

ОПД.Р.03 СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА
РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ
НА УСТОЙЧИВОСТЬ И КОЛЕБАНИЯ
Учебное пособие

Рассмотрены классические методы строительной механики, предназначенные для расчета стержней и плоских рам на устойчивость. Представлены конечно-элементные алгоритмы решения задач устойчивости в линейно упругой постановке и с учетом конечных перемещений. Приведен порядок динамического расчета рам с конечным числом степеней свободы методами сил и перемещений. Изложены алгоритмы численного модального анализа и прямого интегрирования уравнения движения стержневых систем при силовом и кинематическом способах возбуждения колебаний. Теоретический материал пособия снабжен учебными примерами.

Пособие предназначено студентам высших учебных заведений, обучающимся по направлению подготовки дипломированных специалистов “Строительство”.

Оглавление

Предисловие	6
Глава 1. Устойчивость стержневых систем	8
1.1. Понятие о потере устойчивости 1-го и 2-го рода	8
1.2. Классические методы линейного анализа устойчивости стержней	10
1.2.1. Статический метод	10
1.2.2. Энергетический метод	16
1.3. Дифференциальное уравнение упругой линии при продольном изгибе стержня	18
1.4. Упругие единичные реакции сжато- и растянуто-изогнутой стержней	21
1.5. Расчет плоских стержневых систем на устойчивость методом перемещений	27
1.6. Вычисление параметра критической нагрузки в среде Maple	45
Глава 2. Метод конечных элементов в статике стержневых систем	49
2.1. Матрицы жесткости стержневого конечного элемента	49
2.2. Комбинированные балочные конечные элементы	56
2.3. Преобразование матриц жесткости при переходе к глобальным осям	59
2.4. Формирование результирующей системы уравнений стержневой системы	61
2.5. Линейный анализ устойчивости методом конечных элементов	64
2.6. Итерационный анализ устойчивости с применением шаговой процедуры метода конечных элементов	66
2.7. Примеры линейного анализа устойчивости методом конечных элементов	69

2.8.	Примеры деформационного расчета стержневых систем	77
Глава 3. Динамика стержневых систем		87
3.1.	Виды динамического воздействия на строительные сооружения	87
3.2.	Число динамических степеней свободы стержневой системы	88
3.3.	Уравнение движения и свободные колебания системы с одной степенью свободы	90
3.4.	Свободные колебания системы с одной степенью свободы с учетом силы сопротивления	94
3.5.	Динамический отклик системы с одной степенью свободы на частные виды внешних воздействий	96
3.5.1.	Действие внезапно приложенной силы	96
3.5.2.	Действие гармонической вынуждающей силы	98
3.6.	Динамический расчет плоских рам	101
3.6.1.	Свободные колебания рам с конечным числом степеней свободы	101
3.6.2.	Ортогональность собственных форм колебаний	105
3.6.3.	Примеры определения частот свободных колебаний многомассовых рам	106
3.6.4.	Расчет многомассовых рам на вынужденные колебания	113
3.6.5.	Итерационный алгоритм вычисления частот и форм свободных колебаний систем с конечным числом степеней свободы	117
3.7.	Уравнение движения в формулировке метода конечных элементов	121
3.8.	Матрица масс стержневого конечного элемента	125
3.9.	Анализ частот и мод свободных колебаний стержневых конструкций	127
3.10.	Примеры расчета частот и форм свободных колебаний	131

3.11.	Конечно-элементный анализ вынужденных колебаний	139
3.12.	Примеры расчетов на вынужденные колебания	143
3.13.	Численное моделирование сейсмического возбуждения колебаний	151
Заключение		163
Библиографический список		164
Приложения		165
Приложение 1.	Таблица значений реакций для сжато-изогнутых стержней	165
Приложение 2.	Таблицы реакций для балок, используемые при расчете рам по методу перемещений	166
Приложение 3.	Краткие сведения из матричной алгебры	168
Приложение 4.	Варианты заданий для самостоятельной работы	174
Приложение 5.	Примеры оформления файлов исходных данных в формате языка Фортран 90	180

Предисловие

*“Грубая сила, не подкреплённая мудростью,
гибнет под собственной тяжестью”.*
(Гораций, Оды, III, 4)

Рациональное проектирование зданий и сооружений требует проведения всесторонних исследований напряженно-деформированного состояния при различных сценариях нагружения. Кроме этого необходим анализ предельных состояний проектируемого объекта при действии всех опасных сочетаний нагрузок. Такой комплексный подход невозможен без глубоких знаний в области строительной механики и применения современных компьютерных технологий.

Согласно сложившейся практике преподавания строительной механики в “Южно-Российском государственном техническом университете (НПИ)” принято разделы, связанные с теорией расчета на устойчивость и динамическое воздействие, выделять в специальный курс, называемый “Устойчивость и динамика строительных систем”. Полученные при этом знания студенты используют при дальнейшем изучении специальных курсов: металлических, железобетонных, деревянных и других конструкций, а также в дипломном проектировании.

Большинство расчетных схем современных зданий и сооружений можно представить набором стержневых элементов, имеющих один доминирующий размер (длину). Поэтому в качестве объекта изучения в предлагаемом учебном пособии рассмотрены упруго деформируемые стержневые системы, представляющие собой инженерные конструкции, образованные из линейных элементов, идентичных балкам, колоннам, аркам, тросам и т. п. Размерность задачи напрямую зависит от количества узловых соединений стержневых элементов. Для расчета стержневых систем используются как классические методы сил и перемещений, так и численный метод, базирующийся на конечно-элементном моделировании. Последний метод обладает большими вычислительными возможностями и является основой современных вычислительных комплексов.

Метаморфоза сознания современного студента такова, что для него работа за компьютером намного привлекательнее работы с книгами, карандашом и калькулятором на письменном столе. Этим об-

стоятельством продиктовано стремление автора изложить материал пособия по большей части в виде руководства пользователя персонального компьютера с приложением необходимых теоретических данных, большого числа учебных примеров и справочных материалов. Общеизвестно, что только во время самостоятельной работы студент получает навыки исследователя, т. к. в процессе освоения темы в расчетном задании можно варьировать исходными данными и граничными условиями, достигая требуемого результата.

Используемое в пособии программное обеспечение ориентировано на среду Windows с применением компьютерных систем Maple и Matlab. Вычислительное ядро пакета прикладных конечно-элементных программ разработано на Фортране – Microsoft Fortran PowerStation версии 4.0. Расчетно-вычислительный комплекс построен по модульному принципу и позволяет выполнять расчеты плоских и пространственных стержневых систем при статическом и динамическом (включая модальный анализ) воздействии. Комплекс имеет открытую структуру, что позволяет при необходимости вносить изменения в вычислительную процедуру. Возможности комплекса ограничены размером оперативной памяти и быстродействием используемого компьютера.

При написании настоящего учебного пособия преследовались две цели:

- познакомить студентов с инженерными основами теории устойчивости и динамики на примере стержневых систем;
- описать численные алгоритмы анализа предельного состояния, ориентированные на использование метода конечных элементов.

Глава 1. УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

1.1. Понятие о потере устойчивости 1-го и 2-го рода

Оценка несущей способности сооружения помимо прочностного расчета должна включать вопросы устойчивости всей системы и отдельных ее элементов.

Устойчивость – это свойство сооружения оказывать сопротивление внешним воздействиям и самостоятельно восстанавливать исходную форму после прекращения силового воздействия.

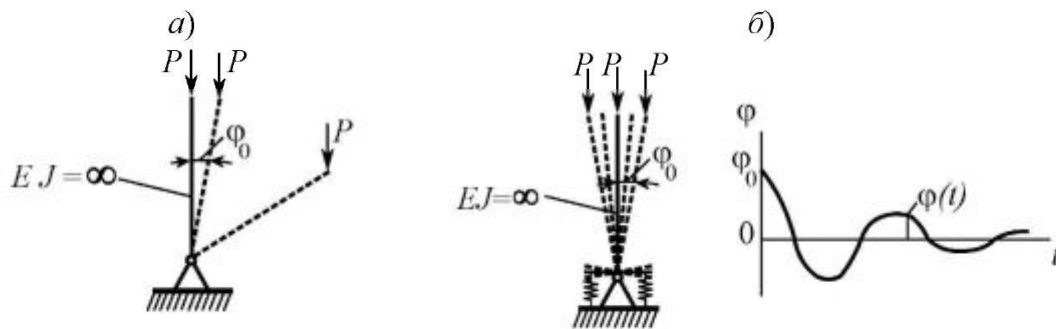


Рис. 1.1

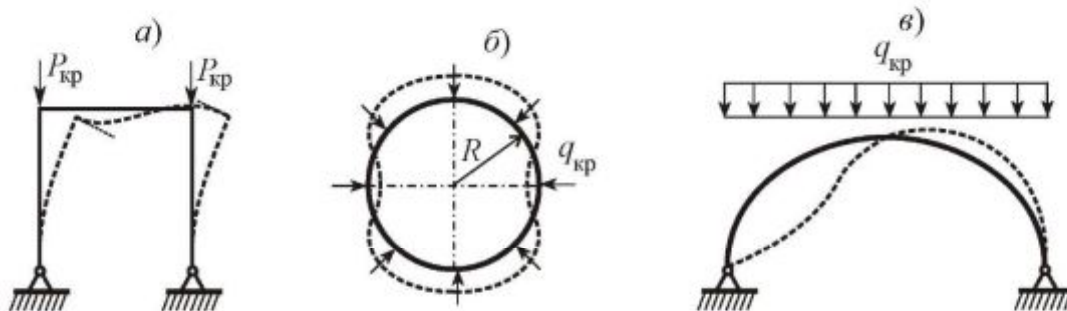


Рис. 1.2

Если центрально сжатая стойка с шарнирным закреплением на конце после малого возмущения φ_0 резко отклоняется в сторону, то исходное теоретически возможное равновесное состояние является неустойчивым (рис. 1.1, а).

Если прямолинейный центрально сжатый стержень с упругим закреплением на конце, выведенный из положения равновесия с помощью слабого возмущения φ_0 , поколебавшись, возвращается в первоначальное положение, то такое равновесное состояние является устойчивым (рис. 1.1, б).

В качестве примера на рис. 1.2 сплошными и штриховыми линиями соответственно показаны первоначальные формы равновесия и возможные состояния после потери устойчивости для плоской рамы (рис. 1.2, а), кольца (рис. 1.2, б) и арки (рис. 1.2, в).

При расчете стержневых систем на устойчивость принято внешнюю распределенную и сосредоточенную нагрузку приводить к узлам расчетной схемы и вектор узловых сил $\{P\}$ представлять в виде

$$\{P\} = \lambda \{f\},$$

где λ – параметр нагружения; $\{f\}$ – вектор внешней нагрузки. В дальнейшем будем рассматривать простое нагружение, когда все составляющие вектора $\{P\}$ изменяются пропорционально параметру λ .

В инженерной практике принято различать потерю устойчивости 1-го и 2-го рода [3]. Под потерей устойчивости 1-го рода или эйлеровой формой потери устойчивости принято понимать состояние системы, при котором происходит внезапный переход к качественно новой деформированной форме равновесия. Такой переход, называемый бифуркацией, может привести к разрушению конструкции. Поэтому соответствующая величина нагрузки характеризуется как критическая. Экспериментально установлено, что незадолго до бифуркации элементы сооружения начинают самопроизвольно вибрировать, что объясняется переходом части потенциальной энергии деформации в кинетическую энергию малых упругих колебаний.

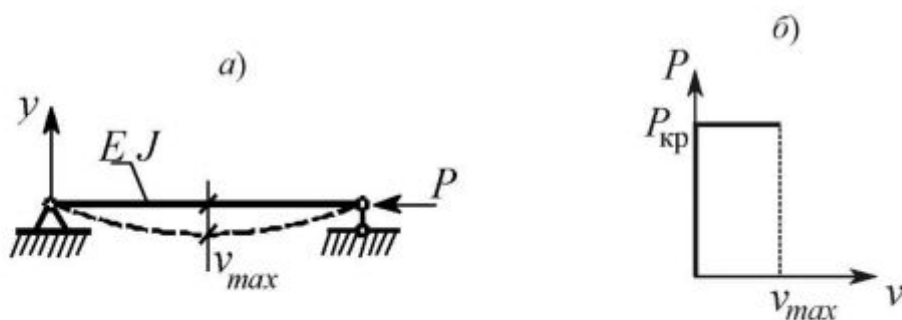


Рис. 1.3

Для иллюстрации эйлеровой потери устойчивости рассмотрим гипотетический шарнирно закрепленный идеально прямолинейный стержень, нагруженный центрально приложенной силой P (рис. 1.3, а). Будем постепенно увеличивать величину P при одновременном слабом кинематическом возмущении в центре стержня v_0 . При достижении $P = P_{кр}$ наступит такой момент, когда прогиб v

резко увеличится от v_0 до v_{max} ($v_{max} \gg v_0$). На рис. 1.3, б представлен идеализированный график нагрузка ~ прогиб ($P \sim v$) для данного центрально-сжатого стержня.

Потеря устойчивости 2-го рода характеризуется только изгибной формой равновесия и нелинейной зависимостью между параметром нагружения и перемещениями конструкции (в простейшем случае однопролетного стержня – между силой P и прогибом v). На рис. 1.4 показано, что в процессе квазистатического (медленного) нагружения внецентренно сжатого стержня (рис. 1.4, а) наступает момент, когда незначительное увеличение силы приводит к значительному прогибу (рис. 1.4, б). Состояние системы, при котором рост перемещений продолжается без увеличения нагрузки, называется потерей несущей способности. В строительной механике решение задач устойчивости 2-го рода называют расчетом по деформированной схеме или деформационным расчетом.

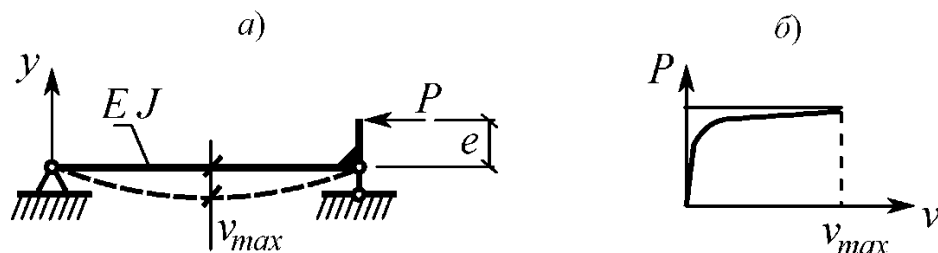


Рис. 1.4

Строительные нормы и правила регламентируют работу стержневых конструкций только в докритической стадии.

1.2. Классические методы линейного анализа устойчивости стержней

1.2.1. Статический метод

Рассмотрим прямолинейный идеально упругий центрально-сжатый стержень постоянного поперечного сечения в сочетании с различными схемами закрепления его концов (рис. 1.5, а, б, в). Схему закрепления стержня пока не конкретизируем. При значении силы $P < P_{кр}$ стержень находится в состоянии равновесия и сохраняет первоначально прямолинейную форму. В случае, когда величина си-

лы составляет $P \geq P_{кр}$, стержень при малейшем отклонении от продольной оси переходит в новое равновесное изогнутое состояние, смежное с первоначальным состоянием. Считаем, что изгиб стержня происходит в плоскости наименьшей жесткости, которой соответствует минимальный момент инерции сечения J . Для определения критической силы $P_{кр}$ составим уравнение равновесия стержня в изогнутом состоянии.

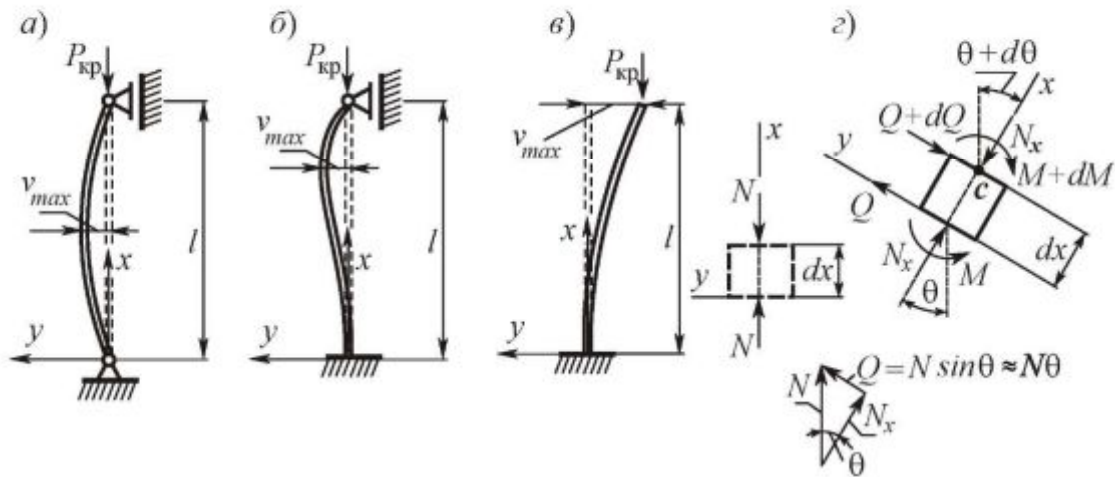


Рис. 1.5

Принимаем следующие допущения (рис. 1.5, z):

- считаем выделенный элемент стержня dx недеформируемым;
- поперечная сила Q возникает за счет проекции силы N на ось y ;
- в виду малых деформаций полагаем $\cos\theta \approx 1$, $\sin\theta \approx \theta$.

Отметим, что угол поворота θ нормального сечения стержня связан с прогибом v соотношением (курс “Сопrotивление материалов”)

$$\theta = -\frac{dv}{dx} = -v'.$$

Запишем уравнение равновесия для выделенного элемента стержня, находящегося в изогнутом состоянии:

$$\sum M_c = -N\theta dx + M - M - dM = 0.$$

Отсюда

$$-N\theta dx - dM = 0, \quad \frac{dM}{dx} + N\theta = 0, \quad \frac{dM}{dx} = Nv', \quad \frac{dM}{dx} = Q.$$

С другой стороны, проецируя поперечные силы на ось y , имеем:

$$Q - (Q + dQ) = N\theta - N(\theta + d\theta) = -Nv' + N(v' + v'' dx);$$

$$dQ = Nv'' dx; \quad \frac{dQ}{dx} = Nv''.$$

В результате устанавливаем зависимость вида

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = Nv''.$$

С учетом выражения для изгибающего момента (курс “Сопротивление материалов”)

$$M = -EJ \frac{d^2 v}{dx^2} = -EJv''$$

получим дифференциальное уравнение устойчивости стержня постоянной жесткости ($EJ = const$):

$$\frac{d^2}{dx^2}(EJv'') + Nv'' = 0,$$

$$v^{IV} + k^2 v'' = 0, \quad (1.1)$$

где $v^{IV} = \frac{d^4 v}{dx^4}$; $k = \sqrt{\frac{N}{EJ}}$.

Однородное дифференциальное уравнение (1.1) четвертого порядка справедливо при любых условиях закрепления торцов стержня.

Общее решение уравнения (1.1) имеет вид

$$v(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \sin kx + C_4 \cos kx, \quad (1.2)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – константы, определяемые из граничных условий задачи.

Напомним, что в курсе “Сопротивление материалов” для центрально-сжатого стержня было получено однородное дифференциальное уравнение второго порядка в виде

$$v'' + k^2 v = 0.$$

Особенность вывода данного уравнения заключалась в том, что при изгибе стержня вертикальные реакции в опорах считались равными нулю, т. е. поперечная сила Q не учитывалась.

Пример 1. Требуется определить выражение критической силы для стержня с шарнирными опорами на концах (рис. 1.5, а). В этом случае граничные условия имеют вид:

$$v(0) = 0; \left. \frac{d^2 v}{dx^2} \right|_{x=0} = v''(0) = 0; v(l) = 0; \left. \frac{d^2 v}{dx^2} \right|_{x=l} = v''(l) = 0. \quad (1.3)$$

В развернутом виде граничные условия (1.3) с учетом выражения (1.2) представим с помощью следующей однородной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} C_1 + C_4 = 0; \\ -k^2 C_4 = 0; \\ C_1 + C_2 l + C_3 \operatorname{sink} l + C_4 \operatorname{cos} k l = 0; \\ -C_3 k^2 \operatorname{sink} l - C_4 k^2 \operatorname{cos} k l = 0. \end{cases}$$

Условие ненулевого решения этой системы уравнений имеет вид

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -k^2 \\ 1 & l & \operatorname{sink} l & \operatorname{cos} k l \\ 0 & 0 & -k^2 \operatorname{sink} l & -k^2 \operatorname{cos} k l \end{bmatrix} = 0. \quad (1.4)$$

Это и есть уравнение устойчивости или характеристическое уравнение.

Вычислив определитель, получим выражение

$$lk^4 \operatorname{sink} l = 0.$$

Так как $lk^4 \neq 0$ по определению, то $\operatorname{sink} l = 0$. Таким образом, корни уравнения (1.4) определяются по формуле

$$kl = n\pi, \quad \sqrt{\frac{P}{EJ}} l = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Наименьшему корню характеристического уравнения k_{\min} соответствует критическое значение силы:

$$P_{\text{кр}} = P|_{n=1} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$

(значение корня $n = 0$ не имеет физического смысла).

Соответствующая форма потери устойчивости представляет собой полуволну синусоиды.

Пример 2. Требуется определить выражение эйлеровой крити-

ческой силы для стержня, жестко зашечлененного одним концом и шарнирно закреплененным на другом конце (рис. 1.5, б). В этом случае краевую задачу формализуем в виде:

$$v^{IV} + kv'' = 0;$$

$$v(0) = 0; \quad v'(0) = 0; \quad v(l) = 0; \quad v''(l) = 0.$$

Общее решение дифференциального уравнения – аналогично выражению (1.2).

Производные v' и v'' имеют вид

$$v' = C_2 + C_3k \cos kx - C_4k \sin kx, \quad v'' = -C_3k^2 \sin kx - C_4k^2 \cos kx.$$

Уравнение устойчивости принимает форму

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 1 & l & \sin kl & \cos kl \\ 0 & 0 & -k^2 \sin kl & -k^2 \cos kl \end{bmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, запишем $\Psi_1 + \Psi_2 = 0$, где $\Psi_1 = kl \cos kl$, $\Psi_2 = -\sin kl$.

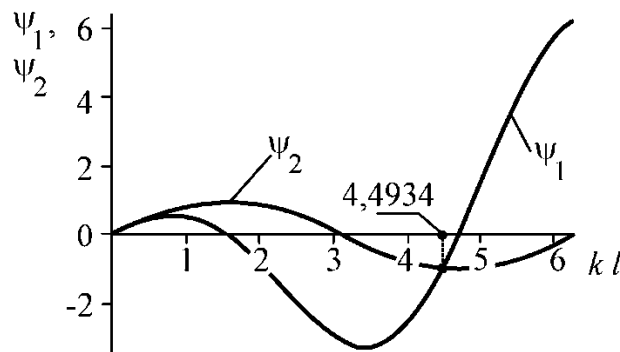


Рис. 1.6

Решение данного трансцендентного уравнения ищем в численном виде с помощью компьютерной математики системы Maple. В результате получим $kl = 4,4934$. На рис. 1.6 представлена графическая интерпретация полученного решения.

Из выражения $l \sqrt{\frac{P_{кр}}{EJ}} = 4,4934$ находим значение критической

силы:

$$P_{\text{кр}} = \frac{(4,4934)^2 EJ}{l^2} = \frac{20,191 EJ}{l^2}.$$

Пример 3. Требуется найти выражение критической силы для стержня, один конец которого жестко зашпемлен, а другой свободен (рис. 1.5, в). Полагаем, что сила, приложенная к свободному концу, после потери устойчивости стержня сохраняет свое направление. Граничные условия задачи:

$$v(0) = 0; \quad v'(0) = 0; \quad v''(l) = 0; \quad EJv'''(l) = -Pv'(l).$$

Граничное условие при $x = l$ представляет собой равенство поперечной силы Q и проекции продольной силы P на ось y . Отсюда следует

$$C_2 = C_3 = 0, \quad C_1 = -C_4; \quad \cos kl = 0.$$

Корни характеристического уравнения $kl = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \dots$. Тогда

где $\sqrt{\frac{P_{\text{кр}}}{EJ}} l = \frac{\pi}{2}$ и выражение для критической силы принимает вид

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}.$$

Полученные в примерах 1-3 выражения для $P_{\text{кр}}$ являются решениями линеаризованных уравнений частных задач устойчивости. Следует отметить, что основным недостатком статического метода состоит в отсутствии информации о перемещении v_{max} стержня после потери устойчивости. Как будет показано ниже, более полную информацию о закритическом поведении стержня можно получить, если использовать геометрически нелинейную постановку задачи.

Критическая сила для стержней, изображенных на рис. 1.5, а, б, в, может быть вычислена с помощью универсальной формулы Эйлера:

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ}{l_{\text{пр}}^2}, \quad l_{\text{пр}} = \mu l, \quad (1.5)$$

где $l_{\text{пр}}$ – приведенная длина стержня; μ – коэффициент приведения длины (впервые введен инженером-механиком Ф.С. Ясинским); l – фактическая длина стержня. Величина μ для рассмотренных схем имеет следующие значения: $\mu = 1$ (рис. 1.5, а); $\mu = 0,7$ (рис. 1.5, б); $\mu = 2$ (рис. 1.5, в).

Формулой Эйлера (1.5) можно пользоваться только в рамках закона Гука:

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} < \sigma_{\text{пц}}.$$

Здесь введены обозначения: $\lambda = l_{\text{пр}} / i$ – гибкость стержня; $i = \sqrt{J / F}$ – радиус инерции сечения стержня; $\sigma_{\text{пц}}$ – предел пропорциональности материала.

1.2.2. Энергетический метод

Рассмотрим энергетический вариант статического метода анализа устойчивости. Потенциальную энергию деформации сжато изогнутого стержня определяем по формуле

$$U = \int_0^l \int_F \sigma_x \varepsilon_x dF dx,$$

где σ_x и ε_x – соответственно напряжение и деформация вдоль оси стержня x ; dF – элементарная площадка поперечного сечения стержня. При отклонении стержня от состояния устойчивого равновесия происходит увеличение значения U . При этом критическая нагрузка находится как минимальная сила, с помощью которой можно отклонить стержень от положения равновесия при соблюдении условия $U = 0$. Величину ε_x представим в виде суммы:

$$\varepsilon = \varepsilon_{x0} + \varepsilon_{x1},$$

где $\varepsilon_{x0} = \frac{du}{dx}$ – составляющая деформации стержня до потери устойчивости (u – перемещение вдоль оси x); $\varepsilon_{x1} = -y \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2$ –

дополнительная изгибная деформация стержня, обусловленная потерей устойчивости (v – прогиб стержня).

Тогда вариацию потенциальной энергии δU , вызванную малым возмущением, можно также представить в виде суммы:

$$\delta U = \delta U_0 + \delta U_1,$$

где

$$\delta U_0 = \int_0^l \int_F \sigma_x \frac{d(\delta u)}{dx} dF dx;$$

$$\delta U_1 = - \int_0^l \int_F \sigma_x y \frac{d^2(\delta v)}{dx^2} dF dx + \int_0^l \int_F \sigma_x \frac{dv}{dx} \frac{d(\delta v)}{dx} dF dx.$$

Учитывая, что

$$N = - \int_F \sigma_x dF; \quad M = \int_F \sigma_x y dF = -EJ \frac{d^2 v}{dx^2},$$

запишем выражение для составляющей δU_1 в форме

$$\delta U_1 = EJ \int_0^l \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2(\delta v)}{dx^2} dx - N \int_0^l \frac{dv}{dx} \frac{d(\delta v)}{dx} dx. \quad (1.6)$$

Условие потери устойчивости стержня формулируем в виде равенства

$$\delta U_1 = 0. \quad (1.7)$$

Для вычисления значения критической силы необходимо задать аппроксимирующую функцию, описывающую изгибную форму равновесия стержня.

Рассмотрим шарнирно закрепленный стержень (рис. 1.5, а). Изогнутую ось стержня описываем уравнением (полуволна синусоиды)

$$v(x) = c \sin \frac{\pi x}{l},$$

где c – масштабный коэффициент.

Выполним необходимые символьные вычисления:

$$\frac{dv}{dx} = v' = \frac{c\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l}; \quad \frac{d^2 v}{dx^2} = v'' = -\frac{c\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l};$$

$$\int_0^l v' dx = \int_0^l \frac{c^2 \pi^2}{l^2} \cos^2 \left(\frac{\pi x}{l} \right) dx = \frac{c^2 \pi^2}{l^2} \frac{l}{2};$$

$$\int_0^l (v'')^2 dx = \int_0^l \frac{c^2 \pi^4}{l^4} \sin^2 \left(\frac{\pi x}{l} \right) dx = \frac{c^2 \pi^4}{l^4} \frac{l}{2}.$$

Подставив найденные выражения интегралов в (1.6) и учитывая условие (1.7), получим

$$\delta U_1 = EJ \frac{c^2 \pi^4}{l^4} \frac{l}{2} - N \frac{c^2 \pi^2}{l^2} \frac{l}{2} = 0.$$

Отсюда, выразив продольную силу N через $P_{кр}$, запишем

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E J}{l^2}.$$

Это выражение совпадает с результатом, ранее полученным статическим методом (пп. 1.2.1, пример 1).

Выполним аналогичные выкладки для консольно закрепленного стержня (рис. 1.5, в). Уравнение изогнутой оси в этом случае аппроксимируем функцией

$$v(x) = c \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right).$$

Тогда интегралы, входящие в выражение (1.6), принимают вид:

$$\int_0^l v' dx = \frac{1}{8} \frac{c^2 \pi^2}{l};$$

$$\int_0^l (v'')^2 dx = \frac{1}{32} \frac{c^2 \pi^4}{l^3}.$$

Подставив эти выражения в (1.6) и учитывая условие (1.7), получим формулу для определения критической силы $P_{кр} = \frac{\pi^2 E J}{4l^2}$. Как

видно данная запись совпадает с ранее полученным выражением (пп. 1.2.1, пример 3).

Следует отметить, что если выбрать иное выражение для аппроксимации перемещения $v(x)$, то вид выражения для $P_{кр}$ будет отличаться от эйлеровой формулы (1.5).

1.3. Дифференциальное уравнение упругой линии при продольном изгибе стержня

Рассмотрим стержень, сжатый продольной силой N в равновесном деформированном состоянии, обусловленном малыми поперечными перемещениями (рис. 1.7). Данная форма продольного изгиба стержня имеет место при эйлеровой потере устойчивости. Начало координат 0 помещаем на левом конце стержня, ось x совмещаем с упругой линией стержня до деформации. Подчеркнем, что до потери устойчивости на прямолинейный стержень действует только сжи-

мающая сила N . Как видно из рис. 1.7 после потери устойчивости левый конец стержня сместится на величину v_0 и повернется на угол v'_0 . Полагаем, что на левом конце стержня возникают сила H_0 и момент M_0 .

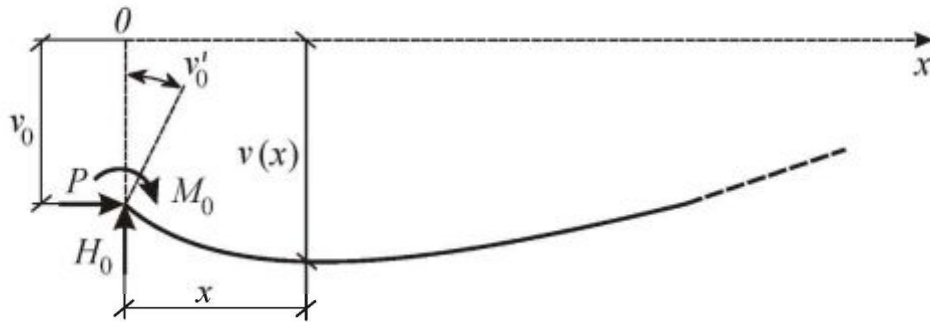


Рис. 1.7

Пренебрегая укорочением стержня, запишем выражение для изгибающего момента в сечении x

$$M(x) = N_0(v - v_0) + M_0 + H_0 x.$$

Дифференциальное уравнение продольного изгиба стержня имеет вид

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{1}{EJ} [N(v - v_0) + M_0 + H_0 x]. \quad (1.8)$$

Решение уравнения (1.8) ищем в следующей форме [1, 3]:

$$v(x) = v_0 - \frac{1}{k^2 EJ} (M_0 + H_0 x) + C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx),$$

где, как и ранее, $k = \sqrt{N/EJ}$.

Для определения постоянных C_1 и C_2 используем граничные условия в начале координат:

$$\text{при } x=0 \rightarrow \begin{cases} v = v_0, \text{ откуда } C_1 = \frac{M_0}{k^2 EJ}; \\ \frac{dv}{dx} = v'_0, \text{ откуда } C_2 = \frac{1}{k} \left(v'_0 + \frac{H_0}{k^2 EJ} \right). \end{cases}$$

В результате преобразований получим выражение для прогиба стержня $v(x)$:

$$v(x) = v_0 + \frac{v'_0}{k} \sin(kx) + \frac{M_0}{k^2 EJ} [\cos(kx) - 1] + \quad (1.9)$$

$$+ \frac{H_0}{k^3 EJ} [\sin(kx) - kx].$$

С помощью выражения (1.9) получим формулы для угла поворота $v'(x)$ и изгибающего момента в произвольном сечении x :

$$v'(x) = v'_0 \cos(kx) - \frac{M_0}{k EJ} \sin(kx) + \frac{H_0}{k^2 EJ} (\cos(kx) - 1); \quad (1.10)$$

$$M(x) = -EJ v'' = v'_0 k EJ \sin(kx) + M_0 \cos(kx) + \quad (1.11)$$

$$+ H_0 \frac{\sin(kx)}{k}.$$

Приведенные выражения $v(x)$, $v'(x)$ и $M(x)$ являются основой для вывода формул упругих реакций сжато-изогнутых стержней, которые в свою очередь используются при расчете плоских рам на устойчивость методом перемещений.

Если стержень растянут силой $N_{\text{раст}}$, то выражения (1.9), (1.10) и (1.11) принимают вид*:

$$v(x) = v_0 + \frac{v'_0}{\beta} sh(\beta x) + \frac{M_0}{\beta^2 EJ} [1 - ch(\beta x)] + \quad (1.12)$$

$$+ \frac{H_0}{\beta^3 EJ} [\beta x - sh(\beta x)];$$

$$v'(x) = v'_0 ch(\beta x) - \frac{M_0}{\beta EJ} sh(\beta x) + \frac{H_0}{\beta^2 EJ} [1 - ch(\beta x)]; \quad (1.13)$$

$$M(x) = -v'_0 \beta EJ sh(\beta x) + M_0 ch(\beta x) + \frac{H_0}{\beta} sh(\beta x). \quad (1.14)$$

Здесь введены обозначения: $\beta = \sqrt{N_{\text{раст}} / EJ}$; $sh(\beta x)$, $ch(\beta x)$ – гиперболический синус и косинус. Выражения (1.12), (1.13) и (1.14) используется при анализе устойчивости 1-го рода сжато-растянутых стержней.

* Киселев В.А. Строительная механика: Спец. курс. Динамика и устойчивость сооружений. Учебник для вузов – М.: Стройиздат, 1980. – 616 с.)

1.4. Упругие единичные реакции сжато- и растянуто-изогнутых стержней

Наиболее универсальной методикой определения критической нагрузки для плоских стержневых систем является анализ деформированного состояния в форме метода перемещений. При этом, сохраняя общий подход к формированию канонической системы уравнений равновесия, коэффициенты матрицы упругих реакций в сжатых стержнях от единичных смещений будем определять на основании уравнений (1.9), (1.10) и (1.11).

В качестве примеров рассмотрим расчетные схемы сжатых стержней, показанные на рис. 1.8. Граничные условия для стержня с жестко заземленными концами (рис. 1.8, а) имеют следующий вид:

$$\text{при } x=0 \rightarrow \begin{cases} v_a = 0; \\ v'_a = 1, \end{cases} \quad \text{при } x=l \rightarrow \begin{cases} v_b = 0; \\ v'_b = 0. \end{cases}$$

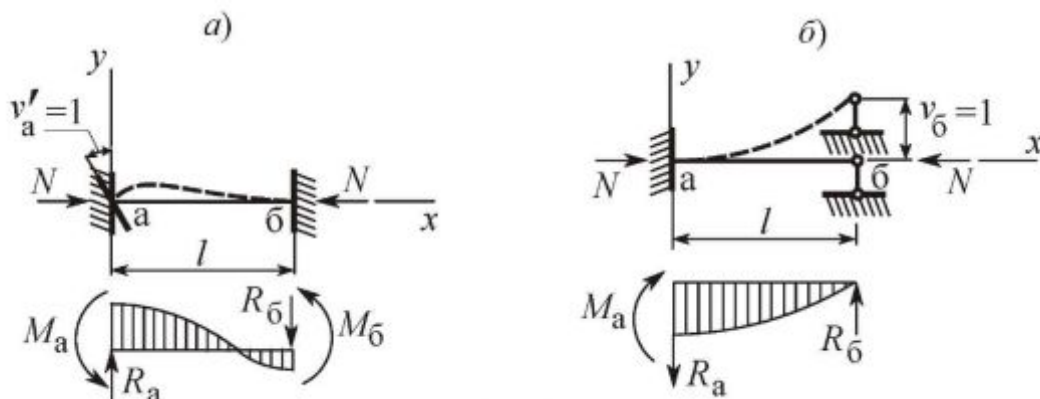


Рис. 1.8

На основании уравнений (1.9) и (1.10) при $x=l$ составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\sin v}{k} + \frac{\cos v - 1}{k^2 E J} M_a + \frac{\sin v - v}{k^3 E J} R_a = 0; \\ \cos v - \frac{\sin v}{k E J} M_a + \frac{\cos v - 1}{k^2 E J} R_a = 0, \end{cases}$$

где безразмерный параметр продольной нагрузки [1, 3]

$$v = l \sqrt{N / E J} = l k.$$

$$\text{Отсюда } M_a = \frac{k E J (v \cos v - \sin v)}{2 \cos v + v \sin v - 2}, \quad R_a = - \frac{k^2 E J (\cos v - 1)}{2 \cos v + v \sin v - 2}.$$

Подставляя полученные выражения для M_a и R_a в формулу (1.11) и учитывая, что $v'_a = 1$, запишем

$$M_{\bar{6}} = \frac{k E J (\mathbf{v} - \sin \mathbf{v})}{2 \cos \mathbf{v} + \mathbf{v} \sin \mathbf{v} - 2}.$$

Вводя обозначение для погонной жесткости стержня $i = (E J) / l$, представим полученные выражения для реакций M_a , $M_{\bar{6}}$ и R_a в компактном общепринятом виде [1, 3]:

$$M_a = 4i\varphi_2(\mathbf{v}); \quad M_{\bar{6}} = 2i\varphi_3(\mathbf{v}); \quad R_a = R_{\bar{6}} = \frac{6i}{l}\varphi_4(\mathbf{v}),$$

где специальные функции

$$\varphi_2(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v}(\mathbf{v} \cos \mathbf{v} - \sin \mathbf{v})}{4(2 \cos \mathbf{v} + \mathbf{v} \sin \mathbf{v} - 2)}; \quad \varphi_3(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v}(\sin \mathbf{v} - \mathbf{v})}{2(2 \cos \mathbf{v} + \mathbf{v} \sin \mathbf{v} - 2)};$$

$$\varphi_4(\mathbf{v}) = \frac{1}{3} [2\varphi_2(\mathbf{v}) + \varphi_3(\mathbf{v})].$$

Граничные условия для стержня с комбинированным закреплением концов (рис. 1.8, б) имеют вид:

$$\text{при } x = 0 \rightarrow \begin{cases} v_a = 0; \\ v'_a = 0. \end{cases} \quad \text{при } x = l \rightarrow \begin{cases} v_{\bar{6}} = 1; \\ M_{\bar{6}} = 0. \end{cases}$$

Подставляя значение $x = l$ в выражения (1.9) и (1.11) запишем систему уравнений для определения M_a и R_a :

$$\begin{cases} \frac{\cos \mathbf{v} - 1}{k^2 E J} M_a + \frac{\sin \mathbf{v} - \mathbf{v}}{k^3 E J} R_a = 1; \\ \cos \mathbf{v} M_a + \frac{\sin \mathbf{v}}{k} R_a = 0. \end{cases}$$

Отсюда $M_a = \frac{k^2 E J \sin \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cos \mathbf{v} - \sin \mathbf{v}}$, $R_a = -\frac{k^3 E J \cos \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cos \mathbf{v} - \sin \mathbf{v}}$ или в компактной

форме $M_a = \frac{3i}{l}\varphi_1(\mathbf{v})$, $R_a = R_{\bar{6}} = \frac{3i}{l^2}\eta_1(\mathbf{v})$, где специальные функ-

ции $\varphi_1(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v}^2 \sin \mathbf{v}}{3(\sin \mathbf{v} - \mathbf{v} \cos \mathbf{v})}$; $\eta_1(\mathbf{v}) = \varphi_1(\mathbf{v}) - \mathbf{v}^2 / 3$.

В приложении 1 приведены значения упругих реакций M_a , R_a , $M_{\bar{6}}$, $R_{\bar{6}}$ и эпюры изгибающих моментов для сжато-изогнутого

стержня при различных единичных смещениях и схемах закрепления концов. Эти данные предназначены для практических расчетов стержневых систем на устойчивость. Графики специальных функций $\varphi_1(\mathbf{v})$, $\varphi_2(\mathbf{v})$, $\varphi_3(\mathbf{v})$, $\varphi_4(\mathbf{v})$, $\eta_1(\mathbf{v})$, $\eta_2(\mathbf{v}) = \varphi_4(\mathbf{v}) - \mathbf{v}^2 / 12$,

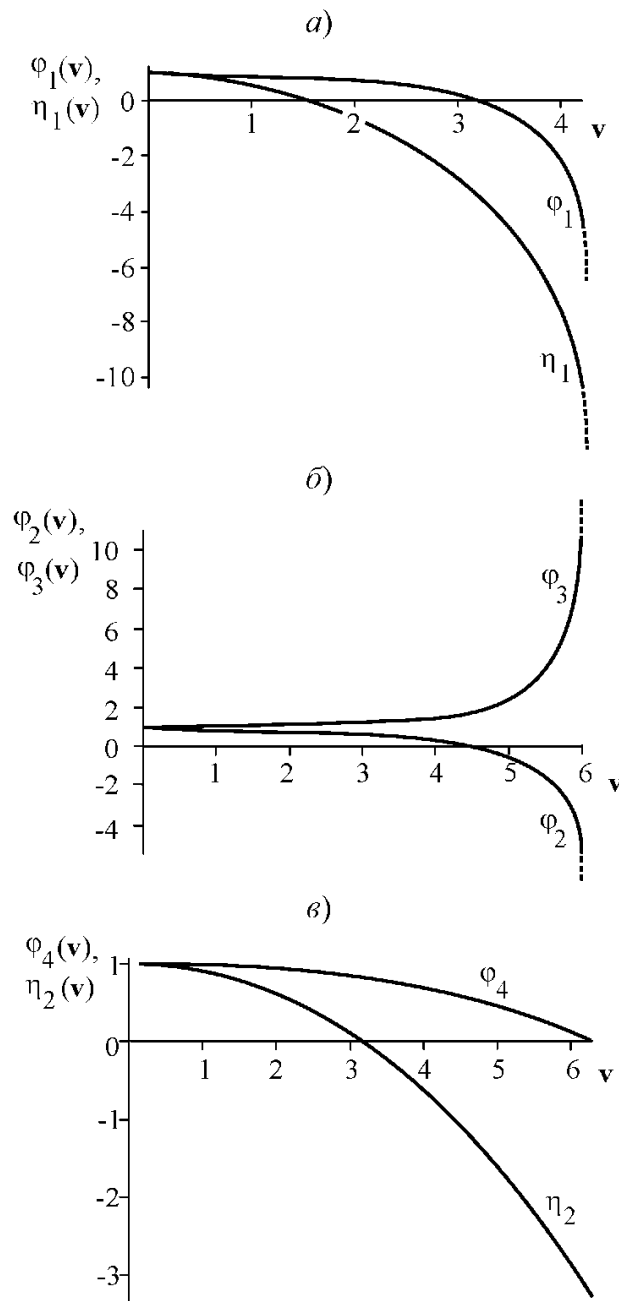


Рис. 1.9

входящих в выражения для реакций M_a , R_a , M_b , R_b , показаны на

рис. 1.9. В общем случае параметр продольной нагрузки v изменяется в диапазоне от 0 до 2π .

Следует отметить, что специальные функции $\varphi_1(v)$, $\varphi_2(v)$, $\varphi_3(v)$ имеют сингулярность (особенность в виде деления на ноль) в точках $v = 0, \pi, 2\pi$. Поэтому при вычислениях обычно принимают значения функций $\varphi_1(0)$, $\varphi_2(0)$, $\varphi_3(0)$, $\varphi_4(0)$, $\eta_1(0)$, $\eta_2(0)$ равными единице. При этом упругие единичные реакции M_a , R_a , M_b , R_b автоматически преобразуются к форме используемой при обычном прочностном расчете по методу перемещений (приложение 2).

В расчетной практике иногда встречаются сжато-растянутые стержневые схемы. В этом случае необходимо иметь выражения упругих реакций при единичных смещениях и углах поворота для растянуто-изогнутых стержней. На основании зависимостей (1.12), (1.13), (1.13) получим выражения упругих реакций M_a , R_a , M_b , R_b для растянуто-изогнутого стержня с жестко зашечленными концами при единичном повороте ($v'_a = 1$) и единичном смещении ($v_a = 1$) левой опоры стержня (рис. 1.10).

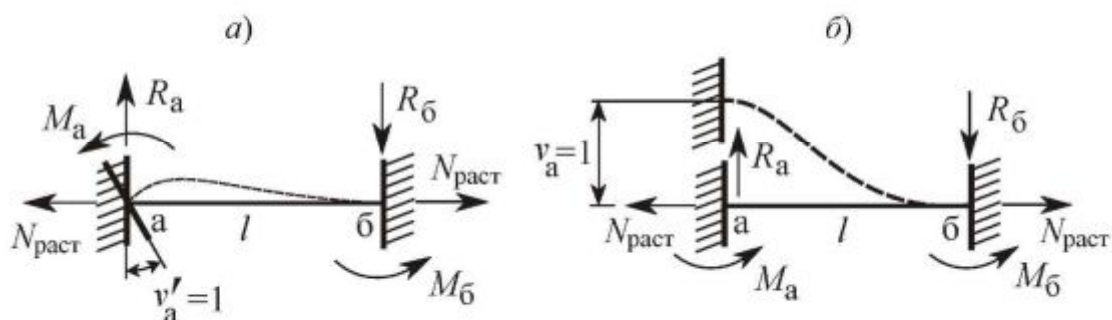


Рис. 1.10

В случае единичного поворота (рис. 1.10, а) граничные условия представим в форме:

$$\text{при } x = 0 \rightarrow \begin{cases} v_a = 0; \\ v'_a = 1, \end{cases} \quad \text{при } x = l \rightarrow \begin{cases} v_b = 0; \\ v'_b = 0. \end{cases}$$

Используя граничные условия при $x=l$ и выражения (1.12) и (1.13), составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{sh \mathbf{v}}{\beta} + \frac{1-ch \mathbf{v}}{\beta^2 EJ} M_a + \frac{\mathbf{v}-sh \mathbf{v}}{\beta^3 EJ} R_a = 0; \\ ch \mathbf{v} - \frac{sh \mathbf{v}}{\beta EJ} M_a + \frac{1-ch \mathbf{v}}{\beta^2 EJ} R_a = 0, \end{cases}$$

где безразмерный параметр продольной нагрузки $\mathbf{v} = l\beta$, аналогичный ранее введенному параметру $\mathbf{v} = lk$.

Отсюда получим в символьном виде формулы для упругих реакций в левой опоре стержня:

$$M_a = \frac{\beta EJ(-e^{2\mathbf{v}} + \mathbf{v}e^{2\mathbf{v}} + 1 + \mathbf{v})}{(e^{\mathbf{v}} - 1)(\mathbf{v}e^{\mathbf{v}} - 2e^{\mathbf{v}} + 2 + \mathbf{v})}; \quad R_a = -\frac{\beta^2 EJ(e^{\mathbf{v}} - 1)}{\mathbf{v}e^{\mathbf{v}} - 2e^{\mathbf{v}} + 2 + \mathbf{v}}.$$

Подставив полученные выражения M_a и R_a в уравнение (1.14), запишем

$$M_{\bar{6}} = \frac{\beta EJ e^{\mathbf{v}}(e^{-\mathbf{v}} + 2\mathbf{v} - e^{\mathbf{v}})}{(e^{\mathbf{v}} - 1)(\mathbf{v}e^{\mathbf{v}} - 2e^{\mathbf{v}} + 2 + \mathbf{v})}.$$

Приведенные выражения для M_a , $M_{\bar{6}}$, R_a можно представить в общепринятом компактном виде:

$$M_a = 4i\bar{\varphi}_2(\mathbf{v}); \quad M_{\bar{6}} = 2i\bar{\varphi}_3(\mathbf{v}) \quad R_a = R_{\bar{6}} = \frac{6i}{l}\bar{\varphi}_4(\mathbf{v}).$$

В выражениях для M_a , $M_{\bar{6}}$, R_a , $R_{\bar{6}}$ введены следующие специальные функции:

$$\bar{\varphi}_2(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v}(-e^{2\mathbf{v}} + \mathbf{v}e^{2\mathbf{v}} + 1 + \mathbf{v})}{4(e^{\mathbf{v}} - 1)(\mathbf{v}e^{\mathbf{v}} - 2e^{\mathbf{v}} + 2 + \mathbf{v})};$$

$$\bar{\varphi}_3(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v}(e^{-\mathbf{v}} + 2\mathbf{v} - e^{\mathbf{v}})}{2(e^{\mathbf{v}} - 1)(\mathbf{v}e^{\mathbf{v}} - 2e^{\mathbf{v}} + 2 + \mathbf{v})};$$

$$\bar{\varphi}_4(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v}^2(e^{\mathbf{v}} - 1)}{6(\mathbf{v}e^{\mathbf{v}} - 2e^{\mathbf{v}} + 2 + \mathbf{v})}.$$

Для единичного смещения (рис. 1.10, б) граничные условия запишем в виде:

$$\text{при } x=0 \rightarrow \begin{cases} v_a = 1; \\ v'_a = 0, \end{cases} \quad \text{при } x=l \rightarrow \begin{cases} v_{\bar{6}} = 0; \\ v'_{\bar{6}} = 0. \end{cases}$$

На основании граничных условий на правом конце стержня ($x = l$) и зависимостей (1.12) и (1.13), составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 1 + \frac{1 - ch \nu}{\beta^2 EJ} M_a + \frac{\nu - sh \nu}{\beta^3 EJ} R_a = 0; \\ -\frac{sh \nu}{\beta EJ} M_a + \frac{1 - ch \nu}{\beta^2 EJ} R_a = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим:

$$M_a = \frac{\beta^2 EJ(e^\nu - 1)}{\nu e^\nu - 2e^\nu + 2 + \nu}; \quad R_a = -\frac{\beta^3 EJ(e^\nu + 1)}{\nu e^\nu - 2e^\nu + 2 + \nu}.$$

Или в компактном виде:

$$M_a = M_\delta = \frac{6i}{l} \bar{\varphi}_4(\nu); \quad R_a = R_\delta = \frac{12i}{l^2} \bar{\eta}_2(\nu),$$

где специальная функция $\bar{\eta}_2(\nu) = \frac{\nu^3(e^\nu + 1)}{12(\nu e^\nu - 2e^\nu + 2 + \nu)}$.

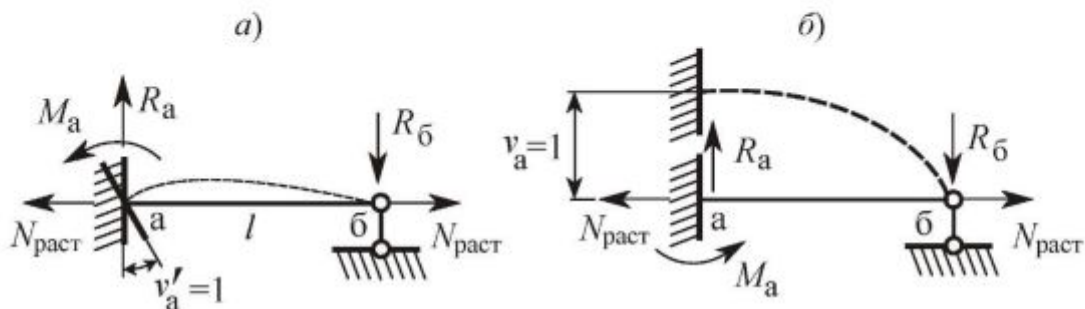


Рис.1.11

Аналогично для стержня с комбинированной схемой закрепления (рис. 1.11) выражения упругих реакций имеют следующий вид.

При единичном угле поворота $\nu'_a = 1$:

$$M_a = 3i \bar{\varphi}_1(\nu); \quad R_a = R_\delta = \frac{3i}{l} \bar{\varphi}_1(\nu).$$

При единичном смещении $\nu_a = 1$:

$$M_a = \frac{3i}{l} \bar{\varphi}_1(\nu); \quad R_a = R_\delta = \frac{3i}{l^2} \bar{\eta}_1(\nu).$$

Здесь введены обозначения:

$$\bar{\varphi}_1(\nu) = \frac{\nu^2(e^{2\nu} - 1)}{3(\nu e^{2\nu} - e^{2\nu} + 1 + \nu)}; \quad \bar{\eta}_1(\nu) = \frac{\nu^3(e^{2\nu} + 1)}{3(\nu e^{2\nu} - e^{2\nu} + 1 + \nu)}.$$

На рис. 1.12 представлены графики функций $\bar{\varphi}_1(\nu)$, $\bar{\varphi}_2(\nu)$, $\bar{\varphi}_3(\nu)$, $\bar{\varphi}_4(\nu)$, $\bar{\eta}_1(\nu)$, $\bar{\eta}_2(\nu)$.

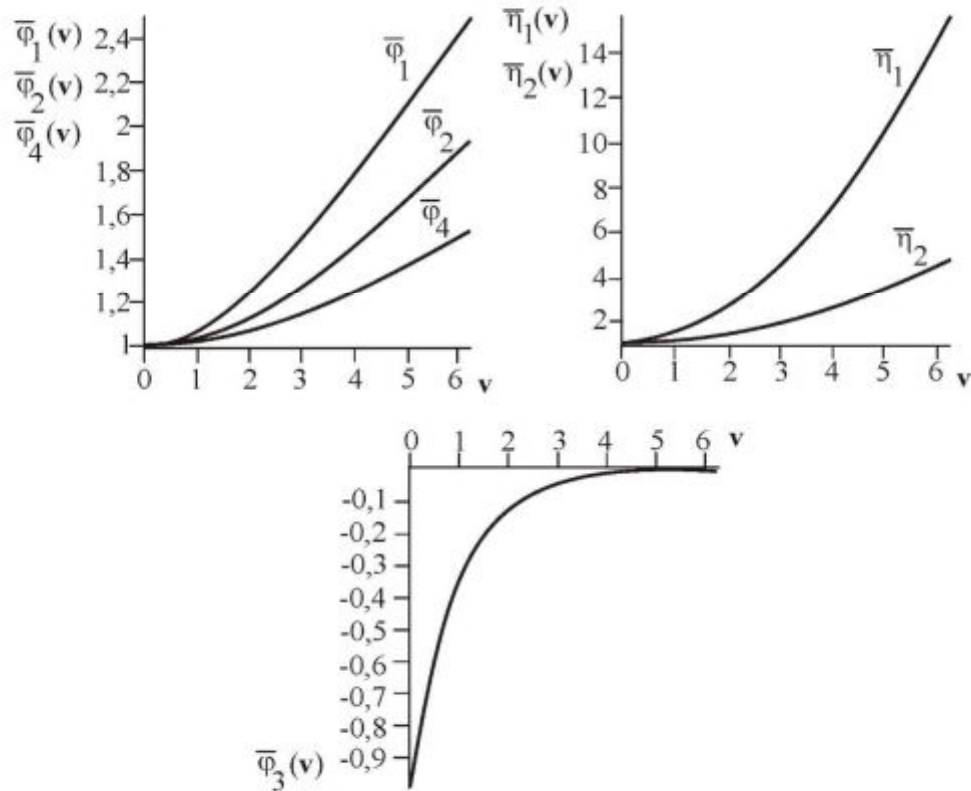


Рис. 1.12

На представленных графиках параметр ν изменяется в диапазоне $[0, 2\pi]$. В точке 0 функции $\bar{\varphi}_1(\nu)$, $\bar{\varphi}_2(\nu)$, $\bar{\varphi}_3(\nu)$, $\bar{\varphi}_4(\nu)$, $\bar{\eta}_1(\nu)$, $\bar{\eta}_2(\nu)$ принимают значение 1. Отметим, что эпюры изгибающих моментов для растянуто- и сжато- изогнутых стержней качественно совпадают (см. приложение 1).

1.5. Расчет плоских стержневых систем на устойчивость методом перемещений

Общий порядок определения критической нагрузки для плоских рам включает следующие шаги [4].

Шаг 1. Расчет по недеформированной схеме. Построение эпюр изгибающих моментов M_0 , поперечных Q_0 и продольных N_0 сил. Уточнение, заданных априори, параметров поперечных сечений стержней.

Шаг 2. Формирование матриц упругих реакций для ожидаемых форм потери устойчивости с использованием функций $\varphi_1(\mathbf{v})$, $\varphi_2(\mathbf{v})$, ..., $\eta_2(\mathbf{v})$, зависящих от продольных сил, полученных на шаге 1. Решение соответствующих уравнений устойчивости.

Шаг 3. Расчет по деформированной схеме. Формирование канонической системы метода перемещений с учетом уточненных параметров поперечных сечений и фактических значений параметров \mathbf{v}_{ij} (i, j – номера узлов стержней). Решение результирующей системы уравнений и построение эпюр изгибающих моментов $M(\mathbf{v})$, поперечных $Q(\mathbf{v})$ и продольных $N(\mathbf{v})$ сил.

Шаг 4. Сравнительный анализ эпюр M_0 (шаг 1) и $M(\mathbf{v})$ (шаг 3). Проверка на прочность сжато-изогнутых стержней, в которых имеет место увеличение изгибающего момента более 5%. Повторный расчет выполняется по формуле

$$\frac{|N(\mathbf{v})|_{max}}{F} + \frac{|M(\mathbf{v})|_{max}}{W} < R_y \gamma_c,$$

где F, W – площадь и момент сопротивления сечения стержня; R_y – расчетное сопротивление стали; γ_c – коэффициент условий работы.

Для более точного анализа перераспределения внутренних усилий в раме, обусловленного учетом продольной нагрузки, всегда можно повторить расчет, начиная с шага 2, используя новые значения \mathbf{v}_{ij} , вычисленные по эпюре $N(\mathbf{v})$ (шаг 3). Для сходимости такого процесса достаточно двух, трех последовательных приближений.

Более детально рассмотрим данную последовательность на примере расчета плоской трехэтажной рамы, показанной на рис. 1.13, а. Стойки и ригели рамы выполнены из стального двутавра. Считаем, что имеет место центральное приложение продольных усилий в стержнях. Назначаем: $F_1=400\text{кН}$; $F_2=F_3=300\text{кН}$; $q_1=30\text{кН/м}$; $q_2=q_3=20\text{кН/м}$ (рис. 1.13, а).

В соответствии с шагом 1 выполняем линейный расчет рамы методом перемещений. Для определения числа неизвестных предста-

вим раму в деформированном состоянии (рис. 1.13, б). При этом учитываем симметрию геометрии и нагрузки. Основная система метода перемещений будет иметь вид, приведенный на рис. 1.13, в. Здесь неизвестными являются $Z_1, Z_2, Z_3, Z'_1, Z'_2, Z'_3$ – углы поворотов узлов 2, 3, 4, 2', 3', 4'. Причем в силу симметрии деформации имеем $Z_1 = Z'_1, Z_2 = Z'_2, Z_3 = Z'_3$.

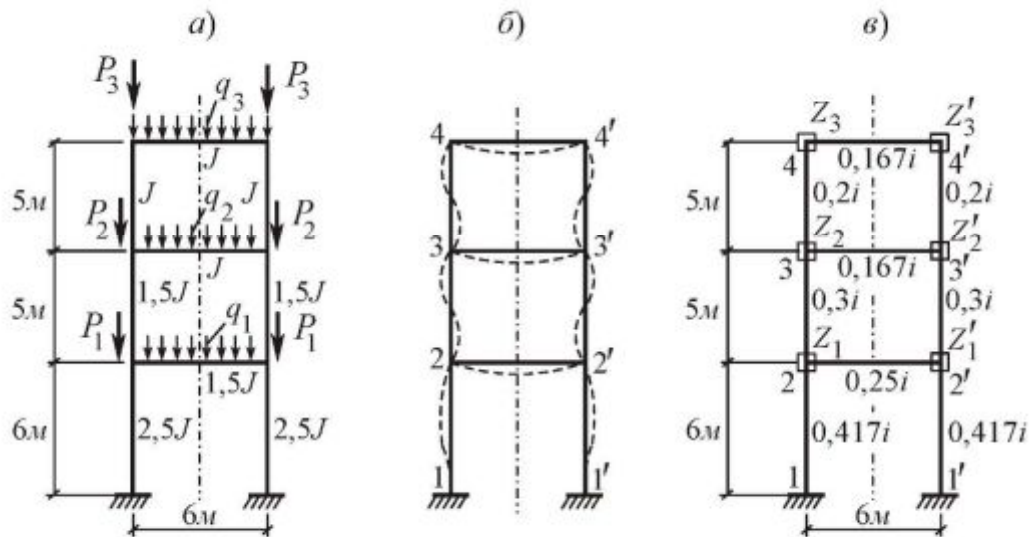


Рис. 1.13

Составляем систему канонических уравнений метода перемещений:

$$\begin{cases} r_{11} Z_1 + r_{12} Z_2 + r_{13} Z_3 + r_{1p} = 0; \\ r_{21} Z_1 + r_{22} Z_2 + r_{23} Z_3 + r_{2p} = 0; \\ r_{31} Z_1 + r_{32} Z_2 + r_{33} Z_3 + r_{3p} = 0. \end{cases}$$

Здесь $r_{ij}, i, j = 1, 2, 3$ – упругая реакция в связи i от единичного смещения связи j ($r_{ij} = r_{ji}, i \neq j$). Величины r_{ij} определяем из условия равновесия узлов и считаем положительными, если они совпадают с принятыми в данном расчете направлениями перемещений Z_j ; r_{1p}, r_{2p}, r_{3p} – грузовые члены, обусловленные действием нагрузки. На рис. 1.14 приведены единичные m_1, m_2, m_3 и грузовая m_p эпюры, а также схемы для определения упругих реакций $r_{11}, r_{12}, r_{22}, r_{32}, r_{33}$ и грузовых членов r_{1p}, r_{2p}, r_{3p} в узлах 2, 3, 4.

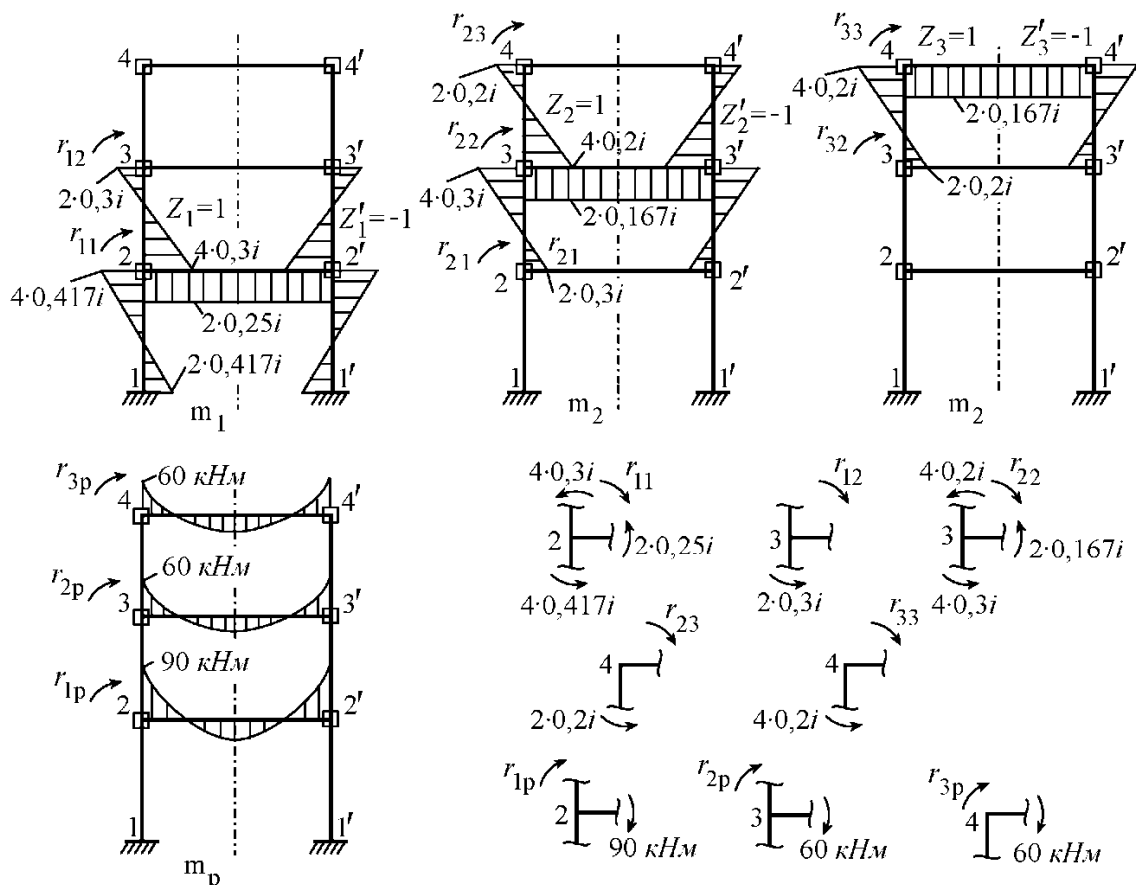


Рис. 1.14

После подстановки величин r_{ij} и r_{ip} в исходную систему уравнений получим:

$$\begin{cases} 3,368i \cdot Z_1 & + 0,6i \cdot Z_2 & & = 9 \cdot 10^4; \\ 0,6i \cdot Z_1 & + 2,334i \cdot Z_2 & + 0,4i \cdot Z_3 & = 6 \cdot 10^4; \\ & 0,4i \cdot Z_2 & + 1,134i \cdot Z_3 & = 6 \cdot 10^4. \end{cases}$$

Отсюда находим: $Z_1 = \frac{24775}{i}$; $Z_2 = \frac{10931}{i}$; $Z_3 = \frac{49054}{i}$.

Результаты расчета рамы по недеформированной схеме (*шаг 1*) в виде эпюр изгибающих моментов M_0 , поперечной Q_0 и продольной N_0 сил приведены на рис. 1.15.

Далее по условиям прочности уточняем параметры поперечных сечений стержневой рамы. В соответствии со СНиП 11-23-81 [10] расчет на прочность стержней, изгибаемых в одной из главных плоскостей, выполняем по формуле

$$\frac{M_{max}}{W_x} \leq R_y \gamma_c,$$

где M_{max} – максимальное значение изгибающего момента в стержне, Н·м; W_x – момент сопротивления сечения, м³; R_y – расчетное сопротивление стали растяжению, сжатию и изгибу по пределу текучести, Н/м²; γ_c – коэффициент условий работы.

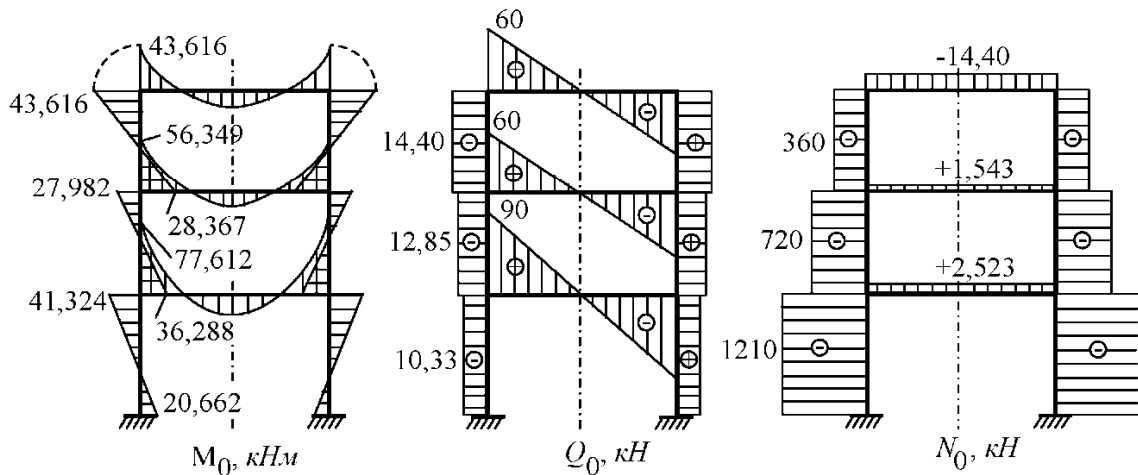


Рис. 1.15

Расчет на устойчивость стержней, подверженных центральному сжатию силой N , выполняем по формуле

$$\frac{N}{\varphi A} \leq R_y \gamma_c,$$

где A – площадь поперечного сечения, м²; φ – коэффициент продольного изгиба, зависящий от гибкости стержня λ и величины R_y . Значения $\varphi = f(\lambda, R_y)$ приведены в [11].

Выполнив соответствующие вычисления, получим новые значения погонных жесткостей стержней рамы:

$$\text{стойки} - i_{12} = 1,22i, \quad i_{23} = 0,3i, \quad i_{34} = 0,2i;$$

$$\text{ригели} - i_{22'} = 0,45i, \quad i_{33'} = 0,25i, \quad i_{44'} = 0,167i,$$

здесь нижние индексы соответствуют номерам узлов рамы (рис. 1.13, б).

Для реализации вычислений на шаге 2 рассмотрим две возможные формы потери устойчивости рамы, показанные штриховой линией на рис. 1.16. Как видно, форме I отвечает кососимметричная де-

формация рамы, а форме II – симметричная. Очевидно, что жесткость рамы, соответствующая деформации по форме I, меньше жесткости, соответствующей деформации по форме II. Основные системы метода перемещений для форм I и II представлены на рис. 1.17. Вычислим значения параметра критической нагрузки ν для обеих форм потери устойчивости.

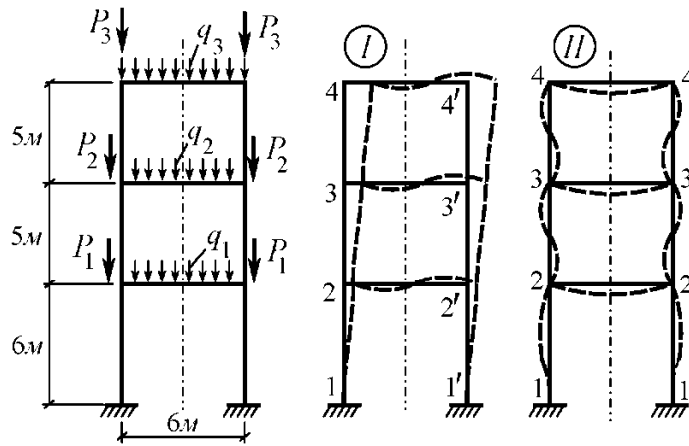


Рис. 1.16

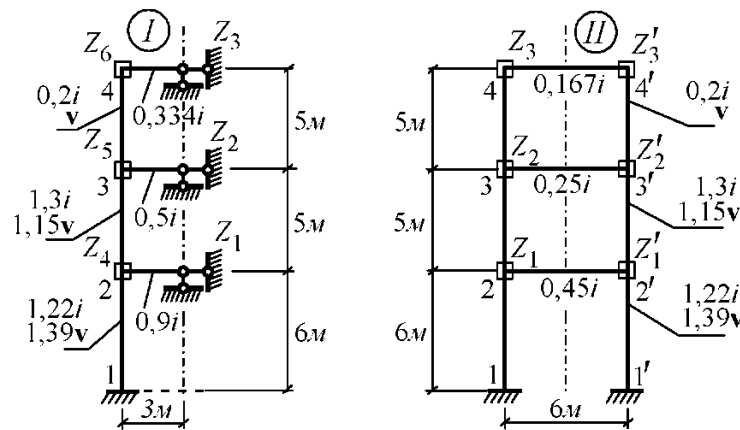


Рис. 1.17

Система канонических уравнений метода перемещений для формы I имеет следующую структуру:

$$\begin{cases} Z_1 r_{11} + Z_2 r_{12} & + Z_4 r_{14} + Z_5 r_{15} & = 0; \\ Z_1 r_{21} + Z_2 r_{22} + Z_3 r_{23} + Z_4 r_{24} + Z_5 r_{25} + Z_6 r_{26} & = 0; \\ & Z_2 r_{32} + Z_3 r_{33} & + Z_5 r_{35} + Z_6 r_{36} = 0; \\ Z_1 r_{41} + Z_2 r_{42} & + Z_4 r_{44} + Z_5 r_{45} & = 0; \\ Z_1 r_{51} + Z_2 r_{52} + Z_3 r_{53} + Z_4 r_{54} + Z_5 r_{55} + Z_6 r_{56} & = 0; \\ & Z_2 r_{62} + Z_3 r_{63} & + Z_5 r_{65} + Z_6 r_{66} = 0. \end{cases}$$

Или в матричной форме

$$[R(\mathbf{v})]\{Z\}=0,$$

где $[R(\mathbf{v})]$ – симметричная квадратная матрица, составленная из упругих реакций r_{ij} , $i, j=1, 2, \dots, 6$; $\{Z\}$ – вектор-столбец узловых смещений.

Данная система имеет нетривиальное (ненулевое) решение $\{Z\} \neq 0$, если определитель $\det [R(\mathbf{v})]$ равен нулю. Символьная запись $\det [R(\mathbf{v})]=0$ представляет собой уравнение устойчивости.

Для вычисления коэффициентов r_{ij} , $i, j=1, 2, \dots, 6$ используем эпюры изгибающих моментов и значения реакций от единичных смещений введенных связей (рис. 1.18). Построение единичных эпюр для сжатых стоек выполняем с использованием таблицы приложения 1, а для ригелей – с помощью таблиц метода перемещений (приложение 2).

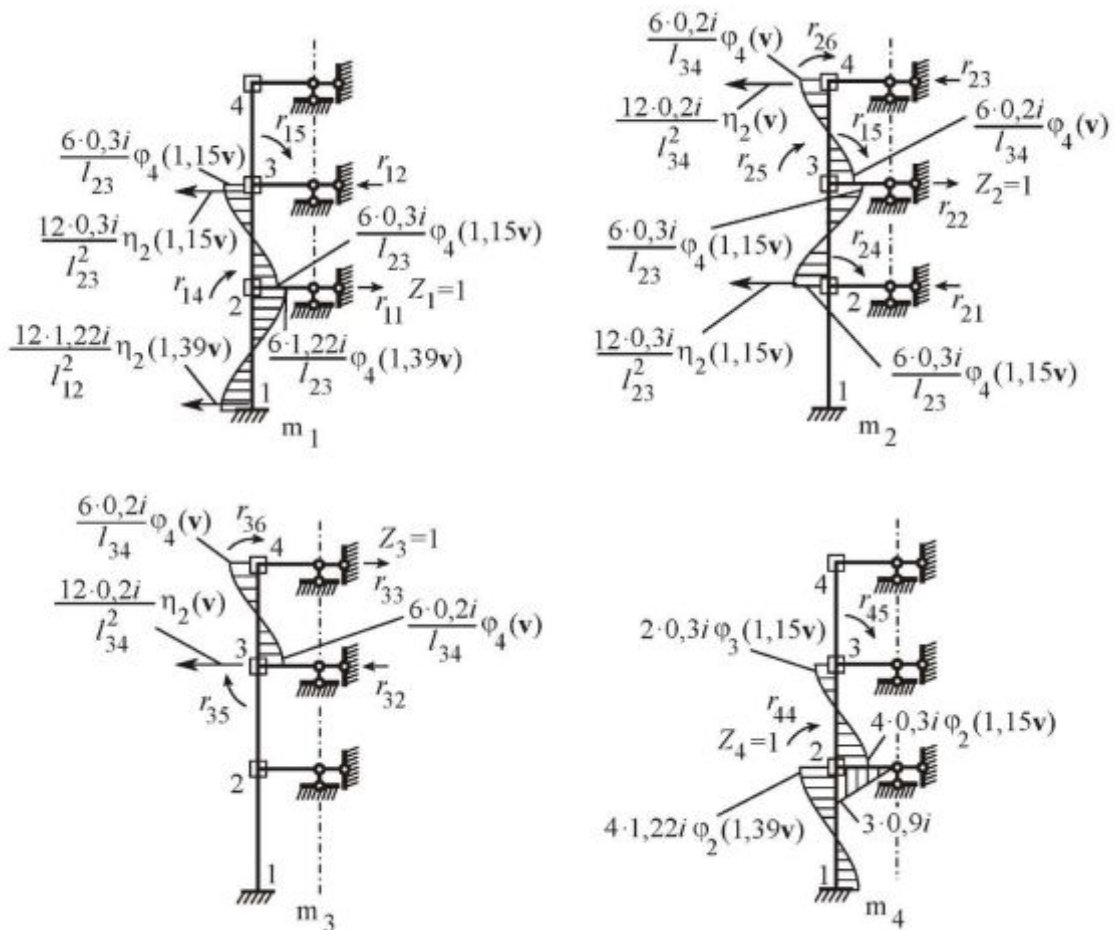


Рис. 1.18 (см. также с. 34)

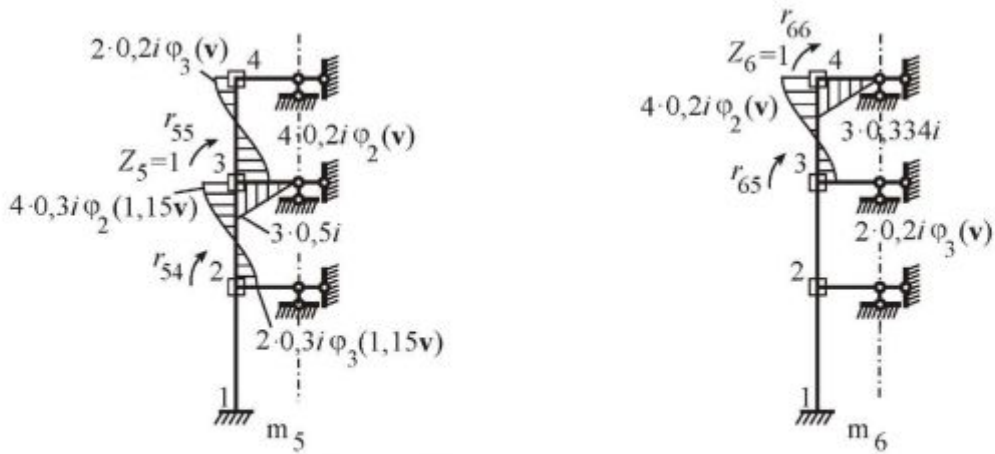


Рис. 1.18. Продолжение

Выражения для коэффициентов r_{ij} имеют вид:

$$r_{11} = \frac{12 \cdot 1,22i}{6^2} \eta_2(1,39v) + \frac{12 \cdot 0,3i}{5^2} \eta_2(1,15v);$$

$$r_{12} = -\frac{12 \cdot 0,3i}{5^2} \eta_2(1,15v);$$

$$r_{14} = \frac{6 \cdot 0,3i}{5} \varphi_4(1,15v) - \frac{6 \cdot 1,22i}{6} \varphi_4(1,39v); \quad r_{15} = \frac{6 \cdot 0,3i}{5} \varphi_4(1,15v);$$

$$r_{22} = \frac{12 \cdot 0,3i}{5^2} \eta_2(1,15v) + \frac{12 \cdot 0,2i}{5^2} \eta_2(v);$$

$$r_{24} = \frac{6 \cdot 0,3i}{5} \varphi_4(1,15v);$$

$$r_{25} = \frac{6 \cdot 0,2i}{5} \varphi_4(v) - \frac{6 \cdot 0,3i}{5} \varphi_4(1,15v); \quad r_{26} = \frac{6 \cdot 0,2i}{5} \varphi_4(v);$$

$$r_{33} = \frac{12 \cdot 0,2i}{5^2} \eta_2(v); \quad r_{32} = -\frac{12 \cdot 0,2i}{5^2} \eta_2(v) \quad r_{35} = -\frac{6 \cdot 0,2i}{5} \varphi_4(v);$$

$$r_{36} = -\frac{6 \cdot 0,2i}{5} \varphi_4(v);$$

$$r_{44} = 4 \cdot 1,22i \varphi_2(1,39v) + 4 \cdot 0,3i \varphi_2(1,15v) + 3 \cdot 0,9i;$$

$$r_{45} = 2 \cdot 0,3i \varphi_3(1,15v);$$

$$r_{55} = 4 \cdot 0,3i \varphi_2(1,15v) + 4 \cdot 0,2i \varphi_2(v) + 3 \cdot 0,5i, \quad r_{56} = 2 \cdot 0,2i \varphi_3(v);$$

$$r_{66} = 4 \cdot 0,2i \varphi_2(v) + 3 \cdot 0,334i.$$

Определив первый (наименьший) корень v_1 уравнения $\det [R(v)] = 0$, можно найти значения критической нагрузки $P_{кр}$ для

сжато-изогнутых элементов рамы. Значение v_1 вычисляем с помощью компьютерной математики системы Maple. Для визуализации уравнения $\det [R(v)] = 0$ используем графическую функцию, позволяющую оценить интервал, которому принадлежит искомый корень v_1 (рис. 1.19). Последующее численное уточнение на интервале $[1,8; 2,0]$ дает величину $v_1 = 1,847$.

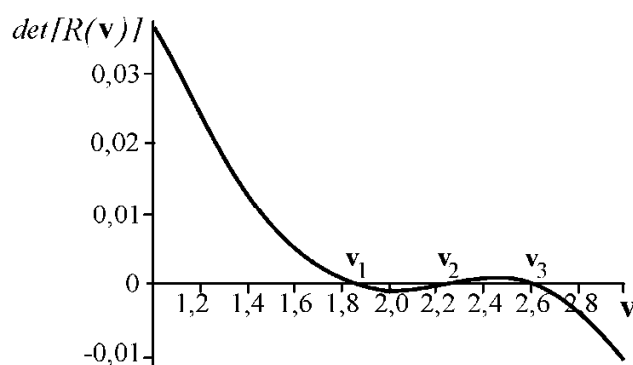


Рис. 1.19

С целью проверки решения уравнения устойчивости вычислим с точностью до множителя горизонтальные смещения ригелей рамы Z_1, Z_2, Z_3 . Для этого решим систему уравнений

$$[R_y(v_1)]\{Z\} = \{b\},$$

где $[R_y(v_1)]$ – усеченная матрица упругих реакций, составленная из коэффициентов r_{ij} при $v_1 = 1,847$; $\{b\}$ – вектор-столбец, образованный из элементов первого столбца матрицы $[R(v_1)]$; $\{Z\}$ – вектор-столбец узловых смещений, соответствующих рассматриваемой форме потери устойчивости (форма I). Матрицу $[R_y(v_1)]$ получаем из матрицы $[R(v_1)]$ путем назначения $r_{11} = 1$ и $r_{1j} = 0$, $r_{j1} = 0$, $i, j = 2, 3, \dots, 6$. В итоге получим систему уравнений

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1418 & -0,06311 & 0,3320 & -0,1060 & 0,2260 \\ 0 & -0,06311 & 0,06311 & 0 & -0,2260 & -0,2260 \\ 0 & 0,3320 & 0 & 7,408 & 0,5039 & 0 \\ 0 & -0,1060 & -0,2260 & 0,5039 & 3,212 & 0,3523 \\ 0 & 0,2260 & -0,2260 & 0 & 0,3523 & 1,707 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \\ Z_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,07866 \\ 0 \\ -0,7471 \\ 0,3320 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

После решения находим

$$\{Z\} = \{1 \quad 3,745 \quad 8,076 \quad -0,3232 \quad 0,8011 \quad 0,4081\}^T.$$

Отсюда устанавливаем, что элементы Z_1, Z_2, Z_3 имеют одинаковый знак и расположены в порядке возрастания. Это качественно соответствует физической картине кососимметричной формы деформации рамы (рис. 1.16).

Выполнив аналогичные вычисления для симметричной формы II (рис. 1.16, 1.17), получим значение параметра продольной нагрузки, равное $\nu_1 = 3,450$. Как видно, данная величина почти в два раза превышает значение $\nu_1 = 1,847$, соответствующее форме I. Поэтому дальнейший расчет выполняем по наименьшему значению параметра $\nu_1 = 1,847$.

Определяем значения критической нагрузки для сжато-изогнутых стоек рассматриваемой рамы:

$$P_{кр\ 12} = (1,39 \nu_1)^2 \cdot 1,22i = 8,041i;$$

$$P_{кр\ 23} = (1,15 \nu_1)^2 \cdot 0,3i = 1,353i;$$

$$P_{кр\ 13} = (\nu_1)^2 \cdot 0,2i = 0,6823i.$$

На *шаге 3* выполняем расчет рамы (рис. 1.13) по деформированной схеме [1, 4], т. е. с учетом влияния продольной нагрузки на жесткость сжатых стоек. Каноническую систему уравнений метода перемещений записываем в форме:

$$\begin{cases} r_{11}(\nu)Z_1 + r_{12}(\nu)Z_2 + r_{1p} = 0; \\ r_{21}(\nu)Z_1 + r_{22}(\nu)Z_2 + r_{23}(\nu)Z_3 + r_{2p} = 0; \\ r_{32}(\nu)Z_2 + r_{33}(\nu)Z_3 + r_{3p} = 0. \end{cases}$$

Здесь коэффициенты $r_{ij}, i, j=1,2,3$ вычисляем по формулам:

$$r_{11}(\nu) = 4 \cdot 1,22i \cdot \varphi_2(1,39\nu) + 4 \cdot 0,3i \cdot \varphi_2(1,15\nu) + 2 \cdot 0,45i;$$

$$r_{12}(\nu) = 2 \cdot 0,3i \cdot \varphi_2(1,15\nu);$$

$$r_{22}(\nu) = 4 \cdot 0,3i \cdot \varphi_2(1,15\nu) + 4 \cdot 0,2i \cdot \varphi_2(\nu) + 2 \cdot 0,25i;$$

$$r_{23}(\nu) = 2 \cdot 0,2i \cdot \varphi_2(\nu);$$

$$r_{33}(\nu) = 4 \cdot 0,2i \cdot \varphi_2(\nu) + 2 \cdot 0,167i.$$

Грузовые члены: $r_{1p} = 9 \cdot 10^4 \text{ Н}; r_{2p} = 6 \cdot 10^4 \text{ Н}; r_{3p} = 6 \cdot 10^4 \text{ Н}.$

Решая систему при $\nu_1 = 1,847$, получим:

$$Z_1 = \frac{14665}{i}; \quad Z_2 = \frac{15413}{i}; \quad Z_3 = \frac{52540}{i}.$$

Результаты расчета рамы по деформированной схеме в виде эшюр $M(\nu)$, $Q(\nu)$, $N(\nu)$ представлены на рис. 1.20. В скобках на эшюре $M(\nu)$ в процентах приведены результаты сравнения с данными, полученными на *шаге 1* (эшюра M_0).

Как видно, наиболее существенное перераспределение изгибающего момента происходит в сжатых стойках рамы.

На *шаге 4* по формуле

$$\frac{|N|}{A} + \frac{|M|}{W} < R_y \gamma_c$$

выполняем проверку прочности стойки 12, в которой имеет место увеличение изгибающего момента на 31%. В результате вычислений назначаем погонную жесткость равной $i_{12} = 1,73i$ (для сравнения ранее принималось $i_{12} = 1,22i$). На этом расчет плоской трехэтажной рамы закончен.

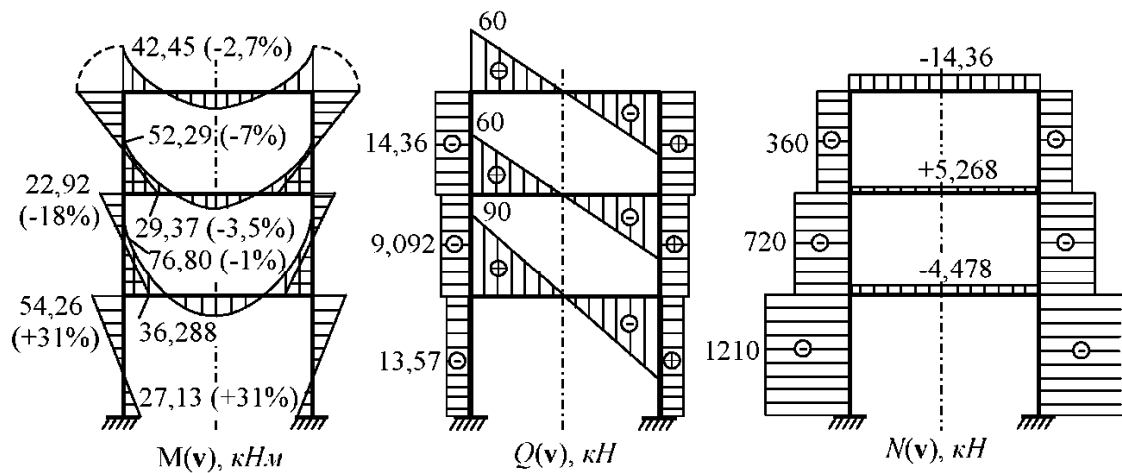


Рис. 1.20

Рассмотрим случай, когда величины продольных сил (параметры ν_{ij}) в стержнях рамы известны заранее. Такие расчетные схемы предлагаются студентам в качестве домашнего задания в приложении 4. В такой постановке алгоритм расчета плоской рамы на устойчивость упрощается. Соответствующий учебный пример приведен на рис. 1.21, а. Исходя из принятой расчетной схемы, представим карти-

ну возможного деформированного равновесного состояния рамы (штриховая линия). Далее строим основную систему метода перемещений. За неизвестные принимаем смещения узлов, в которых введены дополнительные связи $Z_i, i=1,2,\dots,n$, где n – степень кинематической неопределенности системы, равная сумме неизвестных линейных смещений $n_{\text{л}}$ и углов поворота $n_{\text{у}}$. В рассматриваемом примере

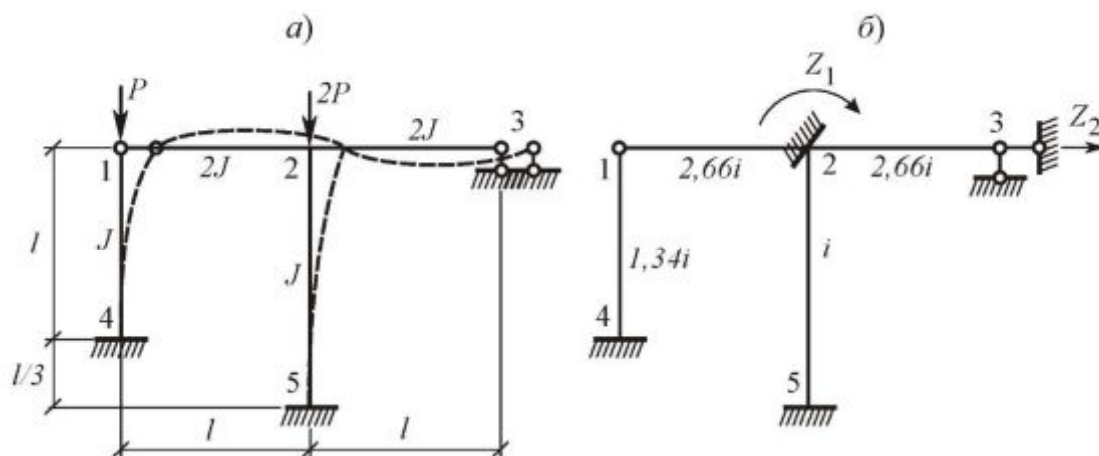


Рис. 1.21

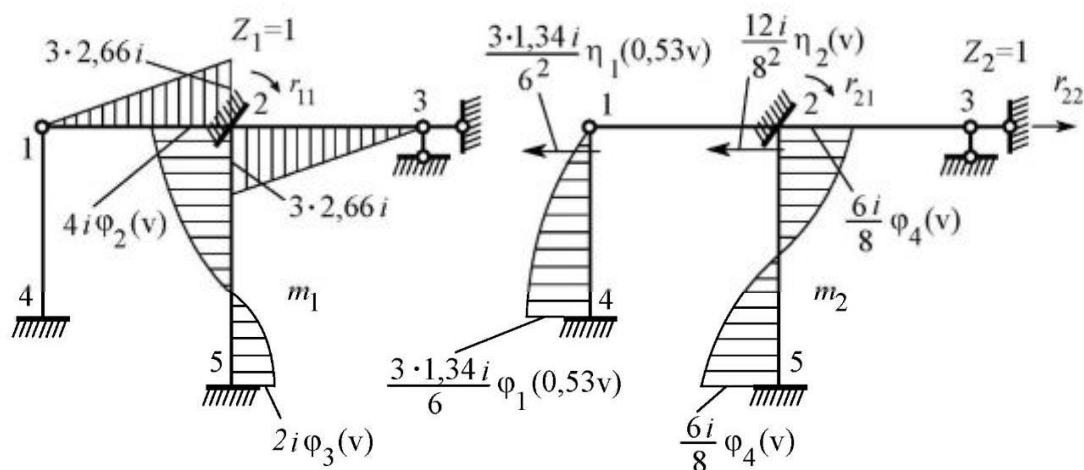


Рис. 1.22

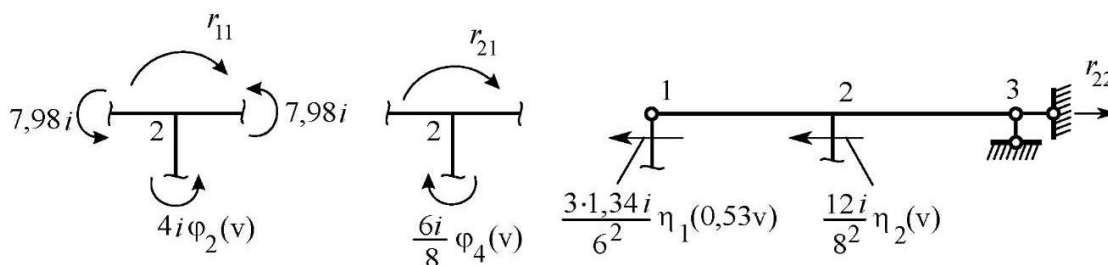


Рис. 1.23

величина $n = n_y + n_d = 1 + 1 = 2$ (рис. 1.21, б).

Положив $l = 6$ м, вычисляем безразмерные параметры продольной силы $\mathbf{v} = l\sqrt{P/(EJ)}$ для стоек рамы:

$$\mathbf{v}_{14} = 6\sqrt{\frac{P}{EJ}}; \quad \mathbf{v}_{25} = 8\sqrt{\frac{2P}{EJ}}; \quad \frac{\mathbf{v}_{14}}{\mathbf{v}_{25}} = \frac{6}{8\sqrt{2}} = 0,53; \quad \mathbf{v}_{25} = \mathbf{v};$$

$$\mathbf{v}_{14} = 0,53\mathbf{v}.$$

Здесь, как и ранее, нижние индексы в обозначениях \mathbf{v}_{14} и \mathbf{v}_{25} соответствуют номерам узлов рамы.

Матрица коэффициентов канонической системы метода перемещений имеет вид

$$[R(\mathbf{v})] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}.$$

Реакции r_{11} , r_{12} определяем из условий равновесия узла 2 (рис.1.22, 1.23):

$$r_{11} = [2 \cdot 7,98 + 4 \varphi_2(\mathbf{v})] i; \quad r_{12} = r_{21} = -\frac{6i}{8} \varphi_4(\mathbf{v}).$$

Единичную реакцию r_{22} находим из условия равновесия ригеля 1-2-3 (рис. 1.22, 1.23):

$$r_{22} = \left[\frac{3 \cdot 1,34}{6^2} \eta_1(0,53\mathbf{v}) + \frac{12}{8^2} \eta_2(\mathbf{v}) \right] i.$$

Уравнение устойчивости рассматриваемой рамы записываем в виде

$$\det [R(\mathbf{v})] = \begin{vmatrix} 15,96 + 4 \varphi_2(\mathbf{v}) & -\frac{3}{4} \varphi_4(\mathbf{v}) \\ -\frac{3}{4} \varphi_4(\mathbf{v}) & 0,112 \eta_1(0,53\mathbf{v}) + \frac{3}{16} \eta_2(\mathbf{v}) \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, получим трансцендентное уравнение

$$\det [R(\mathbf{v})] = 1,78 \eta_1(0,53\mathbf{v}) + 2,99 \eta_2(\mathbf{v}) + 0,447 \varphi_2(\mathbf{v}) \eta_1(0,53\mathbf{v}) + \frac{3}{4} \varphi_2(\mathbf{v}) \eta_2(\mathbf{v}) - \frac{9}{16} \varphi_4^2(\mathbf{v}) = 0.$$

Для вычисления величины наименьшего корня \mathbf{v}_1 воспользуемся компьютерной математикой системы Maple. Сначала для оценки интервала, которому принадлежит искомое решение уравнения

$\det[R(\nu)] = 0$, построим график зависимости $\det[R(\nu)] \sim \nu$ (рис. 1.24). Как видно, кривая $\det[R(\nu)]$ первый раз пересекает ось ν на участке между точками 2,0 и 4,0 (рис. 1.24, а), а при детализации графика – на участке между точками 2,5 и 3,0 (рис. 1.24, б). Точное решение уравнения $\det[R(\nu)] = 0$, вычисленное численно, равно $\nu_1 = 2,9606$.

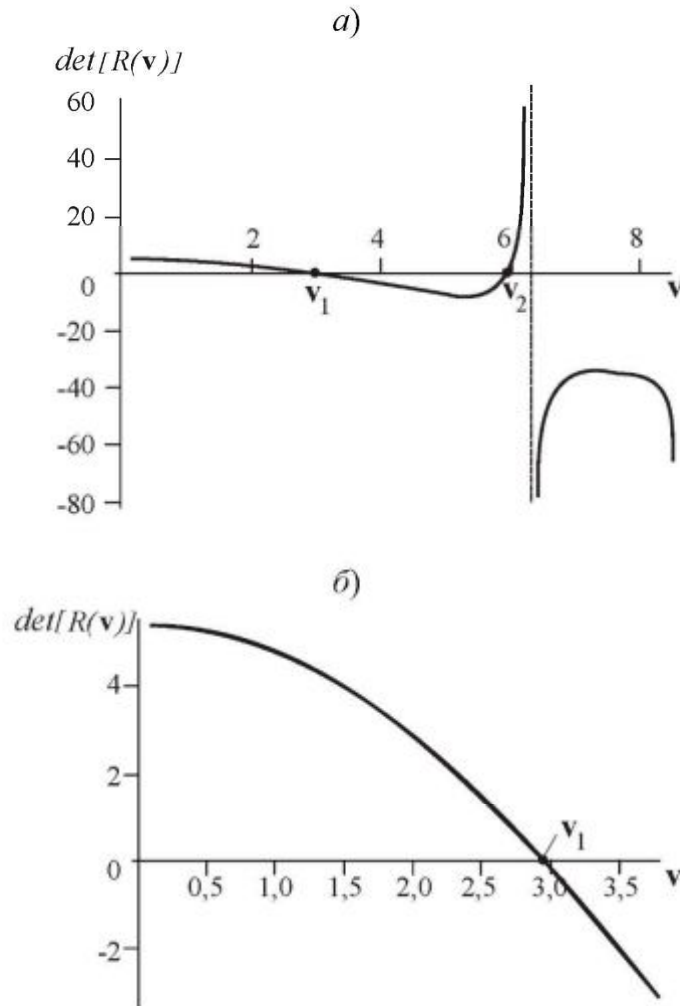


Рис. 1.24

В заключении расчета определяем величины критической нагрузки для стоек 1-4 и 2-5:

$$P_{\text{кр } 14} = (0,53 \nu_1)^2 \frac{E J_{14}}{l_{14}^2} = (0,53 \cdot 2,96)^2 \frac{E J}{l^2} = 4,64 \frac{E J}{l^2};$$

$$P_{\text{кр } 25} = (v_1)^2 \frac{E J_{25}}{l_{25}^2} = \frac{(2,96)^2}{(1+1/3)} \frac{E J}{l^2} = 6,67 \frac{E J}{l^2}.$$

В следующем учебном примере вычислим величину критической силы для двухступенчатой стойки (рис. 1.25). Особенность данной задачи заключается в том, что теоретическая форма упругой линии стойки после потери устойчивости описывается гладкой функцией вида

$$v(x) = f \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right),$$

где $f \ll 1$ – перемещение верхнего конца стойки. В месте с тем реальной форме упругой линии, как это будет показано в разделе 2.7, соответствует более сложная кривая.

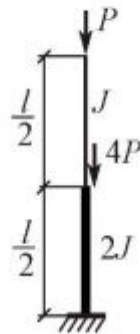


Рис. 1.25

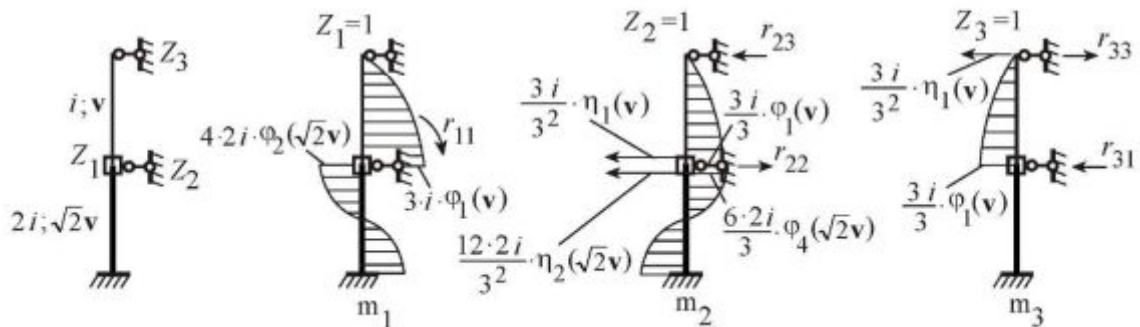


Рис. 1.26

Основная система метода перемещений и соответствующие единичные эпюры m_1 , m_2 , m_3 , построенные с учетом разных жесткостей участков и продольного сжатия, приведены на рис. 1.26.

На основании данных рис. 1.26 сформируем уравнение устойчивости

$$\begin{aligned}
 & \det [R(\mathbf{v})] = \\
 & = \begin{vmatrix} 3i\varphi_1(\mathbf{v}) + 4 \cdot 2i\varphi_2(\sqrt{2}\mathbf{v}) & \frac{3i}{3}\varphi_1(\mathbf{v}) - \frac{6 \cdot 2i}{3}\varphi_4(\sqrt{2}\mathbf{v}) & -\frac{3i}{3}\varphi_1(\mathbf{v}) \\ \text{симметр.} & \frac{3i}{3^2}\eta_1(\mathbf{v}) + \frac{12 \cdot 2i}{3^2}\eta_2(\sqrt{2}\mathbf{v}) & -\frac{3i}{3^2}\eta_1(\mathbf{v}) \\ & & \frac{3i}{3^2}\eta_1(\mathbf{v}) \end{vmatrix} = 0.
 \end{aligned}$$

Графическая интерпретация решения уравнения $\det [R(\mathbf{v})]=0$ показана на рис. 1.27.

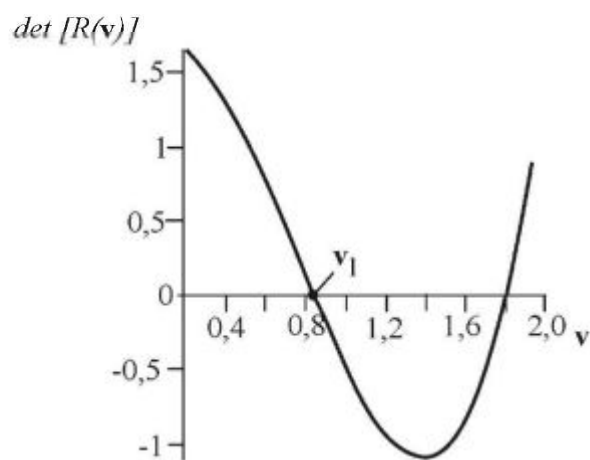


Рис. 1.27

Значение наименьшего корня уравнения устойчивости, вычисленное численно, равно $v_1=0,8434$. Величина параметра критической нагрузки для двухступенчатого стержня

$$P_{\text{кр}} = \frac{v^2}{(l/2)^2} E J = \frac{2,845}{l^2} E J.$$

Для сравнения в работе [3] получены следующие параметры критической нагрузки для аналогичного двухступенчатого стержня:

$$\text{статическим методом} - P_{\text{кр}} = \frac{2,53}{l^2} E J;$$

$$\text{энергетическим методом} - P_{\text{кр}} = \frac{2,61}{l^2} E J.$$

Максимальное расхождение с решением, полученным методом перемещений, составляет 11%. Несоответствие в результатах объясняется

различным подходом к формированию уравнения устойчивости.

В заключении данного раздела выполним анализ устойчивости 1-го рода для стержня, жестко зашпемленного по концам и нагруженного в точке c продольной силой P (рис. 1.28). Изгибная жесткость стержня $EJ=1,144 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$ (двутавр № 14). Длины участков стержня $l_1=2 \text{ м}$, $l_2=8 \text{ м}$.

Рассмотрим два варианта нагружения (A и B), отличающиеся только направлением продольной силы P .

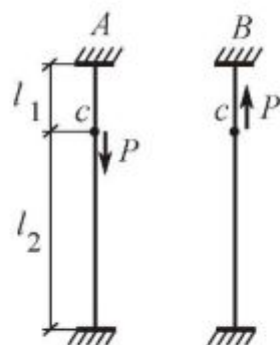


Рис. 1.28

Вычислим значения критической силы $P_{крA}$ и $P_{крB}$ соответственно для вариантов A и B с помощью метода перемещений. На рис. 1.29 представлена основная система метода перемещений и единичные эпюры моментов для варианта A . Здесь же приведены значения реакций, возникающих при единичном смещении связи Z_2 .

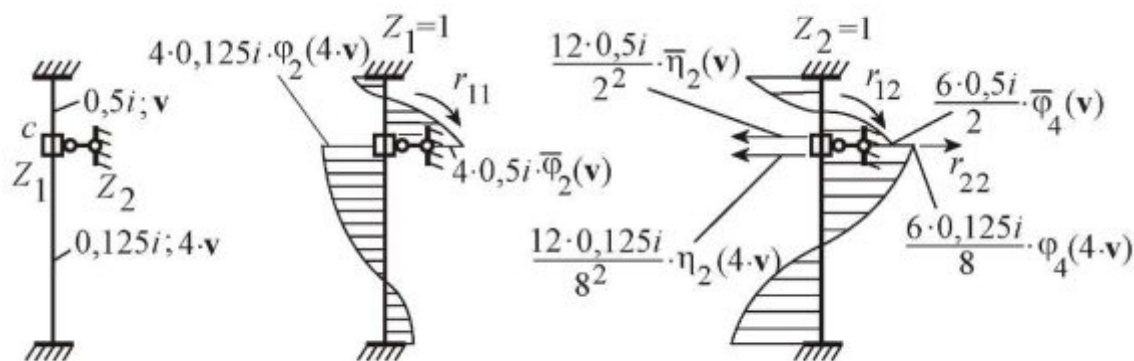


Рис. 1.29

Уравнение устойчивости для сжато-растянутого стержня, составленное на основании данных рис. 1.29, имеет вид

$$\det [R(\mathbf{v})] =$$

$$= \left| \begin{array}{c|c} 4 \cdot 0,5 \cdot \bar{\varphi}_2(\mathbf{v}) + & \frac{6 \cdot 0,5}{2} \cdot \bar{\varphi}_4(\mathbf{v}) - \frac{6 \cdot 0,125}{8} \varphi_4(4 \cdot \mathbf{v}) \\ + 4 \cdot 0,125 \cdot \varphi_2(4 \cdot \mathbf{v}) & \\ \hline \text{симметр.} & \frac{12 \cdot 0,5}{2^2} \cdot \bar{\eta}_2(\mathbf{v}) + \frac{12 \cdot 0,125}{8^2} \eta_2(4 \cdot \mathbf{v}) \end{array} \right| = 0.$$

Здесь $\bar{\varphi}_2(\mathbf{v})$, $\bar{\varphi}_4(\mathbf{v})$, $\bar{\eta}_2(\mathbf{v})$ – специальные функции, учитывающие продольное растяжение стержня на участке l_1 .

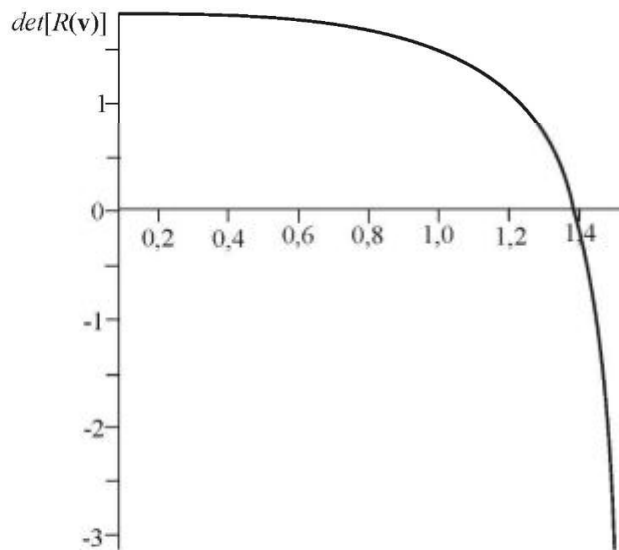


Рис. 1.30

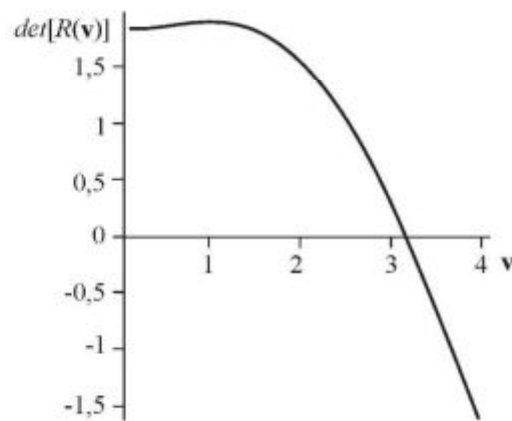


Рис. 1.31

Наименьший корень \mathbf{v}_{1A} уравнения устойчивости найдем, используя компьютерную математику системы Maple (рис. 1.30). В итоге получим $\mathbf{v}_{1A} = 1,3891$.

По аналогии с вариантом A для варианта B уравнение устойчивости принимает вид

$$\det [R(\mathbf{v})] = \begin{vmatrix} 4 \cdot 0,125 \cdot \bar{\varphi}_2(4 \cdot \mathbf{v}) + & \frac{6 \cdot 0,125}{8} \cdot \bar{\varphi}_4(4 \cdot \mathbf{v}) - \frac{6 \cdot 0,5}{2} \varphi_4(\mathbf{v}) \\ + 4 \cdot 0,5 \cdot \varphi_2(\mathbf{v}) & \\ \text{симметр.} & \frac{12 \cdot 0,125}{8^2} \cdot \bar{\eta}_2(4 \cdot \mathbf{v}) + \frac{12 \cdot 0,5}{2^2} \eta_2(\mathbf{v}) \end{vmatrix} = 0.$$

Графическая интерпретация решения уравнения $\det [R(\mathbf{v})] = 0$ для варианта B представлена на рис. 1.31. Значение вычисленного наименьшего корня составило $\mathbf{v}_{1B} = 3,1877$.

Данным величинам параметров \mathbf{v}_{1A} и \mathbf{v}_{1B} соответствует критическая нагрузка:

$$P_{\text{кр}A} = \frac{(4 \cdot \mathbf{v})^2}{l_2^2} E J = \frac{(4 \cdot 1,3891)^2}{8^2} \cdot 1,144 \cdot 10^6 = 0,5519 \cdot 10^6 \text{ Н};$$

$$P_{\text{кр}B} = \frac{\mathbf{v}^2}{l_1^2} E J = \frac{3,1877^2}{2^2} \cdot 1,144 \cdot 10^6 = 2,906 \cdot 10^6 \text{ Н}.$$

Значения критической нагрузки, вычисленные без учета стабилизирующего эффекта от растягивающего усилия, составили:

$$P_{\text{кр}A} = 0,5119 \cdot 10^6 \text{ Н}; \quad P_{\text{кр}B} = 1,446 \cdot 10^6 \text{ Н}.$$

Таким образом, учет продольного растягивающего усилия при анализе устойчивости сжато-растянутого стержня дает существенную поправку решения при соотношении длин участков $l_2 / l_1 \geq 4$.

1.6. Вычисление параметра критической нагрузки в среде Maple

На рис. 1.32 приведен текст учебной программы для расчета параметра \mathbf{v}_1 в среде Maple 12. Допустимый размер матрицы $[R(\mathbf{v})]$ ограничен числом неизвестных $n \leq 4$. Для удобства работы отдельные блоки программы снабжены комментариями, начинающимися с символа $\#$. Отметим, что программа выполняет только вычислительную часть задачи, а подготовительную работу по выбору основной системы метода перемещений и формированию матрицы упругих реакций

осуществляет пользователь (студент).

Для обозначения специальных функций $\varphi_1(v)$, $\varphi_2(v)$, $\varphi_3(v)$, $\varphi_4(v)$, $\eta_1(v)$, $\eta_2(v)$ в программе использованы следующие переменные в латинской транскрипции: $f1(v)$, $f2(v)$, $f3(v)$, $f4(v)$, $n1(v)$, $n2(v)$.

На первом этапе вычисления параметра v_1 выполняется построение графика $R \sim v$ с помощью процедуры

“ $a := plot(y(v), v = 0.1 .. 6, style = line, color = black, thickness = 2)$ ”.

Изменяя верхний предел параметра v , визуально определяем интервал, на котором кривая $R(v)$ первый раз пересекает ось абсцисс.

```

a)
restart :
with(linalg):
# Специальные функции: f1(v), f2(v), f3(v), f4(v), n1(v), n2(v)
f1 := v -> (v^2 * sin(v)) / (3 * (sin(v) - v * cos(v))) :
f2 := v -> (v^2 * (v * cos(v) - sin(v))) / (4 * (2 * cos(v) + v * sin(v) - 2)) :
f3 := v -> (v * (sin(v) - v)) / (2 * (2 * cos(v) + v * sin(v) - 2)) :
f4 := v -> (1/3) * (2 * f2(v) + f3(v)) :
n1 := v -> f1(v) - (v^2/3) :
n2 := v -> f4(v) - (v^2/12) :
n := 2 : # степень кинематической неопределимости задачи
# Матрица упругих реакций [R] размерностью n x n
R := matrix(n, n, [4 * 0.5 + 4 * 0.125 * f2(v), (6 * 0.5 / 2 - 6 * 0.125 / 8) * f4(v),
(6 * 0.5 / 2 - 6 * 0.125 / 8) * f4(v), (12 * 0.5 / 2^2 + 12 * 0.125 / 8^2) * n2(v)]) :

```

б)

```
# Характеристическое уравнение  $\det [R(v)] = 0$   
 $y := v \rightarrow \det(R)$ ;  
# График зависимости  $R \sim v$   
 $a := \text{plot}(y(v), v = 0.1 .. 6, \text{style} = \text{line}, \text{color} = \text{black}, \text{thickness} = 2)$ ;  
 $\text{print}(\text{"Графическое решение уравнения устойчивости } \det[R(v)] = 0"$ );  
 $\text{plots}[\text{display}](a)$ ;  
# Численное решение уравнения устойчивости  $\det[R(v)] = 0$   
 $\text{print}(\text{"Наименьший корень уравнения устойчивости } v_1"$ );  
 $\text{fsolve}(y(v) = 0, v = 5..6)$ ;
```

Рис. 1.32

На втором этапе с помощью интерактивной процедуры
“ $\text{fsolve}(y(v) = 0, v = 5..6)$;
находим наименьший корень v_1 уравнения устойчивости
 $\det [R(v)] = 0$.

Верхнюю и нижнюю границы интервала $v = 5..6$ следует назначать как можно ближе к искомому корню v_1 .

Изменения в программу вносятся на латинице. Запуск программы на выполнение осуществляется нажатием клавиши “Enter”.

Для вычисления параметра критической нагрузки в случае, когда порядок матрицы $[R(v)]$ больше четырех необходимо вместо блока программы, показанного на рис. 1.32, б, использовать видоизмененный блок, приведенный на рис. 1.33. Эта замена вызвана тем, что прямое вычисление функции $y(v)$ при формировании списка данных a требует больших вычислительных ресурсов и при числе неизвестных $n > 4$ приведет к “зависанию” программы (рис. 1.32). В блоке рис. 1.33 использована векторно-сплайновая схема построения графика функции $\det [R(v)]$, что эффективнее с вычислительной точки зрения, но требует дополнительных усилий для окончательного вычисления наименьшего корня уравнения $\det [R(v)] = 0$. Как отмечено в комментариях к программе (рис. 1.33) выражения кусочных сплайн-функций выводятся на экран монитора. Пользователю остается с помощью графика $\det [R(v)] \sim v$ установить границы интервала $[a, b]$, которому принадлежит значение v_1 , скопировать из имею-

шегося списка в буфер обмена соответствующую сплайн-функцию $u(t)$ и запустить на выполнение оператор “ $fsolve(u(t), t=a..b)$;”. Пример такого вычислительного блока представлен на рис. 1.34. В приведенном примере интервалу $[a,b]$ параметра t соответствуют значения $[1.8..2]$.

```

with( spline ):
s := 30: # размерность векторов {x} и {y}
# Формирование массива det / R(v) / в точках v=0..s
x := vector( s ):
y := vector( s ):
x[1] := 0:
for i from 2 to s do
x[i] := x[i-1] + 0.1; od:
f := v → det( R(v) ):
vi := 0.01:
for i from 1 to s do
y[i] := evalf( f( vi ) );
vi := vi + 0.1; od:
# Построение кубического сплайна функции [ R(v) ] в точках v=0...s
# Выражения сплайн – функций на отрезках между узловыми точками
# выводятся на экран
f := spline( x, y, t, cubic );
# Построение графика функции
g := plot( f, t=1.. $\frac{s}{10}$ , color = black, thickness = 2 ):
plots[ display ]( g );

```

Рис. 1.33

```

# Вычисление наименьшего корня уравнения устойчивости det [ R(v) ] = 0
u := t → 0.2659987397 - 0.141949773400000007 · t +
0.360062093798311222 · (t - 1.9)^2 - 0.151228670300000006 · (t - 1.9)^3;
fsolve( u(t), t=1.8..2 );

```

Рис. 1.34

Глава 2. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В СТАТИКЕ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

2.1. Матрицы жесткости стержневого конечного элемента

Стержневые системы широко используются в расчетных схемах строительных конструкций. В настоящее время эффективным средством их расчета на ЭВМ является метод конечных элементов (МКЭ) в форме метода перемещений. В терминологии и схеме построения вычислительного процесса этот метод имеет много общего с матричным методом перемещений, получившим широкое распространение в расчетной практике в 60-е – 70-е годы XX века. МКЭ является численным методом прочностного анализа, базирующимся на векторно-матричной записи результирующих выражений. Необходимые сведения из матричной алгебры приведены в приложении 3. Суть МКЭ состоит в представлении пространственной конструкции ансамблем стержневых (балочных) конечных элементов. Причем для повышения точности численного решения отдельные протяженные фрагменты расчетной схемы обычно моделируют сетью конечных элементов с заданным шагом. Жесткостные характеристики стержней в МКЭ вычисляют с помощью соотношений, основанных на принципе возможных перемещений.

Для моделирования двумерных стержневых систем, воспринимающих изгибные деформации в одной плоскости, используют балочные двухузловые конечные элементы, отнесенные к локальной (местной) декартовой системе координат $\{x, y\}$ (рис. 2.1). Ось z направлена из узла 1 на наблюдателя и на рис. 2.1 не показана. Характеристиками такого элемента являются: длина l ; площадь поперечного сечения F ; момент инерции сечения J ; модуль упругости E . Каждый узел имеет три степени свободы: перемещение u вдоль оси x ; перемещение v вдоль оси y ; угол поворота нормали торцового сечения элемента $\theta = v' = -dv/dx$. Вектор-столбец узловых перемещений состоит из шести компонент и имеет следующую структуру (рис. 2.1, а):

$$\{w\} = \{u_1 \ u_2 \ v_1 \ \theta_1 \ v_2 \ \theta_2\}^T.$$

Здесь $\{\dots\}^T$ – операция транспонирования.

Согласно кинематической гипотезе, выражение для продольной деформации стержня имеет вид

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} - y \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2. \quad (2.1)$$

В уравнении (2.1) первый член соответствует осевой деформации (растяжение – сжатие), второй – изгибной деформации, третий член – учитывает нелинейность, связанную с продольным изгибом. Координата y отсчитывается от срединной линии балочного элемента.

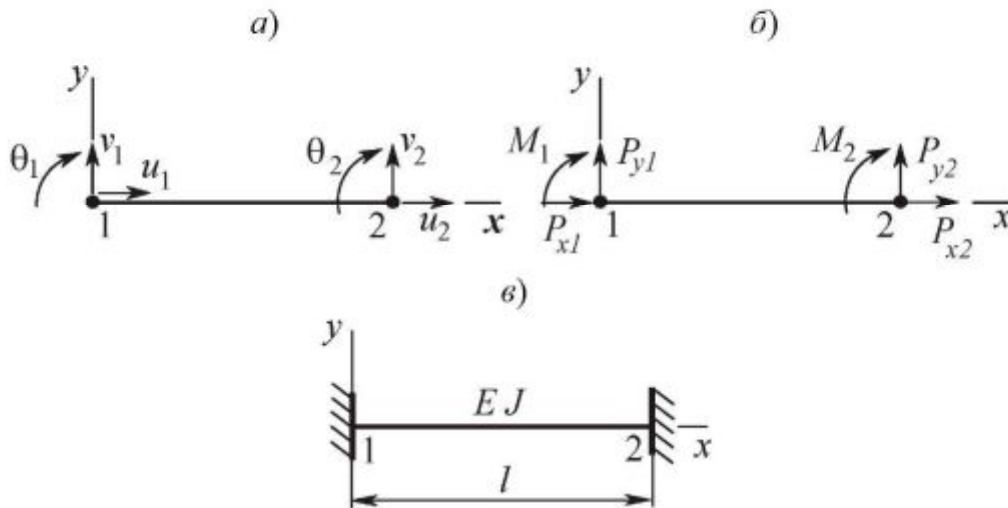


Рис. 2.1

На основании принципа возможных перемещений запишем уравнение, связывающее вариацию потенциальной энергии деформации элемента δU с вариацией работы внешних сил δA на возможных перемещениях системы

$$\delta U = \delta A$$

или в развернутом виде

$$\int_v \sigma_x \delta \varepsilon_x dv = P_{x1} \delta u_1 + P_{x2} \delta u_2 + P_{y1} \delta v_1 + M_1 \delta \theta_1 + P_{y2} \delta v_2 + M_2 \delta \theta_2. \quad (2.2)$$

Здесь обозначено: $\sigma_x = E \varepsilon_x$ – продольное напряжение; $\delta \varepsilon_x$ – вариация осевой деформации; $v = Fl$ – объем, занимаемый конечным элементом; $dv = dF dx$ – элементарный объем; P_{x1} , P_{x2} , P_{y1} , P_{y2} , M_1 , M_2 – узловые силы и моменты (рис. 2.1, б); δu_1 , δu_2 , δv_1 , δv_2 , $\delta \theta_1$, $\delta \theta_2$ – вариации узловых перемещений и углов поворота

элемента. Под возможными (виртуальными) перемещениями будем понимать малые прогибы и углы поворота, допускаемые наложенными внешними связями.

Подставляя зависимость (2.1) в выражение для вариации δU , получим

$$\delta U = \int_0^l \int_F E \left[\delta \left(\left(\frac{du}{dx} \right)^2 \right) - y \delta \left(\left(\frac{du}{dx} \right) \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right) \right) + y^2 \delta \left(\left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 \right) + \right. \\ \left. + \delta \left(\left(\frac{du}{dx} \right) \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right) - y \delta \left(\left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right) \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right) + \frac{1}{4} \delta \left(\left(\frac{dv}{dx} \right)^4 \right) \right] dF dx,$$

где в соответствии со свойством вариации произвольной функции использованы соотношения вида

$$\frac{d(\delta u)}{dx} = \delta \left(\frac{du}{dx} \right), \quad \frac{d^2(\delta v)}{dx^2} = \delta \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right).$$

Выполнив интегрирование по толщине элемента с учетом геометрических характеристик сечения стержня

$$\int_F dF = F, \quad \int_F y dF = 0, \quad \int_F y^2 dF = J,$$

получим

$$\delta U = \int_0^l \left[EF \delta \left(\left(\frac{du}{dx} \right)^2 \right) + EJ \delta \left(\left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 \right) - N \delta \left(\left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right) - \right. \\ \left. - \frac{EF}{4} \delta \left(\left(\frac{dv}{dx} \right)^4 \right) \right] dx.$$

Здесь введено обозначение для величины продольной нагрузки $N = -EF \frac{du}{dx}$. Знак минус указывает на то, что сила N вызывает сжатие стержня.

Опуская член высокого порядка малости $\frac{EF}{4} \left(\frac{dv}{dx} \right)^4$, приводим уравнение (2.2) к статически эквивалентному виду

$$\begin{aligned}
& EF \int_0^l \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx + EJ \int_0^l \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 dx - N \int_0^l \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx = \\
& = P_{x1} u_1 + P_{x2} u_2 + P_{y1} v_1 + M_1 \theta_1 + P_{y2} v_2 + M_2 \theta_2. \quad (2.3)
\end{aligned}$$

Выразим функции перемещений $v(x)$ и $u(x)$ через узловые перемещения элемента:

$$v(x) = \{ \psi_1(x) \quad \psi_2(x) \quad \psi_3(x) \quad \psi_4(x) \} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix};$$

$$u(x) = \{ \psi_5(x) \quad \psi_6(x) \} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix},$$

где $\psi_i(x)$, $i=1,2,\dots,6$ – функции формы двухузлового балочного конечного элемента; $\{ \Delta_{\text{н}} \} = \{ v_1 \theta_1 v_2 \theta_2 \}^T$, $\{ \Delta_{\text{с}} \} = \{ u_1 u_2 \}^T$ – векторы узловых перемещений, учитывающие изгибную $\{ \Delta_{\text{н}} \}$ и осевую $\{ \Delta_{\text{с}} \}$ виды деформации.

Поле перемещений $v(x)$ элемента аппроксимируем с помощью полного кубического полинома

$$\begin{aligned}
v(x) &= a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 = \\
&= \{ 1 \mid x \mid x^2 \mid x^3 \} \{ a_1 \mid a_2 \mid a_3 \mid a_4 \}^T = \{ X \} \{ a \}. \quad (2.4)
\end{aligned}$$

Используя граничные условия на концах стержня (рис. 2.1, а):

$$\text{при } x=0 \rightarrow \begin{cases} v = v_1; \\ v' = \theta_1, \end{cases} \quad \text{при } x=l \rightarrow \begin{cases} v = v_2; \\ v' = \theta_2, \end{cases}$$

и зависимость (2.4), определим вектор узловых перемещений в виде

$$\{ \Delta_{\text{н}} \} = [L] \{ a \}.$$

Здесь матрица коэффициентов

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & -1 & -2l & -3l^2 \end{bmatrix}.$$

Полученное выражение позволяет установить связь между пе-

ремещением в произвольной точке элемента $v(x)$ и вектором узловых перемещений $\{\Delta_{\text{и}}\}$:

$$v(x) = \{X\} [LJ]^{-1} \{\Delta_{\text{и}}\} = \{\Psi_{\text{и}}\} \{\Delta_{\text{и}}\},$$

где $[LJ]^{-1}$ – матрица, обратная матрице $[LJ]$; вектор функций формы конечного элемента

$$\{\Psi_{\text{и}}\} = \left\{ \psi_1(x) \mid \psi_2(x) \mid \psi_3(x) \mid \psi_4(x) \right\},$$

где балочные функции

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= 1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3}, & \psi_2(x) &= -x + 2\frac{x^2}{l} - \frac{x^3}{l^2}, \\ \psi_3(x) &= 3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3}, & \psi_4(x) &= \frac{x^2}{l} - \frac{x^3}{l^2}. \end{aligned}$$

Элементы вектора $\{\Psi_{\text{и}}\}$ представляют собой кубические полиномы Эрмита, описывающие изгибную деформацию балочного элемента с защемленными концами (рис. 2.1, в) при единичных линейных (функции $\psi_1(x)$, $\psi_3(x)$) и угловых (функции $\psi_2(x)$, $\psi_4(x)$) смещениях. На рис. 2.2, а показаны графики функций $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\psi_3(x)$, $\psi_4(x)$.

Функцию осевого перемещения $u(x)$ в пределах конечного элемента аппроксимируем одномерными линейными полиномами типа (рис. 2.2, б)

$$\psi_5(x) = 1 - \frac{x}{l}, \quad \psi_6(x) = \frac{x}{l}.$$

Тогда $u(x) = \{\Psi_{\text{с}}\} \{\Delta_{\text{с}}\}$, где $\{\Psi_{\text{с}}\} = \left\{ \psi_5(x) \mid \psi_6(x) \right\}$.

На основании уравнения (2.3) и вектора $\{\Psi_{\text{и}}\}$ формируем матрицу изгибной жесткости

$$[k_{\text{и}}] = EJ \int_0^l \left(\frac{d^2 \{\Psi_{\text{и}}\}}{dx^2} \right)^T \frac{d^2 \{\Psi_{\text{и}}\}}{dx^2} dx = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

и матрицу, учитывающую изменение изгибной жесткости стержня в зависимости от величины продольной силы N ,

$$[k_{\Gamma}] = N \int_0^l \left(\frac{d\{\Psi_{\Pi}\}}{dx} \right)^T \frac{d\{\Psi_{\Pi}\}}{dx} dx = \frac{N}{30l} \begin{bmatrix} 36 & -3l & -36 & -3l \\ -3l & 4l^2 & 3l & -l^2 \\ -36 & 3l & 36 & 3l \\ -3l & -l^2 & 3l & 4l^2 \end{bmatrix}.$$

Как видно, элементы матрицы $[k_{\Gamma}]$ зависят только от геометрического параметра l (длины стержня), поэтому ее называют геометрической матрицей жесткости.

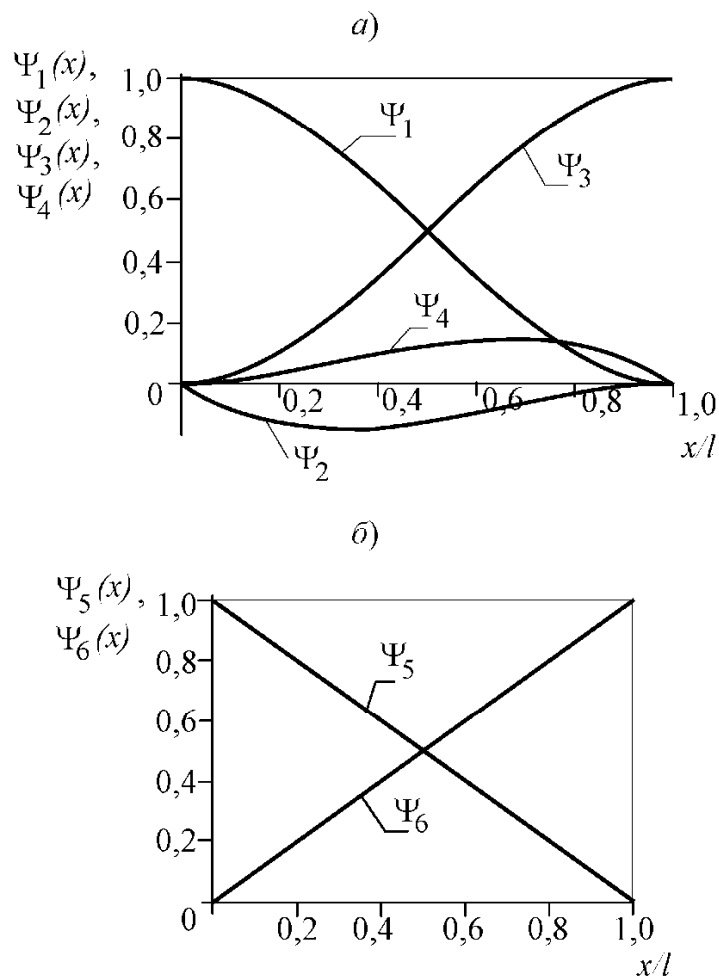


Рис. 2.2

По аналогии формируем матрицу осевой жесткости стержня:

$$[k_c] = EF \int_0^l \{\Psi_c\}^T \{\Psi_c\} dx = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрицу общей жесткости $[k]$ двухузлового балочного конеч-

ного элемента в локальных осях $\{x, y\}$ построим с помощью следующей взаимно непроникающей блочной сборки:

$$[k] = \left[\begin{array}{c|c} [k_c] & 0 \\ \hline 0 & [k_n] \end{array} \right] = \quad (2.5)$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc|cc} EF/l & -EF/l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EF/l & EF/l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 12EJ/l^3 & -6EJ/l^2 & -12EJ/l^3 & -6EJ/l^2 \\ \hline 0 & 0 & -6EJ/l^2 & 4EJ/l & 6EJ/l^2 & 2EJ/l \\ \hline 0 & 0 & -12EJ/l^3 & 6EJ/l^2 & 12EJ/l^3 & 6EJ/l^2 \\ \hline 0 & 0 & -6EJ/l^2 & 2EJ/l & 6EJ/l^2 & 4EJ/l \end{array} \right]$$

В соответствии с полученной структурой $[k]$ геометрическую матрицу жесткости элемента представим в форме

$$[k_r] = \frac{N}{30l} \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 36 & -3l & -36 & -3l \\ \hline 0 & 0 & -3l & 4l^2 & 3l & -l^2 \\ \hline 0 & 0 & -36 & 3l & 36 & 3l \\ \hline 0 & 0 & -3l & -l^2 & 3l & 4l^2 \end{array} \right]. \quad (2.6)$$

Таким образом, матрицы $[k]$ и $[k_r]$ имеют одинаковую размерность 6×6 , что необходимо для программирования алгоритма формирования матричных уравнений МКЭ.

Резльтирующее уравнение равновесия для сжатого балочного элемента в местных осях $\{x, y\}$ имеет вид

$$([k] - N[k_r])\{w\} = \{p\}, \quad (2.7)$$

где $\{p\} = \{P_{x1} P_{x2} P_{y1} M_1 P_{y2} M_2\}^T$ – вектор узловых сил (рис. 2.1, б).

В приведенном выражении (2.6) элементы матрицы $[k_r]$ зависят от продольной силы N , т. е. в конечном счете, от неизвестных составляющих u_1 и u_2 вектора узловых перемещений $\{w\}$. Поэтому уравнение (2.7) оказывается нелинейным и решение его может быть получено численным методом с использованием итерационной про-

цедуры, например алгоритма Ньютона-Рафсона.

2.2. Комбинированные балочные конечные элементы

В расчетной практике часто встречаются схемы рам с шарнирными неопорными соединениями стержней в узлах (рис. 2.3). Данная задача может быть решена тремя способами. Рассмотрим каждый из них в отдельности.

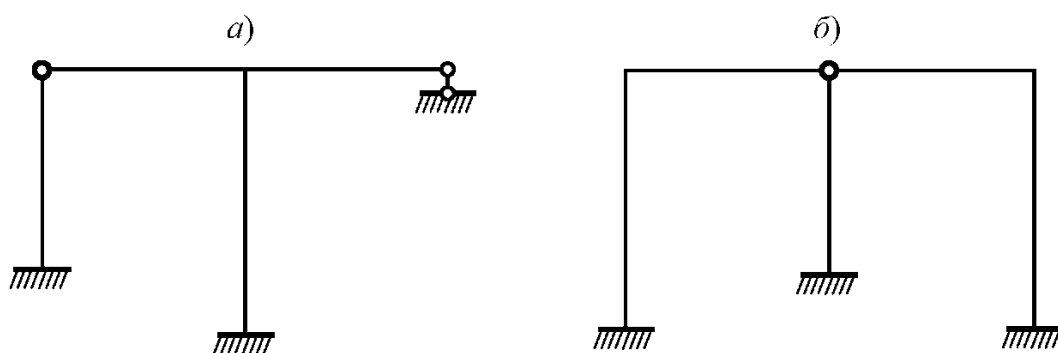


Рис. 2.3

Первый способ заключается в задании дополнительных вращательных степеней свободы для стержней, присоединяемых к основному стержню. За основной обычно принимается стержень, имеющий наименьший номер в каждом конкретном шарнирном соединении. Таким образом, для рам, изображенных на рис. 2.3, необходимо ввести одну (рис. 2.3, *a*) и две (рис. 2.3, *б*) дополнительные степени свободы.

Второй способ основан на задании в неопорном шарнире дополнительных номеров узлов для каждого присоединяемого стержня. Так, для рамы, приведенной на рис. 2.3, *a*, в шарнире необходимо задать два узла, а для рамы, показанной на рис. 2.3, *б* – три узла. Линейные смещения узлов, принадлежащие шарнирному соединению, полагаются равными.

Третий способ учета шарнирных соединений базируется на введении так называемых комбинированных балочных конечных элементов, имеющих шарнир на одном из концов. В дальнейшем будем использовать этот способ.

Выполним построение матрицы общей $[k]$ и геометрической $[k_{\Gamma}]$ жесткости для комбинированного балочного конечного эле-

мента (рис. 2.4, а), имеющего шарнирное закрепление в начале (узел 1) и жесткую заделку на конце (узел 2). Используя граничное условие $x=0$ $M_1 = 0$ и четвертую строку матрицы общей жесткости (2.5), составим уравнение

$$M_1 = -\frac{6EJ}{l^2} v_1 + \frac{4EJ}{l} \theta_1 + \frac{6EJ}{l^2} v_2 + \frac{2EJ}{l} \theta_2 = 0.$$

$$\text{Отсюда находим } \theta_1 = \frac{3}{2l} v_1 - \frac{3}{2l} v_2 - \frac{1}{2} \theta_2.$$

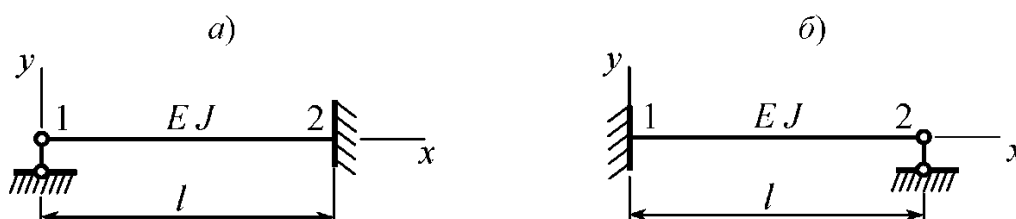


Рис. 2.4

На основании выражения для θ_1 сформируем матрицу преобразования $[g_1]$, устанавливающую связь между векторами узловых перемещений базового (рис. 2.1, в) и рассматриваемого комбинированного элемента

$$[g_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2l} & 0 & -\frac{3}{2l} & -\frac{1}{2} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Составляющие матрицы общей жесткости $[k_1]$ комбинированного элемента определяем с помощью соотношения

$$[k_1] = [g_1]^T [k] [g_1],$$

или в явном виде

$$[k_1] = \begin{bmatrix} EF/l & -EF/l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EF/l & EF/l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3EJ/l^3 & 0 & -3EJ/l^3 & -3EJ/l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -3EJ/l^3 & 0 & 3EJ/l^3 & 3EJ/l^2 \\ 0 & 0 & -3EJ/l^2 & 0 & 3EJ/l^2 & 3EJ/l \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Выполнив аналогичные преобразования для комбинированного балочного элемента, показанного на рис. 2.4, б, определим:

$$[g_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2l} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2l} & 0 \end{bmatrix};$$

$$[k_2] = [g_2]^T [k] [g_2] = \begin{bmatrix} EF/l & -EF/l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EF/l & EF/l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3EJ/l^3 & -3EJ/l^2 & -3EJ/l^3 & 0 \\ 0 & 0 & -3EJ/l^2 & 3EJ/l & 3EJ/l^2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -3EJ/l^3 & 3EJ/l^2 & 39EJ/l^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Соответствующие выражения для $[k_{\Gamma 1}]$ и $[k_{\Gamma 2}]$ вычисляем по формулам:

$$[k_{\Gamma 1}] = [g_{\Gamma 1}]^T [k_{\Gamma}] [g_{\Gamma 2}] = \frac{N}{8l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 9 & 0 & -9 & -l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -9 & 0 & 9 & l \\ 0 & 0 & -l & 0 & l & l^2 \end{bmatrix}; \quad (2.10)$$

$$[k_{r2}] = [g_{r2}]^T [k_r] [g_{r2}] = \frac{N}{8l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 9 & -l & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -l & l^2 & l & 0 \\ \hline 0 & 0 & -9 & l & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

где матрицы преобразования

$$[g_{r1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4l} & 0 & -\frac{3}{4l} & \frac{1}{4} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [g_{r2}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4l} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4l} & 0 \end{bmatrix},$$

$[k_r]$ – геометрическая матрица жесткости базового элемента (рис. 2.1, в), вычисляемая по формуле (2.6).

Отметим, что в матрицах (2.8), (2.9) элементам, расположенным на главной диагонали, в местах пересечения нулевых строк и столбцов искусственно присвоено значение единицы.

2.3. Преобразование матриц жесткости при переходе к глобальным осям

Процедура формирования глобальной матрицы жесткости стержневой системы называется ансамблированием и выполняется в глобальной, как правило, декартовой системе координат $\{\bar{x}, \bar{y}\}$ (рис. 2.5).

Векторы узловых перемещений и сил для балочного элемента в осях $\{\bar{x}, \bar{y}\}$ имеют структуру:

$$\{\bar{w}\} = \{\bar{u}_1 \ \bar{u}_2 \ \bar{v}_1 \ \theta_1 \ \bar{v}_2 \ \theta_2\}^T; \quad \{\bar{p}\} = \{\bar{P}_{x1} \ \bar{P}_{x2} \ \bar{P}_{y1} \ M_1 \ \bar{P}_{y2} \ M_2\}^T.$$

Узловые перемещения в локальных $\{x, y\}$ и глобальных $\{\bar{x}, \bar{y}\}$ координатах связаны матричным соотношением

$$\{\bar{w}\} = [c]^T \{w\},$$

где диагональная матрица поворота конечного элемента размерностью 6×6

$$[c] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & 0 & 0 & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \varphi & 0 & 0 & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

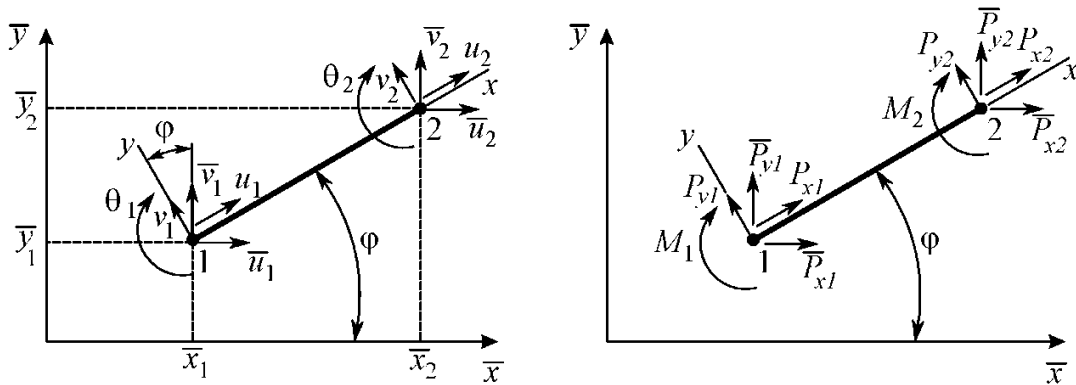


Рис. 2.5

Отметим, что матрица $[c]$ является ортогональной, т. е.

$$[c]^{-1} = [c]^T.$$

Аналогично осуществляем преобразование вектора-столбца узловых сил

$$\{\bar{p}\} = [c]^T \{p\}.$$

При переходе от локальных осей $\{x, y\}$ к глобальным координатам $\{\bar{x}, \bar{y}\}$ матрицы общей $[k]$ и геометрической $[k_g]$ жесткости балочного конечного элемента преобразуются с помощью следующих соотношений:

$$[\bar{k}] = [c]^T [k] [c]; \quad [\bar{k}_g] = [c]^T [k_g] [c], \quad (2.12)$$

где $[\bar{k}]$ и $[\bar{k}_g]$ – матрицы общей и геометрической жесткости в глобальных осях $\{\bar{x}, \bar{y}\}$.

Отметим, что угловые перемещения θ_1 и θ_2 и моменты M_1 и

M_2 при повороте координат в плоскости изгиба не изменяются, поэтому соответствующим элементам матрицы $[c]$ присвоены единичные значения.

Величины $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ для отрезка $\bar{1}\bar{2}$ (рис. 2.5) определяем по формулам:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{l}; \quad \sin\varphi = \frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1}{l}.$$

При программировании длину элемента удобно вычислять по значениям глобальных координат узлов элемента $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2$ с помощью выражения

$$l = \sqrt{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2}.$$

2.4. Формирование результирующей системы уравнений стержневой системы

Рассмотрим алгоритмические аспекты управления данными и формирования топологических массивов, определяющих конечно-элементную сетку. В качестве примера возьмем раму, показанную на рис. 2.6, а. Величину l принимаем равной 6 м. В данном случае при дискретизации (разбивке) исходной схемы на конечные элементы используем равномерную сетку (длина конечного элемента 2 м). Однако следует учитывать, что при расчете на устойчивость точность вычислений повышается при сгущении сетки на сжатых стержнях конструкции. Узлы и степени свободы ансамбля элементов нумеруем целыми положительными числами, начиная с единицы. С каждым узлом связываем два перемещения вдоль осей \bar{x}, \bar{y} и угол поворота относительно оси \bar{z} (направлена на наблюдателя). Параметры конечно-элементной схемы, представленной на рис. 2.6, б, следующие: $n_e=13$ – число конечных элементов (номера элементов обведены кружками); $n_r=14$ – число узлов; $n_g=42$ – число неизвестных узловых перемещений (степеней свободы).

В дальнейшем будем различать две системы нумерации степеней свободы: глобальную, вводимую расчетчиком в порядке последовательного обхода узлов модели; локальную нумерацию, жестко связанную с узлами 1 и 2 базового конечного элемента (на рис. 2.6, б от-

мечен символом *).

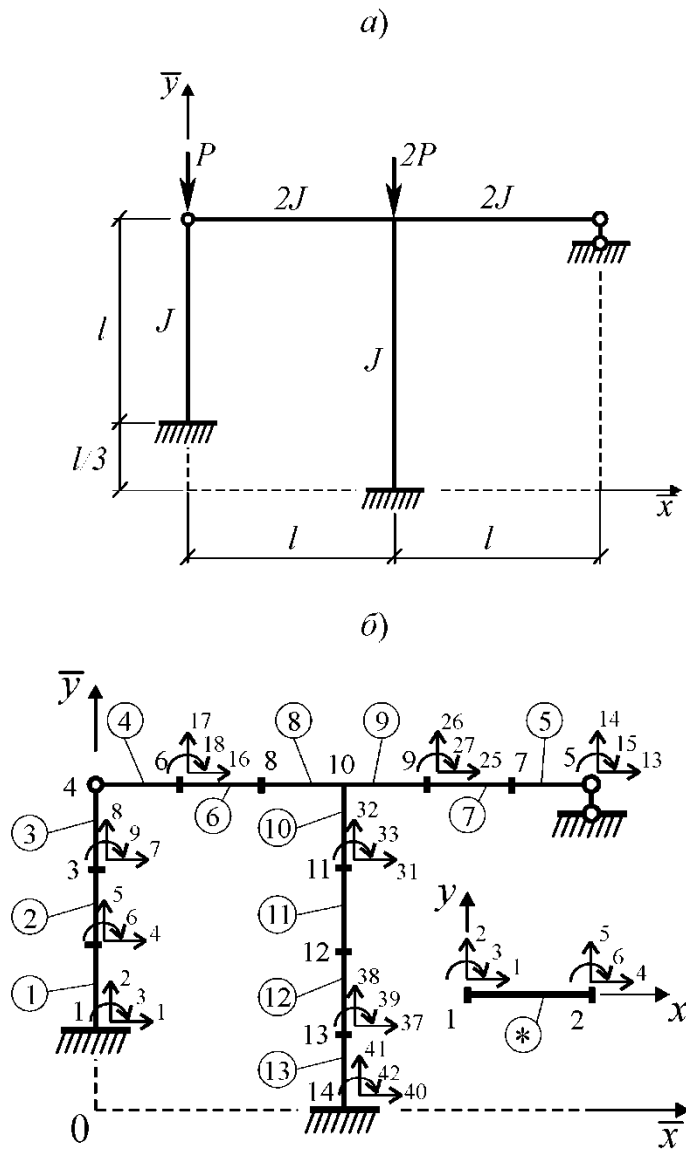


Рис. 2.6

Введем матрицу инцидентности $[E]$ (связности), устанавливающую однозначное соответствие между строками и столбцами глобальной и локальной матриц жесткости. Матрица $[E]$ имеет размерность $n_e \times n_g$ и является булевой матрицей, т. е. состоит из нулей и единиц. Причем $E_{ij} = 1$, если номер j глобальной степени свободы принадлежит элементу i . В противном случае $E_{ij} = 0$. Для рассматриваемого примера портрет (структура в символьном виде) мат-

рицы $[E]$ имеет вид, показанный на рис. 2.7.
13×42

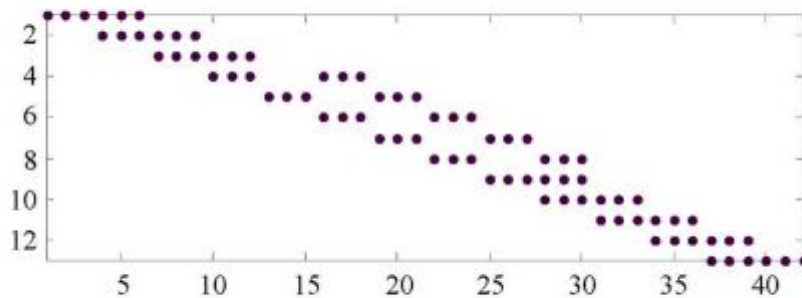


Рис. 2.7

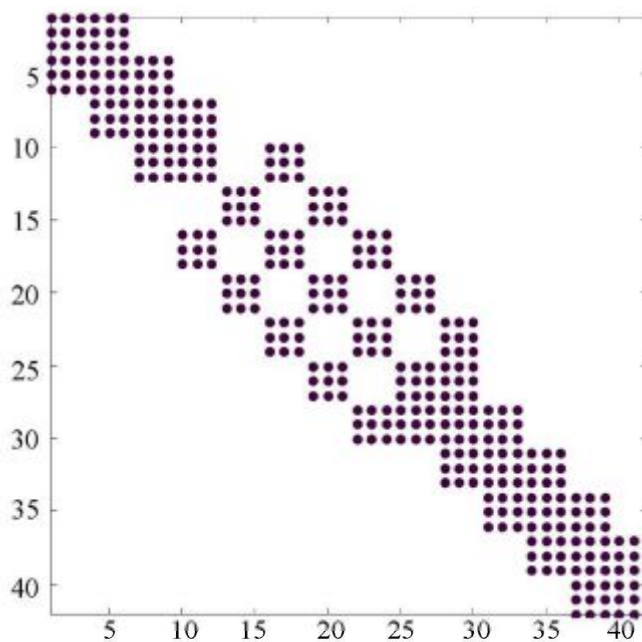


Рис. 2.8

На практике построение матрицы $[E]$ полностью или частично автоматизировано. Как правило, вводится топологическая информация о нумерации узлов ансамбля элементов, на основании которой формируется матрица $[E]$.

Формально процесс конечно-элементной сборки можно представить в виде символической процедуры произведения матриц $[E]^T [E]$. В результате получаем портрет глобальной матрицы жесткости $[K]$ (рис. 2.8).
(42×42)

Характерной особенностью матрицы $[K]$ является ее симмет-

ричная структура и разреженность. Последнее указывает на то, что матрица $[K]$ содержит большое количество нулевых элементов. Поэтому в памяти компьютера достаточно хранить верхний треугольник матрицы $[K]$, содержащий только ненулевые элементы. Для этого будем использовать экономичную схему хранения числовой информации в виде разреженного строчного формата.

Отметим, что при организации вычислительного процесса процедура символической сборки ($[E]^T [E]$) предшествует процедуре численного включения элементной матрицы жесткости $[k]$ и вектора сил $\{p\}$ в глобальную матрицу жесткости $[K]$ и соответствующий глобальный вектор узловых сил $\{P\}$.

2.5. Линейный анализ устойчивости методом конечных элементов

Полагая, что в продольно сжатых стержневых элементах конструкции до потери устойчивости отсутствуют изгибные деформации, представим уравнение равновесия в матричной форме

$$[[K] + \lambda [K_\Gamma]] \{W\} = 0,$$

где $[K]$ и $[K_\Gamma]$ – глобальные матрицы общей и геометрической жесткости; λ – параметр нагружения (скалярная величина); $\{W\}$ – вектор узловых перемещений ансамбля элементов, соответствующий вектору узловых сил $\{P\}$, вызывающих только сжатие в конечных элементах. Для формирования матриц $[K]$ и $[K_\Gamma]$ используем выражения (2.5), (2.6), (2.8) – (2.12).

После потери устойчивости узловые перемещения становятся неопределенными. Математическим критерием потери устойчивости является равенство нулю определителя

$$\det [[K] + \lambda [K_\Gamma]] = 0.$$

При этом из определителя исключаются “лишние” строки и столбцы, отвечающие номерам узлов, на которые наложены связи. Таким образом, порядок результирующей системы уравнений всегда меньше, чем порядок глобальной матрицы жесткости. С вычислительной точки зрения определение параметра λ путем раскрытия определителя высокого порядка и решения соответствующего трансцендентного

уравнения нереально. Поэтому подойдем к анализу устойчивости стержневой системы как к обобщенной проблеме собственных значений, допускающей прямое решение уравнения вида

$$[K] \{X\} = -\lambda_{min} [K_r] \{X\}, \quad (2.13)$$

λ_{min} – неизвестное наименьшее собственное значение; $\{X\}$ – собственный вектор, характеризующий возможную форму потери устойчивости сжатых стержней.

В данной формулировке требуется определить величину λ_{min} , при которой геометрическая матрица жесткости “компенсирует” влияние матрицы общей жесткости. С физической точки зрения величина λ_{min} представляет собой критическую силу $P_{кр}$, соответствующую потере устойчивости. При выборе алгоритма решения уравнения (2.13) следует иметь в виду, что матрица $[K_r]$ имеет нулевые диагональные элементы, т. е. является вырожденной.

Для решения данной смешанной системы алгебраических уравнений применим специальный итерационный алгоритм, основанный на отношении Релея [5]:

$$\lambda_{min}^{(k+1)} = \frac{\{X\}_{k+1}^T [K] \{X\}_{k+1}}{\{X\}_{k+1}^T [K_r] \{X\}_{k+1}}, \quad k=1, 2, \dots$$

Процесс последовательных приближений останавливаем, когда

$$\frac{|\lambda_{min}^{(k+1)} - \lambda_{min}^{(k)}|}{\lambda_{min}^{(k+1)}} \leq \varepsilon,$$

где $\varepsilon = 10^{-2s}$, s – требуемое число значащих цифр, с которым вычисляется величина λ_{min} (обычно $s=3$).

Вектор узловой критической нагрузки определяем по формуле

$$\{P_{кр}\} = \lambda_{min} \{P\}.$$

Общеизвестно, что линейный анализ устойчивости стержневых систем дает завышенную величину критической нагрузки. Это связано с идеализацией расчетной схемы (отсутствие начальной “погиби” стержней и центральное приложение сил), а также тем, что в общей матрице жесткости блок осевой деформации независим от блока изгибной деформации. Реальные стержневые элементы имеют начальные геометрические несовершенства, что приводит к взаимосвязи

между осевыми и изгибными реакциями.

Вместе с тем рассмотренный численный метод позволяет дать верхнюю оценку критической нагрузки, величина которой может быть уточнена с помощью шаговой процедуры МКЭ.

2.6. Итерационный анализ устойчивости с применением шаговой процедуры метода конечных элементов

Элементы геометрической матрицы жесткости $[K_r]$ являются нелинейными функциями продольных усилий в сжатых стержневых элементах. Поэтому вычислительный процесс МКЭ должен быть организован по схеме ступенчатого (шагового) увеличения нагрузки при одновременной корректировке элементов матрицы $[K_r]$ и контроле несущей способности конструкции по найденным значениям перемещений w в конце каждого шага нагружения.

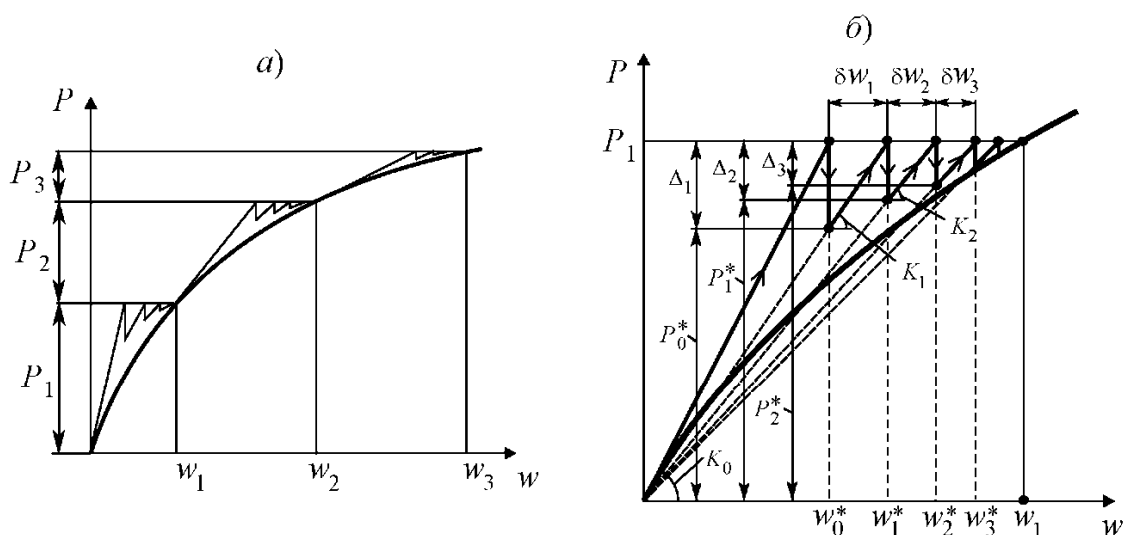


Рис. 2.9

Полагаем, что приращение нагрузки P_i на i -ом шаге происходит квазистатически и небольшой порцией. Решение геометрически нелинейной задачи на каждом шаге будем осуществлять итерационным методом Ньютона-Рафсона, суть которого состоит в последовательном вычислении дополнительных перемещений в узлах элементов, обусловленных невязкой сил. Графически такой подход (для трех шагов нагружения) представлен на рис. 2.9, а, где численное решение

показано в виде ступенчатой пилообразной линии.

Рассмотрим итерационный алгоритм МКЭ на примере первого шага нагружения (рис. 2.9, б). Для упрощения на рис. 2.9 фигурные и квадратные скобки в обозначениях векторов и матриц опущены.

Вычислительный процесс организуем следующим образом.

1. С помощью уравнения равновесия без учета геометрической матрицы жесткости вычисляем начальный вектор узловых перемещений

$$\{w_0^*\} = [K]^{-1} \{P_1\},$$

где $[K]$ – матрица общей жесткости; $\{P_1\}$ – вектор узловых сил на первом шаге нагружения.

2. Начало итерационного цикла $i = 1, 2, \dots, n_{max}$ (i – номер итерации, n_{max} – максимальное число итераций, задаваемое расчетчиком). По найденным значениям $\{w_{i-1}^*\}$ вычисляем осевые узловые реакции в сжатых конечных элементах и формируем геометрическую матрицу жесткости $[K_{\Gamma}(\{w_{i-1}^*\})]$. В обозначении $[K_{\Gamma}(\{w_{i-1}^*\})]$ величина в круглых скобках указывает на то, что элементы геометрической матрицы жесткости зависят от узловых перемещений.

3. Формируем матрицу жесткости $[K_i]$, относящуюся к текущей итерации

$$[K_i] = [K] + [K_{\Gamma}(\{w_{i-1}^*\})].$$

4. Вычисляем узловые реакции $\{P_{i-1}^*\}$, соответствующие вектору узловых перемещений $\{w_{i-1}^*\}$:

$$\{P_{i-1}^*\} = [K_i] \{w_{i-1}^*\}.$$

5. Вычисляем вектор невязки узловых реакций:

$$\{\Delta_i\} = \{R_1\} - \{R_{i-1}^*\}.$$

6. Вычисляем вектор дополнительных узловых перемещений $\{\delta w_i\}$, обусловленных вектором невязки $\{\Delta_i\}$:

$$\{\delta w_i\} = [K_i]^{-1} \{\Delta_i\}.$$

7. Осуществляем корректировку вектора узловых перемещений:

$$\{w_i^*\} = \{w_{i-1}^*\} + \{\delta w_i\}.$$

8. Начиная с $i=2$, выполняем оценку сходимости итерационной процедуры с помощью условия

$$\|\delta w_i - \delta w_{i-1}\| < \varepsilon, \quad (2.14)$$

где $\|\delta w_i - \delta w_{i-1}\| = \sqrt{\{\delta w_i - \delta w_{i-1}\}^T \{\delta w_i - \delta w_{i-1}\}}$ – норма вектора разности дополнительных узловых перемещений на смежных итерациях; $\varepsilon=10^{-8}$ – положительное малое число, используемое для окончания итерационного процесса уточнения решения.

Этапы 2÷8 повторяются до тех пор, пока не выполнится условие (2.14) или количество итераций не превысит n_{max} . Графически минимизация невязки сил представляет собой некоторую траекторию в виде пилообразной линии, приближающуюся к искомой точке решения (рис. 2.9, б).

Старт второго шага нагружения начинаем с решения системы уравнений

$$[[K] + [K_r(\{w_1\})]]\{w_0^*\} = \{P_2\},$$

где $\{w_1\}$ – вектор узловых перемещений, сформированный на первом шаге нагружения; $\{P_2\}$ – вектор дополнительных узловых сил, соответствующий второму шагу нагружения.

На этапе 3 итерационного процесса матрицу жесткости $[K_i]$ формируем с учетом данных, полученных на первом шаге нагружения

$$[K_i] = [K] + [K_r(\{w_1\} + \{w_{i-1}^*\})].$$

На этапе 7 корректировку вектора узловых перемещений выполняем по формуле

$$\{w_i^*\} = \{w_1\} + \{w_{i-1}^*\} + \{\delta w_i\}.$$

По аналогии выполняем вычисления на последующих шагах нагружения, используя векторы $\{P_3\}, \{P_4\}, \dots$.

В процессе шагового процесса нагружения осуществляем контроль поведения вектора $\{\delta w_i\}$ на каждой итерации. Обычно при нелинейном анализе устойчивости уменьшение величины $\{\delta w_i\}$ между смежными итерациями свидетельствует о достижении системой устойчивого состояния (процесс сходится). Фактом потери ус-

тойчивости является состояние, когда величины $\{\delta w_i\}$ увеличиваются от итерации к итерации (процесс расходится).

В разработанном программном обеспечении по желанию пользователя может быть включена опция “ $if_dis = 1$ ”, позволяющая после каждого шага нагружения корректировать геометрию расчетной схемы рамы путем алгебраического суммирования узловых координат и полученных перемещений. Эта опция позволяет проследить за эволюцией деформации конструкции. Естественно, что при этом расчетное время увеличивается, т. к. в начале каждого шага нагружения приходится заново формировать матрицу общей жесткости $[K]$. В отключенном состоянии “ $if_dis = 0$ ”.

2.7. Примеры линейного анализа устойчивости методом конечных элементов

С целью верификации (проверки на точность и сходимость) конечно-элементного решателя рассмотрим серию учебных примеров, для которых критическая нагрузка определена аналитически. При линейном анализе устойчивости рам следует придерживаться правила, согласно которому сжатые (нагруженные) стержни, как правило, стойки можно разбивать на несколько конечных элементов, а ненагруженные – обычно ригели – моделируются только одним элементом. Подробное описание ввода исходных данных изложено в приложении 5.

Пример 1. Требуется определить критическую нагрузку $P_{кр}$ для плоской рамы, показанной на рис. 2.10, а. Стержни рамы выполнены из стального проката двутаврового поперечного сечения № 14 (ригель двойной профиль). На рис. 2.10, б изображена конечно-элементная модель рамы, состоящая из 9 пространственных балочных элементов. Горизонтальный стержень 46 представлен комбинированным (с шарниром на конце) конечным элементом. Шарнир в узле 5 моделируем с помощью граничных условий. Здесь и далее стрелки, исходящие из узлов, указывают на наличие связей (линейных и угловых); значок “ \times ” связан с ориентацией “третьей точки” (рис. 2.10, в), лежащей в плоскости наибольшей жесткости элемента; шарнир обозначен выделенной точкой – \bullet . В рассматриваемом примере установленные связи позволяют раме деформироваться только в

плоскости Z_2, Z_3 . Безразмерный параметр продольной нагрузки для стойки высотой 6 м принимаем равным 1, для стойки высотой 8 м – 2.

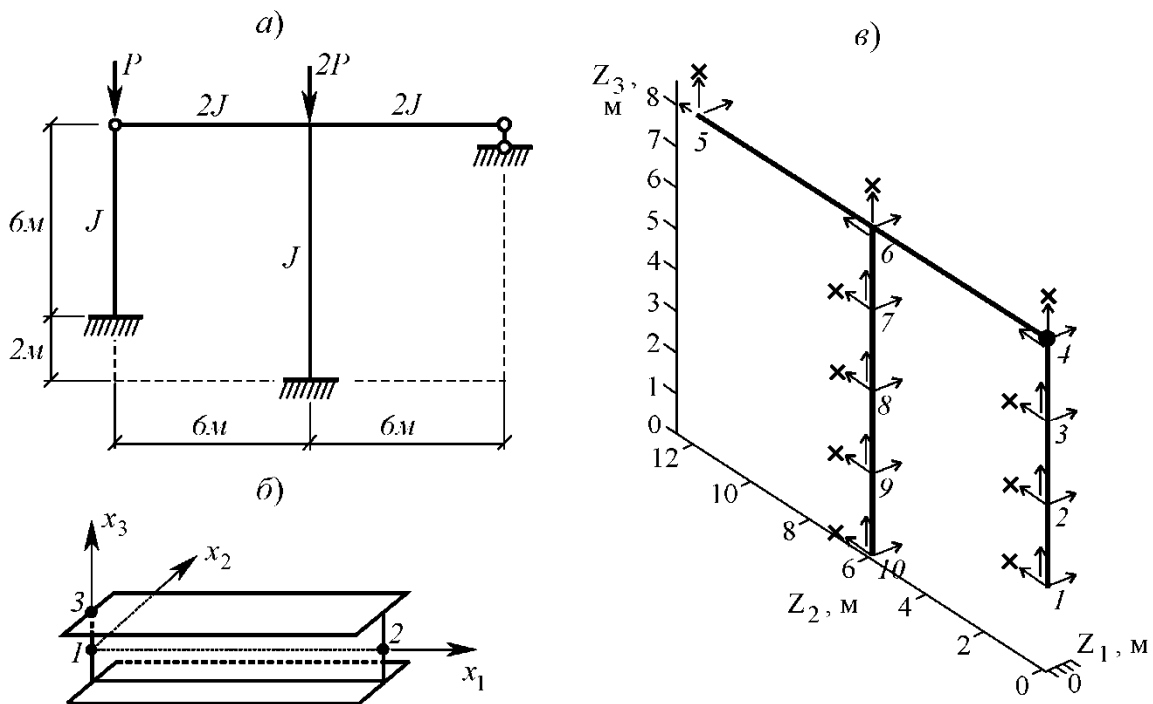


Рис. 2.10

Ранее в пп. 1.5 методом перемещений для рассматриваемой рамы было получено значение критической силы, равное $P_{кр} = 4,64 \frac{EJ}{l^2} = 78209$ Н. Численное значение, найденное за 7 итераций, составило $P_{кр} = 78340$ Н. Таким образом, для принятой схемы разбивки рамы на конечные элементы относительная погрешность не превышает 0,2%.

Содержимое файла результатов вычислений представлено на рис. 2.11. Приведенная в этом файле величина наименьшего (первого) собственного значения λ_{min} эквивалентна критической нагрузке $P_{кр}$, выраженной в Ньютонах. Собственный вектор $\{X\}$ распечатан в виде матрицы, строки которой соответствуют номерам узлов, а столбцы – безразмерным смещениям этих узлов вдоль глобальных осей Z_1, Z_2, Z_3 . Как видно, в узле 5, принадлежащем ригелю, смещение вдоль оси Z_2 отсутствует. Следует отметить, что особой прак-

тической значимости информация, содержащаяся в векторе $\{X\}$, не представляет, т. к. по этим данным мы можем судить только о качественном (виртуальном) поведении сжатых элементов модели рамы.

Результаты расчетов			
Число итераций	7		
Собственное значение	.783403D+05		
Собственный вектор			
№ узла	u_{z1}	u_{z2}	u_{z3}
1	.0000D+00	.0000D+00	.0000D+00
2	.0000D+00	-.1648D+00	.0000D+00
3	.0000D+00	-.9736D-01	.0000D+00
4	.0000D+00	.3574D+00	.0000D+00
5	.0000D+00	.0000D+00	.0000D+00
6	.0000D+00	.2730D+00	.0000D+00
7	.0000D+00	.2270D+00	.0000D+00
8	.0000D+00	-.3429D-01	.0000D+00
9	.0000D+00	-.2778D+00	.0000D+00
10	.0000D+00	.0000D+00	.0000D+00

Рис. 2.11

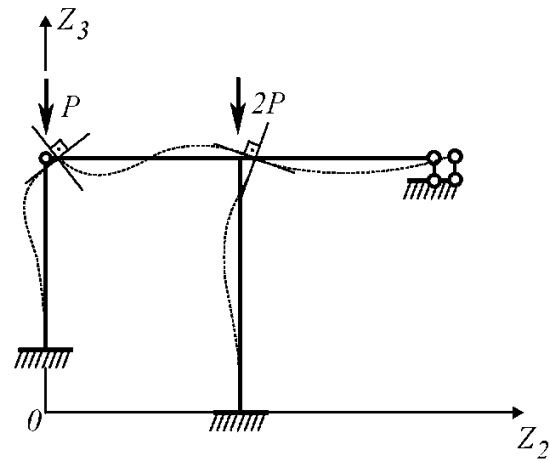


Рис. 2.12

б)

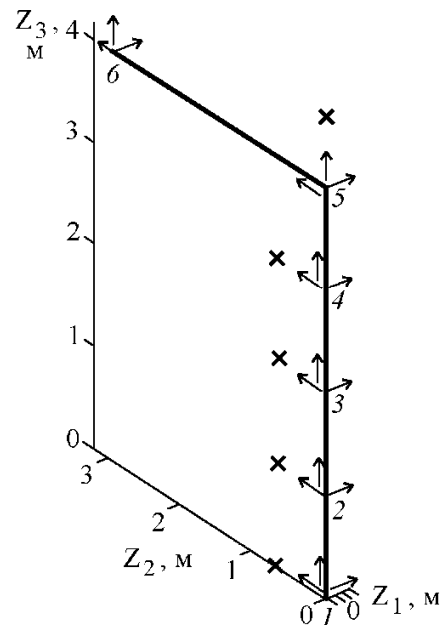
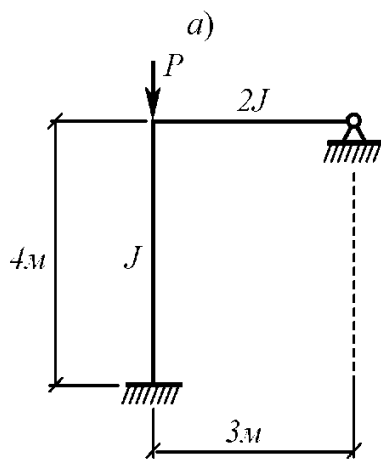


Рис. 2.13

Для того чтобы получить общую картину состояния рамы после потери устойчивости дополним изгиб стоек деформацией элементов 4-6 и 5-6 при условии сохранения перпендикулярности стержней в узле 6,

рис. 2.12. Анализируя данную форму потери устойчивости рамы, видим, что узлы стоек смещаются как влево, так и вправо от исходного состояния оси.

Пример 2. Требуется определить критическую нагрузку $P_{кр}$ для Г-образной плоской рамы, показанной на рис. 2.13, а. Конечно-элементная модель для данного примера представлена на рис. 2.13, б. Параметр продольной нагрузки для стойки принимаем равным 1.

В работе [3] приведено аналитическое значение $P_{кр}=2EJ$. Численное решение, полученное за 11 итераций, составило $P_{кр}=2,01EJ$. Величина критической нагрузки, определенная в работе [6] с помощью степенных рядов, равна $P_{кр}=2,04EJ$.

Результаты расчета и картина рамы после потери устойчивости приведены на рис. 2.14 и рис. 2.15. Примечательно, что в данном случае смещения узлов стойки дважды меняют знак с плюса на минус.

Результаты расчетов			
Число итераций	11		
Собственное значение	.230028D+07		
Собственный вектор			
№ узла	u_z1	u_z2	u_z3
1	.0000D+00	.0000D+00	.0000D+00
2	.0000D+00	-.1056D+00	.0000D+00
3	.0000D+00	.8086D+00	.0000D+00
4	.0000D+00	.3573D+00	.0000D+00
5	.0000D+00	-.6452D+00	.0000D+00
6	.0000D+00	.0000D+00	.0000D+00

Рис.2.14

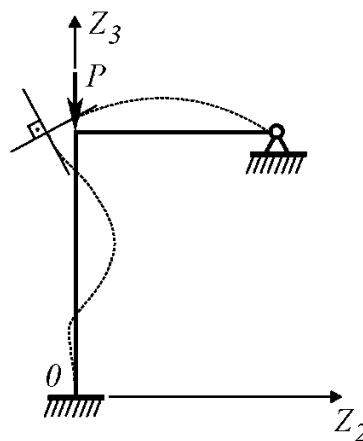


Рис. 2.15

Пример 3. Требуется определить критическую нагрузку $P_{кр}$ для симметричной рамы с шарниром, изображенной на рис. 2.16, а. Рассмотрим два варианта нагружения: а) силой P , приложенной к средней стойке; б) асимметричной системой сил $P, P, 2P$. Разбивка рамы на конечные элементы показана на рис. 2.16, б. Величину параметра продольной нагрузки назначаем в соответствии с рассматриваемым вариантом нагружения.

В работе [3] аналитически получены следующие результаты:

- а) $P_{кр}=0,9216EJ$
- б) $P_{кр}=0,3108EJ$.

В работе [6] для рассматриваемого примера приведены значения

критической нагрузки:

а) $P_{кр} = 0,9253 EJ$; б) $P_{кр} = 0,3116 EJ$.

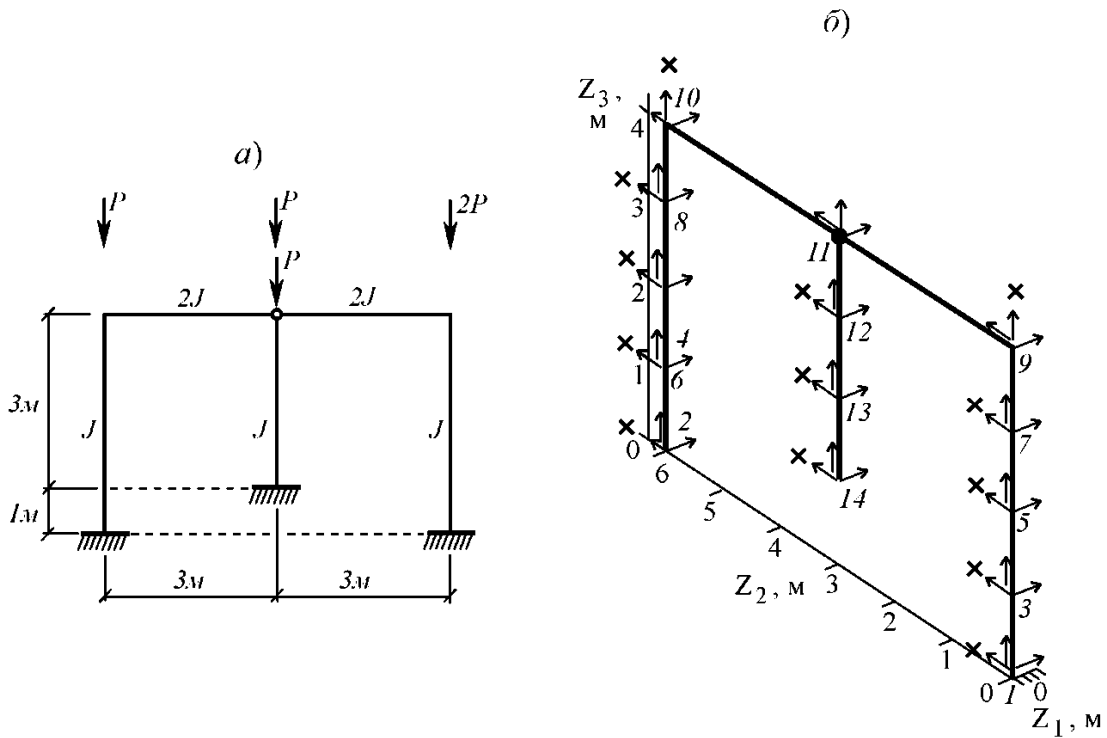


Рис. 2.16

Результаты расчетов
 Число итераций 10
 Собственное значение .105557D+07
 Собственный вектор

№ узла	u_z1	u_z2	u_z3
1	.0000D+00	.0000D+00	.0000D+00
2	.0000D+00	.0000D+00	.0000D+00
3	.0000D+00	.0000D+00	.0000D+00
4	.0000D+00	.0000D+00	.0000D+00
5	.0000D+00	.0000D+00	.0000D+00
6	.0000D+00	.0000D+00	.0000D+00
7	.0000D+00	.0000D+00	.0000D+00
8	.0000D+00	.0000D+00	.0000D+00
9	.0000D+00	.0000D+00	.0000D+00
10	.0000D+00	.0000D+00	.0000D+00
11	.0000D+00	.8552D+00	.0000D+00
12	.0000D+00	-.3474D+00	.0000D+00
13	.0000D+00	-.3931D+00	.0000D+00
14	.0000D+00	.0000D+00	.0000D+00

Рис. 2.17

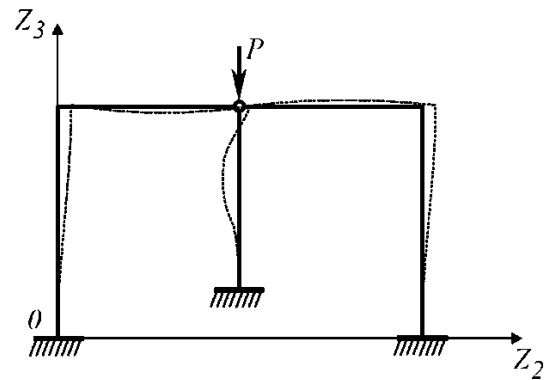


Рис. 2.18

Результаты расчетов			
Число итераций	8		
Собственное значение	.354812D+06		
Собственный вектор			
№ узла	u_z1	u_z2	u_z3
1	.0000D+00	.0000D+00	.0000D+00
2	.0000D+00	.0000D+00	.0000D+00
3	.0000D+00	-.1599D+00	.0000D+00
4	.0000D+00	-.3383D+00	.0000D+00
5	.0000D+00	-.3268D-01	.0000D+00
6	.0000D+00	-.7873D-01	.0000D+00
7	.0000D+00	.1044D+00	.0000D+00
8	.0000D+00	.2270D+00	.0000D+00
9	.0000D+00	.2007D+00	.0000D+00
10	.0000D+00	.3990D+00	.0000D+00
11	.0000D+00	.4493D+00	.0000D+00
12	.0000D+00	-.1249D+00	.0000D+00
13	.0000D+00	-.2074D+00	.0000D+00
14	.0000D+00	.0000D+00	.0000D+00

Рис. 2.19

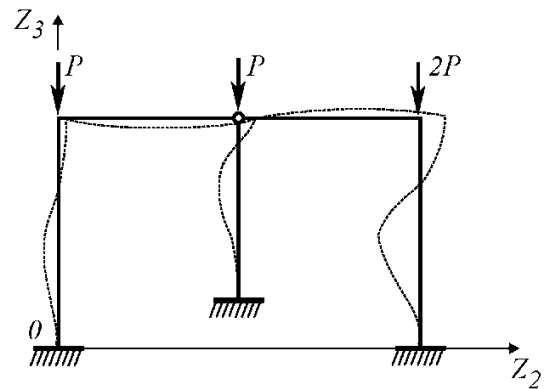


Рис. 2.20

Данные численного решения, полученные с помощью итерационного алгоритма (раздел 2.5):

а) 10 итераций, $P_{кр} = 0,9227 EJ$; б) 8 итераций, $P_{кр} = 0,3102 EJ$.

Распечатка результатов расчетов и соответствующие картины потери устойчивости представлены для варианта нагружения а) на рис. 2.17 и рис. 2.18, для варианта б) – на рис. 2.19 и рис. 2.20. Здесь, как и ранее, в качестве исходной информации для визуализации рамы после потери устойчивости использованы данные вектора $\{X\}$, с помощью которых сначала наносятся смещения узлов сжатых стержней. После этого картину локальной потери устойчивости по смыслу достраиваем до общего вида, используя заданные условия соединений в узлах рамы.

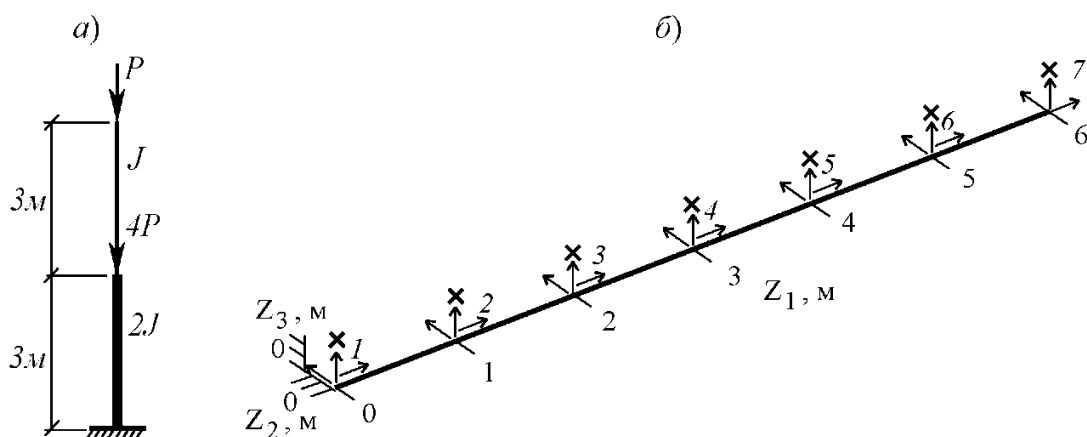


Рис. 2.21

Пример 4. Требуется определить критическую силу $P_{кр}$ для двухступенчатой стойки, изображенной на рис. 2.21, а. Используя равномерный шаг, разбиваем стойку на 6 конечных элементов (рис.2.21, б). Величину параметра продольной нагрузки ν назначаем для первой ступени, равной 4, для второй ступени – 1. Изгибную жесткость второй ступени принимаем равной $EJ=1,144 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$.

Результаты конечно-элементного анализа представлены на рис. 2.22. Численное значение критической нагрузки $P_{кр}=90421 \text{ Н}$. Из приведенных данных видно, что упругая линия стойки после потери устойчивости имеет сложную форму (рис. 2.23). Для сравнения величина $P_{кр}$, полученная для аналогичной двухступенчатой стойки в разделе 1.5 методом перемещений, составила 90413 Н.

Результаты расчетов			
Число итераций 7			
Собственное значение .904206D+05			
Собственный вектор			
№ узла	u_z1	u_z2	u_z3
1	.0000D+00	.0000D+00	.0000D+00
2	.0000D+00	.0000D+00	-.4855D+00
3	.0000D+00	.0000D+00	-.3687D+00
4	.0000D+00	.0000D+00	.7614D+00
5	.0000D+00	.0000D+00	-.6972D-01
6	.0000D+00	.0000D+00	-.3628D-01
7	.0000D+00	.0000D+00	.4622D+00

Рис. 2.22

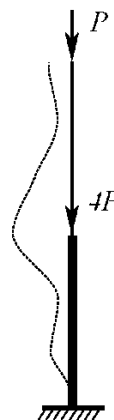


Рис. 2.23

Пример 5. Требуется определить критическую нагрузку $q_{кр}$ для арки параболической формы (рис. 2.24). Размеры поперечного сечения арки $0,4 \times 0,4 \text{ м}$. Модуль упругости материала $E = 2,7 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$. Уравнение, описывающее положение оси арки принимаем в виде [6]:

$$z = \frac{4f}{l^2}(lx - x^2).$$

Схема равномерной разбивки арки на конечные элементы с шагом 2 м (8 конечных прямолинейных балочных элементов) показана на рис. 2.25. Здесь оси Z_2 и Z_3 соответствуют осям x и z расчетной схемы (рис. 2.24).

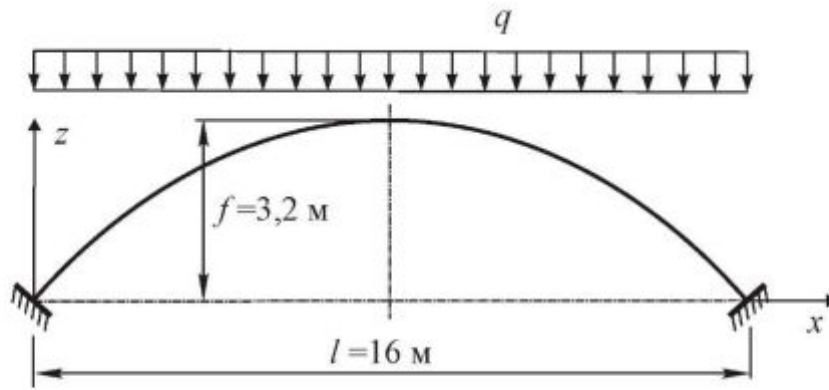


Рис. 2.24

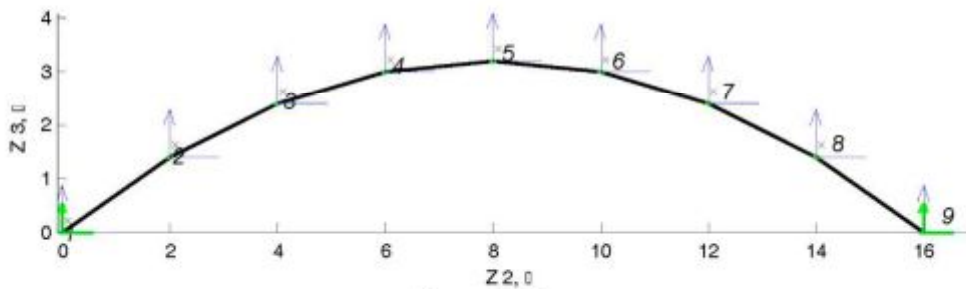


Рис. 2.25

Особенность данной стержневой конструкции состоит в том, что мы заранее не располагаем параметрами продольной нагрузки в конечных элементах. Поэтому предварительно решим обычную статическую задачу прочностного анализа, приняв $q = 1 \text{ Н/м}$. Схема приведения равномерно распределенной нагрузки к узловым силам и моментам рассмотрена ниже. В результате прочностного расчета получим картину распределения продольных сил в элементах (рис. 2.26). Отсюда можно задаться значениями параметра продольной силы для каждого элемента. Так для элементов 4-5, 3-4, 2-3, 1-2 принимаем следующие значения безразмерного параметра продольной силы: 1,0; 1,04; 1,13; 1,23.

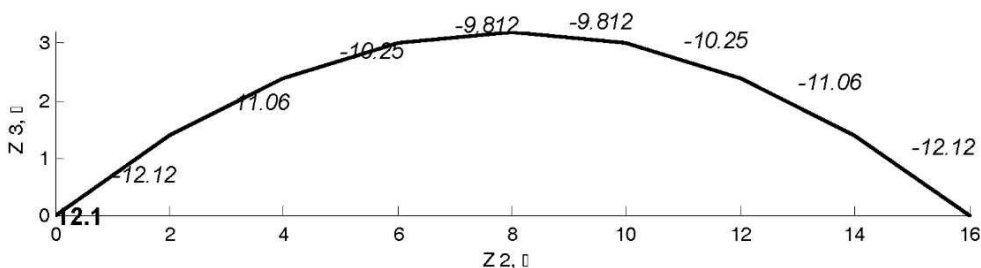


Рис. 2.26

Результаты расчетов			
Число итераций 16			
Собственное значение .145125D+08			
Собственный вектор			
№ узла	u_z1	u_z2	u_z3
1	.0000D+00	.0000D+00	.0000D+00
2	.0000D+00	.8273D-02	.5505D-01
3	.0000D+00	.1358D+00	-.2966D+00
4	.0000D+00	.1492D-01	-.2743D+00
5	.0000D+00	-.6738D-01	-.2563D-03
6	.0000D+00	.1482D-01	.2741D+00
7	.0000D+00	.1359D+00	.2970D+00
8	.0000D+00	.8421D-02	-.5484D-01
9	.0000D+00	.0000D+00	.0000D+00

Рис. 2.27

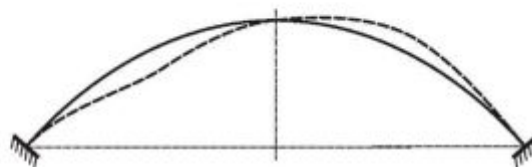


Рис. 2.28

Результаты численного расчета арки на устойчивость представлены на рис. 2.27 и 2.28. Как следует из полученных данных, минимальному значению критической нагрузки (в замке) $N_{кр} = 1451 \cdot 10^4$ Н (рис. 2.27) соответствует кососимметричная форма деформации арки (рис. 2.28). Для перехода от $N_{кр}$ к $q_{кр}$ используем соотношение

$$q_{кр} = \frac{1451 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot 1 \text{ Н/м}}{9,81 \text{ Н}} = 1479 \cdot 10^3 \text{ Н/м},$$

которое следует из линейно упругой постановки задачи.

Теоретическое значение критической нагрузки, приведенное в [3] составляет $q_{кр} = 1420 \cdot 10^3$ Н/м. Относительная погрешность численного решения составляет 4,2%. В работе [6] с помощью МКЭ для аналогичного числа элементов получено значение $q_{кр} = 1457 \cdot 10^3$ Н/м.

Интерес представляет влияние уменьшения шага разбивки на уточнение значения $q_{кр}$. Выполнив расчет с шагом 1 м (16 конечных элементов), получим $q_{кр} = 1473 \cdot 10^3$ Н/м. Таким образом, двукратное уменьшение размеров конечных элементов практически не отражается на точности численного решения.

2.8. Примеры деформационного расчета стержневых систем

Напомним, что согласно разработанному алгоритму вычислительный процесс организован в виде шаговой итерационной процедуры, с использованием равномерной схемы разбивки процесса на

гружения. Результирующие узловые реакции в элементах вычисляются с помощью формулы

$$\{ p \} = ([k] - P_{xcp} [k_r]) \{ w \},$$

где $P_{xcp} = 1/2(|P_{x1}| + |P_{x2}|)$ – среднее значение сжимающей продольной силы в элементе. Для растянутых элементов принимаем $P_{xcp} = 0$.

Пример 1. Требуется оценить напряженно-деформированное состояние portalной рамы, изображенной на рис. 2.29. Сечения всех стержней рамы принимаем одинаковыми, выполненными из стального двутавра с характеристиками: $I_x = 8950 \text{ см}^4$; $I_y = 518 \text{ см}^4$; $F = 61,2 \text{ см}^2$. Параметр нагрузки P назначаем как в примере [3] равным 1 т. Разбивку стоек и ригеля на конечные элементы выполняем с шагом 1 м. Процесс нагружения осуществляем за десять шагов.

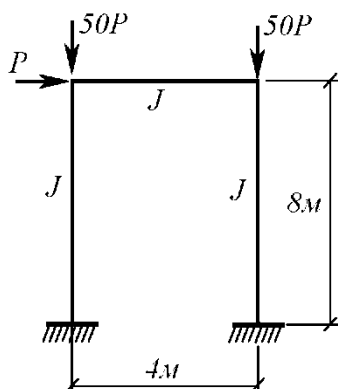


Рис. 2.29

Результаты расчетов в виде картин рамы в деформированном состоянии (визуальный масштаб перемещений 100:1) представлены на рис. 2.30. Данные линейного расчета показаны на рис. 2.30, а. На рис. 2.30, б и 2.30, в приведены результаты деформационного расчета, полученные соответственно без включения и с включением опции *if_dis*. На рис. 2.30 и далее цифры, нанесенные с помощью наклонного шрифта, являются значениями изгибающего момента M_{Z_1} (Н·м) в центрах конечных элементов. Значение максимального момента на каждом рисунке выделено жирным ненаклонным шрифтом.

Как видно, расчет по деформированной схеме с корректировкой координат узлов после каждого шага нагружения (рис. 2.30, в) приводит к увеличению изгибающего момента по сравнению с линейным

расчетом (рис. 2.30, а) на 35%.

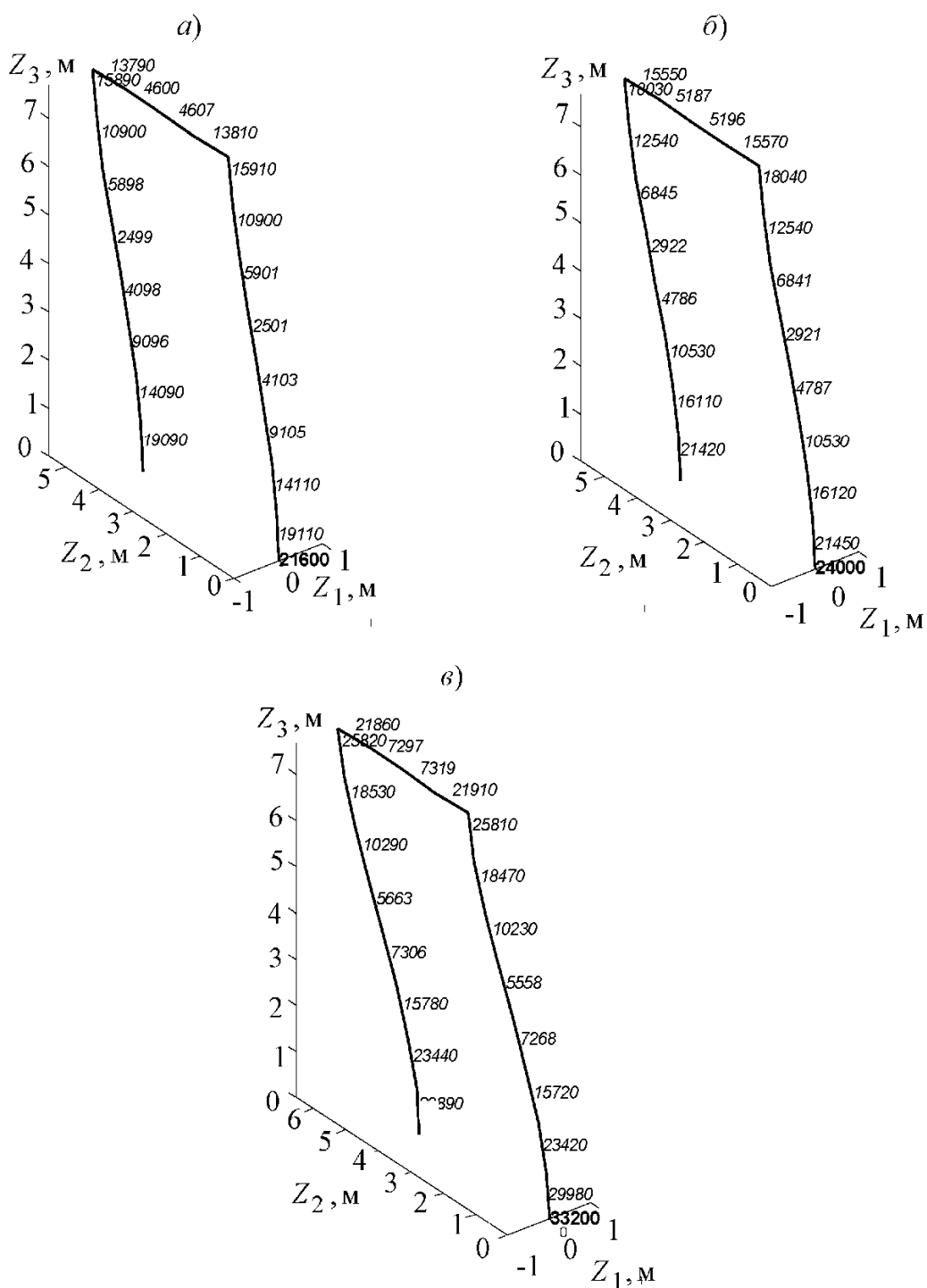


Рис. 2.30

Сравнивая полученные величины максимального изгибающего момента $24,0 \cdot 10^3$ кН·м (рис. 2.30, б) и $33,2 \cdot 10^3$ кН·м (рис. 2.30, в) с данными, приведенными в [3, 6] ($26,155 \cdot 10^3$ кН·м), обнаруживаем,

что вычисленные значения образуют “вилку”, в которую попадает результат из цитируемых источников. Перемещение ригеля вдоль оси Z_2 принимает следующие значения: 0,01477 м (рис. 2.30, *a*); 0,01681 м (рис. 2.30, *б*); 0,02397 м (рис. 2.30, *в*).

Выполнив расчет рассматриваемой плоской рамы на устойчивость 1-го рода, получаем параметр критической нагрузки $P_{кр} = 46874$ Н или $P_{кр} / P = 4,69$.

Таким образом, критическая нагрузка оказывается почти в 5 раз выше заданной. С целью анализа около критического поведения рамы осуществим расчет по деформированной схеме при значении параметра нагрузки $P = 4,5$ т. Результаты нелинейного конечно-элементного решения без учета и с учетом конечных перемещений приведены соответственно на рис. 2.31, *a* и 2.31, *б* (визуальный масштаб перемещений 10:1).

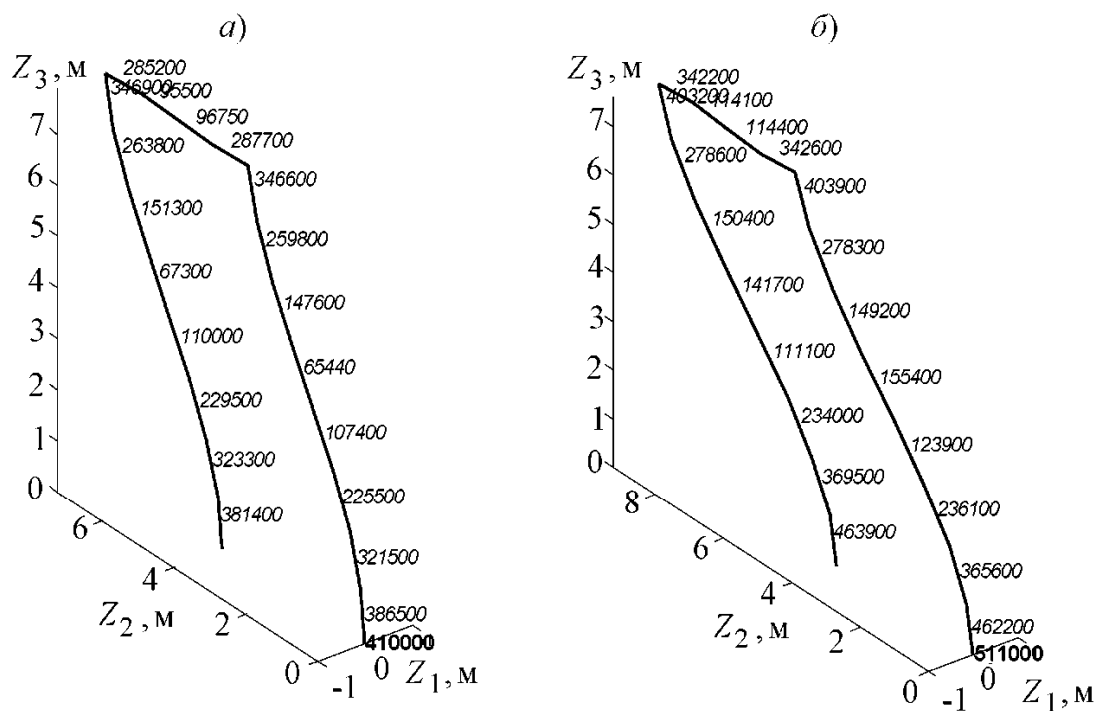


Рис. 2.31

Значение перемещения ригеля вдоль оси Z_2 при $P = 4,5$ т увеличилось до 0,3255 (рис. 2.31, *a*) м и 0,3705 м (рис. 2.31, *б*).

Пример 2. Выполним расчет Г-образной стальной рамы, нагруженной сосредоточенной силой $P = 10$ т и распределенной нагрузкой $q = 2$ т/м, рис. 2.32. Принимаем, что стойка выполнена из двутавра

№ 14, $I_x = 572 \text{ см}^4$, $I_y = 41,9 \text{ см}^4$, $F = 17,4 \text{ см}^2$, а ригель – из двутавра № 18, $I_x = 1290 \text{ см}^4$, $I_y = 82,6 \text{ см}^4$, $F = 23,4 \text{ см}^2$. Шаг разбивки на конечные элементы по длине стойки и ригеля принят одинаковым и равным $l_e = 1 \text{ м}$. Процесс нагружения разбиваем на десять шагов. Схема приведения распределенной нагрузки к узловой на примере одного элемента показана на рис. 2.33. Считая концы элемента жестко защемленными, величины сосредоточенных узловых сил и моментов с учетом знака вычисляем по формулам:

$$P_{1,Z_3} = P_{2,Z_3} = \frac{ql_e}{2}; \quad M_{1,Z_1} = M_{2,Z_1} = \frac{ql_e^2}{12}.$$

В дальнейшем формирование вектора $\{P\}$ выполняем способом адресного включения и аккумуляции составляющих узловых сил и моментов для всех элементов модели.

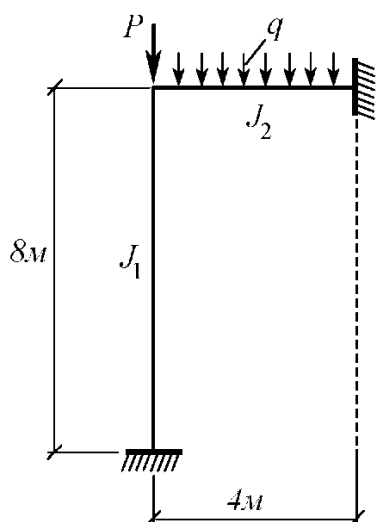


Рис. 2.32

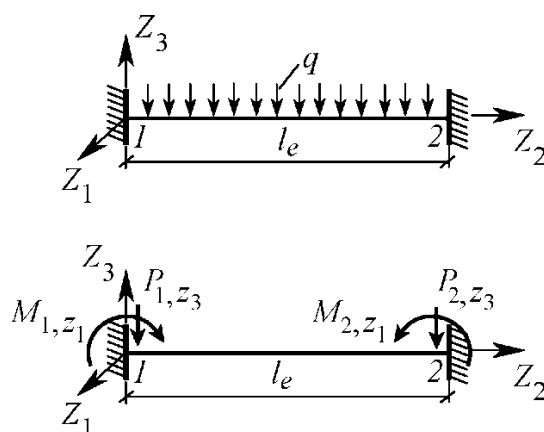


Рис. 2.33

На рис. 2.34 представлены картины распределения изгибающего момента M_{Z_1} (Н·м) в деформированной раме (визуальный масштаб перемещений 50:1) в следующем порядке: рис. 2.34, а – линейное решение; рис. 2.34, б – обычный деформационный расчет; рис. 2.34, в – деформационный расчет с корректировкой узловых координат на каждом шаге нагружения. Полученная при линейном расчете (рис. 2.34, а) максимальная величина $M_{Z_1} = 37,6 \text{ кН}\cdot\text{м}$ практически совпадает с решением, приведенным в работе [3] – $M_{Z_1} = 37,9 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

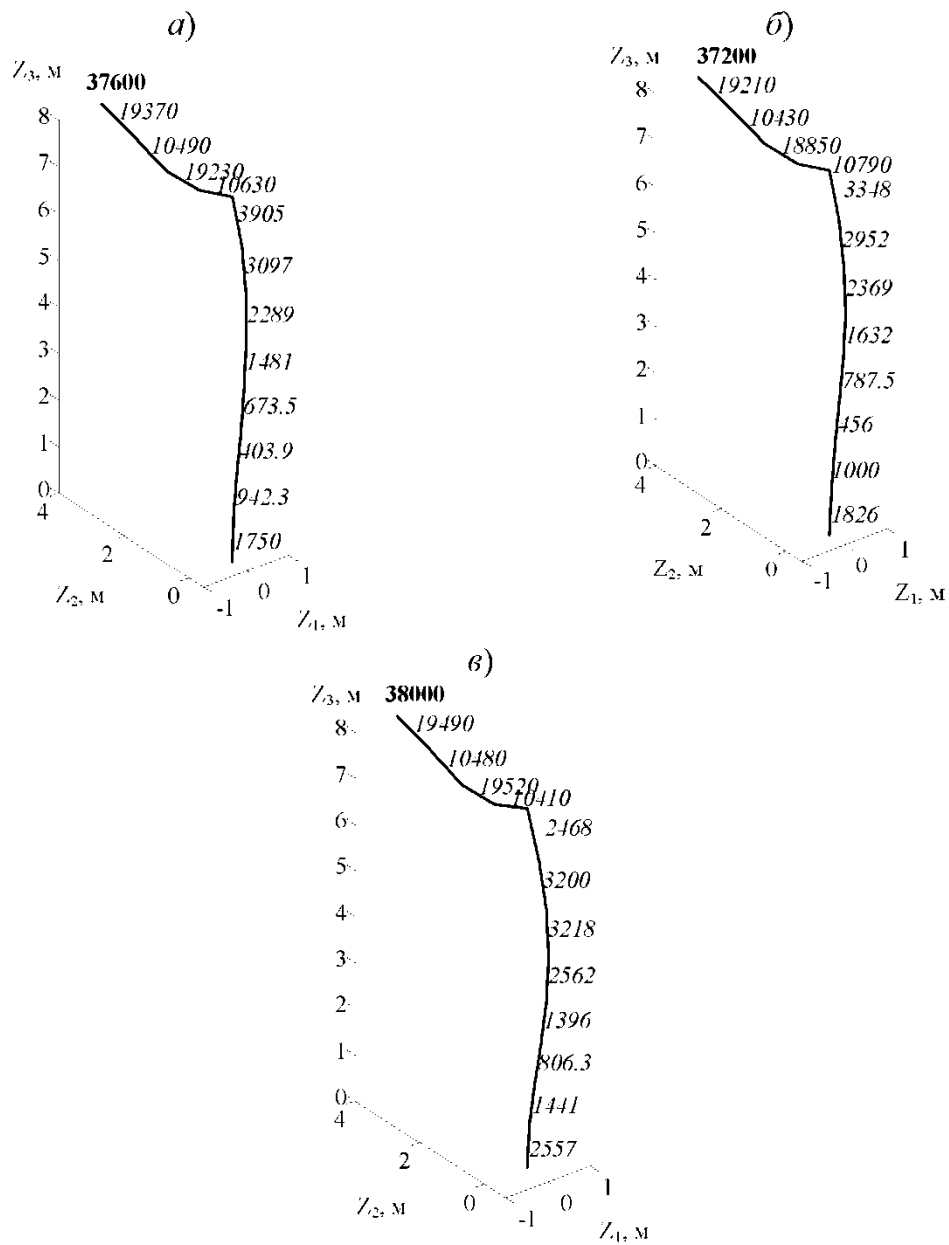


Рис. 2.34

Учет изменения жесткости рамы от действия продольной нагрузки приводит к росту момента на нижнем конце стойки. Наиболее точным следует считать решение по деформированной схеме с корректировкой узлов (рис. 2.34, в), т. к. при таком подходе конечно-элементное решение ближе к результату деформационного расчета в форме метода перемещений [3].

Интересную информацию получаем, сравнивая картины распределения продольной силы P_{xcp} (Н) в стойке и ригеле рассматриваем-

мой рамы. Результаты для сравнительного анализа P_{xcp} , полученные при линейном расчете, обычном деформационном расчете, и деформационном расчете с корректировкой координат узлов расчетной схемы приведены соответственно на рис. 2.35.

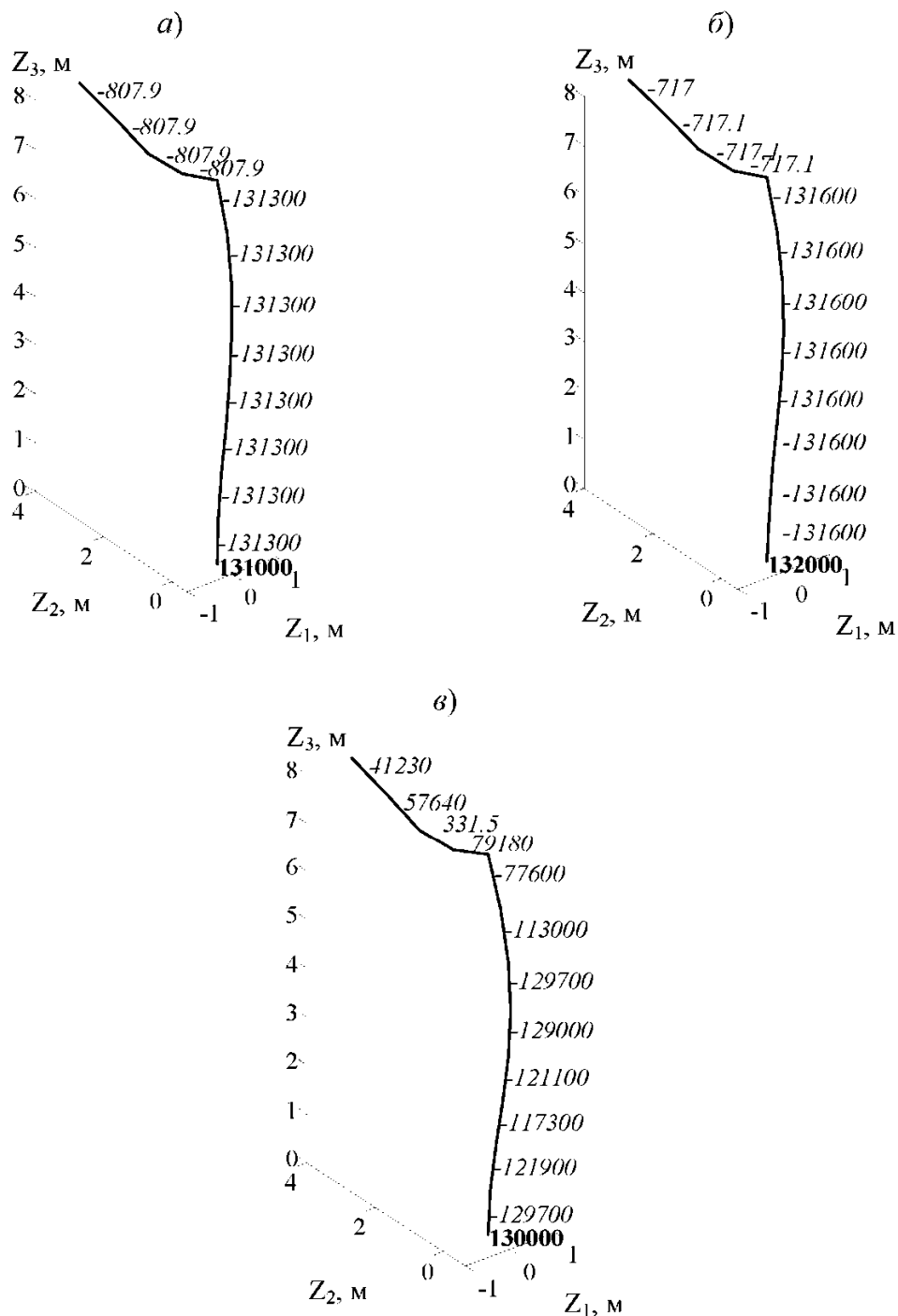


Рис. 2.35

Абсолютное значение максимальной величины $P_{x\text{ср}}$ на рис. 2.35 обозначено жирным шрифтом. По данным работы [3] значения продольной силы при линейном расчете составили: в стойке – 131600 Н; в ригеле – 800 Н; при деформационном расчете в ригеле – 710 Н.

Как видно, при линейном и обычном расчетах по деформированной схеме сжимающие осевые усилия в ригеле и стойке постоянны и численно определяются величинами одного порядка. В случае решения задачи по деформационной схеме с корректировкой координат узлов (рис. 2.35, в) растягивающие усилия $P_{x\text{ср}}$ в ригеле значительно превышают данные предыдущих расчетов и существенно изменяются по длине этого элемента рамы. Последнее является следствием наличия распределенной нагрузки, которая при изгибной деформации ригеля обуславливает неравномерное осевое воздействие на него. Учет изменения податливости стойки при перестройке расчетной схемы рамы также приводит к неоднородному распределению продольной сжимающей силы в этом элементе.

Пример 3. Требуется выполнить анализ устойчивости внецентренно сжатой стойки квадратного поперечного сечения $0,4 \times 0,4$ м (рис. 2.36). Модуль упругости материала принимаем как и работе [6] равным $E = 2,7 \cdot 10^7$ Н/м².

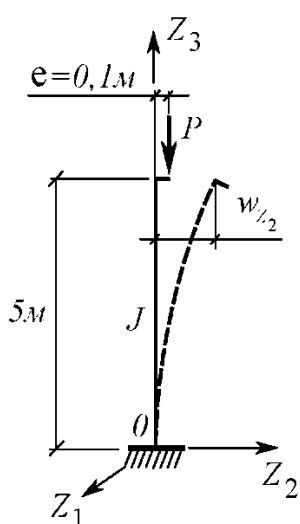


Рис. 2.36

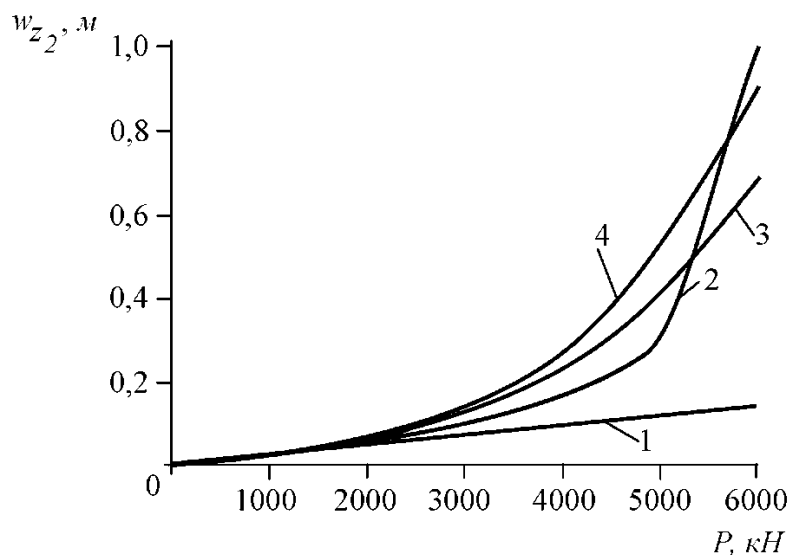


Рис. 2.37

Данные расчетов представлены в виде графиков зависимости

горизонтального перемещения свободного конца стойки w_{z_2} от нагрузки P на рис. 2.37. Здесь цифрами обозначено: 1 – линейное решение; 2 – решение по обычной деформированной схеме; 3 – решение по деформированной схеме с пересчетом координат узлов на каждом шаге нагружения; 4 – результаты работы [6]. Во всех вариантах расчетов шаг приращения по нагрузке принимался равным 500 кН.

Отметим, что при максимальном нагружении $P=6000$ кН деформационный расчет с корректировкой координат узлов дает меньшее значение w_{z_2} , чем решение по обычной деформированной схеме. Это объясняется тем, что конечно-элементная модель, деформируясь, перестраивается и тем самым активнее сопротивляется внешнему силовому воздействию.

Пример 4. Требуется выполнить конечно-элементный анализ зависимости между сосредоточенной силой P и узловым вертикальным перемещением центрального шарнира v фермы Мизеса, рис. 2.38. Размеры фермы: $x_0=3$ м; $y_0=0,3$ м. Стержни конструкции выполнены из стальной трубы ($E=2 \cdot 10^5$ МПа), наружный и внутренний диаметры которой соответственно равны 10 см и 0,93 см.

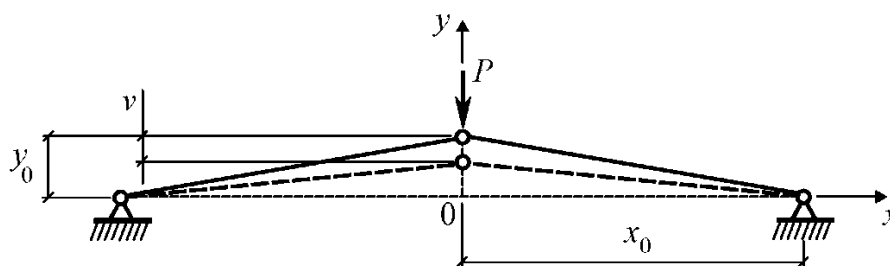


Рис. 2.38

Расчеты осуществлялись с использованием шаговой процедуры процесса нагружения без учета влияния продольной силы на деформацию системы. Рассматривалась 1/2 часть фермы. При этом наклонный стержень моделировался тремя балочными конечными элементами. Начиная со второго шага нагружения, выполнялась корректировка координат узлов расчетной схемы с поправкой на конечные перемещения. На рис. 2.39 показаны результаты численного решения для двух вариантов приращения нагрузки: $\Delta P=1000$ кН (кривая 1); $\Delta P=500$ кН (кривая 2). Установлено, что двукратное уменьшение шага ΔP приводит к 10%-ому снижению критической нагрузки

(рис. 2.39).

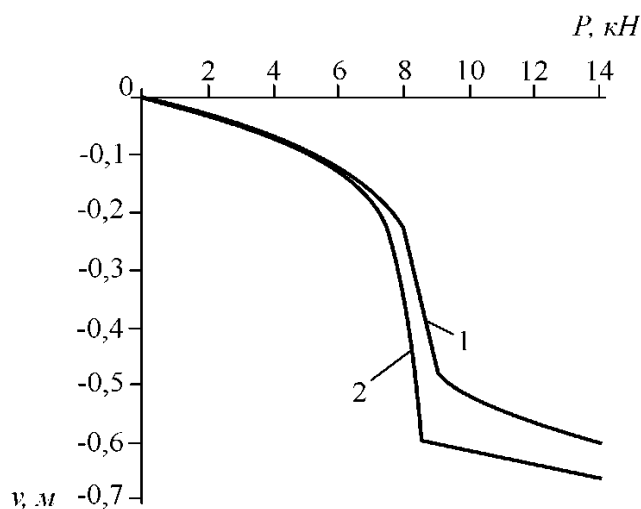


Рис. 2.39

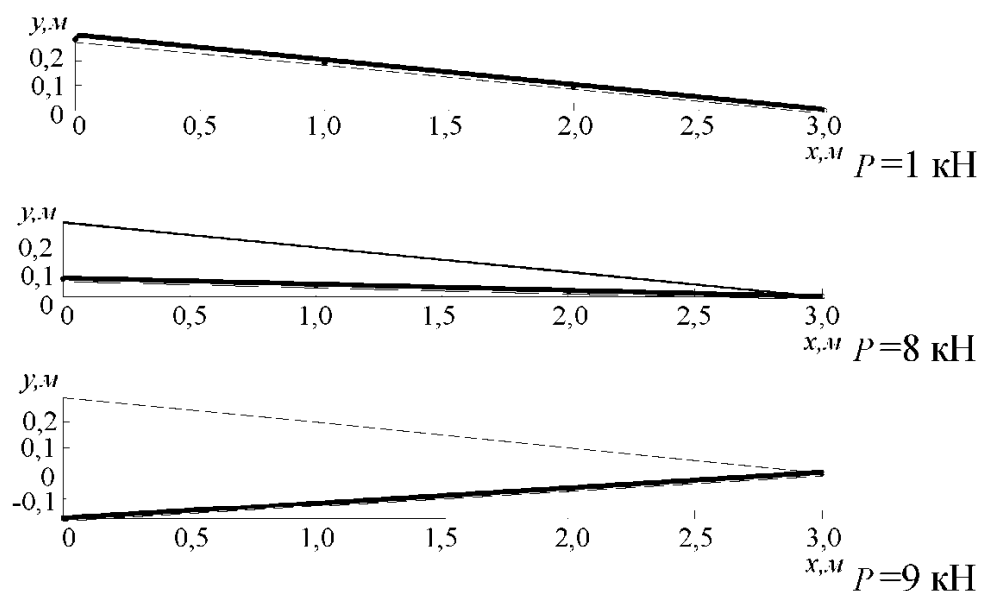


Рис. 2.40

На представленном графике отчетливо прослеживается резкое нелинейное падение осевой жесткости фермы на участке нагрузки от 6 до 9 кН. С физической точки зрения это явление объясняется эффектом “прошелкивания” или эйлеровой формой потери устойчивости фермы. После “прошелкивания” в предварительно сжатых стержнях возникают растягивающие осевые усилия. Это видно из серии картин на рис. 2.40, демонстрирующих работу 1/2 части фермы при различных уровнях нагружения ($\Delta P=1000$ кН). Здесь исходное положение наклонного стержня показано тонкой линией.

Глава 3. ДИНАМИКА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

3.1. Виды динамического воздействия на строительные сооружения

Силовое воздействие носит динамический характер, если оно изменяется за короткий промежуток времени. При динамическом нагружении массивные элементы сооружения совершают колебательные движения, что может стать причиной аварии. Кроме этого продолжительные механические колебания, вызванные работой механизмов, оказывают негативное воздействие на организм человека. Вместе с тем искусственные колебания широко используются в ряде технологических процессов, например, при уплотнении бетонной массы в опалубке и транспортировке сыпучих грузов.

Динамическую нагрузку разделяют на следующие виды: гармоническое возбуждение с периодом T (рис. 3.1, *a*); негармоническое возбуждение с периодом T (рис. 3.1, *б*); ударное воздействие (рис. 3.1, *в*); взрывное воздействие (рис. 3.1, *з*); сейсмическое воздействие (рис. 3.1, *д*). Сейсмическое воздействие, как правило, задается в виде акселерограммы (графика ускорения $v''(t)$) для точек опор сооружения.

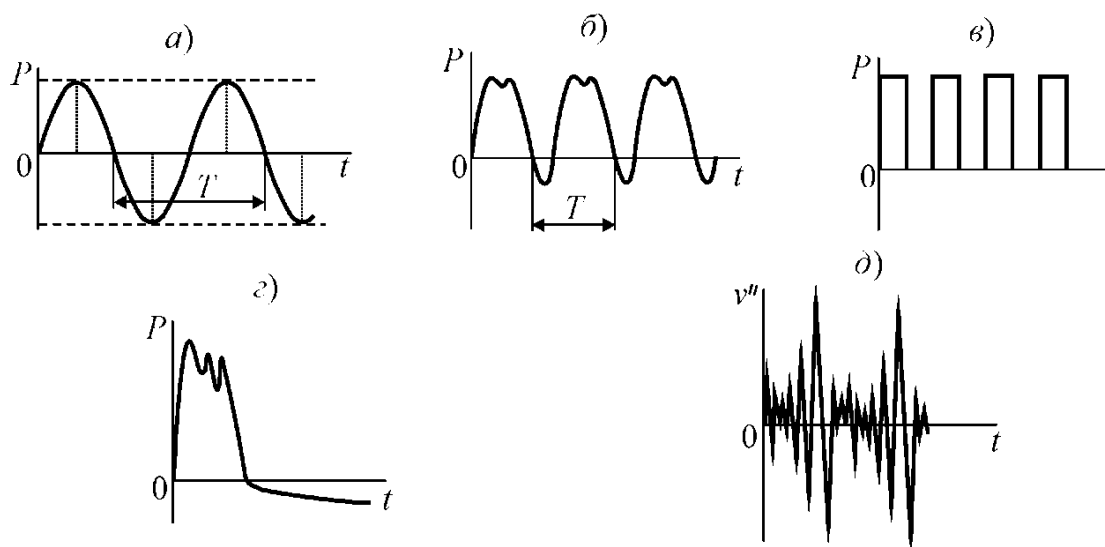


Рис. 3.1

Динамический расчет выполняется с целью проверки системы на резонанс, анализа кинематических параметров (перемещений, скоростей, ускорений) конструктивных элементов, оценки динами-

ческих реакций и выбора схемы гашения колебаний. Динамический расчет является одной из сложных задач строительной механики. Для его реализации привлекается математический аппарат решения систем дифференциальных уравнений и специальные численные методы, учитывающие динамический характер нагружения.

Такие виды динамического воздействия, как ветровая нагрузка, сейсмическая активность земной коры и ударная волна, носят случайный характер. Динамический расчет при случайном воздействии на сооружение называется недетерминированным и выполняется с использованием математического аппарата теории вероятности.

3.2. Число динамических степеней свободы стержневой системы

Числом динамических степеней свободы линейно деформируемой системы, находящейся в движении, называется количество перемещений, определяющих положение всех ее точек в каждый момент времени. Реальные конструкции обладают бесконечно большим числом степеней свободы. На практике принято ограничивать размерность задачи и вводить точечные сосредоточенные массы или массивные недеформируемые диски. Процедура построения расчетной схемы с конечным (ограниченным) числом степеней свободы для динамического расчета называется дискретизацией или приведением масс.

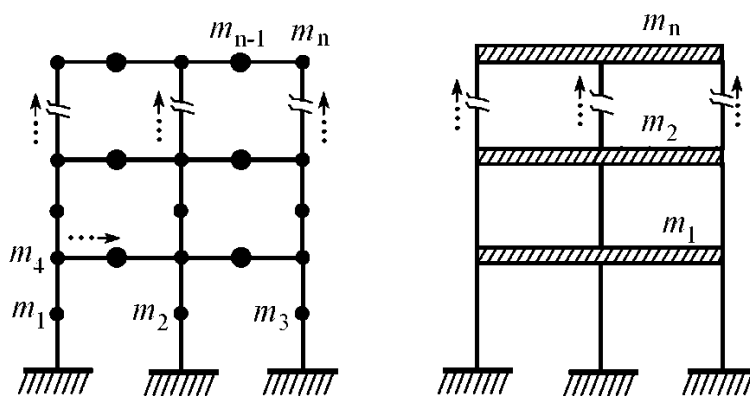


Рис. 3.2

Точки приведения масс выбираются таким образом, чтобы колебания расчетной схемы соответствовали колебаниям реальной конструкции. Точность, а вместе с ней и сложность динамического расчета

возрастает с увеличением числа приведенных масс.

Недеформируемыми дисками можно заменять ригели многоэтажных рамных конструкций, считая несущие стойки безмассовыми элементами. На рис. 3.2 представлены два возможных варианта приведения плоской многоэтажной рамы к n массовой системе. Естественно, что расчетная схема с дисками будет грубее, но при этом значительно упрощается решение задачи.

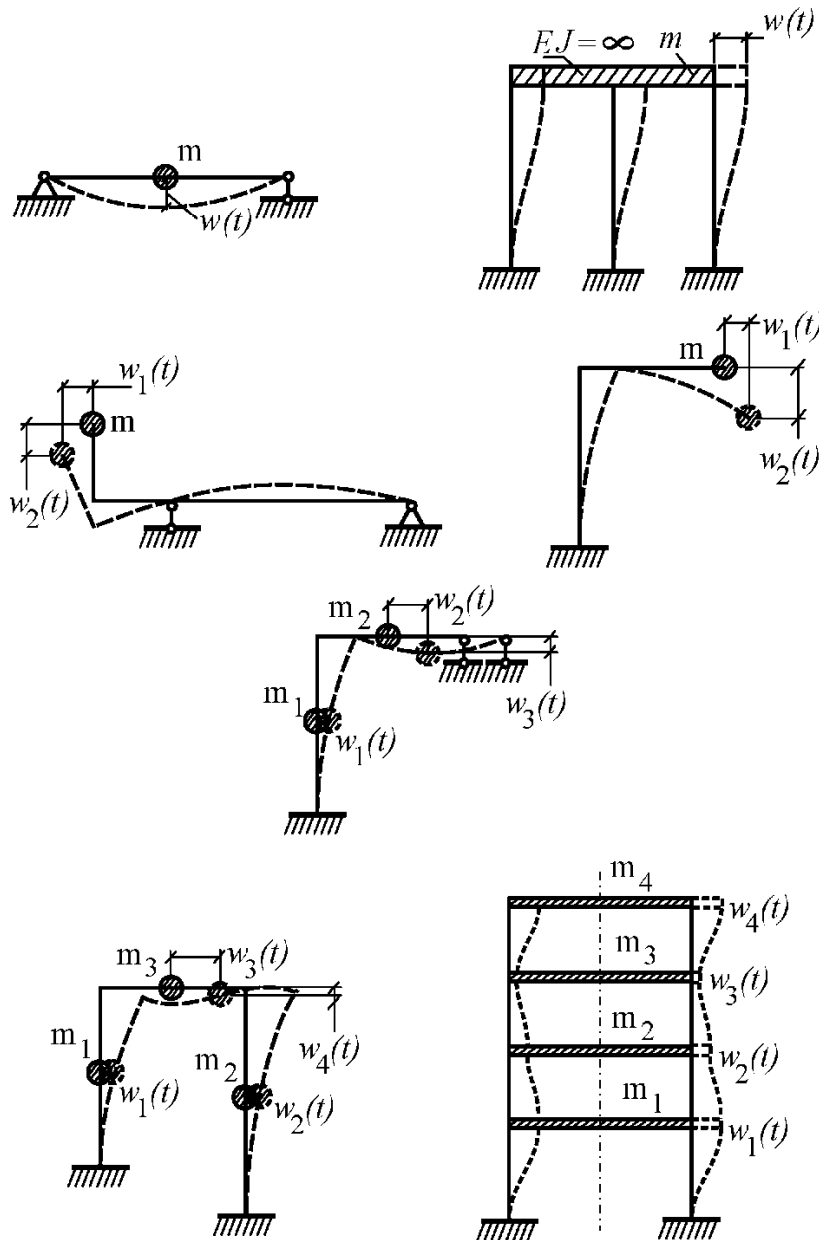


Рис. 3.3

Под числом динамических степеней свободы многомассовой

стержневой системы будем понимать число линейно независимых перемещений точек сосредоточенных масс $w_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

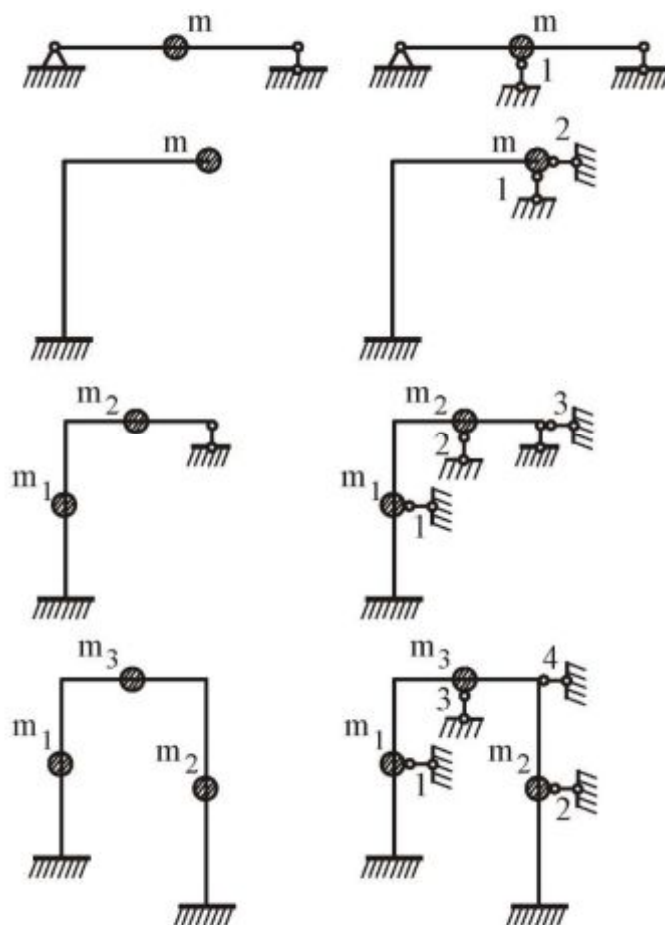


Рис. 3.4

На рис. 3.3 приведены примеры систем с одной, двумя, тремя и четырьмя степенями свободы. Число динамических степеней свободы для плоских рам можно определять путем введения дополнительных связей [3], препятствующих смещениям сосредоточенных масс и дисков (рис. 3.4).

3.3. Уравнение движения и свободные колебания системы с одной степенью свободы

Рассмотрим движение одномассовой системы на примере консольной балки, представленной на рис. 3.5. Считаем, что положение всех точек балки в любой момент времени t определяется функцией

прогиба $v(t)$. Осевым и угловым перемещениями массы m ввиду их малости пренебрегаем.

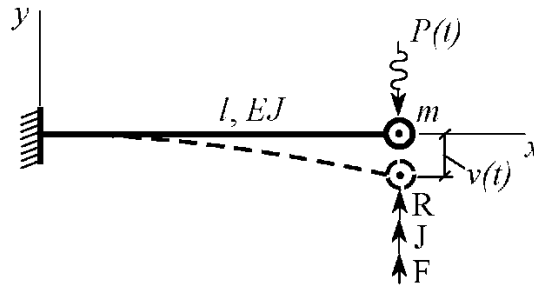


Рис. 3.5

На основании квазистатического принципа Даламбера уравнение движения точечной массы m представляем в виде суммы проекции на ось y всех сил, действующих на m :

$$R + J + F = -P(t), \quad (3.1)$$

где R – восстанавливающая сила; J – сила инерции; F – сила сопротивления движению; $P(t)$ – внешняя возбуждающая сила.

Остановимся более подробно на каждой составляющей левой части уравнения (3.1).

Восстанавливающая сила R обусловлена упругостью балки и пропорциональна величине прогиба $v(t)$:

$$R = -rv(t).$$

Здесь коэффициент пропорциональности r численно равен реакции балки при единичном статическом прогибе ($v_{ст} = 1$). Для консольной балки единичная реакция $r = (3EJ)/l^3$.

Сила инерции J определяется по формуле

$$J = -mv'',$$

где $v'' = d^2v/dt^2$ – ускорение массы m .

Сила сопротивления F возникает в результате сопротивления движению внешней среды, внутреннего трения в материале, трения конструктивных элементов в местах соединения и в опорах, а также искусственного демпфирования (гашения) колебаний. Обычно выражение для силы F представляют в виде

$$F = -\eta v',$$

где η – коэффициент затухания колебаний; $v' = dv/dt$ – скорость массы m .

Знак минус в выражениях для R , J , F говорит о том, что данные силы направлены противоположно прогибу $v(t)$ (см. рис. 3.5).

Подставив выражения для сил R и J в (3.1) получим уравнение движения точечной массы без учета силы сопротивления:

$$v'' + \omega^2 v = \frac{P(t)}{m}, \quad (3.2)$$

где $\omega = \sqrt{r/m}$ – угловая частота свободных (собственных) колебаний балки (с^{-1}). Величина ω представляет собой число циклов колебаний, совершаемых за 2π секунд. Период T – это длительность одного полного цикла колебаний. Величина T измеряется в секундах и численно равна $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Технической частотой $\lambda = 1/T$ называется число колебаний в секунду. Величина λ измеряется в герцах (сокращенно Гц).

Для анализа свободных колебаний одномассовой системы необходимо в уравнении (3.2) положить $P(t) = 0$. В результате получим однородное дифференциальное уравнение

$$v'' + \omega^2 v = 0. \quad (3.3)$$

Для возбуждения свободных колебаний в консольной балке (см. рис. 3.5) следует в начальный момент времени $t = 0$ задать кинематическое возмущение $v = v_0$.

Решение уравнения (3.3) имеет вид

$$v(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t,$$

где C_1 и C_2 – вещественные постоянные, определяемые из начальных условий. При $t = 0$ имеем $v = v_0$ и $v' = v'_0$. Отсюда найдем $C_1 = v_0$ и $C_2 = v'_0 / \omega$. В результате решение уравнения (3.3) преобразуем к виду

$$v(t) = v_0 \cos \omega t + \frac{v'_0}{\omega} \sin \omega t.$$

Чаще используют другую форму решения в виде гармонического закона колебаний (рис. 3.6):

$$v(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0),$$

где $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ – амплитуда колебаний; $\varphi_0 = \arctg(C_1 / C_2)$ – начальная угловая фаза колебаний.

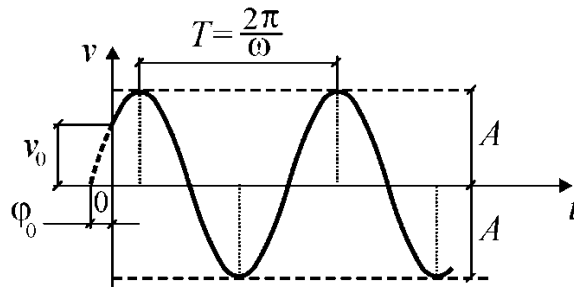


Рис. 3.6

Согласно закону сохранения энергии свободные незатухающие колебания одномассовой системы представляют собой непрерывный циклический переход кинетической энергии движущейся точечной массы $K = \frac{mv'^2}{2}$ в энергию деформации $U = \frac{1}{2}rv$.

Пример 1. Требуется определить частоту свободных колебаний эстакады (рис. 3.7), положив: $l = 6$ м; $J_c = 572 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$; $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $m = 3058 \text{ Нс}^2/\text{м}$.

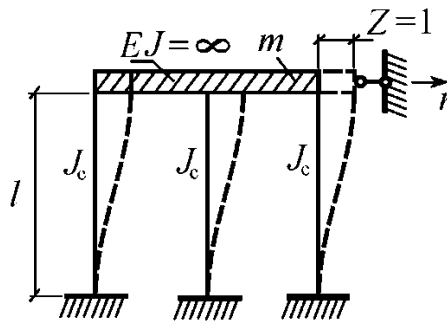


Рис. 3.7

Определяем упругую реакцию r связи Z на единичное смещение:

$$r = 3 \frac{12 EJ_c}{l^3} = 3 \frac{12 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 572 \cdot 10^{-8}}{6^3} = 190667 \text{ Н/м}.$$

Значение частоты свободных колебаний вычисляем по формуле

$$\omega = \sqrt{\frac{r}{m}} = \sqrt{\frac{190667}{3058}} = 7,90 \text{ с}^{-1}.$$

Пример 2. Требуется определить частоту свободных колебаний однопролетной балки с сосредоточенной массой m (рис. 3.8, а), положив: $a = 3$ м; $l = 5$ м; $J = 3773 \text{ см}^4$ (двутавр № 24);

$E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа. Балку считаем невесомой. Силу от веса сосредоточенной массы принимаем равной $G = 20$ кН.

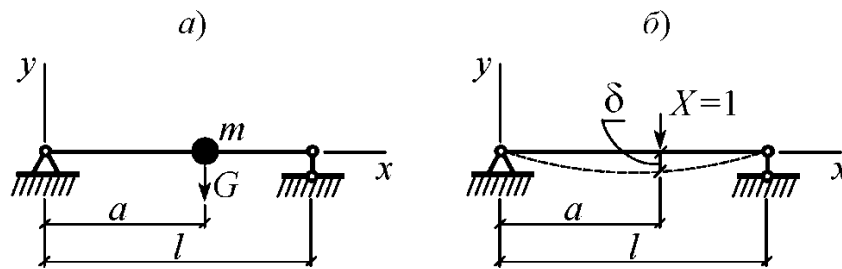


Рис. 3.8

Прогиб δ от действия силы $X = 1$ в точке расположения сосредоточенной массы (рис. 3.8, б) вычисляем по формуле

$$\delta = \frac{X a^2 (l-a)^2}{3lEJ} = \frac{1 \cdot 3^2 (5-3)^2}{3 \cdot 5 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 3773 \cdot 10^{-8}} = 0,303 \cdot 10^{-6} \text{ м.}$$

Масса груза $m = G/g = 20000/9,81 = 2039$ кг ($\text{Н} \cdot \text{с}^2/\text{м}$), где $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения.

Частоту свободных колебаний балки определяем по формуле

$$\omega = \sqrt{1/(m\delta)} = \sqrt{1/(2039 \cdot 0,303 \cdot 10^{-6})} = 40,2 \text{ с}^{-1}.$$

3.4. Свободные колебания системы с одной степенью свободы с учетом силы сопротивления

На практике свободные колебания быстро затухают, что объясняется наличием силы сопротивления движению. Рассмотрим консольную балку с сосредоточенной массой m на свободном конце. Свободные колебания возбуждаются путем отклонения свободного конца балки в момент времени $t = 0$ на величину $v = v_0$ с последующим его отпуском. Считаем, что положения всех точек балки в любой момент времени определяются функцией прогиба $v(t)$. В последующем колебательном процессе участвуют восстанавливающая сила R , сила инерции J и сила сопротивления F . Последняя обусловлена внутренним трением и сопротивлением внешней среды (рис. 3.9).

В качестве физического аналога, воспроизводящего действие силы F , принимаем гидравлический демпфер, представляющий собой

цилиндр, в котором расположен поршень с отверстием малого диаметра. Цилиндр полностью заполнен вязкой жидкостью. Механическая модель консольной балки, учитывающая эффект затухания колебаний, представлена на рис. 3.10.

Дифференциальное уравнение движения для рассматриваемой системы принимает вид

$$v'' + 2nv' + \omega_0^2 v = 0, \quad (3.4)$$

где $2n = \eta/m$; $\omega_0 = \sqrt{r/m}$ – угловая частота свободных колебаний без учета затухания.

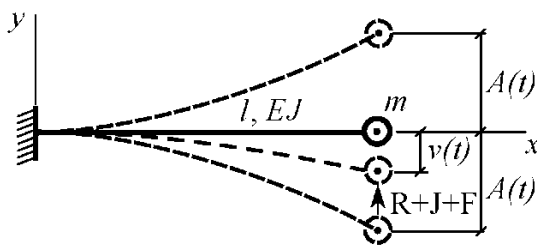


Рис. 3.9

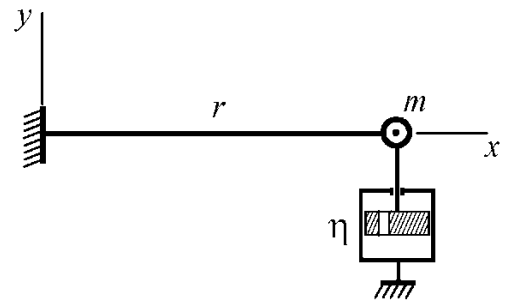


Рис. 3.10

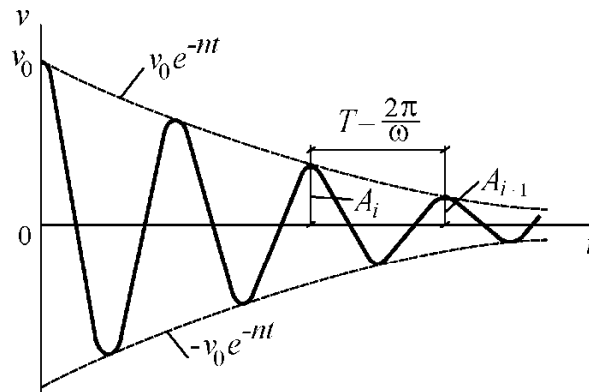


Рис. 3.11

Решение уравнения (3.4) ищем в виде

$$v = A e^{-nt} \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (3.5)$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + n^2}$ – угловая частота затухающих свободных колебаний.

Постоянные A и φ_0 определяем из начальных условий: при $t = 0$; $v = v_0$; $v' = v'_0$. После преобразований получим:

$$A = \sqrt{v_0^2 + \frac{(v'_0 + nv_0)^2}{\omega^2}}; \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{v_0 \omega}{v'_0 + nv_0}.$$

Учитывая, что для реальных строительных конструкций $n \ll \omega_0$, принимаем $\omega = \omega_0$. График уравнения (3.5) показан на рис. 3.11, на котором огибающая колебаний определяется функцией $\pm v_0 e^{-nt}$.

В качестве количественной характеристики темпа затухания свободных колебаний обычно принимают величину

$$\delta = \ln \frac{A_i}{A_{i+1}},$$

называемую логарифмическим декрементом колебаний.

Мерой затухания также может служить коэффициент ψ поглощения энергии деформации за один цикл колебаний, численно равный отношению

$$\psi = \frac{U_i - U_{i+1}}{U_i},$$

где U_i, U_{i+1} – амплитудные значения упругой энергии деформации в начале и конце i -го цикла колебаний.

Величины δ и ψ связаны зависимостью $\psi = 2\delta$.

3.5. Динамический отклик системы с одной степенью свободы на частные виды внешних воздействий

3.5.1. Действие внезапно приложенной силы

Полагаем, что нагрузка $P = P(t)$ действует на точечную массу m , расположенную на конце консольной балки. График динамического воздействия показан на рис. 3.12, *a*. В данном случае сила внезапно прикладывается в момент времени $t = t_0$ и в дальнейшем не изменяется.

Уравнение движения в данном случае имеет вид

$$v'' + \omega^2 v = P_0 / m. \quad (3.6)$$

Общее решение дифференциального уравнения (3.6) ищем в форме

$$v(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + P_0 / (m \omega^2), \quad (3.7)$$

где первые два слагаемые представляют собой решение соответствующего однородного уравнения (3.3), а последнее слагаемое – частное решение неоднородного уравнения (3.6).

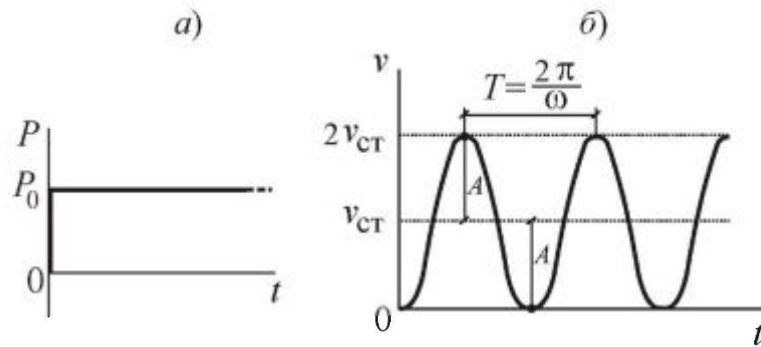


Рис. 3.12

Постоянные C_1 и C_2 найдем из нулевых начальных условий задачи: при $t = t_0$ имеем $v_0 = 0$ и $v'_0 = 0$. Отсюда на основании выражения (3.7) получим два уравнения:

$$C_1 + P_0 / (m \omega^2) = 0; \quad C_2 \omega = 0,$$

с помощью которых определяем постоянные $C_1 = -P_0 / (m \omega^2)$ и $C_2 = 0$. Подставив в выражение $P_0 / (m \omega^2)$ вместо ω^2 ранее введенное соотношение $\omega^2 = r / m$, запишем $P_0 / (m \omega^2) = P_0 / r$, где r – единичная реакция консоли. Вводя обозначение для статического прогиба балки $v_{ст} = P_0 / r$, уравнение (3.7) преобразуем к виду

$$v(t) = v_{ст} (1 - \cos \omega t). \quad (3.8)$$

Визуализация данной зависимости представлена на рис. 3.12, б). Как видно, решение (3.8) представляет собой незатухающие гармонические колебания с амплитудой $A = v_{ст}$. Максимальный динамический прогиб балки равен $v_{дин} = 2v_{ст}$. Для установившихся колебаний коэффициент динамичности определяем по формуле $\mu = v_{дин} / v_{ст}$. В рассматриваемом примере $\mu = 2$.

Вычислив величину μ , можно динамический расчет свести к обычному статическому расчету, умножив действующую силу P_0 на

коэффициент μ .

3.5.2. Действие гармонической вынуждающей силы

Принимаем изменение возмущающего внешнего воздействия, прикладываемого к точечной массе m , в виде гармонического закона:

$$P(t) = P_0 \sin \Theta t,$$

где P_0 и Θ – соответственно амплитуда и угловая частота вынуждающей силы. Полагаем, что гармоническая сила $P(t)$ в начальный момент времени $t = t_0$ начинает действовать на покоящуюся сосредоточенную массу, расположенную в центре двухопорной балки. График изменения величины $P(t)$ представлен на рис. 3.13. Такой вид, например, имеет динамическое воздействие, передаваемое на балку от вращающегося ротора электродвигателя с расположенной на нем неуравновешенной точечной массой m . Динамическая нагрузка в данном случае зависит от величины центробежной силы $P_0 = m R \Theta^2$. Если масса совершает n оборотов в минуту, то $\Theta = (2\pi n)/60$ (с^{-1}).

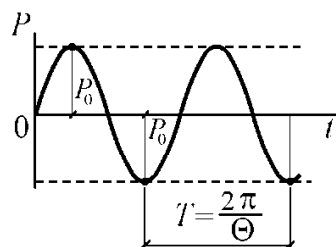
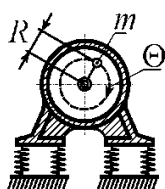


Рис. 3.13

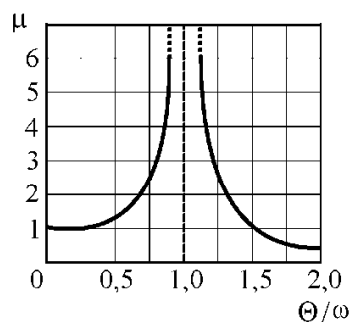


Рис. 3.14

Уравнение движения при гармоническом возбуждении колебаний принимает вид

$$v'' + \omega^2 v = (P_0 / m) \sin \Theta t. \quad (3.9)$$

Общее решение дифференциального уравнения при $\omega \neq \Theta$ (3.9) имеет форму

$$v(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + A \sin \Theta t, \quad (3.10)$$

где $\bar{v}(t) = A \sin \Theta t$ – частное решение неоднородного уравнения (3.9); A – неизвестная постоянная величина. Подставив выражение $\bar{v}(t)$ в уравнение (3.9), получим

$$(-A\Theta^2 + A\omega^2) \sin \Theta t = (P_0/m) \sin \Theta t.$$

После преобразований запишем

$$A = (P_0/m) (\omega^2 - \Theta^2) = \mu v_{ст},$$

где коэффициент динамичности $\mu = \frac{1}{1 - (\Theta/\omega)^2}$, показывающий во

сколько раз амплитуда установившихся вынужденных колебаний больше величины статического прогиба: $v_{ст} = P_0/(m\omega^2) = P_0/r$ (r – единичная реакция балки). График зависимости величины μ от отношения частот Θ/ω показан на рис. 3.14.

Как видно, с увеличением частоты вынуждающей силы Θ от 0 коэффициент μ возрастает и при $\Theta/\omega \rightarrow 1$ стремится к бесконечности. При дальнейшем увеличении величины Θ коэффициент μ постепенно уменьшается и при $\Theta/\omega > \sqrt{2}$ становится меньше единицы. В этой области динамический эффект прикладываемой гармонической силы $P(t)$ становится меньше, чем ее статическое действие, соответствующее силе P_0 .

На основании нулевых начальных условий получим окончательное решение уравнения (3.10) в виде разности двух гармонических составляющих с различными частотами:

$$v(t) = A [\sin \Theta t - (\Theta/\omega) \sin \omega t]. \quad (3.11)$$

В реальных условиях колебания, описываемые соотношением (3.11), можно наблюдать только в начальной стадии динамического процесса. В дальнейшем вследствие сил внутреннего трения, которые здесь не учитывались, влияние составляющей $A(\Theta/\omega) \sin \omega t$ уменьшается до нуля. Физически это означает, что свободные колебания быстро затухают и продолжают только вынужденные колебания, описываемые выражением $v(t) = A \sin \Theta t$. Графически решение (3.11) условно можно представить в виде переходного и установившегося динамических процессов (рис. 3.15). Следует отметить, что согласно выражению (3.11) при $\Theta/\omega < 1$ функция $v(t)$ находится в фазе с вынуждающей силой $P(t)$, а при $\Theta/\omega > 1$ – в противофазе.

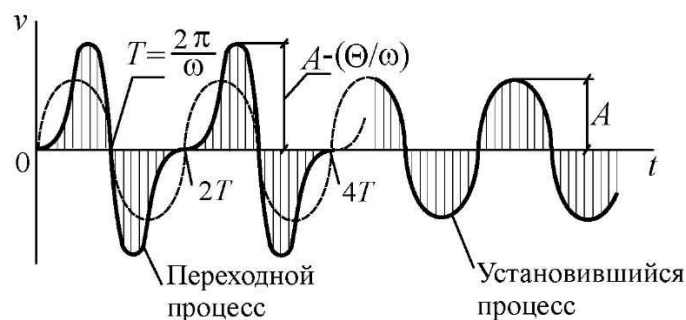


Рис. 3.15

Состояние системы, когда $\Theta = \omega$, называется резонансом. В этом случае уравнение движения принимает вид

$$v'' + \omega^2 v = (P_0 / m) \sin \omega t.$$

Соответствующее решение при нулевых начальных условиях описывается формулой

$$v_{\text{рез}}(t) = \frac{P_0}{2r_{11}} (\sin \omega t + \omega t \cos \omega t). \quad (3.12)$$

Отметим, что наличие в выражении (3.12) слагаемого $\omega t \cos \omega t$, содержащего параметр t вне знака косинуса, приводит к неограниченному возрастанию функции $v_{\text{рез}}(t)$ во времени (рис. 3.16).

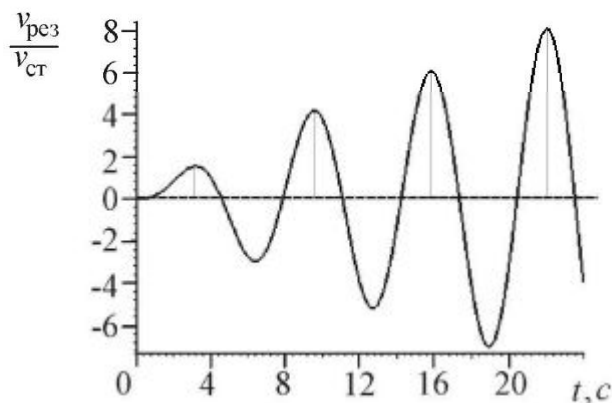


Рис. 3.16

Однако в реальном колебательном процессе наличие сил трения и сопротивления внешней среды приводит к тому, что амплитуды $v_{\text{рез}}(t)$ остаются некоторыми конечными величинами при $t \rightarrow \infty$.

3.6. Динамический расчет плоских рам

3.6.1. Свободные колебания рам с конечным числом степеней свободы

Рассмотрим упругую невесомую раму с n точечными сосредоточенными массами. Полагаем, что в момент времени $t = 0$ точки, в которых расположены массы m_i , $i = 1, 2, \dots, n$, получили начальные смещения и затем были мгновенно отпущены. Если силы сопротивления движению отсутствуют, то рама будет совершать незатухающие свободные колебания. Введем вектор независимых перемещений точечных масс

$$\{w\} = \{w_1 \ w_2 \ \dots \ w_i \ \dots \ w_{n-1} \ w_n\}^T,$$

отвечающий заданной форме свободных колебаний (рис. 3.17, а) и соответствующий вектор сил инерции (рис. 3.17, б):

$$\{J\} = \{J_1 \ J_2 \ \dots \ J_i \ \dots \ J_{n-1} \ J_n\}^T.$$

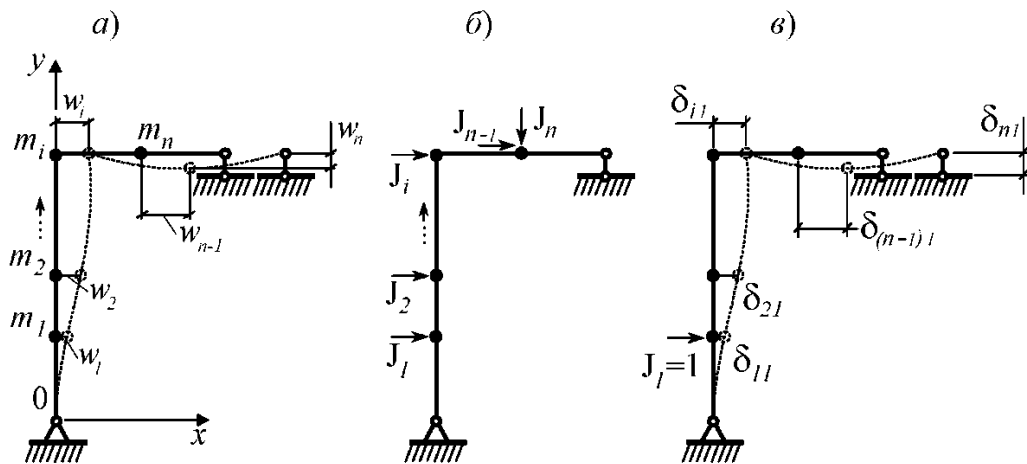


Рис. 3.17

В общем случае расчет рам на свободные колебания может быть выполнен с помощью метода сил или метода перемещений [1, 3]. Выбор того или иного метода решения устанавливается в зависимости от вида расчетной схемы рамы и степени статической неопределимости.

При использовании метода сил необходимо сформировать матрицу податливости $[D]$ от действия единичных сил инерции $J_i = 1, i = 1, 2, \dots, n$ (3.17, в). Для n -массовой системы матрица $[D]$

имеет следующую структуру:

$$[D] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ & & \dots & \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & & \delta_{nn} \end{bmatrix},$$

где δ_{ij} – перемещение сосредоточенной массы по направлению w_i от действия единичной силы инерции J_j .

Для статически неопределимых рам необходимо предварительно раскрыть статическую неопределимость и построить эпюры изгибающих моментов m_1^* , m_2^* , ..., m_n^* от действия единичных сил, совпадающих с направлениями сил инерции J_1 , J_2 , ..., J_n . Перемещения δ_{ij} вычисляются путем соответствующих перемножений эпюр m_1^* , m_2^* , ..., m_n^* . Задача упрощается, если расчетная схема рамы для построения эпюр m_1^* , m_2^* , ..., m_n^* позволяет использовать готовые (приведенные в справочнике) формулы*.

Уравнение движения n массовой системы в матричной форме имеет вид

$$[D][M]\{w''\} + \{w\} = 0, \quad (3.13)$$

здесь диагональная матрица масс

$$[M] = \text{diag} [m_1 \ m_2 \ \dots \ m_n].$$

Полагаем, что движение точечных масс описывается общим гармоническим законом

$$\{w\} = \{A\} \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (3.14)$$

где ω – частота свободных колебаний; $\{A\} = \{a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n\}^T$ – вектор формы колебаний (a_i , $i=1,2,\dots,n$ – амплитудные значения перемещений точечных масс рамы).

* Справочник по сопротивлению материалов/ Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев – Киев: Наук. думка, 1988. – 736 с.

Подставим в уравнение (3.13) зависимость (3.14) и сократим полученное выражение на $\sin(\omega t + \varphi_0)$. В результате получим

$$([D][M] - \lambda[I])\{A\} = 0, \quad (3.15)$$

где $\lambda = 1/\omega^2$; $[I]$ – единичная матрица.

Уравнение (3.15) представляет собой систему однородных линейных алгебраических уравнений. Решение уравнения (3.15) будет нетривиальным (ненулевым), если выполняется условие равенства нулю определителя

$$|[D][M] - \lambda[I]| = 0$$

или в развернутом виде

$$\det(\lambda) = \begin{vmatrix} (\delta_{11} m_1 - \lambda) & \delta_{12} m_2 & \dots & \delta_{1n} m_n \\ & (\delta_{22} m_2 - \lambda) & \dots & \delta_{2n} m_n \\ & & \dots & \\ \text{симметр.} & & & (\delta_{nn} m_n - \lambda) \end{vmatrix} = 0. \quad (3.16)$$

Уравнение (3.16) называется характеристическим. Раскрыв определитель $\det(\lambda)$, получим характеристический полином n -й степени. Корни полинома $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$, расположенные в порядке возрастания, характеризуют спектр частот свободных колебаний системы. С математической точки зрения решение уравнения (3.16) представляет собой стандартную задачу о собственных значениях $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ матрицы $[H] = [D][M]$.

При анализе свободных колебаний многоэтажных рам, моделируемых абсолютно жесткими дисками и невесомыми гибкими стойками, более эффективным является метод перемещений (рис. 3.18).

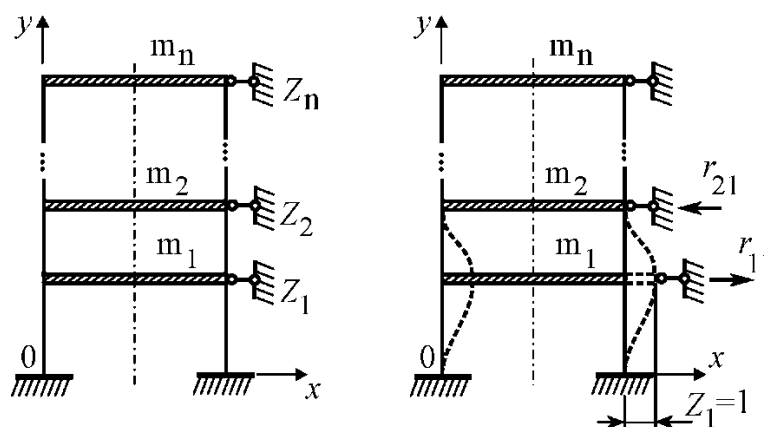


Рис. 3.18

При использовании этого метода колебательный процесс n массовой системы описывается матричным уравнением

$$([R] - \omega^2 [M])\{A\} = 0, \quad (3.17)$$

где матрица упругих реакций

$$[R] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ & & \dots & \\ r_{n1} & r_{n2} & & r_{nn} \end{bmatrix}.$$

Нетривиальное решение уравнения (3.17) выглядит следующим образом:

$$\left| [R] - \omega^2 [M] \right| = 0,$$

или в развернутом виде

$$\det(\omega^2) = \begin{vmatrix} (r_{11} - \omega^2 m_1) & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ & (r_{22} - \omega^2 m_2) & \dots & r_{2n} \\ & & \dots & \\ \text{симметр.} & & & (r_{nn} - \omega^2 m_n) \end{vmatrix} = 0. \quad (3.18)$$

На математическом языке решение данного характеристического уравнения представляет собой обобщенную задачу нахождения собственных значений $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$.

Отметим, что для рамы с n динамическими степенями свободы существуют n вещественных положительных значений частот свободных колебаний $\omega_i, i=1, 2, \dots, n$. Каждой частоте ω_i соответствует собственный вектор $\{A_i\}$ или собственная форма (мода) свободных колебаний. На практике не обязательно вычислять все корни $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$, достаточно определить несколько первых (в строительстве до 10) собственных чисел. Отметим, что низшие частоты и соответствующие формы свободных колебаний являются важной динамической характеристикой сооружения, позволяющей выявить резонансные режимы и проанализировать возможные формы деформации конструкции.

3.6.2. Ортогональность собственных форм колебаний

Рассмотрим i -ую форму колебаний:

$$\{w_i\} = \{A_i\} \sin(\omega_i t + \varphi_0).$$

Амплитудное значение вектора сил инерции ($\sin \omega_i t = 1$) равно

$$\{J_i\} = \omega_i^2 [M] \{A_i\}.$$

Аналогично записываем для j -й формы колебаний

$$\{J_j\} = \omega_j^2 [M] \{A_j\}.$$

На основании принципа о взаимности работ внешних сил имеем:

$$\begin{aligned} \{J_i\}^T \{A_j\} &= \{J_j\}^T \{A_i\}; \\ \omega_i^2 \{A_i\}^T [M] \{A_j\} &= \omega_j^2 \{A_j\}^T [M] \{A_i\}; \\ (\omega_i^2 - \omega_j^2) \{A_i\}^T [M] \{A_j\} &= 0. \end{aligned}$$

Поскольку по определению $\omega_i^2 \neq \omega_j^2$, получаем условие M -ортогональности любых двух собственных форм колебаний системы в виде

$$\{A_i\}^T [M] \{A_j\} = 0.$$

Физический смысл условия M -ортогональности состоит в том, что суммарная работа сил инерции i -й формы колебаний на перемещениях j -й формы равна нулю. При вычислениях часто используют процедуру нормирования собственных векторов в виде

$$\{A_i\}^T [M] \{A_j\} = \delta_{ij}, \quad (3.19)$$

где символ Кронекера

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Используя уравнение (3.17) и выражение (3.19), можно получить условие R -ортогональности собственных векторов:

$$\{A_i\}^T [R] \{A_j\} = \omega_i^2 \delta_{ij}.$$

Как отмечалось ранее, задача определения частот и форм свободных колебаний линейно деформируемой системы эквивалентна обобщенной проблеме собственных значений, суть которой состоит в нахождении нетривиального решения уравнения:

$$[R][A] = [\Omega][M][A], \quad (3.20)$$

где $[\Omega] = \text{diag} [\omega_1^2 \ \omega_2^2 \ \dots \ \omega_n^2]$ – диагональная матрица собственных значений; $[A] = [\{A_1\} \{A_2\} \dots \{A_n\}]$ – матрица соответствующих собственных векторов. Нетрудно установить, что матрица $[A]$ – ортогональная, т. е. $[A]^T = [A]^{-1}$. Матрицы $[\Omega]$ и $[A]$ называются соответственно спектральной и модальной, а сама процедура определения частот и форм свободных колебаний – модальным анализом системы.

3.6.3. Примеры определения частот свободных колебаний многомассовых рам методами сил и перемещений

Пример 1. Требуется определить частоты свободных колебаний трехмассовой статически неопределимой рамы (рис. 3.19, а), приняв изгибную жесткость и массу сосредоточенных в центрах стержней грузов равными $EJ = 2 \cdot 10^4 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$, $m = 2,0387 \cdot 10^3 \text{ кг}$. Как видно из рис. 3.19, б, система имеет четыре динамические степени свободы.

Расчет данной статически неопределимой рамы выполняем методом сил.

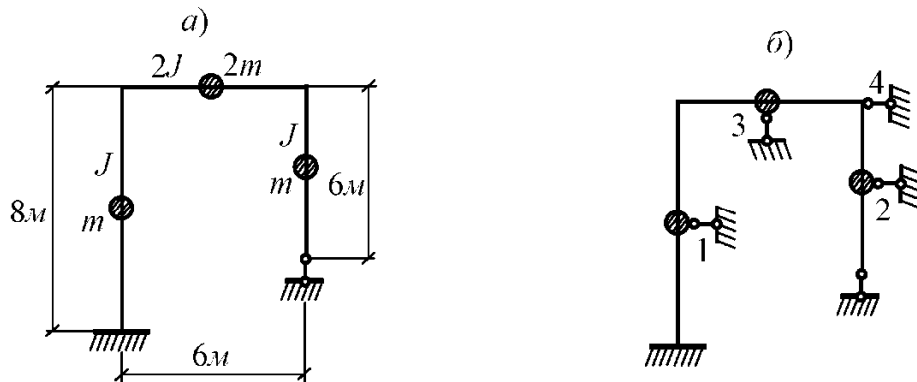


Рис. 3.19

На первом этапе расчета раскрываем статическую неопределимость. Учитывая характер внешнего воздействия (рис. 3.20), основную систему метода сил представим в виде четырех расчетных схем (рис. 3.21). Здесь введены обозначения: $\mathbf{1}$ – единичные силы, совпадающие с направлениями векторов J_1, J_2, J_3, J_4 ; $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}, X^{(4)}$ – неизвестные усилия, эквивалентные реакции отбро-

шенной связи.

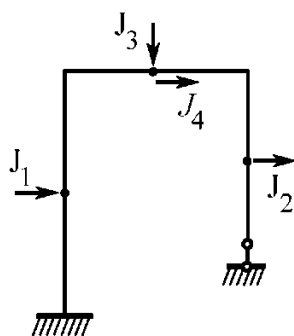


Рис. 3.20

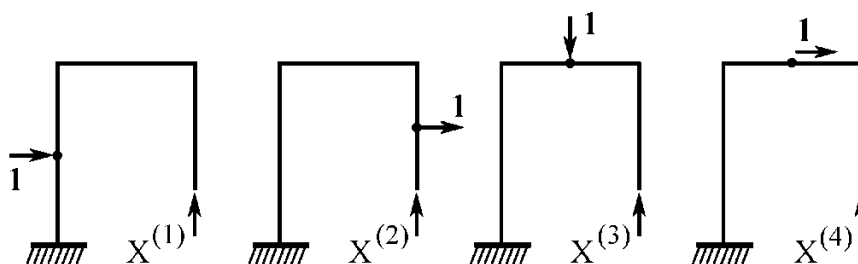


Рис. 3.21

Эпюры изгибающих моментов \bar{m}_{1p} , \bar{m}_{2p} , ..., \bar{m}_{4p} от действия единичных сил показаны на рис. 3.22. Для первой расчетной схемы запишем каноническое уравнение метода сил

$$\bar{\delta}_{11}X^{(1)} + \bar{\Delta}_{1p} = 0,$$

где перемещение от единичной силы $X = 1$ (рис. 3.23)

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_{11} &= \sum_k \int_s \frac{\bar{m}_1^2}{EJ} ds \approx \frac{8}{6 \cdot EJ} (6 \cdot 6 + 4 \cdot 6 \cdot 6 + 6 \cdot 6) + \\ &+ \frac{6}{6 \cdot 2EJ} (0 + 4 \cdot 3 \cdot 3 + 6 \cdot 6) = \frac{324}{EJ}; \end{aligned}$$

перемещение от единичной силы в направлении вектора J_1

$$\bar{\Delta}_{1p} = \sum_k \int_s \frac{\bar{m}_1 \cdot \bar{m}_{1p}}{EJ} ds \approx \frac{4}{6 \cdot EJ} (-4 \cdot 6 - 4 \cdot 2 \cdot 6 - 0) = -\frac{48}{EJ}.$$

Для вычисления интегралов в выражениях $\bar{\delta}_{11}$ и $\bar{\Delta}_{1p}$ использована формула Симпсона (k – число участков на эпюрах моментов; s – длина участка интегрирования).

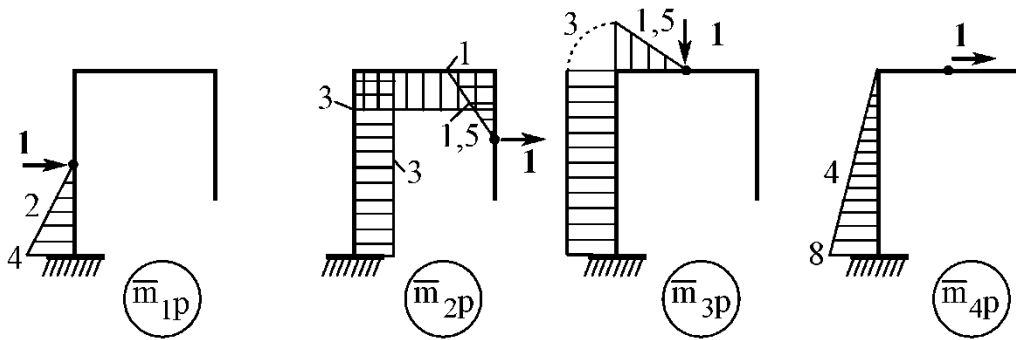


Рис. 3.22

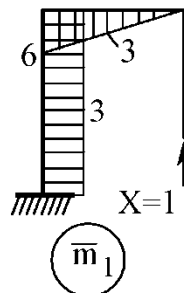


Рис. 3.23

После подстановки величин $\bar{\delta}_{11}$ и $\bar{\Delta}_{1p}$ в исходное уравнение получим $X^{(1)} = 0,1481$.

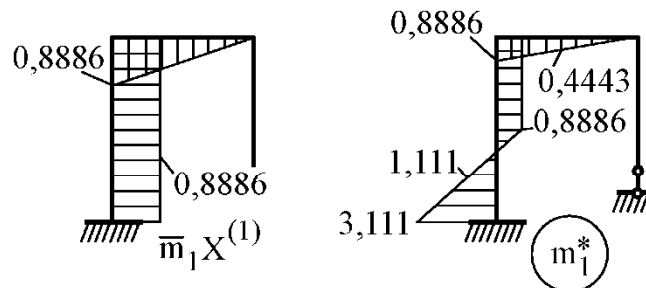


Рис. 3.24

“Исправленная” эпюра $X^{(1)} \cdot \bar{m}_1$ и эпюра “суммарных” моментов $m_1^* = X^{(1)} \cdot \bar{m}_1 + \bar{m}_{1p}$ для первой расчетной схемы представлены на рис. 3. 24. По аналогии выполняем вычисления для трех остальных расчетных схем. Последовательно находим:

$$X^{(2)} = -0,5278; \quad X^{(3)} = 0,4792; \quad X^{(4)} = 0,9877.$$

Соответствующие “суммарные” эпюры изгибающих моментов m_2^* ,

m_3^* , m_4^* показаны на рис. 3.25.

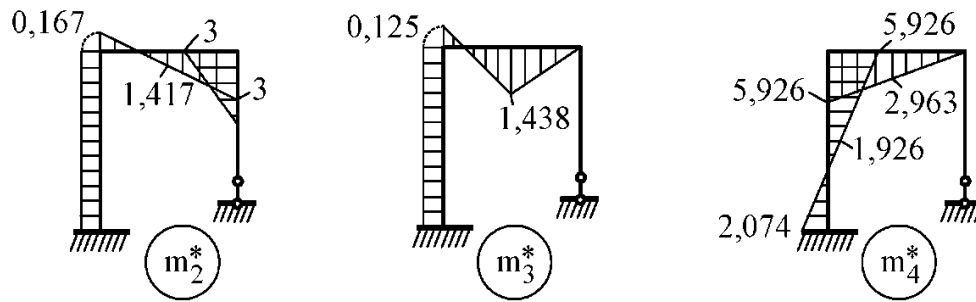


Рис. 3.25

На втором этапе расчета формируем матрицу податливости $[D]$ трехмассовой системы с учетом действия единичных сил инерции $J_1 = 1$, $J_2 = 1$, $J_3 = 1$, $J_4 = 1$ (см. рис. 3.20).

Матрица $[D]$ имеет следующую структуру:

$$[D] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \delta_{14} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \delta_{24} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} & \delta_{34} \\ \delta_{41} & \delta_{42} & \delta_{43} & \delta_{44} \end{bmatrix}, \quad \delta_{ij} = \delta_{ji}, \quad i, j = 1, 4.$$

Перемещения δ_{ij} вычисляем на основании результатов первого этапа расчета по формуле

$$\delta_{ij} = \sum_{k_s} \int \frac{m_i^* \cdot m_j^*}{EJ}.$$

После “перемножения” эпюр m_1^* , m_2^* , ..., получим

$$[D] = \frac{1}{2 \cdot 10^7} \begin{bmatrix} 42,657 & -99,988 & 92,693 & 176,57 \\ & 378,78 & -324,59 & -551,59 \\ & & 299,68 & 494,68 \\ \text{симметр.} & & & 865,99 \end{bmatrix}.$$

Матрицу масс формируем “прямым” включением диагональных элементов $m_{11} = m$, $m_{22} = m$, $m_{33} = 2m$, $m_{44} = 2m$. В итоге имеем

$$[M] = \text{diag} [2038,7 \mid 2038,7 \mid 4077,4 \mid 4077,4].$$

Для определения частот свободных колебаний составим характеристическое уравнение:

$$|[D][M] - \lambda[I]| = 0.$$

Стандартную задачу о собственных значениях матрицы $[H] = [D][M]$ решаем с помощью интерактивной функции `eigenvalues` компьютерной математики системы Maple V. Получены следующие значения частот свободных колебаний рамы:

$$\omega_1 = (1/\lambda_1)^{1/2} = 6,664 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_2 = (1/\lambda_2)^{1/2} = 22,53 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_3 = (1/\lambda_3)^{1/2} = 34,82 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_4 = (1/\lambda_4)^{1/2} = 59,63 \text{ с}^{-1}.$$

Пример 2. Требуется вычислить частоты свободных колебаний трехмассовой статически определимой рамы (рис. 3.26).

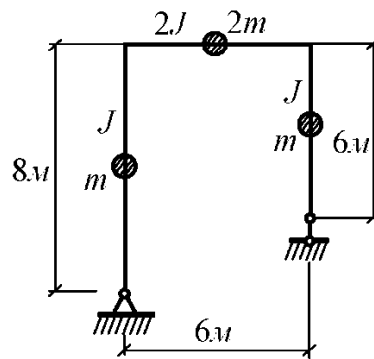


Рис. 3.26

Заметим, что данная рама получена из рамы, рассмотренной в предыдущем примере, путем замены жесткого защемления на левой стойке шарнирно неподвижной опорой. Задачу решаем методом сил.

Эпюры изгибающих моментов m_1, m_2, m_3, m_4 от действия единичных сил инерции $J_1 = 1, J_2 = 1, J_3 = 1, J_4 = 1$ приведены на рис. 3.27.

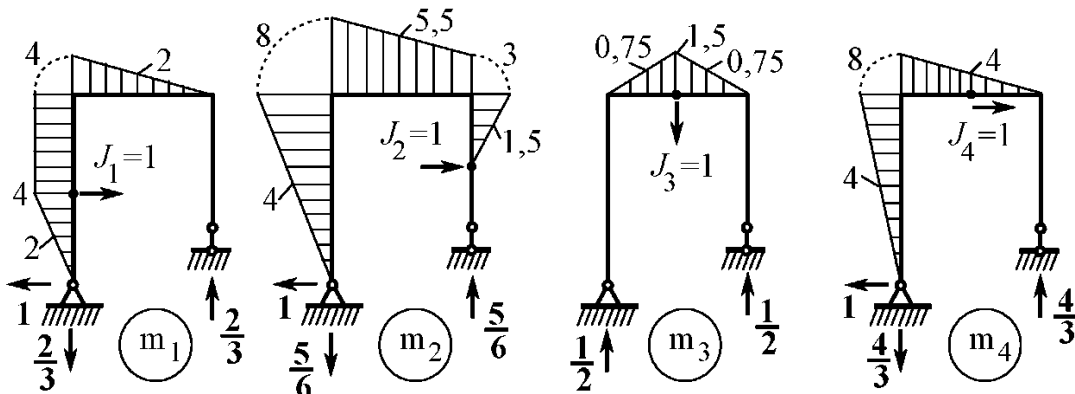


Рис. 3.27

После вычисления перемещений $\delta_{ij} = \sum_k \int \frac{m_i \cdot m_j}{EJ}$, $i, j = 1, 4$ и

соответствующих подстановок матрица податливости принимает форму

$$[D] = \frac{1}{2 \cdot 10^7} \begin{bmatrix} 101,33 & 155,33 & 4,50 & 149,33 \\ & 276,67 & 12,375 & 252,0 \\ & & 2,250 & 9,0 \\ \text{симметр.} & & & 234,67 \end{bmatrix}.$$

Матрица масс $[M]$ эквивалентна данным предыдущего примера.

Спектр частот свободных колебаний в рассматриваемом случае принимает следующие значения:

$$\omega_1 = 3,425 \text{ с}^{-1}; \omega_2 = 28,03 \text{ с}^{-1}; \omega_3 = 59,75 \text{ с}^{-1}; \omega_4 = 344,1 \text{ с}^{-1}.$$

Сравнивая частоты основного тона свободных колебаний, полученные в первом ($6,664 \text{ с}^{-1}$) и втором ($3,425 \text{ с}^{-1}$) примерах, устанавливаем, что замена жесткой заделки на шарнирно неподвижную опору в левой стойке рамы приводит к уменьшению величины ω_1 почти в два раза. Это связано с тем, что в результате данной реконструкции жесткость рамы во втором примере понизилась при сохранении инерционных свойств системы.

Пример 3. Необходимо вычислить частоты свободных колебаний трехэтажной рамы (рис. 3.28), приняв погонные массы ригелей равными:

$$m_{П1} = 3,058 \text{ (кН} \cdot \text{с}^2)/\text{м}^2; m_{П2} = m_{П3} = 2,039 \text{ (кН} \cdot \text{с}^2)/\text{м}^2.$$

Величины сосредоточенных масс:

$$m_1 = 40,77 \text{ (кН} \cdot \text{с}^2)/\text{м}; m_2 = m_3 = 30,58 \text{ (кН} \cdot \text{с}^2)/\text{м}.$$

Значение изгибной жесткости стоек $EJ = 3680 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$.

Основная система метода перемещений показана на рис. 3.29. Как видно система имеет три динамических степени свободы, что совпадает со степенью кинематической неопределимости задачи.

Матрицы жесткости $[R]$ и масс $[M]$ имеют вид:

$$[R] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ 0 & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix};$$

$$[M] = \text{diag} [m_{\Pi 1} \cdot 6 + 2 \cdot m_1 \mid m_{\Pi 2} \cdot 6 + 2 \cdot m_2 \mid m_{\Pi 3} \cdot 6 + 2 \cdot m_3].$$

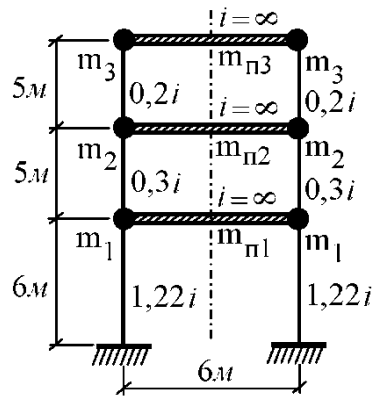


Рис. 3.28

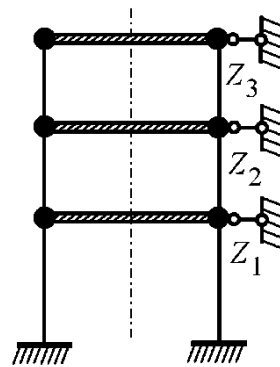


Рис. 3.29

Для вычисления величин r_{ij} , $i, j = 1, 3$ используем выражения для реакций, возникающих при единичных смещениях связей Z_1 , Z_2 , Z_3 (рис. 3.30).

В итоге получим характеристическое уравнение:

$$\left| 3680 \cdot 10^3 \begin{bmatrix} 1,1013 & -0,2880 & 0 \\ & 0,480 & -0,1920 \\ \text{симметр.} & & 0,1920 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 99898 & 0 & 0 \\ 0 & 73395 & 0 \\ 0 & 0 & 73395 \end{bmatrix} \right| = 0.$$

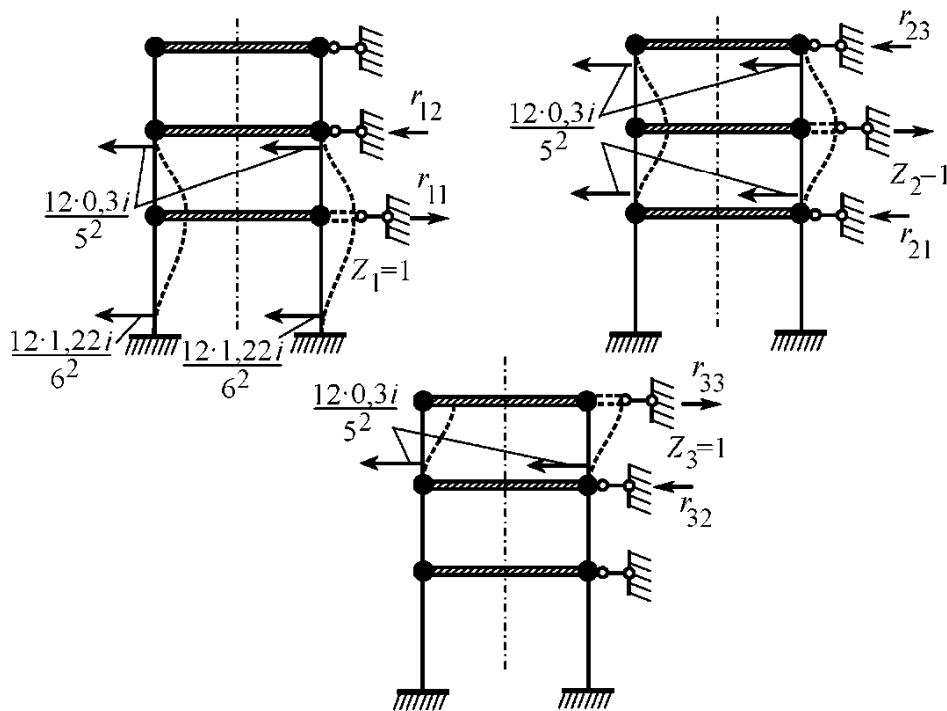


Рис. 3.30

Решая обобщенную собственную проблему с помощью системы Maple V, получим следующие значения частот свободных колебаний рамы:

$$\omega_1 = 1,962 \text{ с}^{-1}; \omega_2 = 4,758 \text{ с}^{-1}; \omega_3 = 6,912 \text{ с}^{-1}.$$

3.6.4. Расчет многомассовых рам на вынужденные гармонические колебания методом сил

Вынужденные гармонические колебания возникают в рамах при действии вибрационной нагрузки.

Целью “ручного” динамического расчета является определение амплитудных (наибольших) значений внутренних усилий (моментов, поперечных и продольных сил) в стержнях рамы при возбуждении колебаний.

Полагаем, что возмущающие силы изменяются синхронно (по одному закону с одинаковой частотой) и синфазно (без сдвига фаз). Силы сопротивления ввиду их малости не учитываем. Считаем, что значение частоты вибрационной нагрузки Θ достаточно удалено от частоты основного тона свободных колебаний ω_1 .

Каноническая система уравнений метода сил для определения амплитудных значений сил инерции $X_1^{\text{ин}}$, $X_2^{\text{ин}}$, ..., $X_n^{\text{ин}}$ имеет вид:

$$\begin{cases} \delta_{11}^* X_1^{\text{ин}} + \delta_{12} X_2^{\text{ин}} + \dots + \delta_{1n} X_n^{\text{ин}} + \Delta_{1p} = 0; \\ \delta_{21} X_1^{\text{ин}} + \delta_{22}^* X_2^{\text{ин}} + \dots + \delta_{2n} X_n^{\text{ин}} + \Delta_{2p} = 0; \\ \dots \\ \delta_{n1} X_1^{\text{ин}} + \delta_{n2} X_2^{\text{ин}} + \dots + \delta_{nn}^* X_n^{\text{ин}} + \Delta_{np} = 0, \end{cases}$$

где δ_{ij} – перемещение сосредоточенной массы по направлению $X_i^{\text{ин}}$ от действия единичной силы инерции $X_j^{\text{ин}} = 1$; Δ_{ip} – перемещение сосредоточенной массы m_i от действия амплитудного значения вибрационной нагрузки.

Диагональные коэффициенты δ_{ij}^* вычисляются с учетом силы инерции массы m_i по формуле

$$\delta_{ii}^* = \delta_{ii} - \frac{1}{m_i \Theta^2}.$$

После вычисления неизвестных $X_1^{\text{ин}}$, $X_2^{\text{ин}}$, ..., $X_n^{\text{ин}}$ строится “суммарная” эпюра динамических изгибающих моментов $M_{\text{дин}}$ и соответствующие эпюры $Q_{\text{дин}}$ и $N_{\text{дин}}$.

Порядок динамического расчета плоской статически определимой рамы рассмотрим на конкретном числовом примере.

Пример. Требуется выполнить динамический расчет рамы (рис. 3.31) при действии вибрационной нагрузки $P(t) = P_0 \sin(\Theta t)$ и $q(t) = q_0 \sin(\Theta t)$, приняв $\Theta = k \omega_1$, где коэффициент $k = 0,5$. Данная схема рамы аналогична схеме, приведенной в пп. 3.6.3 (пример 2). Поэтому на основании ранее выполненных расчетов значение частоты основного тона свободных колебаний принимаем равным $\omega_1 = 3,425 \text{ с}^{-1}$. Тогда по условию задачи частота гармонического возбуждения колебаний составляет $\Theta = 0,5 \cdot \omega_1 = 1,712 \text{ с}^{-1}$.

Система уравнений для определения амплитудных значений сил инерции принимает вид:

$$\begin{cases} \delta_{11}^* X_1^{\text{ин}} + \delta_{12} X_2^{\text{ин}} + \delta_{13} X_3^{\text{ин}} + \delta_{14} X_4^{\text{ин}} + \Delta_{1p} = 0; \\ \delta_{21} X_1^{\text{ин}} + \delta_{22}^* X_2^{\text{ин}} + \delta_{23} X_3^{\text{ин}} + \delta_{24} X_4^{\text{ин}} + \Delta_{2p} = 0; \\ \delta_{31} X_1^{\text{ин}} + \delta_{32} X_2^{\text{ин}} + \delta_{33}^* X_3^{\text{ин}} + \delta_{34} X_4^{\text{ин}} + \Delta_{3p} = 0; \\ \delta_{41} X_1^{\text{ин}} + \delta_{42} X_2^{\text{ин}} + \delta_{43} X_3^{\text{ин}} + \delta_{44}^* X_4^{\text{ин}} + \Delta_{4p} = 0. \end{cases}$$

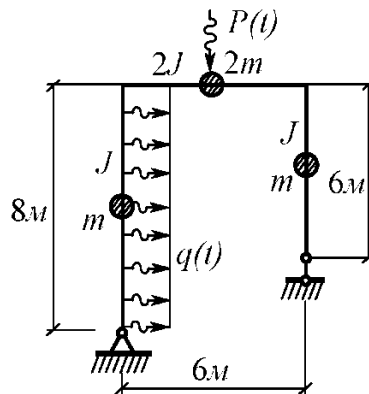


Рис. 3.31

Здесь диагональные коэффициенты:

$$\delta_{11}^* = \delta_{11} - \frac{1}{m_1 \Theta^2} = \frac{101,33}{2 \cdot 10^7} - \frac{1}{2038,7 \cdot 1,712^2} = -0,1622 \cdot 10^{-3};$$

$$\delta_{22}^* = \delta_{22} - \frac{1}{m_2 \Theta^2} = \frac{276,67}{2 \cdot 10^7} - \frac{1}{2038,7 \cdot 1,712^2} = -0,1535 \cdot 10^{-3};$$

$$\delta_{33}^* = \delta_{33} - \frac{1}{m_3 \Theta^2} = \frac{2,250}{2 \cdot 10^7} - \frac{1}{4077,4 \cdot 1,712^2} = -0,8354 \cdot 10^{-4};$$

$$\delta_{44}^* = \delta_{44} - \frac{1}{m_4 \Theta^2} = \frac{234,67}{2 \cdot 10^7} - \frac{1}{2038,7 \cdot 1,712^2} = -0,7192 \cdot 10^{-4}.$$

Значения недиагональных коэффициентов δ_{ij} ($i \neq j$) приведены в разделе 3.6.3 (пример 2).

Свободные члены Δ_{1p} , Δ_{2p} , ... системы уравнений вычисляем после построения грузовой эпюры моментов m_p (рис. 3.32).

В итоге результирующее матричное уравнение принимает вид

$$[D]\{X^{\text{ин}}\} = \{b\},$$

где вектор правой части

$$\{b\} = \{0,1481 \mid 0,2340 \mid 0,7649 \cdot 10^{-2} \mid 0,2237\}^T.$$

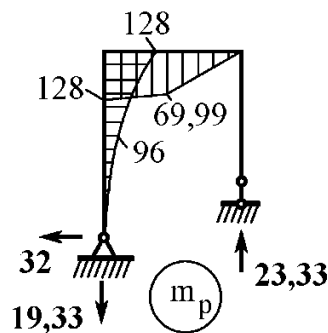


Рис. 3.32

Вектор амплитудных значений сил инерции $\{X^{\text{ин}}\}$ находим с помощью функций матричной алгебры системы Maple V. В итоге получим

$$\{X^{\text{ин}}\} = \{1,167 \mid 1,876 \mid 0,1278 \mid 3,560\}^T.$$

Величины $X_1^{\text{ин}}$, $X_2^{\text{ин}}$, ... имеют размерность кН.

“Суммарная” эпюра изгибающих моментов $M_{\text{дин}}$, эпюры поперечных $Q_{\text{дин}}$ и продольных $N_{\text{дин}}$ сил представлены на рис. 3.33.

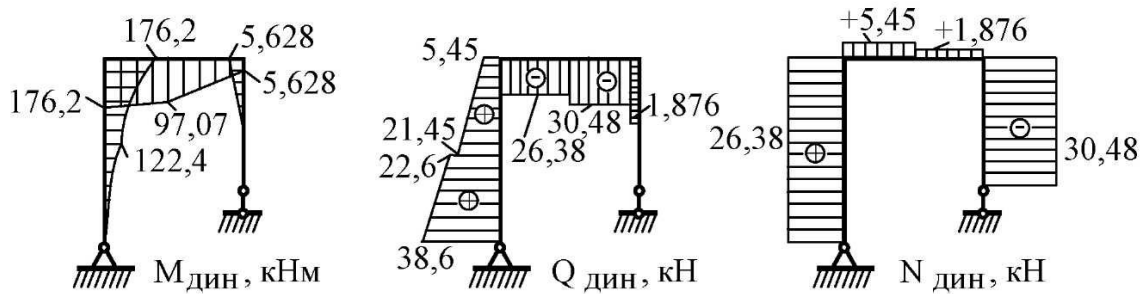


Рис. 3.33

Значения коэффициента динамичности μ в элементах рамы вычисляем как отношения максимальных ординат эпюры $M_{\text{дин}}$ (см. рис. 3.33) к ординатам эпюры m_p (см. рис. 3.32):

в ригеле $\mu = 97,07 / 97 = 1,39$; в стойке $\mu = 176,2 / 128 = 1,38$.

В заключение выполним статическую проверку правильности построенных эпюр (рис. 3.34).

Сумма проекции сил на ось x :

$$\sum_{\text{пр}} X = q_0 \cdot 8 + X_1^{\text{ин}} + X_2^{\text{ин}} + X_4^{\text{ин}} - 38,6 = 0;$$

$$4 \cdot 8 + 1,167 + 1,876 + 3,56 - 38,6 = 0; \quad 0 \equiv 0.$$

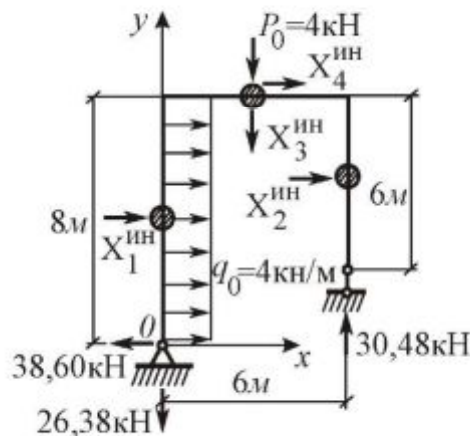


Рис. 3.34

Сумма проекции сил на ось y :

$$\sum_{\text{пр}} Y = -P_0 - X_3^{\text{ин}} - 26,38 + 30,48 = 0;$$

$-4 - 0,1278 - 26,38 + 30,48 = -4,1278 + 4,10 = -0,0278$
 (расхождение в третьем знаке, абсолютная погрешность – 2,7%).

3.6.5. Итерационный алгоритм вычисления частот и форм свободных колебаний рам с конечным числом степеней свободы

Известно, что характеристические уравнения (3.16) и (3.18) при $n > 4$ нельзя решить алгебраически (“вручную”), раскрыв определитель. Поэтому задачи на собственные значения при $n > 4$ решаются с помощью итерационных процедур. Рассмотрим модифицированный алгоритм обратных итераций [5], позволяющий решить усеченную проблему собственных значений, суть которой состоит в вычислении первой и последующей частот свободных колебаний $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_S$ с одновременным определением соответствующих собственных векторов $\{A_1\}, \{A_2\}, \dots, \{A_S\}$ системы (3.20).

Полагаем, что матрица упругих реакций $[R]$ положительно определенная, т. е. для нее может быть вычислена обратная матрица $[R]^{-1}$. Вычислительный процесс итерационного алгоритма основан на использовании отношения Рэля

$$\rho_S = \frac{\{A_S\}^T [R] \{A_S\}}{\{A_S\}^T [M] \{A_S\}},$$

которое обладает свойством $\omega_{min}^2 \leq \rho_S \leq \omega_{max}^2$, где ω_{min}^2 и ω_{max}^2 – минимальное и максимальное значения собственных значений системы (3.20). С помощью величины ρ_S , называемой сдвигом, на основании выражения $[R] - \rho_S [M]$ можно вычислить первое и последующие (низшие) собственные значения. Блок-схема данного алгоритма представлена на рис. 3.35.

В качестве исходных данных необходимо задать величину начального сдвига ρ_1 и начальный рабочий вектор $\{x_1\}$ размерностью n . При вычислении частоты основного тона ω_1 принимаем $\rho_1 = 0$, а для нахождения последующих частот $\omega_2, \omega_3, \dots$ начальный сдвиг ρ_1 увеличиваем на величину $\omega_{S-1}^2 + \Delta$. Константу Δ подбираем спо-

собом “пристрелки” таким образом, чтобы искомое собственное число ω_s^2 было больше предыдущего ω_{s-1}^2 . Графическая интерпретация выбора величины ρ_1 для $S > 1$ показана на рис. 3.36.

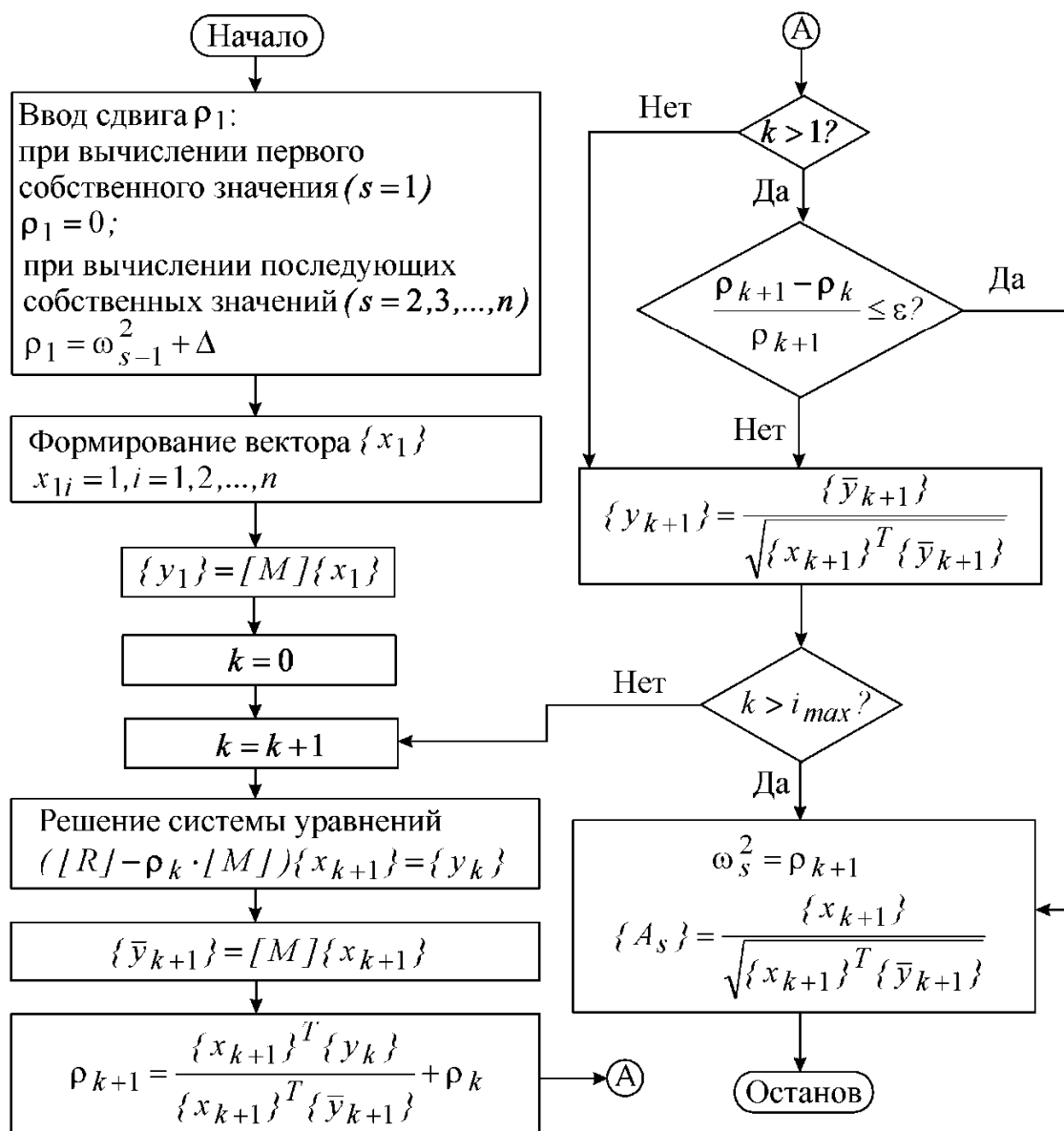


Рис. 3.35

Так как компоненты вектора $\{x_1\}$ являются неизвестными, то в первом приближении им можно присвоить единичные значения. Величина s -го собственного значения ω_s^2 вычисляется с точностью

$\varepsilon = 10^{-2p}$, где p – число верных значащих цифр. Вычислительной особенностью рассмотренного алгоритма является необходимость введения рабочих векторов $\{y\}$, $\{\bar{y}\}$, $\{x\}$ размерностью n , предназначенных для хранения промежуточных данных. Для предотвращения итерационного процесса от заикливания задается максимальное число итераций i_{max} .

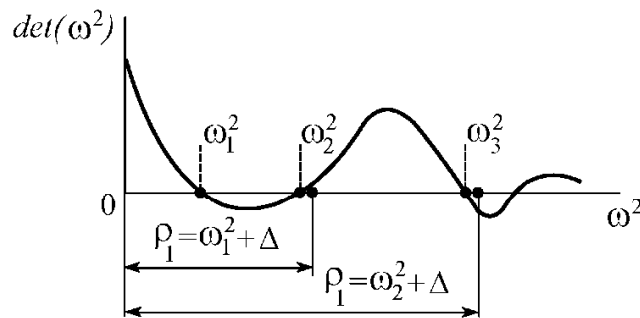


Рис. 3.36

Пример. требуется определить модифицированным методом обратных итераций частоты и формы свободных колебаний статически определимой плоской рамы (рис. 3.37, а). Величины сосредоточенной массы и изгибной жесткости принимаем равными $m = 1,019 \cdot 10^3$ кг, $EJ = 2 \cdot 10^7$ Н·м².

В соответствии с основной системой метода перемещений (рис. 3.37, б) матрица упругих реакций принимает вид

$$[R] = i \begin{bmatrix} 2,75 & 1 & -0,375 & 0 & 0 \\ 1 & 5,75 & -0,375 & -0,375 & 3 \\ -0,375 & -0,375 & 0,375 & 0 & 0 \\ 0 & -0,375 & 0 & 0,1875 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Матрица масс для рассматриваемой задачи имеет диагональную структуру

$$[M] = \text{diag} [0 \mid 0 \mid 1,019 \cdot 10^3 \mid 0 \mid 1,019 \cdot 10^3].$$

Отметим, что в данном случае на главной диагонали матрицы $[M]$ имеются нулевые элементы, соответствующие ложным инерционным моментам (узлы 2, 3) и силе инерции (узел 1).

При вычислении первой собственной пары ω_1^2 и $\{A_1\}$ с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$ получены следующие результаты: $\omega_1 = 52,5 \text{ с}^{-1}$;

$$\{A_1\} = 10^{-2} \cdot \{0,218 \mid 0,552 \mid 3,07 \mid 1,11 \mid -0,610\}^T.$$

Процесс сошелся за четыре итерации.

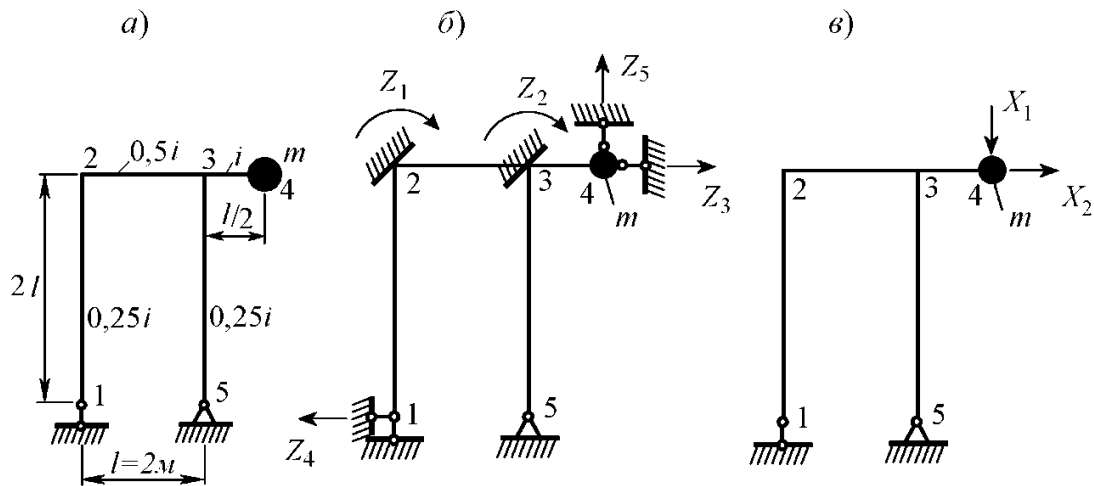


Рис. 3.37

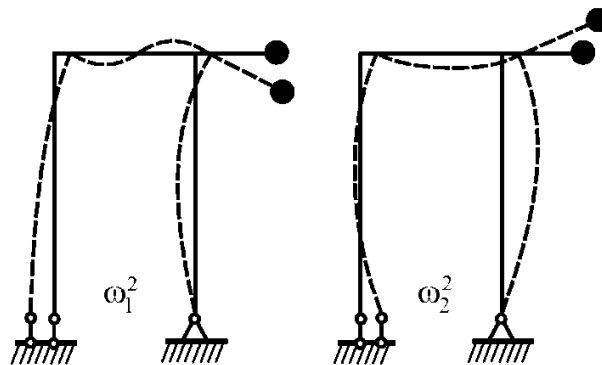


Рис. 3.38

Для вычисления второй собственной пары ω_2^2 и $\{A_2\}$ величина начального сдвига принималась равной $\rho_1 = 10^4$. В итоге за три итерации получены значения: $\omega_2 = 103,4 \text{ с}^{-1}$;

$$\{A_2\} = 10^{-2} \cdot \{0,795 \mid -1,96 \mid 0,610 \mid -3,91 \mid 3,07\}^T.$$

Вычисленные векторы $\{A_1\}$ и $\{A_2\}$ удовлетворяют условиям M - и R -ортогональности. Визуализация возможных первых двух форм свободных колебаний рамы показана на рис. 3.38.

Выполним аналогичный расчет плоской рамы с использованием основной системы метода сил (рис. 3.37, в). Матрицы податливости и масс для рассматриваемой системы имеют вид:

$$[D] = \frac{1}{EJ} \begin{bmatrix} 1 & 16/6 \\ 16/6 & 32 \end{bmatrix}; \quad [M] = \begin{bmatrix} 1,019 \cdot 10^3 & 0 \\ 0 & 1,019 \cdot 10^3 \end{bmatrix}.$$

Матрицу жесткости определим как $[R] = [D]^{-1}$. Далее, применив итерационный алгоритм, найдем:

$$\omega_1 = 24,68 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_2 = 159,4 \text{ с}^{-1}.$$

Как видно, полученные с помощью метода перемещений и метода сил значения частот свободных колебаний не совпадают. Это подтверждает общее мнение о том, что динамические расчеты представляют сложную задачу строительной механики и требуют всестороннего исследования. Как будет показано далее, одним из универсальных путей анализа динамического поведения стержневых конструкций является применение МКЭ.

3.7. Уравнение движения в формулировке метода конечных элементов

В настоящее время МКЭ находит широкое применение при анализе динамического поведения элементов конструкций и сооружений. Это объясняется тем, что лишь небольшой класс динамических задач строительной механики имеет аналитическое решение.

Рассмотрим движение линейно-упругой системы, происходящее на временном интервале $[t_1, t_2]$, в глобальных декартовых осях. Примем обозначения: $\Pi = \Pi(t, w_i)$ – полная потенциальная энергия внутренних и внешних сил, действующих на систему; $T = T(t, w, w')$ – кинетическая энергия системы; $w_i, w'_i (i=1, 2, \dots, n_g)$ – обобщенные перемещения и скорости в глобальных осях; n_g – число степеней свободы системы. Предполагаем, что в простейшем случае силы демпфирования пропорциональны скоростям и направлены в противоположную сторону. По природе действия эта нагрузка аналогична силам инерции. Работа диссипативных сил

$$\Omega = Q_i w_i.$$

где Q_i – обобщенные силы, не имеющие потенциала.

При конечно-элементном анализе динамики неконсервативных систем принято исходить из вариационного принципа Гамильтона. Суть этого принципа основана на условии стационарности интеграла

$$\int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi) dt = 0$$

для истинного движения системы от момента времени t_1 до момента t_2 .

Согласно принятым обозначениям, вариационный принцип Гамильтона запишем в виде, удобном для вывода последующих матричных выражений МКЭ [8]:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial(T - \Pi)}{\partial w_i} \delta w_i + \frac{\partial T}{\partial \dot{w}_i} \delta \dot{w}_i \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} Q_i \delta w_i dt = 0.$$

Интегрируя второе слагаемое, стоящее в скобках, по частям и учитывая, что $\delta w_i(t_1) = \delta w_i(t_2) = 0$, получим

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial(T - \Pi)}{\partial w_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{w}_i} + Q_i \right) \delta w_i dt = 0.$$

Отсюда, вследствие того, что δw_i – произвольные независимые величины, в общем случае отличные от нуля, получаем уравнение Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{w}_i} \right) - \frac{\partial(T - \Pi)}{\partial w_i} = Q_i. \quad (3.23)$$

Представим уравнение (3.23) в терминах МКЭ. Полная потенциальная энергия конечного элемента

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon\} dv - \int_{V_e} \{u\}^T \{g\} dv - \int_{S_e} \{u\}^T \{q\} ds =$$

* Система, в которой при ее движении величина энергии Π остается постоянной, называется консервативной, в противном случае система будет неконсервативной.

$$= \frac{1}{2} \{w\}^T \left(\int_{v_e} [D]^T [E] [D] dv \right) \{w\} - \{w\}^T \int_{v_e} [F]^T \{g\} dv - \quad (3.24)$$

$$- \{w\}^T \int_{s_e} [F]^T \{q\} ds,$$

где $\{w\}$ – вектор-столбец узловых перемещений; $\{\varepsilon\}$ – вектор-столбец деформации; $[E]$ – матрица упругости материала; $[D]$ – блочная матрица, устанавливающая связь типа $\{\varepsilon\} = [D] \{w\}$; $\{g\}$ и $\{q\}$ – векторы-столбцы объемных и распределенных по поверхности сил в глобальных осях; $[F]$ – матрица функций формы, осуществляющая преобразование

$$\{u\} = [F] \{w\};$$

$\{u\}$ – вектор-столбец перемещений произвольной точки конечного элемента относительно глобальных осей; v_e – объём, занимаемый элементом; s_e – площадь поверхности элемента, к которой приложена распределенная нагрузка. Учитывая, что элементы $[F]$ – суть функции только локальных координат, установим соотношение

$$\{u'\} = [F] \{w'\},$$

в котором $\{u'\}$, $\{w'\}$ – соответственно векторы-столбцы скоростей произвольной точки и узлов элемента.

Кинетическая энергия элемента

$$T_e = \frac{1}{2} \int_{v_e} \rho \{u'\}^T \{u'\} dv = \frac{1}{2} \{w'\}^T \left(\int_{v_e} [F]^T \rho [F] dv \right) \{w'\}, \quad (3.25)$$

где ρ – плотность материала.

На основании выше принятого предположения вектор-столбец сил демпфирования элемента

$$\{Q\} = - \left(\int_{v_e} [F]^T \gamma [F] dv \right) \{w'\}. \quad (3.26)$$

Здесь γ – коэффициент демпфирования, определяемый экспериментально путем исследования собственных затухающих колебаний конструкции. Для прокатной стали и железобетона соответственно имеем $\gamma = 0,025$ и $\gamma = 0,1$.

Подставляя выражения (3.24)-(3.26) в уравнение (3.23) и учиты-

вая, что $\frac{\partial T}{\partial w_i} = 0$, запишем

$$\left(\int_{v_e} [F]^T \rho [F] dv \right) \{w''\} + \left(\int_{v_e} [D]^T [E] [D] dv \right) \{w\} -$$

$$- \int_{v_e} [F]^T \{g\} dv - \int_{s_e} [F]^T \{q\} ds = - \left(\int_{v_e} [F]^T \gamma [F] dv \right) \{w'\},$$

($\{w''\}$ – вектор-столбец узловых ускорений) или в матричной форме

$$[m] \{w''\} + [c] \{w'\} + [k] \{w\} = \{r\},$$

где матрица масс элемента

$$[m] = \int_{v_e} [F]^T \rho [F] dv;$$

матрица демпфирования элемента

$$[c] = \int_{v_e} [F]^T \gamma [F] dv;$$

матрица жесткости элемента

$$[k] = \int_{v_e} [D]^T [E] [D] dv;$$

вектор-столбец узловой нагрузки элемента

$$\{p\} = \int_{v_e} [F]^T \{g\} dv + \int_{s_e} [F]^T \{q\} ds.$$

В общем случае, когда элементы $\{p\}$ зависят от времени, имеем систему неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка.

Использование одних и тех же функций формы для векторов перемещений и ускорений приводит к согласованной структуре матрицы масс, т.е. $[k]$ и $[m]$ формально будут иметь одно и то же количество ненулевых элементов.

Построение матрицы масс $[M]$ ансамбля элементов выполняем аналогично формированию глобальной матрицы жесткости, т.е. путем прямого адресного включения элементов $[m]$ в $[M]$.

В отличие от глобальных матриц жесткости $[K]$ и масс $[M]$ глобальная матрица демпфирования $[C]$ обычно формируется на уровне ансамбля элементов, т.е. сразу для всей системы. При этом на

основании гипотезы Релея записывают [5]:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K],$$

где α , β – постоянные, определяемые по формулам:

$$\alpha = \frac{2\omega_1\omega_2(\omega_2\gamma_1 - \omega_1\lambda_2)}{\omega_2^2 - \omega_1^2}; \quad \beta = \frac{2(\omega_2\lambda_2 - \omega_1\gamma_1)}{\omega_2^2 - \omega_1^2}.$$

Здесь обозначено: ω_1 , ω_2 – первые две угловые частоты свободных колебаний; γ_1 , γ_2 – коэффициенты демпфирования 1-й и 2-й форм свободных колебаний. Константы α и β соответствуют инерционному и конструкционному демпфированию.

Если сооружение представляет собой набор фрагментов, обладающих различными демпфирующими свойствами, необходимо использовать различные значения коэффициентов α , β для соответствующих типов материалов.

Следует подчеркнуть, что при конструировании граничных условий нужно учитывать характер динамического поведения конструкции. Так, если в статике мы стремились полностью исключить смещения “как жесткого целого”, то в динамике набор связей не должен приводить к образованию динамических реакций, искажающих колебательный процесс.

3.8. Матрица масс стержневого конечного элемента

Для динамического расчета стержневых секций используются прямолинейные балочные элементы постоянного поперечного сечения, для которых общая матрица жесткости $[k]$ приведена в разделе 2.1. Напомним, что для плоской задачи стержневой конечный элемент (рис. 2.1) имеет три степени свободы в узле (два линейных перемещения и угол поворота сечения).

Для стержневых систем используются различные схемы дискретизации при статическом и динамическом способах нагружения. Требуемая точность по перемещениям при статическом расчете достигается при ансамблировании системы стержнями, соизмеримыми (по длине) с конструкционными элементами. В то же время при динамическом расчете с целью учета предыстории движения стержни должны разбиваться на более короткие участки, т. е. дискретизацию осуществляем таким образом, чтобы размеры элемента обеспечивали од-

нозначное соответствие между узловыми перемещениями и формой динамической деформации.

Матрица масс ансамбля конечных элементов формально определяется как сумма матриц масс отдельных элементов

$$[M] = \sum_{i=1}^{n_e} [m]_i,$$

где n_e – общее число конечных элементов; $[m]_i$ – матрица масс i -го элемента. В зависимости от структуры различают согласованную, сосредоточенную и редуцированную матрицы масс конечного элемента.

Согласованная матрица масс стержневого элемента в локальных осях формируется с помощью балочных функций $\{\Psi_c\}$ и $\{\Psi_u\}$, приведенных в разделе 2.1. Для вычисления коэффициентов согласованной матрицы масс используем выражение

$$[m] = \begin{bmatrix} [m_c] & 0 \\ 0 & [m_u] \end{bmatrix},$$

здесь $[m_c]$, $[m_u]$ – субматрицы, описывающие инерционные свойства элемента при продольной деформации и изгибе.

Блок $[m_c]$ формируем по формуле

$$[m_c] = \rho F l \int_0^l \{\Psi_c\}^T \{\Psi_c\} d\xi = q_m l \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

где F – площадь поперечного сечения стержня; $q_m = \rho F$ – масса погонной длины элемента (кг/м); l – длина элемента; $\{\Psi_c\}$ – вектор-столбец функций формы, аппроксимирующих осевые перемещения.

Блок $[m_u]$ формируем по формуле

$$[m_u] = \frac{\rho F l}{2} \int_0^l \{\Psi_u\}^T \{\Psi_u\} d\xi = \frac{q_m l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ & & 156 & -22l \\ \text{симметр.} & & & 4l^2 \end{bmatrix},$$

где $\{\Psi_u\}$ – вектор-столбец функций формы, аппроксимирующих изгибные деформации.

Сосредоточенная матрица масс формируется путем приведения общей массы элемента к узловым точкам. В итоге для плоской задачи сосредоточенная матрица масс принимает диагональную структуру вида

$$[m] = \text{diag} [m_{11} \quad m_{22} \quad m_{33} \quad m_{44} \quad m_{55} \quad m_{66}].$$

Здесь сумма “узловых” масс в каждом направлении равна общей массе элемента.

В ряде случаев из матрицы масс исключаются элементы соответствующие вращательным степеням свободы. Такая матрица масс называется редуцированной.

3.9. Анализ частот и мод свободных колебаний стержневых конструкций

Одним из наиболее используемых в строительной механике расчетных методов является модальный анализ, суть которого сводится к исследованию частот и форм свободных колебаний конечно-элементной модели в заданном диапазоне. Наибольший интерес представляют значения первых (низших) частот свободных колебаний $\omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \dots \leq \omega_n^2$. В практике инженерных расчетов строительных сооружений ограничиваются числом $n \leq 10$. Соответствующие формы свободных колебаний дают представление о возможных способах деформирования конструкции. На этапе проектирования модальный анализ позволяет оценить эффективность несущего каркаса сооружения, уточнить принятые значения геометрических и физических констант, выполнить проверку на резонанс. Модальный анализ предшествует другим видам динамического анализа.

Определенное практическое значение частотный анализ имеет при конструировании граничных условий. Установлено, что каждая дополнительная связь смещает основной тон и все обертоны конечно-элементной модели в сторону повышения частот, и наоборот освобождение от связей приводит к понижению собственных чисел (свободный объект в общем случае имеет шесть нулевых собственных значений). Отсюда актуальной является проблема собственных чисел для пространственных конструкций, собираемых в определенной последовательности из отдельных фрагментов (секций).

В большинстве практических задач влиянием демпфирования на

частоты и формы собственных колебаний пренебрегают. Свободные колебания конечно-элементной модели описываются матричным уравнением

$$[M]\{\ddot{W}\} + [K]\{W\} = 0. \quad (3.27)$$

Представим вектор-столбец узловых перемещений ансамбля элементов в виде

$$\{W\} = \{\overline{W}\} e^{i\omega t}, \quad e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t,$$

где i – мнимая единица.

Тогда уравнение (3.27) можно записать в форме так называемого “векового” уравнения

$$([K] - \omega^2 [M]) \{\overline{W}\} = 0. \quad (3.28)$$

Зависимость (3.28) представляет обобщенную собственную проблему.

Система (3.28) имеет нетривиальное решение ($\{\overline{W}\} \neq 0$) только тогда, когда определитель характеристического уравнения равен нулю

$$\left| [K] - \omega^2 [M] \right| = 0. \quad (3.29)$$

В развернутом виде выражение (3.29) представляет характеристический полином n -го порядка ($n \times n$ – размерность матриц $[K]$ и $[M]$), имеющий n упорядоченных неотрицательных корней $\omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \dots \leq \omega_n^2$. Как отмечалось ранее в пп. 3.6.1, действительные величины $\lambda_i = \omega_i^2$ называют собственными числами, а соответствующие векторы $\{\overline{W}\}_i$ – собственными формами или модами свободных колебаний. Собственные числа и формы еще называют собственными парами.

Отметим, что частотный спектр ряда стержневых конструкций, обладающих осевой симметрией геометрии, упругих свойств и граничных условий, может включать группы очень близких или одинаковых (кратных) собственных значений. Соответствующие собственные формы будут представлять собой свободные колебания в «противофазе».

На практике для вычисления низших частот и мод собственных колебаний используют методы Ланцоша и итераций векторных подпространств. Рассмотрим подробно алгоритм второго метода [5].

Шаг 1. Назначаем начальные векторы-столбцы $\{u\}_1, \{u\}_2, \dots$

..., $\{u\}_q$, где $q = \min(2p, p+8)$ - число одновременно итерированных векторов; p - число искомым первых собственных значений ($q > p$). Начальные векторы должны включать те степени свободы, которые соответствуют наибольшим массам и наименьшим жесткостям. Поэтому $\{u\}_1$ формируем из диагональных элементов матрицы $[M]$; векторы $\{u\}_l, l = 2, 3, \dots, q$ делаем единичными. Каждому i -ому элементу $\{u\}_l$, соответствующему наименьшему отношению k_{ii}/m_{ii} , присваиваем значение единицы. В результате получим матрицу $[u]_{(0)} = [\{u\}_1 \{u\}_2 \dots \{u\}_q]$, где \bar{n} - порядок матриц $(\bar{n} \times q)$

$[K]$ и $[M]$ после исключения „лишних” строк и столбцов, соответствующих внешним связям.

Шаг 2. Начало итерационного цикла. Решаем систему уравнений типа

$$[K][\bar{u}]_{(k)} = [M][u]_{(k-1)},$$

где k - номер итерации (рекомендуемое максимальное количество $k=15$). Отсюда получаем матрицу $[\bar{u}]_{(k)}$.

Шаг 3. Формируем „проекции” матриц $[K]$ и $[M]$ на подпространство. Для этого в каждом итерационном цикле вычисляем

$$[K]_{(k)} = [\bar{u}]_{(k)}^T [K] [\bar{u}]_{(k)}, \quad [M]_{(k)} = [\bar{u}]_{(k)}^T [M] [\bar{u}]_{(k)}.$$

Шаг 4. Решаем вспомогательную задачу на собственные значения обобщенным методом Якоби:

$$[K]_{(k)} [Q]_{(k)} = [M]_{(k)} [Q]_{(k)} [\Lambda]_{(k)}.$$

Здесь $[\Lambda]_{(k)} = \text{diag}(\lambda_{ii})$ - диагональная матрица собственных значений λ_{ii} , выстроенных в порядке возрастания; $[Q]_{(k)}$ - матрица соответствующих собственных векторов.

Шаг 5. Определяем „улучшенные” приближения к искомым собственным векторам по формуле

$$[u]_{(k)} = [\bar{u}]_{(k)} [Q]_{(k)}.$$

Найденные собственные векторы удовлетворяют условиям обобщенной ортогональности, т. е.

$$[u]_{(k)}^T [K] [u]_{(k)} = [\Lambda]_{(k)}, \quad [u]_{(k)}^T [M] [u]_{(k)} = [I],$$

где $[I]$ - единичная матрица порядка p .

Шаг 6. Проверяем сходимость итерационного процесса. В качестве критерия используем условие

$$\frac{|(\lambda_{ii})_{(k)} - (\lambda_{ii})_{(k-1)}|}{(\lambda_{ii})_{(k)}} \leq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

где $\varepsilon = 10^{-8}$. Если это условие выполняется, итерационный процесс заканчиваем. В противном случае переходим к шагу 2.

Шаг 7. Проверяем по Штурму правильность определения требуемых собственных значений. Для этого вычисляем сдвиг ρ_S матрицы $[K]$, осуществляющий преобразование типа

$$[\bar{K}] = [K] - \rho_S [M].$$

Выполняем разложение преобразованной матрицы жесткости по формуле

$$[\bar{K}] = [L][D][L]^T,$$

где $[L]$ – нижняя треугольная матрица; $[D]$ – диагональная матрица. Вычисляем количество t отрицательных диагональных элементов матрицы $[D]$. Проверку считаем выполненной, если $t = p$.

В заключение вычисляем нормы ошибок:

$$\frac{\| [K] \{u\}_{(k)} - (\lambda_{ii})_{(k)} [M] \{u\}_{(k)} \|}{\| [K] \{u\}_{(k)} \|}.$$

Вычислительное ядро разработанного программного комплекса реализовано на Фортране 90 с использованием двойной точности и процедур матричной алгебры математической библиотеки *IMSL*. Пре- и постпроцессорные модули разработаны на базе графических функций системы Matlab. Ввод исходной информации о геометрии и топологии расчетной модели осуществляется фрагментарно (по конгломератам КЭ) с использованием процедур приращений и сшивки. Граничные условия вводятся по геометрическому принципу путем последовательной обработки поверхностей, на которые наложены связи. Конечно-элементную модель, номера узлов и элементов для любой расчетной схемы можно проконтролировать с помощью специальной препроцессорной программы. Хранение матриц $[K]$ и $[M]$ ансамбля элементов организовано в виде динамических массивов в разреженном строчном формате. Для решения результирующей системы уравнений (шаг 2) предусмотрено использование методов

Холецкого (LDL^T -факторизации) и сопряженных градиентов. Последний метод эффективен для задач большой размерности (более 5000 неизвестных), т. к. не требует упорядочивания портрета глобальной матрицы жесткости. При использовании метода сопряженных градиентов проверка по Штурму (шаг 7) не выполняется.

3.10. Примеры расчета частот и форм свободных колебаний

С целью апробации разработанной программы модального анализа решены следующие числовые примеры.

Пример 1. Требуется выполнить анализ свободных колебаний в плоскости наибольшей жесткости двухшарнирной балки двутаврового (№ 30) поперечного сечения длиной $l=6$ м. Масса погонной длины балки $q_m=36,5$ кг/м. Расчет выполняем для трех вариантов равномерной разбивки балки на 6, 12 и 24 конечных элемента.

Точные значения частот свободных колебаний балки определяются по формуле [8]:

$$\omega_k = \frac{\pi^2 k^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{q_m}}, \quad k=1, 2, 3, \dots$$

Результаты вычислений первых четырех частот сведены в табл. 3.1.

На рис. 3.39 последовательно показаны первые четыре формы свободных колебаний, полученные на сетке из 24 элементов.

Таблица 3.1

№ тона	ω МКЭ, с ⁻¹			Аналитическое решение, с ⁻¹
	6 КЭ	12 КЭ	24 КЭ	
1	173,6	171,5	170,9	170,8
2	725,4	694,4	685,9	683,0
3	1325	1322	1322	1537
4	1719	1593	1551	2732

Из полученных данных следует, что аналитическое решение не позволяет определить собственную частоту продольных колебаний балки (третий тон). Как видно из табл. 3.1, двукратное сгущение сетки весьма неравномерно повышает точность вычислений собствен-

ных частот. При этом численные значения ω_4 оказываются больше аналитического решения ω_3 .

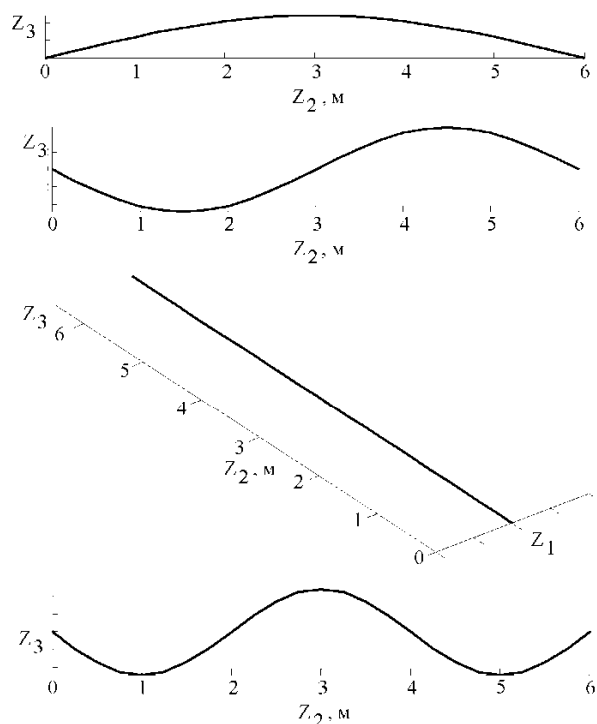


Рис. 3.39

Следует отметить, что при модальном анализе, базирующемся на методе итераций векторных подпространств, необходимо внимательно подходить к назначению способа решения системы алгебраических уравнений. Так, в рассматриваемом примере при использовании метода сопряженных градиентов на сетке, образованной из 24 элементов, итерационный процесс расходится, а применение прямого метода Холецкого на этой же сетке обеспечивает сходимость.

Пример 2. Требуется выполнить модальный анализ рамы с равномерно распределенными массами (рис. 3.40) в дву- и трехмерной постановках. Жесткости стоек и ригеля рамы полагаем постоянными. В качестве материала принимаем стальной двутавр № 24. Наибольшая жесткость рамы совпадает с плоскостью $Z_{2,0}, Z_3$.

Результаты двумерного анализа для первых четырех собственных пар представлены на рис. 3.41. Полученные формы свободных колебаний в дву- и трехмерной постановках совпадают с результатами конечно-элементного анализа, представленными в [6].

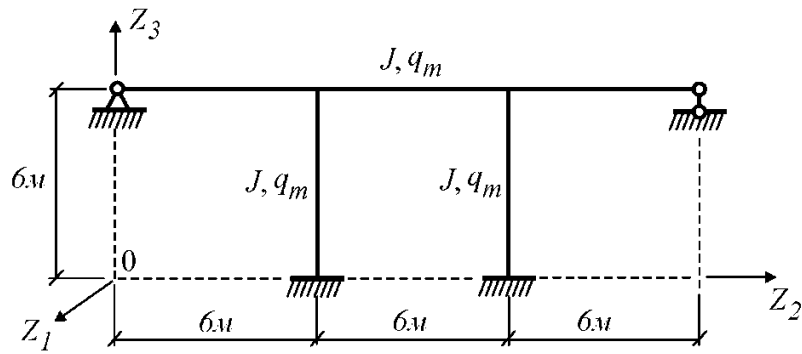


Рис. 3.40

Данные трехмерного модального анализа для двух первых собственных пар приведены на рис. 3.42. Для конечно-элементного моделирования пространственных свободных колебаний в неопорных узлах рамы удалялись ранее введенные связи в направлении глобальной оси Z_1 .

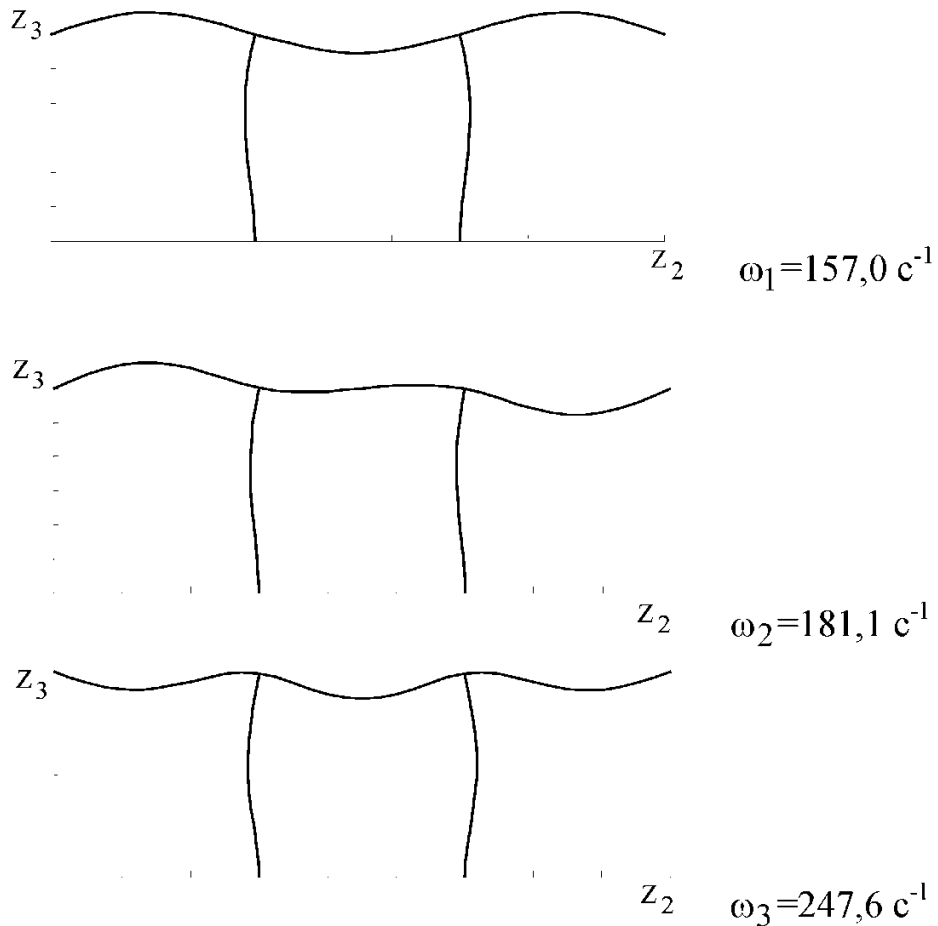


Рис. 3.41 (см также с. 134)

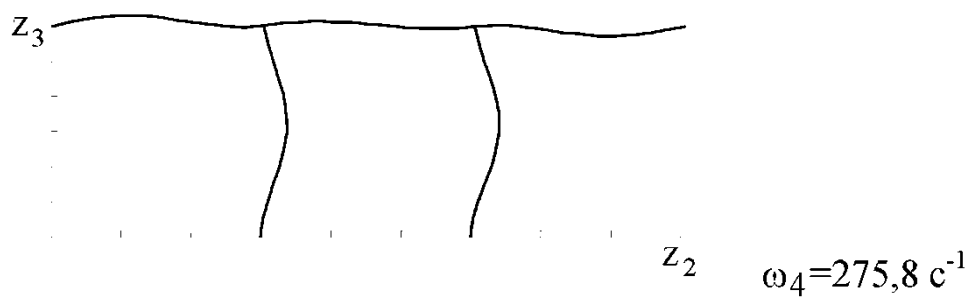


Рис. 3.41. Продолжение

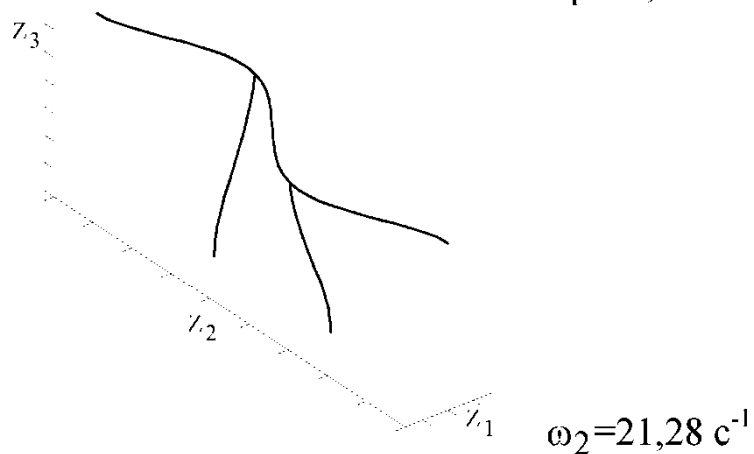
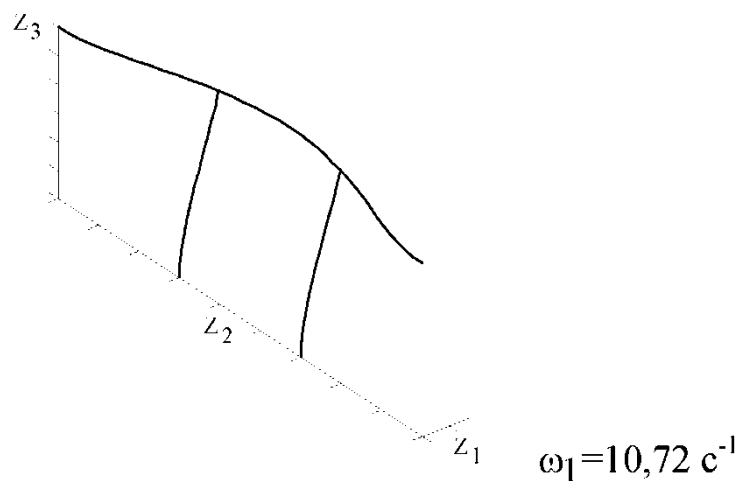


Рис. 3.42

Вполне очевидно, что более реалистичными являются пространственные формы свободных колебаний (см. рис. 3.42).

Пример 3. Требуется вычислить первые три собственные пары для плоской рамы с шарниром (рис. 3.43). Принимаем, что элементы рамы выполнены из двутавра № 14. Стенка двутавра совпадает с плоскостью рамы таким образом, чтобы стойки и ригель имели наибольшую конструкционную жесткость.

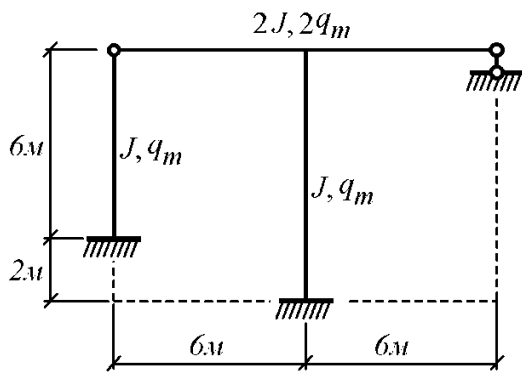


Рис. 3.43

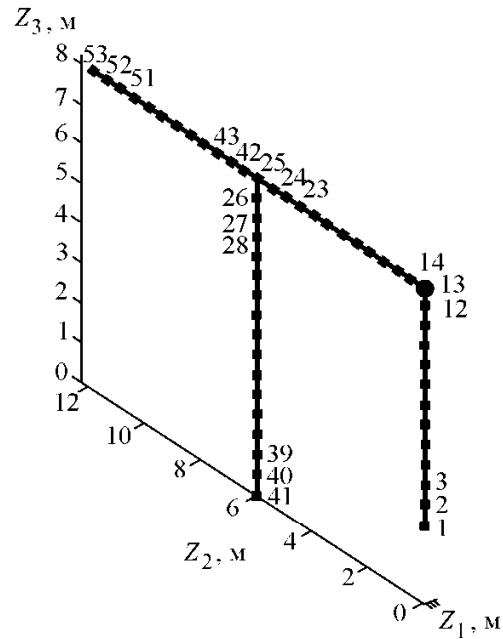


Рис. 3.44

Конечно-элементная модель рамы с шагом разбивки 0,5 м показана на рис. 3.44 (значки ■ соответствуют узлам модели). Жирной точкой указано место расположения шарнира, обеспечивающего свободный поворот относительно оси Z_1 (направлена на наблюдателя).

Данные численных расчетов приведены на рис. 3.45. Представленные результаты модального анализа показывают, что в шарнирном соединении левой стойки с ригелем возникает дополнительная угловая степень свободы. При этом первоначально прямой угол в данном соединении изменяется. Для сравнения угол между правой стойкой, жестко соединенной с ригелем, для всех форм свободных колебаний остается прямым.

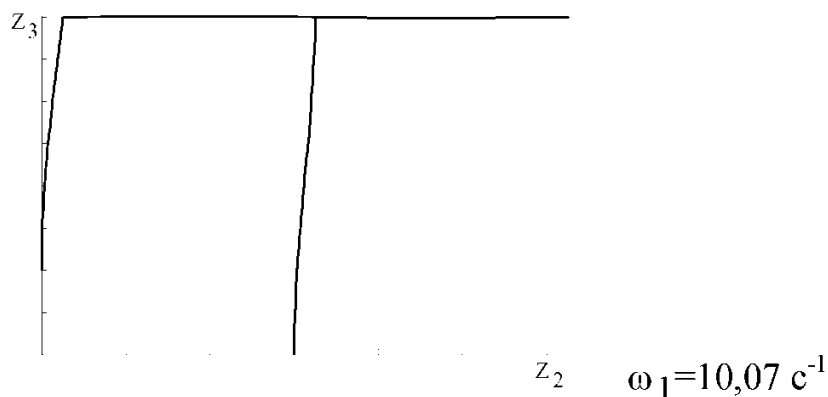


Рис. 3.45 (см. также с. 136)

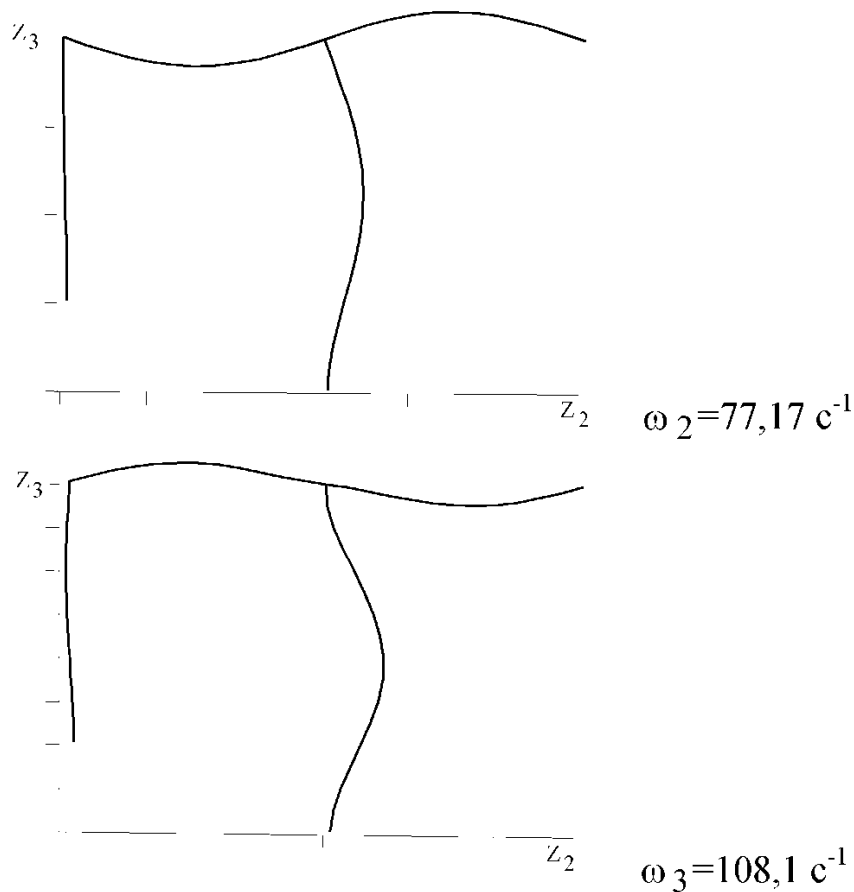


Рис. 3.45. Продолжение

Пример 4. Требуется определить две первые собственные пары для плоской статически определимой рамы с сосредоточенной массой $m=1,019 \cdot 10^3$ кг (рис. 3.46). Массу стоек и ригеля в расчете не учитываем, также пренебрегаем моментом инерции массы m . Конечно-элементная схема рамы показана на рис. 3.47 (значки ■ соответствуют узлам модели). Ранее в разделе 3.6.5 эта задача была решена методами перемещений и сил.

Таблица 3.2

№ тона i	Значение угловой частоты ω_i, c^{-1}	
	Метод перемещений	Метод сил
1	52,50	24,68
2	103,4	159,4

Сравнивая результаты конечно-элементного решения (рис. 3.48) с данными, полученными методами перемещений и сил (табл. 3.2),

приходим к выводу, что по частоте первого тона численное значение ω_1 практически совпадает с решением по методу сил, а по частоте второго тона численное значение ω_2 близко к решению по методу перемещений. Определяющим фактором, влияющим на формы колебаний, является наличие подвижной опоры у левой стойки рамы.

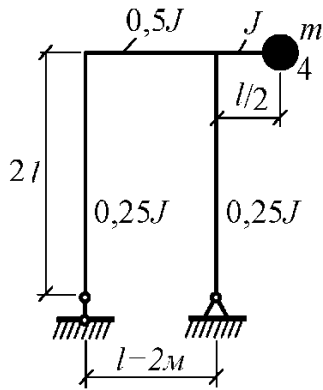


Рис. 3.46

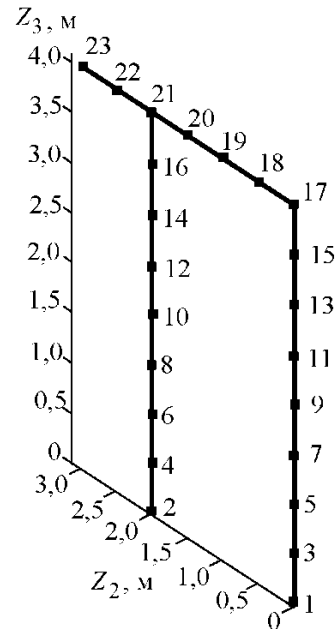


Рис. 3.47

Интересно отметить, что в рассматриваемом примере итерационный алгоритм позволяет вычислить только первые две собственные пары. Это объясняется структурой матрицы масс, состоящей из двух ненулевых диагональных элементов.

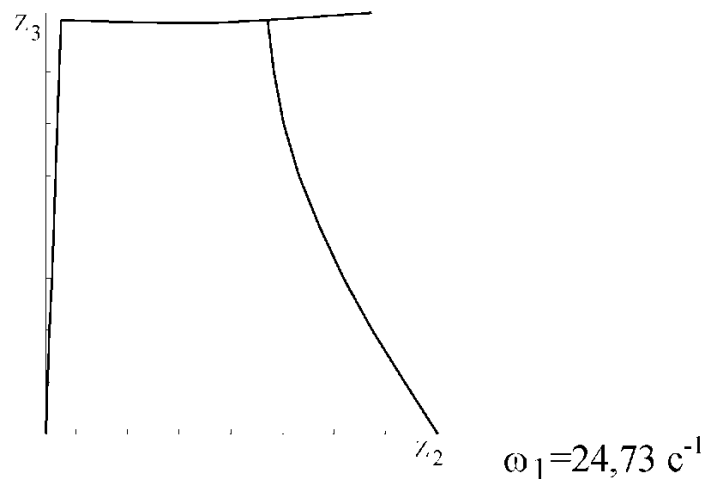


Рис. 3.48 (см. также с. 138)

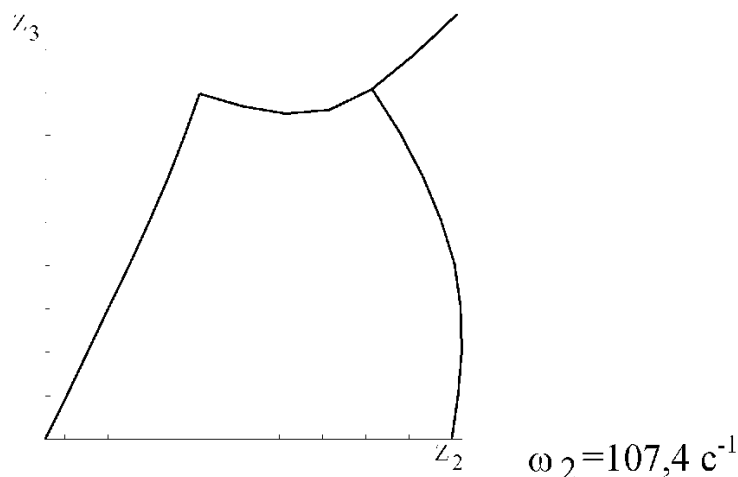


Рис. 3.48. Продолжение

Пример 5. Требуется определить первые четыре собственные пары для плоской рамы с распределенной q_m и сосредоточенной m массами (рис. 3.49). Материал рамы стальной двутавр № 14 (ригели двойной профиль). Длина пролета равна высоте рамы и составляет $l=6$ м. Конечно-элементную разбивку выполняем с шагом 0,5 м.

Результаты конечно-элементного расчета показаны на рис. 3.50. Для сравнения приведем первые две частоты, полученные в работе [1] методом перемещений:

$$\omega_1 = \frac{4}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{q_m}} = 32,1 \text{ c}^{-1}; \quad \omega_2 = \frac{11,5}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{q_m}} = 92,3 \text{ c}^{-1}.$$

Данные значения хорошо согласуются с первой и третьей частотами, вычисленными численно с помощью МКЭ.

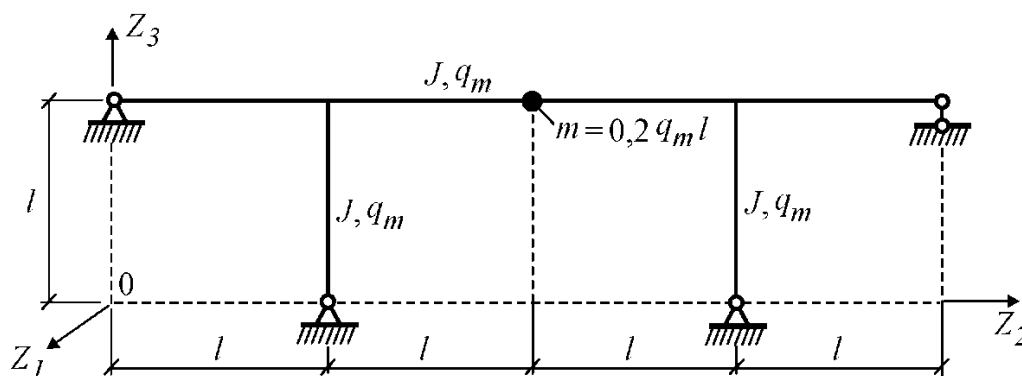


Рис. 3.49

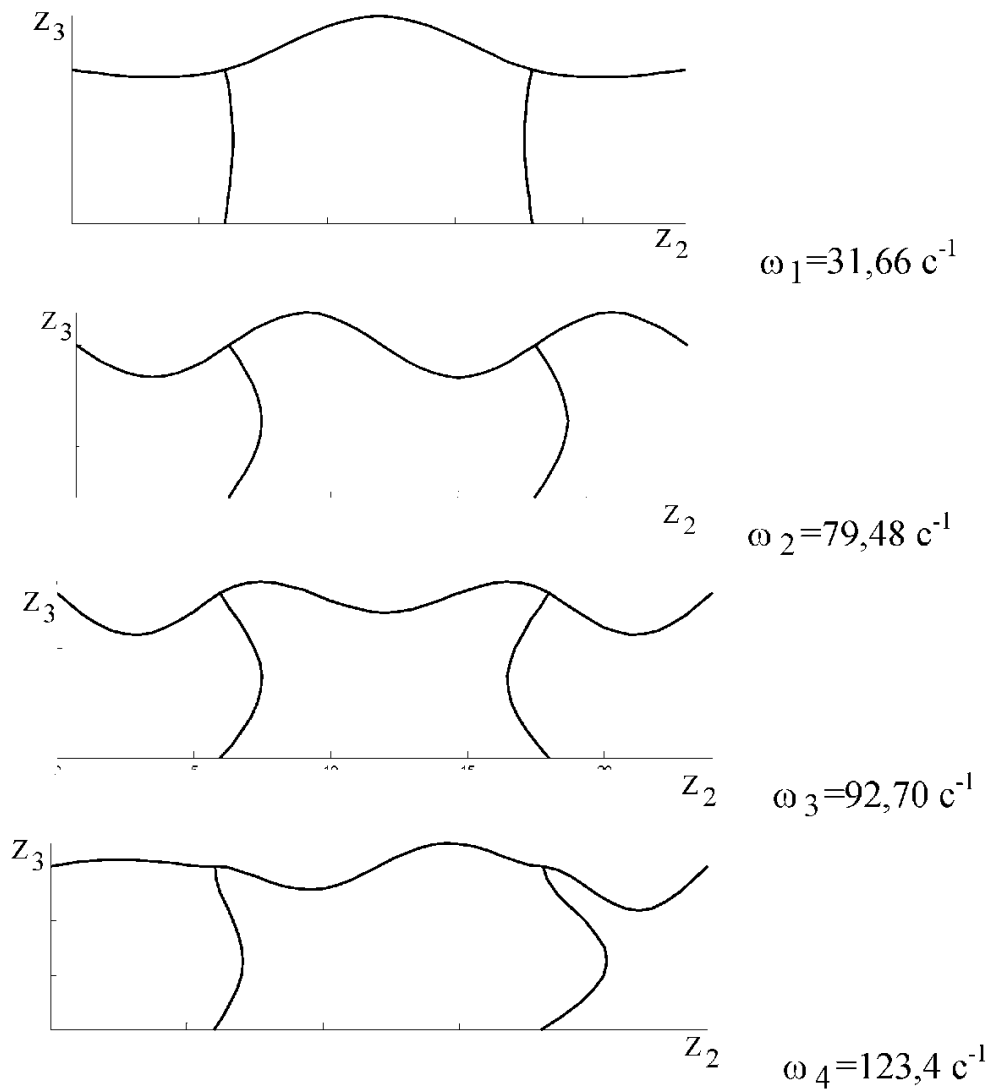


Рис. 3.50

Отметим, что в работе [1] исследовались только симметричные колебания. Конечно-элементное решение, учитывающее и кососимметричные колебания, дает более полный спектр частот, в котором первая и третья формы соответствуют симметричным колебаниям.

3.11. Конечно-элементный анализ вынужденных колебаний

Запишем систему дифференциальных уравнений, описывающих вынужденные колебания конструкции, в матричной форме с начальными условиями

$$[M]\{W''\} + [C]\{W'\} + [K]\{W\} = \{P(t)\}, \quad (3.30)$$

$$\{W(0)\} = \{W\}_0, \{W'(0)\} = \{W'\}_0. \quad (3.31)$$

Здесь обозначено: $[M]$, $[C]$, $[K]$ – соответственно матрицы масс, демпфирования и жесткости ансамбля КЭ; $\{W\}$, $\{W'\}$, $\{W''\}$ – векторы-столбцы узловых перемещений, скоростей и ускорений; $\{P(t)\}$ – вектор-столбец узловых сил; $\{W\}_0$, $\{W'\}_0$ – заданные векторы-столбцы узловых перемещений и скоростей, характеризующие начальное состояние конструкции в момент времени $t=0$.

В случае установки демпфера (гасителя колебаний) уравнение (3.30) можно представить в виде

$$[M]\{W''\} + [C]\{W'\} + ([K] + [D])\{W\} = \{P(t)\},$$

где $[D] = \text{diag}[d_{11} d_{22} \dots d_{kk} \dots d_{nn}]$ – диагональная матрица внешнего демпфирования, суть которого состоит в исключении эффекта суперпозиции волн упругих колебаний в заданных узлах конечно-элементной сетки. Элементы матрицы $[D]$ вычисляем по формуле

$$d_{kk} = \chi \rho c^2 l, \quad (3.32)$$

где k – номер степени свободы, соответствующей перемещению j -го узла, соединенного с демпфером, в направлении глобальной оси Z_i ($k = 3j + i - 1$); χ – коэффициент внешнего демпфирования ($\chi \leq 1$); c – скорость распространения поперечной волны в материале конструкции; l – конструктивная длина стержня, соединенного с демпфером. Произведение ρc^2 , входящее в выражение (3.32), имеет размерность такую же, как модуль упругости материала.

Система (3.30), (3.31) может быть решена с помощью специально разработанных для МКЭ процедур прямого интегрирования по временной координате, например методами [5]: центральных разностей; Хаболта; Вилсона; Ньюмарка и другими. Все эти методы основаны на разбиении временного интервала, в течение которого рассматривается движение, на n равных отрезков (шагов) Δt . Величина шага Δt назначается так, чтобы с достаточной точностью учитывались вклады только низших собственных частот, которые играют наиболее существенную роль в динамическом поведении конструкции. Как будет показано ниже, выбор значения Δt зависит от закона изменения внешнего воздействия $\{P(t)\}$.

Рассмотрим алгоритм метода Ньюмарка, который используется в большинстве современных вычислительных комплексов. Метод основан на предположении о линейном законе изменения ускорения $w''(t)$ на интервале $[t_i, t_i + \Delta t]$ (рис. 3.51). Функции перемещения $w(t)$ и скорости $w'(t)$ произвольной узловой точки, совершающей колебания, представляются в виде отрезков степенных рядов

$$w(t_i + \Delta t) = w_i + \Delta t w'_i + \frac{\Delta t^2}{2} w''_i + a_1 \Delta t^3 w'''_i, \quad (3.33)$$

$$w'(t_i + \Delta t) = w'_i + \Delta t w''_i + a_2 \Delta t^2 w'''_i,$$

где a_1, a_2 – числовые параметры, определяющие остаточные члены степенных разложений функций $w(t)$ и $w'(t)$ на интервале $[t_i, t_i + \Delta t]$.

Заменяя w''' приближенным разностным отношением $(w''_{i+1} - w''_i) / \Delta t$, преобразуем выражения (3.33) к виду

$$w_{i+1} = w_i + \Delta t w'_i + \frac{\Delta t^2}{2} w''_i + a_1 \Delta t^2 (w''_{i+1} - w''_i), \quad (3.34)$$

$$w'_{i+1} = w'_i + \Delta t w''_i + a_2 \Delta t (w''_{i+1} - w''_i).$$

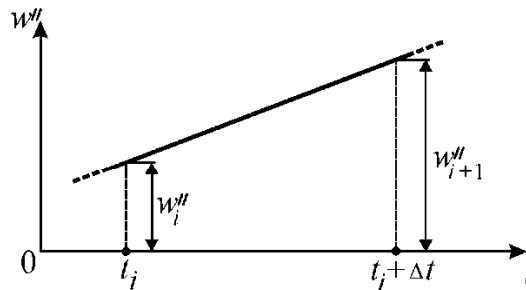


Рис. 3.51

Найдем из первого равенства (3.33) величину w''_{i+1} :

$$w''_{i+1} = \frac{1}{a_1 \Delta t^2} (w_{i+1} - w_i) - \frac{1}{a_1 \Delta t} w'_i + \left(1 - \frac{1}{2a_1}\right) w''_i. \quad (3.35)$$

После подстановки (3.35) во второе равенство (3.34), получим

$$w'_{i+1} = \frac{a_2}{a_1 \Delta t} (w_{i+1} - w_i) + \left(1 - \frac{a_2}{a_1}\right) w'_i + \frac{\Delta t}{2} \left(2 - \frac{a_2}{a_1}\right) w''_i. \quad (3.36)$$

Выражения (3.35) и (3.36) являются рекуррентными соотношениями метода Ньюмарка. Для вычисления векторов-столбцов перемещений $\{W\}_{i+1}$, скоростей $\{W'\}_{i+1}$ и ускорений $\{W''\}_{i+1}$ в момент $t_i + \Delta t = t_{i+1}$ (см. рис. 3.35) уравнение движения записываем в виде

$$[M]\{W''\}_{i+1} + [C]\{W'\}_{i+1} + [K]\{W\}_{i+1} = \{P(t)\}_{i+1}.$$

После подстановки в него выражений (3.35) и (3.36) и преобразования к компактной форме, получим матричное уравнение вида

$$[A]\{W\}_{i+1} = \{F\}_{i+1}, \quad (3.37)$$

где $[A] = [K] + \frac{a_2}{a_1 \Delta t} [C] + \frac{1}{a_1 \Delta t^2} [M]$;

$$\begin{aligned} \{F\}_{i+1} = & \{P(t)\}_{i+1} + [M] \left[\frac{1}{a_1 \Delta t^2} \{W\}_i + \frac{1}{a_1 \Delta t} \{W'\}_i + \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{2a_1} - 1 \right) \{W''\}_i \right] + [C] \left[\frac{a_2}{a_1 \Delta t} \{W\}_i + \left(\frac{a_2}{a_1} - 1 \right) \{W'\}_i + \right. \\ & \left. + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{a_2}{a_1} - 2 \right) \{W''\}_i \right]. \end{aligned}$$

В начале алгоритма Ньюмарка, исходя из заданного шага интегрирования Δt , формируется матрица $[A]$, после чего она приводится к треугольному виду и до завершения вычислительного процесса не изменяется. Правая часть уравнения (3.37) пересчитывается на каждом шаге интегрирования.

Векторы-столбцы узловых ускорений и скоростей вычисляем по формулам:

$$\begin{aligned} \{W''\}_{i+1} = & \frac{1}{a_1 \Delta t^2} (\{W\}_{i+1} - \{W\}_i) - \frac{1}{a_1 \Delta t} \{W'\}_i - \left(\frac{1}{2a_1} - 1 \right) \{W''\}_i; \\ \{W'\}_{i+1} = & \{W'\}_i + [(1 - a_2) \{W''\}_i + a_2 \{W''\}_{i+1}] \Delta t. \end{aligned}$$

Для обеспечения устойчивости алгоритма прямого интегрирования параметры a_1 и a_2 должны удовлетворять следующим условиям: $a_2 \geq 0,5$ и $a_1 \geq 0,25(a_2 + 0,5)^2$. В работе [5] приведены рекомендации по назначению величин a_1 и a_2 . Так, если требуется приближенно

учесть внутреннее демпфирование, то следует принять $a_1 = 0,28$ и $a_2 = 0,55$. Без учета искусственного рассеивания энергии максимальная точность метода Ньюмарка достигается при $a_1 = 0,25$ и $a_2 = 0,5$.

Шаг интегрирования Δt вычисляем по формуле

$$\Delta t = 2\pi / k\omega_1,$$

где k – целое положительное число ($k=10, 20, 30, \dots$); ω_p – угловая частота p -го тона колебаний. Учитывая, что наибольший практический интерес представляют первые (низшие) моды, обычно ограничиваются $p \leq 3$. Точность численной процедуры прямого интегрирования обеспечивается соответствующим назначением величины шага Δt . При уменьшении шага интегрирования точность повышается, однако увеличивается время, затрачиваемое на вычисления. В качестве критерия сходимости обычно принимается стабилизация получаемых максимальных значений амплитуд в исследуемых точках модели при двукратном уменьшении шага интегрирования.

Заметим, что для запуска алгоритма метода Ньюмарка требуется задать в момент времени $t=0$ векторы-столбцы $\{W\}_0, \{W'\}_0, \{W''\}_0$ (начальные условия). Для упрощения в расчетах принимают:

$$\{W\}_0 = 0; \quad \{W'\}_0 = 0; \quad \{W''\}_0 = 0.$$

Схема прямого интегрирования, основанная на методе Ньюмарка, является “безусловно устойчивой” и “неявной”. Термин “безусловно устойчивая” схема означает, что независимо от величины шага Δt метод Ньюмарка сходится. Термин “неявная” схема указывает на то, что компоненты вектора-столбца перемещений являются функциями предыдущих (известных) и текущих (неизвестных) векторов перемещений, скоростей и ускорений.

3.12. Примеры расчетов на вынужденные колебания

Пример 1. Требуется определить амплитудные значения прогиба w в центре двухшарнирной балки (рис. 3.52) при различных законах изменения внешнего динамического воздействия $P(t)$ (рис. 3.53). Считаем, что балка выполнена из стального прокатного двутавра № 30. Общую массу балки приводим к центру пролета.

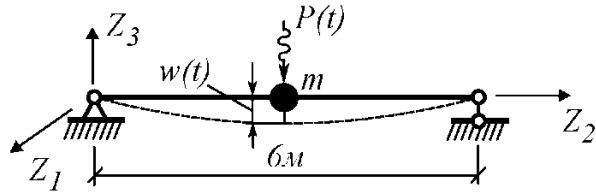


Рис. 3.52

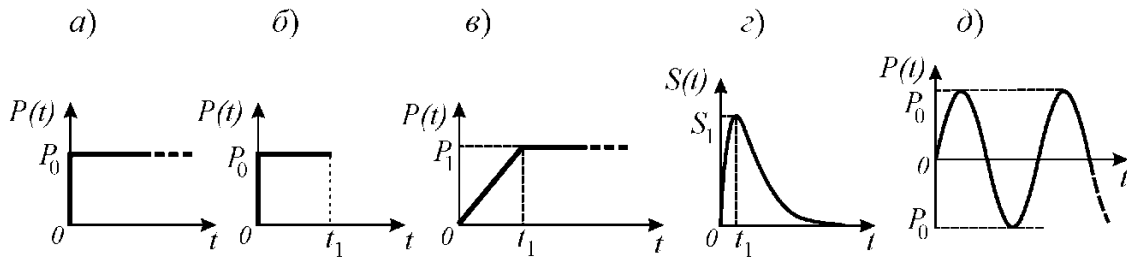


Рис. 3.53

Балку разбиваем с равномерным шагом на 24 конечных элемента. Предварительно выполнив модальный анализ, устанавливаем, что угловая частота первого тона составляет $\omega_1 = 116,2 \text{ с}^{-1}$.

На рис. 3.54 приведены графики $w(t)$, полученные для варианта внезапного приложения нагрузки P_0 (рис. 3.53, а) при значениях шага Δt , равных $T/10$ (рис. 3.54, а) и $T/20$ (рис. 3.54, б).

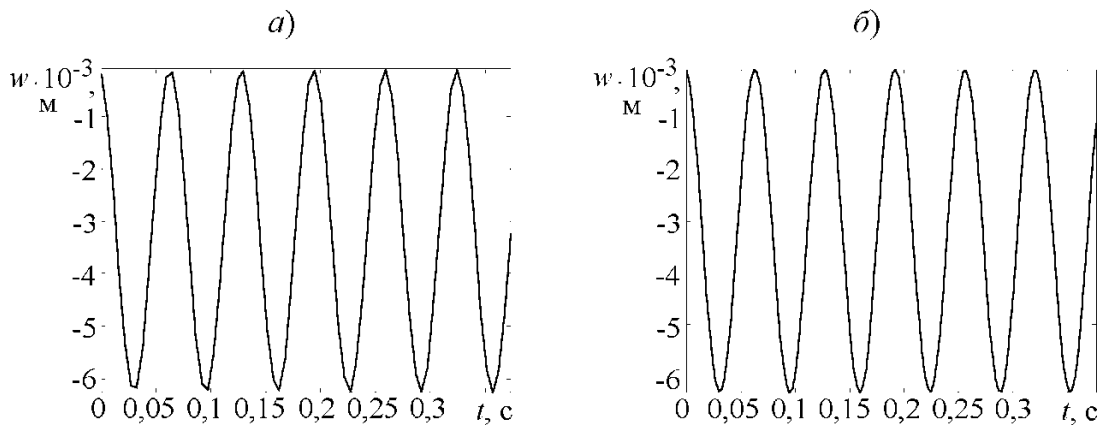


Рис. 3.54

Значение периода первого тона численно равно $T = 2\pi/\omega_1 = 0,05407 \text{ с}$. Установлено, что с двукратным уменьшением величины Δt значение максимального прогиба не изменяется. При этом улучшается только вид графика на пиках. Для данного вида нагружения коэффициент динамичности принимает значение $\mu = 2$.

На рис. 3.55, а представлен график $w(t)$ для варианта нагру-

жения балки, внезапно приложенной нагрузкой P_0 , действующей в течение времени t_1 (рис. 3.53, б).

На рис. 3.55, б показано, как меняется прогиб балки $w(t)$ при линейном нарастании нагрузки от 0 при $t=0$ до P_1 при $t=t_1$ (рис. 3.53, в).

Практическое значение имеет импульсный закон нагружения (рис. 3.53, з), описываемый выражением вида

$$P(t) = P_0 S(t),$$

где функция формы импульса $S(t) = Ate^{-Bt}$, $B = \frac{1}{t_1}$, $A = \frac{S_1 e}{t_1}$. Гра-

фик $w(t)$, полученный при импульсном воздействии на балку, показан на рис. 3.55, в.

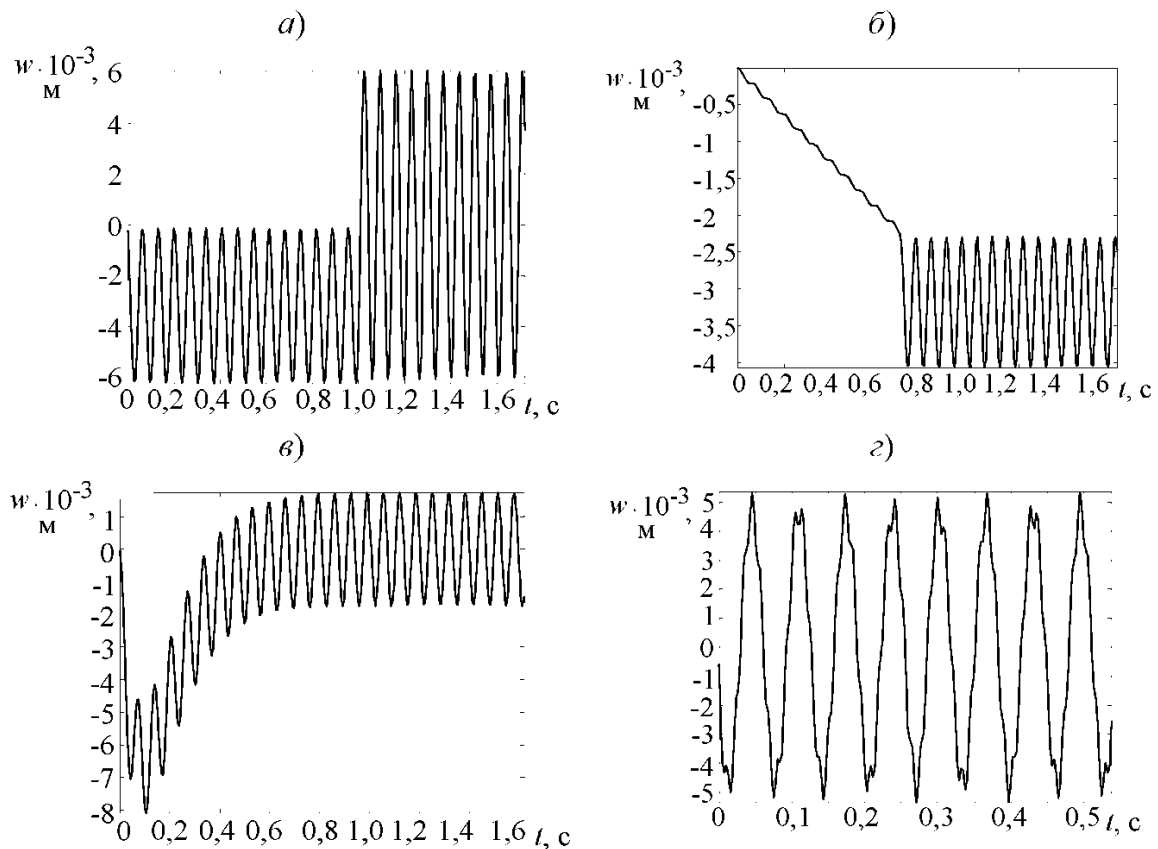


Рис. 3.55

Решение задачи при гармоническом возбуждении колебаний по закону (рис. 3.53, д) имеет вид

$$P(t) = P_0 \sin \Theta t,$$

где Θ – угловая частота внешнего воздействия, представлено на рис. 3.55, *з*. Вычисления выполнялись при $\Theta = 546 \text{ с}^{-1}$. Шаг интегрирования Δt принимался равным $T/20$. В данном случае на пиках графика прослеживается эффект биения, обусловленный наложением свободных и вынужденных колебаний.

Выполним анализ вынужденных колебаний для двухшарнирной балки с распределенной массой q_m (рис. 3.56) при гармоническом возбуждении колебаний ($\Theta = 546 \text{ с}^{-1}$). Значение Δt принимаем равным $T/20$. Частота первого тона свободных колебаний $\omega_1 = 170,9 \text{ с}^{-1}$.

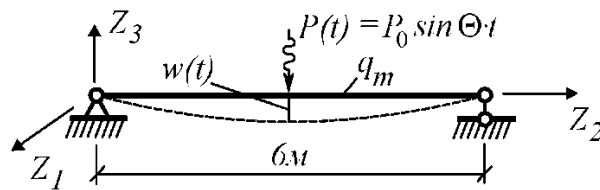


Рис. 3.56

На рис. 3.57, *а* и 3.57, *б* приведены графики $w(t)$, полученные по стандартной схеме Ньюмарка ($a_1 = 0,25$ и $a_2 = 0,5$) и с учетом искусственного демпфирования ($a_1 = 0,28$ и $a_2 = 0,55$). Как видно из рис. 3.57, *б*, время переходного процесса составляет около 1,5 с. При этом следует отметить, что значения прогибов на этапе $t < 1,5$ с почти в три раза превышают прогибы установившихся (стационарных) колебаний. Безусловно, это существенное обстоятельство необходимо учитывать в практических расчетах.

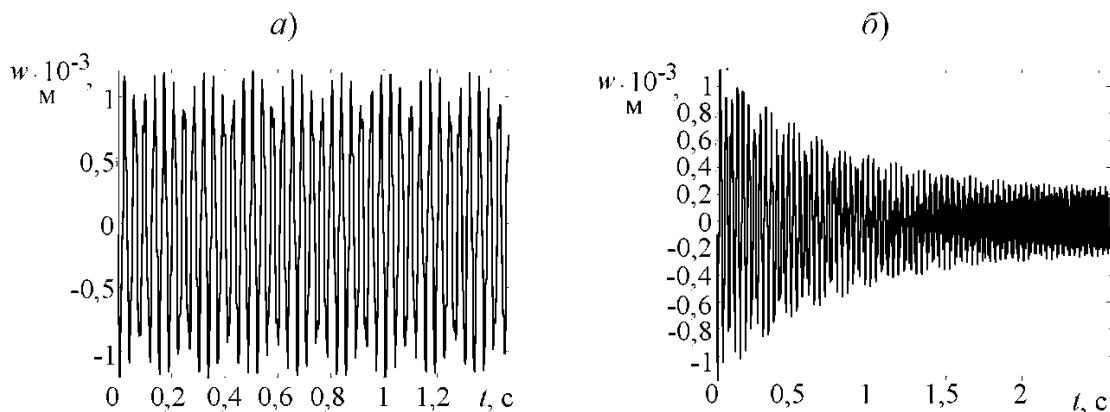


Рис. 3.57 (см. также с. 147)

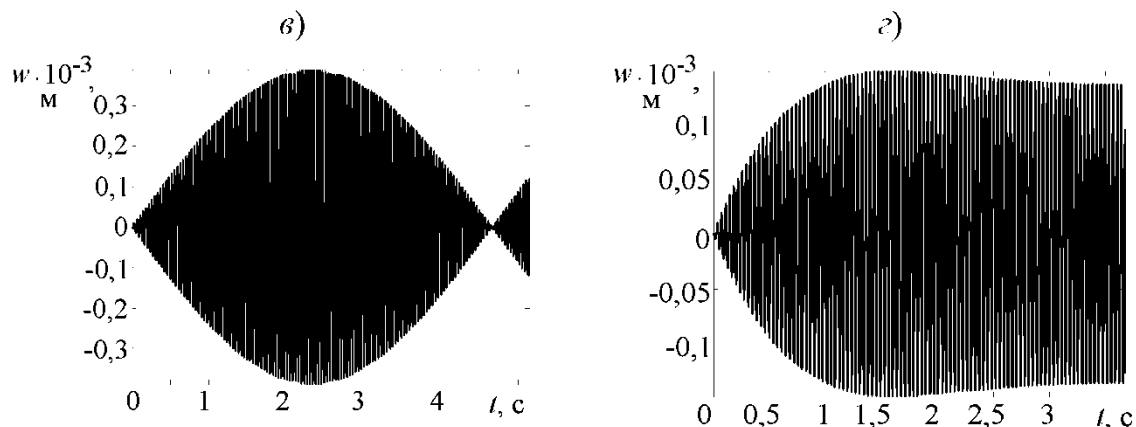


Рис. 3.57. Продолжение

На рис. 3.57, в и 3.57, г приведены графики резонансных ($\Theta = \omega_1$) колебаний балки $w(t)$, полученные соответственно без учета и с учетом демпфирования. В первом случае амплитудное значение перемещения в центре балки при $t = 2,8$ с достигает 0,4 м. Для сравнения при $\Theta = 546 \text{ с}^{-1}$ амплитуда перемещения в центре балки составляет $2,9 \cdot 10^3$ м.

Введение искусственного демпфирования позволяет получить физически правдоподобную картину резонансных колебаний, характеризующую начальным ростом перемещений до некоторой величины и последующей стабилизацией процесса.

Пример 2. Для плоской рамы (рис. 3.58) требуется построить графики колебаний вдоль осей Z_2 и Z_3 в точках A, B, C , приняв $\Theta = 0,8\omega_1$, $P_0 = 4$ кН, $q_0 = 2$ кН/м. Рама выполнена из двутавра № 14 (ригель двойной профиль). Стенка двутавра на стойках и ригеле ориентирована таким образом, чтобы жесткость конструкции в плоскости $Z_2, 0, Z_3$ была максимальной. Раму считаем невесомой. Значения сосредоточенных в точках A и B масс равны $m = 300$ кг. Рама разбивалась на 36 конечных элементов с равномерным шагом 0,5 м.

Результаты модального анализа для первого и второго тонов приведены в табл. 3.3 и на рис. 3.59. Собственные частоты, полученные с помощью МКЭ, сравнивались с данными работы [7]. Приведенная на рис. 3.59 форма колебаний второго тона в шарнире имеет излом, что отличает ее от собственной формы, априори принятой в работе [7] в виде лекальной кривой.

На основании частоты первого тона назначаем шаг интегриро-

вания $\Delta t = T/20$, где соответствующий период свободных колебаний $T = 2\pi/\omega_1$. Затухание свободных колебаний не учитываем.

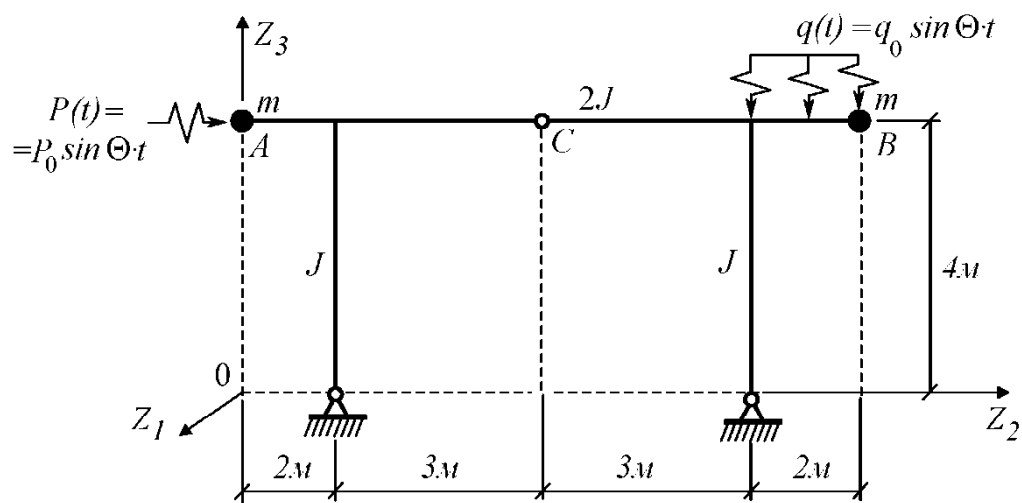


Рис. 3.58

Таблица 3.3

№ тона i	Значение угловой частоты $\omega_i, \text{с}^{-1}$	
	МКЭ	Метод сил [7]
1	11,0	11,29
2	20,17	23,92

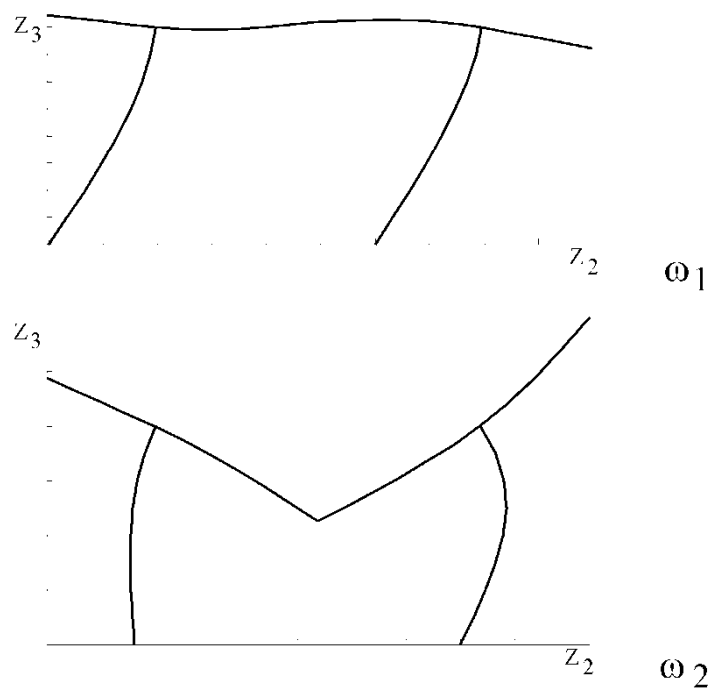
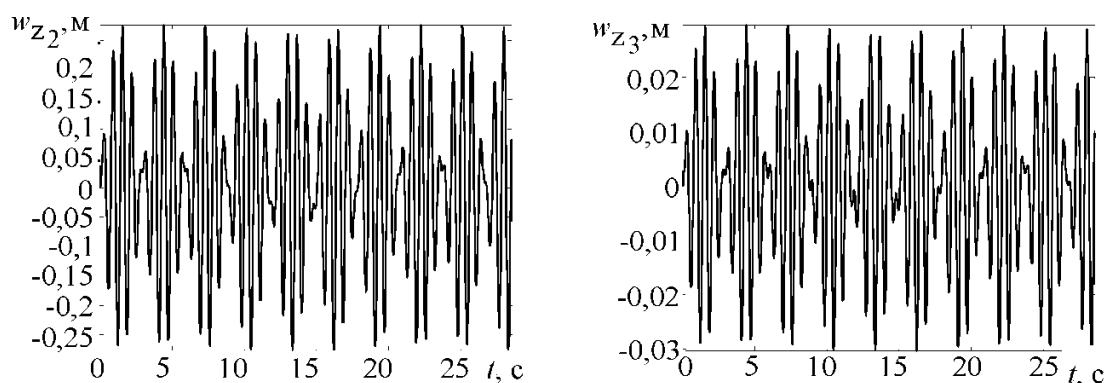


Рис. 3.59

Графики колебаний в точках A, B, C в направлении осей Z_2 и Z_3 представлены соответственно на рис. 3.60, $a, б, в$. Сравнивая кривые горизонтальных динамических перемещений $w_{Z_2}(t)$ в исследуемых точках, устанавливаем, что они полностью совпадают. Максимальная амплитуда колебаний в вертикальном направлении $w_{Z_3}(t)$ имеет место в точке B (рис. 3.60, $б$). В шарнире C динамические перемещения $w_{Z_3}(t)$ минимальны (рис. 3.60, $в$).

Картины статических перемещений w_{Z_2} и w_{Z_3} для рассматриваемой рамы представлены соответственно на рис. 3.61, a и 3.61, $б$.

$a)$



$б)$

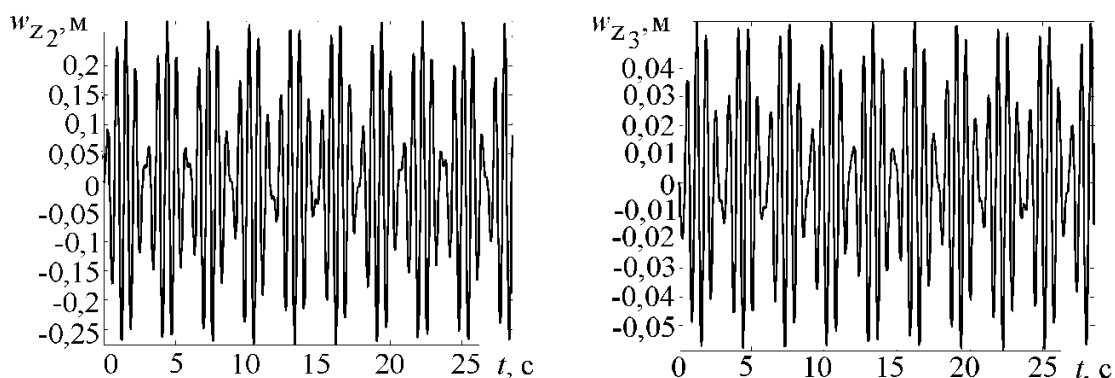


Рис. 3.60 (см. также с. 150)

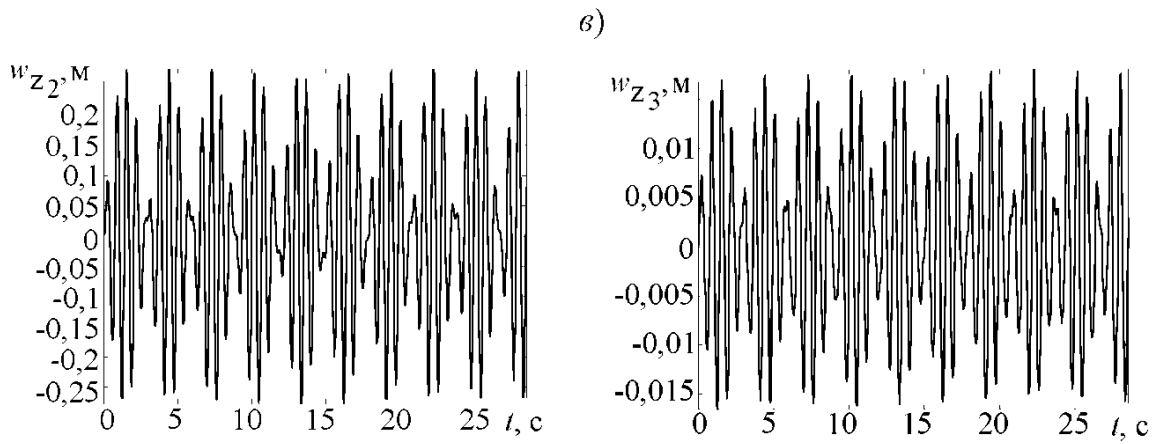


Рис. 3.60. Продолжение

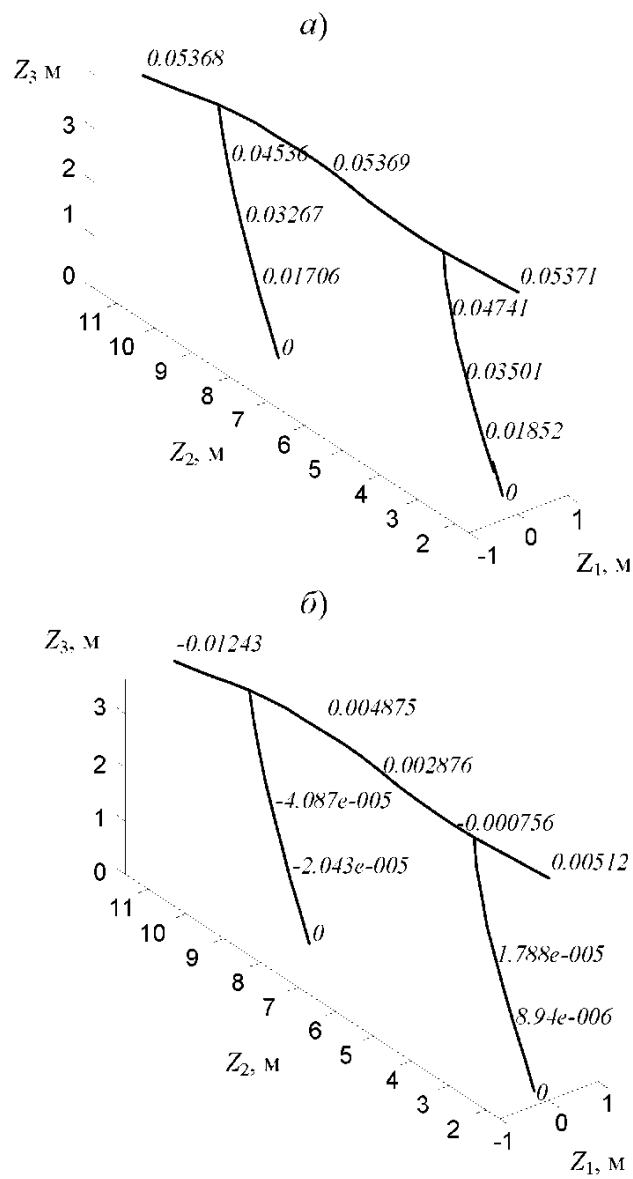


Рис. 3.61

Коэффициент динамичности μ определим как отношение доминирующего горизонтального динамического перемещения ($w_{Z_2 \text{ дин}} = 0,25$ м) к соответствующему горизонтальному статическому перемещению ($w_{Z_2 \text{ см}} = 0,054$ м): $\mu = 0,25/0,054 = 4,6$. Таким образом, динамическое нагружение рамы приводит к увеличению статических изгибающих моментов, поперечных и продольных сил в 4,6 раза.

3.13. Численное моделирование сейсмического возбуждения колебаний

При кинематическом возбуждении колебаний уравнение движения для ансамбля конечных элементов с распределенными и сосредоточенными массами представим в виде

$$[M]\{W''\} + [C]\{W'\} + [K]\{W\} = - \text{diag}[\bar{M}]\{\bar{W}''\}.$$

Здесь обозначено: $\{\bar{W}''\}$ – вектор-столбец ускорений, заданных в опорных узлах модели; $\text{diag}[\bar{M}]$ – диагональная матрица сосредоточенных в основании конструкции масс, эквивалентных общей массе конструкции. Зависимость $W'' \sim t$, описывающую закон кинематического возбуждения колебаний, называют акселерограммой. В качестве модельной (синтезированной) акселерограммы примем циклическую гармоническую функцию с переменным периодом вида [1]:

$$\bar{W}''(t) = Ate^{-Bt} \sin \Theta t, \quad (3.38)$$

где A , B – константы, вычисляемые в зависимости от параметров импульса: $B = 1/t_1$, $A = (S_1 e)/t_1$; Θ – угловая частота кинематического возмущения. На рис. 3.46 приведен график модельной акселерограммы для параметров: $t_1 = 0,1$ с; $S_1 = 4,0$; $\Theta = 60$ с⁻¹. Величина S_1 определяет максимальное значение ускорения. Следует учитывать, что в отличие от вибрационного возмущения колебаний время воздействия сейсмической нагрузки на сооружение не продолжительно (от 2 до 5 с).

Рассмотрим основные физико-механические особенности сейсмического воздействия. На практике мощность землетрясения оценивается по количеству выделившейся энергии, измеряемой в магнитудах по 12 бальной шкале Рихтера. Оценку несущей способности со-

оружения выполняют на основании экспериментальных геофизических данных об ускорениях на поверхности грунта (акселерограмм).

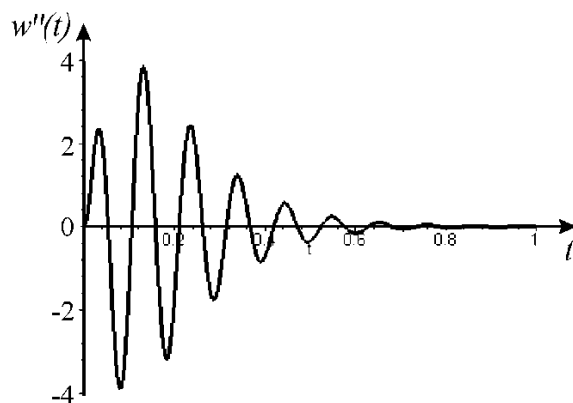


Рис. 3.46

С математической точки зрения каждая акселерограмма является реализацией случайного процесса. Поэтому в строгой постановке расчет на сейсмическое воздействие должен выполняться с использованием стохастической (вероятностной), а не детерминированной механико-математической модели. Однако такой подход в виду его сложности не получил широкого распространения. Существенно уточнить динамический расчет позволяет использование пространственно-временной схемы дискретизации исследуемого объекта и численного решения уравнения движения. При этом считают, что каркасы зданий и сооружений высотой до 25 м испытывают только горизонтальную сейсмическую нагрузку. Для объектов высотой свыше 25 м учитывается также вертикальная составляющая сейсмической волны. Причем сейсмическое воздействие может иметь произвольное направление по отношению к расположению здания. В этой связи расчетчику необходимо оценить наиболее опасные сценарии поведения проектируемого сооружения при виртуальном землетрясении.

В отечественной практике проектирования учитывают только землетрясения интенсивностью 7, 8 и 9 баллов, что примерно соответствует амплитудам ускорений 1, 2 и 4 м/с². При этом считается, что капитальное строительство в зонах с возможным землетрясением в 9 баллов не допустимо. В остальных случаях решение на строительство в сейсмоопасной зоне принимается заказчиком после согласования проекта с региональным представительством министерства по чрезвычайным ситуациям и местной администрацией.

Бальность района строительства устанавливается на основании

карт общего сейсмического районирования территории Российской Федерации, утвержденных Российской академией наук [9]. Параллельно Госстроем России введен список конкретных населенных пунктов с указанием вероятности на их территории землетрясений повышенной бальности.

Рассмотрим особенности конечно-элементного моделирования поведения пространственной стержневой системы при кинематическом способе возбуждения колебаний на конкретном числовом примере.

Пример. Требуется исследовать поведение пятиэтажной пространственной рамы при кинематическом возбуждении колебаний, имитирующих землетрясение в 9 баллов. Расчетная схема рамы приведена на рис. 3.47. Полагаем, что все опорные точки рамы движутся синхронно по одинаковому закону. Стержни рамы сечением $0,4 \times 0,4$ м, выполнены из монолитного железобетона ($E = 29 \cdot 10^3$ МПа, $q_m = 384$ кг/м). Конечно-элементную сборку рассматриваемой схемы осуществляем по фрагментарному способу. Для этого раму предварительно представим в виде конгломерата, состоящего из 25 фрагментов $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{25}$ (рис. 3.48).

Используем два типа повторяющихся фрагментов (рис. 3.49), из которых в определенной последовательности собирается рама. Целесообразность данной процедуры объясняется удобством представления первичной топологической информации для фрагментов, имеющих независимую нумерацию узлов и локальную систему координат.

Сшивку фрагментов выполняем в следующей последовательности: 1 – 2; 2 – 3; 2 – 4; 4 – 5; 1 – 6; 6 – 7; 2 – 8; 7 – 8; 7 – 9; 4 – 10; 9 – 10; 6 – 11; 11 – 12; 12 – 13; 7 – 13; 12 – 14; 9 – 15; 14 – 15; 11 – 16; 16 – 17; 17 – 18; 12 – 18; 17 – 9; 14 – 20; 19 – 20; 16 – 21; 21 – 22; 22 – 23; 17 – 23; 22 – 24; 19 – 25; 24 – 25. Здесь цифры соответствуют номерам фрагментов. В итоге общее число стыков фрагментов составило 32. В процессе сшивки фрагментов по точкам с одинаковыми координатами формируется глобальная нумерация узлов модели.

Каркасная модель пятиэтажной рамы, полученная в результате фрагментарной сборки, приведена на рис. 3.50.

На первом этапе выполним модальный анализ для рамы, нижние стойки которой имеют жесткие связи с основанием. Расчет выполняем для 12 собственных пар. Выборочные результаты модального анализа представлены на рис. 3.51. Видно, что два первых тона очень

похожи и обуславливают колебания рамы в плоскости наименьшей жесткости параллельной координатной плоскости $Z_1 O Z_3$. Далее наблюдаются крутильные (моды три и шесть), вертикальные (моды девять и десять) и комбинированные (мода двенадцать) формы колебаний рамы.

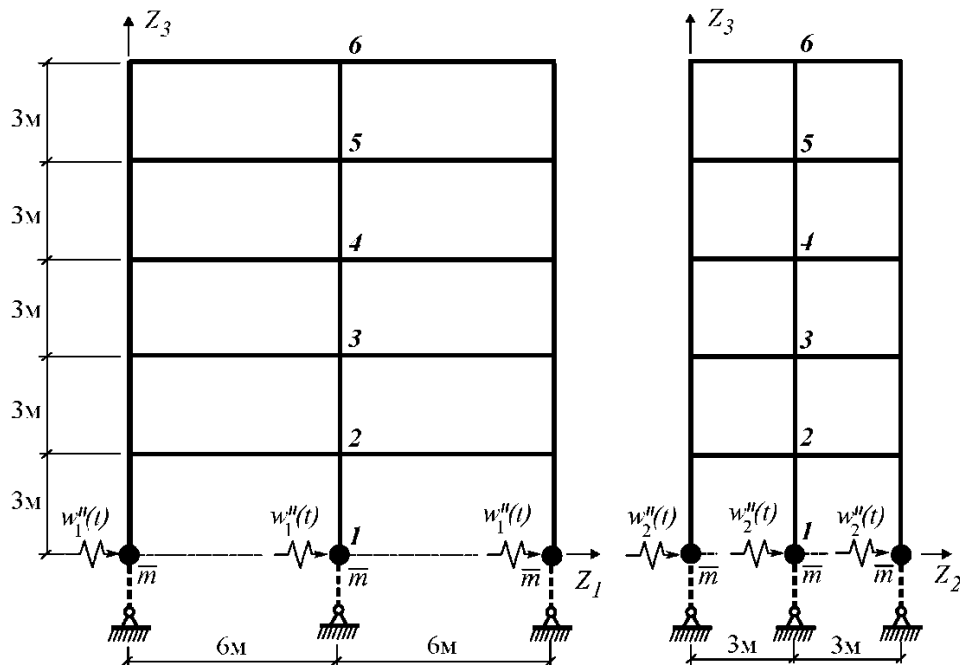


Рис. 3.47

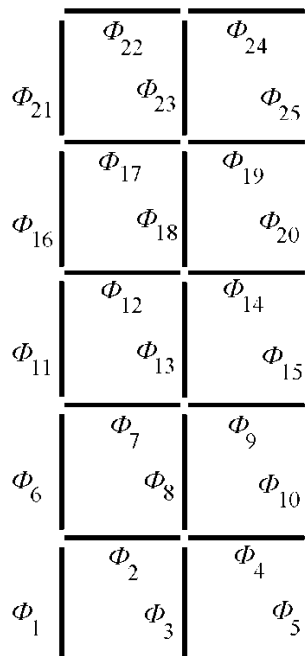


Рис. 3.48

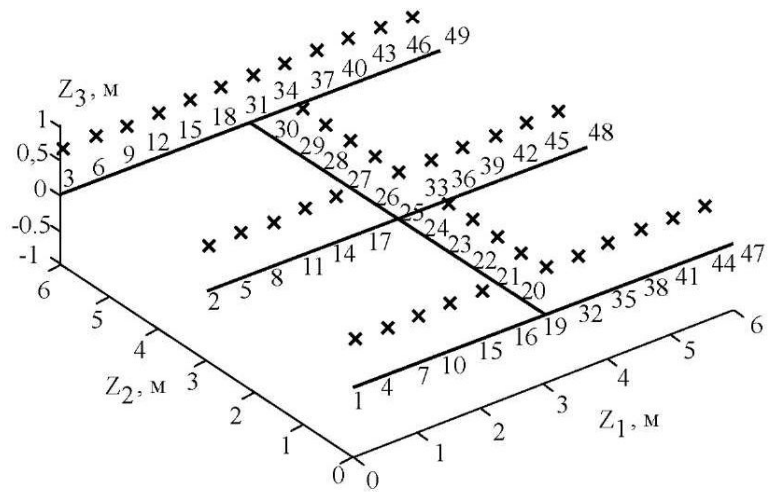
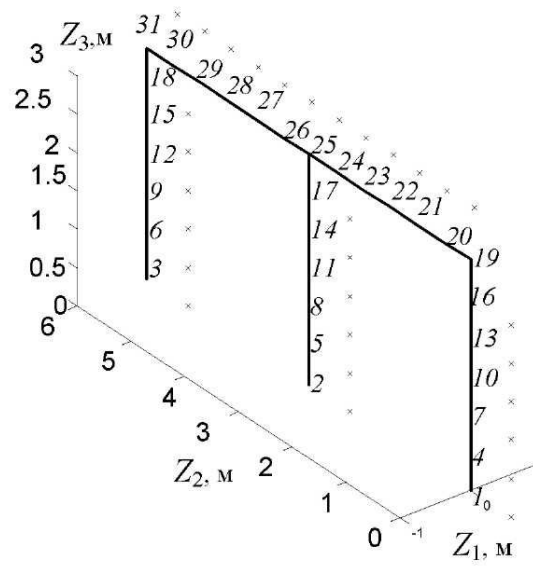


Рис. 3.49

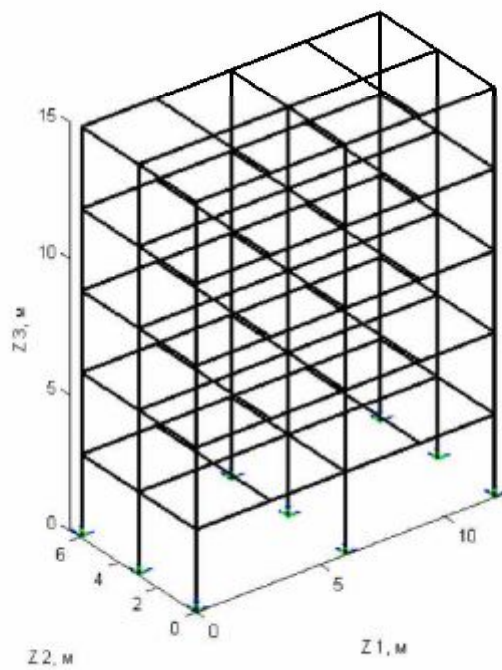
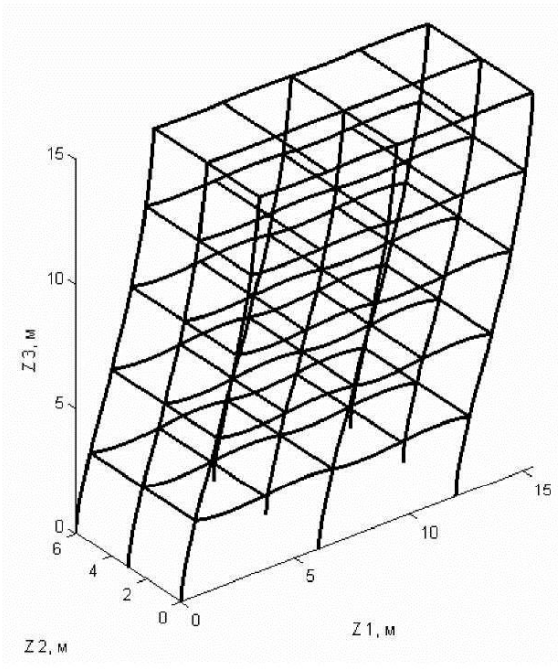
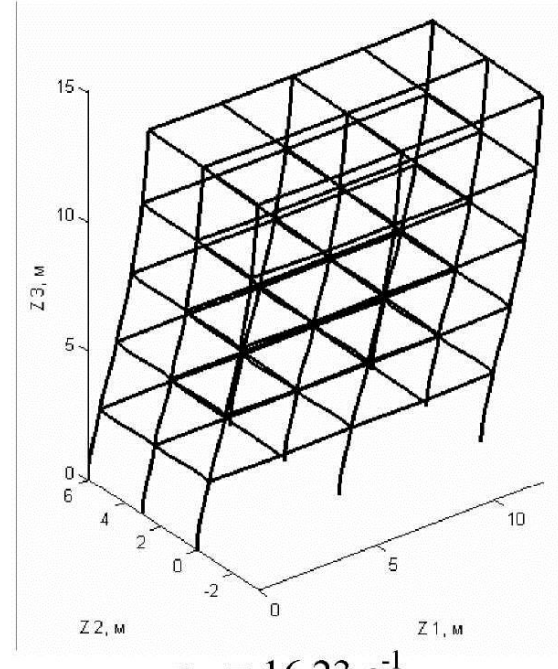


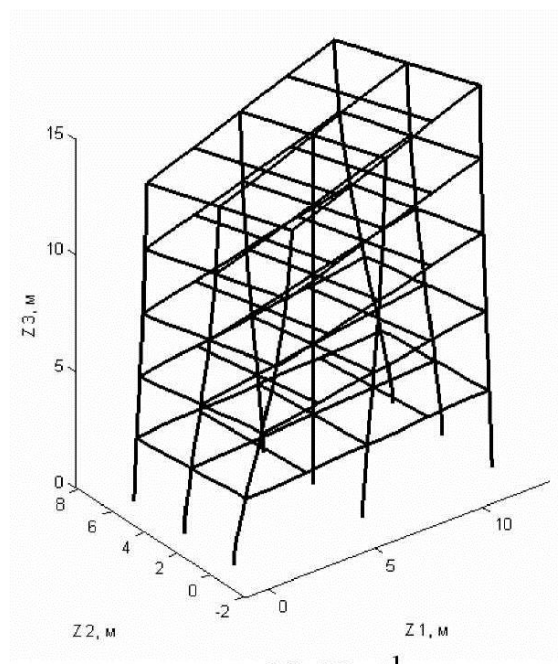
Рис. 3.50



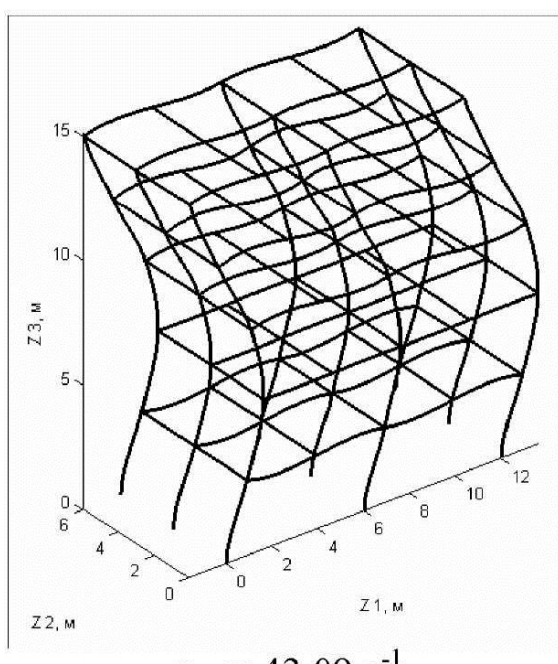
$$\omega_1 = 13,44 \text{ c}^{-1}$$



$$\omega_2 = 16,23 \text{ c}^{-1}$$



$$\omega_3 = 19,18 \text{ c}^{-1}$$



$$\omega_4 = 43,09 \text{ c}^{-1}$$

Рис. 3.51 (см. также с. 157)

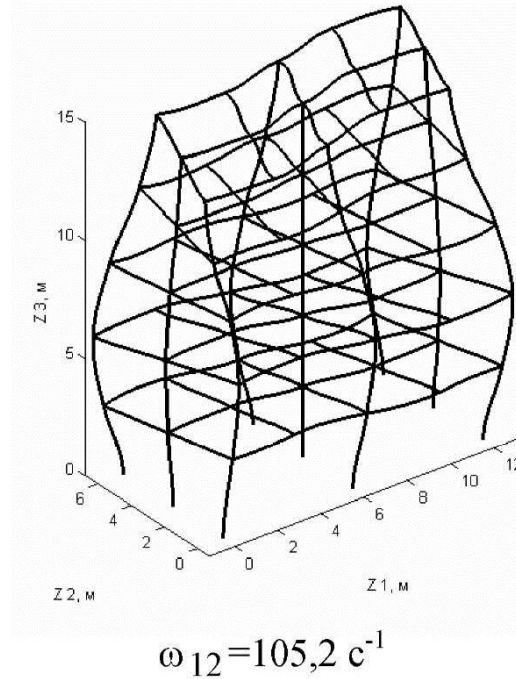
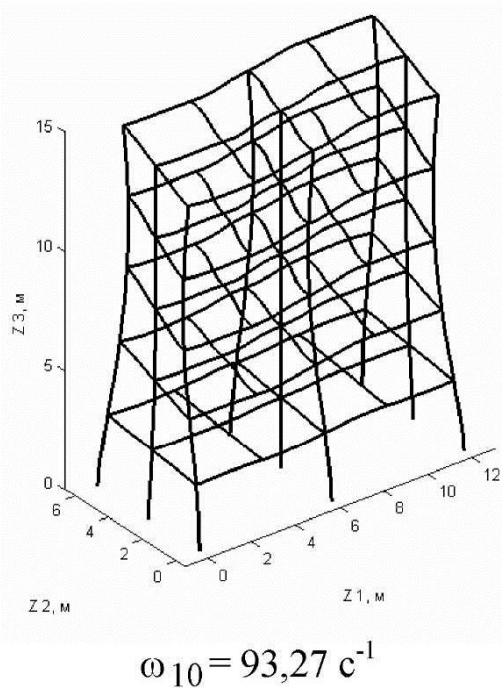
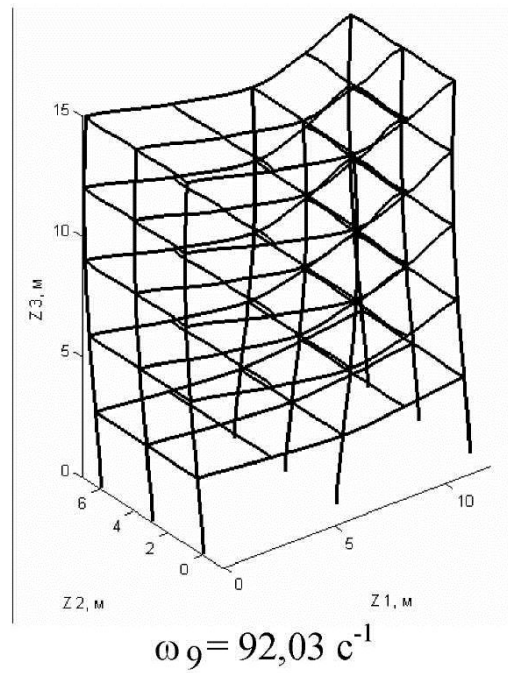
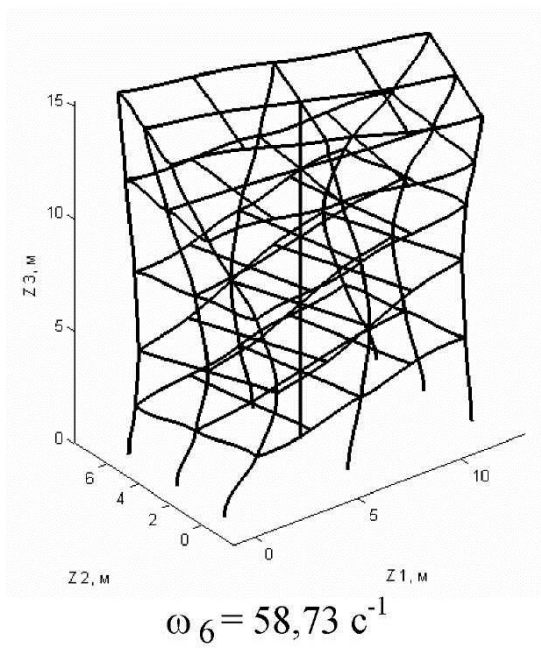


Рис. 3.51. Продолжение

На втором этапе исследуем динамический отклик рассматриваемой пространственной стержневой системы на кинематическое возмущение, моделируемое функцией (3.38) с параметрами: $t_1=0,1 \text{ с}$; $S_1=4,0$; $\Theta=60 \text{ c}^{-1}$. Для учета особенности приложения динамической нагрузки расчетную схему рамы скорректируем следующим образом.

В нижней части рамы вводим невесомые фиктивные стержни длиной 0,5 м с уменьшенным на порядок модулем упругости. Эти стержни, показанные штриховыми линиями, связываем с неподвижным основанием шарнирными связями (см. рис. 3.47). Таким образом, стержневая система фиксируется от смещений как жесткое целое. В точках фактического опирания рамы на основание ($Z_3 = 0$) располагаем сосредоточенные массы $\bar{m} = 124 \cdot 10^3$ кг, в сумме равные массе всей конструкции ($9 \times \bar{m} = 1116 \cdot 10^3$ кг). Динамическую нагрузку прикладываем, задавая ускорения сосредоточенных масс \bar{m} сначала в положительном направлении оси $Z_1 - w_1''(t)$, а затем в направлении оси $Z_2 - w_2''(t)$ (см. рис. 3.47). Раздельное приложение горизонтальной нагрузки позволяет оценить продольную и поперечную динамическую жесткость рамы. Шаг интегрирования по временной координате назначаем исходя из периода колебания девятого тона: $\Delta t = T_9 / 20$, где $T_9 = 0,06827$ с.

Графики относительных динамических перемещений $w(t)$ рамы в точках 2, 3, 4, 5, 6, расположенных на оси рамы (см. рис. 3.47), приведены на рис. 3.52. Здесь слева представлены графики колебаний вдоль оси Z_1 , справа – графики колебаний вдоль оси Z_2 . Перемещения $w(t)$ в точках 2, 3, 4, 5, 6 являются относительными величинами, т. к. для каждого момента времени t вычислялись как разность действительных смещений данных узлов и перемещений первой точки. Таким образом, исключалось совместное смещение рамы и основания.

Из приведенных графиков $w(t)$ видно, что наибольшие амплитудные перемещения (около 0,3 м) наблюдаются при кинематическом воздействии вдоль оси Z_1 в точке 4. Также эта точка получает наибольшее амплитудное смещение (около 0,2 м) при действии внешнего возмущения вдоль оси Z_2 . Следует отметить, что точка 4 расположена на уровне пола четвертого этажа пятиэтажной рамы.

Колебания точки 2 рамы в направлениях Z_1 и Z_2 практически идентичны и имеют выраженный затухающий характер.

В точке 6, соответствующей верхней отметке, амплитудные значения перемещений $w(t)$ наименьшие (около 0,07 м), т. е. вопреки ожиданиям рама не раскачивается по схеме консоли, а работает на изгиб в соответствии с четвертым тоном собственных колебаний

(см. рис. 3.51).

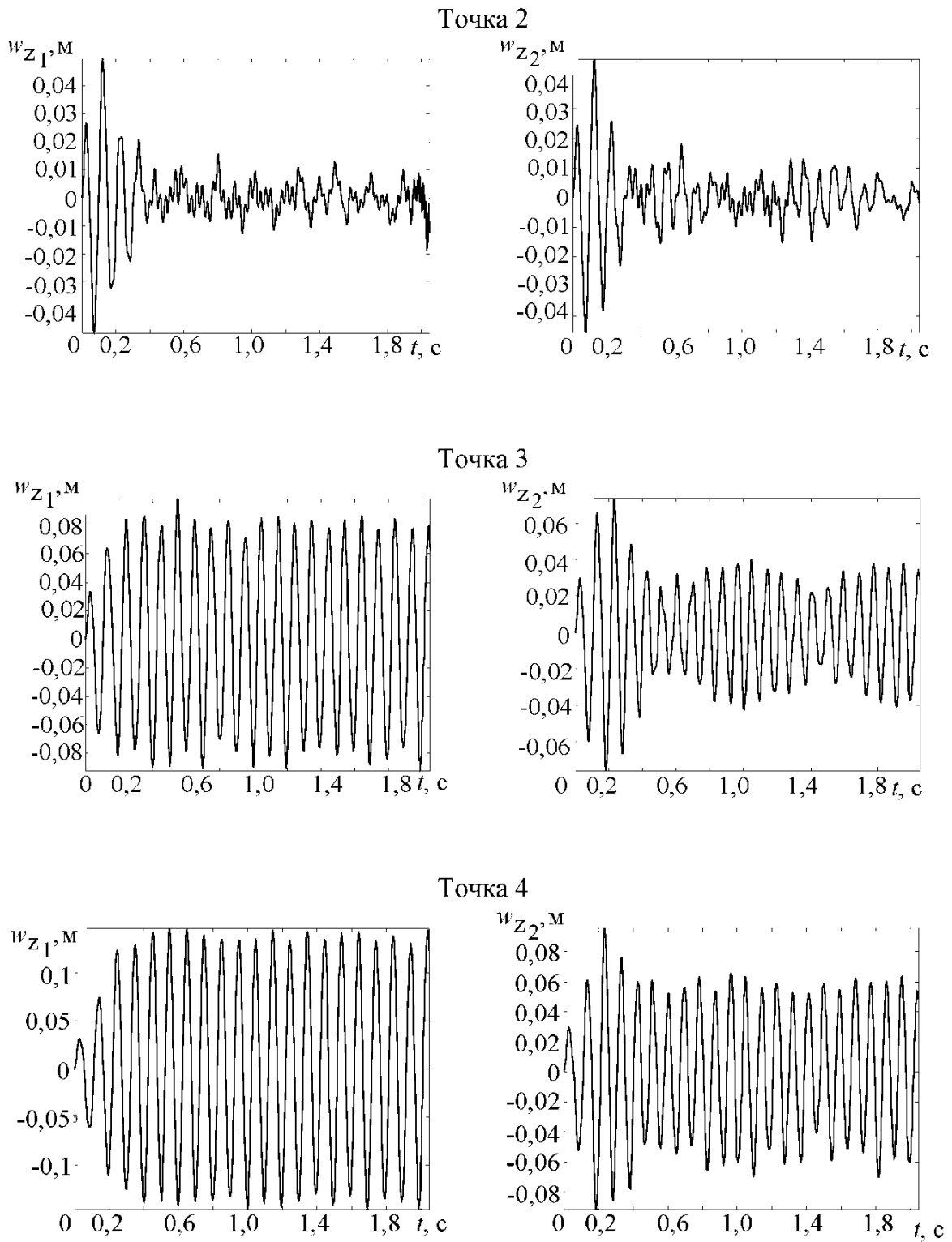
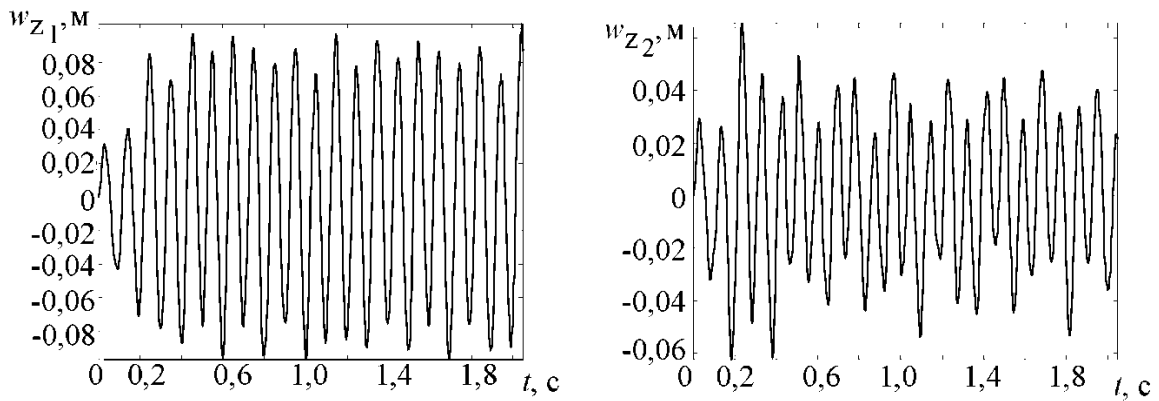


Рис. 3.52 (см. также с.160)

Точка 5



Точка 6

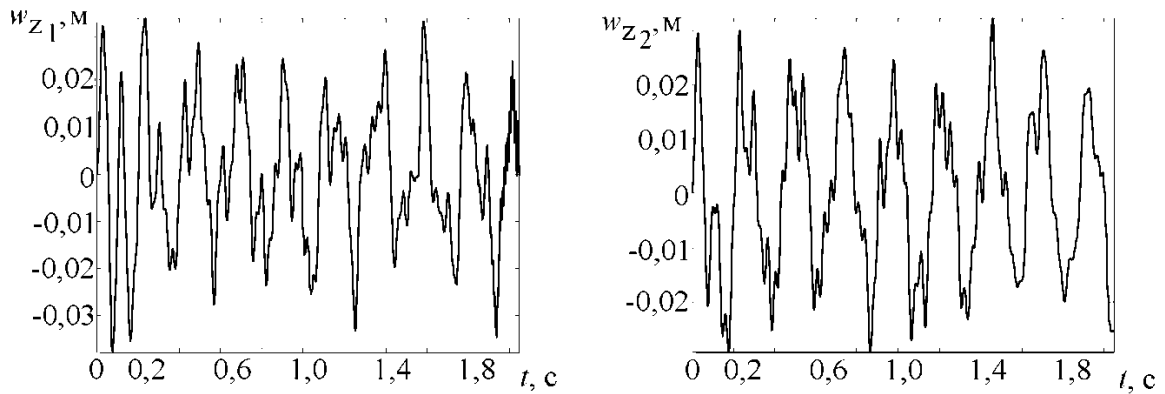


Рис. 3.52. Продолжение

В качестве количественной оценки динамического воздействия на стержневую систему на каждом временном шаге вычисляем норму вектора узловых перемещений:

$$\|W(t)\| = \sum_{i=1}^{n_g} |w_i(t)|,$$

где n_g – общее число степеней свободы; w_i – i -е узловое перемещение. После завершения процесса прямого интегрирования определяем величину $\|W\|_{max}$, а также соответствующий номер шага и момент времени \hat{t} .

Далее вычислительный процесс повторяется для временного интервала $[0, \hat{t}]$. При этом полученный вектор узловых перемещений

$\{W\}|_{t=\bar{t}}$ используется для визуализации формы максимального отклонения рамы от исходного состояния, а также с помощью него можно вычислить текущие значения внутренних усилий в стержнях рамы. Картины деформации исследуемой рамы при кинематическом воздействии вдоль оси Z_1 (496 шаг) и вдоль оси Z_2 (85 шаг) представлены на рис. 3.53, а, б. Здесь для компонент узловых перемещений w_i использован масштабный коэффициент 10:1.

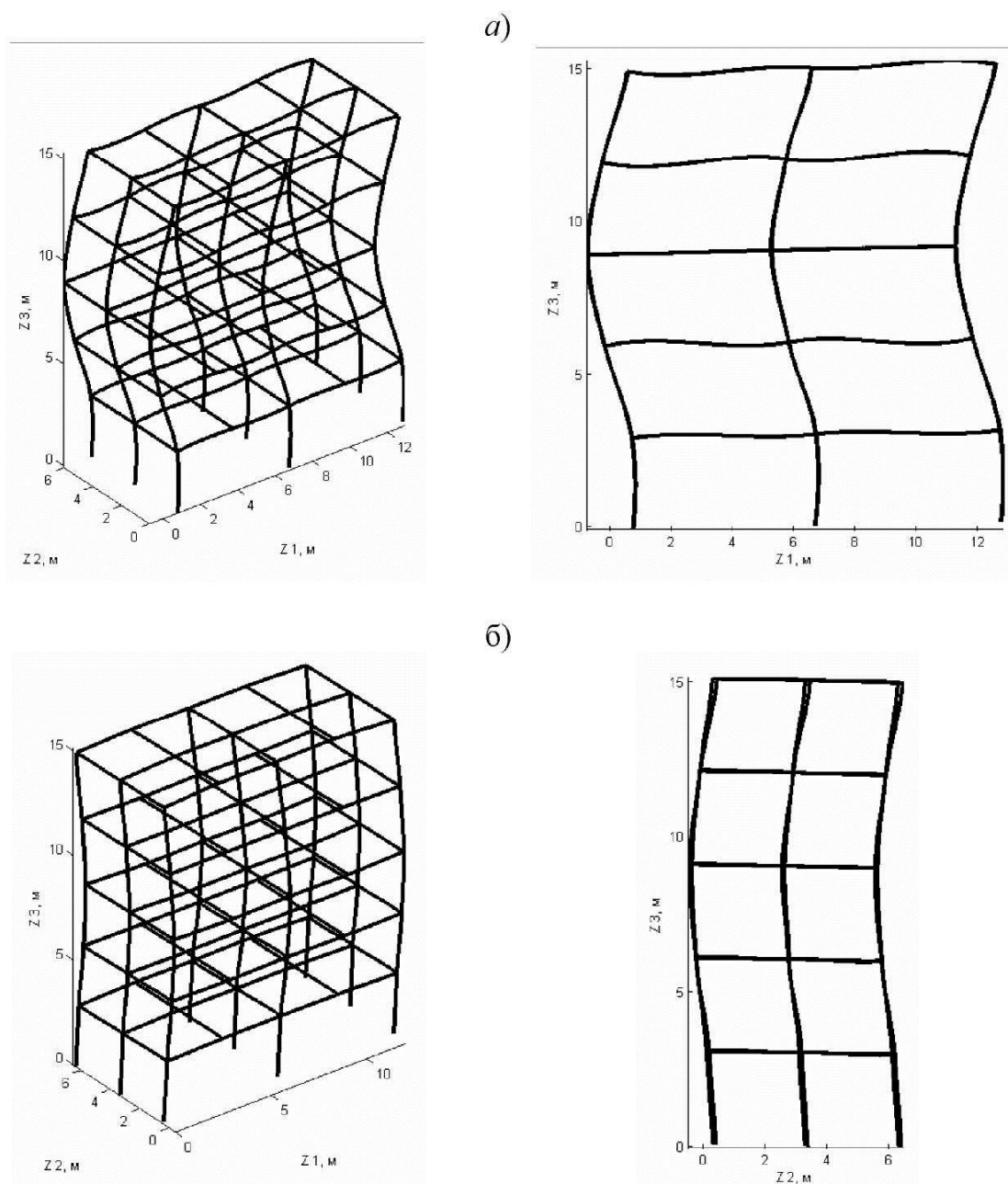


Рис. 3.53

Интересно отметить, что при возбуждении колебаний в направлении оси Z_1 кроме горизонтальных перемещений в узлах средних и правых стоек рамы появляются вертикальные перемещения (рис. 3.53, *а*). При кинематическом воздействии на раму вдоль оси Z_2 наблюдаются вертикальные перемещения на левых стойках (рис. 3.53, *б*). Обнаружить этот опрокидывающий эффект позволило введение фиктивных стержней, имитирующих связь несущего каркаса рамы с основанием.

Естественно, что при полученных амплитудных значениях горизонтальных перемещений следует ожидать серьезных повреждений несущих элементов каркаса, выполненных из монолитного железобетона. Вместе с тем не следует забывать, что в рассматриваемом примере имитировалось землетрясение в 9 баллов.

Заключение

Требования, предъявляемые к результатам прочностного расчета строительных объектов повышенной сложности, обуславливают необходимость повышения числа неизвестных до 1 млн и выше. По сути, современные программные комплексы, базирующиеся на конечно-элементном анализе, являются основными потребителями вычислительных ресурсов сетевых многопроцессорных систем. Вместе с тем, несмотря на высокий уровень автоматизации проектировочных расчетов, на долю конструктора-расчетчика отводится самая важная часть работы, связанная с выбором геометрических и физических параметров расчетной схемы, а также критериев оценки промежуточных и конечных результатов решения задачи. В этой связи встает вопрос о сертификации специалистов, выполняющих расчеты ответственных объектов, т. к. любая самая дорогая и верифицированная программа может дать неверный результат при ошибке расчетчика на этапе выбора расчетной схемы, конструирования граничных условий, интерпретации данных моделирования. Досадно, что в учебном плане мало времени отводится изучению математических методов строительной механики и практическому освоению основ алгоритмизации и программирования метода конечных элементов. Знакомство студентов с современным программным обеспечением чаще происходит на уровне перечисления названий и некоторых вычислительных возможностей коммерческих комплексов.

Стержневые идеализации реальных конструкций находят самое широкое распространение в расчетной практике. Поэтому основное внимание в учебном пособии уделено классическим и численным методам расчета стержневых систем. К сожалению, из-за ограничений по объему читаемого курса вопросы, связанные с расчетами пластин и оболочек на устойчивость и динамический отклик, не нашли своего отражения в настоящем пособии. Хотя известно, что построение расчетных схем на базе конгломератов, образованных из пластинчатых, оболочечных и стержневых конечных элементов, существенно расширяет возможности моделирования в области строительства.

Не охваченными остались физически и конструктивно нелинейные задачи статики стержневых систем, а также расчеты на устойчивость с учетом ползучести.

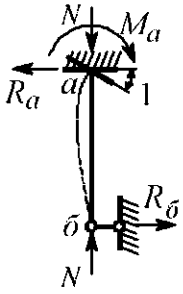
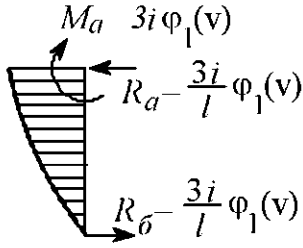
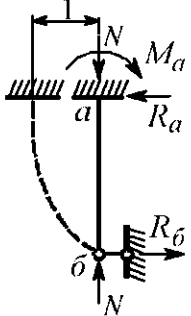
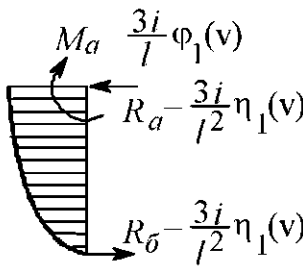
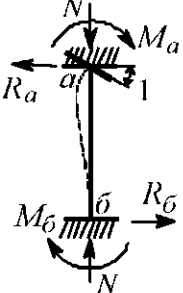
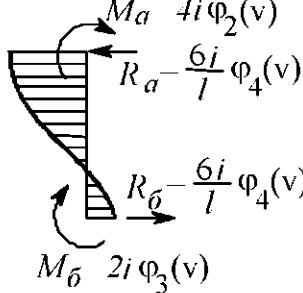
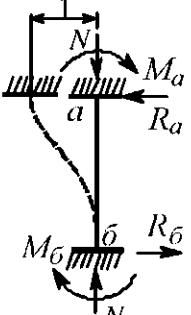
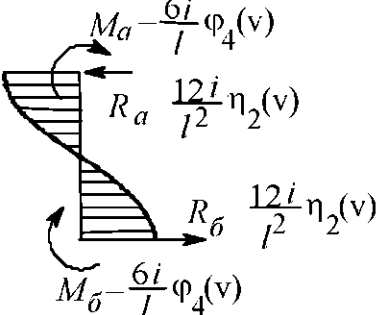
Библиографический список

1. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лашеников Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений. – М.: Стройиздат, 1984. – 416с.
2. Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А. Основы строительной механики стержневых систем.– М.: Изд. АСВ, 1996. – 541с.
3. Клейн Г.К., Рекач В.Г., Розенблат Г.И. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики.–М.: Высш. шк., 1972.–320с.
4. Воронцов Г.В., Резниченко А.И. Расчет плоских рам на прочность, устойчивость, свободные и вынужденные колебания: учеб. пособие/ НПИ – Новочеркасск, 1993. – 72с
5. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982 – 448с.
6. Синицын С.Б. Строительная механика в методе конечных элементов стержневых систем. – М.: Изд. АСВ, 2002. – 320с.
7. Даниелов Э.Р. Устойчивость и колебания плоских рам: учеб. пособие. – М.: Изд. АСВ, 2004.– 160с.
8. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. – М.: Высш. шк., 1980. – 408с.
9. СНиП II-7-81*. Строительство в сейсмических районах. – М.: Стройиздат, 1995. – 52с.
10. СНиП 11-23-81. Нормы проектирования. Стальные конструкции. – М.: Стройиздат, 1988. – 93с.

Приложения

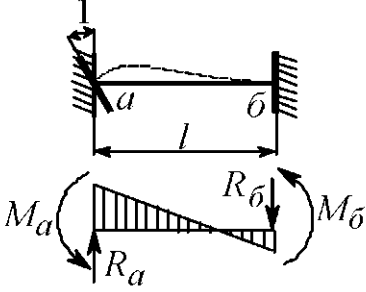
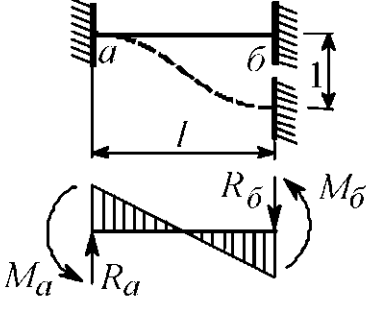
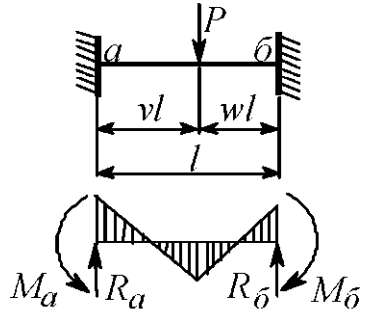
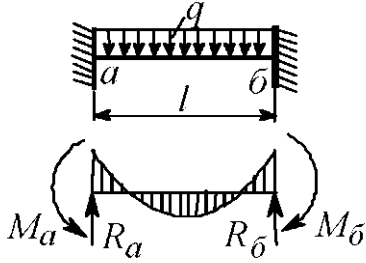
Приложение 1

**Таблица значений реакций
для сжато-изогнутых стержней**

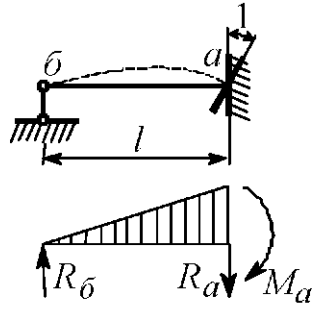
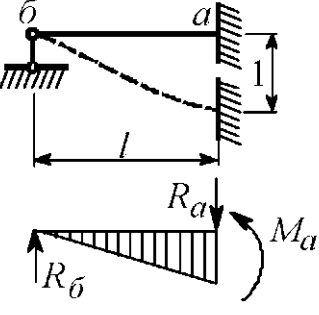
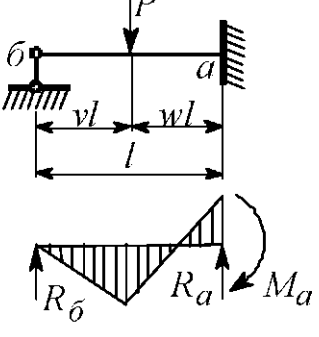
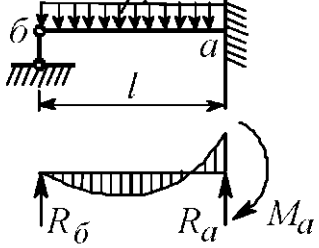
Схема	Эпюры моментов и реакции
	
	
	
	

Приложение 2

Таблицы реакций для балок, используемые при расчете рам методом перемещений

Схема балки, эпюра моментов и реакции	Формулы реакций
	$M_a = 4i; \quad M_b = 2i;$ $R_a = R_b = \frac{6i}{l}$
	$M_a = M_b = \frac{6i}{l};$ $R_a = R_b = \frac{12i}{l^2}$
	$M_a = P v w^2 l;$ $M_b = P v^2 w l;$ $R_a = w^2 (1 + 2v) P;$ $R_b = v^2 (1 + 2w) P$
	$M_a = \frac{ql^2}{12}; \quad M_b = \frac{ql^2}{12};$ $R_a = R_b = \frac{ql}{2}$

Продолжение прил. 2

Схема балки, эпюра моментов и реакции	Формулы реакций
	$M_a = 3i;$ $R_a = R_b = \frac{3i}{l}$
	$M_a = \frac{3i}{l};$ $R_a = R_b = \frac{3i}{l^2}$
	$M_a = \frac{Pvl}{2}(1 - v^2);$ $R_a = \frac{Pv}{2}(3 - v^2);$ $R_b = \frac{Pw^2}{2}(3 - w)$
	$M_a = -\frac{ql^2}{8};$ $R_a = \frac{5}{8}ql; \quad R_b = \frac{3}{8}ql$

Краткие сведения из матричной алгебры

Матрица общего вида – это прямоугольный массив чисел, называемых элементами, представленный в виде таблицы

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Положение элемента a_{ij} в матрице $[A]$ определяется номером строки i и номером столбца j . Размерность или порядок матрицы определяется произведением числа строк m на число столбцов n . Две матрицы $[A]$ и $[B]$ одинакового порядка $(m \times n)$ равны, если $a_{ij} = b_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$. В матричной форме равенство матриц записывается в виде $[A] = [B]$.

Матрица $[A]$ называется квадратной, если число строк равно числу столбцов $m = n$. Элементы $a_{ii}, i = 1, 2, \dots, n$ образуют главную диагональ матрицы $[A]$. С квадратной матрицей $[A]$ связан опре-

$(n \times n)$

делитель n -го порядка

$$\det [A] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определители 2-го и 3-го порядков соответственно вычисляются по формулам:

$$\det [A]_{(2 \times 2)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21},$$

$$\det [A]_{(3 \times 3)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + \\ + a_{21} a_{32} a_{13} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{21} a_{12} a_{33} - a_{32} a_{23} a_{11}.$$

Определители более высоких порядков вычисляются путем приведения исходной матрицы $[A]_{(n \times n)}$ к треугольному виду:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Процедура приведения матрицы к треугольному виду называется триангуляцией. После триангуляции определитель матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали:

$$\det [A]_{(n \times n)} = a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn}.$$

При программной реализации перемножения диагональных элементов матрицы большой размерности существует опасность переполнения разрядной сетки. Для исключения вероятности переполнения определитель следует вычислять с удвоенной точностью в виде

$$\det [A]_{(n \times n)} = m \cdot 10^S,$$

где $m = \prod_{i=1}^n \operatorname{sgn}(a_{ii})$ – мантисса определителя; $S = \sum_{i=1}^n \lg |a_{ii}|$ – зна-

чение порядка определителя.

Квадратная матрица, для которой $\det [A] = 0$, называется вырожденной (особенной).

Матричная операция последовательной замены строк столбцами называется транспонированием и обозначается верхним символом $[\dots]^T$. Пример транспонирования прямоугольной матрицы $[B]$:

$$[B] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4,7 & -12 & 8 \end{bmatrix}, \quad [B]^T = \begin{bmatrix} 2 & 4,7 \\ -1 & -12 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что при транспонировании несимметричной квадратной матрицы диагональные элементы сохраняют свои ячейки, а транспонирование симметричной матрицы не имеет смысла.

Квадратная матрица $[A]$ называется диагональной, если

$$\begin{cases} a_{ij} \neq 0, & \text{при } i = j, \\ a_{ij} = 0, & \text{при } i \neq j, \\ i, j = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

Компактная форма записи диагональной матрицы имеет вид

$$[A] = \text{diag} [a_{11} \ a_{22} \ a_{33} \ \dots \ a_{nn}].$$

Квадратная диагональная матрица называется единичной, если $a_{ij} = 1, i, j = 1, 2, \dots, n$. Единичная матрица обычно обозначается $[I]$.

Матрица, у которой симметрично расположенные относительно главной диагонали элементы равны, называется симметричной. Пример симметричной матрицы:

$$[C] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 7 & 1,5 \\ 0 & 1,5 & 4,8 \end{bmatrix}.$$

Основные операции матричной алгебры

1. Сложение (вычитание) матриц

$$[C] = [A] \pm [B],$$

где $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$.

Операция сложения (вычитания) матриц коммутативна, т. е.

$$[A] \pm [B] = [B] \pm [A],$$

$$[A] \pm ([B] \pm [C]) = ([A] \pm [B]) \pm [C].$$

2. Умножение матрицы на скаляр

$$[C] = u[A],$$

где u – вещественное число; $c_{ij} = u a_{ij}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$.

3. Результатом произведения матрицы $[A]$ размерностью $(m \times r)$ справа на матрицу $[B]$ размерностью $(r \times n)$ является матрица $[C]$ размерностью $(m \times n)$. В матричной форме это выглядит

так:

$$[C] = [A] [B].$$

$(m \times n) \quad (m \times r)(r \times n)$

В символьном виде произведение матриц вычисляется по формуле

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^r a_{ik} b_{kj}, \quad i=1,2,\dots, m, \quad j=1,2,\dots, n.$$

Отметим, что данное произведение матриц имеет смысл, когда число столбцов матрицы $[A]$ равно числу строк матрицы $[B]$.

Правила произведения матриц

Произведение матриц не коммутативно

$$[A][B] \neq [B][A].$$

Исключение составляет произведение матрицы $[A]$ на единичную матрицу $[I]$:

$$[A][I] = [I][A].$$

Произведение матриц ассоциативно:

$$\begin{aligned} ([A][B])[C] &= [A]([B][C]), \\ [A]([B]+[C]) &= [A][B]+[A][C], \\ ([A]+[B])[C] &= [A][C]+[B][C]. \end{aligned}$$

Определитель произведения нескольких матриц равен произведению определителей этих матриц.

Транспонирование произведения матриц подчиняется правилу

$$([A][B])^T = [B]^T [A]^T.$$

Транспонирование суммы матриц выполняется по формуле

$$([A]+[B])^T = [A]^T + [B]^T.$$

Дважды транспонированная матрица совпадает с исходной матрицей $([A]^T)^T = [A]$.

Определитель матрицы не меняется при транспонировании.

Обратная матрица и ее свойства

Всякая неособенная матрица $[A]$ имеет обратную матрицу, $(n \times n)$

обозначаемую $[A]^{-1}$, такую что $[A][A]^{-1} = [I]$ и $[A]^{-1}[A] = [I]$. Матрица называется сингулярной или особенной,

если для нее не существует обратной матрицы.

Один из алгоритмов обращения (инверсии) матрицы $[A]$ ба-
($n \times n$)

зируется на решении системы уравнений методом Гаусса:

$$[A]\{X\}_j = \{I\}_j, \quad j=1, 2, \dots, n.$$

Здесь $\{X\}_j$ – векторы-столбцы, образующие обратную матрицу

$$[A]^{-1} = [\{X\}_1 \{X\}_2 \dots \{X\}_j \dots \{X\}_n];$$

$\{I\}_j$ – единичные векторы-столбцы, имеющие следующую структу-
ру:

$$\{I\}_1 = \{1 \mid 0 \mid \dots \mid n\}^T, \quad \{I\}_2 = \{0 \mid 1 \mid \dots \mid n\}^T \text{ и т. д.}$$

Обратная матрица для произведения $[A][B]$ вычисляется по
формуле

$$([A][B])^{-1} = [B]^{-1}[A]^{-1}.$$

Признаки ортогональности и положительной определенности симметричных матриц

Матрица $[A]$ называется ортогональной, если она удовлетво-
ряет одному из следующих условий:

$$[A][A]^T = [I]; \quad [A]^T [A] = [I]; \quad [A]^T = [A]^{-1}.$$

Матрица $[A]$ называется положительно определенной, если
для некоторого ненулевого вектора $\{X\}$ размерности n выполняется
условие

$$\{X\}^T [A] \{X\} > 0.$$

Требование положительной определенности матрицы $[A]$ является
определяющим при решении системы линейных алгебраических
уравнений $[A]\{X\} = \{b\}$.

Число обусловленности матрицы

Число обусловленности $cond(A)$ квадратной неособенной мат-
рицы $[A]$ используется для определения чувствительности системы
линейных алгебраических уравнений $[A]\{X\} = \{b\}$ к возмущениям
(малым отклонениям) вектора правой части $\{b\}$. Чем больше число
обусловленности, тем более неустойчив процесс нахождения реше-

ния системы (вектора $\{X\}$). Величина $cond(A)$ определяется как отношение максимального собственного значения λ_{max} матрицы $[A]$ к ее минимальному собственному значению λ_{min} .

Нормирование векторов и матриц

Для измерения векторов и матриц с целью их сравнения вводятся разные нормы.

Для вектора $\{X\} = \{x_1 x_2 \dots x_n\}^T$:

– евклидова (квадратичная) норма

$$\|X\|_2 = \sqrt{\{X\}^T \{X\}} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}};$$

– m -норма

$$\|X\|_m = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|;$$

– l -норма

$$\|X\|_l = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

Для квадратной матрицы $[A]$:
($n \times n$)

– первая норма (максимум суммы модулей элементов в столбце)

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|;$$

– вторая (спектральная) норма

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}};$$

– евклидова (квадратичная) норма

$$\|A\|_e = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2};$$

бесконечная норма (максимум суммы модулей элементов в строке)

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Варианты заданий для самостоятельной работы*

Расчет плоской рамы на устойчивость

Задание. Для плоской статически неопределимой рамы (рис. П4.1) с выбранными по шифру (три последние цифры в номере зачетной книжки) из табл. П4.1 размерами и нагрузкой требуется определить значения критических сил, используя метод перемещений.

Таблица П4.1

Первая цифра шифра	$l_1,$ м	$h_1,$ м	Вторая цифра шифра	$\alpha = \frac{P_1}{P_2}$	$l_2,$ м	Третья цифра шифра (№ схемы)	$h_2,$ м	$\frac{J_1}{J_2}$
1	4	4	1	1,2	4	1	2	0,9
2	5	10	2	1,3	5	2	0	0,8
3	6	9	3	1,4	6	3	0	0,7
4	7	8	4	1,5	7	4	0	0,6
5	8	7	5	1,6	8	5	0	0,5
6	9	6	6	1,7	9	6	0	1,2
7	10	5	7	1,8	10	7	0	1,4
8	11	3	8	1,9	11	8	4	1,5
9	12	11	9	2,0	12	9	5	1,6
0	13	12	0	2,5	13	0	6	1,8

*Митропольский М.Н. Строительная механика. Методические указания и контрольные задания. – М.: Высш. шк., 1982. – 61с.

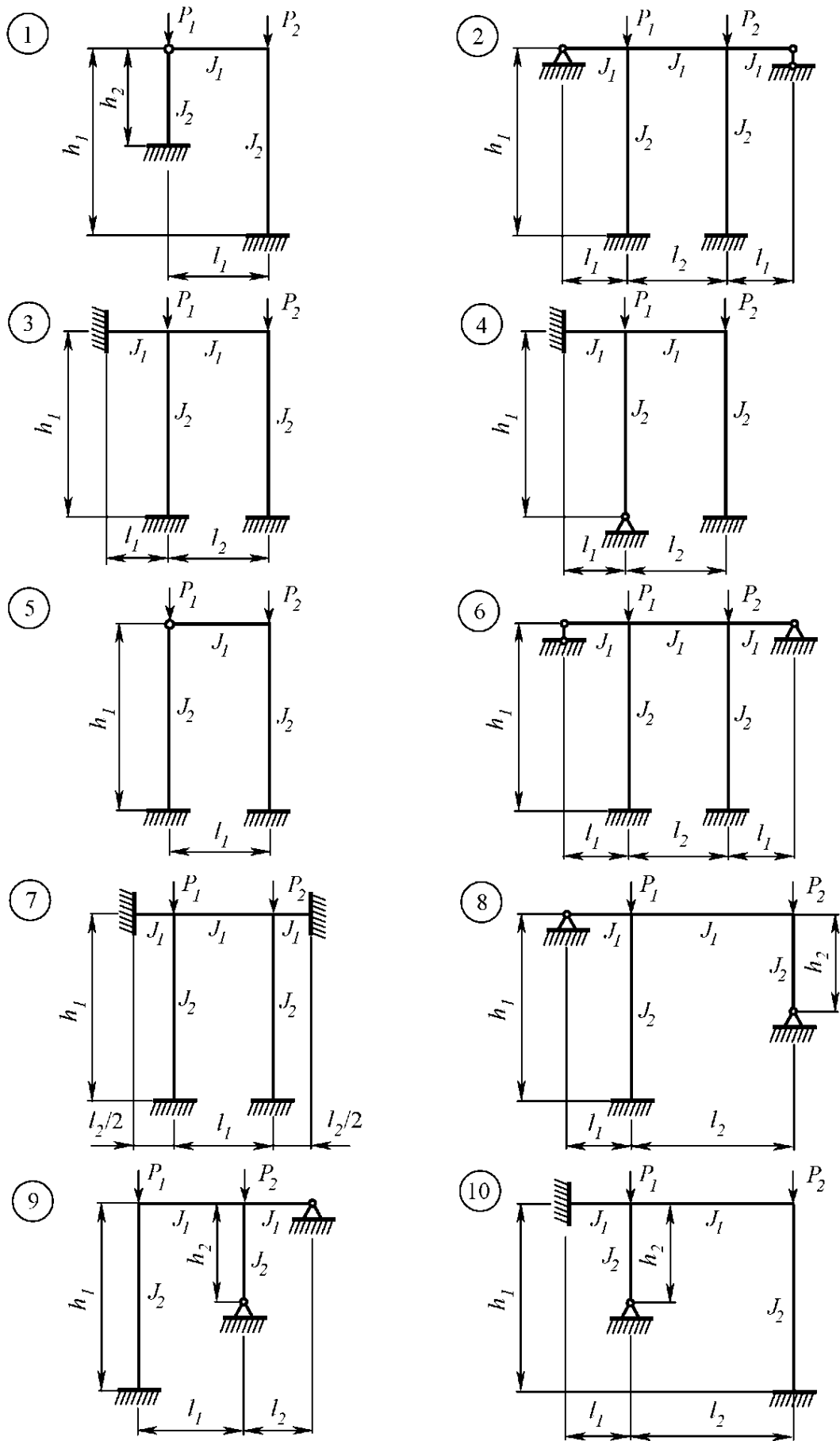


Рис. П4.1

Так как заданные сосредоточенные силы P_1 и P_2 действуют вдоль стоек, то грузовых эпюр в основной системе не будет, и свободные члены канонических уравнений метода перемещений обратятся в нуль.

Построение единичных эпюр для стоек следует выполнять с использованием специальной таблицы реакций для сжато-изогнутых стержней (приложение 1), а для ригелей – по обычным таблицам метода перемещений (приложение 2).

По заданию силы P_1 и P_2 связаны между собой соотношением $\alpha = P_1 / P_2$, поэтому параметры продольной нагрузки для сжатых стоек \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 также окажутся связанными зависимостью:

$$\frac{\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_2} = \frac{h_1}{h_2} \sqrt{\alpha \frac{E J_2}{E J_1}}.$$

Формируем матрицу коэффициентов канонической системы метода перемещений:

$$[R(\mathbf{v})] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix},$$

где коэффициенты r_{ij} , $i, j = 1, 2$ включают специальные функции $\varphi_1(\mathbf{v})$, $\varphi_2(\mathbf{v})$, $\varphi_3(\mathbf{v})$, $\varphi_4(\mathbf{v})$, $\eta_1(\mathbf{v})$, $\eta_2(\mathbf{v})$ от параметра \mathbf{v} .

Для нахождения $P_{кр}$ составляем уравнение устойчивости:

$$\det [R(\mathbf{v})] = \det \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = r_{11} \cdot r_{22} - r_{12}^2 = 0. \quad (\text{П4.1})$$

“Вручную” уравнение (П4.1) решается методом “хорд” в следующей последовательности (рис. П4.2): а) способом “пристрелки” задаются значениями \mathbf{v}_0 и \mathbf{v}_1 таким образом, чтобы величины $\det [R(\mathbf{v}_0)]$ и $\det [R(\mathbf{v}_1)]$ имели разные знаки; б) по итерационной формуле

$$\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_0 - \frac{\det [R(\mathbf{v}_0)]}{\det [R(\mathbf{v}_i)] - \det [R(\mathbf{v}_0)]} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_0), \quad i = 1, 2, \dots, n_{max},$$

вычисляется величина \mathbf{v}_{i+1} (n_{max} – формально назначаемое максимальное число итераций); в) начиная со второй итерации ($i = 2$) вы-

полняется оценка сходимости итерационного процесса по формуле

$$\det [R(\mathbf{v}_{i+1})] \leq \varepsilon, \quad (\text{П4.2})$$

здесь $\varepsilon = 0,001$ – положительная малая величина. При выполнении условия (П4.2) вычисления прекращаются и принимается $\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_{\text{кр}}$. Следует иметь в виду, что уравнение $\det [R(\mathbf{v})] = 0$ имеет несколько корней. Поэтому необходимо проверять, чтобы на отрезке $[\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1]$ находился только один наименьший корень.

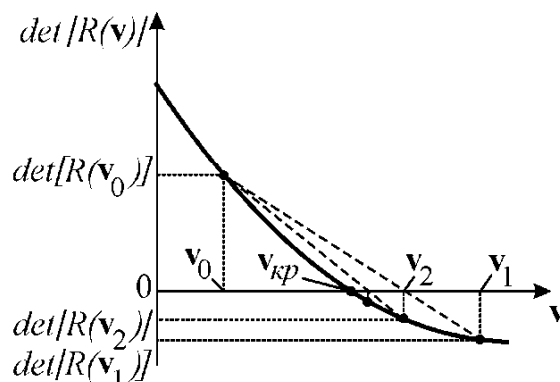


Рис. П4.2

В завершении задания по формулам:

$$P_{1 \text{ кр}} = \frac{\mathbf{v}_1^2 E J_1}{h_1^2}, \quad P_{1 \text{ кр}} = \frac{\mathbf{v}_2^2 E J_2}{h_2^2}$$

определяются значения критических сил в сжатых стойках рамы.

Динамический расчет плоской рамы

Задание. Для плоской статически определимой рамы (рис. П4.3) с выбранными по шифру (три последние цифры в номере зачетной книжки) из табл. П4.2 размерами и нагрузкой требуется:

- 1) определить значения частот свободных вертикальных и горизонтальных колебаний (собственный вес системы не учитывается);
- 2) определить динамическое воздействие вертикальной вибрационной силы $P \sin \Theta t$:
 - а) принять частоту вертикальной возмущающей силы Θ , равной половине первой (минимальной) частоты собственных колебаний ω_1 ;

б) определить динамический коэффициент

$$\mu = 1 / [1 - (\Theta / \omega_1)^2];$$

в) построить эпюру изгибающих моментов с учетом динамического действия силы P .

Примечание. Эпюра изгибающих моментов с учетом динамического воздействия вибрационной силы $P \sin \Theta t$ строится как при обычном прочностном расчете от вертикальной сосредоточенной силы, равной $Q + \mu P$.

Таблица П4.2

Первая цифра шифра	l , м	Q , кН	Вторая цифра шифра	P , кН	Третья цифра шифра (№ схемы)	EJ , кН·м ²
1	2,0	10	1	1,0	1	20000
2	2,5	20	2	2,0	2	25000
3	3,0	22	3	2,5	3	22500
4	2,2	18	4	1,5	4	22000
5	2,4	25	5	1,2	5	23000
6	2,8	24	6	3,0	6	21000
7	2,1	21	7	1,8	7	24000
8	2,3	23	8	1,6	8	23500
9	1,8	17	9	2,2	9	24500
0	2,6	16	0	2,6	0	21500

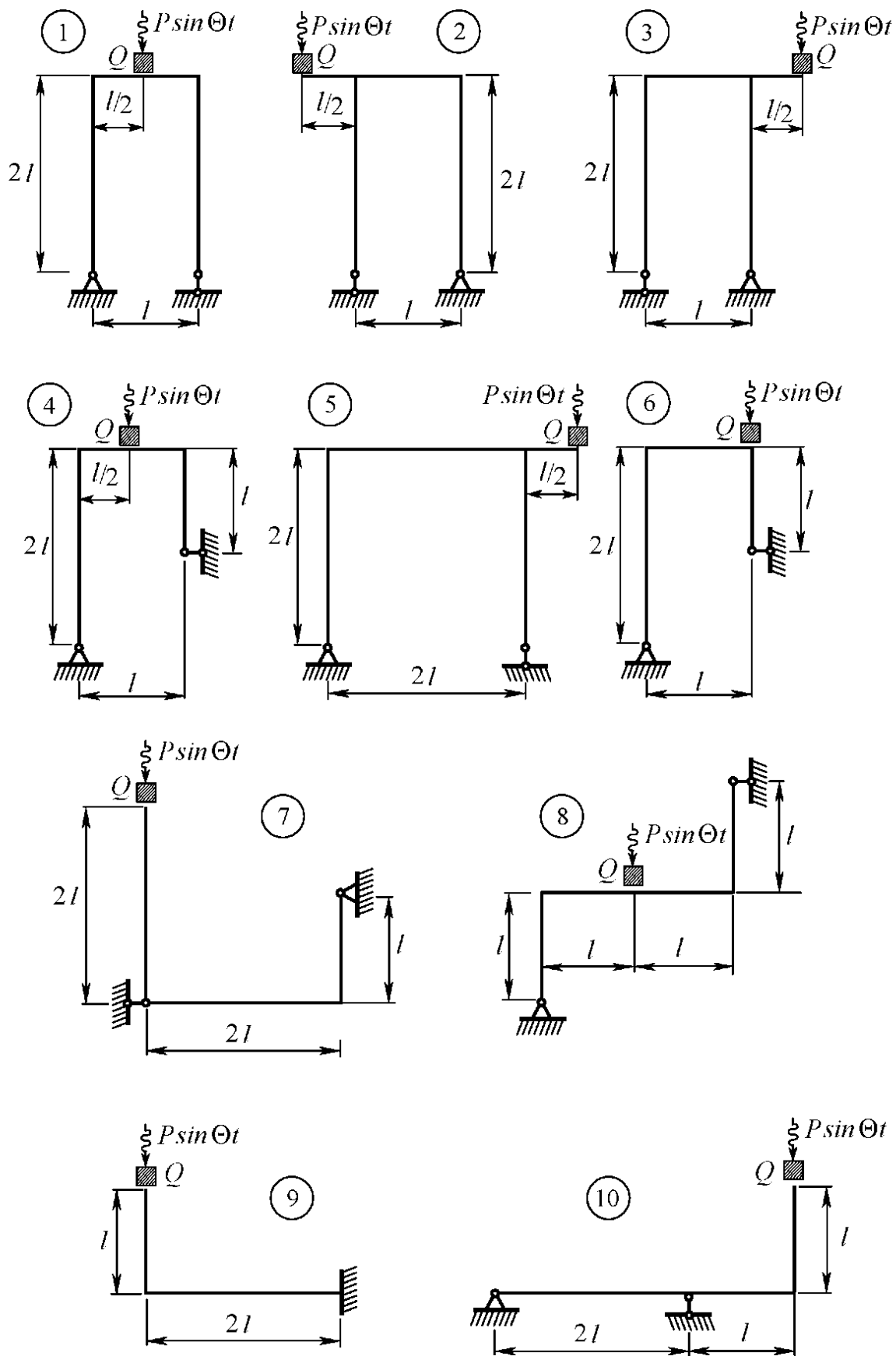


Рис. П4.3