных соотношений эта система примет вид:

$$A \sin ka(1 + k^2 \epsilon^3 / 6l) - C \epsilon^2 / l = 0,$$

$$A(k\epsilon \cos ka + \sin ka) + C\epsilon \left[1 - \frac{k^2 \epsilon^3}{2l(1 + k^2 \epsilon^3 / 6l)} \right] = 0.$$

Приравнявая определитель нулю, получаем:

$$\operatorname{tg} ka = \frac{\lambda \rho^2}{\lambda^2 \rho^3 / 3 - 1 - \rho},$$

где $\lambda = kl$, $\rho = \epsilon/l$.

Если $a = l/2$, то это уравнение примет вид:

$$\operatorname{tg}(\lambda/2) = 6\lambda / (\lambda^2 - 36).$$

Решая это уравнение, получим:

$$\lambda = 4,32, P_{кр} = 18,67 EJ/l^2.$$

Точное решение для стержня, показанного на рисунке 3.4, приведено в параграфе 3.1.

Следует отметить, что во многих случаях при действии осевых сил в пролете точные решения довольно громоздки. Поэтому при проведении практических расчетов используются приближенные решения.

Приближенные решения

Такие решения можно получить применением энергетического метода, что изложено в предыдущем параграфе. Там же рассмотрены примеры расчета. Точность метода зависит от того, насколько точно отражает аппроксимирующая функция упругую линию стержня и от количества членов ряда (2.18). Рассмотрим еще один пример, показанный на рисунке 3.8.

Упругую линию зададим в виде ряда:

$$y = \sum C_n \left(1 - \cos \frac{\pi n z}{2l} \right), \quad (3.17)$$

удовлетворяющего геометрическим граничным условиям в заделке.

Воспользуемся энергетическим методом в форме С.П. Тимошенко:

$$U - W = 0,5 EJ \int_0^l (y'')^2 dz - 0,5 P_1 \int_0^l (y')^2 dz - 0,5 P_2 \int_0^a (y')^2 dz = 0.$$

Найдем производные:

$$y' = \sum C_n \frac{\pi n}{2l} \sin \frac{\pi n z}{2l}, \quad y'' = \sum C_n \left(\frac{\pi n}{2l} \right)^2 \cos \frac{\pi n z}{2l}.$$

Сначала решим задачу при одном члене ряда, затем возьмем два члена ряда. При этом возникают следующие интегралы:

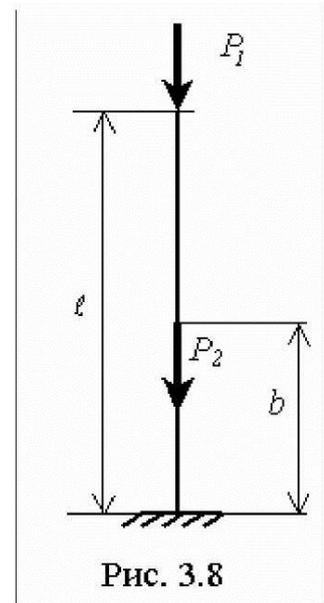


Рис. 3.8

$$\int_0^l \cos^2 \frac{\pi z}{2l} dz = l/2; \quad \int_0^l \cos \frac{\pi z}{2l} \cos \frac{\pi z}{l} dz = \frac{2l}{3\pi};$$

$$\int_0^l \sin^2 \frac{\pi z}{2l} dz = l/2; \quad \int_0^l \sin \frac{\pi z}{2l} \sin \frac{\pi z}{l} dz = \frac{4l}{3\pi};$$

$$\int_0^{\vartheta} \sin^2 \frac{\pi z}{2l} dz = l \left(\frac{\vartheta}{2l} - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{\pi \vartheta}{l} \right);$$

$$\int_0^{\vartheta} \sin \frac{\pi z}{2l} \sin \frac{\pi z}{l} dz = \frac{4l}{3\pi} \sin^3 \frac{\pi \vartheta}{2l}.$$

Возьмем один член ряда:

$$U_1 = 0,5EJC_1^2 (\pi/2l)^4 l/2;$$

$$W_1 = 0,5C_1^2 (\pi/2l)^2 \left[P_1 l/2 + P_2 l \left(\frac{\vartheta}{2l} - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{\pi \vartheta}{l} \right) \right].$$

Приняв $P_1=P$, $P_2=3P$, $\vartheta=l/2$, отсюда получаем:

$$P_{кр} = \frac{EJ\pi^2}{4l^2} \cdot \frac{1}{1+3(0,5-1/\pi)} = 1,597EJ/l^2 = \lambda EJ/l^2.$$

Точное решение, полученное методом начальных параметров, дает $\lambda=1,515$ [3]. Погрешность составляет 5,4%. Такая высокая точность уже при одночленной аппроксимации прогиба, видимо, обусловлено тем, что каждый член принятого ряда еще удовлетворяет одному силовому граничному условию на свободном конце, а именно, равенству нулю изгибающего момента: $y''(l)=0$.

Возьмем два члена ряда:

$$U_2 = 0,5EJ(\pi/2l)^4 (C_1^2 + 16C_2^2 + 16C_1C_2/3\pi) l/2;$$

$$W_2 = 0,5(\pi/2l)^2 \left\{ P_1 \left(C_1^2 l/2 + 2C_2^2 l + 16C_1C_2 l/3\pi \right) + \right. \\ \left. + P_2 \left[C_1^2 l \left(\frac{\vartheta}{2l} - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{\pi \vartheta}{l} \right) + C_2^2 l \left(\frac{\vartheta}{2l} - \frac{1}{4\pi} \sin \frac{2\pi \vartheta}{l} \right) + 4C_1C_2 \frac{4l}{3\pi} \sin^3 \frac{\pi \vartheta}{2l} \right] \right\}.$$

При ранее принятых параметрах получаем:

$$W_2 = 0,5P(\pi/2l)^2 \left(1,545 + 10\bar{C}_2^2 + 6,997\bar{C}_2 \right) C_1^2 l/2, \quad \bar{C}_2 = C_2/C_1.$$

Отсюда имеем:

$$P = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2} \frac{1 + 16\bar{C}_2^2 + 3,395\bar{C}_2}{1,545 + 10\bar{C}_2^2 + 6,997\bar{C}_2}.$$

Минимизируя это выражение по параметру \bar{C}_2 , получаем квадратное уравнение:

$$\bar{C}_2^2 + 0,634\bar{C}_2 - 0,02245 = 0.$$

Корни этого уравнения равны: $\bar{C}_2 = 0,0336$ и $\bar{C}_2 = -0,6676$. Подставляя их в выражение для силы, замечаем, что наименьшее значение силы соответствует первому корню и равно:

$$P_{кр} = 1,559EJ/l^2,$$

что отличается от точного значения на 2,9% .

Более простые, хотя менее точные, приближенные решения можно получить путём переноса сил, приложенных по длине стойки, на её конец.

Возьмём стойку, заземленную нижним концом, с некоторой продольной силой P_z , приложенной на расстоянии z от заземления. Поскольку верхняя часть стойки не нагружена, то ее мысленно можно отбросить и написать:

$$P_{кр,z} = \pi^2 EJ / 4z^2.$$

Перенесем эту силу наверх стойки с поправочным коэффициентом $\lambda_{(z)}$ и будем ее считать критической для нового положения:

$$\lambda_{(z)} P_{кр,z} = \pi^2 EJ / 4l^2 .$$

Приравнявая последние два выражения, получим:

$$\lambda_{(z)} = z^2 / l^2 . \quad (3.19)$$

Если на стойке будет несколько сосредоточенных сил и распределенная нагрузка $q(z)$, то все силы надо перенести на конец стойки и их сумму, называемую приведенной силой $P_{пр}$, приравнять эйлеровой критической силе, то есть:

$$P_{кр} = \sum \lambda_{(z_i)} P_i + \int q(z) \lambda_{(z)} dz = P_{пр} = \pi^2 EJ / (\mu l)^2 . \quad (3.20)$$

Это основное равенство, из которого определяется критический параметр нагрузки.

Так, для выше рассмотренного примера:

$$P_{кр} = P = 3P/4 = \pi^2 EJ / 4l^2.$$

Отсюда $P = P_{кр} = 1,41 EJ / l^2$. Расхождение от точного решения составляет 6,9%.

Рассмотрим ту же стойку под собственным весом:

$$P_{кр} = \int_0^l q(z^2 / l^2) dz = \pi^2 EJ / 4l^2 .$$

Отсюда $(ql)_{кр} = 7,4 EJ / l^2$, что отличается от точного решения, приведенного в параграфе 3.1, на 5,95%.

Рассмотрим ту же стойку под действием нагрузки, распределенной по линейному закону:

$$q = q_0 z / l.$$

Тогда
$$P_{кр} = \int_0^l q_0 (z/l)^3 dz = \pi^2 EJ / 4l^2 .$$

Отсюда $(ql)_{кр} = \pi^2 EJ / l^2$, что отличается от точного решения ($10,24 EJ / l^2$) всего на 3,6%.

Точность изложенного способа можно повысить, если коэффициент переноса сил $\lambda(z)$ определять по равенству работ сил на задаваемом отклоненном состоянии после потери устойчивости стержня.

Для стойки, показанного на рисунке 3.8, упругую линию можно задать в виде одного члена ряда (17). Опускание произвольной точки оси стойки равно:

$$\Delta z = \frac{1}{2} \int_0^z (y')^2 dz = \frac{\pi^2 C^2}{8l^2} \int_0^z \sin^2 \frac{\pi z}{2l} dz = \frac{\pi^2 C^2}{16l^2} z \left(1 - \frac{l}{\pi z} \sin \frac{\pi z}{l} \right).$$

Соответственно опускание верхней точки ($z = l$):

$$\Delta l = \pi^2 C^2 / 16l.$$

Равенство работ силы, приложенной при координате z и силы, перенесенной на свободный конец стойки с поправочным коэффициентом $\lambda(z)$ будет:

$$P \Delta z = P \lambda(z) \Delta l.$$

Отсюда

$$\lambda_{(z)} = \frac{\Delta z}{\Delta l} = \frac{z}{l} \left(1 - \frac{l}{\pi z} \sin \frac{\pi z}{l} \right). \quad (3.21)$$

Основное равенство (20) сохраняет свою силу. Заметим, что $\lambda_{(0)} = 0$, $\lambda_{(l/2)} = 0,182$, $\lambda_{(l)} = 1$.

Определим критическую силу для стойки, показанной на рисунке 3.8, при ранее принятых значениях сил и длин:

$$P_{кр} = P + 3P \cdot 0,182 = \pi^2 EJ / 4l^2.$$

Отсюда $P_{кр} = 1,596 EJ / l^2$, что отличается от точного уже на 5,4%.

Рассмотрим ту же стойку, сжатую собственным весом:

$$q \int_0^l \frac{z}{l} \left(1 - \frac{l}{\pi z} \sin \frac{\pi z}{l} \right) dz = ql \left(0,5 - 2 / \pi^2 \right) = \pi^2 EJ / l^2.$$

Отсюда $(ql)_{кр} = 8,13 EJ / l^2$, что отличается от точного значения на 3,3%, а не на 5,95% как было раньше.

Изложенный подход может быть применен и для шарнирно опертых стоек. В этом случае уравнение упругой линии имеет вид:

$$y = C \sin(\pi z / l).$$

Тогда:

$$\Delta z = \frac{\pi^2 C^2}{2l^2} \int_0^z \cos^2 \frac{\pi z}{l} dz = \frac{\pi^2 C^2}{4l^2} z \left(1 + \frac{l}{2\pi z} \sin \frac{2\pi z}{l} \right); \quad (3.22)$$

$$\lambda_{(z)} = \frac{\Delta z}{\Delta l} = \frac{z}{l} \left(1 + \frac{l}{2\pi z} \sin \frac{2\pi z}{l} \right).$$

Основное равенство (20) сохраняет силу. Заметим, что $\lambda_{(l/2)} = 0,5$, $\lambda_{(0)} = 0$, $\lambda_{(l)} = 1$.

Определим критическую силу для стойки, показанной на рисунке 3.6а при $l = l/2$.

$$P_{кр} = 0,5 - \pi^2 EJ / l^2 \quad \text{или} \quad P_{кр} = 2\pi^2 EJ / l^2,$$

что совпадает с энергетическим методом и отличается от точного на 4,32%.

Рассмотрим стойку, нагруженную собственным весом (рис. 3.6а):

$$\int_0^l q \frac{z}{l} \left(1 + \frac{l}{2\pi z} \sin \frac{2\pi z}{l} \right) dz = \frac{ql}{2} = \pi^2 EJ / l^2.$$

Отсюда $(ql)_{кр} = 2\pi^2 EJ / l^2$.

3.6. Устойчивость составных стержней

Под составными стержнями будем понимать многопролётные стержни с жёсткими или упругими опорами, а также стержни ступенчато-переменной жёсткости. Характеристическое уравнение устойчивости в этом случае может быть получено применением метода начальных параметров. Решение для каждого участка записывается в виде (12). Две константы, входящие в эти выражения, для первого участка заданы условиями при $z_1=0$. Условия сопряжения при переходе от одного участка к другому позволяют последовательно выразить все константы на любом участке через две константы первого участка, оставшиеся неопределёнными. Удовлетворение условий на последнем участке при $z_n=l_n$ даёт однородную линейную систему алгебраических уравнений. Из условия существования ненулевого решения этой системы получается характеристическое уравнение устойчивости. Условия сопряжения участков приведены на рис. 3.9.

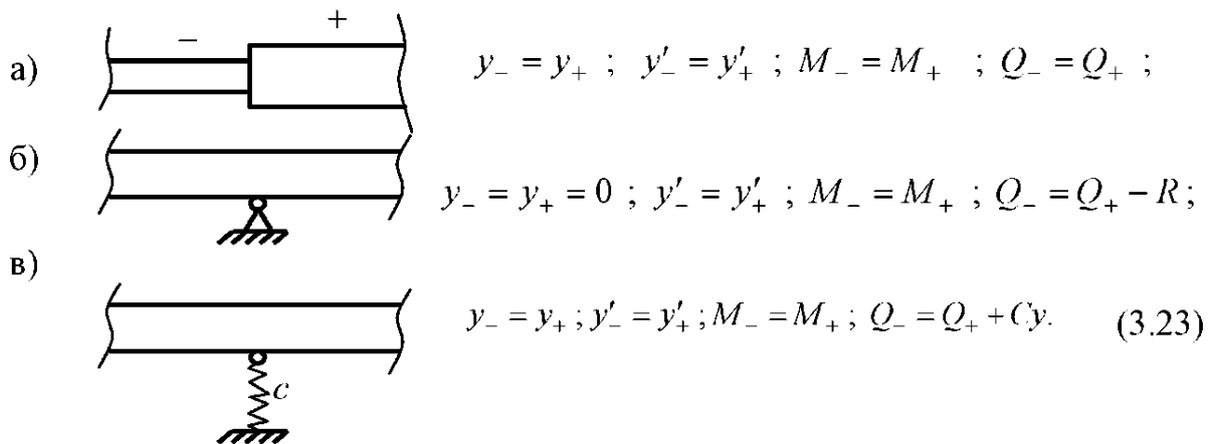


Рис. 3.9

Рассмотрим устойчивость стержня показанного на рисунке 3.10. Условия закрепления стержня на левой опоре первого участка имеют вид: $y_0=0, M_0=0$. Начало координат для второго участка помещаем на правой опоре. Условия стыковки участков соответствуют схеме (б) рисунка 3.9.

Из первого условия следует:

$$\theta_0 = (\sin kl - kl) Q_0 / EJk^3 l, \quad k^2 = P / EJ.$$

Из оставшихся трех условий с учетом этого выражения и формул (12) находим начальные параметры для второго участка:

$$\begin{aligned} \theta_{2(0)} &= [(\sin kl) / kl - \cos kl] Q_0 / EJk^2 ; \\ M_{2(0)} &= (Q_0 / k) \sin kl ; \quad Q_{2(0)} = Q_0 \cos kl + R. \end{aligned} \quad (а)$$

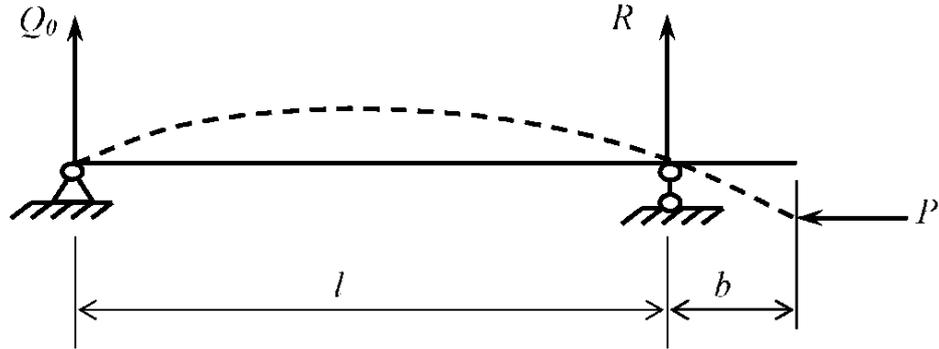


Рис. 3.10

По уравнениям (12) с учетом (а) найдем угол поворота, момент и поперечную силу в конце второго участка:

$$\begin{aligned} \theta_{2(\epsilon)} &= \{ Q_0 [(\sin kl)/kl - \cos kl] + Q_0 \sin kl \sin k\epsilon + (Q_0 \cos kl + R)(1 - \cos k\epsilon) \} / EJk^2 = \\ &= [(\sin kl)/kl - \cos k(l + \epsilon)] Q_0 / EJk^2 + R(1 - \cos k\epsilon) / EJk^2 ; \\ M_{2(\epsilon)} &= [Q_0 \sin kl \cos k\epsilon + (Q_0 \cos kl + R) \sin k\epsilon] / k = [Q_0 \sin k(l + \epsilon) + R \sin k\epsilon] / k ; \\ Q_{2(\epsilon)} &= -Q_0 \sin kl \sin k\epsilon + (Q_0 \cos kl + R) \cos k\epsilon = Q_0 \cos k(l + \epsilon) + R \cos k\epsilon . \end{aligned}$$

Используя граничные условия в конце второго участка, получаем систему из двух однородных уравнений:

$$\begin{aligned} P\theta_{2(\epsilon)} + Q_{2(\epsilon)} &= Q_0 \sin kl + klR = 0 , \\ M_{2(\epsilon)} &= Q_0 \sin k(l + \epsilon) + R \sin kl = 0 . \end{aligned} \quad (6)$$

Приравняв определитель нулю, получаем характеристическое уравнение:

$$kls \operatorname{sink}(l - \epsilon) - \operatorname{sink}l \operatorname{sink}\epsilon .$$

При $\epsilon=0$ получим $\operatorname{sink}l=0$, что соответствует шарнирно опертому по концам стержню. При $l - d\epsilon \rightarrow 0$ получаем консольный стержень с одним жестким закреплением. В этом случае:

$$\operatorname{sink}(\epsilon + d\epsilon) - \operatorname{sink}\epsilon = d(\operatorname{sink}\epsilon) = \cos k\epsilon - 0 .$$

Отсюда имеем известное решение $P_{кр} = \pi^2 EJ / 4\epsilon^2$.

При $\epsilon = l/2$ подбором определяем $kl=1,8$ и $P_{кр} = 3,25 EJ / l^2$.

Рассмотрим теперь стержни ступенчато переменной жесткости (рис. 3.11). Условия стыковки соответствуют схеме (а) на рисунке 3.9.

Для схемы, изображенной на рис. 3.11а, на первом участке имеем $y_0 = \theta_0 = 0$. Из условия стыковки участков выразим начальные параметры второго участка через оставшиеся начальные параметры первого участка:

$$\begin{aligned} \theta_{2(0)} &= \frac{M_0}{EJ_1 k_1} \sin k_1 a + \frac{Q_0}{EJ_1 k^2} (1 - \cos k_1 a) , \quad k_1^2 = P / EJ_1 ; \\ M_{2(0)} &= M_0 \cos k_1 a + (Q_0 / k_1) \sin k_1 a , \\ Q_{2(0)} &= -M_0 k_1 \sin k_1 a + Q_0 \cos k_1 a . \end{aligned} \quad (B)$$

По формулам метода начальных параметров составим выражение для этих

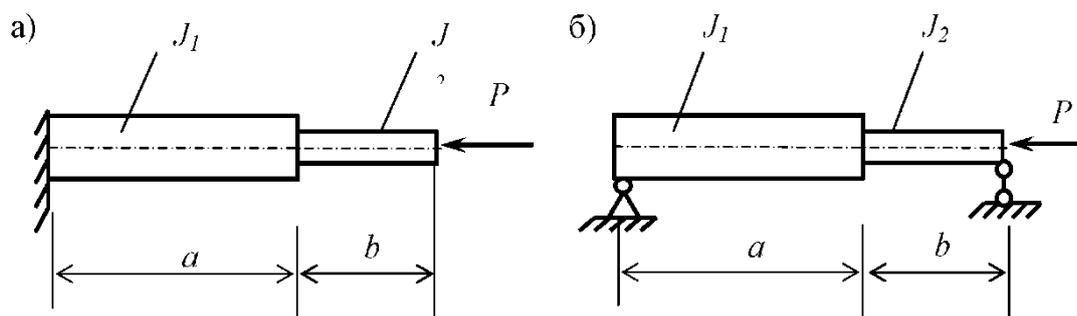


Рис. 3.11

параметров в конце второго участка:

$$\begin{aligned} \theta_{2(b)} &= \theta_{2(0)} + \frac{M_{2(0)}}{EJ_2 k_2} \sin k_2 \vartheta + \frac{Q_{2(0)}}{EJ_2 k_2^2} (1 - \cos k_2 \vartheta), \\ M_{2(b)} &= M_{2(0)} \cos k_2 \vartheta + (Q_{2(0)} / k_2) \sin k_2 \vartheta, \\ Q_{2(b)} &= M_{2(0)} k_2 \sin k_2 \vartheta + Q_{2(0)} \cos k_2 \vartheta, \quad k_2^2 = P / EJ_2. \end{aligned} \quad (г)$$

Из выражения (г) составим граничные условия на свободном конце стержня, которые имеют вид (б). При этом учтем соотношения (в):

$$\begin{aligned} P\theta_{2(0)} + M_{2(0)}k_2 \sin k_2 \vartheta + Q_{2(0)}(1 - \cos k_2 \vartheta) - M_{2(0)}k_2 \sin k_2 \vartheta + Q_{2(0)} \cos k_2 \vartheta = \\ = P\theta_{2(0)} + Q_{2(0)} = Q_0 = 0 ; \\ [M_0 \cos k_1 a + (Q_0 / k_1) \sin k_1 a] \cos k_2 \vartheta + [-M_0 (k_1 / k_2) \sin k_1 a + (Q_0 / k_2) \cos k_1 a] \sin k_2 \vartheta = \\ = M_0 [\cos k_1 a \cos k_2 \vartheta - (k_1 / k_2) \sin k_1 a \sin k_2 \vartheta] + \\ + Q_0 [k_2 \sin k_1 a \cos k_2 \vartheta + k_1 \cos k_1 a \sin k_2 \vartheta] / k_1 k_2 = 0. \end{aligned}$$

Составляя определитель, получаем:

$$\operatorname{tg} k_1 a \operatorname{tg} k_2 \vartheta - k_2 / k_1.$$

При $J_1 = J_2$ ($k_1 = k_2 = k$) имеем:

$$\sin k a \sin k \vartheta - \cos k a \cos k \vartheta = -\cos k l = 0.$$

Отсюда получаем известное решение для стержня постоянной жесткости.

При $a = l/2$ и $J_1 = 4J_2$ ($k_2 = 2k_1$) имеем:

$$\operatorname{tg} \lambda \operatorname{tg} 2\lambda - 2, \quad \text{где } \lambda = k_1 l / 2.$$

Это уравнение преобразуется к виду $\operatorname{tg} \lambda = 1 / \sqrt{2}$. Его корень $\lambda = 0,6155$. Отсюда:

$$P_{кр} = (2 \cdot 0,6155)^2 EJ_1 / l^2 = 1,517 EJ_1 / l^2.$$

Аналогично выведем характеристическое уравнение для схемы, изображенной на рис. 3.11б. Начальные параметры для второго участка:

$$y_{2(0)} = \theta_0 a + Q_0 (k_1 a - \sin k_1 a) / EJ_1 k_1^3, \quad M_{2(0)} = (Q_0 / k_1) \sin k_1 a,$$

$$\theta_{2(0)} = \theta_0 + Q_0 (1 - \cos k_1 a) / EJ_1 k_1^2, \quad Q_{2(0)} = Q_0 \cos k_1 a.$$

Граничные условия на конце второго участка с учетом этих соотношений примут вид:

$$y_{2(\vartheta)} = \theta_0 (a + \vartheta) + \frac{Q_0}{P} \left(a + \vartheta - \frac{1}{k_1} \sin k_1 a \cos k_2 \vartheta - \frac{1}{k_2} \cos k_1 a \sin k_2 \vartheta \right) = 0,$$

$$M_{2(\vartheta)} = Q_0 (k_2 \sin k_1 a \cos k_2 \vartheta + k_1 \cos k_1 a \sin k_2 \vartheta) / k_1 k_2 = 0.$$

Отсюда получаем следующее характеристическое уравнение:

$$k_2 \sin k_1 a \cos k_2 \vartheta + k_1 \sin k_2 \vartheta \cos k_1 a = 0.$$

При $k_1 - k_2 - k$ это уравнение примет вид $\sin kl = 0$, что дает известное выражение для критической силы шарнирно опертого стержня постоянной жесткости.

При ранее принятых параметрах $a = \vartheta = l/2$ и $k_2 = 2k_1$ характеристическое уравнение примет вид:

$$2 \sin \lambda (\cos 2\lambda + \cos^2 \lambda) = 0, \quad \text{где } \lambda = k_1 l / 2.$$

Наименьший корень получаем, приравнявая скобку нулю: $\lambda = 0,9553$. Отсюда:
 $P_{кр} = 3,65 EJ / l^2$.

3.7. Устойчивость упругих систем при комбинированном нагружении

При решении задач устойчивости при действии нескольких нагрузок мы полагали, что нагрузка возрастает пропорционально одному параметру P , определяли его критическое значение и тем самым – коэффициентом запаса устойчивости при фиксированной нагрузке P :

$$n_y = P_{кр} / P. \quad (3.24)$$

Во многих задачах расчета конструкций нагрузки не связаны между собой зависимостями. Например, по различным законам могут изменяться собственный вес, осевые нагрузки и крутящий момент. В этом случае важной становится задача исследования устойчивости упругой системы при возможных различных сочетаниях нагрузок.

Рассмотрим вновь задачу исследования устойчивости стержня, заземленного нижним концом под действием двух осевых сил P_1 и P_2 (рис. 3.8). Ранее энергетическим методом получено соотношение:

$$EJ (\pi / 2l)^2 = P_1 + P_2 \left(\vartheta / l - \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi \vartheta}{l} \right).$$

Это уравнение можно представить в виде:

$$P_1 / P_{1кр} + P_2 / P_{2кр} = 1, \quad (3.25)$$

где $P_{1кр} = EJ (\pi / 2l)^2$, $P_{2кр} = EJ (\pi / 2l)^2 / \left(\frac{\vartheta}{l} - \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi \vartheta}{l} \right)$,

парциальные значения критических нагрузок (при отсутствии другой силы).
Кстати, точное решение этой задачи дает:

$$P_{2кр} = EJ(\pi/2\theta)^2.$$

Уравнение (25) в плоскости параметров P_1 и P_2 представляет собой прямую (прямая AB на рис. 3.12).

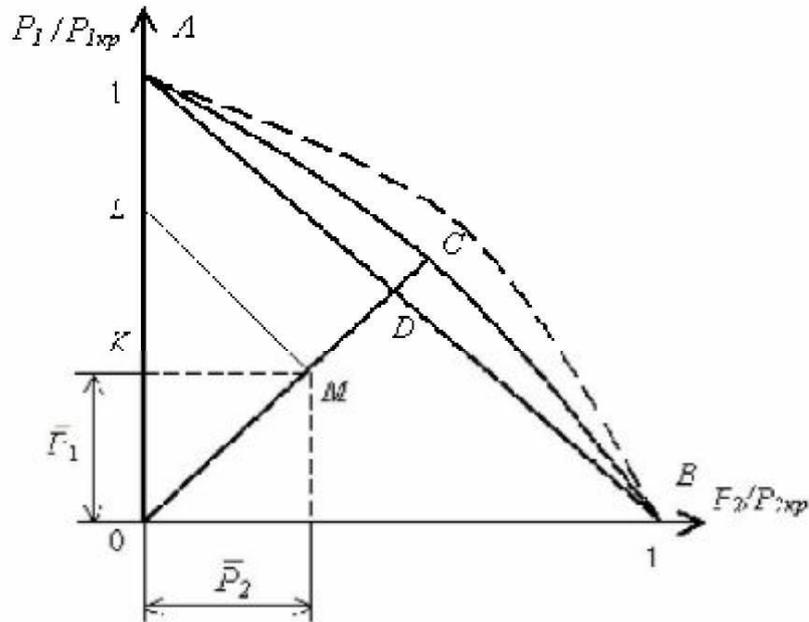


Рис. 3.12

Точное решение задачи при $\nu=l/2$ дает следующее характеристическое уравнение [3]:

$$\operatorname{tg}(k_1 l/2) \operatorname{tg}(k_2 l/2) = k_2 / k_1, \quad (3.26)$$

где $k_1^2 = P_1 / EJ$, $k_2^2 = (P_1 + P_2) / EJ$.

Определим критическое сочетание нагрузок по этому уравнению. Пусть $P_2 = 1,25P_1$. Тогда $k_2 = 1,5k_1$ и уравнение (26) примет вид:

$$\operatorname{tg} \lambda \operatorname{tg}(3\lambda/2) = 1,5,$$

где $\lambda = k_1 l/2$.

Это уравнение можно переписать в виде:

$$\frac{2x}{1-x^2} \cdot \frac{3x-x^3}{1-3x^2} = 1,5,$$

где $x = \operatorname{tg} \lambda/2$.

Отсюда находим наименьший корень $x=0,367$ и $\lambda=0,7036$.

Тогда:

$$P_1/P_{1кр} = (4\lambda/\pi)^2 = 0,803;$$

$$P_2/P_{2кр} = 1,25P_1/P_{2кр} = 1,25(P_{1кр}/P_{2кр})(P_1/P_{1кр}) = 1,25 \cdot 0,25 \cdot 0,803 = 0,25.$$

Положим $P_2 = 3P_1$. Тогда $k_2 = 2k_1$ и характеристическое уравнение примет вид:

$$\operatorname{tg} \lambda \operatorname{tg} 2\lambda = 2.$$

Отсюда:

$$4\operatorname{tg}^2 \lambda = 2, \quad \operatorname{tg} \lambda = 0,707, \quad \lambda = 0,6155.$$

Тогда: $P_1/P_{1кр}=(4\lambda/\pi)^2=0,614$, $P_2/P_{2кр}=3\cdot 0,25\cdot 0,614=0,46$.

Пусть теперь $P_2 = 8P_1$. Тогда $k_2 = 3k_1$ и уравнение (26) примет вид:

$$\operatorname{tg} \lambda \operatorname{tg} 3\lambda = 3.$$

Это уравнение можно переписать так:

$$x(3x-x^3)/(1-3x^2) = 3, \text{ где } x = \operatorname{tg} \lambda.$$

Отсюда наименьший корень $x=0,505$ и $\lambda=0,468$. Тогда:

$$P_1/P_{1кр}=0,355, \quad P_2/P_{2кр}=0,71.$$

По этим точкам построим кривую ACB (рис. 3.12).

При малых значениях P_1 и P_2 стержень устойчив. Отсюда следует, что сочетаниям нагрузок, соответствующим точкам внутри области $OACBO$ соответствует устойчивое равновесие системы. За пределами этой области система неустойчива. Область $OACBO$ назовём областью устойчивости, а кривую ABC - пограничной кривой. Точки этой кривой соответствуют критическим сочетаниям нагрузок.

В случае n -параметрической нагрузки будем иметь соответствующие области устойчивости n -мерного пространства и пограничную поверхность, соответствующую критическим сочетаниям параметров P_i . В этом случае уравнение (25) примет вид:

$$\sum_{i=1}^n P_i / P_{iкр} = 1. \quad (3.27)$$

Общие свойства границ областей устойчивости детально исследованы П.Ф. Папковичем. В частности, им доказана важная теорема о выпуклости границы области устойчивости. Практическая ценность теоремы в том, что она гарантирует уменьшение области устойчивости при замене пограничной поверхности плоскостью (27).

Этой теоремой часто пользуются для приближенного построения границы области устойчивости. Если известны только отдельные точки этой границы, то, соединяя их отрезками прямых, можно получить надежную аппроксимацию истинной границы.

Необходимо подчеркнуть, что теорема Папковича доказывается только для линейной задачи устойчивости. Эта теорема верна, если докритическое напряженно-деформированное состояние упругой системы определено по линейной теории и при расчёте на устойчивость докритические перемещения системы не учитываются.

Для приближенных расчетов пограничную кривую можно заменить прямой (25) или плоскостью (26). Согласно теореме Папковича такая замена идёт в запас устойчивости. Пользуясь прямой AB вместо кривой ABC легко получить формулу для определения коэффициента запаса устойчивости при фиксированных нагрузках.

Коэффициент запаса при нагрузках $\bar{P}_1 = P_1 / P_{1кр}$ и $\bar{P}_2 = P_2 / P_{2кр}$, соответствующих точке M (рис. 3.12) равен отношению отрезков $O\zeta$ и OM . Через

рабочую точку M проведем прямую, параллельную AB . Из подобия треугольников OAB и KLM имеем:

$$KL = \overline{P_2} OA / OB = \overline{P_2} .$$

Далее из подобия треугольников ODA и OML определяем коэффициент запаса устойчивости:

$$n_y = \frac{OD}{OM} = \frac{OA}{OL} = \frac{1}{\overline{P_1 + P_2}} = \frac{1}{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}, \quad (3.28)$$

где n_i – коэффициенты запаса по каждой нагрузке.

Эту формулу легко обобщить на n нагрузок

$$n_y = 1 / \sum_{i=1}^n \frac{1}{n_i}. \quad (3.29)$$

Реальный коэффициент запаса будет всегда больше значений, найденных по этим формулам, так как он равен отношению отрезков OC (а не OL) и OM .

Таким образом, для приближенного определения критического сочетания нагрузок достаточно знать парциальные критические нагрузки и воспользоваться формулой (27). Так при совместном действии осевой силы на конце стержня и собственного веса уравнение критических нагрузок можно записать в виде:

$$P/P_{кр} + q/q_{кр} - 1,$$

где $q_{кр} = 18,5EJ/l^3$ для шарнирно опертого стержня и $q_{кр} = 7,87EJ/l^3$ для стойки со свободным верхним и защемленным нижним концом.

Рассмотрим еще один пример комбинированного нагружения. Пусть гибкий стержень (буровая штанга) находится под действием скручивающих пар T , приложенных по шарнирно - опертым концом. При этом стержень может потерять устойчивость, а его ось образовать пространственную кривую (рис. 3.13). Эта система является неконсервативной, так как в разных вариантах перехода стержня в изогнутое положение, включающих поворот концевых сечений вокруг оси z , пары могут

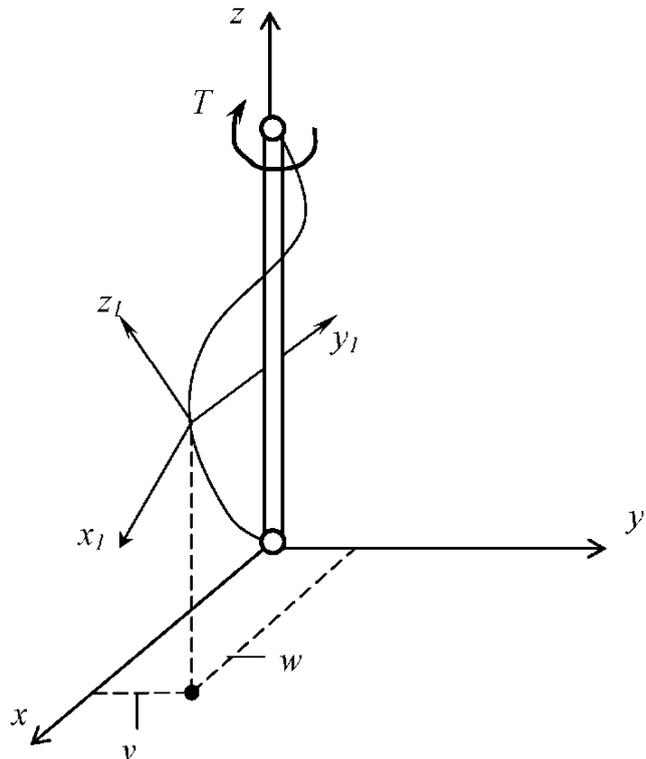


Рис. 3.13

произвести различную работу. Следовательно, данная задача требует динамического подхода. Однако статический метод здесь приводит, в виде исключения к правильным результатам [1].

Выберем основную и местную системы координат. Перемещение произвольной точки оси вдоль осей y и x обозначим v и w . Определяя проекции вектора момента на оси y_1 и x_1 , получаем следующие дифференциальные уравнения:

$$EJ \frac{d^2V}{dz^2} = -T \frac{dW}{dz}; \quad EJ \frac{d^2W}{dz^2} = T \frac{dV}{dz}.$$

Вводя обозначение $S=T/EJ$, перепишем эту систему так:

$$V'' + SW' = 0, \quad W'' - SV' = 0. \quad (3.30)$$

Решение этой системы имеет вид:

$$\begin{aligned} V &= A \sin Sz + B \cos Sz + C, \\ W &= -A \cos Sz + B \sin Sz + D. \end{aligned}$$

Граничные условия задачи:

$$V = W = 0 \text{ при } z=0 \text{ и } z=l. \quad (3.31)$$

Условия, относящиеся к сечению $z=0$, дают

$$C = -B, \quad D = A.$$

Оставшиеся условия приводят к системе:

$$\begin{aligned} A \sin Sl - B(1 - \cos Sl) &= 0, \\ A(1 - \cos Sl) + B \sin Sl &= 0. \end{aligned}$$

Приравнявая нулю определитель этой системы, получим:

$$\sin^2 Sl - (1 - \cos Sl)^2 = 0 \text{ или } \cos Sl = 1.$$

Отсюда получаем:

$$T_{кр} = 2\pi EJ/l. \quad (3.32)$$

Пусть теперь кроме пары действует сжимающая по концам осевая сила P . Тогда система (30) примет вид:

$$V'' + SW' + k^2V = 0, \quad W'' - SV' + k^2W = 0, \quad (3.33)$$

где $k^2 = P/EJ$.

Решение этой системы будем искать в виде:

$$\begin{aligned} V &= A \sin r_1 z + B \cos r_1 z + C \sin r_2 z + D \cos r_2 z, \\ W &= -A \cos r_1 z + B \sin r_1 z - C \cos r_2 z - D \sin r_2 z. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Подставляя эти выражения в (33), находим, что r_1 и r_2 должны удовлетворять одному и тому же уравнению:

$$r^2 - Sr - k^2 = 0.$$

Отсюда находим:

$$r_{1,2} = S/2 \pm \sqrt{S^2/4 + k^2}.$$

Граничные условия при $z=0$ дают:

$$B + D = 0, \quad A - C = 0.$$

Другие два условия приводят к системе:

$$\begin{aligned} A(\sin r_1 l - \sin r_2 l) - B(\cos r_1 l - \cos r_2 l) &= 0, \\ -A(\cos r_1 l - \cos r_2 l) - B(\sin r_1 l - \sin r_2 l) &= 0. \end{aligned}$$

Приравнявая определитель этой системы нулю, получим:

$$(\sin r_1 l - \sin r_2 l)^2 + (\cos r_1 l - \cos r_2 l)^2 = 0$$

или $\cos(r_1-r_2)l-1$.
 Отсюда $(r_1-r_2)l-2\pi$.

Подставляя сюда значения r_1 и r_2 , получим:

$$(\pi l)^2 - S^2/4 = k^2.$$

Это выражение можно переписать в виде:

$$P/P_{кр} + (T/T_{кр})^2 = 1. \quad (3.35)$$

Пограничная кривая, построенная по этому уравнению, показана на рисунке 3.12 пунктирной линией. По оси абсцисс отложена величина $T/T_{кр}$.

3.8. Закритические деформации стержней

Линеаризованные уравнения и энергетический метод, использованные выше дают возможность находить критические нагрузки и соответствующие им формы потери устойчивости с точностью до постоянного множителя. При этом сами прогибы после потери устойчивости остаются неопределенными. Для их определения надо рассмотреть задачу устойчивости в нелинейной постановке. Это связано с тем, что в закритической области прогибы не являются бесконечно малыми, они имеют конечную величину.

Задача нелинейного деформирования гибких стержней не всегда имеет точное решение, но в ряде случаев удается получить решение в специальных функциях. Например, для стержня постоянной жесткости, сжатого силой P , решение получается в эллиптических интегралах [1].

Воспользуемся энергетическим методом, позволяющим исследовать закритическое поведение любого произвольно нагруженного стержня, если для него известно решение линейной задачи. При этом ограничимся малыми по сравнению с длиной стержня прогибами, поскольку только они представляют интерес в силовых конструкциях.

Рассмотрим характерный для большинства практических задач случай, когда после потери устойчивости один из торцов стержня может смещаться в продольном направлении. Тогда закритическое деформирование состоит в изгибе стержня. При этом ось стержня можно считать нерастяжимой. Из этого условия легко выразить продольные перемещения u через угол наклона касательной к упругой линии θ по формуле:

$$u(s) = - \int_0^s (1 - \cos \theta) ds, \quad (a)$$

где S – координата, отсчитываемая от неподвижной опоры вдоль деформированной оси стержня.

Внутренний изгибающий момент в стержне равен:

$$M = EJ / \rho = EJ y''(s), \quad (б)$$

где ρ - радиус кривизны деформированной оси.

Выражения (а) и (б) позволяют определить изменение полной потенциальной энергии стержня при изгибе. Так, если стержень нагружен сжимающей силой P и распределенной нагрузкой $q(s)$, то

$$\Delta \mathcal{E} = \int_0^l \left[\frac{1}{2} EJ(y'')^2 - q(s)u(s) \right] ds - Pu_P, \quad (3.36)$$

где u_P – продольное смещение точки приложения силы P .

Перейдем к построению приближенного решения методом Релея-Ритца. Полагаем, что из линейного решения известна критическая нагрузка и соответствующая ей первая собственная функция задачи $y(s)$. Заметим, что в линейной постановке различие между координатами z и S исчезает и во всех соотношениях можно перейти к переменной z .

При малых прогибах естественно предположить, что форму изогнутой оси стержня можно описать первой собственной функцией линейной задачи:

$$y = Ay_1(z). \quad (3.37)$$

Учитывая малость деформации, в выражении (а) $\cos \theta$ можно разложить в ряд Тейлора:

$$U_{(z)} = - \int_0^z (\theta^2/2 - \theta^4/4! + \theta^6/6! - \dots) dz = - \int_0^z [(y')^2/2 - (y')^4/4! + \dots] dz \quad (3.38)$$

С учетом формул (37) и (38) можно преобразовать уравнение (36). Так, для стержня сжатого силой на конце при учете двух членов в (38) это уравнение примет вид:

$$\Delta \mathcal{E} = 0,5A^2 \int_0^l EJ(y_1'')^2 dz - P \int_0^l \left[\frac{A^2}{2} (y_1')^2 - \frac{A^4}{4!} (y_1')^4 \right] dz.$$

Условие стационарности $\Delta \mathcal{E} (d(\Delta \mathcal{E})/dA = 0)$ приводит к уравнению:

$$A \int_0^l EJ(y_1'')^2 dz - P \int_0^l [A(y_1')^2 - A^3(y_1')^4/3!] dz = 0.$$

Поделив все слагаемые на $\int_0^l (y_1')^2 dz$, получим

$$A[P_{кр} - P(1 - A^2B)] = 0,$$

где
$$B = \frac{1}{6} \frac{\int_0^l (y_1')^4 dz}{\int_0^l (y_1')^2 dz}. \quad (3.39)$$

Отсюда следует, что при $P > P_{кр}$ становится возможной и изгибная форма равновесия, описываемая выражением (37). Приравняв в последнем выражении квадратную скобку нулю, находим:

$$A = \pm \frac{1}{\sqrt{B}} \sqrt{P/P_{кр} - 1}.$$

(3.40)

Исследуем знак второй производной от энергии:

$$d^2(\Delta \mathcal{E})/dA^2 = (P_{кр}^2 - 4PP_{кр} + 3P^2)/P_{кр}.$$

Полагая $P = P_{кр} - \Delta P$, имеем:

$$d^2(\Delta \mathcal{E})/dA^2 - 2\Delta P - \Delta P^2/P_{кр} > 0.$$

Следовательно, изгибная форма стержня устойчива, а критическая точка бифуркации относится к первому типу (§1.3).

Аналогично приближенное решение может быть получено для стержня, нагруженного распределенной силой. В этом случае

$$A = \frac{1}{\sqrt{B}} \sqrt{q/q_{кр} - 1}, \quad B = \frac{1}{6} \int_0^l q(z) \left[\int_0^z (y_1')^4 dz \right] \cdot dz / \int_0^l q(z) \left[\int_0^z (y_1')^2 dz \right] \cdot dz \quad (3.41)$$

Напряжение в стержне после потери устойчивости складывается из напряжения сжатия и изгиба, причем напряжение изгиба равно:

$$\sigma_u = \pm A y_1'' E J / W, \quad (3.42)$$

где W – осевой момент сопротивления сечения.

Схему расчета поясним на двух примерах. Для шарнирно опертого стержня постоянной жесткости, сжатого силой P , первая собственная форма имеет вид:

$$y_1 = \sin \pi z / l.$$

Тогда по формуле (39):

$$B = \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \int_0^l \cos^4 \frac{\pi z}{l} dz : \int_0^l \cos^2 \frac{\pi z}{l} dz = \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \frac{3l/8}{l/2} = \frac{\pi^2}{8l^2}.$$

Максимальный прогиб стержня:

$$y_{\max} = \sqrt{8} \sqrt{P/P_{кр} - 1} l / \pi. \quad (3.43)$$

Простой анализ показывает, что для гибких стержней малейшее превышение критической силы приводит к появлению значительных напряжений изгиба.

Рассмотрим стержень со свободным верхним и защемленным нижним концом под действием собственного веса. Критическая нагрузка для такого стержня равна $q_{кр} = 7,84 E J / l^2$, а форма изогнутой оси описывается функциями Бесселя. Но для приближенного решения эти функции неудобны. Закритические перемещения можно оценить, используя более простые функции формы, удовлетворяющие геометрическим граничным условиям задачи. В данном случае можно принять:

$$y = (1 - \cos \pi z / 2l), \quad y' = A (\pi / 2l) \sin \pi z / 2l.$$

По формуле (39) находим:

$$\begin{aligned} \int_0^l \left(\int_0^z \sin^4 \frac{\pi z}{2l} dz \right) dz &= \left(\frac{2l}{\pi} \right)^2 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x \right) dx = \left(\frac{2l}{\pi} \right)^2 \left(\frac{3\pi^2}{64} - \frac{1}{4} \right); \\ \int_0^l \left(\int_0^z \sin^2 \frac{\pi z}{2l} dz \right) dz &= \left(\frac{2l}{\pi} \right)^2 \int_0^{\pi/2} (0,5x - 0,25 \sin 2x) dx = (2l/\pi)^2 (\pi^2/16 - 1/4); \\ B &= \frac{\pi^2}{24l^2} \frac{3\pi^2 - 16}{4(\pi^2 - 4)}. \end{aligned}$$

Теперь

$$y_{\max} = A = \frac{4\sqrt{6(\pi^2 - 4)}}{\pi\sqrt{3\pi^2 - 16}} l \sqrt{q/q_{кр} - 1} = 2,05l \sqrt{q/q_{кр} - 1}.$$

Максимальный момент возникает при $z=0$ и из условия равновесия равен:

$$M_{\max} = \int_0^l qydz = qA(l - 2l/\pi) = 0,745ql^2 \sqrt{q/q_{кр} - 1}.$$

Если в данном случае принять $y = Az^2$, то получим $y_{\max} = 1,94l \sqrt{q/q_{кр} - 1}$.

Это говорит о том, что окончательный результат от вида аппроксимирующей функции зависит незначительно. Поэтому можно обходиться простыми функциями формы.

Для определения закритических деформации можно применить и метод Бубнова - Галеркина. Для этого в выражении (б) кривизну определим ее точным выражением.

$$\frac{l}{\rho} = \frac{y''}{\sqrt{1 - (y')^2}} \approx y'' [1 + 0,5(y')^2]. \quad (3.44)$$

Составим уравнение равновесия в виде суммы моментов относительно произвольной точки оси. Для шарнирно опертого стержня это уравнение запишется так:

$$M = EJ/\rho = -Py.$$

С учетом соотношения (44) приходим к следующему дифференциальному уравнению:

$$y'' [1 + 0,5(y')^2] + k^2 y = 0, \quad k^2 = P/EJ. \quad (3.45)$$

Приближенное решение представим в виде:

$$y = A \sin \pi z / l,$$

где функция формы удовлетворяет всем граничным условиям (и геометрическим и силовым).

Согласно процедуре метода Бубнова - Галеркина имеем:

$$\int_0^l \{ y'' [1 + 0,5(y')^2] + k^2 y \} \sin(\pi z / l) dz = 0.$$

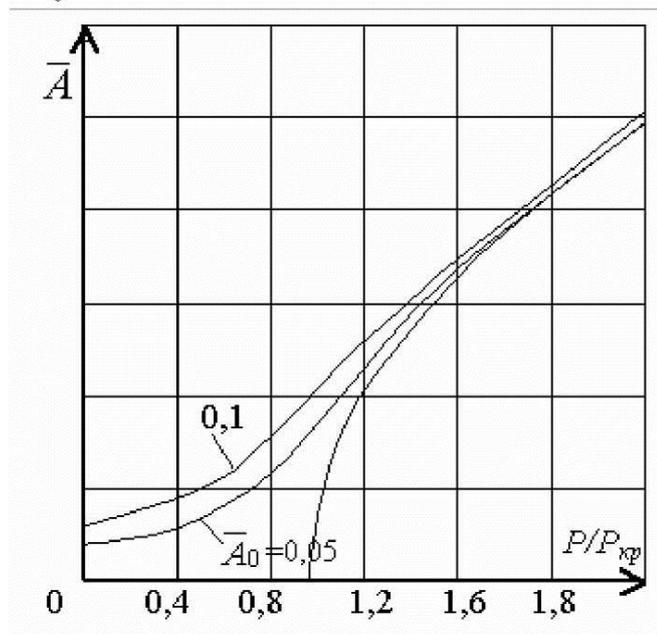


Рис. 3.14

Подставляя сюда выражение для y и интегрируя, получаем:

$$\pi^2 A^3 / 8l^2 \cdot A(1 - P/P_{кр}) - 0.$$

Здесь учтено, что:

$$\int_0^l \sin^2 \frac{\pi z}{l} dz = l/2, \quad \int_0^l \cos^2 \frac{\pi z}{l} \sin \frac{\pi z}{l} dz = 2l/3\pi.$$

Из последнего уравнения при $P > P_{кр}$ получаем:

$$A = (\sqrt{8l/\pi}) \sqrt{P/P_{кр} - 1},$$

что совпадает с ранее полученным выражением.

На рисунке 3.14 сплошной линией показан график изменения безразмерной стрелы прогиба от нагрузки.

3.9. Учет начальных искривлений оси стержня

Рассмотренные выше задачи устойчивости стержней базировались на допущениях, что ось стержня до нагружения идеально прямая и все внешние силы и реакции опор действуют строго вдоль оси. Между тем ось реального гибкого стержня может иметь начальные искривления. Выясним их влияние на поведение стержня при продольном нагружении.

В тех случаях, когда идеально правильная система имеет критическую точку бифуркации первого типа (§ 3.8), влияние начальных искривлений можно оценить с помощью линеаризованных однородных уравнений. Общую схему решения покажем на простом примере.

Рассмотрим шарнирно - опертый стержень, сжатый силой P . До нагружения начальный прогиб равен $y_0(z)$; дополнительный прогиб, появляющийся в результате продольного нагружения, обозначим $y - y_0(z)$. Тогда полный прогиб равен:

$$y_n(z) = y(z) - y_0(z).$$

Примем, что полные прогибы малы по сравнению с длиной стержня. Приравнявая момент от внешней силы P внутреннему изгибающему моменту, определенному по линейной теории, запишем:

$$EJy'' - Py_n = 0.$$

Здесь учтено, что изгибающий момент связан только с дополнительным изгибом стержня, а плечо внешней силы определяется полным прогибом. Полученное уравнение перепишем в виде:

$$EJy'' - Py - Py_0 = 0. \quad (3.46)$$

Решение уравнения будем искать в виде разложения по собственным функциям однородной задачи:

$$y_n(z) = \sin(n\pi z / l), \quad n = 1, 2, 3, \dots; \quad (3.47)$$

$$y(z) = \sum C_n y_n(z) = \sum C_n \sin(n\pi z / l).$$

Правую часть уравнения представим в виде ряда по тем же функциям:

$$y_0(z) = \sum C_{on} y_n(z). \quad (3.48)$$

Подставив (47) и (48) в уравнение (46) и приравняв коэффициенты при каждой гармонике в левой и правых частях равенства, получим цепочку алгебраических уравнений:

$$(P - P_n)C_n - PC_{on},$$

где $P_n = EJ(\pi n/l)^2$ – собственные значения задачи.

Отсюда находим:

$$C_n = C_{on} / (P_n - P); \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (3.49)$$

Из этой формулы видно, что при $P \rightarrow P_n$ амплитуда соответствующей гармоники $C_n \rightarrow \infty$. Но при сжатии стержня чаще всего реализуются нагрузки $P < P_{кр} = EJ(\pi/l)^2$. Следовательно, в этом диапазоне нагрузки может резко возрасти только амплитуда первой гармоники. Поэтому в приближенном решении обычно ограничиваются учетом только первой гармоники:

$$y(z) \approx \frac{C_{01}}{P_{кр} / P - 1} \sin \frac{\pi z}{l}; \quad y_{n(z)} \approx \frac{C_{01}}{1 - P / P_{кр}} \sin \frac{\pi z}{l}.$$

При этом максимальный полный прогиб равен:

$$y_{max} = C_{01} / (1 - P / P_{кр}). \quad (3.50)$$

После определения прогибов легко найти максимальные напряжения изгиба:

$$\max \sigma_n = \pm M_{max} / W, \quad \text{где } M_{max} = P y_{max}.$$

Приведенное решение можно использовать и в случае произвольно нагруженного стержня при произвольных граничных условиях. В этом случае потеря устойчивости идеального стержня описывается уравнением (2), который можно записать так:

$$(EJy''')'' - P(N_0 y')' = 0, \quad (a)$$

где P – параметр нагрузки, $N_0 = N_0(z)$ – распределение внутренних усилий в стержне при $P = 1$.

Собственные функции этого уравнения $y_n(z)$, удовлетворяющие всем граничным условиям и собственные значения параметра нагрузки P_n считаем известными, причем:

$$P_n = \int_0^l (EJy_n''')'' y_n dz : \int_0^l (N_0 y_n')' y_n dz. \quad (3.51)$$

Условие равновесия в проекции на ось y элемента стержня с начальными искривлениями оси при замене θ на $\theta_n = \theta(z) = \theta_{0(z)}$ (рис. 3.1) приводит к уравнению:

$$Q' - P(N_0 \theta_n)' = 0.$$

Отсюда получаем следующее дифференциальное уравнение относительно дополнительного прогиба:

$$(EJy''')'' - P(N_0 y')' - P(N_0 y_0')' = 0. \quad (3.52)$$

Решение этого уравнению ищем в виде разложения по собственным функциям однородного уравнения (a). Они имеют вид (47) и (48). Подставляя эти разложения в уравнение (52), получим:

$$\sum C_n (EJy_n''')'' - P \sum C_n (N_0 y_n')' = P \sum C_{on} (N_0 y_n')'.$$

Умножим обе части этого уравнения на собственные функции $y_n(z)$ и проинтегрируем результат от 0 до l . В силу свойства обобщенной ортогональности имеем:

$$C_n \int_0^l (EJy_n''') y_n dz - PC_n \int_0^l (N_0 y_n') y_n dz = PC_{on} \int_0^l (N_0 y_n') y_n dz .$$

Поделив все слагаемые на интеграл в правой части с учетом формулы (51) получим вновь выражение (49).

Повторяя далее вышеприведенные рассуждения приближенно можно принять:

$$y(z) = \frac{C_{01}}{P_{кр} / P - 1} y_{1(z)} \cdot y_n(z) = \frac{C_{01}}{1 - P / P_{кр}} y_{1(z)} , \quad (3.53)$$

где $y_{1(z)}$ - первая собственная функция стержня с прямолинейной осью.

Из формулы (50) и (53) следует, что при $P \rightarrow P_{кр}$ прогиб стремится к бесконечности. Это является следствием применения линеаризованных уравнений. Если применять нелинейные соотношения, то прогибы окажутся конечными.

Полную кривизну стержня представим в виде нелинейного соотношения (44), а начальную кривизну в виду малости по-прежнему будем определять линейным соотношением. Тогда изгибающий момент:

$$M = EJ(1/\rho_n - 1/\rho_0) = EJ \left\{ y_n'' \left[1 + 0,5(y_n')^2 \right] - y_0'' \right\} .$$

Теперь дифференциальное уравнение равновесия для шарнирно опертого стержня примет вид:

$$y_n'' \left[1 + 0,5(y_n')^2 \right] - y_0'' + Py_n / EJ = 0 \quad (3.54)$$

Полный и начальный прогиб представим в виде первой собственной функции линейной задачи:

$$y_n = A \sin(\pi z / l) , y_0 = A_0 \sin(\pi z / l) . \quad (3.55)$$

Подставляя эти выражения в уравнение (54) и применяя метод Бубнова-Галеркина, находим:

$$\pi^2 \bar{A}^3 / 8 + \bar{A} (1 - P / P_{кр}) = \bar{A}_0 , \quad (3.56)$$

где $\bar{A} = A / l$, $\bar{A}_0 = A_0 / l$ - безразмерные стрелы прогиба.

При $P < P_{кр}$ полный прогиб мал, поэтому в уравнений (56) можно пренебречь первым членом и получить решение, совпадающее с выражением (50).

Значения безразмерной стрелы прогиба при значениях начальной стрелы прогиба: $\bar{A}_0 = 0,05$ и $\bar{A}_0 = 0,1$, рассчитанные по уравнению (56), приведены на рисунке 3.14 штрих - пунктирными линиями. Расчеты показывают, что формула (50) дает достаточную точность при $P \leq 0,7 P_{кр}$. При больших значениях нагрузки прогибы надо определять из кубического уравнения (56). При существенном превышении критической силы ($P \geq 1,5 P_{кр}$) влияние начальных искривлений становится неощутимым и прогибы можно определять выражением (43), которое вытекает и из уравнения (56) при $\bar{A}_0 = 0$.

3.10. Учет эксцентриситета нагрузки

Пусть шарнирно опертый стержень сжимается силами P , точка приложения которых отстоит от центра тяжести на расстоянии e (рис. 3.15) в плоскости наименьшей жесткости стержня.

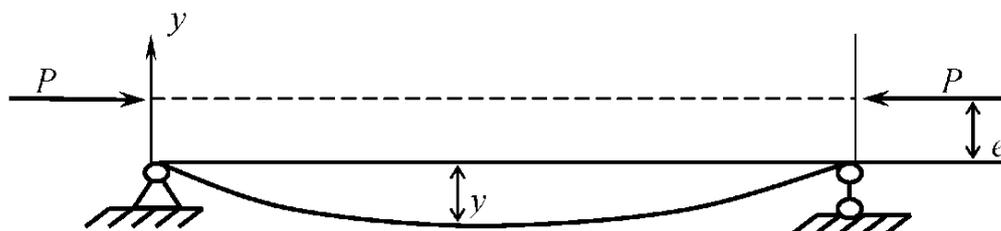


Рис. 3.15

Дифференциальное уравнение равновесия примет вид:

$$EJy'' - P(y - e) \text{ или } y'' + k^2y - k^2e, \quad (3.57)$$

где $k^2 = P/EJ$.

Полное решение этого уравнения имеет вид:

$$y = A \cos kz + B \sin kz - e.$$

Удовлетворяя граничным условиям при $z=0$ и $z=l$, найдем:

$$A = e, \quad B = e \operatorname{tg}(kl/2).$$

Решение теперь можно записать так:

$$y = e \left[\cos kz - \operatorname{tg}(kl/2) \sin kz - 1 \right] \text{ или } y = e \left[\frac{\cos(0,5l - z)}{\cos(kl/2)} - 1 \right]. \quad (3.58)$$

Безразмерная стрела прогиба равна ($z=l/2$):

$$\bar{A} = y_{\max} / l = e_0 \left[\frac{1}{\cos(\sqrt{P/P_{кр}} \pi/2)} - 1 \right], \quad (3.59)$$

где $e_0 = e/l$.

Решим эту же задачу методом Бубнова-Галеркина. Уравнение упругой линии примем в виде (55). Тогда из уравнения (57) имеем:

$$\int_0^l [EJy'' + P(y + e)] \sin(\pi z/l) dz = 0.$$

После подстановки сюда выражения (55) получим:

$$\bar{A} = \frac{4}{\pi} e_0 / (P_{кр} / P - 1). \quad (3.60)$$

Из выражения (59) и (60) следует, что при P , стремящемся к $P_{кр}$, прогиб стремится к бесконечности. Для определения прогибов в закритической области кривизну стержня представим нелинейным соотношением (44). Тогда уравнение Бубнова-Галеркина примет вид:

$$\int_0^l \left\{ EJy'' \left[1 + 0,5(y')^2 \right] + P(y+e) \right\} \sin(\pi z/l) dz = 0.$$

Подставляя сюда выражение (55) и интегрируя, получим:

$$\pi^2 \bar{A}^3 / 8 + \bar{A} \left(1 - P/P_{кр} \right) - \frac{4}{\pi} e_0 P/P_{кр} = 0. \quad (3.61)$$

При $P < P_{кр}$ здесь можно пренебречь первым слагаемым, тогда получим выражение (60).

Значения безразмерной стрелы прогиба \bar{A} при $e_0=0,05$, посчитанные по формулам (59-61) приведены в таблице 1.

Таблица 1

$P/P_{кр}$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
Ф.(59)	0,0155	0,0415	0,094	0,25	∞		
Ф.(60)	0,016	0,0424	0,0955	0,255	∞		
Ф.(61)	0,016	0,042	0,095	0,203	0,37	0,53	0,66

Если такому же нагружению подвергается стержень с одним защемленным и другим свободным концом, то уравнение устойчивости примет вид:

$$y'' - k^2 y - k^2(e-f), \quad (3.62)$$

где f – стрела прогиба на свободном конце.

Решение этого уравнения имеет вид:

$$y - (e-f)(1 - \cos kz). \quad (3.63)$$

Полагая $z = l$ вновь получаем выражение (59):

$$f = e \left(\frac{1}{\cos kl} - 1 \right) = e \left[\frac{1}{\cos(\sqrt{P/P_{кр}} \pi/2)} - 1 \right].$$

3.11. Продольно – поперечный изгиб

Рассмотрим нагружение бруса продольной силой и поперечными нагрузками. Такой вид нагружения называется продольно-поперечным изгибом.

При составлении дифференциального уравнения упругой линии балки изгибающий момент надо рассматривать как сумму моментов от поперечных сил M_n и момента от продольной силы Pu . При этом из-за малости прогибов M_n не зависит от u и P и находится как обычно методом сечения. Для стержня,

показанного на рисунке 3.16, дифференциальное уравнение изгиба имеет вид:

$$EJy'' = M_n - Py.$$

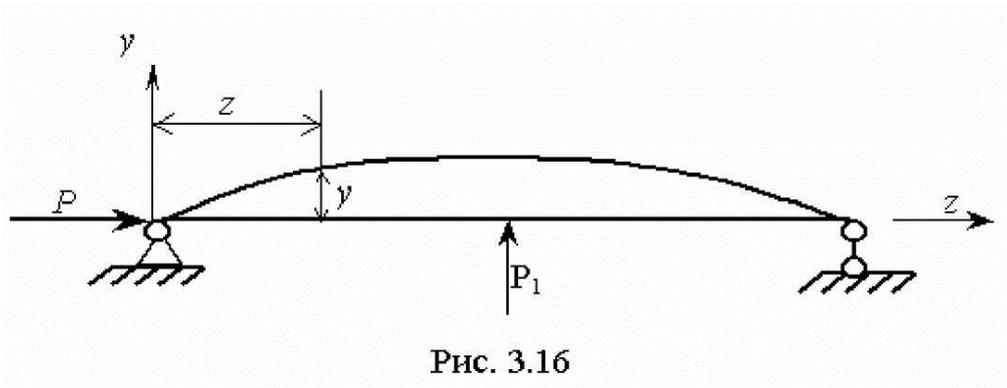


Рис. 3.16

Это уравнение преобразуем к виду:

$$y'' + k^2 y = \frac{M_n}{EJ}, \quad \text{где} \quad k^2 = \frac{P}{EJ}. \quad (3.64)$$

Откуда

$$y = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz + y^*,$$

(3.65)

где y^* - частное решение (64), зависящее от M_n , т.е. от вида поперечной нагрузки. Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются из условия закрепления стержня. Для двух опорной равномерно загруженной балки:

$$M_n = \frac{ql}{2}z - \frac{qz^2}{2}$$

и уравнение (64) примет вид:

$$y'' + k^2 y = \frac{q}{2EJ}(lz - z^2).$$

Частное решение имеет вид:

$$y^* = \frac{q}{2EJk^2} \left(\frac{2}{k^2} + lz - z^2 \right).$$

Следовательно,

$$y = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz + \frac{q}{2EJk^2} \left(\frac{2}{k^2} + lz - z^2 \right).$$

Постоянные C_1 и C_2 подбираются из граничных условий: $z=0$, $z=l$, $y=0$. Отсюда:

$$C_2 = -\frac{q}{k^4 EJ}, \quad C_1 = \frac{q}{k^4 EJ} \frac{\cos kl - 1}{\sin kl}.$$

Тогда

$$y = \frac{q}{EJk^4} \left[- (1 - \cos kl) \frac{\sin kz}{\sin kl} + 1 - \cos kz + \frac{k^2}{2} (lz - z^2) \right]. \quad (3.66)$$

Изгибающий момент:

$$M = EJy'' = \frac{q}{k^2} \left[(1 - \cos kl) \frac{\sin kz}{\sin kl} + \cos kz - 1 \right]. \quad (3.67)$$

Наибольший изгибающий момент возникает при $z = \frac{l}{2}$:

$$M_{\max} = \frac{q}{k^2} \frac{1 - \cos \frac{kl}{2}}{\cos \frac{kl}{2}}. \quad (3.68)$$

При малых значениях сжимающей силы P (при малом k) это выражение после раскрытия неопределенности обращается в $M_{\max} = ql^2/8$, т.е. совпадает с M_{\max} при действии только q . По мере роста P M_{\max} резко возрастает.

При более сложных видах поперечной нагрузки (когда имеется на эпюре M_n несколько участков) определение изгибающих моментов описанным способом становится затруднительным.

В таких случаях удобнее пользоваться приближенными способами. Рассмотрим один из них. При отсутствии силы P имеем:

$$EJy''_n = M_n.$$

Тогда исходное уравнение для шарнирно опертого стержня примет вид:

$$EJy'' = EJy''_n - Py. \quad (a)$$

Теперь примем, что форма упругой линии балки, как при наличии продольных сил, так и без них близка к основной собственной форме колебаний, т.е.:

$$y = f \sin \frac{\pi z}{l}, \quad y_n = f_n \sin \frac{\pi z}{l}.$$

Подставляя y и y_n в уравнение (a), получим:

$$EJf \frac{\pi^2}{l^2} = EJf_n \frac{\pi^2}{l^2} + Pf.$$

Откуда:

$$f = \frac{f_n}{1 - P/P_{кр}}. \quad (3.69)$$

В случае других способов закрепления балки можно пользоваться формулой (69), но подставлять другое значение критической силы.

Предполагая, изгибающие моменты пропорциональными прогибам, можно написать:

$$M = \frac{M_n}{1 - P/P_{кр}}. \quad (3.70)$$

Формулы (69) и (70) несправедливы когда P близко к $P_{кр}$. Погрешность не значительна при $0 < P \leq 0,8P_{кр}$.

Сравним результаты, получаемые по формулам (68) и (70).

Пусть $P = \frac{1}{2}P_{кр}$. Тогда $M_{\max} = 2M_n = 0,25ql^2$, $f_{\max} = 2f_n = \frac{5ql^4}{192EJ}$.

Для оценки погрешности формулы (70) посчитаем M_{\max} по формуле (68):

$$k = \sqrt{\frac{P}{EJ}} = \sqrt{\frac{P_{кр}}{2EJ}} = \frac{\pi}{l\sqrt{2}}.$$

Тогда $M_{\max} = \frac{q2l^2}{\pi^2} \frac{1 - \cos \frac{\pi}{2\sqrt{2}}}{\cos \frac{\pi}{2\sqrt{2}}} \approx 0,252ql^2.$

Худшие результаты дает формула (68) при явно несимметричных видах нагрузки.

3.12. Устойчивость стержней за пределами упругости

Все ранее полученные зависимости выведены на основе закона Гука, который справедлив при напряжениях, меньших предела пропорциональности σ_n . Следовательно, все они, в том числе обобщенная формула Эйлера справедлива в тех же пределах.

Найдем критические напряжения:

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2 F} = \frac{\pi^2 Ei^2}{(\mu l)^2} = \pi^2 E / \lambda^2, \quad (3.71)$$

где $i = \sqrt{J/F}$; $\lambda = \mu l / i$. (3.72)

Здесь i – радиус инерции сечения, λ – гибкость стержня. Пределы применимости формулы Эйлера имеет вид:

$$\pi^2 E / \lambda^2 \leq \sigma_n \quad \text{или} \quad \lambda \geq \pi \sqrt{E / \sigma_n}.$$

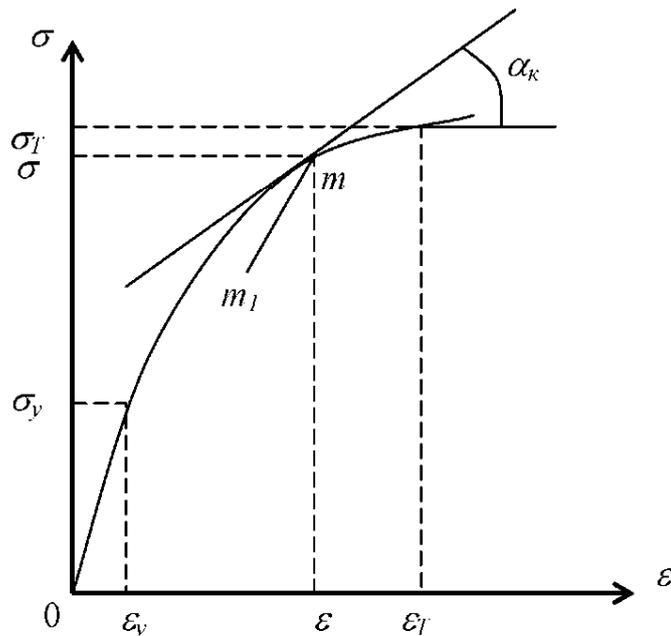


Рис. 3.17

Введем обозначение:

$$\lambda_n = \pi \sqrt{E / \sigma_n}$$

и условие применимости формулы Эйлера запишем в виде:

$$\lambda \geq \lambda_n. \quad (3.73)$$

Примем далее σ_n равным пределу упругости σ_y и исследуем устойчивость стержня за пределами упругости. Пусть диаграмма сжатия материала стержня имеет вид, показанный на рисунке 3.17.

Упругим деформациям соответствует участок OA . Предположим, что при нагружении мы дошли до точки m . Если теперь уменьшить сжимающие напряжения (произвести разгрузку), то получим прямую mm' , параллельную OA ; угол наклона этой линии характеризует модуль разгрузки, который равен модулю упругости E . С другой стороны, если в точке m сжимающее напряжение получит малое приращение $\Delta\sigma$, то можно принять, что отношение $\Delta\sigma$ к ΔE , будет равно касательному модулю E_k :

$$\frac{\Delta\sigma}{\Delta E} \approx \frac{d\sigma}{dE} = \operatorname{tg} \alpha_k = E_k. \quad (3.75)$$

Рассмотрим стержень, подвергающийся центральному сжатию. Пусть при $\sigma > \sigma_y$ стержень получил малые искривления оси (потерял устойчивость). Тогда волокна, лежащие на вогнутой стороне, будут испытывать дополнительную деформацию укорочения (догружение), а на выпуклой – удлинения (разгрузка). При этом нейтральная ось x сместится от главной оси x_0 на некоторую величину e (рис. 3.18).

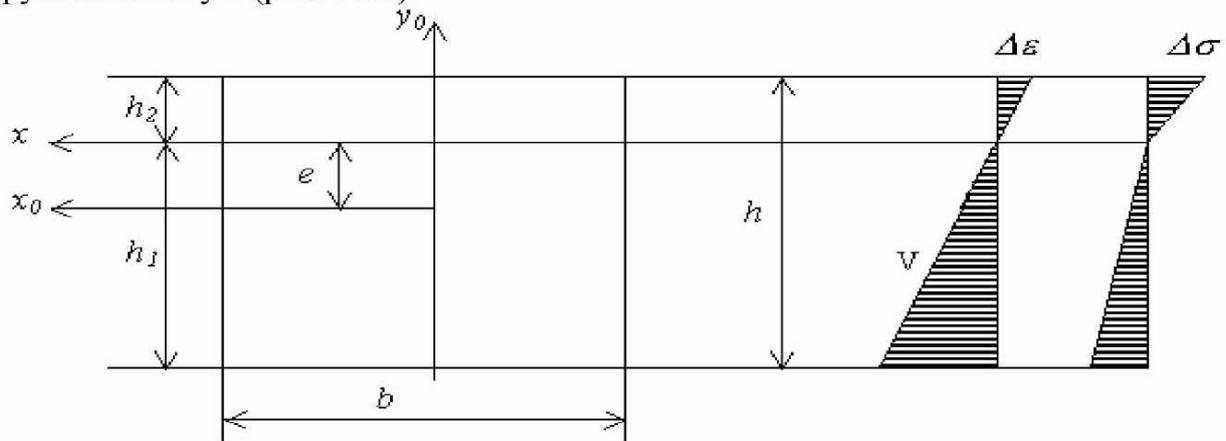


Рис. 3.18

Считая, что при изгибе поперечные сечения остаются плоскими, имеем $\Delta\varepsilon = y/\rho$, где ρ - радиус кривизны упругой линии. Напряжения в зонах догружения и разгрузки будут равны соответственно:

$$\Delta\sigma_1 = E_k y / \rho, \quad \Delta\sigma_2 = E y / \rho.$$

Результирующая дополнительных усилий должна быть равна нулю, поэтому:

$$\frac{E_k}{\rho} \int_{F_1} y dF + \frac{E}{\rho} \int_{F_2} y dF = 0 \quad \text{или} \quad E_k S_1 + E S_2 = 0. \quad (3.76)$$

Здесь и далее через F_1 , S_1 и I_1 обозначены площадь, статический момент и момент инерции догруженной части сечения относительно нейтральной оси, а через F_2 , S_2 и I_2 -те же характеристики для части сечения, в которой проис-

ходит разгрузка. Приравнявая сумму моментов внутренних сил относительно нейтральной оси внешнему моменту, находим:

$$\frac{E_{\kappa}}{\rho} \int_{F_1} y^2 dF + \frac{E}{\rho} \int_{F_2} y^2 dF = M \quad \text{или} \quad (E_{\kappa} I_1 + EI_2) / \rho = M. \quad (3.77)$$

Введем понятие приведенного модуля:

$$E_n = (E_{\kappa} I_1 + EI_2) / I, \quad (3.78)$$

где I – главный момент инерции всего сечения (относительно оси x_0).

С учетом зависимости (77) и связи функции прогиба V с кривизной можно записать:

$$E_n I \frac{d^2 V}{dz^2} = -M.$$

Приравнявая далее внутренний момент моменту от продольной силы, получаем дифференциальное уравнение устойчивости. Для шарнирно опертого стержня оно примет вид:

$$E_n I V'' + PV = 0.$$

Это уравнение совпадает с известным уравнением устойчивости стержней в пределах упругости, если в нем модуль упругости заменить на приведенный модуль. Таким образом, все ранее полученные результаты будут справедливы и для упругопластической области при условии замены в них E на E_n . Это касается и результатов, полученных энергетическим и другими методами. Так для задачи Эйлера можно записать:

$$\sigma_{\text{кр}} = \pi^2 E_n / \lambda^2. \quad (3.79)$$

Геометрические характеристики, входящие в выражения (78) зависят от формы поперечного сечения уравнение для прямолинейного сечения (76) примет вид:

$$E_{\kappa} h_1^2 - E h_2^2 = 0,$$

следовательно:

$$h_1 = h \sqrt{E} / (\sqrt{E_{\kappa}} + \sqrt{E}), \quad h_2 = h \sqrt{E_{\kappa}} / (\sqrt{E_{\kappa}} + \sqrt{E}).$$

Моменты инерции равны:

$$I_1 = \nu h_1^3 / 3, \quad I_2 = \nu h_2^3 / 3, \quad I = \nu h^3 / 12.$$

Подставляя их в (78) с учётом (а), получим

$$E_n = 4 E E_{\kappa} / (\sqrt{E_{\kappa}} + \sqrt{E})^2 = 4 K E / (1 + \sqrt{K})^2, \quad (3.80)$$

где $K = E_{\kappa} / E$.

Отклонения в величине E_n для разных форм сечения незначительны, так что в практических расчетах и для других видов сечений можно пользоваться этой формулой.

Для определения критического напряжения по формуле (79) необходимо знать приведенный модуль материала в каждой точке диаграммы сжатия ма-

териала стержня. Для этого опытным путем надо построить диаграмму сжатия и в выбранных точках упругопластической зоны (зона AB на рис. 3.17) провести касательные к диаграмме и по формуле (75) определить $E_{кр}$, а затем по формуле (78) или (80) посчитать приведенный модуль. После этого обычно строится зависимость критического напряжения от гибкости стержня. Такая диаграмма для стали 3 показана на рисунке 3.19.

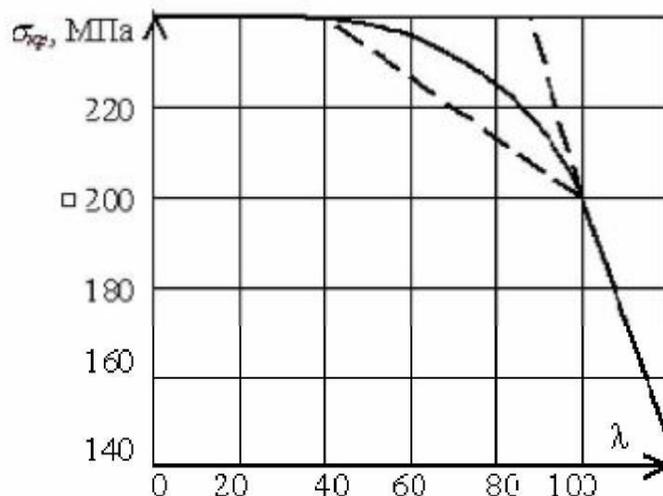


Рис. 3.19.

Диаграмма критических напряжений для стали 3.

При $\lambda > \lambda_n = 100$ диаграмма построена по формуле (71) и называется параболой Эйлера. При $\lambda \leq 40$ $\sigma_{кр}$ равно пределу текучести σ_T (240 МПа) и расчет стержня следует вести на прочность, а не на устойчивость.

Недостатком описанного подхода определения критических напряжений является, во-первых, трудоемкость построения диаграммы и, во вторых, необходимость иметь экспериментальные диаграммы сжатия для каждого материала. Поэтому участок диаграммы, соответствующий упругопластической зоне, часто описывают аналитическими зависимостями, параметры которых определяются путем статической обработки экспериментальных данных для каждого материала.

Так, профессором Ф.С. Ясинским предложена линейная зависимость:

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda, \quad (3.81)$$

где a и b – эмпирические коэффициенты, имеющие размерность напряжения. Их значения для различных материалов приводятся в справочниках [4]. Для ст. 3 при $40 \leq \lambda \leq 100$ принимают $a = 310$ МПа, $b = 1,14$ МПа. Эта прямая на рисунке 3.19 показана пунктиром. Имеются и другие аналитические зависимости. Так, для чугуна часто этот участок аппроксимируют параболой:

$$\sigma_{кр} = 776 - 12\lambda + 0,053\lambda^2.$$

При отсутствии экспериментальных данных упругопластическую зону диаграммы сжатия можно аппроксимировать некоторой кривой. Чаще всего ее заменяют параболой, касательная к которой при $\sigma = \sigma_y$ совпадает с линейным участком диаграммы. Напряжениям, равным σ_T , соответствует

вершина параболы, в которой касательная к кривой становится горизонтальной (рис. 3.17). Такая аппроксимация хорошо совпадает с истинными диаграммами сжатия для многих материалов и вместе с тем является одной из наиболее простых по своему аналитическому выражению.

Изменение касательного модуля в этом случае описывается наклонной прямой, изменяющейся от E при $E=E_y$ до нуля при $E=E_T$ (рис. 3.17). Аналитически эту прямую можно записать так:

$$E_k = E(E_T - E) / (E_T - E_y). \quad (3.82)$$

Согласно принятому закону:

$$\left(\frac{E_T - E}{E_T - E_y} \right)^2 = \frac{\sigma_T - \sigma}{\sigma_T - \sigma_y},$$

откуда:

$$E_k = E \sqrt{(\sigma_T - \sigma) / (\sigma_T - \sigma_y)} \quad (3.83)$$

или

$$K^2 = (\sigma_T - \sigma) / (\sigma_T - \sigma_y). \quad (3.84)$$

Условие применимости упругих решений можно записать так:

$$\frac{\sigma_{кр}}{\sigma_T} \leq \frac{\sigma_y}{\sigma_T}, \quad \text{или} \quad \varphi \leq \varphi_n - \sigma_y / \sigma_T,$$

где φ - коэффициент продольного изгиба или коэффициент снижения допускаемого напряжения, а его предельное значение φ_n , до которого справедливы упругие решения, является константой материала.

С учетом этих обозначений перепишем выражение (84):

$$K^2 = (1 - \varphi) / (1 - \varphi_n).$$

Отсюда получаем:

$$\varphi = \sigma / \sigma_T - 1 K^2 (1 - \varphi_n). \quad (3.85)$$

Исходя из формулы (79) можно записать:

$$\lambda^2 \sigma_T = \pi^2 E_n / \varphi.$$

Подставляя сюда выражение (80), имеем:

$$\frac{\lambda^2 \sigma_T}{\pi^2 E} = \frac{4K}{\varphi(1 + \sqrt{K})^2} = \frac{4K}{(1 + \sqrt{K})^2 [1 - K^2(1 - \varphi_n)]}. \quad (3.86)$$

Формулы (85) и (86) дают зависимость между λ и φ , выраженную в параметрической форме (через K). Величину K из этих двух формул нетрудно исключить, и тогда получим:

$$P = \lambda \sqrt{\sigma_T / E} = \frac{2\pi}{\sqrt{\varphi [1 + \sqrt[4]{(1 - \varphi_n)(1 - \varphi)}]}}. \quad (3.87)$$

Обычно в литературе для каждого материала приводятся таблицы зависимости φ от λ [4]. На наш взгляд более целесообразным является построение графика P от φ при различных значениях φ_n , которым можно пользоваться

ся для любого материала. Такой график приведен на рисунке 3.20. На графике пунктиром показана гипербола Эйлера, соответствующая уравнению (71).

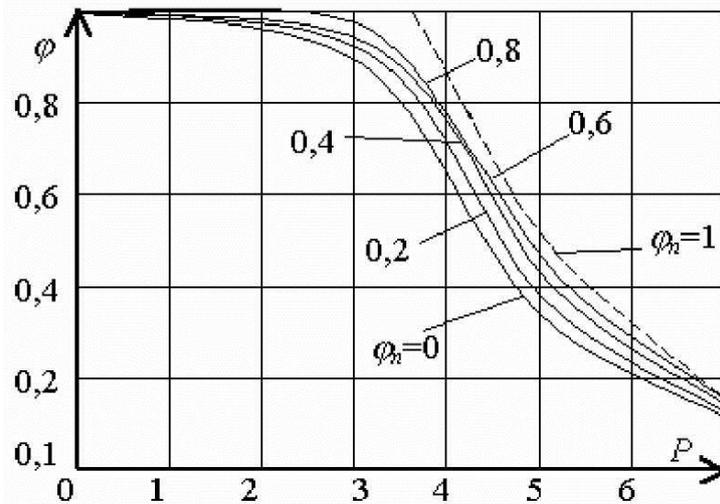


Рис. 3.20

При наличии такого графика критические нагрузки определяются легко. В зависимости от геометрических размеров и способам закрепления концов стержня по формуле (72) вычисляем гибкость стержня; по известным механическим характеристикам материала находим φ_n . Далее по графику находим φ . Теперь:

$$P_{кр} = \varphi \sigma_T F. \quad (3.88)$$

Эта формула позволяет ввести проектный расчет на устойчивость. Для этого ее достаточно переписать в виде:

$$P/F \leq \varphi [\sigma]. \quad (3.89)$$

Отсюда обычно производится подбор сечений методом последовательных приближений. Методика такого расчета излагается в курсе сопротивления материалов.

4. УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАСТИН

4.1. Постановка задачи и исходные зависимости

Координатную плоскость x, y совместим с срединной плоскостью пластины; толщину пластины h считаем малой по сравнению с размерами в плане. Поперечные перемещения точек срединной плоскости обозначим w , а перемещения вдоль осей x, y - соответственно u, v . Пластина нагружена только в своей плоскости «мертвыми» поверхностными и контурными силами P_x, P_y и q_x, q_y .

Задачу устойчивости рассмотрим при следующих допущениях:

1. До нагружения пластина идеально плоская и в докритическом состоянии равнодействующая всех внешних сил и реакции опор действуют строго в срединной поверхности.
2. Докритическое напряженное состояние описывается соотношениями линейной теории упругости и изменением размеров пластины до потери устойчивости пренебрегаем.
3. Изгиб пластины описывается с помощью обычных гипотез линейной теории изгиба тонких жестких пластин.

В силу первого допущения всегда возможно плоское устойчивое состояние равновесия, при котором $w(x, y) = 0$. Все величины, относящиеся к этому состоянию будем помечать индексом «0».

Согласно второму допущению имеем:

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}; \quad \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y}; \quad \gamma_0 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}. \quad (4.1)$$

Дифференциальные уравнения равновесия элемента пластин в начальном состоянии можно записать как частный случай общих уравнений упругого тела

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_x^0}{\partial x} + \frac{\partial S^0}{\partial y} + P_x &= 0; \\ \frac{\partial T_y^0}{\partial y} + \frac{\partial S^0}{\partial x} + P_y &= 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где T_x^0, T_y^0 - мембранные усилия вдоль осей x, y ; S^0 - сдвигающее усилие на границах элемента.

Усилия и деформации связаны между собой законом Гука

$$\varepsilon_x^0 = (T_x^0 - \mu T_y^0) / Eh; \quad \varepsilon_y^0 = (T_y^0 - \mu T_x^0) / Eh; \quad \gamma^0 = 2(1 + \mu) S^0 / Eh \quad (4.3)$$

или

$$T_x^0 = \frac{Eh}{1 - \mu^2} (\varepsilon_x^0 + \mu \varepsilon_y^0); \quad T_y^0 = \frac{Eh}{1 - \mu^2} (\varepsilon_y^0 + \mu \varepsilon_x^0); \quad S^0 = \frac{Eh}{2(1 + \mu)} \gamma^0. \quad (4.3')$$

При заданных граничных условиях на контуре пластины по этим соотношениям можно определить напряжения и перемещения в начальном состоянии. На части контура могут быть заданы силовые граничные условия

$$\begin{aligned} T_x^0 \cos \beta + S^0 \sin \beta &= q_x; \\ T_y^0 \sin \beta + S^0 \cos \beta &= q_y, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где β - угол между нормалью к контуру и осью x .

На другой части контура могут быть заданы геометрические граничные условия

$$u_0 = \tilde{U}_0, \quad v_0 = \tilde{V}_0. \quad (4.5)$$

Если внешние нагрузки P_x , P_y не зависят от координат, то можно ввести функцию начальных условий φ_0 :

$$T_x^0 = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2}; \quad T_y^0 = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2}; \quad S^0 = -\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial y} - yP_x - xP_y. \quad (4.6)$$

Тогда определение исходного напряженно-деформированного состояния пластины сведется к решению бигармонического уравнения

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi_0 = 0, \quad (4.7)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ - оператор Лапласа.

В дальнейшем примем, что все внешние нагрузки изменяются пропорционально параметру P . С ростом его значений у пластины могут появиться изгибные состояния равновесия, смежные с начальными. Те значения параметра нагрузки P_n , при которых это происходит, определяют точки бифуркации начального состояния равновесия. Наименьшее из значений P_n будет критической нагрузкой.

Для определения точек бифуркации начального состояния надо рассмотреть искривленное изгибное состояние равновесия, бесконечно близкое к исходному, то есть бесконечно малые прогибы.

При изгибе пластины нормаль к ее срединной плоскости поворачивается в плоскостях xz и yz соответственно на углы

$$v_x = \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \omega}{\partial y}. \quad (4.8)$$

Изменение этих углов вдоль осей x и y определяют кривизну деформированной срединной плоскости:

$$\chi_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}; \quad \chi_y = \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}. \quad (4.9)$$

Крутка этой плоскости равна:

$$\chi_{xy} = \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}. \quad (4.10)$$

При изгибе пластины возникают внутренние изгибающие моменты M_x , M_y , скручивающий момент M_{xy} и поперечные силы Q_x , Q_y . Моменты определяются по формулам:

$$M_x = D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right); \quad M_y = D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right); \quad M_{xy} = (1 - \mu) D \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}, \quad (4.11)$$

где $D = Eh^3/12(1-\mu^2)$ - цилиндрическая жесткость.

В линейной теории изгиба пластин уравнения равновесия составляются для недеформированного состояния. Условия равновесия элемента пластины в виде суммы моментов относительно его граней приводят к уравнениям:

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}; \quad Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}. \quad (4.12)$$

Отсюда с учетом (11) получаем

$$Q_x = D \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2} \right); \quad Q_y = D \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \omega}{\partial y \partial x^2} \right). \quad (4.13)$$

Если на пластину действует нормальная нагрузка $P_z = P_z(x, y)$, то сумма проекции всех сил на ось Z приводит к уравнению:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - P_z = 0. \quad (4.14)$$

Используя зависимость (13), получаем основное уравнение линейной теории поперечного изгиба пластин, которое для пластины постоянной толщины имеет вид:

$$D \nabla^4 \omega - P_z = 0, \quad (4.15)$$

где

$$\nabla^4 \omega = \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4}. \quad (4.16)$$

Из этих зависимостей можно получить линеаризованное уравнение, дающее возможность решать задачи устойчивости пластин. Но их недостаточно для исследования устойчивости пластин энергетическими методами и определения прогибов в закритической области. Для этих целей необходимо использовать геометрически нелинейные соотношения теории гибких пластин. Выведем эти соотношения. Рассмотрим только поперечные прогибы.

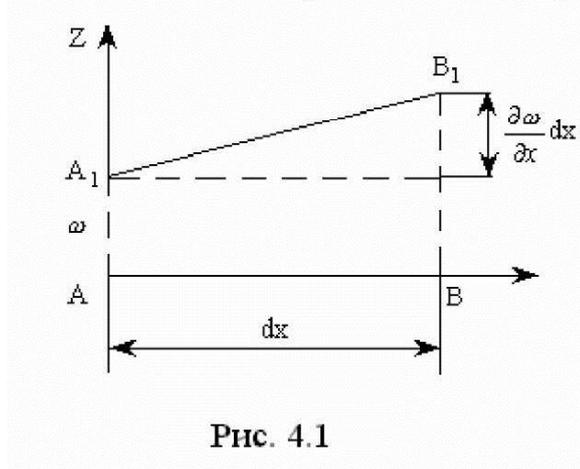


Рис. 4.1

Отрезок AB после деформации займет положение A_1B_1 . При этом модуль этого вектора будет равен:

$$A_1B_1 = |a| = dx \left[1 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2} \approx dx \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 \right].$$

Здесь использовано разложение в ряд подкоренного выражения. Относительное удлинение отрезка теперь равно:

$$\varepsilon_x = \frac{A_1 B_1 - AB}{AB} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2. \quad (4.17)$$

Аналогично рассматривая отрезок AC и вектор $\vec{A_1 C_1} = \vec{b}$ в плоскости yz , получаем:

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2.$$

Определим угол сдвига в срединной плоскости γ , связанный с прогибом. Прямой угол BAC при изгибе пластины искажается и станет равным $(\pi/2 - \gamma)$. Скалярное произведение векторов равно:

$$a \cdot b = |a||b| \cos(\pi/2 - \gamma) = dx dy \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 \right] \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \right] (\gamma + \dots).$$

С другой стороны,

$$a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Так как $b_x = a_y = 0$, то

$$a \cdot b = \frac{\partial \omega}{\partial x} dx \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} dy.$$

Приравнявая скалярные произведения и пренебрегая величинами второго порядка малости по сравнению с единицей, получим

$$\gamma = \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y}. \quad (4.18)$$

Как видим, деформации срединной плоскости, связанные с прогибом, имеют второй порядок малости, по этому в линейной теории не учитываются.

Если кроме прогибов учесть перемещения u, v в плоскости пластины, то деформации будут равны:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2; \\ \gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y}. \quad (4.19)$$

Правые части этих выражений содержат одни и те же функции, следовательно, деформации не являются независимыми. Зависимость между ними можно получить, если первое уравнение продифференцировать дважды по y , второе – дважды по x и третье по x и y , а затем из суммы первых двух полученных уравнений вычесть третье уравнение. Окончательно имеем:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}. \quad (4.20)$$

Это уравнение называется уравнением совместности деформации.

4.2. Основное линейризованное уравнение.

Рассмотрим элемент пластины в состоянии, отклоненном от начального. Прогибы при этом считаем бесконечно малыми и во всех уравнениях будем сохранять только слагаемые первого порядка малости.

Вырежем из пластины бесконечно малый элемент размерами dx, dy . По грани C_1B_1 действуют изгибающий момент M_x , крутящий момент M_{xy} , а также силы Q_x, T_x, S (силы показаны на рисунке 4.2). По грани C_1A_1 действуют моменты M_y, M_{xy} и силы Q_y, T_y, S . По параллельным граням действуют те же силовые факторы, но имеющие бесконечно малые приращения в соответствующих направлениях. Силы на грани A_1D_1 показаны для примера на рисунке 4.2.

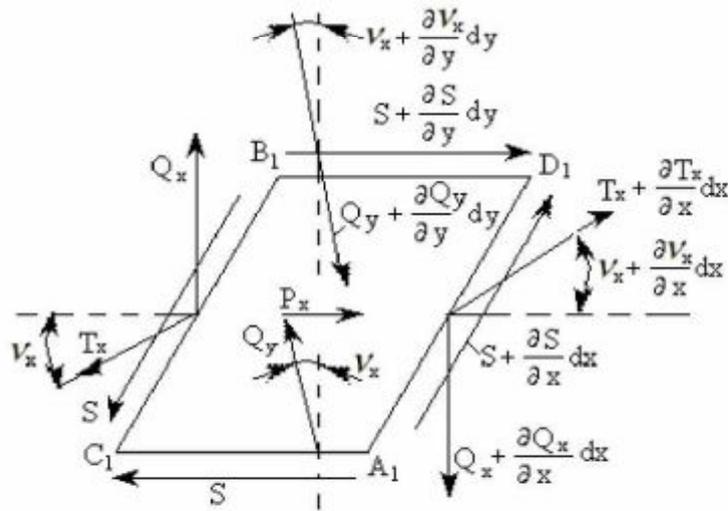


Рис. 4.2.

Составим теперь уравнение равновесия. Приравнявая нулю сумму моментов относительно граней элемента, и отбрасывая слагаемые высших порядков малости, получим вновь уравнение (12). Таким образом, для деформированного элемента поперечные силы как и моменты имеют первый порядок малости. Спроектировав все силы на ось x , получим:

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + P_x + \left[\frac{\partial}{\partial x} (Q_x v_x) + \frac{\partial}{\partial x} (Q_y v_x) \right] = 0.$$

Слагаемые в квадратных скобках представляют собой произведения величин первого порядка малости, то есть имеют второй порядок и их можно отбросить. В результате получим, что уравнение равновесия в отклоненном и начальном состояниях (2) совпадают. Следовательно, T_x, T_y, S будут равны начальным усилиям T_x^0, T_y^0, S^0 .

Приравняем нулю сумму проекций всех сил на ось z . Грань C_1B_1 повернута вокруг оси y на угол ν_x , а грань A_1D_1 - на угол $\left(\nu_x + \frac{\partial \nu_x}{\partial x} dx\right)$. Результирующая сил T_x в проекции на ось z будет равна:

$$-T_x \nu_x dy + \left(T_x + \frac{\partial T_x}{\partial x} dx\right) \left(\nu_x + \frac{\partial \nu_x}{\partial x} dx\right) dy = \frac{\partial}{\partial x} (T_x \nu_x) dx dy.$$

Эти же грани повернуты вокруг оси x на угол ν_y и $\left(\nu_y + \frac{\partial \nu_y}{\partial x} dx\right)$. Поэтому результирующая сдвигающих усилий с этих граней в проекции на ось z равна:

$$-S \nu_y dy + \left(S + \frac{\partial S}{\partial x} dx\right) \left(\nu_y + \frac{\partial \nu_y}{\partial x} dx\right) dy = \frac{\partial}{\partial x} (S \nu_y) dx dy.$$

По аналогии с этими выражениями можно записать, что результирующая от усилий T_y с граней C_1A_1 и B_1D_1 равна $dx dy \frac{\partial (T_y \nu_y)}{\partial y}$, а результирующая сдвигающих усилий с этих же граней равна $dx dy \frac{\partial (S \nu_x)}{\partial y}$.

Собрав эти слагаемые и добавив к ним результирующие от поперечных сил, получим:

$$-\frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} (T_x^0 \nu_x) + \frac{\partial}{\partial y} (T_y^0 \nu_y) + \frac{\partial}{\partial x} (S^0 \nu_y) = 0.$$

Подставив сюда выражения (13) и (8) для пластины постоянной толщины, получаем:

$$D \nabla^4 \omega - P_z^\Phi = 0, \quad (4.21)$$

где

$$P_z^\Phi = \frac{\partial}{\partial x} \left(T_x^0 \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_y^0 \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(S^0 \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(S^0 \frac{\partial \omega}{\partial x} \right). \quad (4.22)$$

По форме уравнение (21) совпадает с уравнением поперечного изгиба (15), только вместо поперечной нагрузки P_z сюда входит величина P_z^Φ , линейно зависящая от прогиба и начальных усилий в срединной плоскости пластины. Поэтому величину P_z^Φ можно трактовать как фиктивную поперечную нагрузку.

Выражение (22) можно преобразовать к виду:

$$P_z^\Phi = T_x^0 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + 2S^0 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + T_y^0 \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial T_x^0}{\partial x} + \frac{\partial S^0}{\partial y} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x} + \left(\frac{\partial T_y^0}{\partial y} + \frac{\partial S^0}{\partial x} \right) \frac{\partial \omega}{\partial y}.$$

Согласно уравнения равновесия (2) выражения в скобках равны поверхностным силам P_x, P_y . Если пластина нагружена, как это обычно бывает в силовых конструкциях, только контурными внешними силами, то

$$P_z^\Phi = T_x^0 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + 2S^0 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + T_y^0 \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}. \quad (4.23)$$

Уравнение (21) является основным линеаризованным уравнением теории устойчивости пластин постоянной толщины. В силу первого допущения это линейное однородное уравнение имеет однородные граничные условия.

Если считать, что все внешние нагрузки изменяются пропорционально параметру P , то уравнение (21) можно записать в стандартном виде задачи на собственные значения

$$M[\omega] - PL[\omega] = 0, \quad (4.24)$$

где оператор M совпадает с оператором Лапласа, а оператор L с выражением (22), в котором усилия определены при $P=1$. Таким образом, задача исследования устойчивости свелась к типичной задаче на собственные значения: требуется найти значения нагрузки P_n , при которых однородное уравнение имеет отличные от нуля решения, удовлетворяющие заданным однородным граничным условиям.

Обсудим теперь граничные условия задачи. Поскольку основное уравнение имеет четвертый порядок, то в каждой точке контура должны быть заданы по два граничных условия. Геометрические граничные условия уравнения (21) полностью совпадают с аналогичными условиями теории изгиба пластин. Если контур пластины свободен от нагрузок, то и силовые граничные условия этих задач совпадают. Пусть контур пластины совпадает с одной из координатных линий, например, $x = const$. Для жесткого защемления имеем:

$$\omega = 0; \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0. \quad (4.25)$$

Для шарнирного опертого края: $\omega = 0, M_x = 0$.

С учетом выражения (11) и первого условия можно записать:

$$\omega = 0; \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0. \quad (4.26)$$

Если край полностью свободен, то равны нулю M_x и обобщенная поперечная сила

$$R_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}.$$

Теперь с учетом выражения (11) и (13) получаем:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2} = 0. \quad (4.27)$$

Рассмотрим контур, нагруженный распределенными силами $q_x(y), q_y(x)$. Силовые граничные условия в общем случае определяются из условия равновесия краевых элементов пластины в деформированном положении. Когда на контуре запрещены прогибы, то контурные нагрузки не влияют на силовые граничные условия. Когда контур свободен (или упруго оперт), внешние нагрузки входят в граничные условия задачи устойчивости. Первое граничное условие ($M_x = 0$) остается, очевидно, тем же. Для получения второго условия надо записать сумму проекций на ось z всех сил, действующих на бесконечно малый краевой элемент. Это уравнение имеет вид:

$$-R_x + q_x v_x + q_y v_y = 0.$$

Поэтому второе условие (27) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2} - q_x \frac{\partial \omega}{\partial x} - q_y \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0. \quad (4.28)$$

Аналогично выводятся граничные условия для упруго закрепленного края пластины при наличии контурных сил.

Теперь рассмотрим пластину, край которой подкреплён упругим стержнем постоянной жесткости EI в плоскости, перпендикулярной срединной поверхности пластины. Первое граничное условие остается прежним: как и для свободного края $M_x = 0$. Для вывода второго условия мысленно стержень отделяем от края пластины. Со стороны пластины на стержень действует поперечная нагрузка $q_k = -R_x$. Прогиб стержня при этом описывается уравнением

$$EI \frac{d^4 \omega_c}{dy^4} = q_k.$$

Поскольку прогибы стержня и пластины по краю должны быть равны, то

$$EI \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} + D \left[\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2} \right] = 0. \quad (4.29)$$

Если этот стержень нагружен в продольном направлении усилием $N_{(y)}$, то проектируя силы на ось z получаем:

$$q_k = -R_x + \frac{\partial}{\partial y} (N \cdot \nu_y).$$

Тогда в уравнение (29) добавится член

$$\left[-\frac{\partial}{\partial y} \left(N \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \right].$$

Аналогично можно записать условия сопряжения двух пластин различной изгибной жесткости.

На криволинейных участках контура пластины силовые граничные условия формулируются из условия равновесия краевого элемента подобно тому, как это сделано выше для прямолинейного края. При этом для контуров свободных от внешних нагрузок или закрепленных неподвижно относительно прогиба граничные условия совпадают с граничными условиями изгиба пластин.

Для решения задач устойчивости круглых пластин основное уравнение (21) удобнее представить в полярных координатах. Для этого воспользуемся формальным преобразованием координат, совместив ось x с радиус-вектором r . Тогда производные по x и r совпадут, а производные по y надо заменить так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{r \partial \theta}; & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{r \partial \theta} \right) = \frac{\partial^2}{r \partial r \partial \theta} - \frac{\partial}{r^2 \partial \theta}; \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Тогда оператор Лапласа примет вид:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2}. \quad (4.31)$$

Внутренние силовые факторы выражаются через прогиб также формальным преобразованием. Так:

$$M_r = D \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \mu \left(\frac{\partial \omega}{r \partial r} + \frac{\partial^2 \omega}{r^2 \partial \theta^2} \right) \right].$$

Аналогично преобразовываются и граничные условия. Так, для шарнирного опирания

$$\omega = 0; \quad M_r = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{\mu \partial \omega}{r \partial r} = 0. \quad (4.32)$$

4.3. Точные решения для прямоугольных пластин

Уравнение в частных производных с переменными коэффициенты не удается проинтегрировать в общем виде, но для некоторых практически важных случаев уравнение (21) допускает точное решение.

Сначала рассмотрим устойчивость удлиненной пластины равномерно сжатой в поперечном направлении (рис. 4.3. а).

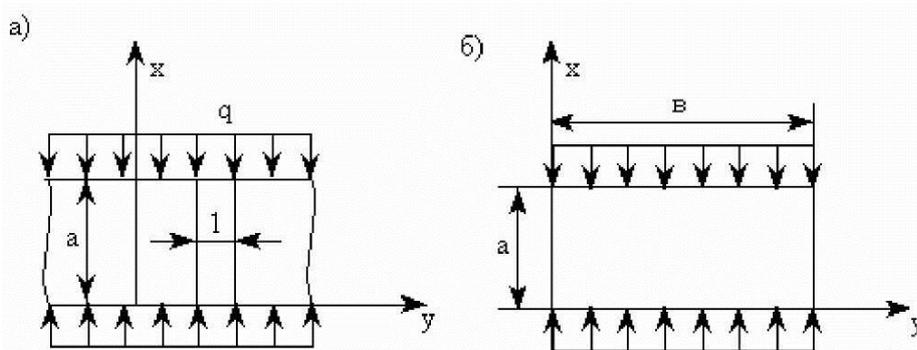


Рис. 4.3

Граничные условия вдоль длинной стороны произвольны. Размеры пластины в продольном направлении считаем настолько большими, что условия закрепления коротких сторон не играют никакой роли.

Начальные усилия в плоскости пластины равны:

$$T_x^0 = -q; \quad T_y^0 = 0; \quad S^0 = 0.$$

Для рассматриваемой пластины можно принять, что при потере устойчивости прогибы не зависят от y . Тогда уравнение (21) переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$D \frac{d^4 \omega}{dx^4} + q \frac{d^2 \omega}{dx^2} = 0,$$

которое совпадает с уравнением устойчивости стержня, сжатого продольной силой. Такое совпадение очевидно: рассматриваемая задача эквивалентна задаче об устойчивости полоски единичной ширины с изгибной жесткостью $EI = D$, сжатой силой $p = q$. Поэтому решения, полученные для стержня,

можно перенести на рассматриваемую задачу. В частности, для шарнирно опертой пластины:

$$q_{кр} = \pi^2 D / a^2, \quad (4.33)$$

а для других случаев закрепления

$$q_{кр} = \pi^2 D / (\mu a)^2,$$

где μ - коэффициент, зависящий от способа закрепления продольных краев пластины, значения которых приведены в параграфе 3.3.

Первая собственная функция задачи устойчивости стержня дает форму изогнутой поверхности пластины.

Заметим, что это решение можно использовать и для пластины конечных размеров с двумя свободными краями. В этом случае также можно принять $\omega = \omega(x)$. Однако граничные условия на свободных краях не будут выполняться. При $h/b \ll 1$ это не повлияет на величину критической нагрузки.

Для прямоугольной пластины конечных размеров уравнение (21) допускает точное решение при следующих условиях.

1. Начальное напряженное состояние однородно:

$$T_x^0 = const, T_y^0 = const, S^0 = 0.$$

2. Две противоположные стороны пластины свободно оперты, а граничные условия на двух других сторонах произвольны, но неизменны по длине.

В этом случае уравнение (21) примет вид:

$$D \left(\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} \right) - T_x^0 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - T_y^0 \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0. \quad (4.34)$$

С учетом граничных условий (26) решение этого уравнения можно представить в виде:

$$\omega = \sum Y_n(y) \sin(\pi n x / a).$$

Подставив этот ряд в уравнение (34), после группировки производных получаем систему обыкновенных независимых дифференциальных уравнений

$$Y_n'''' - 2 \left[\left(\frac{\pi n}{a} \right)^2 + \frac{T_y^0}{2D} \right] Y_n'' + \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2 \left[\left(\frac{\pi n}{a} \right)^2 + \frac{T_x^0}{D} \right] Y_n = 0, \quad (4.35)$$

где штрихом обозначена производная по Y .

Решение этого однородного уравнения с постоянными коэффициентами хорошо изучено. Характеристическое уравнение имеет четыре корня для каждого значения n :

$$r = \pm \frac{\pi n}{a} \left\{ \frac{T_y^0 a^2}{2D \pi^2 n^2} + 1 \pm \sqrt{\left(\frac{T_y^0 a^2}{2D \pi^2 n^2} + 1 \right)^2 - 1 - \frac{T_x^0 a^2}{D \pi^2 n^2}} \right\}^{1/2}$$

Общее решение уравнения (35) имеет вид:

$$Y_n = \sum_{i=1}^4 A_i \exp(r_i y). \quad (4.36)$$

Подчиняя это решение четырем однородным граничным условиям (по два условия при $y=0$ и $y=b$), получаем, систему четырех однородных линейных уравнений относительно четырех неизвестных A_i . Равенство нулю определителя этой системы приводит к уравнению, дающему возможность найти собственные значения задачи. Перебирая различные значения числа полуволен n , находим наименьшее собственное значение, которое и дает критическую нагрузку. Рассмотрим несколько частных случаев.

Пластина равномерно сжата в одном направлении (рис. 4.3 б). Тогда $T_y^0 = 0$, $T_x^0 = -q$. Учитывая равенство (33) и предполагая, что при закреплении краев $y=0$ и $y=b$ значение q_n повышается, получаем неравенство

$$\frac{q_n}{D} > \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2. \quad (4.37)$$

Тогда решение (36) примет вид:

$$Y_n = A_1 \sin \alpha_n y + A_2 \cos \alpha_n y + A_3 \operatorname{sh} \beta_n y + A_4 \operatorname{ch} \beta_n y, \quad (4.38)$$

где

$$\alpha_n = \left(\frac{\pi m}{a}\right) \left(-1 + \frac{a}{\pi m} \sqrt{\frac{q}{D}}\right)^{1/2}, \quad \beta_n = \frac{\pi m}{a} \left(1 + \frac{a}{\pi m} \sqrt{\frac{q}{D}}\right)^{1/2}.$$

Пусть края пластины $y=0$ и $y=b$ также свободно оперты. Граничные условия примут вид:

$$1) Y_{n(0)} = 0; \quad 2) Y_{n(0)}'' = 0; \quad 3) Y_{n(b)} = 0; \quad 4) Y_{n(b)}'' = 0.$$

Из этих условий получаем систему четырех уравнений:

$$\begin{aligned} A_2 + A_4 &= 0; \\ -\alpha_n^2 A_2 + \beta_n^2 A_4 &= 0; \\ A_1 \sin \alpha_n b + A_2 \cos \alpha_n b + A_3 \operatorname{sh} \beta_n b + A_4 \operatorname{ch} \beta_n b &= 0; \\ -\alpha_n^2 A_1 \sin \alpha_n b - \alpha_n^2 A_2 \cos \alpha_n b + \beta_n^2 A_3 \operatorname{sh} \beta_n b + \beta_n^2 A_4 \operatorname{ch} \beta_n b &= 0. \end{aligned}$$

Два первых уравнения дают $A_2 = 0$ и $A_4 = 0$. Приравнявая нулю определитель оставшихся двух уравнений, получаем

$$(\alpha_n^2 + \beta_n^2) \sin \alpha_n b \operatorname{sh} \beta_n b = 0.$$

Поскольку $\beta_n > 0$, то отсюда следует $\sin \alpha_n b = 0$ или $\alpha_n b = \pi m$ ($m=1,2,\dots$).

Используя выражение для α_n , получаем собственные значения нагрузки

$$q_{nm} = \left[\left(\frac{ma}{nb}\right)^2 + 1 \right] \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 D. \quad (4.39)$$

Так как из граничных условий следует $A_3 = 0$, то собственные функции задачи имеют вид:

$$\omega_{nm} = \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b}.$$

Так как число полуволен m в формулу (39) входит только в числитель, то наименьшее значение q_{nm} может быть при $m=1$. Учитывая это, перепишем формулу (39):

$$\bar{q}_n = \frac{q_m b^2}{\pi^2 D} = \left(\frac{nb}{a} + \frac{a}{nb} \right)^2. \quad (4.40)$$

Придавая n различные значения, для каждого значения $\lambda = a/b$ находим наименьшее значение \bar{q}_n , которое соответствует критической нагрузке

$$K = \min \bar{q}_n,$$

где K – безразмерный коэффициент, зависящий от отношения сторон.

Окончательный результат обычно представляют в виде:

$$q_{кр} = K \pi^2 D / b^2. \quad (4.41)$$

Чтобы иметь возможность определять критическую нагрузку для различных значений отношения сторон пластины λ , удобно иметь график зависимости параметра K от λ . Такой график приведен на рисунке 4.4.

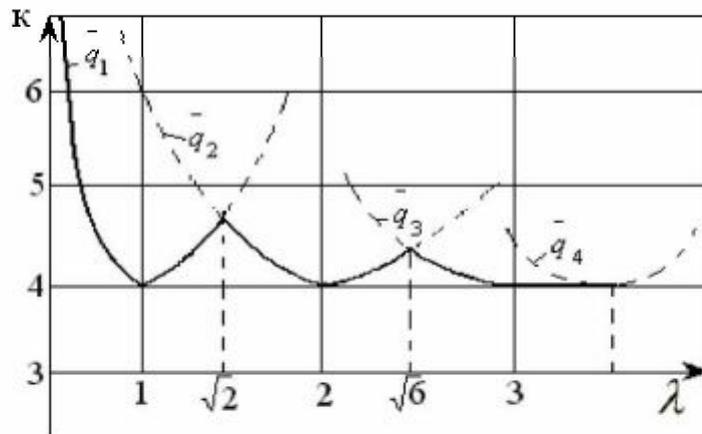


Рис. 4.4

Для каждого n по формуле (40) построены графики зависимости \bar{q}_n от λ . Участки кривых, лежащие ниже точек пересечения, будут давать наименьшие значения \bar{q}_n , следовательно, коэффициент K . Приравнявая значения \bar{q}_n и \bar{q}_{n+1} нетрудно установить, что соответствующие им кривые пересекаются при

$$\lambda = \sqrt{n(n+1)}.$$

При $\lambda < \sqrt{2}$ пластина теряет устойчивость по одной полуволне синусоиды ($n=1$). Тогда формулу (41) можно записать так:

$$q_{кр} = (1 + \lambda^2)^2 \pi^2 D / a^2.$$

Отсюда видно, что если ограничиться точностью порядка 5%, то при $\lambda < 1/5$ влиянием закрепления коротких сторон пластины можно пренебречь и расчет вести по формуле (33).

При $\lambda > 3$ коэффициент K перестает изменяться с ростом λ и равняется четырем. В этом случае $\lambda \approx n$ и пластина как бы делится на ряд квадратных свободно опертых по всему контуру пластин, для каждой из которых $K = 4$. Тогда становится ясным, что увеличение размера a не приводит к изменению критической нагрузки.

В такой же последовательности с использованием зависимости (38) решаются задачи устойчивости пластин шарнирно - опертых по двум краям и произвольных вариантах закрепления других двух краев при условии, что начальное напряженное состояние однородно. Окончательные расчетные формулы имеют вид (41), но значения коэффициента K будут иными. Отметим, что если на краях $y = const$ прогибы равны нулю, то K не зависит от коэффициента Пуассона. Для свободного края коэффициент Пуассона входит в граничные условия и коэффициент K зависит от μ .

Рассмотрим прямоугольную пластину, равномерно сжатую в двух направлениях при условии выполнения вышеуказанных граничных условий. В этом случае:

$$T_x^0 = -q_x, T_y^0 = -q_y, S^0 = 0.$$

Для упрощения расчетов рассмотрим пластину, свободно опертую по всему контуру. Исходя из ранее полученных собственных функции задачи решение уравнения (34) будем искать в виде:

$$\omega_{nm} = A_{nm} \sin \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b}.$$

Подставив ω_{nm} и его производные в уравнение (34), получаем

$$q_x \left(\frac{n}{a} \right)^2 + q_y \left(\frac{m}{b} \right)^2 = \left[\left(\frac{n}{a} \right)^2 + \left(\frac{m}{b} \right)^2 \right]^2 \pi^2 D. \quad (4.42)$$

При $q_x = q_y = q$ отсюда имеем:

$$q_{nm} = \left[\left(\frac{nb}{a} \right)^2 + m^2 \right] \frac{\pi^2 D}{b^2}.$$

Очевидно, наименьшее собственное значение будет при $n = m = 1$

$$q_{sp} = (1 + \lambda^2) \pi^2 D / b^2.$$

Для квадратной пластины ($\lambda = 1$) $K = 2$, то есть критическая сила в два раза меньше, чем при сжатом в одном направлении.

Если считать нагрузки возрастающими пропорционально одному параметру и обозначить

$$q_x = q, q_y = \nu q (\nu \geq 0),$$

то из выражения (42) получаем следующие собственные значения задачи:

$$q_{nm} = \frac{\left[(n/\lambda)^2 + m^2 \right]^2}{(n/\lambda)^2 + \nu m^2} * \frac{\pi^2 D}{b^2}.$$

При $\lambda > 1$ наименьшее значение q_{nm} может быть только при $m = 1$, следовательно,

$$K = \min \bar{q}_{n1} = \min \left\{ \frac{\left[(n/\lambda)^2 + 1 \right]^2}{(n/\lambda)^2 + \nu} \right\}. \quad (4.43)$$

Для каждого λ и ν число полуволн n подбирается из условия минимума q_{n1} , подобно тому, как это делалось для пластины, сжатой в одном направлении.

нии. При $\lambda \ll 1$ сжатие в направлении y не будет влиять на устойчивость пластины и получаем $n=1$, $q_{кр} = \pi^2 D/a^2$, что совпадает с выражением (33).

При других граничных условиях решение получается значительно более громоздким. Но результаты качественно аналогичны полученным выше: для пластины с конечным отношением сторон при сжатии в одном направлении, уменьшаются критические усилия в другом направлении, а для удлиненных пластин сжатие в продольном направлении не влияет на критические усилия сжатия в поперечном направлении.

Если пластина равномерно сжата в одном направлении и равномерно растянута в другом направлении (например, $T_x^0 = -q_x$, $T_y^0 = q_y$), то для пластины со свободно опертым контуром достаточно изменить знак q_y в выражении (42). При $q_x = q_y = q$ собственные значения равны:

$$q_{nm} = \frac{[(n/a)^2 + (m/b)^2]^2}{(n/a)^2 - (m/b)^2} \pi^2 D.$$

В частности, для квадратной пластины

$$q_{nm} = \frac{(n^2 + m^2)^2}{n^2 - m^2} \cdot \frac{\pi^2 D}{b^2}.$$

Наименьшее значение q_{nm} может быть только при $m=1$. Последовательно полагая $n=1, 2, 3, \dots$, получаем:

$$q_{кр} = q_{21} = 25\pi^2 D/3b^2.$$

Подобный анализ нетрудно провести и для любого другого соотношения сторон пластины и при любых соотношениях сжимающей и растягивающей нагрузок. Во всех случаях для пластин с конечным отношением сторон при растяжении вдоль одной оси увеличиваются критические сжимающие силы вдоль другой оси. Исключение составляет удлиненная пластина и пластина с двумя свободными краями. Для таких пластин растягивающие усилия q_y не влияют на величину сжимающей критической силы q_x и ее можно определять по формуле (33).

Результаты решения двух последних задач можно объединить одним графиком, дающим критические сочетания как сжимающих так и растягивающих усилий. Для квадратной пластины такой график показан на рисунке 4.5. Здесь положительными считаются сжимающие усилия; по осям отложены безразмерные параметры

$$\bar{q}_x = q_x/q_{x,кр}, \quad \bar{q}_y = q_y/q_{y,кр},$$

причем критические нагрузки определяются по формуле (41) при $K=4$. Участки прямых, показанные сплошной линией, характеризуют критическое сочетание безразмерных параметров нагрузки, а ломаная линия, состоящая из этих участков, ограничивает область устойчивости при комбинированном нагружении.

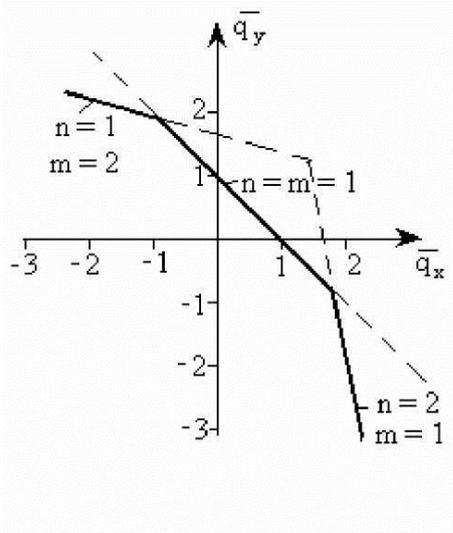


Рис. 4.5.

4.4. Решение основного уравнения для круглых пластин

В случае осесимметричного начального напряженного состояния круглой пластины, когда $S^0 = 0$, а радиальные и окружные усилия зависят только от радиальной координаты, основное линейаризованное уравнение (21) содержит только четные производные по окружной координате θ , поэтому его решение можно представить в виде:

$$\omega = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n(r) \cos n\theta \quad (4.44)$$

Подстановка этого выражения в основное уравнение приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$D \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{d}{rdr} - \frac{n^2}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 \omega_n}{dr^2} + \frac{d\omega_n}{rdr} - \frac{n^2 \omega_n}{r^2} \right) - T_r^0 \frac{d^2 \omega_0}{dr^2} - T_\theta^0 \left(\frac{d\omega_n}{rdr} - \frac{n^2 \omega_n}{r^2} \right) = 0. \quad (4.45)$$

Решения этих уравнений, удовлетворяющие заданным граничным условиям, дают собственные функции и собственные значения задачи; наименьшее собственное значение дает критическую нагрузку.

Уравнение (45) наиболее просто интегрируется при постоянных начальных усилиях: $T_r^0 = -q$, $T_\theta^0 = -q$. В этом случае при осесимметричной потере устойчивости ($n = 0$) решение имеет вид:

$$\omega_0 = C_1 I_0(\Re r) + C_2 Y_0(\Re r) + C_3 \ln \Re r + C_4;$$

при неосесимметричной форме потери устойчивости ($n \neq 0$)

$$\omega_n = C_1 I_n(\Re r) + C_2 Y_n(\Re r) + C_3 r^{-n} + C_4 r^n,$$

где I_n , Y_n - табулированные функции Бесселя первого и второго рода; $\Re^2 = q/D$. Рассмотрим несколько примеров.

Круглая пластина равномерно сжата по контуру. Из курса теории упругости известно, что для кольцевых пластин нагруженных по контурам равномерно распределенной нагрузкой

$$\sigma_r = A - B/r^2, \quad \sigma_\theta = A + B/r^2.$$

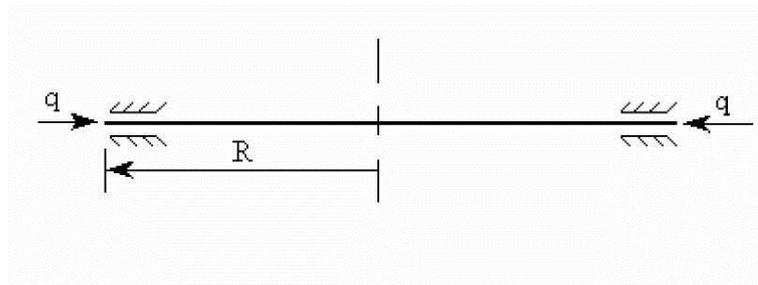


Рис. 4.6.

Для круглых пластин при $r=0$ напряжение должно быть ограничено, поэтому $B=0$. Отсюда следует, что

$$T_r^0 = T_\theta^0 = A = -q.$$

Независимо от способа закрепления контура прогиб и угол поворота в центре пластины не должны обращаться в бесконечность. Так как при $r \rightarrow 0$ $Y_n(\mathfrak{R}r)$, $\ln \mathfrak{R}r$, r^{-n} стремятся к бесконечности, то при любой форме потери устойчивости надо положить $C_2 = C_3 = 0$. Тогда можно записать:

$$\omega_n = C_1 I_n(\mathfrak{R}r) + C_4 r^n \quad (n=0,1,2,\dots). \quad (4.46)$$

Если контур пластины защемлен, то граничные условия примут вид:

$$\omega_{n(R)} = 0; \quad \omega'_{n(R)} = 0,$$

где R - наружный радиус пластины, а штрихом обозначено дифференцирование по r .

Подчиняя решение (46) этим граничным условиям, получаем однородную систему двух уравнений относительно произвольных постоянных C_1 и C_4 . Равенство нулю определителя этой системы дает уравнение:

$$nR^{n-1}I_n(\mathfrak{R}R) - R^n I'_n(\mathfrak{R}R) = 0.$$

Функции Бесселя первого рода связаны между собой соотношением:

$$I'_n(x) = \frac{n}{x} I_n - I_{n+1}.$$

Тогда из предыдущего уравнения получаем:

$$I_{n+1}(\mathfrak{R}R) = 0. \quad (4.47)$$

Для определения критической нагрузки необходимо найти наименьшее собственное значение параметра \mathfrak{R} , поэтому для каждого n достаточно найти первый корень уравнения (47). Так при $n=0$ $(\mathfrak{R}R)_1 = 3,832$; при $n=1$ $(\mathfrak{R}R)_1 = 5,135$ и т. д. Следовательно:

$$q_{кр} = 3,832^2 D / R^2 = 14,68 D / R^2.$$

Таким образом, потеря устойчивости защемленной по контуру пластины происходит по осесимметричной форме. Поскольку из первого граничного условия при $n=0$ следует:

$$C_4 = -C_1 I_0(3,832),$$

то первая собственная функция задачи равна:

$$\omega_{кр} = 1 - I_0(3,832r/R) / I_0(3,832).$$

Если край пластины свободно оперт, то граничные условия имеют вид:

$$\omega_{n(R)} = 0; \omega''_{n(R)} + \mu\omega'_{n(R)}/R = 0.$$

Подчиняя решение (46) этим условиям вновь получаем характеристическое уравнение. Несложный анализ показывает, что и в этом случае потеря устойчивости происходит по осесимметричной форме. Критическая нагрузка

$$q_{кр} = KD/R^2. \quad (4.48)$$

Коэффициент K здесь зависит от коэффициента Пуассона, который входит во второе граничное условие. При $\mu = 0,3$ получаем $K = 4,2$.

Аналогичное решение нетрудно получить и для упругого закрепления контура пластины. В зависимости от жесткости упругой заделки коэффициент K меняется от 14,68 (абсолютно жесткая заделка) до 4,2 (свободное опирание).

Устойчивость равномерно сжатых кольцевых пластин тоже может быть исследована с помощью уравнения (45). Но в этом случае решение получается более громоздким: в выражениях для прогиба остаются все четыре постоянные и подчинение их граничным условиям на внутреннем и наружном контурах пластины приводит к системе четырех однородных уравнений. Окончательный результат можно представить также в виде (48), но теперь коэффициент K будет зависеть не только от граничных условий, но и от отношения радиусов пластины. Значения K для всех практически интересных случаев табулированы [6].

Линеаризованные уравнения дают возможность найти критический уровень внутренних начальных усилий независимо от того какими причинами они вызваны. Поэтому с помощью уравнения (45) могут быть решены задачи устойчивости круглых пластин при осесимметричном нагреве. Начальные внутренние усилия T_r^0 и T_θ^0 должны быть определены из решения задачи термоупругости. Так, если круглая пластина без зазора упирается контуром в жесткую обойму и равномерно нагрета на Δt^0 , то

$$S^0 = 0, T_r^0 = T_\theta^0 = -q,$$

где q - контактное усилие между пластиной и обоймой.

Так как в пластине

$$\varepsilon_r^0 = (T_r^0 - \mu T_\theta^0)/Eh + \alpha\Delta t = -q(1-\mu)/Eh + \alpha\Delta t = \varepsilon_\theta^0,$$

где α - коэффициент теплового расширения.

Для определения критической температуры теперь можно воспользоваться формулой (48):

$$\Delta t_{кр} = K \frac{D(1-\mu)}{R^2 E h \alpha} = \frac{K}{12(1+\mu)\alpha} \left(\frac{h}{R}\right)^2.$$

4.5. Приближенные решения основного уравнения

Задачи устойчивости пластин решают теми же методами, что и задачи поперечного изгиба пластин. Одним из наиболее эффективных методов является метод Бубнова-Галеркина, который использован нами при решении за-

дач устойчивости стержней. Общая его схема сохраняется и для уравнений в частных производных.

Зададим прогиб в виде ряда:

$$\omega = \sum_{i=1}^n C_i f_i(x, y), \quad (4.49)$$

где C_i - варьируемые параметры; $f_i(x, y)$ - базисные функции, удовлетворяющие всем заданным граничным условиям. Подстановка этого ряда в основное уравнение (24) дает некоторую функцию-ошибку

$$L(x, y, P, C_1, C_2, \dots, C_n) \neq 0,$$

где P - параметр нагрузки, пропорционально которому изменяются все внешние усилия.

В силу линейности и однородности исходного уравнения L будем линейной и однородной относительно варьируемых параметров C_i . Для минимизации функции-ошибки требуют, чтобы она была ортогональна всем базисным функциям

$$\iint f_i(x, y) L(x, y, P, C_1, C_2, \dots, C_n) dx dy = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4.50)$$

где интегрирование проводится по всей площади пластины.

Полученная однородная система n линейных уравнений имеет нулевое решение, если ее определитель равен нулю. Из этого условия получаем характеристическое уравнение n -ой степени относительно параметра нагрузки P . Корни этого уравнения дают n собственных значений P_n , наименьший из которых является критической нагрузкой. Если $n \rightarrow \infty$, то в пределе получим точное решение. В практических расчетах ограничиваемся несколькими первыми членами ряда (49).

Рассмотрим несколько примеров. Прямоугольная пластина закреплена по всему контуру и равномерно сжата в двух направлениях. Граничные условия задачи:

$$\begin{aligned} \omega = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0 \text{ и } x = a, \\ \omega = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0 \text{ и } y = b. \end{aligned}$$

Если на перемещения пластины в ее плоскости не наложены связи, то

$$T_x^0 = -q_x, \quad T_y^0 = -q_y, \quad S^0 = 0,$$

и уравнение (21) примет вид:

$$D \left(\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} \right) + q_x \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + q_y \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0. \quad (4.51)$$

Возьмем один член ряда (49) и исходя из граничных условий примем

$$f_i(x, y) = \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right).$$

Подставив прогиб в уравнение (51). Найдем функцию-ошибку

$$L = C_1 D \left[-\left(\frac{2\pi}{a}\right)^4 \cos \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right) + 2\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{2\pi}{b}\right)^2 \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} - \left(\frac{2\pi}{b}\right)^4 \cdot \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \cos \frac{2\pi y}{b} \right] + C_1 q_x \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 \cos \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right) + C_1 q_y \left(\frac{2\pi}{b}\right)^2 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \cdot \cos \frac{2\pi y}{b}.$$

Согласно соотношениям (50) имеем:

$$\begin{aligned} & \iint_0^a \int_0^b \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right) L dx dy = \\ & = C_1 \left\{ D \left[\left(\frac{2\pi}{a}\right)^3 \frac{3}{4} + \frac{2}{4} \left(\frac{4\pi^2}{ab}\right)^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{2\pi}{b}\right)^4 \right] - q_x \frac{3}{4} \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 - q_y \frac{3}{4} \left(\frac{2\pi}{b}\right)^2 \right\} ab = 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем уравнение, описывающее критическое сочетание нагрузок

$$q_x + \lambda^2 q_y = (3/\lambda^2 + 2 + 3\lambda^2) 4\pi^2 D / 3b^2,$$

где по-прежнему $\lambda = a/b$.

В частности, для квадратной пластины, сжатой в одном направлении:

$$\begin{aligned} & (q_x = q, q_y = 0, \lambda = 1) \\ & q_{кр} = 10,67\pi^2 D / b^2. \end{aligned}$$

Точное решение дает $K = 10,07$. В этом случае даже один член ряда (49) дает удовлетворительный результат. Это связано с тем, что принятая форма потери устойчивости для квадратной пластины близка к действительной. При увеличении λ принятая форма может не соответствовать действительной форме потери устойчивости и точность приведенного приближенного решения может резко ухудшиться. Поэтому для широкого диапазона значений λ необходимо предусматривать возможность смены форм потери устойчивости. Например, для рассматриваемой задачи при $\lambda \gg 1$ можно принять:

$$\omega_{(x,y)} = \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b}\right) \sum_{i=1}^n C_i \left(1 - \cos \frac{2\pi i x}{a}\right).$$

Рассмотрим прямоугольную пластину при сдвигающих контурных нагрузках. В этом случае $T_x'' = T_y'' = 0$, $S^0 = q$ и уравнение (21) примет вид:

$$D \left(\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} \right) - 2q \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} = 0.$$

Это уравнение содержит смешанную производную, поэтому даже для свободно опертой по контуру пластины с конечным отношением сторон получить точное решение не удастся.

Получим приближенное решение этой задачи методом Галеркина. Прогиб представим в виде двойного ряда

$$\omega_{(x,y)} = \sum \sum C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (4.52)$$

При произвольных λ для получения удовлетворительного результата приходится брать большое число ряда (52), что делает решение весьма громоздким. Положим λ близко к единице, что дает возможность получить при-

емлемые решения при небольшом числе членов ряда. Заметим, что здесь нельзя ограничиваться одним членом ряда, так как в этом случае условие ортогональности не будет содержать нагрузку q . Итак, возьмем

$$\omega = C_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + C_{22} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}.$$

Условия ортогональности (50) приводят к двум уравнениям:

$$D \left[\left(\frac{\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \right]^2 \frac{ab}{4} C_{11} - \frac{32}{9} q C_{22} = 0,$$

$$-\frac{32}{9} q C_{11} + D \left[\left(\frac{2\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{2\pi}{b} \right)^2 \right]^2 \frac{ab}{4} C_{22} = 0.$$

Приняв нулю определитель этой системы, находим:

$$q_{кр} = \pm \frac{9\pi^4 ab}{32} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 D = \pm K_r \frac{\pi^2 D}{b^2} \quad (4.53)$$

Для квадратной пластины $K_r = 9\pi^2/8 = 11,1$. Уточненное решение дает $K_r = 9,34$. [1].

Учитывая большее число членов ряда (52), можно найти значение коэффициента K_r и при других значениях λ . Аналогичные решения получены и при иных закреплениях краев пластины [1].

Методом Бубнова-Галеркина могут быть решены многие другие задачи устойчивости прямоугольных и круглых пластин. Но при всех достоинствах этот метод обладает недостатком, заключающимся в необходимости удовлетворения всем граничным условиям при выборе базисных функций. Геометрические граничные условия можно выполнить сравнительно легко, но даже для пластин простой формы трудно выбрать базисные функции, удобные для математических преобразований и удовлетворяющие всем силовым граничным условиям. Это относится особенно к свободным и упруго закрепленным краям. Поэтому во многих задачах приближенные решения удобнее получать энергетическим методом.

4.6. Энергетический критерий устойчивости в форме Брайена

Начальное напряженное состояние в пластине считаем известным. Дадим пластине бесконечно малые прогибы $\omega(x, y)$. Изменение полной потенциальной энергии при этом равно:

$$\Delta \mathcal{E} = U + V, \quad (4.54)$$

где U - потенциальная энергия деформаций при изгибе; V - изменение энергии деформации срединной плоскости пластины, вызванное изгибом.

Определим работу внутренних усилий при изгибе. Рассмотрим деформированный бесконечно малый элемент пластины (рис.4.2). Момент $M_x dy$ совершает работу на изменении угла поворота v_x вдоль оси x , который равен $\frac{\partial v_x}{\partial x} dx$. С учетом формулы (9) эта работа равна:

$$dW_{(M_x)} = -\frac{1}{2} M_x \chi_x dx dy.$$

Аналогично находится работа моментов M_y и M_{xy} .

Тогда

$$dU = -dW = 0,5(M_x \chi_x + M_y \chi_y + 2M_{xy} \chi_{xy}) dx dy.$$

Подставляя сюда выражения (9-11) и интегрируя по всей площади пластины, после перегруппировки членов находим

$$U = \frac{1}{2} \iint D \left\{ \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\mu) \left[\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy. \quad (4.55)$$

При изгибе срединная поверхность получает деформации, определяемые по формулам (16-18). На них начальные усилия совершают упругую работу, которая равна

$$V = \frac{1}{2} \iint \left[T_x^0 \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + 2S^0 \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} + T_y^0 \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy. \quad (4.56)$$

Точки бифуркации начального состояния определяются из условия стационарности энергии:

$$\delta(\Delta \mathcal{E}) = 0. \quad (4.57)$$

Это условие, при котором энергия определяется по соотношениям (55) и (56) называют энергетическим критерием устойчивости в форме Брайена.

Покажем, что из этого условия следует основное линейаризованное уравнение (21). Из вариационного исчисления известно, что условие стационарности функционала $F(x, y, y', y'')$, когда функция y зависит от переменной x , сводится уравнению Эйлера:

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y''} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \quad (4.58)$$

Функционал энергии (54) зависит от прогиба, являющегося функцией двух переменных и состоит из двух слагаемых, первый из которых (U) зависит только от вторых производных прогиба, а второй (V) – только от первых производных прогиба. С учетом этого уравнение Эйлера для функционала энергия будет уравнением в частных производных и примет вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial U}{\partial \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial U}{\partial \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial U}{\partial \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right)} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)} = 0.$$

После дифференцирования отсюда получаем основное уравнение (21).

Условие (57) можно использовать для построения приближенного решения задач устойчивости пластин методом Рэля-Ритца. В этом случае функцию прогиба задают в виде ряда (49), где $f_i(x, y)$ - функции, удовлетворяющие геометрическим граничным условиям задачи. Если все действующие нагрузки изменяются пропорционально параметру P , то подставив ряд (49) в выражения (55) и (56) и выполнив необходимые операции дифференцирования и интегрирования, получим:

$$\Delta \mathcal{E} = \Delta \mathcal{E}(P, C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Учитывая структуру выражений (55) и (56), нетрудно установить, что $\Delta\mathcal{E}$ будет квадратичной формой от параметров C_i . Потому условие стационарности энергии приводит к системе n однородных линейных уравнений с неизвестными C_i :

$$\frac{\partial(\Delta\mathcal{E})}{\partial C_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Равенство нулю определителя этой системы дает уравнение, из которого можно найти n приближенных собственных значений параметра нагрузки P_n . Наименьший из них равняется критическому значению.

При численной реализации метода Рэлея-Ритца вместо условия (57) иногда удобнее воспользоваться другой эквивалентной ему формой. Положив $\Delta\mathcal{E} = 0$, получим:

$$P = \frac{-U}{\frac{1}{2} \iint \left[\bar{T}_x^0 \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + 2\bar{S}^0 \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \bar{T}_y^0 \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy}, \quad (4.59)$$

где начальные усилия с чертой сверху означают распределение этих усилий при $P = 1$.

Минимизируя каким-либо методом выражение (59), находим $P_{\min} = P_{кр}$.

При выводе выражения (56) учитывались только прогибы, а перемещения в плоскости пластины u и v сразу полагались равными нулю. При этом возникает вопрос, не может ли пластина потерять устойчивость при перемещениях u , v , не равных нулю, раньше, чем это следует из критерия, полученного в предположении равенства их нулю. Выясним этот вопрос. Отклоненное положение зададим перемещениями одного порядка малости:

$$u = \alpha u_1(x, y), \quad v = \alpha v_1(x, y), \quad \omega = \alpha \omega_1(x, y),$$

где α - бесконечно малый параметр.

Удлинения и сдвиги теперь надо определять не по формулам (17-18), а по формулам (19):

$$\varepsilon_x = \alpha \varepsilon'_x + \alpha^2 \varepsilon''_x; \quad \varepsilon_y = \alpha \varepsilon'_y + \alpha^2 \varepsilon''_y; \quad \gamma = \alpha \gamma' + \alpha^2 \gamma'',$$

где $\varepsilon'_x, \varepsilon'_y, \gamma'$ определяются выражениями (1), а $\varepsilon''_x, \varepsilon''_y, \gamma''$ - выражениями (17-18).

Определив приращение полной потенциальной энергии пропорциональное α^2 , получаем, что оно имеет дополнительное слагаемое U_2 , зависящее от перемещений u_1 и v_1 :

$$U_2 = \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \iint \left[(\varepsilon'_x)^2 + 2\mu \varepsilon'_x \varepsilon'_y + (\varepsilon'_y)^2 + \frac{1-\mu}{2} (\gamma')^2 \right] dx dy.$$

Очевидно, U_2 - величина положительно определенная, то есть при любых не равных нулю перемещениях u_1 , v_1 она всегда больше нуля. Следовательно, для получения минимальной критической нагрузки перемещения u_1 , v_1 необходимо положить равным нулю.

Рассмотрим примеры применения энергетического метода. Пусть прямоугольная пластина с одним свободным краем сжата в направлении оси x контурными силами (рис. 4.7)

$$q_x = q(1 + \eta y/b) \quad (\eta \geq -1).$$

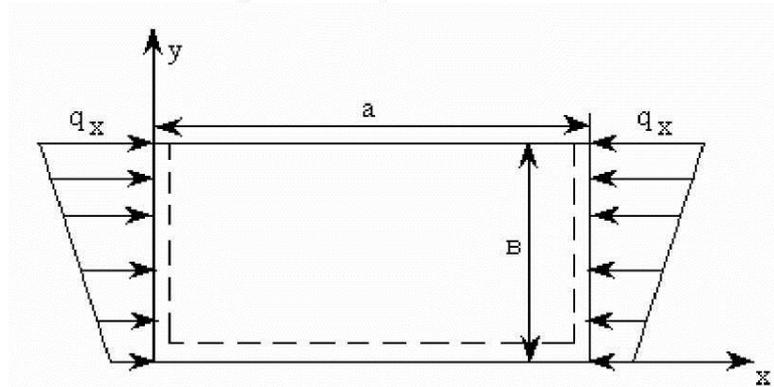


Рис. 4.7

При таком нагружении решение плоской задачи очевидно:

$$T_x^0 = -q_x, \quad T_y^0 = S^0 = 0.$$

Если по трем остальным сторонам пластина свободно оперта, то прогиб удобно аппроксимировать рядом

$$\omega = \sin \frac{\pi n x}{a} \sum_{i=1}^m C_i y^i.$$

Для пластин со свободным краем обнаруживается основное преимущество метода Рэлея-Ритца перед методом Галеркина: при выборе координатных функций можно не заботиться об удовлетворении силовых граничных условий. Ограничившись одним членом ряда, находим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial x} &= C_1 y \frac{\pi n}{a} \cos \frac{\pi n x}{a}; & \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} &= -C_1 y \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2 \sin \frac{\pi n x}{a}; \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} &= C_1 \frac{\pi n}{a} \cos \frac{\pi n x}{a}; & \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} &= 0. \end{aligned}$$

Подставив производные в выражение $\Delta \mathcal{E}$ и выполнив несложные операции интегрирования, получим:

$$\Delta \mathcal{E} = C_1^2 \frac{ab}{4} \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2 \left\{ D \left[\frac{b^2}{3} \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2 + 2(1 - \mu) \right] - qb^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{\eta}{4} \right) \right\}.$$

Отсюда находим собственные значения нагрузки

$$q_n = \frac{\pi^2 n^2 D}{b^2} \cdot \frac{b^2/a^2 + 6(1 - \mu)/\pi^2 n^2}{1 + 0,75\eta}.$$

Наименьшее собственное значение имеет место при $n = 1$

$$q_{кр} = K \pi^2 D / b^2 = \frac{b^2/a^2 + 6(1 - \mu)/\pi^2}{1 + 0,75\eta} \cdot \frac{\pi^2 D}{b^2}.$$

В качестве второго примера рассмотрим сплошную круглую пластину, равномерно сжатую контурной нагрузкой q (рис.4.6); тогда

$$T_r^0 = T_\theta^0 = -q, \quad S^0 = 0.$$

Исследуем осесимметричную форму потери устойчивости. С учетом соотношений (30) при $n = 0$ уравнение (54) примет вид:

$$\Delta \mathcal{E} = U - \pi \int_0^R q \left(\frac{d\omega}{dr} \right)^2 r dr,$$

где

$$U = \pi \int_0^R D \left[\left(\frac{d^2 \omega}{dr^2} + \frac{d\omega}{r dr} \right)^2 - \frac{2(1-\mu)}{r} \frac{d\omega}{dr} \frac{d^2 \omega}{dr^2} \right] r dr. \quad (4.60)$$

Для защемленной пластины можно принять:

$$\omega = \sum_{i=0}^n C_i (1-\rho^2)^2 \rho^i \quad (\rho = r/R). \quad (4.61)$$

Критическую силу определим из выражения (59):

$$q = \frac{U}{\pi \int_0^R \left(\frac{d\omega}{dr} \right)^2 r dr} = \frac{\int_0^1 D [(\omega'' + \omega'/\rho)^2 - 2(1-\mu)\omega'\omega''/\rho] \rho d\rho}{R^2 \int_0^1 (\omega')^2 \rho d\rho}, \quad (4.62)$$

где штрихами обозначено дифференцирование по ρ .

Ограничимся одним членом ряда (61):

$$\omega' = -4C_0(1-\rho^2)\rho; \quad \omega'' = -4C_0(1-3\rho^2).$$

Подставляя производные и интегрируя, имеем:

$$U = 32C_0^2 \pi D / 3R^2; \quad \int_0^1 (\omega')^2 \rho d\rho = 2C_0^2 / 3.$$

Из выражения (62) теперь получим:

$$q_{кр} = KD/R^2 = 16D/R^2.$$

Учитывая большее число членов ряда и минимизируя (62) по безразмерным параметрам $\bar{C}_i = C_i/C_0$, нетрудно получить результат с любой степенью точности. Так, при двух членах ряда $K=14,7$. Точное значение $K=14,68$ (§4.4).

Решенная задача легко обобщается на случай пластины переменной толщины $D=D(r)$. Для этого в знаменатель выражения (62) под интеграл достаточно ввести функцию $\bar{T}_r^0(r)$, определяющую распределение начальных радиальных усилий при $q=1$. Эту функцию необходимо определить предварительно из решения осесимметричной плоской задачи для круглой пластины переменной толщины.

4.7. Энергетический критерий устойчивости в форме Тимошенко

Рассмотрим отклоненное состояние пластины, смежное с начальным плоским. Перемещения срединной поверхности пластины зададим в виде:

$$u = \alpha u_1(x, y) + \alpha^2 u_2(x, y); \quad v = \alpha v_1(x, y) + \alpha^2 v_2(x, y) \\ \omega = \alpha \omega_1(x, y) + \alpha^2 \omega_2(x, y),$$

где α - малый параметр.

В соответствии с общей схемой найдем пропорциональное α^2 изменение полной потенциальной энергии. Как показано в предыдущем параграфе. При

потере устойчивости u_1 и v_1 равны нулю. Кроме того, функция ω_2 не войдет в выражение для $\Delta\mathcal{E}$, так как дает члены выше второго порядка малости. Поэтому можно принять:

$$u = \alpha^2 u_2(x, y); \quad v = \alpha^2 v_2(x, y); \quad \omega = \alpha \omega_1(x, y). \quad (4.63)$$

Тогда, опустив множитель α^2 , получим:

$$\Delta\mathcal{E} = U + \iint (T_x^0 \varepsilon_x + T_y^0 \varepsilon_y + S^0 \gamma) dx dy - \iint (P_x u_2 + P_y v_2) dx dy - \oint (q_x u_2 + q_y v_2) dS = U + V \quad (4.64)$$

где U определяется выражением (55), а дополнительные деформации – по формулам (19); последний интеграл берется по контуру пластины.

Покажем, что потенциальная энергия деформации срединной поверхности V совпадает с выражением (56) при любых возможных перемещениях u_2, v_2 . Для этого из (64) выпишем все слагаемые, содержащие эти перемещения:

$$A = \iint \left[T_x^0 \frac{\partial u_2}{\partial y} + S^0 \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) + T_y^0 \frac{\partial v_2}{\partial y} \right] dx dy - \iint (P_x u_2 + P_y v_2) dx dy - \oint (q_x u_2 + q_y v_2) dS.$$

Это выражение представляет собой первую вариацию полной потенциальной энергии начального напряженного состояния при возможных перемещениях u_2 и v_2 . Поскольку начальное состояние равновесно, то $A=0$ при любых возможных перемещениях и выражение для V в (64) и выражения (56) совпадают. Поэтому мы до сих пор полагали u_2 и v_2 равными нулю.

Теперь поступим по другому: выберем эти перемещения так, чтобы в выражении (64) обратились в нуль слагаемые, содержащие начальные усилия. Выразив начальные усилия через начальные деформации по закону Гука (3'), а дополнительные деформации через дополнительные усилия по соотношениям (3), можно записать:

$$W = \iint (T_x^0 \varepsilon_x + T_y^0 \varepsilon_y + S^0 \gamma) dx dy = \iint (T_x \varepsilon_x^0 + T_y \varepsilon_y^0 + S \gamma^0) dx dy.$$

Выразив начальные деформации через начальные перемещения по формулам (1), получим:

$$W = \iint \left[T_x \frac{\partial u_0}{\partial x} + S \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + T_y \frac{\partial v_0}{\partial y} \right] dx dy. \quad (a)$$

Каждое слагаемое под интегралом представим в виде:

$$T_x \frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{\partial (T_x u_0)}{\partial x} - \frac{\partial T_x}{\partial x} u_0. \quad (4.65)$$

Используя далее формулы Грина

$$\iint \frac{\partial F}{\partial x} dx dy = \oint F \cos \alpha dS, \quad \iint \frac{\partial F}{\partial y} dx dy = \oint F \sin \alpha dS, \quad (4.66)$$

приходим к следующему выражению:

$$W = \oint (q_x'' u_0 + q_y'' v_0) dS - \iint \left[\left(\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} \right) u_0 + \left(\frac{\partial T_y}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} \right) v_0 \right] dx dy, \quad (б)$$

где $q_x'' = T_x \cos \beta + S \sin \beta; \quad q_y'' = S \cos \beta + T_y \sin \beta; \quad (в)$

β - угол между нормалью к контуру и осью x .

Для того чтобы в выражении (64) избавиться от начальных условий достаточно потребовать, чтобы дополнительные усилия удовлетворяли уравнениям:

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial T_y}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} = 0; \quad (4.67)$$

$$q_x'' = q_y'' = 0$$

или

$$T_x \cos \beta + S \sin \beta = 0; \quad S \cos \beta + T_y \sin \beta = 0. \quad (4.68)$$

Уравнения (67) являются уравнениями равновесия (2), а соотношения (68) – условиями на контуре (4) для дополнительных усилий в плоскости пластины.

При выполнении этих условий получим

$$\Delta \mathcal{E} = U - \iint (P_x u_2 + P_y v_2) dx dy - \oint (q_x u_2 + q_y v_2) ds. \quad (4.69)$$

Дальнейшее решение можно вести на основании условия (57) или условия $\Delta \mathcal{E} = 0$ при дополнительном требовании минимума параметра нагрузки. Эти условия, основанные на уравнении (69) называют энергетическим критерием в форме Тимошенко.

Критерий Брайена позволяет исследовать устойчивость пластины независимо от того, какими причинами вызваны усилия, но при этом надо предварительно определить эти начальные усилия. Критерий Тимошенко применим только при действии внешних сил. В этом смысле критерий Брайена более общий, чем критерий Тимошенко. При использовании критерия Тимошенко не надо определять начальные усилия, но надо определить перемещения u_2 , v_2 , вызванные изгибом. Выбор того или иного критерия зависит от того, что легче найти: начальные усилия или дополнительные перемещения.

Изложим путь приближенного решения задач устойчивости с помощью критерия Тимошенко. Введем функцию усилий с помощью соотношений (6)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = T_x; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = T_y; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -S.$$

Уравнение неразрывности (20) выразим через усилия по закону Гука (3) и в них усилия заменим через функцию напряжений. После преобразований получим известное уравнение Кармана:

$$\nabla^4 \varphi = E h K = E h \left[\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right], \quad (4.70)$$

где K - гауссова кривизна деформированной срединной поверхности.

Выведем граничные условия для функций усилий. Воспользуемся очевидными соотношениями:

$$dx = -dS \cdot \sin \beta, \quad dy = dS \cdot \cos \beta;$$

$$\frac{\partial F}{\partial S} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dS} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dS} = -\frac{\partial F}{\partial x} \sin \beta + \frac{\partial F}{\partial y} \cos \beta.$$

Теперь можно записать:

$$q_x'' = \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right); \quad q_y'' = \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right).$$

Из граничных условий (68) получим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{или} \quad \varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, \quad (4.71)$$

где n - нормаль к контуру пластины.

При решении задач устойчивости прогиб задаем в виде ряда (49). Это позволяет выразить правую часть уравнения (70) через функции f , и коэффициенты C_i . При известной правой части задача определения функции усилий оказывается эквивалентной обычной линейной задаче определения прогиба защемленной по контуру пластины. Потому, пользуясь хорошо разработанными методами теории изгиба пластин, функцию усилий φ можно выразить через функцию прогиба. Далее из закона Гука (3) получаем следующие уравнения для определения перемещений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial x} &= \frac{1}{Eh} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2; \\ \frac{\partial v_2}{\partial y} &= \frac{1}{Eh} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Отметим один частный случай. Если при потере устойчивости срединная плоскость пластины изгибается по развертывающей поверхности, то гауссова кривизна $K=0$ и уравнение (70) имеет решение $T_x = T_y = S = 0$. В этом случае перемещения определяются из уравнений:

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2; \quad \frac{\partial v_2}{\partial y} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2. \quad (4.73)$$

Энергетической критерий Тимошенко в виде (69) не применим для решения задач термоустойчивости или для случая, когда на контуре пластины заданы перемещения. В этих случаях подобно тому, как это сделано при выводе уравнения (69), выражение (56) можно преобразовать так, чтобы избавиться в нем от начальных усилий.

Пусть на контуре пластины S_1 заданы перемещения:

$$u_0 = \bar{u}_0, \quad v_0 = \bar{v}_0.$$

Тогда приращение полной потенциальной энергии можно записать так:

$$\Delta \mathcal{E} = U + \oint (q_x'' \bar{u} + q_y'' \bar{v}) dS, \quad (4.74)$$

где q_x'', q_y'' определяются соотношениями (в).

Дополнительные начальные усилия, входящие в q_x'', q_y'' , должны быть определены с учетом равенства нулю дополнительных перемещений на тех участках контура, где заданы перемещения \bar{u}_0, \bar{v}_0 :

$$u_2(x, y) = 0; \quad v_2(x, y) = 0. \quad (4.75)$$

Пусть теперь на пластину действует температурное поле $t = t_{(x,y)}$. Тогда приращение полной энергии можно преобразовать к виду:

$$\Delta \Theta = U - \iint \alpha_t t_{(x,y)} (T_x + T_y) dx dy, \quad (4.76)$$

где α_t - коэффициент теплового расширения материала пластины.

4.8. Формулировка критерия устойчивости через статически возможные усилия

Иногда определение начальных усилий в энергетическом критерии Брайена представляет собой сложную проблему, например, при действии сосредоточенных сил. Возникает вопрос, нельзя ли действительные начальные усилия заменить статически возможными начальными усилиями T_x^c , T_y^c , S^c . Сделаем такую замену и потребуем, чтобы статически возможные усилия удовлетворяли уравнениям равновесия (2) и граничным условиям (4).

Для простоты изложения ограничимся случаем, когда пластина нагружена только контурными силами. Для любой системы статически возможных усилий из соотношений (а) и (б) предыдущего параграфа с учетом уравнений равновесия (2) можно записать:

$$\oint (q_x u_2 + q_y v_2) ds = \iint \left[T_x^c \frac{\partial u_2}{\partial x} + S^c \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) + T_y^c \frac{\partial v_2}{\partial y} \right] dx dy.$$

Тогда вместо уравнения (69) получим:

$$\Delta \Theta = U - \iint \left[T_x^c \frac{\partial u_2}{\partial x} + S^c \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) + T_y^c \frac{\partial v_2}{\partial y} \right] dx dy. \quad (4.77)$$

На первый взгляд задача усложняется: надо предварительно найти статически возможные начальные усилия, а также определить производные дополнительных перемещений. Но иногда определение статически возможных усилий оказывается гораздо проще, чем действительных усилий. Кроме того, уравнение (77) можно преобразовать к более удобному для практического использования виду. Воспользовавшись соотношениями (19), запишем:

$$\begin{aligned} \Delta \Theta = U + \frac{1}{2} \iint \left[T_x^c \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + 2S^c \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} + T_y^c \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy - \\ - \iint (T_x^c \varepsilon_x + S^c \gamma + T_y^c \varepsilon_y) dx dy. \end{aligned}$$

Закон Гука (3) позволяет переписать последний интеграл в правой части в виде:

$$\frac{1}{Eh} \iint (T_x^c + T_y^c)(T_x + T_y) dx dy - \frac{1+\mu}{Eh} \iint (T_x^c T_y - 2S^c S + T_y^c T_y) dx dy.$$

Используя формулы (65) и (66), второй интеграл здесь преобразуем к виду:

$$\begin{aligned} \iint \left(T_x^c \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2S^c \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + T_y^c \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) dx dy = \oint \left(q_x^c \frac{\partial \varphi}{\partial x} + q_y^c \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) ds - \\ - \iint \left[\left(\frac{\partial T_x^c}{\partial x} + \frac{\partial S^c}{\partial y} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(\frac{\partial T_y^c}{\partial y} + \frac{\partial S^c}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] dx dy. \end{aligned}$$

Этот интеграл тождественно равен нулю: контурный интеграл равен нулю в силу граничных условий (71), а интеграл по площади обращается в нуль

в силу уравнений равновесия (2). С учетом этих преобразований окончательно имеем:

$$\Delta \mathcal{E} = U + \frac{1}{2} \iint \left[T_x^e \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 + 2S^e \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} + T_y^e \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy - \frac{1}{Eh} \iint (T_x^e + T_y^e)(T_x + T_y) dx dy. \quad (4.78)$$

Если статически возможные усилия совпадают с действительными, то последний интеграл в правой части равен нулю и выражение (78) переходит в энергетический критерий Брайена.

4.9. Примеры применения энергетического критерия устойчивости

Рассмотрим задачу устойчивости шарнирно опертой по всем сторонам прямоугольной пластины, равномерно сжатой в двух направлениях. Начальные усилия очевидны:

$$T_x^0 = -q, \quad T_y^0 = -q_y = -\nu q, \quad S^0 = 0.$$

Начало координат поместим в центре пластины. Размеры пластины в плане равны a и b . Задав функцию прогиба:

$$\omega = c_1 \cos(\pi x/a) \cos(\pi y/b), \quad (4.79)$$

по формуле (55) находим:

$$U = c_1^2 \left[\left(\frac{\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \right]^2 D ab / 8. \quad (4.80)$$

Используя выражения (56) и (54) из условия $\Delta \mathcal{E} = 0$, получаем:

$$q_{кр} = K \frac{\pi^2 D}{b^2} = \frac{(b^2/a^2 + 1)^2}{\nu + b^2/a^2} \cdot \frac{\pi^2 D}{b^2}. \quad (4.81)$$

Для сравнения решим эту задачу с помощью критерия Тимошенко (69). При этом необходимо решить вспомогательную задачу по определению перемещений u_2, v_2 . Уравнение Кармана с учетом (79) примет вид:

$$\nabla^4 \varphi = c_1^2 E h (\pi^2 / ab)^2 \left(\sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{b} - \cos^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{b} \right). \quad (4.82)$$

Исходя из граничных условий (71), примем:

$$\varphi = f \left(1 + \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left(1 + \cos \frac{2\pi y}{b} \right). \quad (4.83)$$

Умножив согласно методу Галеркина (82) на функцию φ и проинтегрировав по всей площади пластины, найдем:

$$f = -\frac{c_1^2 E h a^2 b^2}{8(3a^4 + 2a^2 b^2 + 3b^4)} = -c_1^2 E h \cdot B. \quad (4.84)$$

Для определения перемещений u_2, v_2 имеем зависимости (72). В силу симметрии центр пластины можно считать неподвижным; тогда:

$$u_2 = \int_0^x \left[\frac{1}{Eh} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 \right] dx,$$

$$v_2 = \int_0^y \left[\frac{1}{Eh} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \right] dy.$$

Подставив сюда выражения (79) и (83) определим перемещения на контуре пластины

$$u_{2(-a/2,y)} = \frac{c_1^2 \pi^2 a}{16} \left[\frac{1}{a^2} + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{32B}{b^2} \right) \cos \frac{2\pi y}{b} \right],$$

$$v_{2(x,-b/2)} = \frac{c_1^2 \pi^2 b}{16} \left[\frac{1}{b^2} + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{32B}{a^2} \right) \cos \frac{2\pi x}{a} \right].$$

Теперь выражение (69) можно переписать так:

$$\Delta \mathcal{E} = U - 2 \left[\int_{-b/2}^{b/2} q_x u_{2(-a/2,y)} dy + \int_{-a/2}^{a/2} q_y v_{2(x,-b/2)} dx \right]. \quad (4.85)$$

Условие $\Delta \mathcal{E} = 0$ вновь приводим к выражению (81).

Когда начальные усилия определяются элементарно, применение энергетического критерия Тимошенко связано с более громоздкими выкладками, чем критерия Брайена. Но определив один раз перемещения u_2 , v_2 можно легко получить приближенное решение серии других задач устойчивости пластины, допускающей то же представление прогиба. Например, пусть рассмотренная пластина сжата только в направлении оси x силами

$$q_{x(y)} = q(2y/b)^d.$$

Тогда из выражения (85)

$$q_{кр} = \frac{\left[(\pi/a)^2 + (\pi/b)^2 \right]^2 D ab/8}{\left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \frac{a}{4} \int_0^{b/2} \left[1 + \left(1 - \frac{32Ba^2}{b^2} \right) \cos \frac{2\pi y}{b} \right] \left(\frac{2y}{b} \right)^d dy} = K_d \pi^2 D / b^2 \dots$$

Для квадратной пластины $B = 1/64$ и

$$K_d = \frac{2b}{\int_0^{b/2} \left(1 + 0,5 \cos \frac{2\pi y}{b} \right) \left(\frac{2y}{b} \right)^d dy}.$$

Расчеты при различных d дают: $K_0 = 4$; $K_1 = 10$; $K_2 = 17,24$ и т.д. Эти результаты (за исключением K_0) являются приближенными, поскольку функции ω и φ задавались одним членом. Увеличивая число членов ряда, решение можно получить практически с любой степенью точности.

В качестве следующего примера рассмотрим сплошную круглую пластину, теряющую устойчивость в результате осесимметричного нагрева. Тогда выражение (76) примет вид:

$$\Delta \mathcal{E} = U - 2\pi \alpha_t \int_0^R t(T_r + T_0) r dr,$$

где U определяется выражением (60).

Деформации в пластине находятся по формулам:

$$\varepsilon_r = \frac{du_2}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\omega}{dr} \right)^2; \quad \varepsilon_\theta = u_2/r; \quad \gamma = 0.$$

Из закона Гука следует:

$$T_r = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left[\frac{du_2}{dr} + \mu \frac{u_2}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\omega}{dr} \right)^2 \right]; \quad T_\theta = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left[\mu \frac{du_2}{dr} + \frac{u_2}{r} + \frac{\mu}{2} \left(\frac{d\omega}{dr} \right)^2 \right].$$

Тогда

$$\Delta \mathcal{E} = U - 2\pi\alpha_t \frac{Eh}{1-\mu} \int_0^R \left[\frac{du_2}{dr} + \frac{u_2}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\omega}{dr} \right)^2 \right] r dr. \quad (4.86)$$

Из уравнения равновесия

$$\frac{d}{dr}(rT_r) - T_\theta = 0$$

вытекает уравнение для определения перемещения

$$\frac{d^2 u_2}{dr^2} + \frac{du_2}{r dr} - \frac{u_2}{r^2} = \left[\frac{1}{r} (ru_2)' \right]' = -\frac{1-\mu}{2r} \left(\frac{d\omega}{dr} \right)^2 - \frac{d\omega}{dr} \cdot \frac{d^2 \omega}{dr^2}.$$

Интегрируя это уравнение, находим:

$$u_2 = A_1 r + A_2 / r - \frac{1}{r} \int r \int \left[\frac{1-\mu}{2r} \left(\frac{d\omega}{dr} \right)^2 + \frac{d\omega}{dr} \cdot \frac{d^2 \omega}{dr^2} \right] dr dr,$$

где A_1 и A_2 - постоянные, определяемые из граничных условий задачи. Из условия ограниченности перемещений в центре пластины следует $A_2 = 0$.

Для защемленной по контуру пластины прогиб можно принять в виде (61). Ограничившись одним членом ряда, находим

$$u_2 = A_1 r - \frac{16C_0^2}{r} \int \rho \int \left[\frac{1-\mu}{2} (1-\rho^2)^2 \rho + (1-\rho^2)(1-3\rho^2) \rho \right] d\rho d\rho =$$

$$A_1 \rho R - \frac{C_0^2}{6R} \left[6(3-\mu)\rho^3 - 4(5-\mu)\rho^5 + (7-\mu)\rho^7 \right].$$

Пластина при нагреве может потерять устойчивость только в том случае, если радиальное перемещение на контуре равно нулю. Отсюда

$$A_1 = (5-3\mu)C_0^2/6R^2,$$

$$u_2 = C_0^2 \left[(5-3\mu)\rho - 6(3-\mu)\rho^3 + 4(5-\mu)\rho^5 - (7-\mu)\rho^7 \right] / 6R.$$

Подставляя u_2 и ω в выражение (86), получаем:

$$\Delta \mathcal{E} = U - \frac{\pi E h \alpha_t}{3(1-\mu)} C_0^2 \int_0^1 \left[2(5-3\mu)\rho - 8(1-\mu)(3\rho^3 - 3\rho^5 + \rho^7) \right] \rho d\rho.$$

Потенциальная энергия изгиба определена в параграфе 4.6. При постоянной по радиусу температуре после интегрирования получаем:

$$\Delta \mathcal{E} = 32C_0^2 \pi D / 3R^2 - \pi E h \alpha_t C_0^2 2/3(1-\mu).$$

Отсюда

$$(\alpha_t)_{кр} = 16D(1-\mu)/EhR^2,$$

что отличается от точного решения, полученного в параграфе 4.4 на 9%. Взяв два члена ряда (61). Получаем погрешность 0,15%.

Важно подчеркнуть, что выражение (86) позволяет приближенно решать задачи термоустойчивости круглых пластин при любом осесимметричном законе распределения температуры $t(r)$. При этом не требуется определять начальные усилия.

Большое практическое значение и несомненный методический интерес представляют задачи устойчивости пластин, нагруженных сосредоточенными внешними силами. В окрестностях точек приложения таких сил возникают неограниченно большие напряжения. Однако при использовании энергетического критерия Тимошенко эти напряжения в решении не фигурируют.

В качестве примера рассмотрим решение задачи устойчивости шарнирно опертой прямоугольной пластины, сжатой сосредоточенными силами (рис. 4.8а).

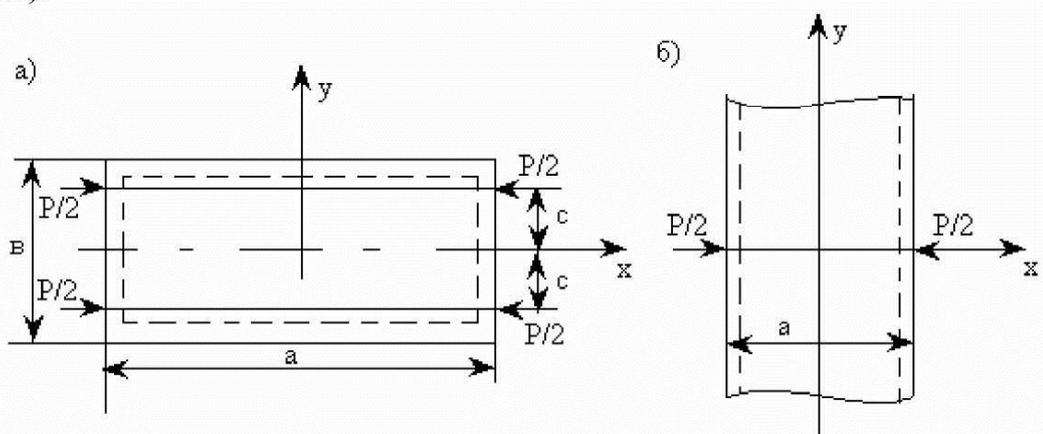


Рис. 4.8

Приближенное решение задачи ищем с помощью энергетического критерия устойчивости, выраженного через статически возможные начальные усилия. Систему таких усилий выберем в виде:

$$T_x^c = -\frac{P}{2} \frac{1}{2\delta} \quad \text{при} \quad c - \delta \leq |y| \leq c + \delta \quad (\delta \rightarrow 0); \quad (4.87)$$

на остальной части $T_x^c = 0$; $T_y^c = S^c = 0$ - по всей поверхности пластины.

При этих усилиях из уравнения (78) имеем:

$$\Delta \mathcal{E} = U - \frac{P}{2} \int_{-a/2}^{a/2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)_{y=c}^2 dx + \frac{P}{Eh} \int_{-a/2}^{a/2} (T_x + T_y)_{y=c} dx. \quad (4.88)$$

Для дальнейшего решения функцию прогиба и усилий возьмем в виде (79) и (83). Тогда

$$T_x + T_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = C_1^2 Ehb \left[\left(\frac{2\pi}{b} \right)^2 \left(1 + \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \cos \frac{2\pi y}{b} + \left(\frac{2\pi}{a} \right)^2 \left(1 + \cos \frac{2\pi y}{b} \right) \cos \frac{2\pi x}{a} \right].$$

Подставляя все в выражение (88) и интегрируя, находим:

$$\Delta \mathcal{E} = U - PC_1^2 \frac{a}{8} \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \left[1 + (1 - 32Ba^2/b^2) \cos \frac{2\pi c}{b} \right].$$

Из условия $\Delta \mathcal{E} = 0$ с учетом равенства (80) получаем:

$$P_{кр} = K 4\pi^2 D/a, \quad (4.89)$$

где

$$K = \frac{(1 + \lambda^2)^2}{4\lambda [1 + (1 - 32B\lambda^2) \cos(2\pi c/b)]}; \quad \lambda = a/b.$$

Для квадратной пластины:

$$K = \frac{1}{1 + 0,5 \cos(2\pi c/b)}. \quad (4.90)$$

В частности, когда сила P приложена по середине пластины ($c = 0$), имеем $K = 2/3$. Если силы $P/2$ приложены в углах пластины $K = 2$.

Нетрудно убедиться в том, что тот же результат можно получить, не вводя статически возможных усилий, а определяя перемещения u_2 , v_2 и используя критерий Тимошенко, как это сделано выше. Выражение (89) дает хорошую точность при λ близких к единице. При других отношениях сторон для достижения удовлетворительной точности надо брать в выражениях (79) и (83) большее число членов ряда.

Задача устойчивости прямоугольной пластины, сжатой сосредоточенными силами, решалась многими авторами. В 1906 г. А. Зоммерфельд впервые рассмотрел задачу устойчивости бесконечно длинной полосы, сжатой двумя сосредоточенными силами (рис. 4.8б). Решение им получено путем интегрирования основного линейаризованного уравнения (21), причем поле действительных начальных усилий заменено статически возможными усилиями в виде (87). В результате для шарнирно опертой вдоль длинных сторон полосы найдено

$$P_{кр} = 4\pi D/a.$$

Для пластины конечных размеров эта задача решалась С.П. Тимошенко [7]. Срединную плоскость пластины он считал нерастяжимой и полную потенциальную энергию пластины определял из выражения:

$$\Delta \mathcal{E} = U - 0,5P \int_{-a/2}^{a/2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (4.91)$$

Задав прогиб в виде тригонометрического ряда, для шарнирно опертой пластины им получена формула:

$$P_{кр} = \frac{4\pi^2 D}{a\pi} \frac{1}{\operatorname{th} \frac{\pi b}{2a} - \frac{\pi b}{2a} \frac{1}{ch^2 \frac{\pi b}{2a}}}. \quad (4.92)$$

При $b/a \rightarrow \infty$ эта формула переходит в решение Зоммерфельда. Для квадратной пластины коэффициент K в формуле (89) будет равен 0,478.

Выражение (91) получается из энергетического критерия Брайана, если начальные усилия в нем заменить на статически возможные по соотношениям (87). Если следовать этому подходу, то погрешность решения может быть сколь угодно большой. Например, для вышерассмотренной задачи при $a = b$ и одночленной аппроксимации прогиба вместо (90) получим:

$$K = \frac{1}{1 + \cos(2\pi/b)}.$$

При $c=0$ отсюда $K=0,5$; дальнейшее увеличение числа членов ряда снижает K до значения $0,478$, что отличается от значения, полученного нами, на $28,3\%$. В последние годы эта задача решалась рядом авторов численными методами и получены результаты, близкие к значению $K=2/3$. При $C=b/2$ эта формула дает $K=\infty$ независимо от числа членов ряда, то есть ошибка сколь угодно большая. Поэтому в общем случае при использовании критерия Брайана действительные начальные усилия нельзя заменять статически возможными. Такая замена должна осуществляться на основе выражения (78).

4.10. Закритическое поведение пластин

Для описания закритического деформирования необходимо решать задачу изгиба пластины в нелинейной постановке. Как и для сжатого стержня (§3.8), для пластины возможны два основных качественно различных случая закритического поведения. Если закрепления контура пластины не препятствуют ее чисто изгибной деформации без удлинения и сдвигов срединной поверхности, то после потери устойчивости происходит такой быстрый рост прогибов и изгибных напряжений, что потерю устойчивости можно считать потерей несущей способности. В этом случае закритические прогибы пластины можно определить так же, как это сделано для стержня. Но если для стержней этот случай закритического поведения основной, то для пластин он исключительный.

Пластина с закрепленным относительно прогиба контуром не может изгибаться без удлинения и сдвигов срединной поверхности. В этом случае после потери устойчивости пластина может продолжать воспринимать возрастающую внешнюю нагрузку. Исследуем этот основной случай закритической деформации пластин.

Используем сначала прием, применявшийся при изучении закритического поведения стержней (§3.8). Будем считать, что задача устойчивости пластины решена с помощью энергетического критерия Тимошенко и найдены соответствующие критической точке бифуркации функции $\omega_1(x, y)$, $\nu_2(x, y)$, $u_2(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$. Приблизительно примем, что при малых, но конечных отклонениях пластины ее напряженно-деформированное состояние описывается функциями:

$$\begin{aligned} \omega &= C\omega_1(x, y); & \varphi &= C^2\varphi_2(x, y); \\ u &= C^2u_2(x, y); & \nu &= C^2\nu_2(x, y). \end{aligned}$$

Тогда изменение полной потенциальной энергии пластины будет определяться выражением:

$$\Delta\mathcal{E} = C^2U_{(\omega_1)} - C^2 \left[\iint (P_x u_2 + P_y \nu_2) dx dy + \oint (q_x u_2 + q_y \nu_2) ds \right] + C^4 W_4,$$

где $U_{(\omega_1)}$ определяется выражением (55), а

$$W_4 = \frac{1}{2} \iint \frac{1}{Eh} [T_x^2 - 2\mu T_x T_y + T_y^2 + 2(1+\mu)S^2] dx dy \quad (4.93)$$

или

$$W_4 = \frac{1}{2} \iint \frac{Eh}{1-\mu^2} \left(\varepsilon_x^2 + 2\mu \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \frac{1-\mu}{2} \gamma^2 \right) dx dy.$$

В этих выражениях:

$$\begin{aligned} T_x &= \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2}; & T_y &= \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2}; & S &= -\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x \partial y}; \\ \varepsilon_x &= \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} \right)^2; & \varepsilon_y &= \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial y} \right)^2; \\ \gamma &= \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \frac{\partial \omega_1}{\partial y}. \end{aligned} \quad (4.94)$$

Приравняв нулю производную $\Delta \mathcal{E}$ по C нулю, получим:

$$C(P_{кр} - P) + 2C^3 W_4 / B = 0,$$

где

$$B = \iint (\bar{P}_x u_2 + \bar{P}_y v_2) dx dy + \oint (\bar{q}_x u_2 + \bar{q}_y v_2) dS; \quad P_{кр} = U/B; \quad (4.95)$$

$\bar{P}_x, \bar{P}_y, \bar{q}_x, \bar{q}_y$ - распределение внешних нагрузок при $P=1$.

При $P > P_{кр}$ из последнего уравнения находим:

$$C = \sqrt{(P/P_{кр} - 1)U/2W_4}. \quad (4.96)$$

Определив параметр C , нетрудно вычислить перемещения и изгибные напряжения в любой точке пластины. Полные напряжения должны быть определены с учетом напряжений от начальных и дополнительных усилий в срединной поверхности пластины.

Рассмотрим вновь квадратную пластину, сжатую в одном направлении. Для нее ранее получено

$$q_{кр} = 4\pi^2 D/b^2, \quad U = \pi^4 D/2b^2.$$

Через функцию усилий (83) по соотношениям (94) найдем усилия и их подставим в уравнение (93); тогда

$$W_4 = Eh\pi^4/256b^4.$$

Теперь по формуле (96) находим:

$$C = 4h\sqrt{(q/q_{кр} - 1)/3(1-\mu^2)}. \quad (4.97)$$

Для уточненного определения напряжений и деформаций после потери устойчивости необходимо решить систему нелинейных уравнений Кармана. Для получения нелинейного дифференциального уравнения изгиба фиктивную силу P_ε^ϕ (23) в основном уравнении (21) надо определять с учетом дополнительных усилий в срединной поверхности. Тогда вместо (21) получим:

$$D\nabla^4 \omega = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}, \quad (4.98)$$

где функция усилий ϕ связана с суммарными усилиями в срединной поверхности пластины соотношениями типа (94). Функция усилий находится из

уравнения (70). Систему уравнений (98) и (70) для практически важных случаев удастся проинтегрировать приближенными методами.

Вновь рассмотрим предыдущую задачу. Прогиб примем в виде (79), а функцию усилий (83) дополним начальными усилиями в пластине

$$\varphi = f \left(1 + \cos \frac{2\pi x}{b} \right) \left(1 + \cos \frac{2\pi y}{b} \right) - qy^2 / 2.$$

Из уравнения (70) ранее получено $f = -C^2 Eh / 64$. Уравнение (98) проинтегрируем методом Галеркина.

$$D \left(\frac{\pi}{b} \right)^4 C b^2 = q \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 C b^2 / 4 - Eh C^3 \left(\frac{\pi}{b} \right)^4 b^2 / 64.$$

Отсюда вновь получаем формулу (97).

5. УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Среди задач устойчивости тонких упругих оболочек задачи устойчивости цилиндрических оболочек имеют наибольшее практическое значение. С другой стороны, на примере этих задач можно проследить все основные особенности задач устойчивости тонких оболочек.

Из методических соображений, до устойчивости цилиндрических оболочек, рассмотрена родственная задача устойчивости упругого кольца. Затем даны основные соотношения и линеаризованное уравнение для цилиндрической оболочки. Приведены решения задач устойчивости этих оболочек при внешнем давлении и осевом сжатии. Многочисленные решения других задач устойчивости оболочек получены приближенными методами.

5.1. Устойчивость кругового кольца

Рассмотрим кольцо радиуса R , равномерно сжатое радиально распределенной нагрузкой q .

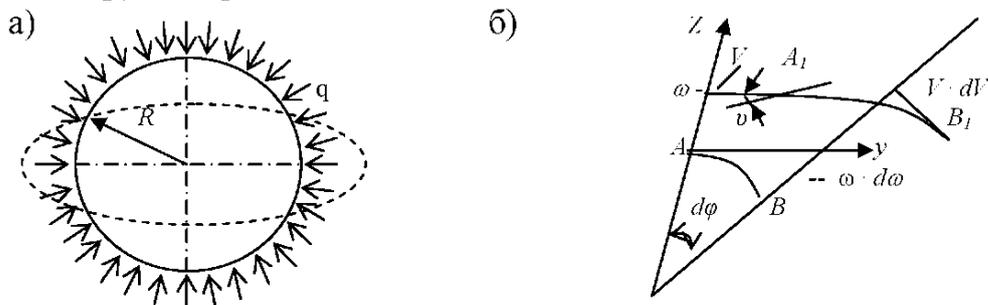


Рис. 5.1

При достаточно большой величине нагрузки круговая форма кольца может стать неустойчивой; кольцо изогнется и примет новую некруговую форму, например, показанную на рисунке 5.1,а штриховой линией.

Рассмотрим деформацию кольца в своей плоскости. На рисунке 5.1,б показан элемент AB , перешедший в результате деформаций в новое положение A_1B_1 . Радиальные и касательные перемещения точек оси кольца обозначены ω и v , а угол поворота – через φ .

Введем подвижную ортогональную систему координат, направив ось z по нормали к оси кольца (рис. 5.1,б). В этой системе координат точки A, B, A_1, B_1 будут иметь следующие координаты:

Таблица 5.1

	A	B	A_1	B_1
Y	0	$Rd\varphi$	v	$Rd\varphi - V - dV + \omega d\varphi$
Z	0	0	ω	$-Vd\varphi + \omega + d\omega$

Длина элемента A_1B_1 будет равна:

$$A_1B_1 \left[(Y_{B_1} - Y_{A_1})^2 + (Z_{B_1} - Z_{A_1})^2 \right]^{1/2} = Rd\varphi \left\{ \left[1 + \frac{1}{R} \left(\omega + \frac{dV}{d\varphi} \right) \right]^2 + \frac{1}{R} \left(\frac{d\omega}{d\varphi} - V \right)^2 \right\}^{1/2}.$$

Удлинение элемента $AB - Rd\varphi$

$$\varepsilon - \frac{1}{R} \left(\omega + \frac{dV}{d\varphi} \right) + \frac{1}{2R^2} \left(\frac{d\omega}{d\varphi} - V \right)^2 + \dots$$

Если ограничиться линейными слагаемые, то

$$\varepsilon - \frac{1}{R} \left(\omega + \frac{dV}{d\varphi} \right).$$

(5.1)

Так как $\varepsilon \ll 1$, то угол поворота сечения можно определять без учета удлинений. Проекция элемента A_1B_1 на ось Z равна:

$$A_1B_1 v - Rd\varphi v.$$

С другой стороны, она равна разности соответствующих координат. Следовательно,

$$v - \frac{Z_{B_1} - Z_{A_1}}{Rd\varphi} = \frac{1}{R} \left(\frac{d\omega}{d\varphi} - V \right).$$

(5.2)

Изменение кривизны оси кольца равно изменению угла поворота по дуге кольца

$$\chi = \frac{dv}{Rd\varphi} = \frac{1}{R} \left(\frac{d^2\omega}{d\varphi^2} - \frac{dV}{d\varphi} \right).$$

(5.3)

Если пренебречь влиянием растяжения оси кольца, то есть положить $\varepsilon = 0$, то

$$\omega - \frac{dV}{Rd\varphi} \quad \text{и} \quad \chi = \frac{1}{R^2} \left(\frac{d^2\omega}{d\varphi^2} + \omega \right) = -\frac{1}{R^2} \left(\frac{d^3V}{d\varphi^3} + \frac{dV}{d\varphi} \right).$$

(5.4)

Устойчивость кольца исследуем при следующих допущениях.

1. Кольцо имеет идеальную круговую форму.
2. Изменением геометрических размеров кольца в докритическом состоянии можно пренебречь.

3. При потере устойчивости справедлива гипотеза плоских сечений, то есть $M - EI\chi$.

4. Внешняя нагрузка гидростатическая, то есть при деформации кольца нагрузка остается нормальной к деформированной оси.

Все действующие силы спроектируем на оси Y_1 и Z_1 , направленные по касательной и по нормали к деформированной оси в точке A_1 .

В силу первого допущения возможна круговая форма равновесия кольца, при которой $N_\theta = -qR$. Выясним, когда возможны изгибные формы равно-

веса, смежные с исходной. Для этого составим уравнение равновесия в деформированном состоянии. При этом в кольце возникнут нормальные и поперечные усилия N, Q и изгибающий момент M (рис. 5.2).

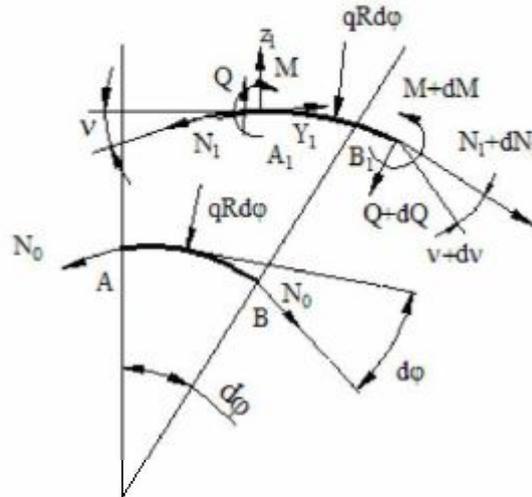


Рис.5.2

Учитывая, что касательная в точке B_1 составляет с осью Y_1 угол $(d\varphi - dv)$ и, отбрасывая величины высших порядков малости, получим:

$$\frac{dN_1}{d\varphi} - Q + Q \frac{dv}{d\varphi} = 0; \quad \frac{dQ}{d\varphi} + N_1 - N_1 \frac{dv}{d\varphi} = -qR.$$

Третье уравнение равновесия имеет вид:

$$\frac{dM}{Rd\varphi} - Q = 0.$$

Поскольку при потере устойчивости M и Q – величины того же порядка малости, что и угол v , то третьим слагаемым в первом уравнении можно пренебречь, как величиной второго порядка малости.

Нормальное усилие в искривленном кольце представим в виде:

$$N_1 = N_0 + N = -qR + N.$$

Тогда второе уравнение равновесия можно записать так:

$$\frac{dQ}{d\varphi} + N + qR \frac{dv}{d\varphi} - N \frac{dv}{d\varphi} = 0.$$

Так как $dN_0/d\varphi = 0$, то из первого уравнения следует, что усилие N имеет тот же порядок малости, что и Q . Поэтому последним слагаемым в этом уравнении можно пренебречь. Тогда линеаризованные уравнения равновесия элемента кольца примут вид

$$Q - \frac{dN}{d\varphi} = 0; \quad \frac{dQ}{d\varphi} + N + qR \frac{dv}{d\varphi} = 0; \quad \frac{dM}{Rd\varphi} - Q = 0.$$

(5.5)

Исключив из этих уравнений N и Q можно записать:

$$\frac{d^3 M}{Rd\varphi^3} + \frac{dM}{Rd\varphi} + qR \frac{d^2 v}{d\varphi^2} = 0.$$

С учетом того, что

$$M - EI\chi - EI \frac{dv}{Rd\varphi},$$

окончательно получим основное однородное уравнение

$$\frac{EI}{R^3} \left(\frac{d^4 v}{d\varphi^4} + \frac{d^2 v}{d\varphi^2} \right) + q \frac{d^2 v}{d\varphi^2} = 0. \quad (5.6)$$

Таким образом, мы пришли к типичной задаче на собственные значения.

Найдем решение уравнения (6). Для этого перепишем его в виде:

$$\frac{d^4 v}{d\varphi^4} + k^2 \frac{d^2 v}{d\varphi^2} = 0,$$

$$k^2 = 1 + \frac{qR^3}{EI}.$$

Решение этого уравнения, совпадающего по форме с уравнением устойчивости однопролетного стержня, имеет вид

$$v = C_1 \text{Sinn}\varphi + C_2 \text{Cosn}\varphi + C_3 \varphi + C_4. \quad (5.7)$$

Для замкнутого кольца $v_{(\varphi)} = 0$, поэтому $C_2 = -C_4$. Из условия периодичности решения следует $C_3 = 0$ и $k = n$, где n – любое целое число. Кроме того, для кольца с нерастяжимой осью из уравнений (2) и (4) следует:

$$v = \frac{-1}{R} \left(\frac{d^2 V}{d\varphi^2} + V \right) \text{ или } \frac{d^2 V}{d\varphi^2} + V = -R(C_1 \text{Sinn}\varphi - C_4 \text{Cosn}\varphi + C_4).$$

Чтобы исключить решение $v = -RC_4$, соответствующие вращению кольца как жесткого целого, надо положить $C_4 = 0$. Тогда получим следующие собственные функции:

$$v = \text{sinn}\varphi; \quad V = \frac{R}{n^2 - 1} \text{sin}n\varphi; \quad \omega = -\frac{nR}{n^2 - 1} \text{cos}n\varphi \quad (5.8)$$

и соответствующие им собственные значения

$$q_n = (n^2 - 1) \frac{EI}{R^3}.$$

Очевидно, значение $n = 1$ соответствует перемещению кольца как жесткого целого. Исключая его, находим наименьшее собственное значение, равное критической нагрузке:

$$q_{кр} = q_2 = \frac{3EI}{R^3}. \quad (5.9)$$

5.2. Основные исходные зависимости для цилиндрической оболочки

В задачах устойчивости стержней и пластин критические нагрузки пропорциональны изгибным жесткостям и не зависят от их жесткостей на растяжение – сжатие. Это связано с тем, что при бесконечно малых прогибах удлинения оси стержня и деформации срединной поверхности пластины имеют второй порядок

малости. Основная геометрическая особенность оболочки состоит в том, что она не может изгибаться без удлинения и сдвигов срединной поверхности, которые имеют тот же порядок малости, что и прогибы. Эта особенность оболочек приводит, во-первых, к более сложным выражениям для критических нагрузок. Во-вторых, закритическое поведение оболочек качественно отличается от поведения стержней и пластин.

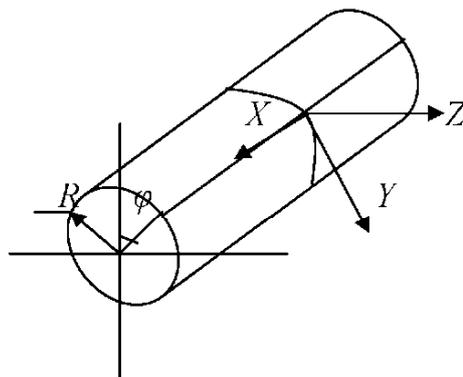


Рис. 5.3.

Поместим начало подвижной системы координат на срединной поверхности оболочки, направив ось X вдоль образующей, ось Y – по касательной, а ось Z – по внешней нормали к поверхности (рис.5.3). Перемещения точек срединной поверхности по направлениям осей X, Y, Z обозначим соответственно u, v, w .

Основные соотношения, описывающие изгиб цилиндрических оболочек, выводятся в курсах прикладной теории упругости или строительной механики [8-10]. Деформации срединной поверхности и углы поворота нормали v_x, v_y в плоскостях xz и yz равны

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{1}{R} \left(w + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right); \quad \gamma = \frac{\partial u}{R \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad (5.10)$$

$$v_x = \frac{\partial w}{\partial x}; \quad v_y = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} - v \right). \quad (5.11)$$

Изменение кривизны и крутка поверхности:

$$\chi_y = \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + w \right); \quad (5.12)$$

$$\chi_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \chi_{xy} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial x}.$$

В большинстве случаев при потере устойчивости цилиндрической оболочки:

$$\left| \frac{\partial \omega}{\partial \phi} \right| \gg \nu, \quad \left| \frac{\partial^2 \omega}{\partial \phi^2} \right| \gg \omega. \quad (a)$$

Поэтому в задачах устойчивости часто используют упрощенные зависимости

$$\nu_x = \frac{\partial \omega}{\partial x}; \quad \nu_y = \frac{\partial \omega}{R \partial \phi}; \quad \chi_x = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}; \quad \chi_y = \frac{\partial^2 \omega}{R^2 \partial \phi^2}; \quad \chi_{xy} = \frac{\partial^2 \omega}{R \partial \phi \partial x}. \quad (5.13)$$

При деформациях в оболочке возникают нормальные усилия T_x , T_y , сдвигающее усилие S , изгибающие моменты M_x , M_y , и крутящий момент M_{xy} . Эти внутренние силовые факторы связаны с деформациями законом Гука (4.3) и соотношениями упругости

$$M_x = D(\chi_x + \mu \chi_y), \quad M_y = D(\chi_y + \mu \chi_x), \quad M_{xy} = (1 - \mu)D\chi_{xy}. \quad (5.14)$$

Уравнения равновесия при $P_x - P_y = 0$ после исключения из них поперечных сил имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{R \partial \phi} = 0; \quad \frac{\partial T_y}{R \partial \phi} + \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial M_y}{R \partial \phi} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) = 0; \\ \frac{T_y}{R} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{R \partial \phi \partial x} + \frac{\partial^2 M_y}{R^2 \partial \phi^2} = P_z. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Выражая усилия через деформации по соотношениям упругости (4.3') и (14), а деформации через перемещения по соотношениям (10) и (12), получаем систему уравнений равновесия в перемещениях

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial^2 u}{R^2 \partial \phi^2} + \frac{1 + \mu}{2} \frac{\partial^2 v}{R \partial \phi \partial x} + \mu \frac{\partial \omega}{R \partial x} = 0; \\ \frac{\partial^2 v}{R^2 \partial \phi^2} + \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1 + \mu}{2} \frac{\partial^2 u}{R \partial \phi \partial x} + \frac{\partial \omega}{R^2 \partial \phi} - \frac{h^2}{12R^2} \left[\frac{\partial^3 \omega}{R^2 \partial \phi^3} + \frac{\partial^3 \omega}{\partial \phi \partial x^2} + \frac{\partial \omega}{R^2 \partial \phi} \right] = 0; \\ \frac{Eh}{(1 - \mu^2)R} \left(\frac{\omega}{R} + \frac{\partial v}{R \partial \phi} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + D \left[\nabla^4 \omega + \frac{\partial^2 \omega}{R^4 \partial \phi^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{R^2 \partial x^2} \right] = P_z. \end{aligned} \quad (5.16)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{R^2 \partial \phi^2}$; h – толщина оболочки.

Если исходить из упрощенных зависимостей (13), то во втором уравнении равновесия (15) следует отбросить последнее слагаемое, стоящее в скобках. Если теперь ввести функцию усилий, связанную с силами соотношениями

$$T_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}; \quad T_x = \frac{\partial^2 \phi}{R^2 \partial \phi^2}; \quad S = -\frac{\partial^2 \phi}{R \partial \phi \partial x}, \quad (5.17)$$

то первые два уравнения равновесия будут удовлетворены тождественно. При этом деформации в срединной поверхности должны удовлетворять уравнению совместности

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{R^2 \partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma}{R \partial \phi \partial x} = \frac{\partial^2 \omega}{R \partial x^2}.$$

Теперь третье уравнение равновесия и уравнения совместности деформации примут вид

$$D \nabla^4 \omega + \frac{\partial^2 \phi}{R \partial x^2} = P_z; \quad \nabla^4 \phi = \frac{Eh}{R} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}. \quad (5.18)$$

При решении системы (18) на каждом из торцов оболочки должны быть заданы по четыре граничных условия:

- 1) перемещение u либо осевое усилие T_x ;
- 2) перемещение v либо сдвигающее усилие S ;
- 3) угол наклона нормали v_x , либо изгибающий момент M_x ;
- 4) перемещение ω либо обобщенная поперечная сила

$$R_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{2 \partial M_{xy}}{R \partial \phi} = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{R \partial \phi}. \quad (5.19)$$

При этом перемещения u , v могут быть определены из первых двух уравнений равновесия в перемещениях, причем слагаемые в квадратных скобках должны быть отброшены.

Линеаризованное уравнение устойчивости цилиндрической оболочки выводится при тех же допущениях, что приняты ранее для стержней, пластин и кругового кольца. В начальном докритическом состоянии в оболочке существуют только внутренние усилия, удовлетворяющие уравнениям равновесия безмоментной теории оболочек:

$$\frac{\partial T_x^0}{\partial x} + \frac{\partial S^0}{R \partial \phi} = 0; \quad \frac{\partial T_y^0}{R \partial \phi} + \frac{\partial S^0}{\partial x} = 0; \quad T_y^0 = -P \cdot R, \quad (5.20)$$

где P – внешнее гидростатическое давление.

Рассмотрим условия равновесия оболочки в деформированном состоянии (рис. 5.4).

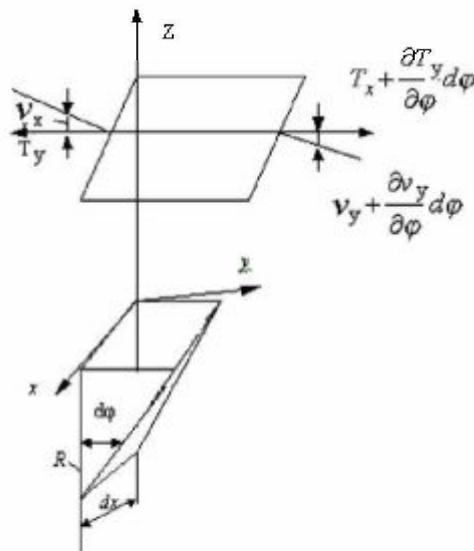


Рис. 5.4

Спроектируем все действующие на элемент усилия (на рисунке показаны только силы T_y) на ось Z как это сделано в параграфе 4.2. Сумма проекции сил в срединной поверхности даст фиктивную нормальную нагрузку (§ 4.2.)

$$P_z^\phi = \frac{\partial}{R\partial\phi}(T_y^0 v_y) + \frac{\partial}{\partial x}(T_x^0 v_x) + \frac{\partial}{\partial x}(S^0 v_y) + \frac{\partial}{\partial y}(S^0 v_x).$$

С учетом соотношения (20) получим:

$$P_z^\phi = T_y^0 \chi_y + T_x^0 \chi_x + 2S^0 \chi_{xy}. \quad (5.21)$$

Линеаризованные уравнения устойчивости теперь можно получить из соотношений (16) или (18) заменой P_z на P_z^ϕ . Если воспользоваться упрощенными зависимостями (13), то эти уравнения имеют вид:

$$D\nabla^4 \omega + \frac{\partial^2 \phi}{R\partial x^2} = T_y^0 \frac{\partial^2 \omega}{R^2 \partial \phi^2} + T_x^0 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + 2S^0 \frac{\partial^2 \omega}{R\partial \phi \partial x};$$

$$\nabla^4 \phi = \frac{Eh}{R} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}. \quad (5.22)$$

Граничные условия задачи те же, что и для изгиба оболочки.

Таким образом, задача устойчивости при безмоментном начальном напряженном состоянии сведена к типичной задаче на собственные значения.

Если начальные усилия не зависят от координат, то систему (22) можно свести к одному разрешающему уравнению:

$$D\nabla^8 \omega + \frac{Eh}{R^2} \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} - T_x^0 \nabla^4 \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) - T_y^0 \nabla^4 \left(\frac{\partial^2 \omega}{R^2 \partial \phi^2} \right) - 2S^0 \nabla^4 \left(\frac{\partial^2 \omega}{R\partial \phi \partial x} \right) = 0. \quad (5.23)$$

При этом первые два уравнения системы (16) после отбрасывания слагаемых в квадратных скобках можно привести к виду

$$R\nabla^4 u = \frac{\partial^3 \omega}{R^2 \partial \phi^2 \partial x} - \mu \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3}; \quad R\nabla^4 v = -(2 + \mu) \frac{\partial^3 \omega}{R\partial \phi \partial x^2} - \frac{\partial^3 \omega}{R^3 \partial \phi^3}. \quad (5.24)$$

Упрощенная система уравнений (22) справедлива в случае, когда размер выпучин мал по сравнению с размером оболочки хотя бы в одном направлении. Например, если оболочка получает осесимметричные выпучины, то длина их должна быть мала по отношению к полной длине оболочки. ($m^2 \gg 1$). Если же, напротив, вмятина занимает всю длину оболочки, то число волн по окружности n должно удовлетворять условно $n^2 \gg 1$. (практически $n \geq 4$). Это условие выполняется, если отношение длины оболочки l к радиусу не слишком велико. Вместе с тем, это отношение не должно быть и чрезмерно малым: в торцевых зонах оболочки будут сильно сказываться местные напряжения.

Таким образом, упрощенные уравнения справедливы для оболочек средней длины. По В.М. Даревскому параметры таких оболочек должны удовлетворять условию

$$\sqrt{h/R} < l/R < \sqrt{R/h}. \quad (5.25)$$

В дальнейшем эти соотношения будут уточнены для задачи осевого сжатия и внешнего давления.

Рассмотрим другой вариант упрощения основных уравнений, относящийся к случаю слабо выраженного волнообразования по длине оболочки. Этот вариант состоит в том, что срединную поверхность считают нерастяжимой в дуговом направлении ($\varepsilon_y = 0$) и принимают, что сдвиги в срединной поверхности отсутствуют ($\gamma = 0$). Далее, можно положить равными нулю поперечные силы и изгибающие моменты в осевом направлении, а также крутящие моменты:

$$Q_x = M_x = M_{xy} = 0.$$

Такая теория оболочек называется полубезмоментной.

В этом случае имеем

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi} = -\omega; \quad \frac{\partial u}{R\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial x}; \quad \chi_\varphi = \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} + \omega \right); \quad (5.26)$$

$$T_x = \frac{Eh}{1-\mu^2} \varepsilon_x \approx Eh\varepsilon_x = B\varepsilon_x; \quad M_\varphi = D\chi_\varphi, \quad (5.27)$$

где $B = B_x(x)$ – жесткость оболочки на растяжение - сжатие в осевом направлении, $D = D_\varphi(x)$ – изгибная жесткость в окружном направлении.

Из первых трех уравнений (26) следует:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{R\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}.$$

Сопоставив его с выражением для χ_φ , получаем уравнение совместности деформации

$$\frac{\partial^4 \varepsilon_x}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial \varphi^2} = R^3 \frac{\partial^2 \chi_\varphi}{\partial x^2}. \quad (5.28)$$

Отбрасывая в уравнениях равновесия (15) моменты M_x , M_{xy} и исключая из них усилия T_y и S , приходим к одному уравнению равновесия

$$\frac{\partial^2 T_x}{\partial x^2} + \frac{1}{R^3} \left(\frac{\partial^4 M_\varphi}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2 M_\varphi}{\partial \varphi^2} \right) = \frac{\partial^2 P_z}{R\partial \varphi^2} + \frac{\partial P_\varphi}{R\partial \varphi} - \frac{\partial P_x}{\partial x}. \quad (5.29)$$

Уравнение (28) будет удовлетворено тождественно, если введем функцию перемещений ϕ с помощью соотношений:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = u; \quad \frac{\partial \phi}{R\partial \varphi} = -v; \quad \frac{\partial^2 \phi}{R\partial \varphi^2} = \omega. \quad (5.30)$$

Тогда

$$T_x = B \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}; \quad M_\varphi = \frac{D}{R^3} \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \right). \quad (5.31)$$

Для получения уравнения устойчивости оболочки воспользуемся приемом фиктивной нагрузки. При нагружении оболочки только внешним гидростатическим давлением P и контурными усилиями поперечная фиктивная нагрузка определяется выражением (21). Изменения кривизн, определяемые по формулам (12) выразим через функцию перемещений. В результате этого получим:

$$P_z^\phi = -\frac{P}{R^2} \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \right) + T_x^0 \frac{\partial^4 \phi}{R\partial \varphi^2 \partial x^2} + 2S^0 \frac{\partial^4 \phi}{R^2 \partial \varphi^3 \partial x} \quad (5.32)$$

Положив в уравнении (29) $P_x - P_\phi = 0$ и заменив P_z на P_z^ϕ , с учетом выражения (31) получаем однородное уравнение устойчивости

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(B \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) + \frac{D}{R^6} \left(\frac{\partial^8 \phi}{\partial \phi^8} + 2 \frac{\partial^6 \phi}{\partial \phi^6} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial \phi^4} \right) - \frac{\partial^2 P_z^\phi}{R \partial \phi^2} = 0. \quad (5.33)$$

Граничные условия на торцах также будут однородными: при $x = 0$ и $x = l$ могут быть заданы

$$T_x = 0 \text{ либо } u = 0; \quad S = 0 \text{ либо } v = 0. \quad (5.34)$$

5.3. Устойчивость цилиндрической оболочки при осевом сжатии

Начальное напряженное состояние считаем безмоментным и однородным. Сначала рассмотрим осесимметрическую форму потери устойчивости. Уравнение устойчивости оболочки легко получить из соотношения (22), если учесть что

$$T_x^0 = -q, \quad T_y^0 = S^0 = 0,$$

а производные по окружной координате равны нулю:

$$D \frac{d^4 \omega}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2} \omega + q \frac{d^2 \omega}{dx^2} = 0. \quad (5.35)$$

Решение этого уравнения с постоянными коэффициентами не составляют принципиальных трудностей. Наиболее простое решение получается при шарнирном опирании торцов. В этом случае

$$\omega_m = A_m \sin(m\pi x / l)$$

и подстановка прогиба в уравнение (35) дает собственные значения

$$q_m = D\eta + Eh / \eta R^2, \quad (5.36)$$

где $\eta = (m\pi / l)^2$, $m = 1, 2, \dots$

Минимизирую q_m по параметру η , получаем

$$\eta_{кр} = \sqrt{Eh / DR^2}; \quad q_{кр} = 2\sqrt{DEh} / R = Eh^2 / R\sqrt{3(1 - \mu^2)}. \quad (5.37)$$

При $\mu = 0,3$ $\bar{q} = q_{кр} R / Eh^2 = 0,6$.

Для случая весьма короткой оболочки, когда $(l/R)^2 \ll 1$, надо положить $m = 1$. Тогда ηR^2 будет велико и в выражении для q_m можно пренебречь вторым слагаемым по сравнению с первым; отсюда

$$q_{кр} = \pi^2 D / l^2. \quad (5.38)$$

Неосесимметричные формы потери устойчивости можно исследовать с помощью системы уравнений (22). Пусть для обоих торцов заданы следующие граничные условия:

$$1) \omega = 0; \quad 2) M_x = 0; \quad 3) v = 0; \quad 4) T_x = 0, \quad (5.39)$$

которые можно представить в виде

$$1) \omega = 0; \quad 2) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0; \quad 3) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0; \quad 4) \phi = 0. \quad (5.39')$$

Тогда решение системы (22) можно записать так:

$$\omega = A \sin n\phi \sin(m\pi x / l); \quad \phi = B \sin n\phi \sin(m\pi x / l). \quad (5.40)$$

Подставив эти функции в систему (22), получим однородную систему алгебраических уравнений:

$$\left\{ D \left[\left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right]^2 - q \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \right\} A - \frac{1}{R} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 B = 0;$$

$$\frac{1}{R} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 A + \frac{1}{Eh} \left[\left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right]^2 B = 0.$$

Равенство нулю определителя этой системы дают собственные значения нагрузки

$$q_{nm} = D\eta + Eh / \eta R^2, \quad (5.41)$$

где $\eta = \left(\frac{l}{m\pi} \right)^2 \left[\left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right]^2$.

Минимизируя q_{nm} по параметру η вновь получаем выражения (37). При этом мы не получаем конкретные значения $n_{кр}$ и $m_{кр}$, а только устанавливаем не которую связь между ними. Таким образом, критической точке бифуркации соответствует целая серия различных комбинаций чисел полуволн, по которым может происходить потеря устойчивости оболочки, включая $n_{кр} = 0$, то есть осесимметричную форму.

Минимизация (41) по η возможно при большом числе полуволн n или m . Да и исходные упрощенные уравнения (22) справедливы при $n \geq 4$. При более общем решении надо исходить из системы (16), в которой P_z заменено на $P_z^\phi = -q \partial^2 \omega / \partial x^2$. Принимая перемещения в виде:

$$u = A \cos(m\pi x / l) \sin n\varphi, \quad v = B \sin(m\pi x / l) \cos n\varphi;$$

$$\omega = C \sin(m\pi x / l) \sin n\varphi, \quad (5.42)$$

придем к системе трех однородных линейных уравнений относительно постоянных A, B, C . Приравняв определитель этой системы нулю получаем характеристическое уравнение, из которого определяется критическая нагрузка. Анализ полученных таким образом решений показывает [1], что решение (37) справедливо при

$$1,38\sqrt{h/R} < l/R < 0,57\sqrt{R/h}.$$

Например, при $R/h = 100$ находим $0,14 < l/R < 5,7$. Как видим, границы применимости теории оболочек средней длины (упрощенных уравнений) сравнительно велики и охватывают значительную часть диапазона значений l/R , встречающихся на практике.

Для коротких оболочек остается справедливой формула (38). При $n=1$ любое сечение оболочки перемещается, как жесткое целое и оболочка теряет устойчивость как шарнирно опертый стержень. В этом случае

$$\sigma_{кр} = \pi^2 ER^2 / 2l^2 \quad \text{и} \quad \bar{q}_{кр} = \pi^2 R^3 / 2hl^2. \quad (5.43)$$

В случае $n = 2$ и $n = 3$, когда оболочка выпучивается с образованием длинных волн, упрощенные решения можно получить по полубезмоментной теории. В этом случае имеем [1].

$$\bar{q}_{кр} \approx 0,6(n^2 - 1)/(n^2 + 1). \quad (5.44)$$

При $n=2$, $\bar{q} = 0,363$, то есть составляет 0,6 от "классического" значения ($q_{кр} = 0,6$); при $n=3$ это отношение равно 0,8. При $n \geq 4$ вновь получаем классическое решение.

Граничные условия (39) – единственный вариант граничных условий, допускающих простое аналитическое решение. При других граничных условиях решение резко усложняется. При произвольных закреплениях торцов критическую нагрузку определяют следующим образом. При осевом сжатии из уравнения (23) следует:

$$D\nabla^8 \omega + \frac{Eh}{R^2} \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + q\nabla^4 \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (5.45)$$

Решение этого уравнения с постоянными коэффициентами ищем в виде:

$$\omega = Ae^{rx} \sin n\varphi.$$

Подстановка этой функции в уравнение (45) дает характеристическое уравнение восьмой степени относительно параметра r . Определив восемь корней r_i , которые могут быть вещественными, комплексными или мнимыми, получим выражение для поперечного прогиба

$$\omega = \sin n\varphi \sum_{i=1}^8 A_i e^{r_i x}.$$

Выразив заданные на торцах оболочки однородные граничные условия (по четыре на каждом торце) через функцию ω и подчинив выражение (30) этим граничным условиям, приходим к системе восьми однородных линейных алгебраических уравнений относительно постоянных A_i . Условие обращения в нуль определителя этой системы позволяет найти собственные значения нагрузки q_n . Перебирая различные значения числа волн в окружном направлении n , можно найти $n_{кр}$, приводящие к наименьшему собственному значению нагрузки $q_{кр}$. Эти расчеты можно выполнить с применением персональных компьютеров, подбирая для каждого n собственное значение q_n .

Как показали вычисления, выполненные рядом авторов [1], все варианты граничных условий для достаточно длинных оболочек ($l/R \geq 7,8\sqrt{h/R}$) приводят к формуле (37). Для более коротких оболочек при заземленных краях критические нагрузки оказываются выше, чем для шарнирно опертых оболочек.

Существенную корректировку в решения задачи устойчивости в классической постановке вносит наличие отклонений формы срединной поверхности от идеально цилиндрической, то есть начальных несовершенств формы. Наиболее четко прослеживается роль осесимметричных начальных несовершенств

$$\omega_0 = f_0 \sin(m_0 \pi x / \ell).$$

Определим дополнительные осесимметричные прогибы ω_1 , которые появятся при приложении осевых сил. Их можно найти из уравнения типа (35)

$$D \frac{d^4 \omega_1}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2} \omega_1 + q \frac{d^2(\omega_1 + \omega_0)}{dx^2} = 0.$$

Решая это уравнение, как и уравнение (35), находим

$$\omega_1 = \frac{f_0}{q_m / q - 1} \sin \frac{m_0 \pi x}{\ell},$$

где q_m определяется выражением (36).

Тогда полный докритический прогиб равен:

$$\omega_n = \omega_0 + \omega_1 = \frac{f_0}{1 - q / q_m} \sin \frac{m_0 \pi x}{\ell}.$$

В результате образующая цилиндра получает кривизну

$$\chi_x^0 = \frac{d^2 \omega_n}{dx^2} = -\frac{f_0 \eta_0^2}{1 - q / q_m} \sin \eta_0 x \quad (\eta_0 = m_0 \pi / \ell),$$

а от дополнительного прогиба появятся окружные усилия

$$T_y^0 = Eh \omega_1 / R = \frac{t_0 Eh \cdot \sin \eta_0 x}{R(q_m / q - 1)}.$$

Для оболочек, имеющих изначально кривизну в двух направлениях в линеаризованных уравнениях устойчивости (22) вместо оператора

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \chi_y^0 \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

должен стоять оператор [1] $\nabla_k^2 = \chi_y^0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \chi_x^0 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

С учетом этого уравнения (22) для нашего случая перепишем в виде:

$$\begin{aligned} D \nabla^4 \omega + \frac{\partial^2 \phi}{R \partial x^2} - \frac{\partial^2 \omega_n}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi}{R^2 \partial \phi^2} - T_y^0 \frac{\partial^2 \omega}{R^2 \partial \phi^2} + q \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} &= 0; \\ \nabla^4 \phi - \frac{\partial^2 \omega}{R \partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_n}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{R^2 \partial \phi^2} &= 0. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Полученная система уравнений имеет переменные коэффициенты и ее решение целесообразно строить каким-либо численным методом. Для этого примем:

$$\omega = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n(x) \sin n\phi; \quad \phi = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x) \sin n\phi.$$

Тогда система (45) сведется к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $\omega_n(x)$ и $\phi_n(x)$, причем гармоники оказываются несвязанными, поэтому достаточно исследовать n -ю гармонику и найти значение $q_{кр}$ в зависимости от f_0 .

Результаты таких вычислений для шарнирно опертой оболочки приведены в таблице 5.2., где $f_0 = f_0 / h$

Таблица 5.2

\bar{f}_0	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\bar{q}_{кр}$	0,6	0,35	0,29	0,23	0,196	0,18

Как видим, величина $\bar{q}_{кр}$ сильно зависит от амплитуды начального прогиба.

5.4. Определение внешнего критического давления

Рассмотрим устойчивость длинной оболочки (трубы) под равномерным гидростатическим давлением. Длину оболочки считаем настолько большой, что характер закрепления ее торцов не влияет на поведение оболочки при потере устойчивости. Такая оболочка может деформироваться без удлинения и сдвигов серединой поверхности; каждое сечение оболочки может деформироваться одинаково, как нерастяжимое кольцо. Поэтому для такой оболочки можно воспользоваться решением задачи устойчивости кругового кольца.

Мысленно выделив из оболочки кольцо единичной ширины и положив $EJ-D$ и $q-p$ можно найти собственные значения

$$P_n = (n^2 - 1)D / R^3,$$

Из этой формулы получим значения критического внешнего давления

$$P_{кр} = 3D / R^3. \quad (5.47)$$

Выясним, как закрепление торцов оболочки влияет на величину критического давления. Воспользуемся упрощенным вариантом теории оболочек. В докритическом состоянии

$$T_x^0 = 0; \quad T_y^0 = -PR; \quad S^0 = 0.$$

Тогда согласно уравнениям (22) имеем:

$$D\nabla^4 \omega + \frac{\partial^2 \phi}{R \partial x^2} + \frac{P}{R} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} = 0; \quad \nabla^4 \phi = Eh \frac{\partial^2 \omega}{R \partial x^2}. \quad (5.48)$$

Здесь ϕ - функция усилий, определяемая соотношениями (17).

Для оболочек конечной длины система уравнений (48) допускает простое аналитическое решение только при граничных условиях (39). Решение системы (48) при этих граничных условиях вновь ищем в виде (40). Подставляя (40) в систему (48), получаем однородную систему линейных уравнений

$$\left\{ D \left[\left(\frac{m\pi}{\ell} \right)^2 + \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right]^2 - \frac{n^2 P}{R} \right\} A - \frac{1}{R} \left(\frac{m\pi}{\ell} \right)^2 B = 0;$$

$$\frac{1}{R} \left(\frac{m\pi}{\ell} \right)^2 A + \frac{1}{Eh} \left[\left(\frac{m\pi}{\ell} \right)^2 + \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right]^2 B = 0.$$

Приравняв нулю определитель этой системы, находим собственные значения

$$P_{nm} = DR\eta/n^2 + Eh(m\pi/\ell)^4/n^2\eta R,$$

где $\eta = \left[(m\pi/\ell)^2 + (n/R)^2 \right]^2$.

Очевидно, что при определении критической нагрузки $P_{кр}$ как наименьшего значения P_{nm} следует принять $m=1$:

$$P_n = \frac{Dn^2}{R^3} \left[1 + \left(\frac{\pi R}{n\ell} \right)^2 \right]^2 + \frac{Eh}{R} \left(\frac{\pi R}{\ell} \right)^4 / n^6 \left[1 + \left(\frac{\pi R}{n\ell} \right)^2 \right]^2. \quad (5.49)$$

Для определения $P_{кр}$ надо подобрать число волн $n_{кр}$, дающее минимальное значение P_n . Так, значения безразмерного давления

$$\bar{P}_n = P_n / P_{кр}^\infty, \quad P_{кр}^\infty = 3D/R^3$$

для различных чисел волн при $R/h = 500$, $l/R = 2$ оказались следующими:

$$\bar{P}_7 = 60,5; \quad \bar{P}_8 = 42,4; \quad P_9 = 38,3; \quad \bar{P}_{10} = 40; \quad \bar{P}_{11} = 45$$

Отсюда следует:

$$n_{кр} = 9, \quad P_{кр} = P_n / P_{кр}^\infty = 38,3.$$

Результаты таких расчетов можно представить в виде графиков зависимости $\bar{P}_{кр}$ от безразмерной длины оболочки l/R для различных отношений R/h , которые имеются в специальной литературе [1, 2].

Выражение (49), выведенное из упрощенной системы (22), справедливо при $n \geq 4$. При более общем решении надо исходить из системы (16), в которой P_z заменено на

$$P_z^\phi = -PR\chi_y = -\frac{P}{R} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \phi^2} + \omega \right).$$

Принимая перемещения в виде (42) вновь приходим к системе трех однородных уравнений относительно постоянных A , B , C . Из условия равенства нулю определителя этой системы можно найти собственные значения P_{nm} . Приняв $m=1$ и отбросив некоторые второстепенные члены, получим

$$P_n = \frac{DB_2}{R^3 B_1} + \frac{Eh(\pi R/\ell)}{RB_1}, \quad (5.50)$$

где

$$B_1 = n^2 \left[(\pi R/\ell)^2 + n^2 \right]^2 - n^4; \quad B_2 = \left[(\pi R/\ell)^2 + n^2 \right]^4 - 2n^6 + n^4.$$

В отличие от выражения (49) эта зависимость при $R/l \rightarrow 0$ сводится к формуле (47) для бесконечно длинной оболочки. Практически формулой (47) можно пользоваться при $l/R > 2\sqrt{R/h}$. При $n \geq 4$ из (50) можно получить выражение (49). Для определения $P_{кр}$ в (50) следует подобрать значение n , соответствующее минимуму P_n .

Зависимости (49) и (50) неудобны для практического использования, особенно для проектировочных расчетов.

Для оболочек средней длины при

$$0,3\sqrt{R/h} > l/R > \sqrt{h/R}$$

эти зависимости можно существенно упростить. В указанном диапазоне можно принять $n^2 \gg (\pi R/\ell)^2$, тогда получим:

$$P_n = Dn^2/R^3 + Eh(\pi R/\ell)^4/Rn^6.$$

Минимизируя это выражение по n находим (при $\mu=0,3$)

$$n_{кр}^2 = 7,5(R/\ell)\sqrt{R/h}; \quad P_{кр} = 0,92E(R/\ell)\sqrt{(h/R)^5} \quad (5.51)$$

Для коротких оболочек при $\ell/R < \sqrt{h/R}$ общие зависимости тоже можно значительно упростить. Как показывают расчеты, в этом случае оболочка теряет устойчивость с образованием такого большого числа волн по окружности, что вторым слагаемым в (49) можно пренебречь. Тогда

$$P_n = D\left[n + (\pi R/\ell)^2/n\right]^2/R^3.$$

Минимизируя это выражение по n , находим

$$n_{кр} = \pi R/\ell \quad \text{и} \quad P_{кр} = 4\pi^2 D/\ell^2 R. \quad (5.52)$$

Все полученные здесь аналитические решения относятся к оболочке с граничными условиями (39). При других вариантах граничных условий практически точные решения получены рядом авторов численными методами, например [11]. Упрощенные аналитические решения, позволяющие учесть влияние граничных условий на $P_{кр}$ можно получить применением полубезмоментной теории оболочек.

При действии только внешнего давления основное уравнение этой теории (33) примет вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(B \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) + \frac{D}{R^6} \left(\frac{\partial^8 \phi}{\partial \varphi^8} + 2 \frac{\partial^6 \phi}{\partial \varphi^6} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial \varphi^4} \right) + \frac{P}{R^3} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \right) = 0. \quad (5.53)$$

Решение этого уравнения можно искать в виде:

$$\phi = X_{(x)} \sin n\varphi. \quad (5.54)$$

Подставив (54) в уравнение (53), получим

$$(BX''')'' + Dn^4(n^2-1)^2 x/R^6 - Pn^4(n^2-1)x/R^3 = 0, \quad (5.55)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по x .

При постоянных жесткостях и давлении решение (55) легко получить в аналитическом виде. Если коэффициенты уравнения переменны, то решение можно получить любым численным методом, например, методом начальных параметров в матричной форме, как это изложено в задачах устойчивости прямого стержня.

Заметим, что когда функция перемещений ϕ взята в виде (54), то в соответствии с зависимостями (30) и (31) и первым уравнением равновесия (20) имеем:

$$U = x' \sin n\varphi; \quad v = -\frac{n}{R} x \cos n\varphi; \quad (5.56)$$

$$T_x = BX'' \sin n\varphi; \quad S = \frac{R}{n} (BX''')' \cos n\varphi.$$

При постоянных жесткостях и давлении уравнение (55) запишем в виде:

$$X^{IV} - \lambda^4 X / R^4 = 0, \quad (5.57)$$

где $\lambda^4 = n^4(n^2 - 1) \left[P - D(n^2 - 1) / R^3 \right] R / B$.

Однородные граничные условия (34) при $x=0$ и $x=l$ примут вид:

$$X''=0, \text{ либо } X'=0; \quad X''=0, \text{ либо } X=0.$$

Обратим внимание на то, что уравнение (57) и граничные условия полностью совпадают с хорошо изученным уравнением свободных колебаний однородной балки.

Решение уравнения (57) имеет вид:

$$X = A_1 S \sin(\lambda x / R) + A_2 \cos(\lambda x / R) + A_3 Sh(\lambda x / R) + A_4 Ch(\lambda x / R). \quad (5.58)$$

Четыре однородных граничных условия (по два на каждом торце) дают систему четырех однородных уравнений относительно постоянных A_i . Условие равенства нулю определителя этой системы приводит к характеристическому уравнению, наименьший корень которого λ_1 позволяет определить собственные значения давления

$$P_n = \frac{\lambda_1^4 B}{n^4(n^2 - 1)R} + D(n^2 - 1) / R^3; \quad n = 2, 3, \dots \quad (5.59)$$

В данном случае λ_1 не зависит от числа волн n . Подбирая число волн $n_{кр}$ из условия минимума P_n , определяем критическое давление. При достаточно большом числе волн (практически при $n \geq 3$) величину n^2 можно рассматривать как непрерывно меняющийся параметр. Тогда из условия минимума P_n находим

$$n_{кр}^2 = \lambda_1 \left(\frac{3R^2 B}{D} \right)^{1/4}; \quad P_{кр} = 4\lambda_1 \left(\frac{B}{R} \right)^{1/4} \left(\frac{D}{3R^3} \right)^{3/4}. \quad (5.60)$$

Рассмотрим несколько вариантов граничных условий.

1. На обоих торцах оболочки задано

$$X=0; \quad X'=0.$$

В соответствии с зависимостями (56) это означает, что на торцах запрещены окружные перемещения v и разрешены осевые перемещения u ($T_x=0$). В силу нерастяжимости полубезмоментной оболочки в окружном направлении (26) равенство нулю окружных перемещений влечет за собой равенство нулю прогибов. Эта задача аналогична задаче о свободных колебаниях шарнирно опертой балки.

$$X = \sin(\lambda_1 x / R) = \sin(\pi x / \ell).$$

Отсюда $\lambda_1 = \pi R / \ell$. Для оболочек средней длины по формуле (60)

$$P_{кр} = 4 \frac{\pi R}{\ell} \left(\frac{B}{R} \right)^{1/4} \left(\frac{D}{3R^3} \right)^{3/4}. \quad (5.61)$$

Эта формула совпадает с классическим решением (51) для оболочек средней длины.

2. На обоих торцах запрещены окружные (следовательно, нормальные) и осевые перемещения. Тогда

$$X=0; \quad X'=0.$$

Аналог этой задачи – свободные колебания заземленной балки. Наименьшее собственное значение [12]

$$\lambda_1 = 4,73R/\ell = 1,5\pi R/\ell.$$

Для оболочек средней длины из (60) получим:

$$P_{кр} = 1,5 P_{кл},$$

где $P_{кл}$ определяется выражением (61).

3. На одном краю запрещены окружные и осевые перемещения, а второй край полностью свободен, то есть $T_x = S = 0$.

Тогда

$$a) X_{(0)} = 0, \quad X'_{(0)} = 0; \quad б) X'_{(l)} = 0; \quad X''_{(l)} = 0.$$

Аналог этой задачи – свободные колебания консольной балки. Поэтому

$$\lambda_1 = 1,87R/\ell = 0,6\pi R/\ell; \quad P_{кр} = 0,6 P_{кл}.$$

5.5. Устойчивость оболочки, подкрепленной упругими шпангоутами

Рассмотрим устойчивость цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевыми шпангоутами и нагруженной равномерным внешним гидростатическим давлением P . Задачу решаем при следующих допущениях.

1. Поведение обшивки описывается уравнениями полубезмоментной теории.

2. Центры тяжести поперечных сечений шпангоутов лежат в срединной поверхности обшивки; оси их нерастяжимы.

3. Учитываем только изгибную жесткость шпангоута в своей плоскости.

4. Ширина шпангоута мала по сравнению с расстояниями между ними.

При такой упрощенной расчетной схеме подкрепленной оболочки обшивка находится в однородном безмоментном состоянии до потери устойчивости; шпангоуты нагрузки не несут.

Потеря устойчивости обшивки описывается уравнением (53). Изгиб кругового шпангоута (кольца) с нерастяжимой осью под действием касательной нагрузки интенсивности q_k описывается уравнением

$$EI_k \left(\frac{d^6 W_k}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4 W_k}{d\varphi^4} + \frac{d^2 W_k}{d\varphi^2} \right) = R^4 q_k, \quad (5.62)$$

где k – номер шпангоута; EI_k – его изгибная жесткость; W_k – окружные перемещения точек оси шпангоута.

Передаваемая на k -й шпангоут касательная нагрузка равна разности сдвигающих усилий на участках обшивки, прилегающих слева и справа к шпангоуту:

$$q_k = S_{k-0} - S_{k+0}.$$

С учетом выражений (56)

$$q_k = \frac{R}{n} B (X_{k-0}^{III} - X_{k+0}^{III}) \cos n\varphi. \quad (5.63)$$

Принимая решение (62) в виде:

$$W_K - V_K \cos n\varphi. \quad (5.64)$$

определяем перемещения оси шпангоута

$$V_K = -nR^2(X_{K-0}^{III} - X_{K+0}^{III})/C_K. \quad (5.65)$$

где приведенная жесткость шпангоута равна:

$$C_K = EI_K n^4 (n^2 - 1)^2 / BR^3. \quad (5.66)$$

Составим систему граничных и стыковочных условий для оболочки с N пролетами. Для каждого $(N-1)$ шпангоута можно выписать следующие четыре условия.

1. Равенство окружных перемещений участков обшивки, прилегающих к шпангоуту слева и справа:

$$V_{K-0} = V_{K+0}, \text{ то есть } X_{K-0} = X_{K+0}.$$

2. Равенство осевых перемещений

$$U_{K-0} = U_{K+0}, \text{ то есть } X_{K-0}^I = X_{K+0}^I.$$

3. Равенство осевых усилий в обшивке слева и справа от шпангоута

$$(T_x)_{K-0} = (T_x)_{K+0}, \text{ то есть } X_{K-0}^{II} = X_{K+0}^{II}.$$

4. Равенство окружных перемещений точек оси шпангоута соответствующим окружным перемещениям обшивки

$$W_K = v_K,$$

то есть

$$R^3(X_{K-0}^{III} - X_{K+0}^{III})/C_K = X_K.$$

Кроме того, на каждом торце оболочки должны быть заданы по два однородных граничных условия (34). Таким образом, для оболочки с N пролетами получаем $4N$ необходимых граничных условий.

Общая схема определения критического давления подкрепленной оболочки состоит в следующем. Решение уравнения (53) ищем в виде (54) и (58), причем, выражение (58) записываем для каждого участка, что сводится к замене X на X_k и A_i на A_{ki} . Из условия стыковки оболочки число волн n должно быть одинаковым для всех пролетов. Поэтому при постоянном давлении и жесткостях по длине оболочки значение λ будет общим для всех пролетов. Подчинение решений X_k всем граничным и стыковочным условиям приводит к системе $4N$ линейных однородных уравнений относительно неизвестных A_{ki} . Из условия равенства нулю определителя этой системы получаем характеристическое уравнение, позволяющее найти $\lambda = \lambda(n)$. Зная λ , определяем собственные значения давления по формуле (59). Так как в данном случае величина λ зависит от числа волн n , то выражение (59) невозможно аналитически минимизировать по параметру n . Из характеристического уравнения для каждого n следует находить минимальное значение $\lambda_{min} = \lambda_{min}(n)$, затем определить P_n по формуле (59). Повторяя эту процедуру при различных n до получения наименьшего значения $\min P_n = P_{кр}$.

В качестве примера рассмотрим устойчивость свободно опертой по торцам цилиндрической оболочки длиной $2L$, подкрепленной посередине шпангоутом жесткости EI . Граничные условия на торцах

$$v = 0, T_x = 0.$$

запишутся в виде:

$$X_{1(0)} = 0, X_{1(0)}'' = 0, X_{2(2e)} = 0, X_{2(2e)}'' = 0.$$

Стыковочные условия при $X-L$ имеют вид:

$$X_1 = X_2, X_1' = X_2', X_1'' = X_2'', R^3(X_1''' - X_2''')/C = X_1.$$

Характеристическое уравнение в данном случае распадается на два независимых уравнения

$$\sin k = 0; \quad (Rk/l)^3 = C(thk - tgk)/4, \quad \text{где } k = \lambda l/R. \quad (5.67)$$

Первое из этих уравнений соответствует местной потере устойчивости подкрепленной оболочки, когда обшивка теряет устойчивость, а шпангоут сохраняет круговую форму. Его наименьший корень $\lambda_{min} = \pi R/l$. Собственные значения определяются по формуле (59), а для оболочек средней длины критическое давление $P_{кр}^m$ определяется формулой (61).

Второе из этих уравнений соответствует общей потере устойчивости подкрепленной оболочки, когда обшивка теряет устойчивость вместе с подкреплением. При минимизации уравнения (59) надо учитывать, что при изменении n меняется приведенная жесткость шпангоута и, следовательно, значение корня характеристического уравнения (67).

Приведем численные расчеты приняв $l/R=1, R/h=500, EJ/lD=1$. Тогда по формулам (59) и (66) имеем:

$$\bar{P}_n = \frac{P_n R}{B} \left[\frac{(\min \lambda_n)^4}{n^4(n^2-1)} + \frac{n^2-1}{3 \cdot 10^6} \right]; \quad c = n^4(n^2-1)^2 / 3 \cdot 10^6.$$

При $n \leq 6$ можно принять $\min \lambda_n = 1,6$. Тогда

$$\bar{P}_4 = 1570 \cdot 10^{-6}; \quad \bar{P}_5 = 410 \cdot 10^{-6}; \quad \bar{P}_6 = 145 \cdot 10^{-6}.$$

Приняв $n=7$, получаем $C=1,844$ и из характеристического уравнения (67) находим $\min \lambda_7 = 1,84$; тогда $\bar{P}_7 = 79 \cdot 10^{-6}$.

Далее $n=8$; $c=5,42$; $\min \lambda_8 = 1,84$; $P_8 = 65,4 \cdot 10^{-6}$;

$$n=9; \quad c=14; \quad \min \lambda_9 = 1,91; \quad \bar{P}_9 = 52 \cdot 10^{-6};$$

$$n=10; \quad c=32,67; \quad \min \lambda_{10} = 2,46; \quad P_9 = 70 \cdot 10^{-6}.$$

Из этих расчетов следует $(\mu=0,3)$

$$n_{кр} = 9; \quad P_{кр} = 52 \cdot 10^{-6} E / 500 \cdot 0,91 = 1,14 \cdot 10^{-7} E.$$

Для упрощения расчетов можно по уравнению (67) заранее построить графики зависимости его наименьшего корня от приведенной жесткости при различных l/R . Такой график при $l/R=1$ приведен в работе [2].

Расчеты показывают, что смена форм потери устойчивости происходит при достижении некоторого значения эффективной жесткости шпангоута $EJ_{эф}$. При жесткости шпангоута, меньшей

эффективной, происходит общая потеря устойчивости, и увеличение жесткости шпангоута приводит к повышению критического давления.

При жесткости шпангоута, большей $EJ_{\text{эф}}$, происходит местная потеря устойчивости обшивки, и дальнейшее увеличение жесткости шпангоута не влияет на критическое давление. Для оболочек средней длины, подкрепленных посередине пролета $EJ_{\text{эф}}=1,5Dl$. Для оболочек с двумя симметричными шпангоутами $EJ_{\text{эф}}=3,2Dl$ и т.д.

5.6. Закритическое поведение цилиндрических оболочек

В предыдущих главах показано, что критические точки бифуркации начальной формы равновесия идеально правильных стержней и пластин относятся к точкам бифуркации первого типа, когда устойчивая начальная форма равновесия сменяется устойчивой искривленной формой равновесия. При плавном возрастании нагрузок такая конструкция плавно переходит в новое возмущенное состояние равновесия. Если закрепления краев упругой оболочки таковы, что допускают чисто изгибную деформацию без удлинения и сдвигов срединной поверхности, то оболочка тоже имеет критическую точку бифуркации первого типа и при потере устойчивости ведет себя аналогично сжатому стержню или пластине.

Если закрепления краев оболочек исключают возможность чисто изгибной деформации, то при потере устойчивости поведение тонких оболочек становится качественно иным. В этом случае критическая точка бифуркации оказывается точкой бифуркации второго типа, когда устойчивая начальная форма равновесия сменяется неустойчивой искривленной формой равновесия. Новые устойчивые состояния равновесия удалены от начального состояния на конечные расстояния (рис. 5.5.)

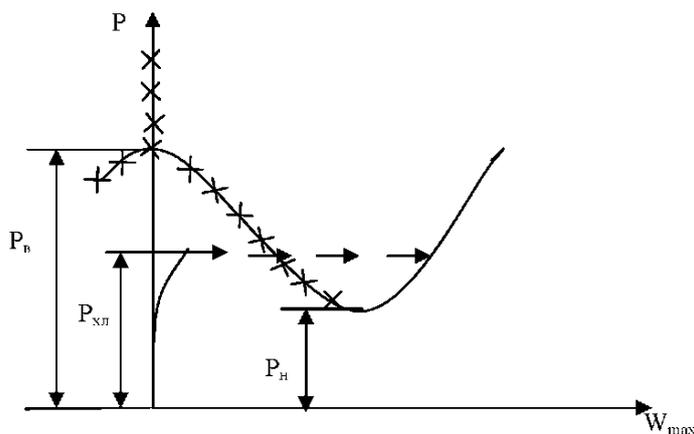


Рис.5.5.

На рисунке 5.5 крестиками обозначены неустойчивые состояния равновесия. Переход в новое устойчивое состояние равновесия происходит хлопком: оболочка "перескакивает" через неустойчивые состояния равновесия. Новые устойчивые состояния равновесия, отделенные от начального сравнительно небольшим энергетическим барьером, становятся возможными до достижения критической нагрузки.

В результате геометрических несовершенств и эксцентриситета нагружения реальная оболочка начинает отклоняться от своей исходной формы еще до достижения критической нагрузки. Затем при некотором значении нагрузки хлопком переходит в новое состояние равновесия. Поэтому для тонких упругих оболочек характерны три значения нагрузки:

P_c - верхняя критическая нагрузка, при превышении которой начальная форма равновесия идеально правильной оболочки перестает быть устойчивой;

P_n – нижняя критическая нагрузка, при превышении которой становятся возможными новые, отличные от начального состояния, формы равновесия идеальной оболочки;

P_{xn} - нагрузка, при которой происходит хлопок реальной оболочки.

Значение верхней критической нагрузки определяются с помощью линейаризованных дифференциальных уравнений. При осесимметричном нагружении решение этих уравнений не представляет принципиальных трудностей.

При определении нижних критических нагрузок необходимо решать чрезвычайно сложные задачи нелинейной теории оболочек. Система дифференциальных уравнений нелинейной теории оболочек имеет вид:

$$D\nabla^4(\omega - \omega_0) + \frac{\partial^2 \phi}{R \partial x^2} = L(\omega, \phi); \quad (5.68)$$

$$\nabla^4 \phi = \frac{Eh}{R} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - 0,5 Eh [L(\omega, \omega) - L(\omega_0, \omega_0)],$$

где ω – полный прогиб; ω_0 – начальный прогиб; а оператор

$$L(\omega, \phi) = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi}{R^2 \partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \omega}{R^2 \partial \phi^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \omega}{R \partial x \partial \phi} \frac{\partial^2 \phi}{R \partial x \partial \phi}. \quad (5.69)$$

Производные от функции усилий ϕ здесь определяют полные усилия и включают в себя и внешние нагрузки. Для идеальной оболочки полагают $\omega_0=0$. Система уравнений (68) решается приближенными или численными методами. Так для шарнирно опертой по торцам оболочки найдено $\bar{P}_n = 0,186$, что составляет 30% от верхнего значения, равного 0,6.

Для реальной оболочки P_{xn} лежит между верхним и нижним критическими значениями идеальной оболочки, и чем точнее изготовлена оболочка, тем оно ближе к P_c . Величина P_{xn} также определяется из системы (68) и чрезвычайно чувствительно к величинам и формам начальных искривлений.

С одной стороны, это приводит к большому разбросу экспериментальных значений P_{xli} , полученных в различных условиях, с другой стороны, при теоретическом определении P_{xli} необходимо с большой точностью знать начальные искривления реальной оболочки, что практически очень трудно.

На практике следует стремиться к созданию таких силовых конструкций, устойчивость которых не будет зависеть от случайных и трудно контролируемых факторов. Основные пути создания таких конструкций – это тщательное изготовление оболочек, использование подкрепленных оболочек, трехслойных и гофрированных оболочек.

6. ВВЕДЕНИЕ В ОБЩУЮ ТЕОРИЮ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ

6.1. Определение устойчивости движения

Из теории колебаний известно, что движение механической системы с одной степенью свободы описывается следующим уравнением:

$$\ddot{y} + 2\varepsilon\dot{y} + \omega_0^2 y = F(t)/m, \quad (6.1)$$

где ε - коэффициент затухания; ω_0 - частота собственных колебаний; m - масса; $F(t)$ - вынуждающая сила.

Введем фазовых переменных

$$y_1 = y, \quad y_2 = \dot{y},$$

имеющих смысл перемещения и скорости, исходное уравнение приводится к виду, разрешенному относительно производных фазовых координат:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2; \\ \dot{y}_2 &= F(t)/m - 2\varepsilon y_2 - \omega_0^2 y_1. \end{aligned}$$

Для системы с k степенями свободы аналогично можно получить следующие уравнения движения:

$$\frac{d y_i}{dt} = Y_i(y_1, \dots, y_n, t) \quad (i=1, \dots, n, \quad n=2k). \quad (6.2)$$

Некоторое вполне определенное движение системы, подлежащее исследованию на устойчивость, называется невозмущенным движением. Этому движению отвечает определенное частное решение системы (2).

$$y_1 = f_1(t), \dots, y_n = f_n(t),$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$y_i = f_i(t_0), \dots, y_n = f_n(t_0), \quad \text{при } t = t_0. \quad (6.3)$$

Изменим условия (3), дав начальным значениям переменных небольшие по модулю приращения ε_i :

$$y_i = f_i(t_0) + \varepsilon_i, \dots, y_n = f_n(t_0) + \varepsilon_n, \quad (6.4)$$

Движение системы, отвечающее измененным начальным условиям, называется возмущенным движением, а величины ε_i - возмущениями.

Обозначим значения переменных в возмущенном движении через $y_i(t)$, а в невозмущенном движении через $f_i(t)$ и составим разности между ними

$$x_i = y_i(t) - f_i(t) \quad (i=1, \dots, n). \quad (6.5)$$

Эти переменные называются отклонениями или вариациями величин y_i . Если все отклонения равны нулю

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0, \quad (6.6)$$

то возмущенное движение $y_i(t)$ совпадает с невозмущенным движением, то есть невозмущенному движению соответствуют нулевые значения x_i .

В дальнейшем для удобства изложения часто будем пользоваться геометрической интерпретацией движения. Совокупность отклонений x_1, \dots, x_n в n - мерном пространстве этих переменных определяет точку M (изображающая точка). В возмущенном движении эта точка будет описывать некоторую траекторию. Невозмущенному движению $x_i = 0$ соответствует начало координат.

Отклонение возмущенного движения от невозмущенного определяется вариациями $x_i(t)$. Если все $x_i(t)$ малы по модулю, то будет мала и сумма их квадратов

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2. \quad (6.7)$$

Если же отклонение хотя бы одной координаты будет велико, то сумма (7) также велика. Также справедливо и обратное утверждение. Сумма (7) равна квадрату расстояния от начала координат до изображающей точки и может служить мерой отклонения возмущенного движения от невозмущенного движения.

Согласно определению возмущенного движения и равенствам (4) и (5) имеем:

$$\text{при } t = t_0 \quad x_i = x_{oi} = \varepsilon_i,$$

то есть начальные значения отклонений x_{oi} представляют собой возмущения системы.

Пользуясь введенными понятиями, дадим определение устойчивости движения по Ляпунову. Невозмущенное движение, определяемое нулевыми отклонениями, устойчиво, если для сколь угодно малого положительного числа ε можно найти такое положительное число $\delta(\varepsilon)$, что при всяких возмущениях, удовлетворяющих условию

$$|x_{oi}| \leq \delta, \quad (6.8)$$

и для всех $t \geq t_0$ будет выполняться неравенство

$$|x_i| \leq \varepsilon, \quad (6.9)$$

в противном случае - движение неустойчиво.

Практически устойчивость данного невозмущенного движения означает, что при достаточно малых начальных возмущениях возмущенное движение будет сколь угодно мало отличаться от невозмущенного движения.

Если невозмущенное движение устойчиво и при этом любое возмущенное движение при достаточно малых начальных возмущениях стремится к невозмущенному движению, то есть, если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0 \quad (i = 1, \dots, n), \quad (6.10)$$

то невозмущенное движение будет асимптотически устойчиво.

В тех случаях, когда асимптотическая устойчивость имеет место при любых возмущениях (не обязательно малых), невозмущенное движение будет асимптотически устойчивым в целом.

Остановимся на особенностях определения устойчивости движения по Ляпунову. Во-первых, возмущения налагаются только в начальные условия, то есть возмущенное движение происходит при тех же силах, что и невозмущенное движение. Во-вторых, устойчивость рассматривается на бесконечно большом промежутке времени. В-третьих, возмущения предполагаются малыми. Не смотря на эти ограничения, определение устойчивости по Ляпунову является эффективным в приложениях.

6.2. Уравнения возмущенного движения

В тех случаях, когда известно общее решение системы (2), можно непосредственно определить значения $y_i(t)$ в возмущенном движении, составить вариации (5) и, исследуя их, решить вопрос об устойчивости невозмущенного движения $f_i(t)$. Однако в большинстве случаев общее решение системы (2) неизвестно, поэтому этот подход может быть использован очень редко. В общем случае устойчивость движения исследуется на основе специально разработанных методов. Эти методы основаны на качественном анализе дифференциальных уравнений возмущенного движения, которым удовлетворяют вариации x_i .

Для вывода уравнений возмущенного движения из равенства (5) найдем переменные $y_i(t)$:

$$y_i(t) = f_i(t) + x_i(t).$$

Подставляя их в систему (2), получим

$$\frac{df_i}{dt} + \frac{dx_i}{dt} = Y_i(f_1 + x_1, \dots, f_n + x_n, t).$$

Разложим правые части этих уравнений в ряды Тейлора по степеням x_i :

$$\frac{df_i}{dt} + \frac{dx_i}{dt} = Y_i(f_1 + x_1, \dots, f_n + x_n, t) + \left(\frac{\partial Y_i}{\partial x_1} \right)_0 x_1 + \dots + \left(\frac{\partial Y_i}{\partial x_n} \right)_0 x_n + x_i^*,$$

где x_i^* - совокупность нелинейных членов относительно x_i .

С учетом того, что в невозмущенном движении функции $f_i(t)$ должны удовлетворять условиям (3), получим:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_i^* \quad (i = 1, \dots, n), \quad (6.11)$$

где коэффициенты

$$a_{ij} = \left(\frac{\partial Y_i}{\partial x_j} \right)_{x_i=0} \quad (6.12)$$

могут быть постоянными или функциями времени.

Уравнения (11) называются дифференциальными уравнениями возмущенного движения. Обозначив все члены, стоящие в правых частях этих

уравнений через X_i , получим уравнения возмущенного движения в нормальной форме

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \quad (i = 1, \dots, n), \quad (6.13)$$

В общем случае X_i зависят явно от x_i и времени t и система называется неавтономной. Если же все функции X_i от времени явно не зависят, то система называется автономной. Соответствующие движения называются неустановившимися и установившимися движениями.

В дальнейшем для сокращения записи иногда совокупность отклонений x_1, \dots, x_n будем обозначать одной буквой x . Из вывода уравнений возмущенного движения видно, что при $x = 0$ все функций X_i обращаются в нуль.

$$X_i(0, t) = 0. \quad (6.14)$$

Отметим, что скорость U изображающей точки направления по касательной к траектории движения, а ее проекции равны:

$$U_1 = \frac{dx_1}{dt}, \dots, U_n = \frac{dx_n}{dt}.$$

Из уравнения (13) следует

$$U_i = X_i, \dots, U_n = X_n, \quad (6.15)$$

то есть правые части нормальных уравнений возмущенного движения равны проекциям скорости изображающей точки.

Пример 6.1. Составить уравнения возмущенного движения около положений равновесного состояния системы, движение которой задано уравнениями:

$$\dot{y}_1 = y_2 - y_1 - y_1^2, \quad \dot{y}_2 = 3y_1 - y_2 - y_1^2.$$

Значение координат равновесных состояний мы получим из уравнений

$$\begin{cases} y_2 - y_1 - y_1^2 = 0, \\ 3y_1 - y_2 - y_1^2 = 0. \end{cases}$$

Таких состояний будет два:

$$y_1 = y_2 = 0; \quad y_1 = 1, y_2 = 2.$$

Уравнения возмущенного движения для первого равновесного состояния будут теми же, что исходные, но с другими обозначениями координат (x_1 и x_2). Уравнения возмущенного движения около второго равновесного состояния получим после подстановки.

$$y_1 = 1 + x_1, y_2 = 2 + x_2.$$

Тогда имеем:

$$\dot{x}_1 = x_2 - 3x_1 - x_1^2, \quad \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_1^2.$$

6.3. Функция Ляпунова

В своем классическом труде "Общая задача об устойчивости движения" А. М. Ляпунов развил два метода решения задач об устойчивости движения: метод характеристических показателей решений уравнений возмущенного движения и так называемой "второй метод" качественный метод определения устойчивости, где суждения об устойчивости движения делается по изменению в возмущенном движении системы некоторых функций ее координат. Так как уравнения возмущенного движения в большинстве случаев нелинейны, то не всегда удастся получить их решения в замкнутом виде. В этом смысле наиболее общим и эффективным методом исследования устойчивости движения является второй (прямой) метод Ляпунова.

Рассмотрим некоторые вещественные функции

$$V(x) = V(x_1, \dots, x_n),$$

определенные в области

$$\sum x_i^2 \leq \mu, \quad (6.16)$$

где μ - постоянное положительное число.

Предполагается, что в этой области функции V однозначны, непрерывны и обращаются в нуль в начале координат, то есть

$$V(0) = 0. \quad (6.17)$$

Если в окрестности начала координат функция V кроме нуля может принимать значения только одного знака, то она называется знакопостоянной (положительной или отрицательной). Если же знакопостоянная функция обращается в нуль только в том случае, когда все x_i равны нулю, то функция V называется знакоопределенной. Введенные таким образом функции V называются функциями Ляпунова первого рода и используются для исследования устойчивости установившихся движений.

Пример.

Функция $V = x_1^2 + x_2^2$ равна нулю только в начале координат, значит она определенно-положительна. Функция $V = (x_1 - x_2)^2$ равна нулю не только в начале координат, но и на прямой $x_1 = x_2$ следовательно, эта функция положительна, но не определенно-положительна.

Пусть функция Ляпунова знакоопределенная и имеет непрерывные производные первого порядка. Такая функция в точке $x=0$ имеет изолированный экстремум и все его частные производные первого порядка в этой точке равны нулю.

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \right)_0 = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (6.18)$$

Разложим функцию V в ряд Маклорена по степеням x_i :

$$V = V(0) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \right)_0 x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right)_0 x_i x_j + \dots,$$

где точками обозначены члены высшего порядка.

Учитывая (17) и (18), получим:

$$V = \frac{I}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_i x_j + \dots, \quad (6.19)$$

где
$$c_{ij} = c_{ji} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right)_0.$$

Отсюда видно, что разложение знакоопределенной функции V в ряд не содержит членов первой степени.

Предположим, что квадратичная форма

$$\frac{I}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_i x_j \quad (6.20)$$

определенно положительна. Тогда вне зависимости от членов высшего порядка при достаточно малых по модулю x_i функция V будет так же определено-положительной. [12]

Рассмотрим матрицу коэффициентов квадратной формы (20) и составим из нее n главных диагональных миноров

$$\Delta_1 = c_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} c_{11} & \cdot & c_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & \cdot & c_{nn} \end{vmatrix}. \quad (6.21)$$

Согласно критерию Сильвестра [13] для положительной определенности квадратичной формы необходимо и достаточно чтобы все главные диагональные миноры матрицы ее коэффициентов были положительны, то есть

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0. \quad (6.22)$$

Из сказанного следует, что критерий (22) является достаточным условием положительной определенности функций Ляпунова.

Достаточным условием отрицательной определенности функции V будет критерий Сильвестра для матрицы "-с". Этот критерий имеет вид:

$$\Delta_1 = c_{11} < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots, \quad (6.23)$$

то есть знаки определителей должны последовательно чередоваться.

Разложение знакоопределенной функций в ряд по степеням x_i может начинаться не с членов второго порядка. Необходимым признаком знакоопределенности в этом случае может служить тот факт, что разложение знакоопределенной функции в ряд не может начинаться с членов нечетной степени [12].

Укажем важные свойства функции Ляпунова. Прежде всего отметим, что если функция V знакоопределенная, то поверхность $V(x_1, \dots, x_n) = c$ замкнута [12].

Отсюда вытекает два следствия:

1. Если $|c| > |c_1|$, то поверхность $V = c_1$ находится внутри поверхности $V = c$, причем обе поверхности не имеют общих точек.
2. Если изображающая точка перемещается в сторону возрастания определенно-положительной функции V , то траектория этой точки пересекает поверхность $V = c$ изнутри наружу, а при движении в сторону убывания функции V - снаружи внутрь.

Выберем на поверхности $V(x) = c$ произвольную точку M и вычислим в этой точке вектор $grad V$:

$$grad V = \frac{\partial V}{\partial x_1} e_1 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} e_n,$$

где e_i - орты осей x_i .

Известно, что вектор $grad V$ направлен по нормали к поверхности $V = c$ в точку M в сторону возрастания функции V . Из этого следует, что этот вектор направлен во внешнюю часть поверхности $V = c$, если функция определенно-положительна (рис. 6.1,а) и внутрь этой поверхности, если функция определенно-отрицательна (рис. 6.1,б).

Найдем полную производную \dot{V} по времени t

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \dot{x}_n.$$

Предполагая, что переменные x_i удовлетворяют уравнениям возмущенного движения (13), имеем:

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1} X_1 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} X_n. \quad (6.24)$$

Так как величины x_i равны проекциям скорости точки M , а производные $\partial V / \partial x_i$ - проекциям $grad V$, то правая часть (24) равна скалярному произведению векторов U и $grad V$:

$$\dot{V} = U * grad V = |U| \cdot |grad V| \cos \alpha, \quad (6.25)$$

где α - угол между векторами.

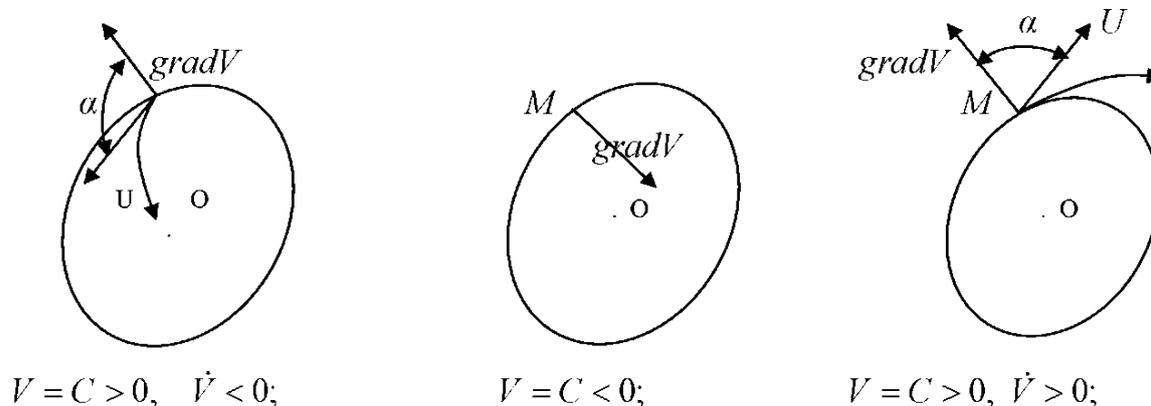


Рис. 6.1. Геометрическая интерпретация свойств функции Ляпунова

Знание производной \dot{V} позволяет наглядно проследить за движением изображающей точки. Пусть V - определенно положительная функция. Рассмотрим три возможных случая.

1. В данном положении точки M производная отрицательна. Из выражения (25) следует, что угол α тупой (рис.6.1,а) и точка M движется внутрь поверхности $V=C$, то есть функция V убывает.

2. В данном положении точки M производная положительна. Из (25) следует, что угол α острый (рис.6.1,в) и изображающая точка пересекает поверхность $V=C$ изнутри наружу, то есть функция V возрастает.

3. В данном положении точки M производная равна нулю. В этом случае угол α прямой, траектория изображающей точки касается поверхности $V=C$.

При исследовании устойчивости неустановившегося движения применяются функции V , явно зависящие от времени и называемые функциями Ляпунова второго рода. При этом условия (16) и (17) должны выполняться для любого $t \geq t_0$. Знакоопределенность таких функций отличается от определения знакоопределенности функции первого рода. Функция Ляпунова второго рода называется знакоопределенной, если для нее существует такая не зависящая от времени определенно-положительная функция W , что имеет место одно из двух неравенств

$$V \geq W \text{ или } -V \geq W. \quad (6.26)$$

Пример 6.1.

Рассмотрим функцию:

$$V = t(x_1^2 + x_2^2) - 2x_1x_2 \cos t. \quad (a)$$

Перепишем ее так:

$$V = (t-1)(x_1^2 + x_2^2) + (x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \cos t).$$

Приняв во внимание, что

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \cos t \geq 0,$$

найдем, что для $t \geq 2$

$$V \geq x_1^2 + x_2^2 = W.$$

Если функция Ляпунова второго рода может быть представлена квадратичной формой (19), в которой коэффициенты являются функциями времени, то остается справедливым критерий Сильвестра о знакоопределенности функции Ляпунова. За ограничивающую функцию $W(x)$ в этом случае можно выбрать функцию

$$W(x) = \varepsilon(x_1^2 + \dots + x_n^2), \quad (6.26)$$

где ε - некоторое положительное число.

Применим этот критерий к функции (а). Запишем матрицу коэффициентов

$$\begin{vmatrix} t/2 & -\cos t \\ -\cos t & t/2 \end{vmatrix}$$

и определим главные диагональные миноры

$$\Delta_1 = t/2, \quad \Delta_2 = t^2/4 - \cos^2 t.$$

Если положить $t_0 = 2$, то для всех $t \geq 2$ будем иметь:

$$\Delta_1 \geq 1 > 0, \quad \Delta_2 \geq 1 - \cos^2 2 > 0.$$

Согласно критерию Сильвестра при $t \geq 2$ рассматриваемая функция определено - положительна в смысле Ляпунова. Этот же вывод нами сделан выше путем сравнения $V(x,t)$ с ограничивающей функцией $W(x)$.

Если при условии (16) и $t \geq t_0$ значения $|V|$ не превосходят некоторого положительного числа, то функция V называется ограниченной. Если ограниченная функция такова, что для всякого положительного l , как бы мало оно ни было, найдется такое положительное число δ , что при

$$t \geq t_0, \quad \sum x_i^2 \leq \delta \tag{6.27}$$

будет выполняться неравенство

$$|V| < l, \tag{6.28}$$

то говорят, что функция V допускает бесконечно малый высший предел. Сказанное означает, модуль функции $V(x,t)$ можно сделать сколь угодно малым при любом $t \geq t_0$, только за счет уменьшения модулей всех x_i . В силу непрерывности бесконечно малый высший предел имеет любая функция Ляпунова первого рода.

В заключении отметим, что полная производная функции $V(x,t)$ по времени, взятая в предположении, что переменные x_i удовлетворяют уравнениям возмущенного движения (13), вычисляется по формуле

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1} X_1 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} X_n + \frac{\partial V}{\partial t}. \tag{6.29}$$

6.4. Теоремы второго метода Ляпунова

1. Теорема Ляпунова об устойчивости движения. Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения можно найти знакоопределенную функцию V , производная которой в силу этих уравнений была бы знакопостоянной функцией противоположного знака с V или тождественно равна нулю, то невозмущенное движение устойчиво.

Не нарушая общности, можно считать, что функция V определенно-положительна. Тогда по условию теоремы $\dot{V} \leq 0$, что соответствует первому или третьему случаю движения изображающей точки, рассмотренному в предыдущем параграфе (рис.6.1,а): изображающая точка M войдет внутрь поверхности $V=c$ или будет лежать на ней, что свидетельствует об устойчивости движения.

Пример 6.2. Пусть уравнения возмущенного движения имеют вид:

$$\dot{x}_1 = x_2 + 3x_1^2 x_2^2 - 4x_1^5,$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2^3 + x_1^3 x_2.$$

Возьмем определенно-положительную функцию

$$V = (x_1^2 + x_2^2) / 2$$

и вычислим ее производную по времени

$$\dot{V} = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2.$$

Подставляя сюда выражения для \dot{x}_1 и \dot{x}_2 из уравнения движения, имеем

$$\dot{V} = x_1(x_2 + 3x_1^2 x_2^2 - 4x_1^5) + x_2(-x_1 - x_2^3 + x_1^3 x_2) = -(2x_1^3 - x_2^2)^2 \leq 0.$$

Так как условия теоремы Ляпунова выполнены, то невозмущенное движение $x_1 = x_2 = 0$ устойчиво.

Пример 6.3. Уравнения возмущенного движения имеют вид:

$$\dot{x}_1 = -x_1^3 \sin^2 t - 2x_2 \sin t,$$

$$\dot{x}_2 = 4x_1 \sin t - x_2^3 \cos^2 t.$$

Хотя движение неустановившееся, введем в рассмотрение положительно определенную функцию, независимую от времени:

$$V = 2x_1^2 + x_2^2.$$

Ее производная будет равна:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 4x_1(-x_1^3 \sin^2 t - 2x_2 \sin t) + 2x_2(4x_1 \sin t - x_2^3 \cos^2 t) = \\ &= -4x_1^4 \sin^2 t - 2x_2^4 \cos^2 t \leq 0. \end{aligned}$$

Производная постоянно отрицательная функция, следовательно, невозмущенное движение устойчиво.

2. Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости. Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения можно найти знакоопределенную функцию V , допускающую бесконечно малый высший предел, производная которой в силу этих уравнений была бы знакоопределенной функцией противоположного знака с V , то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

Пусть V положительно определенная функция. Так как по условию теоремы \dot{V} знакоопределенная (а не знакопостоянная) функция, то $\dot{V} < 0$ и функция V , оставаясь положительной, монотонно убывает. Отсюда следует, что она стремится к нулю, следовательно, движение асимптотически устойчиво.

Пример 6.4. Пусть уравнения возмущенного движения имеет вид:

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1^3, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - x_2^3.$$

Функция $V = x_1^2 + x_2^2$ и ее производная, вычисления с учетом уравнений движения:

$$\dot{V} = 2x_1(x_2 - x_1^3) + 2x_2(-x_1 - x_2^3) = -2(x_1^4 + x_2^4)$$

знакоопределенные функции противоположных знаков, причем V , как не зависящая явно от времени, допускает бесконечно малый предел. Следовательно, невозмущенное движение $x_1 = x_2 = 0$ асимптотически устойчиво.

3. Теорема Ляпунова о неустойчивости движения. Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения можно найти функцию V , допускающую бесконечно малый высший предел, производная которой в силу этих уравнений есть функция знакоопределенная, а сама функция V в окрестности нуля переменных x_i и при всех $t \geq t_0$ может принимать значения того же знака, что и производная, то невозмущенное движение неустойчиво.

По условиям теоремы для положительно определенной функции V мы имеем второй случай движения изображающей точки M , рассмотренный в предыдущем параграфе (рис. 6.1, в): функция V возрастает, что свидетельствует о неустойчивости движения.

Пример 6.5. Пусть уравнение возмущенного движения имеет вид:

$$\dot{x}_1 = 3x_2 + 4x_1^3 + x_1^5, \quad \dot{x}_2 = -5x_1 + 3x_2^5.$$

Рассмотрим функцию

$$V = 5x_1^2 + 3x_2^2.$$

Ее производная с учетом уравнений возмущенного движения равна

$$\dot{V} = 10x_1(3x_2 + 4x_1^3 + x_1^5) + 6x_2(-5x_1 + 3x_2^5) = 40x_1^4 + 10x_1^6 + 18x_2^6 > 0.$$

Функции V и \dot{V} определены положительно, следовательно, невозмущенное движение неустойчиво.

6.5. Построение функции Ляпунова

Применение основных теорем второго метода Ляпунова требует знания функций, обладающих определенными свойствами. К сожалению общих методов построения этих функций нет, однако во многих случаях это можно сделать, если известны интегралы уравнений возмущенного движения.

Положим, что уравнения движения (13) допускают интеграл

$$F(x_1, \dots, x_n) = h = \text{const}, \quad (6.30)$$

для которого разность $F(x) - F(0)$ является положительно определенной функцией переменных x_i . Тогда эту разность можно взять в качестве функций Ляпунова

$$V = F(x_1, \dots, x_n) - F(0). \quad (6.31)$$

В самом деле, производная \dot{V} в силу интеграла (30) равна нулю и, следовательно, эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы об устойчивости движения.

В некоторых случаях дифференциальные уравнения возмущенного движения допускают несколько интегралов

$$F_1(x_1, \dots, x_n) = h_1, \dots, F_m(x_1, \dots, x_n) = h_m, \quad (6.32)$$

где h_i - постоянные интегрирования, а функцией F_i не являются определено-положительными. Для такого случая Н.Г. Четаев предложил искать функцию V в форме связки интегралов:

$$V = \sum_{i=1}^m \lambda_i [F_i(x) - F_i(0)] + \sum_{i=1}^m \chi_i [F_i^2(x) - F_i^2(0)], \quad (6.33)$$

где λ_i, χ_i - неопределенные постоянные.

Если эти постоянные удастся подобрать так, что функция V будет положительно определенной, то она будет удовлетворять условиям теоремы об устойчивости движения (так как в силу (32) и (33) $\dot{V} = 0$).

Сделаем несколько замечаний по применению метода Четаева:

-один из $2m$ коэффициентов можно выбрать произвольно, например $\lambda_i = 1$;

-часто функцию V можно построить с помощью линейной связки интегралов, положив все $\chi_i = 0$ (квадраты интегралов применять только в том случае, если линейной связки недостаточно);

-во многих случаях интегралы уравнений возмущенного движения можно получить из общих теорем механики, не составляя самих уравнений.

Пример 6.5. Устойчивость стационарного движения конического маятника (рис. 6.2.).

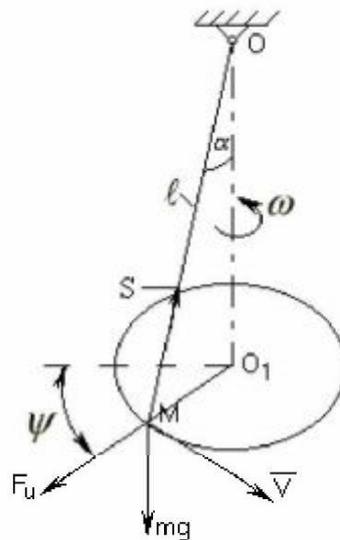


Рис.6.2. Конический маятник

Материальная точка M массой m , подвешенная на невесомой нити длиной ℓ , движется вокруг оси OO_1 с постоянной угловой скоростью ω по горизонтальной окружности. Угол конуса обозначим α .

Линейная скорость точки $v = \omega \cdot \ell \sin \alpha$, а сила инерции

$$F_u = m\omega^2 \ell \sin \alpha.$$

Составим сумму моментов всех сил, действующих на точку (mg, F_u, S) , относительно точки O :

$$mg\ell \cdot \sin \alpha = (m\omega^2 \ell \sin \alpha)\ell \cos \alpha.$$

Отсюда находим:

$$\omega^2 = g / \ell \cos \alpha. \quad (a)$$

Стационарное движение маятника примем за невозмущенное движение. Пусть на него наложены небольшие возмущения. Угол конуса в возмущенном движении обозначим через θ , а угловую скорость вращения $\dot{\psi}$. Введем фазовые переменные

$$\theta = \alpha + x_1, \quad \dot{\theta} = x_2, \quad \dot{\psi} = \omega + x_3. \quad (б)$$

Изучим устойчивость невозмущенного движения. Кинетическая T и потенциальная Π энергии маятника равны:

$$T = m\ell^2(\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) / 2, \quad \Pi = -mg\ell \cos \theta.$$

Так как внешняя сила на маятник (вес) потенциальная, то полная энергия системы согласно закону сохранения энергии должна быть постоянной:

$$T + \Pi = m\ell^2(\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) - mg\ell \cos \theta = m\ell^2 h_1 / 2.$$

Кроме того, момент внешних сил относительно оси вращения равен нулю. Тогда согласно закону сохранения главного момента количества движения можно записать

$$m\ell^2 \dot{\psi} \sin^2 \theta = m\ell^2 h_2.$$

В правые части последних двух равенств сомножители $m\ell^2 / 2$ и $m\ell^2$ введены для удобства. С учетом соотношений (б) эти два интеграла запишем в виде:

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, x_3) &= x_2^2 + (\omega + x_3)^2 \sin^2(\alpha + x_1) - (2g/\ell) \cos(\alpha + x_1) = h_1, \\ F_2(x_1, x_2, x_3) &= (\omega + x_3) \sin^2(\alpha + x_1) = h_2. \end{aligned} \quad (в)$$

Ни один из этих интегралов не является знакоопределенной функцией относительно x_1 . Поэтому составим линейную связку интегралов (в), положив $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda$:

$$V = F_1 - F_1(0) + \lambda[F_2 - F_2(0)] = x_2^2 + (\omega + x_3)^2 \sin^2(\alpha + x_1) - (2g/\ell) \cos(\alpha + x_1) - \left[\omega^2 \sin^2 \alpha - (2g/\ell) \cos \alpha \right] + \lambda \left[(\omega + x_3) \sin^2(\alpha + x_1) - \omega \sin^2 \alpha \right].$$

С учетом малости x_i разложим тригонометрические функции в ряд по степеням x_i :

$$\begin{aligned} \sin^2(\alpha + x_1) &= (\cos x_1 \cdot \sin \alpha + \sin x_1 \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + x_1 \sin 2\alpha + x_1^2 \cos 2\alpha + \\ \cos(\alpha + x_1) &= \cos \alpha - x_1 \sin \alpha - 0,5x_1^2 \cos \alpha + \dots, \end{aligned}$$

где точками обозначены члены более второго порядка малости. Подставляя эти выражения в функцию V , учитывая равенство (а) и группируя члены по степеням x_i , имеем

$$V = (\lambda + 2\omega) \left[x_1 \omega \sin 2\alpha + x_3 \sin^2 \alpha + x_1 x_3 \sin 2\alpha \right] + \omega \left[(\lambda + \omega) \cos 2\alpha + \omega \cos^2 \alpha \right] x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \sin^2 \alpha + \dots$$

Чтобы избавиться в этом выражении от членов, содержащих x_i в первой степени, положим $\lambda = -2\omega$. Тогда получим положительно определенную квадратичную форму

$$V = x_1^2 \omega^2 \sin^2 \alpha + x_2^2 + x_3^2 \sin^2 \alpha + \dots$$

При достаточно малых x_i вся функция V будет так же определенно положительной. На основании выражения (в) производная \dot{V} тождественно равна нулю и, следовательно, стационарное движение конического маятника относительно переменных $\theta, \dot{\theta}, \psi$ будет устойчиво.

6.6. Устойчивость по первому приближению

6.6.1. Постановка задач

Прямой метод Ляпунова является эффективным средством изучения устойчивости движения. Однако общих правил построения функции Ляпунова до настоящего времени не существует. в связи с этим во многих случаях устойчивость движения исследуется по уравнениям первого приближения. Это объясняется не только простотой этого метода, но и тем, что нам часто известны только линейные приближения процессов, происходящих в реальных системах. Однако уравнения первого приближения иногда могут дать совершенно неверные результаты.

Рассмотрим, например, задачу об устойчивости невозмущенного состояния ($X_1=X_2=0$) системы

$$\dot{X}_1 = -X_2 + bX_1^3, \quad \dot{X}_2 = X_1 + bX_2^3. \quad (a)$$

Отбросив нелинейные члены, получаем линеаризованную систему, которая имеет следующие решение:

$$X_1 = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \quad X_2 = c_1 \sin t - c_2 \cos t.$$

Отсюда следует, что невозмущенное движение $X_1=X_2=0$ устойчиво.

Рассмотрим теперь исходную нелинейную систему. В качестве функций Ляпунова возьмём определённю положительную функцию

$$V = (X_1^2 + X_2^2)/2.$$

Её производная по времени в силу уравнений (a) будет равна:

$$\dot{V} = X_1(-X_2 + bX_1^3) + X_2(X_1 + bX_2^3) = b(X_1^4 + X_2^4).$$

При $b > 0$ невозмущенное движение неустойчиво, при $b < 0$ – устойчиво асимптотически, $b = 0$ – просто устойчиво. Таким образом, характер устойчивости в нашем примере определяется именно отброшенными членами. Поэтому естественно возникает вопрос об определении условий, при выполнении которых уравнения первого приближения дают правильный ответ об устойчивости движения.

В общем виде задача ставится так. Даны уравнения возмущенного движения (11). Требуется определить условия, при которых заключение об устойчивости можно составить по уравнениям первого приближения

Переменные Z_k называются каноническими переменными, а уравнение (37) – канонической формой уравнений первого приближения. Дифференциальные уравнение в канонической форме существуют и при наличии кратных корней характеристического уравнения, но в несколько иной форме записи. Так, если некоторый корень λ_i повторяется m раз, то

$$\begin{aligned}\dot{Z}_i &= \lambda_i Z_i, \\ \dot{Z}_{i+1} &= Z_i + \lambda_i Z_{i+1},\end{aligned}\tag{6.38}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\dot{Z}_{i+m-1} = Z_{i+m-2} + \lambda_i Z_{i+m-1}$$

Если применить преобразование (36) к уравнениям возмущённого движения (11), то получим:

$$\dot{Z}_k = \lambda_k Z_k + Z_k^*, \quad (k=1, \dots, n),\tag{6.39}$$

где Z_k^* - нелинейные члены относительно Z_i .

Каждому комплексному корню характеристического уравнения

$$\lambda = \nu + i\mu$$

соответствует сопряженный корень $\lambda = \nu - i\mu$; этим корням соответствуют комплексно - сопряженные канонические переменные

$$Z = u + i\nu \quad \text{и} \quad \bar{Z} = u - i\nu,$$

где u и ν - вещественные функции времени t . Вещественным корням λ отвечают вещественные канонические переменные.

Так как коэффициенты преобразования (36) постоянны, то из устойчивости (неустойчивости) невозмущённого движения относительно переменных X_i следует устойчивость (неустойчивость) относительно переменных Z_i и наоборот.

Уравнение (37), соответствующие уравнениям первого приближения (34), интегрируются элементарно

$$Z_k = Z_{0k} e^{\lambda_k t} \quad (i=1, \dots, n),\tag{6.40}$$

где Z_{0k} - значение Z_k при $t=0$.

Пусть

$$\lambda_k = \nu_k + i\mu_k.$$

Тогда

$$\left| e^{\lambda_k t} \right| = e^{\nu_k t} \left| e^{i\mu_k t} \right|$$

или, учитывая, что $\left| e^{i\mu_k t} \right| = 1$ при любых μ_k и t , имеем:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |e^{\lambda_k t}| = \begin{cases} 0 & \text{при } \nu_k < 0, \\ 1 & \text{при } \nu_k = 0, \\ \infty & \text{при } \nu_k > 0. \end{cases} \quad (6.41)$$

При кратных корнях характеристического уравнения, исходя из уравнения (38), можно показать, что

$$Z_k = f(t)e^{\lambda t},$$

где $f(t)$ - многочлен.

Так как показательная функция растёт быстрее любого многочлена, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |f(t)e^{\lambda t}| = \begin{cases} 0 & \text{при } \nu < 0, \\ \infty & \text{при } \nu \geq 0. \end{cases} \quad (6.42)$$

Из решений (40) и предельных равенств (41) и (42) вытекают следующие теоремы об устойчивости движения линейной автономной системы:

1. Если вещественные части всех корней характеристического уравнения отрицательны, то невозмущённое движение асимптотически устойчиво.

2. Если среди корней характеристического уравнения имеется хотя бы один с положительной вещественной частью, то невозмущённое движение неустойчиво.

3. Если некоторые корни характеристического уравнения имеют нулевые вещественные части, а остальные имеют отрицательные вещественные части, то невозмущённое движение будет устойчивым (но не асимптотически), если корням с нулевой вещественной частью отвечают простые элементарные делители и неустойчивым, если хотя бы одному из этих корней соответствуют кратные элементарные делители.

Сделаем одно замечание. Очень часто исходные уравнения возмущённого движения не приведены к нормальной форме и содержат производные порядка выше первого. Для исследования устойчивости нет нужды приводить систему к нормальной форме – достаточно составить характеристическую λ - матрицу для исходной системы. Так для исследования устойчивости движения системы, описываемой матричным уравнением

$$A\ddot{X} + B\dot{X} + CX = 0$$

достаточно исследовать матрицу

$$f(\lambda) = A\lambda^2 + B\lambda + C = 0.$$

6.6.3. Основные теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению

Теорема Ляпунова об устойчивости движения по первому приближению. Если вещественные части всех корней характеристического уравнения

первого приближения отрицательны, то невозмущённое движение асимптотически устойчиво независимо от членов выше первого порядка малости.

Эта теорема справедлива как при кратных так и простых корнях характеристического уравнения, но доказательство приведём для простых корней. Пусть часть корней комплексно – сопряженные, а часть вещественные. Для простоты записей будем считать, что имеется одна пара комплексно – сопряженных корней

$$\lambda_1 = \nu + i\mu, \quad \lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = \nu - i\mu,$$

которой соответствуют комплексно – сопряженные канонические переменные

$$Z_1 = u + i\nu, \quad Z_2 = \bar{Z}_1 = u - i\nu,$$

где u, ν - вещественные функции времени.

Вещественным корням $\lambda_3, \lambda_4, \dots, \lambda_n$ соответствуют вещественные переменные Z_3, Z_4, \dots, Z_n .

Составим функцию Ляпунова в виде:

$$V = \frac{(z_1 z_2 + z_3^2 + z_4^2 + \dots + z_n^2)}{2}. \quad (6.43)$$

Так как $z_1 z_2 = z_1 z_1 = u^2 + \nu^2$, то функция V является положительно определённой функцией вещественных переменных. Вычислим производную

$$\dot{V} = \frac{(\dot{Z}_1 Z_2 + Z_1 \dot{Z}_2)}{2} + Z_3 \dot{Z}_3 + \dots + Z_n \dot{Z}_n.$$

Подставим сюда \dot{Z}_k из уравнений (39)

$$\dot{V} = \frac{[(\lambda_1 Z_1 + Z_1)Z_2 + Z_1(\lambda_2 Z_2 + Z_2)]}{2} + Z_3(\lambda_3 Z_3 + Z_3) + \dots + Z_n(\lambda_n Z_n + Z_n)$$

или, группируя члены,

$$\dot{V} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)Z_1 Z_2}{2} + \lambda_3 Z_3^2 + \dots + \lambda_n Z_n^2 + Z^*,$$

где Z^* совокупность членов, содержащих Z_i в степени выше второй. Так как

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2\nu, \quad Z_1 Z_2 = u^2 + \nu^2,$$

то

$$\dot{V} = \nu(u^2 + \nu^2) + \lambda_3 Z_3^2 + \dots + \lambda_n Z_n^2 + Z^*. \quad (6.44)$$

По условию теоремы

$$\nu < 0, \quad \lambda_3 < 0, \dots, \quad \lambda_n < 0.$$

Отсюда следует, что квадратичная часть \dot{V} будет определённо – отрицательной функцией переменных u, ν, Z_3, \dots, Z_n , а вместе с ней при достаточно малых $|Z_k|$ определённо – отрицательной будет и производная \dot{V} независимо от членов высшего порядка. Таким образом, выполнены все условия теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости (§ 6.4), что является доказательством теоремы.

Теорема Ляпунова о неустойчивости по первому приближению. Если среди корней характеристического уравнения первого приближения найдётся хотя бы один с положительной вещественной частью, то невозмущённое движение неустойчиво независимо от членов выше первого порядка малости.

Пусть корень λ_1 комплексный с положительной вещественной частью, то есть

$$\lambda_1 = \nu + i\mu, \quad \lambda_2 = \lambda_1^* = \nu - i\mu, \quad \nu > 0.$$

Для упрощения доказательства остальные корни будем полагать простыми, вещественными и неравными нулю.

В качестве функции Ляпунова примем положительно определенную вещественную функцию

$$V = \frac{\nu(Z_1 Z_2 + \lambda_3 Z_3^2 + \dots + \lambda_n Z_n^2)}{2}. \quad (6.45)$$

Вычисляя её производную как в предыдущем случае, получим:

$$\dot{V} = \nu[\nu(u^2 + v^2) + \lambda_3^2 Z_3^2 + \dots + \lambda_n^2 Z_n^2] + Z. \quad (6.46)$$

Так как $\nu > 0$, а $\lambda_3, \dots, \lambda_n$ не равны нулю, то квадратичная часть производной будет определённо – положительной, а вместе с ней при достаточно малых $|Z_k|$ определённо - положительной будет и производная \dot{V} независимо от членов высшего порядка. Таким образом, выполнены все условия теоремы Ляпунова неустойчивости движения (§ 6.4), что является доказательством теоремы.

Доказанные две теоремы Ляпунова позволяют решать задачу об устойчивости движения по первому приближению без анализа нелинейных членов в двух случаях: вещественные части всех корней характеристического уравнения отрицательны; вещественная часть хотя бы одного корня положительна. В других случаях, которые называются особыми, необходимо рассматривать уравнение движения с нелинейными членами.

Рассмотрим несколько примеров исследования устойчивости невозмущённого движения $x = y = 0$.

Пример 6.6. Уравнения возмущённого движения имеют вид:

$$\dot{x} = \ln(4y + e^{-3x}), \quad \dot{y} = 2y - 1 + (1 - 6x)^{1/3}.$$

Разложив первые части в ряды по степеням x и y и ограничившись линейными членами, получим:

$$\dot{x} = -3x + 4y, \quad \dot{y} = -2x + 2y.$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -3 - \lambda & 4 \\ -2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

имеет корни: $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, то есть невозмущённое движение $x = y = 0$ устойчиво асимптотически.

Пример 6.7. Уравнения возмущённого движения имеет вид:

$$\dot{x} = -2x + x^2 + y^2, \quad \dot{y} = -x + 3y + 3x^2.$$

Характеристическое уравнение первого приближения

$$\begin{vmatrix} -2 - \lambda & 0 \\ -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$. Невозмущенное движение $x = y = 0$ неустойчиво.

Пример 6.8. Уравнения возмущенного движения имеет вид:

$$\dot{x} = -y + bx^3, \quad \dot{y} = x + by^3.$$

Характеристическое уравнение первого приближения

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$

имеет два чисто мнимых корня. Следовательно, судить об устойчивости по первому приближению нельзя, надо учитывать нелинейные члены. Это сделано в § 6.6.1.

6.6.4. Критерий Гурвица

Раскроем определитель, сгруппируем члены по степеням λ и приведём уравнение (35) к виду:

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \quad (6.47)$$

Не нарушая общности, положим $a_0 > 0$ (если это не так, то все уравнение можно умножить на -1).

Для суждения об устойчивости движения надо знать знаки вещественных частей всех корней характеристического уравнения. Наибольший интерес представляет решение этой задачи без непосредственного вычисления корней характеристического уравнения. В общем виде эта задача решена Раусом, а в виде более удобном для приложений – Гурвицем.

Из коэффициентов уравнения (47) построим следующую матрицу:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \dots 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \dots 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \dots 0 \\ \dots \dots \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots a_n \end{vmatrix}. \quad (6.48)$$

По главной диагонали стоят коэффициенты a_1, a_2, \dots, a_n , в нечётных строках стоят коэффициенты с нечётными индексами, в чётных – с чётными индексами. Если какой-то коэффициент отсутствует в уравнение (47), то в матрице он заменяется нулём.

Составим из матрицы (48) главные диагональные миноры

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = a_n \Delta_{n-1}. \quad (6.49)$$

Последнее равенство очевидно, если учесть, что в последнем столбце (48) все элементы, кроме a_n , равны нулю.

Теорема Гурвица. Для того чтобы все корни алгебраического уравнения (47) с вещественными коэффициентами и положительным коэффициентом при старшем члене имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры (21) были положительны

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \dots, \quad \Delta_n > 0. \quad (6.50)$$

Не останавливаясь на доказательстве этой чисто алгебраической теоремы, заметим, что из неё и теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению следует вывод: если при $a_0 > 0$ все миноры Гурвица положительны, то невозмущённое движение асимптотически устойчиво, независимо от членов выше первого порядка малости. Отметим также, что если хотя бы одно из неравенств (50) не выполнено, то это является достаточным признаком неустойчивости движения.

Далее отметим, что из формул Виета

$$\begin{aligned} a_1/a_0 &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n), \\ a_2/a_0 &= \lambda_1 \lambda_2 + \dots + \lambda_{n-1} \lambda_n, \\ a_n/a_0 &= (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \end{aligned}$$

непосредственно вытекают два важных следствия.

1. Для того чтобы при $a_0 > 0$ все корни уравнения (47) имели отрицательные вещественные части, необходимо, чтобы все коэффициенты были положительны:

$$a_i > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (6.51)$$

Эти условия необходимы, но не достаточны. Так в уравнении

$$\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda + 30 = 0$$

все коэффициенты положительны, но оно имеет два корня с положительными вещественными частями:

$$\lambda_1 = 1 + 3i, \quad \lambda_2 = 1 - 3i, \quad \lambda_3 = -3.$$

2. Если при $a_0 > 0$ хотя бы один из коэффициентов отрицателен, то среди корней уравнения (47) имеются такие, вещественные части которых положительны.

Рассмотрим частные случаи.

1. Система первого порядка имеет характеристическое уравнение

$$a_0 \lambda + a_1 = 0.$$

Условие асимптотической устойчивости при $a_0 > 0$

$$a_1 > 0. \quad (6.52)$$

2. Система второго порядка имеет характеристическое уравнение

$$a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0,$$

а условия Гурвица (50) примут вид:

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = a_1 a_2 > 0.$$

Отсюда получаем условия асимптотической устойчивости:

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0. \quad (6.53)$$

3. Для системы третьего порядка уравнение (47) имеет вид:

$$a_0 \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0.$$

Матрица (48) и условия Гурвица примут вид:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, \quad \Delta_3 = a_3 \Delta_2 > 0.$$

Пользуясь неравенствами (51) сразу получаем условия асимптотической устойчивости системы ($a_0 > 0$)

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0. \quad (6.54)$$

4. Для системы четвёртого порядка матрица (48) имеет вид:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}.$$

Условия Гурвица (50) примут вид:

$$a_1 > 0, \quad \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, \quad \Delta_3 = a_3 \Delta_2 - a_1^2 a_4 > 0, \quad \Delta_4 = a_4 \Delta_3 > 0.$$

При выполнении неравенств (51) условие $\Delta_2 > 0$ становится следствием условия $\Delta_3 > 0$. Поэтому условия асимптотической устойчивости системы четвертого порядка примет вид ($a_0 > 0$):

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_4 > 0, \quad (6.55)$$

$$\Delta_3 = a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 > 0.$$

В общем виде условия Гурвица очень удобны при $n \leq 4$. При $n > 4$ лучше пользоваться методом D - разбиения или критерием Михайлова. При больших n и когда характеристическое уравнение имеет форму определителя (раскрытие определителя большого порядка представляет собой трудоёмкую

процедуру), целесообразно использовать численные методы с использованием ПЭВМ.

Пример 6.9. Пусть движение описывается системой уравнений

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= y_1 - y_2 + \alpha y_3 + f_1(t), \\ \dot{y}_2 &= 2y_1 - 2y_2 - y_3 + f_2(t), \\ \dot{y}_3 &= y_1 + 2y_2 + f_3(t).\end{aligned}$$

Определить при каких значениях α это движение асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Возмущённое движение будет описываться системой

$$\dot{x}_1 = x_1 - x_2 + \alpha x_3, \quad \dot{x}_2 = 2x_1 - 2x_2 - x_3, \quad \dot{x}_3 = x_1 + 2x_2.$$

Характеристическое уравнение этой системы имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 & \alpha \\ 2 & -(2 + \lambda) & -1 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

или в развёрнутом виде:

$$\lambda^3 + \lambda^2 + (2 - \alpha)\lambda - 6\alpha - 3 = 0;$$

$$a_0 = a_1 = 1, \quad a_2 = 2 - \alpha, \quad a_3 = -6\alpha - 3.$$

Условие устойчивости имеет вид (54). Из второго и третьего условия имеем:

$$\alpha < 2, \quad \alpha < -0.5.$$

Из четвёртого условия следует $\alpha \geq -1$. Объединяя эти решения, получаем:

$$-1 < \alpha < -0.5.$$

7. УСТОЙЧИВОСТЬ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ

7.1. Параметрические колебания и резонансы в механических системах

Колебания называются параметрическими, если они вызываются изменением во времени параметров системы. Наиболее часто встречаются колебания с периодическим параметрическим возбуждением, которые описываются дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами.

Параметрические колебания часто встречаются в задачах динамики механизмов и машин. Вал, имеющий разные главные моменты инерции, может испытывать незатухающие поперечные колебания даже в том случае, когда он полностью уравновешен. Причиной является периодическое (при $\omega = const$) изменение изгибных жесткостей относительно неподвижных осей. Примером системы с периодически изменяющейся приведённой массой служит шатунно- кривошипный механизм. Параметрическое возбуждение колебаний возможно во многих системах, где движение передаётся через упруго деформируемые звенья, например в спарниках локомотивов.

Все эти колебания описываются дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами. Исследование устойчивости периодических движений в нелинейных системах, как правило, также приводит к линейным дифференциальным уравнениям с периодическими коэффициентами.

Уравнения параметрических колебаний линейных систем с конечным числом степеней свободы s в общем случае могут быть представлены в виде

$$A(t)\ddot{q} + B(t)\dot{q} + C(t)q = 0, \quad (7.1)$$

где $q(t)$ -матрица-столбец обобщённых координат; квадратная матрица $A(t)$ размерности s является положительно определённой для всех t . Все матрицы считаем непрерывными периодическими функциями времени с периодом T , а соответствующую частоту $\omega = 2\pi/T$ будем называть частотой возбуждения.

Вводя фазовые переменные

$$x_i = q_i, \quad x_{i+1} = \dot{q}_i,$$

систему (1) можно переписать в нормальной форме

$$\dot{x} = P(t)x, \quad (7.2)$$

где квадратная матрица

$$P(t) = \begin{vmatrix} 0 & E \\ -A^{-1}C & -A^{-1}B \end{vmatrix}$$

имеет размерность $n = 2s$, а E является единичной матрицей размерности s .

Уравнение (1) имеет тривиальное решение $q \equiv 0$, которое отвечает невозмущённому движению системы. Пусть коэффициенты уравнений зависят от некоторых параметров, характеризующих свойства параметрического воздействия и (или) системы. При некоторых значениях параметров решение $q \equiv 0$ может оказаться неустойчивым. Это означает, что имеет место парамет-

рическое возбуждение колебаний механической системы. Множества точек, соответствующих неустойчивости обычно образуют области в пространстве параметров, которые называются областями динамической неустойчивости. Если параметрическое воздействие периодическое и среди варьируемых параметров содержится его частоты, то особый интерес представляет нахождение частотных соотношений, при которых наблюдаются наиболее интенсивные параметрические колебания, называемые параметрическими резонансами.

Пусть коэффициенты системы (1) заданы с точностью до двух варьируемых параметров: частоты возбуждения ω и коэффициента возбуждения μ , который характеризует интенсивность параметрического возбуждения. Например, пусть

$$A = A_0 + \mu A_1(t), \quad B = B_0 + \mu B_1(t), \quad C = C_0 + \mu C_1(t),$$

где A_0, B_0, C_0 - положительно определённые симметричные матрицы; $A_1(t), B_1(t), C_1(t)$ - периодические матрицы периода $T = 2\pi/\omega$. При достаточно малой диссипации для такой системы область динамической неустойчивости на плоскости μ, ω имеет ряд клиньев, заостряющихся в сторону малых μ . Клинья примыкают к оси частот вблизи значений ω , находящихся в некоторых соотношениях с собственными частотами соответствующей консервативной системы, то есть положительными корнями ω_k уравнения

$$\det|C_0 - \omega^2 A_0| = 0. \quad (7.3)$$

Именно эти частотные соотношения соответствуют параметрическим резонансам [15].

Параметрические резонансы, возникающие вблизи частот

$$\omega = 2\omega_k/P \quad (k=1,2,\dots,s; \quad P=1,2,\dots), \quad (7.4)$$

называют простыми. В механических системах, для которых уравнение (1) распадается на независимые уравнения, описывающие изменение каждой обобщённой координаты в отдельности, возможны только простые резонансы. Параметрические резонансы, возникающие вблизи частот

$$\omega = |\omega_j \pm \omega_k|/P \quad (j,k=1,2,\dots,s; \quad j \neq k; \quad P=1,2,\dots), \quad (7.5)$$

называются комбинационными. Эти резонансы, обусловленные по парным взаимодействием форм колебаний, возможны только в системах, совершающих связанные колебания.

7.2. Устойчивость линейных систем с периодическими коэффициентами

Рассмотрим уравнение (2), в котором матрицу $P(t)$ запишем в общем виде:

$$P(t) = \begin{vmatrix} p_{11}(t) \dots p_{1n}(t) \\ \dots \dots \dots \\ p_{m1}(t) \dots p_{mn}(t) \end{vmatrix}. \quad (7.6)$$

Будем считать, что все элементы $p_{ij}(t)$, а следовательно и сама матрица имеет один и тот же период T :

$$P(t+T) = P(t).$$

Совокупность всех линейно независимых решений системы (2)

$$X_1 = \begin{vmatrix} X_{11} \\ \cdot \\ \cdot \\ X_{m1} \end{vmatrix}, \dots, X_n = \begin{vmatrix} X_{1n} \\ \cdot \\ \cdot \\ X_{mn} \end{vmatrix}$$

образуют фундаментальную систему решений, а матрица

$$X(t) = \begin{vmatrix} X_{11} \dots X_{1n} \\ \dots \dots \dots \\ X_{m1} \dots X_{mn} \end{vmatrix} = \|X_1, \dots, X_n\| \quad (7.7)$$

называется фундаментальной матрицей. Здесь первый индекс элемента X_{ki} обозначает номер функции, а второй – номер решения.

Общее решение системы (2) имеет вид:

$$x(t) = X(t)C, \quad (7.8)$$

где C – матрица – столбец размерности n .

Не нарушая общности, можно считать, что фундаментальная система решений удовлетворяет следующим начальным условиям:

$$X(0) = E,$$

где E – единичная матрица размерности $n \times n$.

Если $x_k(t)$ какое-либо решение уравнения (2), то в силу периодичности матрицы $P(t)$, $x_k(t+T)$ также будет решением уравнения (2). Его можно получить из общего решения соответствующим подбором постоянных C . Обозначив эту матрицу через A_k , найдём

$$x_k(t+T) = A_k X(t) \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Отсюда можно записать

$$X_k(t+T) = AX(t),$$

где A – постоянная матрица:

$$A = \|A_1 \dots A_n\| = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots \dots \dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (7.9)$$

Положив в последнем уравнении $t=0$ и учитывая начальные условия, получим:

$$X(T) = X(0)A = A.$$

Эта матрица называется матрицей монодромии (перехода), а её собственные значения – мультипликаторами системы (2). Они находятся из выражения

$$\det(A - SE) = \begin{vmatrix} a_{11} - S & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - S & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - S \end{vmatrix} = 0.$$

или соответствующего характеристического уравнения

$$S^n + \alpha_1 S^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} S + \alpha_n = 0. \quad (7.10)$$

В теории дифференциальных уравнений доказывается, что существуют решения $x_k(t)$, удовлетворяющие условию:

$$x_k(t+T) = S_k x_k(t) \quad (k=1, \dots, n). \quad (7.11)$$

Эти решения называются нормальными решениями. Они линейно независимы и могут быть приняты за фундаментальную систему решений. Нормальные решения, при простых корнях характеристического уравнения (10)

$$x_k(t) = e^{\alpha_k t} \varphi_k(t),$$

где $\varphi_k(t)$ - матрица – столбец периода T , а α_k - постоянные числа, называемые характеристическими показателями и определяемые по формуле

$$\alpha_k = T^{-1} \ln S_k.$$

Из вида нормальных решений вытекают следующие условия устойчивости системы (2), описывающей возмущённое движение.

Если модули всех мультипликаторов системы (2) меньше единицы, то невозмущённое движение $x_1 = \dots = x_n = 0$ асимптотически устойчиво. Если среди мультипликаторов есть хотя бы один, модуль которого больше единицы, то невозмущённое движение неустойчиво.

Если среди мультипликаторов есть такие, модули которых равны единице, а модули остальных меньше единицы, то невозмущённое движение устойчиво, хотя и не асимптотически.

Первые два вывода справедливы и при кратных мультипликаторах, а последний - только при корнях простых относительно элементарных делителей.

Известно, что свободный член характеристического уравнения (10) определяется равенством

$$\alpha_n = (-1)^n \det A.$$

В теории дифференциальных уравнений доказана формула Луивилля – Якоби:

$$\det X(t) = \det X(0) \exp \left[\int_0^t (p_{11} + \dots + p_{nn}) d\tau \right].$$

Отсюда при $t = T$ с учётом начальных условий, получим:

$$\det A = \exp \left[\int_0^T (p_{11} + \dots + p_{nn}) d\tau \right],$$

или

$$a_n = (-1)^n \exp \left[\int_0^T (p_{11} + \dots + p_{nn}) d\tau \right]. \quad (7.12)$$

Далее по теореме Виета имеем:

$$S_1 S_2 \dots S_n = (-1)^{-n} a_n = \exp \left[\int_0^T (p_{11} + \dots + p_{nn}) d\tau \right]. \quad (7.13)$$

Таким образом, для суждения об устойчивости необходимо иметь матрицу монодрамии. К сожалению, найти её аналитически трудно. Поэтому поступаем следующим образом. Задаём начальные условия

$$x_i = 1 \quad \text{при } i = k; \quad x_i = 0 \quad \text{при } i \neq k.$$

Интегрируя численно уравнение (2) от 0 до T, находим k – тый столбец матрицы монодрамии (9). Повторяя эту операцию при $k = 1, \dots, n$, получаем матрицу A. Далее находим её собственные значения (мультипликаторы) и выносим суждение об устойчивости. Для контроля точности вычислений используем соотношение (13).

Остановимся на случае, когда среди корней характеристического уравнения имеются корни, равные ± 1 . Из выражения (11) следует, что при $s = 1$ уравнение (2) имеет периодическое решение с периодом, равным периоду элементов матрицы (6) T. При $S = -1$ имеем:

$$\begin{aligned} x(t+T) &= -x(t); \\ x(t+2T) &= -x(t+T) = x(t). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при $s = 1$ уравнение (2) имеет периодическое решение, период которого вдвое больше периода коэффициентов исходного уравнения.

7.3. Устойчивость решений уравнений Хилла и Матье

Возмущённое движение многих механических систем с одной степенью свободы описывается уравнением Хилла

$$\ddot{X} + [\delta + \varepsilon \phi(t)] X = 0, \quad (7.14)$$

где $\phi(t)$ – периодическая функция периода T и частоты $\omega = 2\pi / T$.

Очевидно, что устойчивость невозмущённого движения при заданной частоте возбуждения зависит от параметров δ и ε . Так, например, при $\varepsilon = 0$ и $\delta > 0$ – движение устойчиво, а при $\varepsilon = 0$ и $\delta < 0$ – неустойчиво. Поэтому задачу об устойчивости решений уравнений Хилла можно поставить следующим образом: в плоскости параметров δ и ε найти области устойчивости и неустойчивости невозмущённого движения.

Установим прежде всего некоторые общие свойства решений уравнения Хилла. Полагая

$$X = X_1, \quad \dot{X} = X_2,$$

уравнение (14) можно представить в виде (2), где

$$P(t) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\delta - \varepsilon\phi(t) & 0 \end{vmatrix}$$

Так как $P_{11} = P_{22} = 0$, то из выражения (12) следует, $a_2 = 1$.

Тогда характеристическое уравнение (11) запишется в виде:

$$S^2 + aS + 1 = 0. \quad (7.15)$$

Для определения коэффициента a надо знать матрицу монодрамии. Так как найти эту матрицу в замкнутом виде мы не можем, то исследуем качественный характер решений.

Согласно формуле (13) $S_1 S_2 = 1$, причём

$$S_{1,2} = -a/2 \pm \sqrt{a^2/4 - 1}.$$

Рассмотрим возможные варианты.

1. $|a| > 2$. Оба корня будут вещественными и разными. Так как их произведение равно единице, то один из корней будет по модулю меньше единицы, а второй больше единицы. Из этого следует, что при $|a| > 2$ движение будет неперiodическим и неустойчивым.

2. $|a| < 2$. Тогда

$$S_{1,2} = -a/2 \pm i\sqrt{1 - a^2/4}.$$

Корни получились комплексно - сопряженные, а их модули будут равны единицы. Поэтому движение будет устойчивым.

3. $a = -2$. В этом случае $S_1 = S_2 = 1$ Как показано ранее одному из корней будет отвечать периодическое решение периода T . Можно показать, что второму корню отвечает возрастающее решение. Движение будет неустойчивым.

4. $a = 2$. При этом $S_1 = S_2 = -1$. Одному из корней будет отвечать периодическое решение периода $2T$. Само движение также будет неустойчиво.

Таким образом, движение устойчиво только при $|a| < 2$. Из случаев 3 и 4 следует, что на границе области устойчивости существует периодическое решение периода T и $2T$. Эти выводы дают возможность определить границы области устойчивости из условия существования периодических решений уравнения Хилла. Простой анализ показывает, что два решения одного периода ограничивают область неустойчивости, два решения разных периодов – области устойчивости.

Определение границ области неустойчивости покажем на частном, но имеющем большое значение случае, когда разложение функции $P(t)$ в ряд Фурье содержит только два слагаемых самой низкой частоты

$$P(t) = A_0/2 + A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t = A_0/2 + A \cos(\omega t + \gamma).$$

Тогда уравнение движения примет вид:

$$X + [A_0/2 + A \cos(\omega t + \gamma)]X = 0.$$

Переходя к безразмерному времени

$$\tau = \omega t + \gamma,$$

перепишем последнее уравнение в виде:

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} + (\delta + \varepsilon \cos \tau)X = 0, \quad (7.16)$$

где $\delta = A_0 / 2\omega^2$, $\varepsilon = A / \omega^2$.

Это уравнение является частным случаем уравнения Хилла и называется уравнением Матъе.

Решение уравнения (16) с периодом $2T$ ищем в виде:

$$X = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\tau}{2} + b_k \sin \frac{k\tau}{2} \right), \quad (7.17)$$

k – нечётно.

Подставляя это решение в (16), получим:

$$-\frac{1}{4} \sum k^2 \left(a_k \cos \frac{k\tau}{2} + b_k \sin \frac{k\tau}{2} \right) + \delta \sum \left(a_k \cos \frac{k\tau}{2} + b_k \sin \frac{k\tau}{2} \right) + (\delta + \varepsilon \cos \tau) a_0 / 2 + \frac{\varepsilon}{2} \sum \left\{ a_k \left[\cos(k+2) \frac{\tau}{2} + \cos(k-2) \frac{\tau}{2} \right] + b_k \left[\sin(k+2) \frac{\tau}{2} + \sin(k-2) \frac{\tau}{2} \right] \right\} = 0.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых аргументах тригонометрических функций, получаем две независимые однородные системы бесконечных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} (\delta - 1/4 + \varepsilon/2)a_1 + \varepsilon a_3 / 2 &= 0, \\ (\delta - 9/4)a_k + \varepsilon(a_{k-2} + a_{k+2}) / 2 &= 0 \quad (k = 3, 5, \dots); \\ (\delta - 1/4 - \varepsilon/2)b_1 + \varepsilon b_3 / 2 &= 0, \\ (\delta - 9/4)b_k + \varepsilon(b_{k-2} + b_{k+2}) / 2 &= 0 \quad (k = 3, 5, \dots). \end{aligned}$$

Для существования периодических решений определители этих систем должны быть равны нулю:

$$\begin{vmatrix} \delta - 1/4 \pm \varepsilon/2 & \varepsilon/2 & 0 & \dots \\ \varepsilon/2 & \delta - 9/4 & \varepsilon/2 & \dots \\ 0 & \varepsilon/2 & \delta - 25/4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0. \quad (7.18)$$

Решение уравнения (16) с периодом T ищем вновь в виде (17), полагая k чётным числом. Повторяя предыдущие процедуры, получим следующие определители:

$$\begin{vmatrix} \delta & \varepsilon & 0 & \dots \\ \varepsilon/2 & \delta - 1 & \varepsilon/2 & \dots \\ 0 & \varepsilon/2 & \delta/4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0; \quad (7.19)$$

$$\begin{vmatrix} \delta - 1 & \varepsilon/2 & 0 & \dots \\ \varepsilon/2 & \delta - 4 & \varepsilon/2 & \dots \\ 0 & \varepsilon/2 & \delta - 9 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0. \quad (7.20)$$

Определители (18-20) называются определителями Хилла и вычисляются как предел определителя порядка n при $n \rightarrow \infty$. Они устанавливают границы областей неустойчивости в плоскости параметров δ и ε . Определители (18) дают границы областей неустойчивости, ограниченные периодическими решениями с периодом $2T$, а определители (19) и (20) - с периодом T .

Таким образом, полностью определяются области неустойчивости уравнения Матье и в плоскости параметров δ и ε строятся кривые, называемые диаграммой Айнса – Стретта, которую можно найти в специальной литературе [12,15].

Приближенные результаты можно получить, рассматривая усечённые определители. Этот способ особенно эффективен при малых значениях ε ($\varepsilon \ll 1$). Покажем применение этого метода.

Для определения границ первой области неустойчивости рассмотрим определитель (18). Удерживая в нем верхний диагональный элемент, получим:

$$\delta = 1/4 \mp \varepsilon/2. \quad (7.21)$$

Для уточнения этой формулы из (18) возьмём определитель второго порядка и подставим в нижний диагональный элемент приближенное значение δ , определяемое по формуле (21)

$$\begin{vmatrix} \delta - 1/4 \pm \varepsilon/2 & \varepsilon/2 \\ \varepsilon/2 & -2 \mp \varepsilon/2 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим:

$$\delta = \frac{1}{4} \mp \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{8(1 \pm \varepsilon/4)} = 1/4 \mp \varepsilon/2 - (1 \mp \varepsilon/4)\varepsilon^2/8 = 1/4 \mp \varepsilon/2 - \varepsilon^2/8, \quad (7.22)$$

где последний член учитывает поправку второго приближения, которая мала при малых ε .

Для отыскания границ второй области неустойчивости следует обратиться к определителям (19) и (20). Рассматривая в (19) определитель второго порядка, получим:

$$\delta^2 - \delta - \varepsilon/2 = 0.$$

Отсюда имеем:

$$\delta = 1 + \varepsilon^2/2.$$

Для уточнения этой формулы из (19) возьмем определитель третьего порядка и подставим в нижний диагональный элемент предыдущее значение δ .

Тогда

$$(\delta^2 - \delta)(-3 + \varepsilon^2/2) - \delta\varepsilon^2/4 - (-3 + \varepsilon^2/2)\varepsilon^2/2 = 0.$$

Это уравнение с учётом малости ε можно переписать так:

$$\delta^2 - (1 - \varepsilon^2/4)(1 + \varepsilon^2/6)\delta - \varepsilon^2/2 \approx \delta^2 - (1 - \varepsilon^2/12)\delta - \varepsilon^2/2 = 0.$$

Решая это уравнение, получим:

$$\delta = 1 + 5\varepsilon^2/12.$$

Уравнение второй пограничной кривой аналогично находим из определителя (20). Рассматривая определитель второго порядка, получаем:

$$\delta_1 = 1 - \varepsilon^2/12 \text{ и } \delta_2 = 4 + \varepsilon^2/12.$$

Так как при $\varepsilon = 0$ границы области неустойчивости должны смыкаться, то второе решение отбрасываем. Применение определителя третьего порядка показывает, что дальнейшее уточнение этого результата при принятой точности расчётов (до членов порядка ε^2) невозможно. Таким образом, границы второй области неустойчивости описываются уравнениями

$$\delta = 1 - \varepsilon^2/12 \text{ и } \delta = 1 + 5\varepsilon^2/12. \quad (7.23)$$

Для построения третьей области неустойчивости нужно вернуться к определителю (18). Исходя из определителя второго порядка, получим:

$$\delta = 9/4 + 5\varepsilon^2/32.$$

Уточняя решение с использованием определителя третьего порядка, имеем

$$\delta = 9/4 + 3\varepsilon^2/32 \mp \varepsilon^2/128. \quad (7.24)$$

Как видно из формул (22-24) границы областей неустойчивости смыкаются между собой в точках $\varepsilon = 0$ и $\delta = k^2/4$, где k – целое число. Ширина областей неустойчивости Δ быстро убывает с увеличением номера области:

$$\Delta_1 = 2\varepsilon, \quad \Delta_2 = \varepsilon^2/2, \quad \Delta_3 = \varepsilon^3/64.$$

Наибольшую ширину имеет первая область называемая главной областью динамической неустойчивости. Если вести расчёты до членов порядка ε^3 , то уже третья область вырождается в линию.

Если в системе имеется демпфирование, то уравнение (16) примет вид:

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} + 2\Delta \frac{dX}{d\tau} + (\delta + \varepsilon \cos \tau)X = 0. \quad (7.25)$$

С помощью подстановки

$$X = e^{-\Delta\tau} z, \quad (7.26)$$

это уравнение приводится к виду:

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} + (\delta - \Delta^2 + \varepsilon \cos \tau)z = 0. \quad (7.27)$$

Это уравнение совпадает с уравнением Матье, если положить

$$\delta_1 = \delta - \Delta^2.$$

Если при заданных $\delta, \Delta, \varepsilon$ уравнение (27) определяет устойчивое движение, относительно z , то согласно (26), движение будет асимптотически устойчиво относительно переменной X .

7.4. Динамическая устойчивость распределённых систем

Под распределёнными системами понимают упругие механические системы с непрерывно распределёнными массой и жесткостью. Они имеют

бесконечное число степеней свободы. Параметрические колебания таких систем описываются дифференциальными уравнениями в частных производных с переменными во времени коэффициентами.

Большая часть задач параметрических колебаний упругих систем связана с теорией упругой устойчивости. Примером служат колебания упругого прямолинейного стержня, нагруженного периодической во времени продольной силой (рис. 7.1 а).

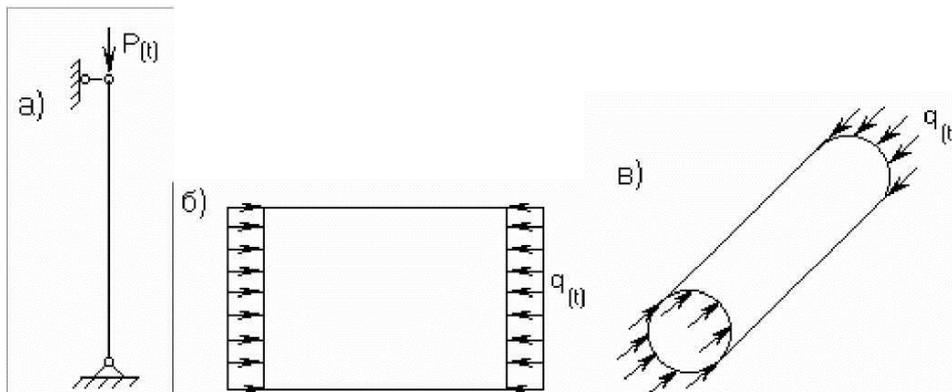


Рисунок 7.1

При такой нагрузке имеют место продольные колебания. Однако при определённых соотношениях между частотой внешней силы и собственными частотами стержня прямолинейная форма может оказаться динамически неустойчивой: малые поперечные возмущения приводят к интенсивным поперечным колебаниям. Такие же колебания могут возникнуть в пластинах и оболочках, нагруженных периодическими силами в срединной поверхности (рис. 7.1, б, в). Во всех задачах причиной параметрического возбуждения колебаний служит периодическое изменение во времени нагрузок, которые будучи приложены статически, могут вызвать потерю устойчивости путём разветвления форм равновесия.

7.4.1. Уравнения динамической устойчивости

Самые общие уравнения динамической устойчивости упругих систем могут быть получены из уравнений движения сплошной упругой среды [15, 16]. В предыдущих главах были получены уравнения статической устойчивости упругих систем, основанные на допущении, что при определении напряжено – деформированного состояния изменением геометрических размеров упругой системы в докритическом состоянии можно пренебречь. Пусть соотношения между частотами возбуждения и наименьшей собственной частотой в невозмущённом движении таково, что это допущение остаётся в силе. Тогда уравнения динамической устойчивости упругих систем могут быть получены из линеаризованных уравнений статической устойчивости добавлением сил инерций и заменой усилий невозмущённого состояния соответ-

вующими функциями времени. Если необходимо учитывать затухание колебаний, то в уравнения добавляет также диссипативные силы.

Уравнение динамической устойчивости прямолинейных стержней можно получить из уравнения (3.2) добавлением сил инерции

$$\rho A \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (EJ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}) - \frac{\partial}{\partial x} \left[N(x, t) \frac{\partial \omega}{\partial x} \right] = 0, \quad (7.28)$$

где ρ - плотность материала; A - площадь поперечного сечения.

Уравнение динамической устойчивости пластин постоянной толщины можно записать исходя из уравнения (4.23)

$$\rho h \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + D \nabla^4 \omega - P_z^{\phi} = 0, \quad (7.29)$$

где оператор ∇^4 для прямоугольных пластин определяется соотношениями (4.17), а фиктивная поперечная сила - выражениями (4.24) или (4.25).

Выражения для ∇^4 и P_z^{ϕ} для круглых пластин находятся из этих соотношений формальным преобразованием координат (4.32).

Уравнения динамической устойчивости цилиндрических оболочек в соответствии с уравнениями (5.22) примут вид:

$$\rho h \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + D \nabla^4 + \frac{\partial^2 \phi}{R \partial x^2} = P_z^{\phi}; \quad (7.30)$$

$$\nabla^4 \phi = \frac{Eh}{R} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2},$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{R^2 \partial \varphi^2}$; фиктивная поперечная сила P_z^{ϕ} определяется выражением (5.21), а функция усилий ϕ - соотношениями (5.17).

Если пользоваться полубезмоментной теорией оболочек, то для получения уравнения динамической устойчивости надо исходить из уравнения (5.33).

В общем виде уравнение динамической устойчивости упругих систем можно записать так:

$$A \ddot{U} + CU + G(t)U = 0, \quad (7.31)$$

где U - вектор перемещений; A и C - инерционный и упругий операторы; $G(t)$ - линейный оператор, учитывающий параметрические нагрузки в уравнениях равновесия. Эти операторы в развёрнутом виде приведены в таблице 7.1, в которой $A_1 = E/(1 - \mu)$; u, ϑ - перемещения в осевом и окружном направлениях; T_x^0, T_y^0, S^0 - начальные усилия в срединной поверхности пластины или оболочки, являющиеся функциями времени.

Если параметрические нагрузки заданы с точностью до двух множителей, один из которых α характеризует постоянную часть нагрузки, а второй β - составляющую, изменяющуюся во времени по закону $\Phi(t)$, то уравнение (31) можно переписать так:

$$A \ddot{U} + CU + [\alpha + \beta \Phi(t)]GU = 0. \quad (7.32)$$

Таблица 7.1

Система	AU	CU	GU
Стержень	$\rho A \omega$	$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (EJ \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2})$	$-\frac{\partial}{\partial x} [N(x,t) \frac{\partial \omega}{\partial x}]$
Пластина	$\rho h \omega$	$D \nabla^4 \omega$	$-\left[\frac{\partial}{\partial x} (T_x^0 \frac{\partial}{\partial x} + S^0 \frac{\partial}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y} (T_y^0 \frac{\partial}{\partial y} + S^0 \frac{\partial}{\partial x}) \right] \omega$
Цилиндрическая оболочка	$\rho h \omega$	$\frac{A_1}{R} (\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{R \partial \varphi}) + (D \nabla^4 + A_1 / R^2) \omega$	$-(T_x^0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + T_y^0 \frac{\partial^2}{R^2 \partial \varphi^2} + 2S^0 \frac{\partial^2}{R \partial \varphi \partial x}) \omega$

Функции перемещений в этих уравнениях должны удовлетворять граничным условиям задачи, которые имеют тот же вид, что в задачах статической устойчивости.

7.4.2. Сведение к системам обыкновенных дифференциальных уравнений

Поскольку непосредственный анализ устойчивости по уравнениям в частных производных затруднителен, то в прикладных расчётах их обычно сводят к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этого функции перемещений разлагают по некоторому базису с коэффициентами, являющимися функциями времени.

Если известны собственные формы колебаний $\varphi_k(x)$, то их можно принять в качестве базисных функции и записать:

$$U(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) \varphi_i(x), \quad (7.33)$$

где q_i - обобщённые координаты системы; x - координаты точек на оси стержня или срединной поверхности.

Так как собственные функции образуют полную систему функции данной задачи, то подстановка (33) в операторное уравнение (32) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i + [\alpha + \beta \phi(t)] \sum_{k=1}^{\infty} \bar{g}_{ik} q_k = 0 \quad (i=1,2,\dots). \quad (7.34)$$

Здесь

$$g_{ik} = \frac{\int (G \varphi_k) \varphi_i ds}{\int (A \varphi_i) \varphi_i ds}, \quad (7.35)$$

где интегрирование ведётся для стержня по его длине, а для пластин и оболочек по их площадям;

ω_i - собственные частоты незагруженной системы, равные собственным значениям операторного уравнения

$$(C - \omega^2 A)\varphi = 0. \quad (7.36)$$

Если собственные формы колебаний совпадают с формами статической потери устойчивости, то уравнения бесконечной системы (34) распадаются на независимые уравнения, каждое из которых описывает поведение одной из обобщённых координат

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 \left[1 + \frac{\alpha + \beta \varphi(t)}{P_{kp,i}}\right] q_i = 0 \quad (i=1,2,\dots), \quad (7.37)$$

где $P_{kp,i}$ - критическое значение параметрической нагрузки, соответствующее i -ой форме потери устойчивости.

Если формы собственных колебаний неизвестны или описываются сложными функциями, то их заменяют более простыми функциями, удовлетворяющими всем граничным условиям

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^n q_i(t) \psi_i(x). \quad (7.38)$$

Применяя далее метод Бубнова – Галеркина к уравнению (32), придём к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$A\ddot{q} + \{C + [\alpha + \beta \varphi(t)]G\}q = 0. \quad (7.39)$$

Здесь A , C , G представляют собой матрицы размерности $n \times n$, элементы которых вычисляются по формулам:

$$a_{ij} = \int (A \psi_j) \psi_i ds; \quad C_{ij} = \int (C \psi_j) \psi_i ds; \quad g_{ij} = \int (G \psi_j) \psi_i ds; \quad (7.40)$$

где интегрирование ведётся, как и в формуле (35).

При проведении практических расчётов берут только несколько первых членов ряда (33) или (38). Необходимое количество членов разложения устанавливается из физических соображений или принятой точности расчётов.

Таким образом, задача о динамической устойчивости распределённых систем сводится к анализу системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Для этого анализа используются методы, изложенные в параметрах 7.2 и 7.3. Области динамической неустойчивости для системы (37) строят путём совмещения областей неустойчивости, полученных для отдельных обобщённых координат. В общем случае их строят по результатам численного анализа усечённых систем, соответствующих бесконечным системам (34) или (39).

7.4.3. Динамическая устойчивость стержней

Рассмотрим стержень постоянного сечения, сжатый периодической силой

$$P(t) = P_0 + P_t \cos \theta t. \quad (7.41)$$

Будем считать, что система находится вне резонанса продольных колебаний. Уравнение динамической устойчивости (28) в этом случае примет вид:

$$\rho A \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + P(t) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0. \quad (7.42)$$

Пусть стержень шарнирно опёрт по концам. В соответствии с представлением (33) примем:

$$\omega = \sum f_n(t) \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad (n=1,2,\dots). \quad (7.43)$$

Подставляя это выражение в (42), получим:

$$\ddot{f}_n + \omega_n^2 [1 - P(t)/P_{kp,n}] f_n = 0,$$

где частота собственных колебаний

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}}, \quad (7.44)$$

а критическая сила, соответствующая n -ой форме потери устойчивости

$$P_{kp,n} = (n\pi/\ell)^2 EJ. \quad (7.45)$$

Как видим, формы колебаний оказались несвязанными. Это является следствием того, что здесь формы собственных колебаний и формы потери статической устойчивости совпадают. Этот случай называется особым случаем.

Введём обозначения: частота собственных колебаний стержня, нагруженного постоянной составляющей продольной силы

$$\Omega_n = \omega_n \sqrt{1 - P_0/P_{kp,n}}; \quad (7.46)$$

коэффициент возбуждения

$$\mu_n = P_t / 2(P_{kp,n} - P_0). \quad (7.47)$$

Так как для всех форм колебаний уравнения движения идентичны, то в дальнейшем опустим индекс “ n ” и перепишем эти уравнения в виде:

$$\ddot{f} + \Omega^2 (1 - 2\mu \cos \theta t) f = 0. \quad (7.48)$$

Если перейти к безразмерному параметру $\tau = \theta t$, то это уравнение совпадает с уравнением (16), если обозначить

$$\lambda = \theta / 2\Omega, \quad \delta = \Omega^2 / \theta^2 = 1/4\lambda^2; \quad \varepsilon = -2\mu\Omega^2 / \theta^2 = -\mu/2\lambda^2. \quad (7.49)$$

При не очень больших коэффициентах возбуждения ($\mu \leq 0.5$) границы первых трёх областей динамической неустойчивости могут быть определены теперь по формулам (21-24) путём замены (49):

I область - $\lambda = \sqrt{1 \pm \mu};$

II область - $\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{1 - 5\mu^2/3}$ и $\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \mu^2/3};$ (7.50)

III область - $\lambda = \frac{1}{3} \sqrt{1 - 9\mu^2/16 \pm 81\mu^3/64}.$

Сопоставляя эти формулы, видим, что ширина областей неустойчивости быстро уменьшается с увеличением номера области, а их границы смыкаются в точках

$$\mu = 0, \quad \lambda = 1/k.$$

Первые три области неустойчивости показаны на рисунке 7.2. Как видно из рисунка основную опасность представляет первая (главная) область динамической неустойчивости.

Рассмотрим теперь влияние линейного затухания на области неустойчивости стержней. Для этого в уравнения (48) введём диссипативный член

$$\ddot{f} + 2\varepsilon\dot{f} + \Omega^2(1 - 2\mu \cos \theta t)f = 0, \quad (7.51)$$

где $\varepsilon = \alpha/2\rho A$; α - коэффициент пропорциональности между силой сопротивления и скоростью перемещения.

Периодические решения этого уравнения с периодом $2T$ запишем в виде:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \sin \frac{k\theta t}{2} + b_k \cos \frac{k\theta t}{2} \right), \quad k - \text{нечётно} \quad (7.52)$$

Приравнявая нулю коэффициенты при одинаковых аргументах тригонометрических функций, получаем систему линейных однородных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} (1 + \mu - \lambda^2)a_1 - \mu a_3 - \Delta\lambda b_1 &= 0, \\ (1 - \mu - \lambda^2)b_1 - \mu b_3 + \Delta\lambda a_1 &= 0, \\ (1 - k^2\lambda^2)a_k - \mu(a_{k+2} + a_{k-2}) - k\Delta\lambda b_k &= 0, \\ (1 - k^2\lambda^2)b_k - \mu(b_{k+2} + b_{k-2}) + k\Delta\lambda a_k &= 0, \end{aligned}$$

где $k = 3, 5, \dots$; $\Delta = 2\varepsilon/\Omega$ - декремент затухания.

Расположим коэффициенты разложения (52) и эти уравнения в симметричном виде:

$$\dots, a_5, a_3, a_1, b_1, b_3, b_5, \dots$$

и приравняем нулю определитель полученной системы:

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots 1 - 9\lambda^2 & -\mu & 0 & -3\Delta\lambda & \dots \\ \dots -\mu & 1 + \mu - \lambda^2 & -\Delta\lambda & 0 & \dots \\ \dots 0 & \Delta\lambda & 1 - \mu - \lambda^2 & -\mu & \dots \\ \dots 3\Delta\lambda & 0 & -\mu & 1 - 9\lambda^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0. \quad (7.53)$$

Это уравнение позволяет получить границы нечётных областей неустойчивости.

Решения уравнения (51) с периодом T запишем в виде:

$$f(t) = b_0 + \sum_{k=2}^{\infty} \left(a_k \sin \frac{k\theta t}{2} + b_k \cos \frac{k\theta t}{2} \right), \quad k - \text{чётно}. \quad (7.54)$$

Повторяя предыдущие выкладки, теперь получаем следующее уравнение критических частот:

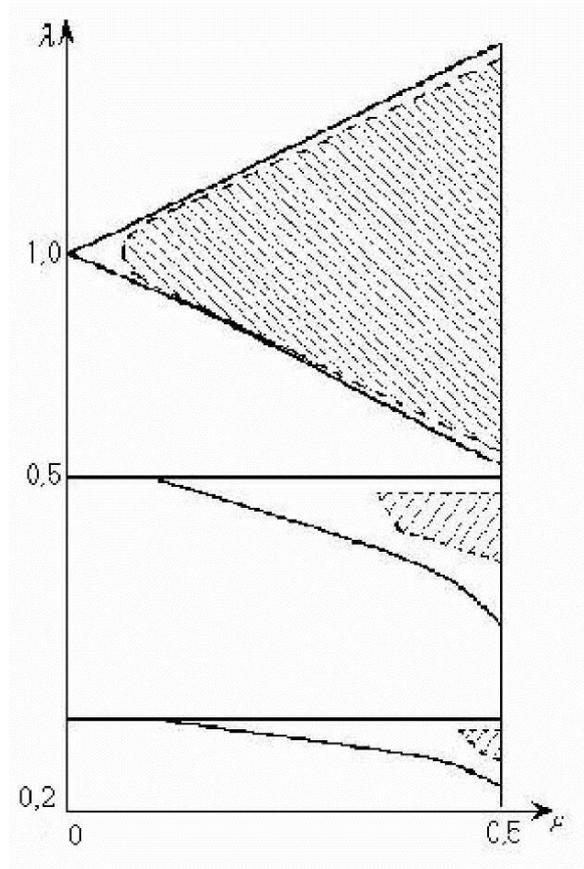


Рис. 7.2. Первые три области неустойчивости уравнения Маттье

$$\begin{vmatrix}
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots 1-16\lambda^2 & -\mu & 0 & 0 & -4\Delta\lambda & \dots \\
 \dots -\mu & 1-4\lambda^2 & 0 & -2\Delta\lambda & 0 & \dots \\
 \dots 0 & 0 & 1 & -\mu & 0 & \dots \\
 \dots 0 & 2\Delta\lambda & -2\mu & 1-4\lambda^2 & -\mu & \dots \\
 \dots 4\Delta\lambda & 0 & 0 & -\mu & 1-16\lambda^2 & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{vmatrix} = 0, \quad (7.55)$$

которое позволяет получить границы чётных областей неустойчивости.

Приближенный расчёт областей неустойчивости производят с использованием усечённых определителей, как это сделано в параграфе 7.3. Удерживая в определителе (53) выделенные центральные элементы, получим границы главной области неустойчивости

$$\lambda = \left[1 - \Delta^2 / 2 \pm \sqrt{\mu^2 - \Delta^2 + \Delta^4 / 4} \right]^{1/2}.$$

Учитывая, что Δ обычно мало ($\Delta \leq 0.02$), можно записать:

$$\lambda = \left(1 \pm \sqrt{\mu^2 - \Delta^2}\right)^{1/2}. \quad (7.56)$$

Для определения второй области неустойчивости приравняем нулю выделенный в (55) определитель из центральных элементов. В результате решения имеем:

$$\lambda = \frac{1}{2} \left[-\mu^2 \pm \sqrt{\mu^4 - \Delta^2(1 - \mu^2)} \right]^{1/2}. \quad (7.57)$$

Для определения границ последующих областей неустойчивости надо брать определители более высокого порядка.

Более точные формулы можно получить путём разложения функции $f(t)$ и частоты по степеням малого параметра $\mu_0 = 2\mu$:

$$f = f_0 + \mu_0 f_1 + \mu_0^2 f_2 + \dots, \\ \Omega^2 = \Omega_0 + \mu_0 \Omega_1 + \mu_0^2 \Omega_2 + \dots$$

В этом случае для первых трёх областей неустойчивости получаем следующие формулы:

$$\lambda^2 = \left(1 + \mu^2/8\right) \left(1 \pm \sqrt{\mu^2 - \Delta^2}\right), \\ \lambda^2 = \left[1 - 2\mu^2/3 \pm (1 - 4\mu^2/3) \sqrt{\mu^4 - 4\Delta^2(1 + 2\mu^2/3)} \right] / 4, \\ \lambda^2 = \left[1 - 9\mu^2/16 \pm (1 - 9\mu^2/8) \sqrt{(81\mu^3/64)^2 - \Delta^2(9 + 81\mu^2/16)} \right] / 9, \quad (7.58)$$

которые при $\Delta = 0$ совпадают с выражениями (50).

Из этих формул замечаем, что при учёте затухания потеря устойчивости возможна только в том случае, когда коэффициент возбуждения превышает некоторой величины μ_* , называемой критическим значением. Для каждой области неустойчивости значение μ_* находим из (56), (57) или (58), приравнявая нулю подкоренные выражения:

$$\mu_{*1} = \Delta, \quad \mu_{*2} \approx \sqrt{2\Delta}, \quad \mu_{*3} \approx 4\sqrt[3]{\Delta}/3.$$

Мы видим что, учёт затухания сдвигает области неустойчивости вверх и сужает их. Чем выше порядок области, тем значительнее стабилизирующее влияние затухания. На рисунке 7.2. первые три области неустойчивости с учётом затухания ($\Delta = 0,04$) показаны пунктирными линиями.

Таким образом, исследование динамической устойчивости шарнирно опёртого стержня приводит к несвязанным формам колебаний. Рассмотрим теперь динамическую устойчивость стержня, заделанного одним концом и шарнирно опёртого на другом конце. Формы потери статической устойчивости этого стержня определены в параграфе 3.1 и имеют вид:

$$\psi_n = \sin \gamma_n S - S \sin \gamma_n, \quad (7.59)$$

где $S = X/\ell$, а через γ_n обозначены корни характеристического уравнения

$$tg \gamma = \gamma.$$

Формы собственных колебаний имеют вид [14,17]

$$\varphi_n = \sin \beta_n S - (\sin \beta_n / sh \beta_n) sh \beta_n S, \quad (7.60)$$

где β_n корни характеристического уравнения

$$\operatorname{tg} \beta = th \beta.$$

Так как формы потери устойчивости и формы собственных колебаний не совпадают, то уравнения движения системы окажутся связанными.

Решение уравнения динамической устойчивости (42) представим в виде (33)

$$\omega(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \varphi_n(s). \quad (7.61)$$

Тогда уравнения (34) примут вид:

$$\ddot{f} + \omega_n^2 f_n - \frac{P(t)}{\rho A \ell^2} \sum_{j=1}^{\infty} g_{nj} f_j = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где

$$\omega_n^2 = \frac{EJ \beta_n^4}{\rho A \ell^4}; \quad \bar{g}_{nj} = \int_0^1 \varphi_j'' \varphi_n ds / \int_0^1 \varphi_n^2 ds.$$

Поделим эти уравнения на ω_n^2 и представим их в матричном виде:

$$C \ddot{f} + [E - (\alpha + 2\mu \cos \theta t) B] f = 0, \quad (7.62)$$

где

$$\alpha = P_0 \ell^2 / EJ; \quad \mu = P_t \ell^2 / 2EJ; \quad (7.63)$$

f – вектор – столбец обобщённых координат; E – единичная матрица; C – диагональная матрица с элементами

$$C_n = 1/\omega_n^2; \quad c_{nj} = \bar{g}_{nj} / \beta_n^4.$$

Решение (62) периода $2T$ ищем в виде (52). Тогда получаем следующий матричный определитель Хилла:

$$\begin{vmatrix} E - (\alpha \pm \mu)B - \theta^2 C / 4 & -\mu B & \dots \\ -\mu B & E - \alpha B - \theta^2 C / 4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0. \quad (7.64)$$

Решение периода T ищем в виде (54). Тогда получим следующие два определителя:

$$\begin{vmatrix} E - \alpha B - \theta^2 C & -\mu B & \dots \\ -\mu B & E - \alpha B - 4\theta^2 C & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0, \quad (7.65)$$

$$\begin{vmatrix} E - \alpha B & -2\mu B & \dots \\ -\mu B & E - \alpha B - \theta^2 C & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0. \quad (7.66)$$

Определим главные области неустойчивости. Для этого приравняем нулю первый диагональный квазиэлемент в определителе (64). Ограничившись двумя членами ряда (61), имеем:

$$\begin{vmatrix} 1 - \nu_{11} - \theta^2 / 4\omega_1^2 & -\nu_{12} & \dots \\ -\nu_{21} & 1 - \nu_{22} - \theta^2 / 4\omega_2^2 & \dots \end{vmatrix} = 0, \quad (7.67)$$

где $\nu = \alpha \pm \mu$.

Из этого определителя получаем следующее характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} \lambda^2 - \lambda \left[\beta_1^4 + \beta_2^4 - \nu (g_{11} + g_{22}) \right] + \\ + \left[\beta_1^4 \beta_2^4 + \nu^2 \left(\bar{g}_{11} \bar{g}_{22} - \bar{g}_{12} \bar{g}_{21} \right) - \nu \left(\bar{g}_{11} \beta_2^4 + \bar{g}_{22} \beta_1^4 \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (7.68)$$

где

$$\lambda = \theta^2 \rho A \ell^4 / 4EJ.$$

Используя таблицы интегралов от балочных функций [14,17], имеем:

$$\bar{G} = \begin{vmatrix} 11,154 & 4,288 \\ 4,276 & 42,816 \end{vmatrix}, \quad a \quad \beta_1^4 = 237,8, \quad \beta_2^4 = 2497,1.$$

Численные расчёты проведём, приняв $\alpha = 10, \mu = 1$. При $\nu = 9$ уравнение (68) примет вид:

$$\lambda^2 - 2250,2\lambda + 288889 = 0.$$

Тогда

$$\lambda_1 = 2113,54, \quad \lambda_2 = 136,68.$$

При $\nu = 11$ имеем:

$$\lambda_1 = 2028,54, \quad \lambda_2 = 114.$$

Границы первых двух главных областей неустойчивости (резонансов относительно первых двух частот) теперь можно записать так:

$$\left| \frac{21,35}{90,1} \right| \leq \theta \ell^2 \sqrt{\rho A / EJ} \leq \left| \frac{23,38}{91,95} \right|.$$

Формы потери статической устойчивости и формы собственных колебаний для этого стержня хотя и не совпадают, но близки, что следует из непосредственного расчёта по формулам (59) и (60). В таких случаях можно пренебречь связью обобщённых координат. Тогда, полагая в определителе (67) $\nu_{12} = \nu_{21} = 0$, имеем:

$$\lambda_1 = \beta_1^4 (1 - \nu) \epsilon_{11}; \quad \lambda_2 = \beta_2^4 (1 - \nu) \epsilon_{22}.$$

Результаты расчёта по этим формулам практически совпадают с предыдущим результатом.

Определим вторые области неустойчивости. Для этого берём первый диагональный квазиэлемент определителя (64)

$$\begin{vmatrix} 1 - \alpha \epsilon_{11} - \theta^2 / \omega_1^2 & -\alpha \epsilon_{12} \\ -\alpha \epsilon_{21} & 1 - \alpha \epsilon_{22} - \theta^2 / \omega_2^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Этот определитель совпадает с определителем (67), если ν заменить на α и принять:

$$\lambda = \theta^2 \rho A \ell^4 / E I.$$

Значения λ найдём из уравнения (68) заменой ν на α .

Если пренебречь связью обобщённых координат, то

$$\lambda_1 = \beta_1^4 (1 - \alpha \beta_{11}) = 126, \quad \lambda_2 = \beta_2^4 (1 - \alpha \beta_{22}) = 2070.$$

Для определения второй границы неустойчивости из определителя (65) возьмём матричный определитель второго порядка

$$\begin{vmatrix} \epsilon_1 & -\alpha \epsilon_{12} & -2\mu \epsilon_{11} & -2\mu_{12} \epsilon_{12} \\ -\alpha \epsilon_{21} & \epsilon_2 & -2\mu \epsilon_{21} & -2\mu \epsilon_{22} \\ -\mu \epsilon_{11} & -\mu \epsilon_{12} & \epsilon_1 - \theta^2 / \omega_1^2 & -\alpha \epsilon_{12} \\ -\mu \epsilon_{21} & -\mu \epsilon_{22} & -\alpha \epsilon_{21} & \epsilon_2 - \theta^2 / \omega_2^2 \end{vmatrix} = 0,$$

где $\epsilon_1 = 1 - \alpha \epsilon_{11}$, $\epsilon_2 = 1 - \alpha \epsilon_{22}$.

Если не учитывать связь между обобщёнными координатами, то надо в этом определителе положить $\epsilon_{12} = \epsilon_{21} = 0$. Тогда характеристическое уравнение примет вид:

$$\lambda^2 \epsilon_1 \epsilon_2 - \lambda \left[(\epsilon_2^2 - 2\mu^2 \epsilon_{22}^2) \epsilon_1 \beta_2^4 + (\epsilon_1^2 - 2\mu^2 \epsilon_{11}^2) \epsilon_2 \beta_1^4 \right] + [4\mu^4 \epsilon_{11}^2 \epsilon_{22}^2 - 2\mu^2 (\epsilon_1^2 \epsilon_{22}^2 + \epsilon_2^2 \epsilon_{11}^2) + \epsilon_1^2 \epsilon_2^2] \beta_1^4 \beta_2^4 = 0.$$

Учитывая, что

$$\epsilon_{11} = 0,047, \quad \epsilon_{22} = 0,017, \quad \epsilon_1 = 0,53, \quad \epsilon_2 = 0,829,$$

имеем:

$$\lambda^2 - 2192\lambda + 254540 = 0.$$

Отсюда

$$\lambda_1 = 2069, \quad \lambda_2 = 123.$$

Окончательно границы второй области неустойчивости определяются выражениями

$$\left| \frac{11,1}{45,48} \right| \leq \theta \ell \sqrt{\rho A / E I} \leq \left| \frac{11,2}{45,5} \right|.$$

Покажем применение метода Бубнова – Галеркина к исследованию динамической устойчивости стержней. Для рассматриваемого стержня в

качестве базовых функций примем формы потери статической устойчивости (59). Тогда уравнение (39) примет вид:

$$\frac{\rho A \ell^4}{EJ} A \ddot{f} + [C - (\alpha + 2\mu \cos \theta l) G] f = 0, \quad (7.69)$$

где

$$a_{ij} = \int_0^1 \psi_i \psi_j ds; \quad g_{ij} = - \int_0^1 \frac{d^2 \psi_i}{ds^2} \psi_j ds; \quad C_{ij} = \int_1^0 \frac{d^4 \psi_i}{ds^4} \psi_j ds.$$

После подстановки (59) и интегрирования получаем:

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{3 \sin 2\gamma_i}{4\gamma_i} + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{\gamma_i^2} \right) \sin^2 \gamma_i, & i = j; \\ \frac{\sin(\gamma_j - \gamma_i)}{2(\gamma_j - \gamma_i)} - \frac{\sin(\gamma_j + \gamma_i)}{2(\gamma_j + \gamma_i)} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\gamma_i^2} - \frac{1}{\gamma_j^2} \right) \sin \gamma_i \sin \gamma_j + \frac{\gamma_i^2 + \gamma_j^2}{\gamma_i \gamma_j} \cos \gamma_i \cos \gamma_j, & i \neq j; \end{cases}$$

$$g_{ij} = \begin{cases} \gamma_i^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sin 2\gamma_i}{4\gamma_i} - \frac{\sin^2 \gamma_i}{\gamma_i^2} \right), & i = j; \\ \gamma_i \cos \gamma_i \sin \gamma_j - \sin \gamma_i \sin \gamma_j, & i \neq j; \end{cases} \quad (7.70)$$

$$C_{ij} = \gamma_i^2 g_{ij}.$$

Сравнивая уравнение (69) с уравнением (62) и (64), для определения главной области неустойчивости получаем следующий определитель:

$$|C - \nu G - \lambda A| = 0. \quad (7.71)$$

Ограничившись двумя членами ряда (38) и учитывая, что

$$\gamma_1 = 4,493, \quad \gamma_2 = 7,725,$$

получаем:

$$\begin{vmatrix} 0,477\gamma_1^2(\gamma_1^2 - \nu) - 0,795\lambda & 0,323\lambda - 0,0017(\gamma_1^2 - \nu) \\ 0,323\lambda - 0,0017(\gamma_2^2 - \nu) & 0,4915\gamma_2^2(\gamma_2^2 - \nu) - 0,825\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда при $\nu = 9$ имеем:

$$\lambda^2 - 2310\lambda + 291238 = 0.$$

Решая это уравнение, находим: $\lambda_1 = 133,85$, $\lambda_2 = 2175,8$.

При $\nu = 11$ имеем:

$$\lambda_1 = 112,54, \quad \lambda_2 = 2041,86.$$

Границы первых двух главных областей неустойчивости теперь определяются соотношениями

$$\begin{vmatrix} 21,3 \\ 90,4 \end{vmatrix} \leq \theta \ell^2 \sqrt{\rho A / EJ} \leq \begin{vmatrix} 23,14 \\ 92,3 \end{vmatrix}.$$

Максимальная погрешность составляет 3,9%.

7.4.4. Динамическая устойчивость пластин и оболочек

Рассмотрим прямоугольную пластину, сжатую по контуру в направлении оси x периодической равномерно распределённой нагрузкой (рис. 4.3б)

$$q_{(t)} = q_0 + q_t \cos \theta t.$$

Тогда в уравнении динамической устойчивости (29)

$$P_z^\phi = -q_{(t)} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}.$$

Пусть края пластины шарнирно опёрты. В этом случае формы собственных колебаний и формы потери статической устойчивости совпадают и представление

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f_{nm} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \quad (7.72)$$

согласно (37) приводит к разделению форм колебаний:

$$\ddot{f}_{nm} + \omega_{nm}^2 \left(1 - \frac{q_0 + q_t \cos \theta t}{q_{nm}}\right) f_{nm} = 0, \quad n, m = 1, 2, \dots, \quad (7.73)$$

где частоты собственных колебаний определяются по формуле [5,17]

$$\omega_{nm} = \pi^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h} \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)}, \quad (7.74)$$

а критические нагрузки вычисляются по формуле (4.41)

$$q_{nm} = \pi^2 D \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)^2 \quad (7.75)$$

Уравнение (73) с помощью обозначений (46) и (47) для каждой формы колебаний сводится к уравнению Матье (48).

Теперь рассмотрим пластину шарнирно опёртую по трём краям, а по четвёртому краю ($y=b$) имеет скользящую заделку. Прогиб представим в виде:

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(t, s) \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad (7.76)$$

где безразмерная координата $s=y/b$.

Подставив (76) в уравнение (29), получим:

$$\frac{\rho h b^4}{D} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 Y_n}{\partial s^4} - 2H^2 \frac{\partial^2 Y_n}{\partial s^2} + \left[H^4 - H^2 b^2 \frac{q_{(t)}}{D} \right] Y_n = 0. \quad (7.77)$$

Решение этого уравнения представим в виде:

$$Y_n(t, s) = \sum_{m=1}^{\infty} f_{nm}(t) \psi_m(s), \quad (7.78)$$

где функция ψ_m должна удовлетворять условиям закрепления пластины вдоль оси y . В качестве базисных функций можно принять балочную функцию (60) или форму потери статической устойчивости (59).

Применяя к уравнению (77) метод Бубнова – Галеркина, получим:

$$\frac{\rho h \epsilon^4}{D} A \ddot{f} + [C + 2H^2 G + (H^2 - \epsilon^2 q_{(t)} / D) H^2 A] f = 0,$$

где элементы A , G , C вычисляются как в уравнении (69). Так, если исходить из выражения (59) и ограничиться двумя членами ряда (78), то по формулам (70) находим:

$$A = \begin{bmatrix} 0.795 & 0.323 \\ 0.323 & 0.825 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0.477\gamma_1^2 & -0.0017 \\ -0.0017 & 0.4915\gamma_2^2 \end{bmatrix}, \quad C_{ij} = \gamma_i^2 g_{ij}.$$

Введём обозначения:

$$\alpha = q_0 \epsilon^2 H^2 / D, \quad \mu = q_t \epsilon^2 H^2 / 2D, \quad B = H^4 A + 2H^2 G + C. \quad (7.79)$$

Матричные уравнения движения теперь можно записать в виде, аналогичном (69)

$$\frac{\rho h \epsilon^4}{D} A \ddot{f} + [B - (\alpha + 2\mu \cos \theta t) A] f = 0. \quad (7.80)$$

Тогда по аналогии с определителем (71) для расчёта главной области неустойчивости получаем следующий определитель:

$$|B - (\lambda + \nu) A| = 0, \quad (7.81)$$

где

$$\lambda = \rho h \epsilon^4 \theta^2 / 4D, \quad \nu = \alpha \pm \mu.$$

Дальнейший расчёт областей неустойчивости изложен в предыдущем параграфе.

В общем случае закрепления контуров пластины функцию прогиба представляют в виде произведения

$$\varphi_{nm} = X_{n(x)} Y_{m(y)},$$

где в качестве базисных функций применяются балочные функции или другие более простые функции, удовлетворяющие условиям закрепления на контурах. Матричное уравнение движения получают методом Бубнова – Галеркина.

Рассмотрим теперь цилиндрическую оболочку (рис. 5.3.), нагруженную равномерно распределённой периодической радиальной и осевой силой

$$P_{(t)} = P_0 + P_t \cos \theta t, \quad q_{(t)} = q_0 + q_t \cos \theta t.$$

Уравнение динамической устойчивости имеет вид (30), где

$$P_z^\phi = -q_{(t)} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - P_{(t)} \frac{\partial^2 \omega}{R \partial \phi^2}.$$

В случае свободного опирания торцов оболочки решения системы (30) ищем в виде (5.40)

$$\omega = f_{nm}(t) \sin n\phi \sin \frac{\pi m x}{\ell}, \quad \phi = B_{nm}(t) \sin n\phi \sin \frac{\pi m x}{\ell}. \quad (7.82)$$

Подставив эти выражения во второе уравнение системы (30), по методу Бубнова – Галеркина получим:

$$B_{nm} = -f_{nm} F h / R t,$$

где $\iota = (k^2 + n^2 / R^2)^2 / k^2$, $k = \pi m / \ell$.

Применяя метод Бубнова – Галеркина к первому уравнению системы (30), имеем:

$$\frac{\rho h}{D} \ddot{f}_{nm} + [k^2 (\iota + Eh / R^2 D \iota) - q_{(t)} k^2 / D - P_{(t)} n^2 / RD] f_{nm} = 0. \quad (7.83)$$

Это уравнение для каждой формы колебаний легко сводится к уравнению Матве.

При произвольном закреплении торцов оболочки уравнения динамической устойчивости получают из выражения (5.23), а решение ищут аналогично решению уравнения (5.45). На практике чаще применяют полубезмоментную теорию оболочек (уравнение (5.33)), а приближённые решения получают методом Бубнова – Галеркина.

7.5. Флаттер пластин и оболочек

7.5.1. Основные понятия

В некоторых механических системах потеря устойчивости или возбуждение незатухающих колебаний может быть связано с деформацией самой системы. Такие явления возникают, например, при взаимодействии упругой системы с газовым потоком. В этом случае при определённых условиях может произойти монотонное выпучивание упругой системы, называемое дивергенцией, или возникнут незатухающие вибрации, называемые флаттером. Эти колебания поддерживаются за счёт энергии газового потока и называются автоколебаниями.

Различают “классический флаттер”, сопровождающийся общей деформацией упругой системы (крыла, фюзеляжа, оперения) и “панельный флаттер”, характеризующийся местным выпучиванием участков обшивки крыла или фюзеляжа между подкрепляющими элементами. Условия возникновения панельного флаттера одинаковы для всех летательных аппаратов, в то время как классический флаттер зависит от конкретной геометрии упругой системы.

В настоящее время проблема флаттера становится особенно актуальной для авиационных конструкций в связи с увеличением размеров летательных аппаратов и повышением скорости полёта.

Определение аэродинамического давления при больших сверхзвуковых скоростях облегчается благодаря возможности применения так называемой поршневой теории. Согласно этой теории давление на упругую поверхность определяется выражением [1].

$$P = -P_0 H M V, \quad (7.84)$$

где $M = V / C_0$ - число Маха; V - скорость газового потока; P_0, C_0 - давление и скорость звука в невозмущённой газовой среде;

H - отношение теплоёмкости газа при неизменном давлении к теплоёмкости при постоянном объёме, которое для воздуха можно принять равным 1,4;

ν – угол поворота нормали к упругой поверхности в направлении газового потока.

Флаттер пластин и оболочек будем изучать в линейной постановке, полагая деформации малыми по сравнению с толщиной. Считаем, газовый поток с постоянной скоростью обтекает оболочку одной стороны.

7.5.2. Флаттер пластин

Рассмотрим прямоугольную пластину (обшивку), сжатую в направлении оси x постоянными сжимающими силами q (рис. 4.3) и обтекаемую в этом направлении с одной стороны газовым потоком. Сжимающие усилия могут быть вызваны общей деформацией конструкции или температурной деформацией обшивки. В качестве исходных зависимостей принимаем уравнение (29), в котором

$$P_z^{\phi} = T_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + P = -q \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - P_0 HM \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Рассмотрим сначала удлиненную пластину (рис. 4.3.а), испытывающую цилиндрический изгиб. Прогиб тогда не будет зависеть от координаты y и исходное уравнение примет вид:

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + P_0 HM \frac{\partial w}{\partial x} + q \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (7.85)$$

Пусть удлиненные края пластины шарнирно опёрты и могут смещаться в направлении оси x . Допустим, что в результате некоторых возмущений панель начала совершать малые гармонические колебания частоты ω около положения равновесия. Тогда прогиб w можно представить в виде:

$$w = W \sin(\omega t + \varphi). \quad (7.86)$$

Подставляя (86) в уравнение (85), получим:

$$X_{(x)} = DW^{IV} - \rho h \omega^2 W + P_0 HM W' + q W'' = 0. \quad (7.87)$$

Своеобразие задачи заключается в сочетании симметричных и антисимметричных форм изгиба [1]. Поэтому прогиб представим в виде:

$$W_{(x)} = f_1 \sin \frac{\pi x}{a} + f_2 \sin \frac{2\pi x}{a}. \quad (7.88)$$

Применяя метод Бубнова – Галеркина к уравнению (87), получим следующую систему:

$$\begin{cases} (D\pi^4 / a^3 - q\pi^2 / a - a\rho h\omega^2) f_1 - 8P_0 HM f_2 / 3 = 0, \\ 4P_0 HM f_1 / 3 + (D\pi^4 / a^3 - 2q\pi^2 / a - a\rho h\omega^2 / 2) f_2 = 0. \end{cases} \quad (7.89)$$

Если здесь положить $q=0$ и $P_0=0$, то получим известное выражение для частот собственных колебаний

$$\omega_n = (\pi n / a)^2 \sqrt{D / \rho h}.$$

Введём безразмерные параметры:

$$\bar{q} = \frac{q}{q_{кр}} = \frac{qa^2}{\pi^2 D}, \quad \bar{P} = \frac{P_0 HM a^3}{\pi^4 D}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega^2}{\omega_1^2}.$$

Тогда систему (89) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} (1 - \bar{q} - \bar{\omega})f_1 - 8\bar{P}f_2/3 = 0, \\ 8P f_1/3 + (16 - 4q - \omega)f_2 = 0. \end{cases}$$

Приравнявая нулю определитель системы, находим:

$$\bar{P} = \frac{3}{8} \sqrt{(\bar{\omega} + \bar{q} - 1)(16 - 4\bar{q} - \bar{\omega})}. \quad (7.90)$$

Мы получили зависимость между приведенной скоростью потока p безразмерной частотой и сжимающей силой.

Если здесь положить $\bar{\omega} = 0$, то получим зависимость между безразмерными критическими параметрами скорости потока и сжимающей силы:

$$\bar{P} = \frac{3}{4} \sqrt{(q-1)(4-q)}. \quad (7.91)$$

График этой зависимости показан на рисунке 7.3 (кривая 1) и имеет вид петли. Каждому значению \bar{p} соответствуют две равновесные формы с различным соотношением f_1 и f_2 . Устойчивой является лишь форма, относящаяся к левой ветви. При некоторой предельной величине P^* эти формы сливаются; очевидно, для больших значений ($P > P^*$) вообще не существует равновесных форм, комбинирующих одну и две полуволны синусоиды.

Минимизируя P по q , находим координаты предельной точки:

$$q_* = 2.5, \quad P_* = 1.125.$$

Если выбрать форму прогиба в виде комбинаций трёх и четырёх полуволн, то на этом графике получим следующую петлю, заключённую между значениями $\bar{q} = 9$ и $\bar{P} = 16$. Соответствующий максимум \bar{P} гораздо выше первого, поэтому с практической точки зрения достаточно рассмотреть первую петлю.

Интересно отметить, что в некоторой зоне значений M критическое напряжения сжатия для пластины, обтекаемой газовым потоком, оказывается больше, чем в отсутствие потока. Таким образом, газовый поток здесь оказывает стабилизирующее действие, “выпрямляя” пластину.

Далее положим в уравнении (90) $\bar{q} = 0$ (нет сжимающих нагрузок) и построим график зависимости \bar{p} от безразмерной частоты, который показан на рисунке 7.4 (кривая 1). Аналогичные кривые можно получить при любом $\bar{q} = const$. И здесь кривая имеет вид петли. Для каждого значения \bar{p} в пределах этой петли мы получим два различных типа колебаний, соответствующих симметричной и антисимметричной формам прогиба. При некотором предельном значении $P = P_\phi$ частоты этих колебаний совпадают, и в случае $\bar{P} > \bar{P}_\phi$ установившиеся колебания пластины становятся невозможными. Оче-

видно, в этом случае должно возникнуть неустановившееся движение типа флаттера, сопровождающееся возрастанием амплитуд при отсутствии демпфирования. Величина \bar{P}_ϕ является безразмерной критической скоростью потока. Для определения этой величины запишем условие

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{\omega}} = 0$$

и найдём $\bar{\omega} = (17 - 5\bar{q})/2$.

Подставляя это выражение в (90), находим:

$$\bar{P}_\phi = 9(5 - \bar{q})/16. \quad (7.92)$$

Эта прямая, определяющая границу флаттера показана на рисунке 7.3. Она касается петли статического выпучивания в точке с координатами

$$\bar{q} = 3.4, \quad \bar{P} = 0.9.$$

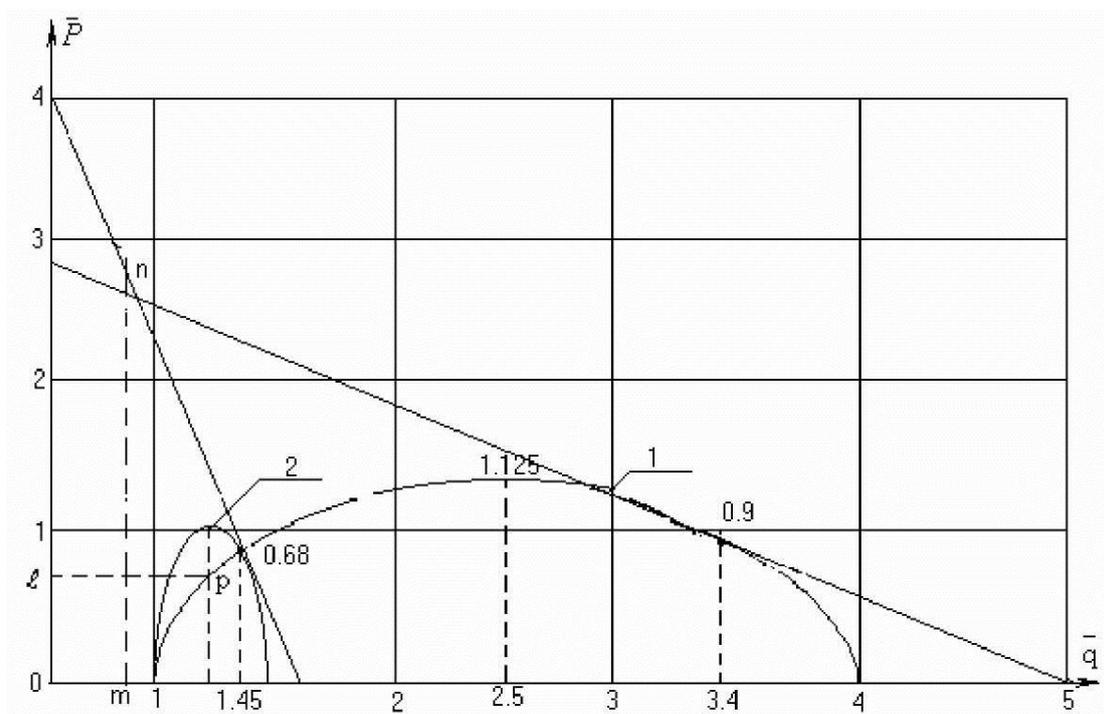


Рис. 7.3. Критическое сочетание параметров при $\bar{\omega} = 0$.

1. – удлиненная панель; 2. – квадратная пластина.

Анализ этого графика приводит к интересным выводам, касающимся поведения пластины при возрастании скорости потока. Пусть сжимающие усилия меньше критического значения. Тогда при $\bar{q} = const$ и возрастании \bar{p} мы будем двигаться вдоль некоторой линии mn . Пластина будет оставаться плоской вплоть до момента, соответствующего точке n ; здесь должен возникнуть флаттер. Предположим теперь $\bar{p} = const$, а параметр \bar{q} возрастает.

Тогда, двигаясь по линии lP мы приходим к точке Р, соответствующей дивергенции панели.

Следовательно, перемещаясь на графике из области плоских равновесных форм, мы можем пересечь в одном случае границу монотонной, а в другом – границу колебательной неустойчивости.

Обратимся к случаю пластины с конечным отношением сторон (рис. 4.3,б). Решая задачу в той же постановке, что и выше, вместо уравнения (87) получим уравнение в частных производных

$$X = D\nabla^4 W - \rho h \omega^2 W + P_0 HM \frac{\partial W}{\partial x} + q \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0. \quad (7.93)$$

Функция прогиба теперь зависит от координат X и Y и её аппроксимируем выражением

$$W_{(X,Y)} = W_{(X)} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (7.94)$$

где $W_{(X)}$ определяется выражением (88).

Применяя метод Бубнова – Галеркина к уравнению (93), получаем следующую систему:

$$\begin{aligned} \left[\pi^4 D \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 - q\pi^2 / a^2 - \rho h \omega^2 \right] f_1 - 8P_0 HM f_2 / 3a = 0, \\ 8P_0 HM f_1 / 3a + \left[\pi^4 D \left(\frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 - 4q\pi^2 / a^2 - \rho h \omega^2 \right] f_2 = 0. \end{aligned} \quad (7.95)$$

Если в первом уравнении положить $\omega = P_0 = 0$, то получим критическую силу, определяемую выражением (4.42) при $n=1$. С другой стороны, полагая в обоих уравнениях $q = P_0 = 0$, получаем первые две частоты собственных колебаний. Для квадратной пластины эти значения равны:

$$q_{kr} = \frac{4\pi^2 D}{b^2}; \quad \omega_1 = \frac{2\pi^2}{b^2} \sqrt{D / \rho h}; \quad \omega_2 = 5 \frac{\pi^2}{b^2} \sqrt{D / \rho h}.$$

Через ранее введённые параметры систему (95) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} (1 - q - \omega) f_1 - 2P f_2 / 3 = 0, \\ 2\bar{P} f_1 / 3 + (25/4 - 4\bar{q} - \bar{\omega}) f_2 = 0. \end{aligned}$$

Приравняв нулю определитель этой системы, найдём:

$$P = 1.5 \sqrt{(\omega + q - 1)(6.25 - 4q - \omega)}. \quad (7.96)$$

Критическое сочетание параметров при $\omega = 0$ и зависимость между скоростью потока и частотой колебаний пластины также показаны на рисунках 7.3 и 7.4 (кривые 2). Из условия

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{\omega}} = 0$$

находим $\bar{\omega} = 29/8 - 5\bar{q}/2$.

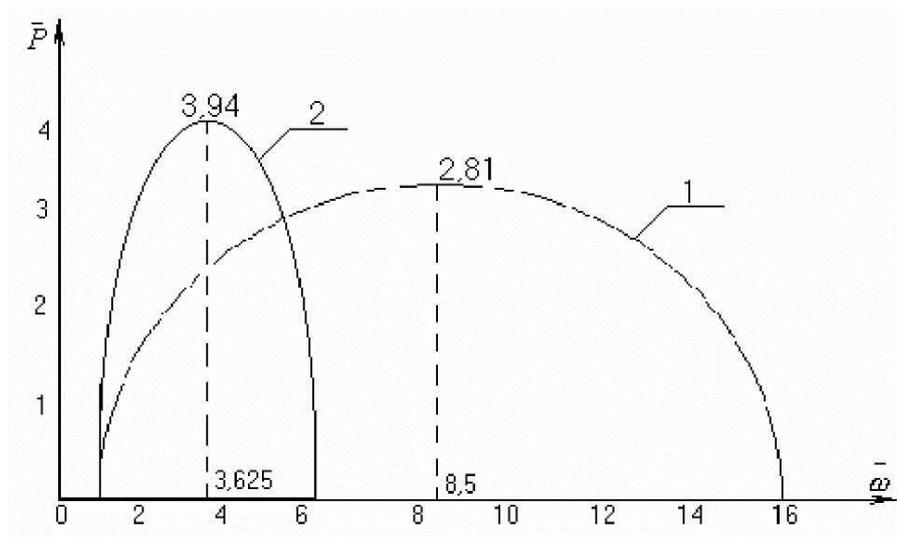


Рис. 7.4. График зависимости между скоростью потока и частотой колебаний пластины при $\bar{q} = 0$.

1. – удлиненная панель; 2. – квадратная пластина.

Подставляя это значение в (96), находим критическое значение безразмерной скорости потока, соответствующего флаттеру

$$\bar{P}_\phi = 2.25(1.75 - \bar{q}). \quad (7.97)$$

Эта прямая также показана на рисунках 7.3. Она касается петли статических равновесных форм в точке

$$\bar{P} = 0.675, \quad \bar{q} = 1.45.$$

7.5.3. Флаттер цилиндрических оболочек

Понятия дивергенции и панельного флаттера распространяются и на случаи монотонного выпучивания и автоколебаний цилиндрических оболочек при условии местной потери устойчивости. Рассмотрим шарнирно опёртую оболочку, обтекаемую с внешней стороны сверхзвуковым потоком газа, скорость которого направлена вдоль образующей. Кроме того, оболочка сжата осевыми усилиями q (рис. 5.3). Эта задача представляет интерес для описания поведения корпуса летательного аппарата.

В качестве исходных зависимостей примем линеаризованные уравнения устойчивости (5.22), в которых учтём ещё давление газового потока по поршневой теории (84). Тогда эти зависимости примут вид:

$$D\nabla^4 w + \frac{\partial^2 \phi}{R \partial X^2} + q \frac{\partial^2 w}{\partial X^2} + P_0 HM \frac{\partial w}{\partial X} = 0, \quad (7.98)$$

$$\nabla^4 \phi = \frac{Eh}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial X^2}.$$

С учётом сочетания симметричных и антисимметричных форм колебаний прогиб представим в виде:

$$w = \left(f_{m,n} \sin \bar{\alpha} X + f_{m+1,n} \sin \gamma X \right) \sin n\varphi, \quad (7.99)$$

где $\bar{\alpha} = m\pi/\ell$, $\gamma = (m+1)\pi/\ell$;

m и n – число полуволн вдоль образующей и в окружном направлении.

Решение второго уравнения (98) представим в виде:

$$\phi = (\phi_1 \sin \alpha X + \phi_2 \sin \gamma X) \sin n\varphi. \quad (7.100)$$

подставляя (99) и (100) во второе уравнение (98), находим:

$$\phi_1 = \frac{\bar{\alpha}^2 E h}{R[\bar{\alpha}^2 + (n/R)^2]} f_{m,n}, \quad \phi_2 = \frac{\gamma^2 E h}{R[\gamma^2 + (n/R)^2]} f_{m+1,n}.$$

Подставим (99) и (100) в первое уравнение (98) и применим к нему метод Бубнова – Галеркина. После введения следующих безразмерных параметров

$$\xi = f/h, \quad \alpha = Mh/\ell, \quad \bar{q} = qR/Eh^2, \quad (7.101)$$

$$K = \frac{m(m+1)}{1+2m} * \frac{48HP_0\ell^4}{\pi^4 E h^4} (1-\mu^2), \quad K_m = 12(1-\mu^2) \frac{\ell^2 m^2}{\pi^2 R h},$$

$$\omega_{m,n}^2 = \frac{m^2 \ell^2}{\pi^2} \eta_{m,n} + \frac{12(1-\mu^2)m^2 \ell^2}{\pi^2 R^2 h^2 \eta_{m,n}}, \quad \eta_{m,n} = \left[m^2 + \left(\frac{n\ell}{\pi R} \right)^2 \right] \left(\frac{\pi}{m\ell} \right)^2.$$

получаем систему двух алгебраических уравнений относительно безразмерных стрел прогиба

$$\left(\omega_{m,n}^2 - \bar{q}K_m \right) \xi_{m,n} - K\alpha \xi_{m+1,n} = 0, \quad (7.102)$$

$$\left(\omega_{m+1,n}^2 - \bar{q}K_{m+1} \right) \xi_{m+1,n} + K\alpha \xi_{m,n} = 0.$$

Приравнявая нулю определитель этой системы, найдём критическую силу сжатия как минимальный корень следующего уравнения:

$$\bar{q} = \frac{1}{2K_m K_{m+1}} \left[\omega_{m+1,n}^2 K_m + \omega_{m,n}^2 K_{m+1} \pm \sqrt{\left(\omega_{m+1,n}^2 K_m - \omega_{m,n}^2 K_{m+1} \right)^2 - 4K^2 \alpha^2 K_m K_{m+1}} \right]. \quad (7.103)$$

Если поток отсутствует ($\alpha = 0$), то

$$q_{m,n} = \frac{\omega_{m,n}^2}{K_m} = \frac{Rh\eta_{m,n}}{12(1-\mu^2)} + \frac{1}{Rh\eta_{m,n}} = \frac{\gamma_{m,n}}{12(1-\mu^2)} + \frac{1}{\gamma_{m,n}}. \quad (7.104)$$

Отсюда получаем выражение для критической силы, совпадающее с формулой (5.41).

Исходя из выражения (103), получаем различные ветви равновесных состояний, аналогичные изображенным на рисунке 7.3, причём, каждая такая петля соответствует переходу от m к $m+1$ полуволнам вдоль образующей.

Значения \bar{q}_* и α_* , соответствующие вершине петли, определяются из следующих формул:

$$\begin{aligned}\bar{q}_* &= 0.5 \left(\frac{\omega_{m+1,n}^2}{K_{m+1}} + \frac{\omega_{m,n}^2}{K_m} \right) = 0.5 \left(\bar{q}_{m+1,n} + \bar{q}_{m,n} \right), \\ \alpha_* &= \frac{\omega_{m+1,n}^2 K_m - \omega_{m,n}^2 K_{m+1}}{2K \sqrt{K_m K_{m+1}}} = \frac{\sqrt{K_m K_{m+1}}}{2K} \left(\bar{q}_{m+1,n} - \bar{q}_{m,n} \right) = \\ &= \frac{(1+2m)\pi^2 E(h/R)^3}{8HP_0(\ell/R)^2} \left(\bar{q}_{m+1,n} - \bar{q}_{m,n} \right).\end{aligned}\quad (7.105)$$

С учётом этих соотношений формулу (103) можно переписать так:

$$\bar{q} = \bar{q}_* \pm 0.5 \left(\bar{q}_{m+1,n} - \bar{q}_{m,n} \right) \sqrt{1 - (\alpha/\alpha_*)^2}.\quad (7.106)$$

На рисунке 7.5 приведены петли равновесных критических состояний оболочки при различных m и n . При расчётах принято:

$$\ell/R = 6, \quad R/h = 100, \quad H = 1.4, \quad E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad P_0 = 0.1 \text{ МПа}.$$

Как видим и здесь газовый поток играет стабилизирующую роль.

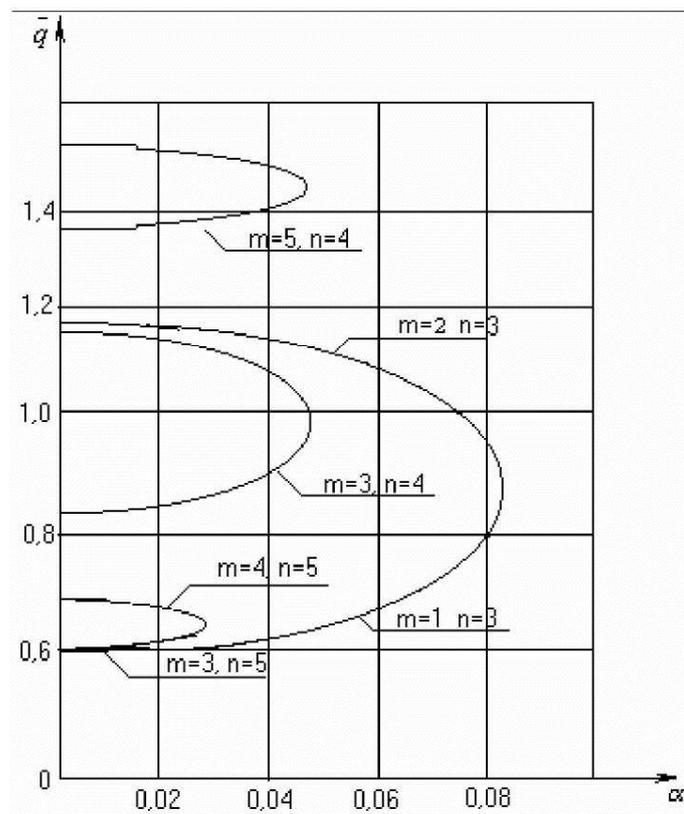


Рис. 7.5. Критическое сочетание параметров нагружения цилиндрической оболочки.

Перейдём к динамической задаче о флаттере. Пусть внутри оболочки содержится несжимаемая жидкость плотности ρ_L . В качестве исходных используем уравнения (98), в которые добавим силы инерции, диссипативные силы и давление жидкости. Тогда добавочная поперечная нагрузка будет равна:

$$P = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho_L \frac{\partial \psi}{\partial t} - \alpha \frac{\partial w}{\partial t},$$

где α - коэффициент пропорциональности между силами сопротивления и скоростью; ψ - потенциал скоростей жидкости.

Потенциал ψ должен удовлетворять уравнению [16]

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial \psi}{r \partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{r^2 \partial \varphi^2} = 0 \quad (7.107)$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{\partial w}{\partial t}, \quad \text{при } r=R. \quad (a)$$

Кроме того, функция ψ должно быть конечна при $r=0$.

Представляя функцию прогиба в виде первого члена ряда (99), найдём решение уравнения (107), удовлетворяющее второму граничному условию

$$\psi = A_{m,n}(t) I_n(\alpha r) \sin(\alpha X) \sin n\varphi, \quad (б)$$

где I_n – модифицированная функция Бесселя первого рода. Используя условие (а), определим

$$A_{m,n} = -\frac{1}{\alpha I_n'(\alpha R)} \frac{df_{m,n}}{dt}.$$

Подставляя $A_{m,n}$ в (б), находим

$$\psi = -\frac{R I_n(\lambda_m)}{\lambda_m I_n'(\lambda_m)} * \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (7.108)$$

где $\lambda_m = m\pi R / \ell$.

Давление жидкости на стенки оболочки теперь равно:

$$P_L = \rho_L \frac{\partial \psi}{\partial t} = m_L \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

где m_L - присоединённая масса жидкости, соответствующая форме колебания оболочки.

С учётом этого инерционный член заменим выражением $\rho h K_{m,n} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$,

где

$$K_{m,n} = 1 + \frac{m_L}{\rho h} = 1 + \frac{\rho_L R I_n(\lambda_m)}{\rho h \lambda_m I_n'(\lambda_m)}. \quad (7.109)$$

Уравнение движения оболочки теперь примут вид:

$$\rho h K_{m,n} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial w}{\partial t} + D \nabla^4 w + \frac{\partial^2 \phi}{R \partial X^2} + q \frac{\partial^2 w}{\partial X^2} + H P_0 M \frac{\partial w}{\partial X} = 0$$

$$\nabla^4 \phi = \frac{E h}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial X^2}.$$
(7.110)

Решения этих уравнений ищем вновь в виде (99) и (100), в которых стрелы прогиба считаем функциями времени. Повторяя предыдущие процедуры, получим следующие уравнения движения:

$$\xi_{m,n}^{**} + \varepsilon_{m,n} \xi_{m,n}^* + \frac{1}{K_{m,n}} \left[(1 - \bar{q} m^2 a) \xi_{m,n} - Q \xi_{m+1,n} \right] = 0,$$

где

$$\xi_{m+1,n}^{**} + \varepsilon_{m+1,n} \xi_{m+1,n}^* + \frac{1}{K_{m+1,n}} \left\{ \left[\bar{\omega}^2 - \bar{q} (m+1)^2 a \right] \xi_{m+1,n} - Q \xi_{m,n} \right\} = 0,$$
(7.111)

$$Q = K \alpha / \omega_{m,n}^2, \quad \varepsilon_{m,n} = \alpha / \rho h K_{m,n},$$

$$a = K_m / m^2 \omega_{m,n}^2, \quad \bar{\omega}_{m+1,n} = \omega_{m+1,n} / \omega_{m,n}.$$

Под $\varepsilon_{m,n}$ понимаются коэффициенты затухания колебаний, соответствующие данной форме колебаний. В дальнейшем примем:

$$\varepsilon_{m,n} = \varepsilon_{m+1,n} = \varepsilon.$$

Представляя решение (111) в виде:

$$\xi_{m,n} = F_{m,n} e^{\lambda t}, \quad \xi_{m+1,n} = F_{m+1,n} e^{\lambda t},$$
(7.112)

получим систему однородных алгебраических уравнений относительно $F_{m,n}$ и $F_{m+1,n}$. Приравняв нулю определитель системы, получим характеристическое уравнение:

$$\lambda^4 + 2\varepsilon \lambda^3 + (\theta_{m+1,n}^2 + \theta_{m,n}^2 + \varepsilon^2) \lambda^2 + \varepsilon (\theta_{m+1,n}^2 + \theta_{m,n}^2) \lambda + \theta_{m+1,n}^2 \theta_{m,n}^2 + Q^2 / K_{m,n} K_{m+1,n} = 0, \quad (7.113)$$

где

$$\theta_{m,n}^2 = (1 - \bar{q} m^2 a) / K_{m,n}, \quad \theta_{m-1,n}^2 = \left[\bar{\omega}_{m-1,n}^2 - (m-1)^2 \bar{q} a \right] / K_{m-1,n}.$$

Невозмущённая форма равновесия оболочки будет устойчивой, если все действительные части характеристических показателей отрицательны. Для исследования устойчивости применим критерий Рауса – Гурвица (6.50), который для уравнения (113) имеет вид (6.55). Из критерия (6.55) определим параметр α , соответствующий критической скорости флаттера

$$\alpha_{кр} = \frac{(1+2m) \sqrt{K_{m,n} K_{m+1,n}}}{2m(1+m)S} \sqrt{(\theta_{m+1,n}^2 - \theta_{m,n}^2)^2 + 2\varepsilon^2 (\theta_{m+1,n}^2 + \theta_{m,n}^2)},$$

где

$$S = \frac{48 H P_0 \ell^4 (1 - \mu^2)}{\pi^4 E h^4 \omega_{m,n}^2}.$$
(7.114)

Далее минимизируем $\alpha_{кр}$ по числу волн n , приняв $m=3$ (форма статического выпучивания). Результаты расчётов приведены на рисунке 7.6. При на-

личии осевых сжимающих сил ($\bar{q} > 0$) критическая скорость флаттера резко снижается, а при растягивающих усилиях ($\bar{q} < 0$) - возрастает. С ростом сжимающих сил уменьшается число волн в окружном направлении: от $n = 10$ при $\bar{q} = 0$ до $n = 5$ при $\bar{q} = 0,605$ (дивергенция).

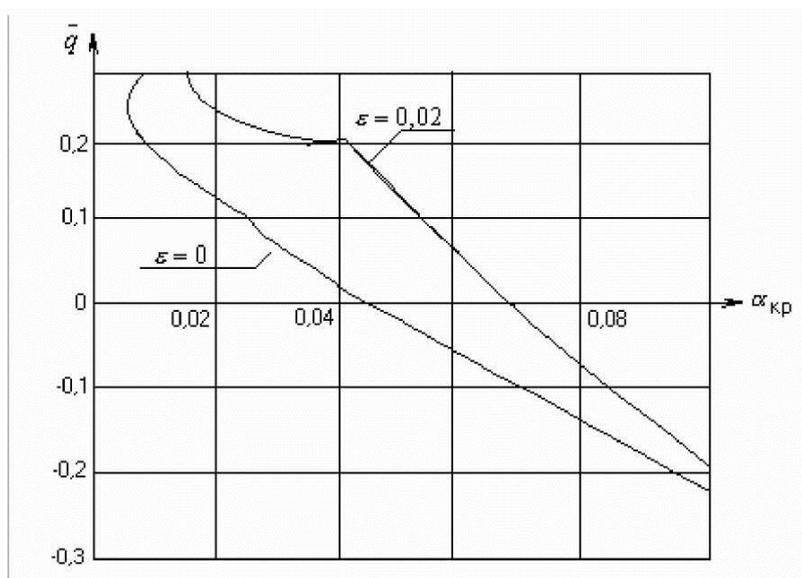


Рис. 7.6. График критических скоростей потока для цилиндрической оболочки.

Из рисунка также видно, что демпфирование увеличивает критическую скорость флаттера, то есть стабилизирует оболочку.

Как показывает анализ уравнения (114) и расчёты, приведённые в работе [16], учёт присоединённой массы жидкости приводит к некоторому повышению критической скорости флаттера.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. –984с.
2. Алфутов Н.А. Основы расчёта на устойчивость упругих систем. –М. : Машиностроение, 1978. –312с.
3. Киселёв В.А. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений. – М. : Стройиздат, 1980. –616с.
4. Фесик С.П. Справочник по сопротивлению материалов. –Киев : Будівельник, 1970. –308с.
5. Безухов Н.И., Лужин О.В., Колкунов Н.В. Устойчивость и динамика сооружений в примерах и задачах. –М. : Высшая школа, 1987. –264с.
6. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник под ред. И.А. Биргера, Я.С. Понавко. Т.3. –М. : Машиностроение, 1968. –567с.
7. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. Избранные труды. –М.: Наука, 1971. –808с.
8. Кан С.Н. Строительная механика оболочек. М.: Машиностроение, 1966. –508с.
9. Бояршинов С.В. Основы строительной механики машин. –М.: Машиностроение, 1973. –456с.
10. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. –М.: Машиностроение, 1977. –488с.
11. Кормишин А.В., Мяченков В.И., Фролов А.Н. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций. –М.: Машиностроение, 1975. –376с.
12. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. –М.: Наука, 1971. –312с.
13. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. –М.: Наука, 1973. –831с.
14. Бабаков И.М. Теория колебаний. –М.: Наука, 1968. –560с.
15. Вибрации в технике: Справочник. Т.1. /Под ред. В.В. Болотина. –М.: Машиностроение, 1978. –352с.
16. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. –М.: Наука, 1972. –432с.
17. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. –М.: Гостехиздат, 1956. –600с.