

ОПД.Р.03 СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА
МЕХАНИКА ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ
ТЕОРИЯ СТЕРЖНЕЙ
Учебное пособие

Представлена современная теория упругих стержней как самостоятельный и математически совершенный раздел механики деформируемого твердого тела. Дана общая нелинейная динамическая теория стержней как материальных линий (кривых Коссера). Подробно рассмотрены линейная теория и задачи устойчивости. В рамках трехмерных моделей описаны решения Сен-Венана, изложен вариационный метод перехода к одномерным моделям и показано асимптотическое происхождение теории стержней.

Предназначено в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 150300 — «Прикладная механика». Пособие может быть полезно для аспирантов и инженеров, изучающих механику деформируемого твердого тела.

Оглавление

Введение	5
1. Общая нелинейная теория	6
1.1. Принцип виртуальных работ	6
1.2. Элементы механики абсолютно твердого тела	7
1.3. Стержень как материальная линия. Движение и деформация	9
1.4. Принцип виртуальной работы для стержня	10
1.5. Соотношения упругости	12
1.6. Полная система уравнений	13
1.7. Классическая модель Кирхгофа-Клебша	14
1.8. Задача Эйлера	16
1.9. Уравнения в вариациях	19
1.10. Модель с растяжением без сдвига	20
1.11. Механика нити	20
1.12. Задачи к главе 1	22
2. Линейная теория	23
2.1. Уравнения линейной теории	23
2.2. Теоремы единственности	24
2.3. Теоремы взаимности работ	25
2.4. Теоремы Лагранжа и Кастильяно	26
2.5. Принцип минимума потенциальной энергии системы	28
2.6. Принцип минимума дополнительной работы	30
2.7. Принцип типа Рейсснера	32
2.8. Введение в асимптотический анализ	32
2.9. Интегрирование уравнений статики и их асимптотический анализ	34
2.10. Задача о пологой арке	36
2.11. Колебания стержней	38
2.12. Малые поправки к собственным частотам	40
2.13. Уравнения в компонентах. Круговое кольцо	42
2.14. Прямой стержень	43

2.15. Задачи к главе 2	45
3. Задачи устойчивости	46
3.1. Различные подходы к проблеме устойчивости	46
3.2. Уравнения теории устойчивости стержней. Классические задачи	48
3.3. О следящих нагрузках	51
3.4. Эффекты, обусловленные растяжением и сдвигом	53
3.5. Вариационные формулировки	55
3.6. Задачи к главе 3	57
4. Переход от трехмерной модели к одномерной	59
4.1. Уравнения трехмерной теории упругости	59
4.2. Задача Сен-Венана	60
4.3. Определение жесткостей по энергии	64
4.4. Вариационный метод сведения трехмерной задачи к одномерной	67
4.5. Асимптотический метод в плоской задаче об изгибе	72
4.6. Тонкий стержень произвольной геометрии	79
4.7. Задачи к главе 4	85
5. Тонкостенные стержни	87
5.1. Построение модели вариационным методом	87
5.2. Тонкие сечения	90
5.3. Асимптотический анализ пространственной задачи	92
5.4. Задачи к главе 5	93
Библиографический список	94

Введение

Деформируемые тела в природе и технике часто имеют вид стержней, т. е. являются тонкими и длинными. Основы механики стержней заложили Бернулли и Эйлер за столетие до появления классической теории упругости. При этом успешно использовалась одномерная модель стержня как деформируемой материальной линии. Удачными были и первые обращения к трехмерной модели в работах Сен-Венана об изгибе и кручении призм. По последующие попытки рассмотрения стержней как тонких трехмерных тел оказались менее результативны. Механика стержней едва не превратилась в набор правил для приближенных расчетов.

Сегодня мы имеем новую механику стержней — строгую и точную науку. Таков результат усилий ряда отечественных и зарубежных авторов за последние десятилетия. Во-первых, они фундаментально развили прямой подход к стержням как деформируемым материальным линиям. Во-вторых, стало понятно асимптотическое происхождение механики стержней: при малой толщине происходит асимптотическое расщепление трехмерной задачи на одномерную (по дуговой координате на оси стержня) и двумерные (в поперечном сечении).

Эти два подхода дополняют друг друга. Прямой подход невозможен без информации о свойствах частиц материальной линии. Эту информацию даст асимптотический анализ. Он сложен, но упрощается благодаря результатам прямого подхода как ориентирам. Современная механика стержней имеет и большое прикладное значение для инженерных расчетов на прочность, жесткость, устойчивость и колебания конструкций.

В учебном пособии изложены основы современной теории стержней. В трех первых главах рассматриваются одномерные модели стержней; представлены общая нелинейная теория, линейные постановки и теория устойчивости. Четвертая глава — о трехмерных моделях и связи их с одномерными. Пятая глава посвящена тонкостенным стержням, наиболее распространенным в технике. Материал соответствует первой части курса лекций по дисциплине «Механика тонкостенных конструкций». В каждой главе приведены задачи, рекомендованные для самостоятельного решения.

Глава 1

Общая нелинейная теория

1.1. Принцип виртуальных работ

Напомним известную из курсов общей механики формулировку принципа [1]. Рассматривается система, материальных точек с массами m_i , движение ее определяется зависимостями от времени радиус-векторов $\mathbf{r}_i(t)$; внутренние силы пусть имеют потенциал Π , не зависящий явно от времени; внешние силы обозначим \mathbf{F}_i . Тогда для любых виртуальных перемещений

$$\sum (\mathbf{F}_i - m_i \ddot{\mathbf{r}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = \delta \Pi. \quad (1.1)$$

Этот принцип может быть положен в основу механики. Из него легко выводятся уравнения Лагранжа и принцип Гамильтона. Отсюда следуют и фундаментальные законы баланса импульса, момента импульса и энергии. Пусть, например, все $\delta \mathbf{r}_i$ одинаковы (трансляция). При этом $\delta \Pi = 0$ — потенциальная энергия внутренних взаимодействий не зависит от «жестких» движений. Тогда из (1.1) следует закон баланса импульса

$$\left(\sum m_i \dot{\mathbf{r}}_i \right)' = \sum \mathbf{F}_i.$$

Пусть далее $\delta \mathbf{r}_i = \delta \mathbf{O} \times \mathbf{r}_i$, где $\delta \mathbf{O}$ — единый для всей системы вектор малого поворота. В этом случае также $\delta \Pi = 0$, и из (1.1) получаем

$$\left(\sum \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i \right)' = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i.$$

Это закон баланса момента импульса. Наконец, положим $\delta \mathbf{r}_i = \dot{\mathbf{r}}_i \delta t$, где $\dot{\mathbf{r}}_i$ — действительные скорости частиц. При этом $\delta \Pi = \sum (\partial \Pi / \partial \mathbf{r}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i =$

$\dot{\Pi} \delta t$, и мы приходим к закону баланса энергии

$$\left(\frac{1}{2} \sum m_i |\dot{\mathbf{r}}_i|^2 + \Pi \right) = \sum \mathbf{F}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i.$$

К сожалению, иногда путают закон баланса энергии и дифференциальный вариационный принцип (1.1).

1.2. Элементы механики абсолютно твердого тела

Движение твердого тела определяется зависимостями от времени радиус-вектора полюса $\mathbf{r}(t)$ и тензора поворота $\underline{\underline{\mathbf{P}}}(t)$ ¹. Тензор можно ввести так: свяжем с телом ортогональную тройку ортов \mathbf{e}_i и положим $\underline{\underline{\mathbf{P}}} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_{i0}$, где \mathbf{e}_{i0} — орты в начальном положении и применено, как и всюду ниже, правило суммирования по повторяющемуся индексу. При этом $\mathbf{e}_i = \underline{\underline{\mathbf{P}}} \cdot \mathbf{e}_{i0}$, $\underline{\underline{\mathbf{P}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{P}}}^T = \underline{\underline{\mathbf{E}}}$ — единичный тензор ($(\dots)^T$ — символ транспонирования).

Последнее равенство — тождество по t . Продифференцировав его, получим

$$\dot{\underline{\underline{\mathbf{P}}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{P}}}^T = -\underline{\underline{\mathbf{P}}} \cdot \dot{\underline{\underline{\mathbf{P}}}}^T \Rightarrow \dot{\underline{\underline{\mathbf{P}}}} = \boldsymbol{\omega} \times \underline{\underline{\mathbf{P}}}, \quad \boldsymbol{\omega} \equiv -\frac{1}{2} \left(\dot{\underline{\underline{\mathbf{P}}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{P}}}^T \right)_{\times}. \quad (2.1)$$

Здесь необходимы следующие пояснения. Тензор $\dot{\underline{\underline{\mathbf{P}}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{P}}}^T$ оказался антисимметричным. Но всякий антисимметричный тензор может быть представлен в виде $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \mathbf{a} \times \underline{\underline{\mathbf{E}}} = \underline{\underline{\mathbf{E}}} \times \mathbf{a}$, причем «сопутствующий вектор» выражается следующим образом:

$$\mathbf{a} = -\frac{1}{2} \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\times}, \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\times} \equiv A_{ik} \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k \quad (\underline{\underline{\mathbf{A}}} = A_{ik} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k).$$

Вектор $\boldsymbol{\omega}$ в (2.1) — это угловая скорость тела.

Возвратившись к тождеству $\underline{\underline{\mathbf{P}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{P}}}^T = \underline{\underline{\mathbf{E}}}$ и проварьировав его, придем к следующему

$$\delta \underline{\underline{\mathbf{P}}} = \delta \mathbf{O} \times \underline{\underline{\mathbf{P}}}, \quad \delta \mathbf{O} \equiv -\frac{1}{2} \left(\delta \underline{\underline{\mathbf{P}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{P}}}^T \right)_{\times}.$$

Важное пояснение: вообще-то δ — это символ варьирования, $\delta \underline{\underline{\mathbf{P}}}$ есть вариация $\underline{\underline{\mathbf{P}}}$; но $\delta \mathbf{O}$ — это единое обозначение, а не «вариация \mathbf{O} »; $\delta \mathbf{O}$ называется вектором малого поворота.

¹Необходимые сведения из тензорного исчисления можно найти в приложении к книге [6]

Для описания поворота твердого тела можно вместо тензора $\underline{\underline{P}}$ использовать различные векторы конечного поворота. Как известно, любой поворот можно произвести вокруг некоторой оси. Обозначив \mathbf{k} — орт этой оси и θ — величину угла поворота (знак θ определяется правилом винта), можно получить следующее представление

$$\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{E}} + \mathbf{k} \times \underline{\underline{E}} \sin \theta + \mathbf{k} \times \underline{\underline{E}} \times \mathbf{k} (1 - \cos \theta).$$

В качестве вектора поворота можно взять просто $\mathbf{k}\theta$, но чаще встречается $2\mathbf{k} \operatorname{tg}(\theta/2)$. Когда за одним поворотом следует другой, их векторы не складываются, но это не противоречит их векторному характеру.

Рассмотрим принцип виртуальной работы для твердого тела. Радиус-вектор произвольной точки тела представим в виде $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{x}$, где \mathbf{r} — радиус-вектор полюса. При этом $\mathbf{x}(t) = \underline{\underline{P}}(t) \cdot \mathbf{x}(0)$. Для скоростей, ускорений и виртуальных перемещений будем иметь

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}, \quad \ddot{\mathbf{R}} = \ddot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}), \quad \delta \mathbf{R} = \delta \mathbf{r} + \delta \mathbf{O} \times \mathbf{x}.$$

Виртуальная работа внешних сил и сил инерции выразится так:

$$\begin{aligned} \int (\mathbf{f} - \ddot{\mathbf{R}}) \cdot \delta \mathbf{R} dm &= \left[\mathbf{F} - m(\dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varepsilon}) \right] \cdot \delta \mathbf{r} + \\ &+ \left[\mathbf{M} - m\boldsymbol{\varepsilon} \times \dot{\mathbf{r}} - (\underline{\underline{I}} \cdot \boldsymbol{\omega}) \right] \cdot \delta \mathbf{O}; \\ \mathbf{F} &\equiv \int \mathbf{f} dm, \quad \mathbf{M} \equiv \int \mathbf{x} \times \mathbf{f} dm, \\ m &\equiv \int dm, \quad m\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \int \mathbf{x} dm, \quad \underline{\underline{I}} \equiv \int (|\mathbf{x}|^2 \underline{\underline{E}} - \mathbf{x}\mathbf{x}) dm. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь $\mathbf{f} dm$ — внешняя сила, действующая на частицу с массой dm ; \mathbf{F} — главный вектор внешних сил; \mathbf{M} — их момент относительно полюса, m — масса тела, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — вектор эксцентриситета (он равен нулю, если полюс — центр масс), $\underline{\underline{I}}$ — тензор инерции относительно полюса. Отметим правила дифференцирования:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \dot{\underline{\underline{I}}} = \boldsymbol{\omega} \times \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{I}} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (2.3)$$

Множители при независимых вариациях $\delta \mathbf{r}$ и $\delta \mathbf{O}$ в (2.2) равны нулю — приходим к уравнениям динамики твердого тела.

1.3. Стержень как материальная линия. Движение и деформация

В этой главе и двух следующих используется прямой подход: стержень считается кривой Коссера — материальной линией, частицы которой суть твердые тела. Вводится лагранжева координата s ; обычно это дуговая координата в отсчетной конфигурации. Движение стержня задается зависимостью от времени радиус-вектора $\mathbf{r}(s, t)$ и тензора поворота $\underline{\underline{P}}(s, t)$ для каждой частицы.

Для задания угловой ориентации с каждой частицей связывают по некоторому правилу ортогональную тройку ортов \mathbf{e}_i . Часто принимают, например, $\mathbf{e}_{30} = \mathbf{r}'_0$ ($(\dots)' \equiv \partial/\partial s$); нулевым индексом отмечают величины в отсчетной конфигурации, а орты \mathbf{e}_{10} и \mathbf{e}_{20} направляют по главным осям инерции сечения, как в курсах сопротивления материалов. Но выбор \mathbf{e}_i может быть и другим, об этом будет сказано в п. 1.5. Соотношениями

$$\mathbf{e}'_i = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}_i \quad \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}'_i$$

вводится вектор кривизны и кручения стержня $\boldsymbol{\Omega}$ — его важная характеристика.

Введем векторы

$$\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{r}' - \underline{\underline{P}} \cdot \mathbf{r}'_0, \quad \boldsymbol{\kappa} \equiv \boldsymbol{\Omega} - \underline{\underline{P}} \cdot \boldsymbol{\Omega}_0. \quad (3.1)$$

При этом оказывается

$$\underline{\underline{P}}' = \boldsymbol{\kappa} \times \underline{\underline{P}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\kappa} = -\frac{1}{2} \left(\underline{\underline{P}}' \cdot \underline{\underline{P}}^T \right)_{\times},$$

так что $\boldsymbol{\kappa}$ играет роль $\boldsymbol{\omega}$, если аргумент t заменить на s . Равенства (3.2) показывают, что $\boldsymbol{\kappa}$ не связан (в отличие от $\boldsymbol{\Omega}$) со способом задания ортов \mathbf{e}_i и определяется лишь неравномерностью распределения поворотов.

Пусть стержень перемещается без деформации, как твердое тело. При этом

$$\underline{\underline{P}}(s) = \text{const}, \quad \mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(s_1) = \underline{\underline{P}} \cdot (\mathbf{r}_0(s) - \mathbf{r}_0(s_1)) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\kappa} = 0, \boldsymbol{\Gamma} = 0. \quad (3.2)$$

Следовательно, векторы $\boldsymbol{\Gamma}$ и $\boldsymbol{\kappa}$ характеризуют деформацию.

Получим необходимые для дальнейшего соотношения между характеристиками движения и деформации. Введем векторы скорости $\mathbf{v}(s, t) = \dot{\mathbf{r}}$

и угловой скорости $\omega(s, t) : \dot{\underline{P}} = \omega \times \underline{P}$ частиц стержня. Из очевидных равенств $(\dot{\underline{r}})' = (\underline{r}')'$ и $(\dot{\underline{P}})' = (\underline{P}')'$ можно получить следующие важные соотношения:

$$\underline{v}' - \omega \times \underline{r}' = \dot{\underline{\Gamma}} - \omega \times \underline{\Gamma}, \quad \omega' = \dot{\underline{\kappa}} - \omega \times \underline{\kappa}. \quad (3.3)$$

Последнее равенство выводится так:

$$\begin{aligned} (\dot{\underline{P}})' &= \omega' \times \underline{P} + \omega \times (\underline{\kappa} \times \underline{P}), \quad (\underline{P}')' = \dot{\underline{\kappa}} \times \underline{P} + \underline{\kappa} \times (\omega \times \underline{P}); \\ \omega \times (\underline{\kappa} \times \underline{P}) - \underline{\kappa} \times (\omega \times \underline{P}) &= \\ = \underline{\kappa} \omega \cdot \underline{P} - \omega \cdot \underline{\kappa} \underline{P} - (\omega \underline{\kappa} \cdot \underline{P} - \underline{\kappa} \cdot \omega \underline{P}) &= (\omega \times \underline{\kappa}) \times \underline{P}; \\ (\dot{\underline{P}})' - (\underline{P}')' &= (\omega' - \dot{\underline{\kappa}} + \omega \times \underline{\kappa}) \times \underline{P} = 0 \Rightarrow (3.3). \end{aligned}$$

Совершенно аналогично получим формулы для вариаций

$$\begin{aligned} \delta \underline{r}' - \delta \underline{O} \times \underline{r}' &= \delta \underline{\Gamma} - \delta \underline{O} \times \underline{\Gamma} = e_i \delta \Gamma_i \quad (\Gamma_i \equiv \underline{\Gamma} \cdot e_i), \\ \delta \underline{O}' &= \delta \underline{\kappa} - \delta \underline{O} \times \underline{\kappa} = e_i \delta \kappa_i. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Согласно (3.1) $\kappa_i = \Omega_i - \Omega_{i0}$, поэтому можно написать и так:

$$\delta \underline{O}' = e_i \delta \Omega_i = \delta \underline{\Omega} - \underline{\delta O} \times \underline{\Omega}.$$

Это равенство известно как вторая формула Клебша. В некоторых книгах по механике стержней, к сожалению, отсутствует подчеркнутое слагаемое.

1.4. Принцип виртуальной работы для стержня

Поскольку частицы стержня — твердые тела, то воздействие на них описывается силами и моментами. Это видно из общего выражения виртуальной работы для твердого тела (2.2). Положим, что элемент стержня в промежутке $(s, s + ds)$ имеет массу $\rho(s) ds$, тензор инерции $\underline{I}(s, t) ds$ и вектор эксцентриситета $\underline{\varepsilon}(s, t)$. Изменение их во времени определяется уравнениями (2.3).

Внутренние взаимодействия в стержне задаются векторами $\underline{Q}(s, t)$ и $\underline{M}(s, t)$. Это та сила и тот момент, с которыми частица с координатой $s + 0$

действует на частицу с координатой $s=0$. При замене направления отсчета s на противоположное \mathbf{Q} и \mathbf{M} меняют знак. Внешние воздействия также являются силами и моментами, интенсивности их обозначим \mathbf{q} и \mathbf{m} .

Рассмотрим отрезок стержня $s_1 \leq s \leq s_2$. Имея в виду вышеизложенное, и в частности, равенство (2.2), можем так сформулировать принцип (1.1) для этого отрезка:

$$\int_{s_1}^{s_2} \{ [\mathbf{q} - \rho(\dot{\mathbf{v}} + \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}})] \cdot \delta \mathbf{r} + [\mathbf{m} - \rho \boldsymbol{\varepsilon} \times \dot{\mathbf{v}} - (\underline{\underline{\mathbf{I}}} \cdot \boldsymbol{\omega})'] \cdot \delta \mathbf{O} - \delta \Pi \} ds + (\mathbf{Q} \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{M} \cdot \delta \mathbf{O}) \Big|_{s_1}^{s_2} = 0. \quad (4.1)$$

Здесь принято естественное дополнительное предположение, что потенциал внутренних сил представляется интегралом по s с некоторой плотностью Π .

Преобразуем двойную подстановку в (4.1) в интеграл $\int_{s_1}^{s_2} (\dots) ds$. Учитывая далее произвольность промежутка, придем к равенству

$$[\mathbf{Q}' + \mathbf{q} - \rho(\dot{\mathbf{v}} + \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}})] \cdot \delta \mathbf{r} + [\mathbf{M}' + \mathbf{m} - \rho \boldsymbol{\varepsilon} \times \dot{\mathbf{v}} - (\underline{\underline{\mathbf{I}}} \cdot \boldsymbol{\omega})'] \cdot \delta \mathbf{O} + \mathbf{Q} \cdot \delta \mathbf{r}' + \mathbf{M} \cdot \delta \mathbf{O}' = \delta \Pi. \quad (4.2)$$

Это верно при любых $\delta \mathbf{r}$ и $\delta \mathbf{O}$. Как и в п. 1.1, положим сначала $\delta \mathbf{r} = \text{const}$, $\delta \mathbf{O} = 0$ (трансляция). Даже не зная потенциала, можно утверждать, что на «жестких» смещениях $\delta \Pi = 0$. Тогда из (4.2) получим уравнение баланса импульса

$$\mathbf{Q}' + \mathbf{q} = \rho(\dot{\mathbf{v}} + \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}). \quad (4.3)$$

Уравнение баланса момента импульса получается из (4.2) при виртуальном «жестком» повороте ($\delta \mathbf{r} = \delta \mathbf{O} \times \mathbf{r}$, $\delta \mathbf{O} = \text{const}$):

$$\mathbf{M}' + \mathbf{r}' \times \mathbf{Q} + \mathbf{m} = \rho \boldsymbol{\varepsilon} \times \dot{\mathbf{v}} + (\underline{\underline{\mathbf{I}}} \cdot \boldsymbol{\omega})'. \quad (4.4)$$

Эти равенства можно элементарно интерпретировать как уравнения движения твердого тела с массой ρds , тензором инерции $\underline{\underline{\mathbf{I}}} ds$ и эксцентриситетом $\boldsymbol{\varepsilon}$, нагруженного силами $\mathbf{q} ds$, $-\mathbf{Q}(s, t)$, $\mathbf{Q}(s + ds, t)$ и аналогичными моментами; при этом точки сосредоточения воздействий \mathbf{Q} и \mathbf{M} разделены вектором $\mathbf{r}' ds$.

1.5. Соотношения упругости

Равенства (4.3) и (4.4) позволяют далее упростить (4.2); сразу видно, например, что первое слагаемое исчезает. Учитывая также формулы для вариаций (3.4), из (4.2) получим

$$\delta\Pi = \mathbf{Q} \cdot (\delta\mathbf{r}' - \delta\mathbf{O} \times \mathbf{r}') + \mathbf{M} \cdot \delta\mathbf{O}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_i \delta\Gamma_i + \mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_i \delta\kappa_i. \quad (5.1)$$

Уже было отмечено, что векторы $\mathbf{\Gamma}$ и $\mathbf{\kappa}$ характеризуют деформацию. Это следует и из (5.1); при произвольном виртуальном перемещении вариация энергии оказалась линейной формой от $\delta\Gamma_i$ и $\delta\kappa_i$. Поэтому принимаем, что $\Pi = \Pi(\Gamma_i, \kappa_i)$, т. е. является функцией этих шести аргументов, а также справедливы равенства

$$\mathbf{M} = \mathbf{e}_i \partial\Pi / \partial\kappa_i, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{e}_i \partial\Pi / \partial\Gamma_i. \quad (5.2)$$

Это — определяющие уравнения, или соотношения упругости.

Дальнейшая конкретизация (5.2) требует задания упругого потенциала Π . Для трехмерного континуума выбор потенциала является сложным вопросом [6]. В стержне ситуация еще сложнее, поскольку на специфику свойств материала накладываются особенности геометрического строения (форма сечения, кривизна и др.). Но наиболее важный для приложений случай описывается сравнительно просто. Это — стержни из обычных конструкционных материалов, для которых в трехмерной модели достаточно закона Гука. Для таких случаев малой локальной деформации можно ограничиться квадратичным представлением

$$\Pi = Q_{i0}\Gamma_i + M_{i0}\kappa_i + \frac{1}{2} (a_{ij}\kappa_i\kappa_j + b_{ij}\Gamma_i\Gamma_j + 2c_{ij}\kappa_i\Gamma_j). \quad (5.3)$$

Тогда соотношения упругости (5.2) примут вид

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \underline{\underline{\mathbf{P}}} \cdot \mathbf{M}_0 + \underline{\underline{\mathbf{a}}} \cdot \mathbf{\kappa} + \underline{\underline{\mathbf{c}}} \cdot \mathbf{\Gamma}, \quad \mathbf{Q} = \underline{\underline{\mathbf{P}}} \cdot \mathbf{Q}_0 + \underline{\underline{\mathbf{b}}} \cdot \mathbf{\Gamma} + \mathbf{\kappa} \cdot \underline{\underline{\mathbf{c}}}; \\ \mathbf{M}_0 &\equiv M_{i0}\mathbf{e}_{i0}, \quad \mathbf{Q}_0 \equiv Q_{i0}\mathbf{e}_{i0}, \\ \underline{\underline{\mathbf{a}}} &\equiv a_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j, \quad \underline{\underline{\mathbf{b}}} \equiv b_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j, \quad \underline{\underline{\mathbf{c}}} \equiv c_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Векторы \mathbf{Q}_0 и \mathbf{M}_0 являются силами и моментами в отсчетной конфигурации. Обычно в качестве отсчетной берут ненапряженную конфигурацию (хотя это необязательно); тогда

$$\Pi = \frac{1}{2} (\mathbf{\kappa} \cdot \underline{\underline{\mathbf{a}}} \cdot \mathbf{\kappa} + \mathbf{\Gamma} \cdot \underline{\underline{\mathbf{b}}} \cdot \mathbf{\Gamma} + 2\mathbf{\kappa} \cdot \underline{\underline{\mathbf{c}}} \cdot \mathbf{\Gamma}). \quad (5.5)$$

Естественна уверенность, что эта квадратичная форма должна быть положительной (в теории упругости это одно из дополнительных неравенств; оно не связано, в частности, со вторым законом термодинамики). Значит, положительны тензоры $\underline{\underline{a}}$ и $\underline{\underline{b}}$; они к тому же симметричны. Тензор же перекрестных связей $\underline{\underline{c}}$ не обладает ни тем, ни другим свойством. Будем называть $\underline{\underline{a}}$ тензором жесткости на изгиб и кручение, $\underline{\underline{b}}$ — соответственно на растяжение и сдвиг. Заметим еще, что общее число коэффициентов в энергии (5.5) равно 21, как в случае трехмерной среды.

Компоненты тензоров жесткости в базисе e_i зависят, вообще говоря, от s . К тому же, до сих пор у нас не было четких рекомендаций по заданию этих ортов. Может быть предпочтительным следующий вариант. Тензор $\underline{\underline{a}}$, будучи симметричным, имеет при каждом значении s тройку ортогональных главных направлений, вдоль них и направим e_i . Если при этом компоненты $\underline{\underline{a}}$ не будут зависеть от s , то

$$\underline{\underline{a}}' = \Omega \times \underline{\underline{a}} - \underline{\underline{a}} \times \Omega. \quad (5.6)$$

Стержень называют однородным, когда и другие тензоры жесткости удовлетворяют уравнению (5.6). Становится яснее смысл вектора кривизны и кручения Ω : он определяется не столько формой стержня, сколько распределением его упругих характеристик.

1.6. Полная система уравнений

Выше представлена полная система уравнений нелинейной динамики упругих стержней. Как и в других разделах механики деформируемого твердого тела, она состоит из трех частей: геометрических и кинематических соотношений (п. 1.3), уравнений баланса (п. 1.4) и определяющих уравнений (п. 1.5). Эту систему можно записывать по-разному; в частности, вместо тензора поворота можно работать с тройкой углов того или иного вида.

Разным может быть и набор неизвестных в системе уравнений. Вместо основной четверки r , $\underline{\underline{P}}$, Q и M иногда полезно рассматривать более широкие наборы с v , ω , Ω и др. Тензоры $\underline{\underline{a}}$, $\underline{\underline{b}}$, $\underline{\underline{c}}$, $\underline{\underline{I}}$ и вектор ε также являются неизвестными, но они просто выражаются через свои начальные значения: $\underline{\underline{a}} = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{a}}_0 \cdot \underline{\underline{P}}^T$, $\varepsilon = \underline{\underline{P}} \cdot \varepsilon_0$ и т. д. Минимальный же набор неизвестных — это пара r и $\underline{\underline{P}}$.

В постановку задачи входят также начальные и граничные условия. Как обычно в механике, при $t = 0$ задаются координаты и скорости, т. е. r , $\underline{\underline{P}}$,

v и ω . В качестве граничных условий на концах стержня часто задаются силы и моменты: $s = 0: Q = -Q_0, M = -M_0; s = l: Q = Q_l, M = M_l$. Но распространены и другие варианты. Конец может быть закреплён; тогда заданы r и \underline{P} . Бывают заданы различные условия для разных компонент (например, в одном направлении задано перемещение, а в другом — сила). Следует иметь в виду, что граничные условия — это уравнения для частиц на концах стержня. Отметим также, что заданные на границе величины не должны определять работу.

Изложенную выше теорию можно связать с именами Е. и Ф. Коссера, которые в 1909 г. опубликовали значительную часть необходимого набора соотношений. Но чаще встречается термин «теория типа Тимошенко», что не вполне справедливо.

1.7. Классическая модель Кирхгофа-Клебша

В этой модели тождественно выполняется равенство

$$\Gamma = 0 \Rightarrow r' = \underline{P} \cdot r'_0. \quad (7.1)$$

Так будет, если тензор жесткости \underline{b} некоторым образом устремить в бесконечность. По терминологии из теории упругости [6] имеем случай внутренних связей.

Пусть $r'_0 = e_{30} = t_0$ — орт касательной в исходном состоянии. Тогда из (7.1) следует $r' = e_3 = t$. Это тоже орт касательной; значит, s остается дуговой координатой и в деформированном состоянии — стержень нерастяжим. Другим следствием (7.1) является отсутствие поперечного сдвига: направляющий вектор e_3 не уходит с касательной, частицы стержня могут поворачиваться лишь вместе с касательной и вокруг нее.

Чтобы корректно вывести уравнения для рассматриваемого случая, вернемся к принципу виртуальной работы. Сохранив исходную формулировку (4.1), придем к прежнему виду уравнений баланса импульса и момента импульса (4.3), (4.4). Но изменится равенство (5.1): теперь будет

$$\delta\Pi = M \cdot e_i \delta\kappa_i \Rightarrow \Pi = \Pi(\kappa_i), \quad M = e_i \partial\Pi / \partial\kappa_i,$$

Принимая далее аппроксимацию типа (5.3), получим

$$M = \underline{P} \cdot M_0 + \underline{a} \cdot \kappa. \quad (7.2)$$

Подчеркнем, что в этой модели не пишется соотношение упругости для Q . Его место в полной системе занимает условие $\Gamma = 0$.

Рассмотрим первоначально прямой незакрученный стержень, для него $\Omega_0 = 0 \Rightarrow \kappa = \Omega$. Уравнения статики при отсутствии начальных напряжений приобретут вид

$$\mathbf{Q}' + \mathbf{q} = 0, \quad \mathbf{M}' + \mathbf{t} \times \mathbf{Q} + \mathbf{m} = 0, \quad \mathbf{M} = \underline{\underline{a}} \cdot \Omega. \quad (7.3)$$

Учтем также представления производных: $\mathbf{t}' = \Omega \times \mathbf{t}$ и (5.6) для $\underline{\underline{a}}'$. Пришли к той же по форме системе уравнений, которая описывает динамику твердого тела с неподвижной точкой: \mathbf{M} — момент импульса; $\underline{\underline{a}}$ — тензор инерции; Ω — угловая скорость; \mathbf{Q} — сила, приложенная в точке с радиус-вектором \mathbf{t} ; \mathbf{m} — дополнительный внешний момент. Отмеченная аналогия носит имя Кирхгофа. Благодаря ей в статике стержней применяются методы динамики твердого тела.

Пусть, например, стержень нагружен только моментами на концах. В этом случае $\mathbf{Q} = 0$, $\mathbf{M}(s) = \text{const}$ — известен. В динамике твердого тела аналогичный случай был рассмотрен еще Эйлером. Он разбирается в курсах теоретической механики с помощью кинематических уравнений для эйлеровых углов, первых интегралов уравнений движения и т. п., причем такая методика применяется и в случае симметричного тела, когда «тензор инерции» имеет вид $\underline{\underline{a}} = a \underline{\underline{E}} + (a_t - a) \mathbf{t}\mathbf{t}$. Для стержня a_t — это жесткость на кручение, a — жесткость на изгиб. Посмотрим, как просто может быть в этом случае определена форма стержня.

Для вектора Ω из (7.3) имеем

$$\Omega = \underline{\underline{a}}^{-1} \cdot \mathbf{M} = a^{-1} \mathbf{M} + (a_t^{-1} - a^{-1}) \mathbf{t}\mathbf{t} \cdot \mathbf{M}.$$

Но тогда получим

$$\mathbf{t}' = \Omega \times \mathbf{t} = a^{-1} \mathbf{M} \times \mathbf{t} \Rightarrow \mathbf{r}'' = a^{-1} \mathbf{M} \times \mathbf{r}'. \quad (7.4)$$

При заданной константе \mathbf{M} это — линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Интегрируя их, легко установить, что стержень примет форму винтовой линии. Кстати, уравнение (7.4) описывает также движение заряженной частицы в магнитном поле; в однородном поле траектория будет винтовой линией.

Рассмотрим теперь более общий случай нагрузки не только моментами, но и силами. Здесь будет

$$\mathbf{Q}(s) = \text{const}, \quad \mathbf{M}(s) + \mathbf{r} \times \mathbf{Q} = \mathbf{M}_0 = \text{const},$$

и при той же структуре тензора жесткости получим нелинейное уравнение

$$a \mathbf{r}'' = (\mathbf{M}_0 + \mathbf{Q} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{r}'.$$

Подобные векторные уравнения прямого стержня редко встречаются в литературе [5].

1.8. Задача Эйлера

Рассмотрим прямой консольный стержень, сжатый силой Q на свободном конце (рис. 1). В качестве отсчетной возьмем ненапряженную конфигурацию, в которой стержень располагается на оси z декартовой системы x, y, z . Примем, что деформация происходит в плоскости z, x , тогда поворот задается одним углом $\theta(s)$. Пусть тензор жесткости на изгиб и кручение имеет вид $\underline{a} = \sum a_i e_i e_i$, где орты e_i совпадают в отсчетной конфигурации с ортами i, j, k осей x, y, z .

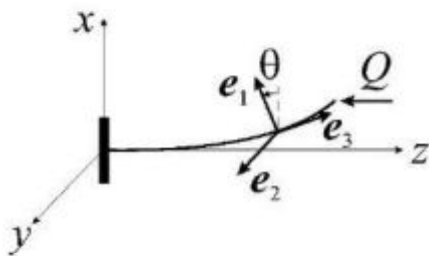


Рис. 1.

Из уравнений баланса сил и моментов получим

$$Q(s) = -Qk, \quad M' = Q \times r'. \quad (8.1)$$

При сделанных предположениях $\Omega = \theta'j$. В теории Кирхгофа-Клебша $r' = e_3 = t$, $M = \underline{a} \cdot \Omega = a_2 \theta' j$, и из (8.1) получим

$$a_2 \theta'' + Q \sin \theta = 0. \quad (8.2)$$

Это уравнение маятника — еще одно проявление аналогии Кирхгофа.

Уравнение вида $\theta'' + f(\theta) = 0$ интегрируется в квадратурах. Сначала находим первый интеграл $\theta'^2 + 2 \int f(\theta) d\theta = \text{const}$, а это уже уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. В задачах динамики обе константы интегрирования сразу находятся из начальных условий. Мы же имеем граничную задачу с условиями $\theta(0) = 0, \theta'(l) = 0$.

Первый интеграл (8.2) таков ($a \equiv a_2$):

$$a \theta'^2 = 2Q (\cos \theta - \cos \theta_l) = 4Q (\sin^2 \theta_l / 2 - \sin^2 \theta / 2). \quad (8.3)$$

Учтено граничное условие при $s = l$ и введено обозначение $\theta_l \equiv \theta(l)$ — эта величина пока неизвестна. Далее примем естественное предположение, что в промежутке $0 \leq s \leq l$ угол θ монотонно возрастает и $\theta_l \leq \pi$. Тогда проходит замена переменной:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\theta}{2} &= k \sin \psi, \quad k \equiv \sin \frac{\theta_l}{2}, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}; \\ \theta' &= \frac{2k \cos \psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} \psi'. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Но из (8.3) имеем $\theta' = 2\sqrt{Q/a} k \cos \psi$; в сочетании с (8.4) это дает

$$\sqrt{\frac{Q}{a}} s = \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} \equiv F(\psi, k). \quad (8.5)$$

Здесь — известная специальная функция — неполный эллиптический интеграл первого рода [4]. Полагая $s = l$, получим уравнение для определения k :

$$\sqrt{\frac{Q}{a}} l = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} \equiv K(k). \quad (8.6)$$

Это полный эллиптический интеграл первого рода.

Поскольку $K \geq \pi/2$, то $Q \geq \pi^2 a / 4l^2 \equiv Q_*$ — рассматриваемое решение существует лишь при таких достаточно больших нагрузках. Если же $Q < Q_*$ то, очевидно, будет лишь тривиальное решение без деформации.

Для определения формы стержня далее понадобятся эллиптические функции Якоби. Обратная по отношению к F функция называется амплитудой: $u = F(\psi, k) \Rightarrow \psi = \operatorname{am} u$. Через нее определяются синус, косинус и дельта амплитуды:

$$\sin \psi \equiv \operatorname{sn} u, \quad \cos \psi \equiv \operatorname{cn} u, \quad \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} \equiv \operatorname{dn} u.$$

Отталкиваясь от (8.5), легко установить следующие правила дифференцирования:

$$\psi' = \operatorname{dn} u, \quad (\operatorname{sn} u)' = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, \quad (\operatorname{cn} u)' = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u, \quad (\operatorname{dn} u)' = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u.$$

Координату x частиц стержня (рис. 1) можно найти так:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\theta}{2} &= k \operatorname{sn} u, \quad \cos \frac{\theta}{2} = \operatorname{dn} u, \quad \sin \theta = -2k (\operatorname{cn} u)'; \\ t_x = x' &= \sqrt{\frac{Q}{a}} \frac{dx}{du} = \sin \theta \Rightarrow x = 2k \sqrt{\frac{a}{Q}} (1 - \operatorname{cn} u). \end{aligned} \quad (8.7)$$

Учтено граничное условие $x(0) = 0$.

Для определения координаты z воспользуемся соотношениями

$$z' = \cos \theta = 2\operatorname{dn}^2 u - 1$$

Проинтегрируем с учетом условия $z(0) = 0$:

$$z = 2\sqrt{\frac{a}{Q}} \int_0^u \operatorname{dn}^2 u \, du - s = 2\sqrt{\frac{a}{Q}} \int_0^\psi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} \, d\psi - s. \quad (8.8)$$

В правой части имеем неполный эллиптический интеграл второго рода $E(\psi, k)$ [4].

Рассмотренное решение достаточно сложно. Но все резко упростится, если предположить малость углов:

$$a\theta'' + Q\theta = 0; \quad \theta(0) = 0, \quad \theta'(l) = 0. \quad (8.9)$$

Это — задача на собственные значения [4]. Нетривиальное решение она имеет лишь при некоторых значениях параметров: $\sqrt{Q/a}l = \pi/2 + n\pi$; $n = 0, 1, 2, \dots$. Очень важно, что минимальное значение Q здесь — это критическая нагрузка Q_* . Подобным вопросам посвящена ниже глава 3.

Это была модель Кирхгофа-Клебша. Теперь рассмотрим модель Коссера. Дополнительные тензоры жесткости примем в простейшем виде: $\underline{\underline{b}} = \sum b_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i$; $\underline{\underline{c}} = 0$. Используя геометрические формулы и соотношения упругости

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{i} \cos \theta - \mathbf{k} \sin \theta, & \mathbf{e}_2 &= \mathbf{j}, & \mathbf{e}_3 &= \mathbf{i} \sin \theta + \mathbf{k} \cos \theta, \\ \boldsymbol{\kappa} &= \theta' \mathbf{j} = \underline{\underline{a}}^{-1} \cdot \mathbf{M}, & \boldsymbol{\Gamma} &= \mathbf{r}' - \mathbf{e}_3 = \underline{\underline{b}}^{-1} \cdot \mathbf{Q}, \end{aligned}$$

придем через (8.1) к уравнению

$$a_2 \theta'' + Q \sin \theta + \frac{1}{2} Q^2 (b_1^{-1} - b_3^{-1}) \sin 2\theta = 0. \quad (8.10)$$

Граничные условия те же, что в классической модели.

Линеаризуя (8.10), придем к задаче вида (8.9), только на месте Q будет стоять $Q + Q^2/P$, $P \equiv (b_1^{-1} - b_3^{-1})^{-1}$. Считая критической ту минимальную по модулю нагрузку, при которой появляется нетривиальное решение, получим квадратное уравнение

$$Q + Q^2/P = Q_*. \quad (8.11)$$

Если $P > 0$, т. е. жесткость на растяжение b_3 больше жесткости на сдвиг b_1 , то уравнение (8.11) наряду с обычным положительным корнем имеет и отрицательный, что соответствует потере устойчивости при растяжении. Парадоксальный результат! Если же $b_3 < b_1$, то неустойчивость возможна лишь при сжатии, причем только в случае $4Q_* \leq |P|$. К этим эффектам мы вернемся в главе 3.

1.9. Уравнения в вариациях

Для начала рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение $\dot{x} = f(x, t)$. Есть некоторое решение $x_0(t)$ и нас интересуют близкие к нему решения вида $x = x_0 + \tilde{x}(t)$ где значения \tilde{x} малы. Отбрасывая малые высшего порядка, получим $\dot{\tilde{x}} = (\partial f / \partial x)_0 \tilde{x}$. Такая процедура называется варьированием; важно, что она дает линейное уравнение. Если, например, f и x_0 не зависят от времени (т. е. имеем положение равновесия), то знак производной $(\partial f / \partial x)_0$ определяет устойчивость или неустойчивость его.

Обратимся к системе уравнений нелинейной динамики стержней. Пусть r, \underline{P}, q, Q и т. д. получают малые приращения одного порядка, которые будем обозначать символом $(\widetilde{\dots})$: $\tilde{r} \equiv u, \tilde{\underline{P}} = \theta \times \underline{P}, \tilde{q}, \tilde{Q}$ и т. д. Варьируя уравнения (4.3), (4.4) и (5.4), получим

$$\begin{aligned} \tilde{Q}' + \tilde{q} &= \rho(u + \theta \times \varepsilon)''', \quad \tilde{M}' + u' \times Q + r' \times \tilde{Q} + \tilde{m} = \\ &= \rho[(\theta \times \varepsilon) \times \dot{v} + \varepsilon \times \ddot{u}] + (\underline{I} \cdot \dot{\theta} + \theta \times \underline{I} \cdot \omega)', \\ \tilde{M} &= \theta \times M + \underline{a} \cdot \theta' + \underline{c} \cdot \gamma, \\ \gamma &\equiv u' - \theta \times r', \quad \tilde{Q} = \theta \times Q + \underline{b} \cdot \gamma + \theta' \cdot \underline{c}, \end{aligned} \quad (9.1)$$

Например, последняя формула выводится так. Из (5.4) следует

$$\tilde{Q} = \tilde{\underline{P}} \cdot Q_0 + \tilde{\underline{b}} \cdot \Gamma + \underline{b} \cdot \tilde{\Gamma} + \tilde{\kappa} \cdot \underline{c} + \kappa \cdot \tilde{\underline{c}}.$$

Используя соотношения типа $\tilde{\underline{b}} = \theta \times \underline{b} - \underline{b} \times \theta$ и формулы (3.4), придем к выражению \tilde{Q} из (9.1).

При варьировании уравнения баланса моментов использовались равенства

$$\tilde{\omega} = \dot{\theta} + \theta \times \omega, \quad (\widetilde{\underline{I} \cdot \omega}) = \underline{I} \cdot \dot{\theta} + \theta \times \underline{I} \cdot \omega.$$

Первое из них выводится так же, как (3.4).

Уравнения (9.1) будут использованы в главе 3 как уравнения первого приближения в теории устойчивости упругих стержней. Они линейны; зависимость их коэффициентов от s и t определяется невозмущенным движением. При малой деформации от ненапряженного состояния покоя будут равны нулю Q, M, v и ω , и (9.1) превратятся в уравнения линейной теории стержней.

1.10. Модель с растяжением без сдвига

Заметный недостаток модели с $\Gamma = 0$ — ее неспособность описать наименее сложный случай растяжения прямого стержня. Поэтому часто рассматривают модель с условием $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$. При этом $\mathbf{\Gamma} = \Gamma \mathbf{e}_3$, $\mathbf{r}' = (1 + \Gamma)\mathbf{e}_3$ (если $\mathbf{r}'_0 = \mathbf{e}_{30}$); видно, что Γ есть относительное удлинение.

Исходное для соотношений упругости равенство (5.1) примет вид

$$\delta\Pi = \mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_i \delta\kappa_i + Q \delta\Gamma \quad (Q \equiv Q_3).$$

Аргументами плотности энергии служат κ_i и Γ , причем $\partial\Pi/\partial\kappa_i = \mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_i$, $\partial\Pi/\partial\Gamma = Q$. Принимая квадратичную аппроксимацию

$$\Pi = M_{i0}\kappa_i + Q_0\Gamma + \frac{1}{2} (a_{ij}\kappa_i\kappa_j + b\Gamma^2 + 2c_i\kappa_i\Gamma),$$

придем к соотношениям упругости

$$\mathbf{M} = \underline{\underline{P}} \cdot \mathbf{M}_0 + \underline{\underline{a}} \cdot \boldsymbol{\kappa} + c\Gamma, \quad Q = Q_0 + b\Gamma + c \cdot \boldsymbol{\kappa}. \quad (10.1)$$

Здесь $\underline{\underline{a}}$ — прежний тензор жесткости на изгиб и кручение, скаляр b — жесткость на растяжение, вектор c характеризует соответствующие перекрестные связи.

Мы имеем уже три модели стержня. Их станет еще больше, если допустить разные варианты инерционных характеристик. Можно попытаться отбросить инерцию вращения ($\underline{\underline{I}} = 0$), можно сохранить инерцию вращения лишь «вокруг касательной» ($\underline{\underline{I}} = I\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3$) и др. Среди этого разнообразия модель Коссера из п. 1.3 – 1.5 выступает как основная, а другие модели являются ее вырожденными случаями. Асимптотические соотношения между различными одномерными моделями мы рассмотрим в рамках линейной теории в главе 2.

1.11. Механика нити

При некоторых условиях модель стержня уступает место модели нити. Не рассматривая соответствующий предельный переход, ограничимся прямым подходом к нити как материальной линии, частицы которой — обычные точки.

Инерционные свойства нити характеризуются лишь плотностью $\rho(s)$. Зависимость радиус-вектора $\mathbf{r}(s, t)$ от своих аргументов определяет движение нити. Внешней распределенной нагрузкой служит $\mathbf{q}(s, t)$. Внутренние взаимодействия задаются силами $\mathbf{Q}(s, t)$.

Для отрезка нити $s_1 \leq s \leq s_2$ принцип виртуальной работы сформулируем в виде

$$\int_{s_1}^{s_2} [(\mathbf{q} - \rho \ddot{\mathbf{r}}) \cdot \delta \mathbf{r} - \delta \Pi] ds + \mathbf{Q} \cdot \delta \mathbf{r} \Big|_{s_1}^{s_2} = 0. \quad (11.1)$$

Благодаря произвольности s_1 и s_2 отсюда имеем

$$(\mathbf{Q}' + \mathbf{q} - \rho \ddot{\mathbf{r}}) \cdot \delta \mathbf{r} + \mathbf{Q} \cdot \delta \mathbf{r}' = \delta \Pi. \quad (11.2)$$

Упругий потенциал Π нечувствителен к «жестким» смещениям: $\delta \Pi = 0$ при $\delta \mathbf{r} = \text{const}$ и $\delta \mathbf{r} = \delta \mathbf{O} \times \mathbf{r}$, $\delta \mathbf{O} = \text{const}$. Этим двум обстоятельствам соответствуют уравнения

$$\mathbf{Q}' + \mathbf{q} = \rho \ddot{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{Q} \times \mathbf{r}' = 0. \quad (11.3)$$

Последнее позволяет представить силу в виде $\mathbf{Q} = Q \mathbf{r}'$. Тогда в (11.2) останется

$$\delta \Pi = Q \mathbf{r}' \cdot \delta \mathbf{r}' = Q \delta C, \quad C \equiv \frac{1}{2} (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' - \mathbf{r}'_0 \cdot \mathbf{r}'_0).$$

Отсюда следует, что $\Pi = \Pi(C)$ и $\partial \Pi / \partial C = Q$.

Как обычно, будем считать s дуговой координатой в отсчетной конфигурации — тогда $|\mathbf{r}'_0| = 1$. Относительное удлинение

$$\varepsilon = |\mathbf{r}'| - 1 = \sqrt{1 + 2C} - 1.$$

Введенная характеристика деформации C напоминает о тензоре деформации Коши-Грина в теории упругости [6].

Как и для стержней, ограничимся квадратичным представлением потенциала: $\Pi = Q_0 C + 1/2 b C^2$. В отличие от теории стержней, отсчетную конфигурацию нити следует брать напряженной — растянутой. Для силы имеем

$$Q = Q_0 + bC \Rightarrow \mathbf{Q} = \left[Q_0 + \frac{1}{2} b (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' - 1) \right] \mathbf{r}'. \quad (11.4)$$

Подставив это в уравнение баланса импульса (11.3), придем к следующему итогу:

$$\left(Q_0 - \frac{1}{2} b \right) \mathbf{r}'' + \frac{1}{2} b (2 \mathbf{r}' \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'' + \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' \mathbf{r}'') + \mathbf{q} = \rho \ddot{\mathbf{r}}. \quad (11.5)$$

Механика нити рассмотрена в книге [8].

1.12. Задачи к главе 1

1.1. В начальном состоянии стержень располагается на оси x декартовой системы x, y, z с ортами $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Радиус-вектор $\mathbf{r}_0(s) = s\mathbf{i}$, тензоры жесткости имеют простейший вид: $\underline{\underline{\mathbf{a}}} = a_1\mathbf{i}\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}\mathbf{k} = \text{const}$, $\underline{\underline{\mathbf{b}}}$ — аналогично, $\underline{\underline{\mathbf{c}}} = 0$. При деформации $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + v(s)\mathbf{j}$, и каждая частица поворачивается вокруг оси z на угол $\theta(s)$. Найти $\mathbf{Q}(s)$ и $\mathbf{M}(s)$ — внутренние силы и моменты.

1.2. Полагая в условиях п. 1.1 прогиб и поворот $v(s) = v_0 s^2$, $\theta(s) = 2v_0 s$, найти распределенные нагрузки \mathbf{q} и \mathbf{m} .

1.3. Используя представление тензора поворота через орт оси поворота $\mathbf{e}(s)$ и угол поворота $\theta(s)$, найти вектор деформации $\boldsymbol{\kappa}$.

1.4. Считая в п. 1.3 $\mathbf{e} = \mathbf{i} \cos \lambda s + \mathbf{j} \sin \lambda s$, $\theta = \theta_0 s$, ($\lambda, \theta_0 = \text{const}$) и принимая дополнительно $\boldsymbol{\Gamma} = 0$, $\mathbf{r}_0(s) = \mathbf{i}s$, определить $\mathbf{r}(s)$.

1.5. Стержень из п.1.1 заделан на конце $s = 0$ и нагружен силой $\mathbf{F} = F\mathbf{j}$ на конце $s = l$. Допуская перемещение и по оси x , поставить краевую задачу для $\theta(s)$.

1.6. Считая в п.1.5 F и θ бесконечно малыми одного порядка, решить линеаризованную задачу.

1.7. Для стержня из п.1.1 рассмотреть вариант без поперечного сдвига: $b_2^{-1} = b_3^{-1} = 0$. При заданных нагрузках $\mathbf{q} = q_x\mathbf{i} + q_y\mathbf{j}$, $\mathbf{m} = m\mathbf{k}$ составить систему уравнений для компонент перемещения $\mathbf{u} \triangleq \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$.

1.8. Составить уравнение для радиус-вектора $\mathbf{r}(s)$ упругой нити при потенциальной энергии $\Pi(\delta) = Q_0\delta + 1/2 B\delta^2$, $\delta \triangleq |\mathbf{r}'| - 1$.

1.9. Из нелинейного уравнения нити (с деформацией $\varepsilon \triangleq 1/2(|\mathbf{r}'|^2 - 1) = \delta + 1/2\delta^2$) вывести классическое уравнение струны.

1.10. Считая перемещение струны малым, получить поправочные члены к классическому уравнению.

Глава 2

Линейная теория

2.1. Уравнения линейной теории

Как было отмечено в п. 1.9, эти уравнения являются частным случаем (9.1), когда варьирование производится от ненапряженного состояния покоя:

$$\begin{aligned} Q' + q &= \rho (\ddot{u} + \ddot{\theta} \times \varepsilon), \quad M' + t \times Q + m = \rho \varepsilon \times \ddot{u} + \underline{I} \cdot \ddot{\theta}, \\ M &= \underline{a} \cdot \theta' + \underline{c} \cdot \gamma, \quad \gamma \equiv u' - \theta \times t, \quad Q = \underline{b} \cdot \gamma + \theta' \cdot \underline{c}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь опущен символ варьирования, так как он теперь не нужен. Величины ε , t , \underline{I} , \underline{a} , \underline{b} и \underline{c} соответствуют отсчетной конфигурации: ε есть то, что выше обозначалось ε_0 и т. д.

Соотношения упругости в (1.1) можно представить и так:

$$\begin{aligned} M &= \partial \Pi / \partial \theta', \quad Q = \partial \Pi / \partial \gamma \\ \Pi &= \frac{1}{2} (\theta' \cdot \underline{a} \cdot \theta' + \gamma \cdot \underline{b} \cdot \gamma + 2\theta' \cdot \underline{c} \cdot \gamma) = \frac{1}{2} (M \cdot \theta' + Q \cdot \gamma). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Эти выражения M и Q как производных Π – частный случай преобразования Лежандра [1]. Обратное преобразование имеет вид

$$\begin{aligned} \theta' &= \partial \hat{\Pi} / \partial M = \underline{A} \cdot M + \underline{C} \cdot Q, \quad \gamma = \partial \hat{\Pi} / \partial Q = \underline{B} \cdot Q + M \cdot \underline{C}, \\ \hat{\Pi} &= M \cdot \theta' + Q \cdot \gamma - \Pi = \\ &= \frac{1}{2} (M \cdot \underline{A} \cdot M + Q \cdot \underline{B} \cdot Q + 2M \cdot \underline{C} \cdot Q) = \Pi. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Дополнительная энергия $\hat{\Pi}$ численно совпадает с Π , как и должно быть в линейной модели. Формулы (1.3) можно получить и простым обращением соотношений упругости (1.1).

Иногда может понадобиться выражение кинетической энергии. В обозначениях п. 1.2 энергия твердого тела

$$K = \frac{1}{2} \int |\dot{\mathbf{R}}|^2 dm = \frac{1}{2} (m|\dot{\mathbf{r}}|^2 + \boldsymbol{\omega} \cdot \underline{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\omega} + 2m\dot{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varepsilon}).$$

Отсюда для кинетической энергии стержня на единицу длины после линеаризации получим

$$K = \frac{1}{2} \left(\rho |\dot{\mathbf{u}}|^2 + \dot{\boldsymbol{\theta}} \cdot \underline{\mathbf{I}} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} + 2\rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} \times \boldsymbol{\varepsilon} \right). \quad (1.4)$$

Помимо общих уравнений (1.1), можно рассматривать различные вырожденные случаи. Часто используется следующий простейший вариант:

$$\mathbf{Q}' + \mathbf{q} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{M}' + \mathbf{t} \times \mathbf{Q} = 0, \quad \mathbf{M} = \underline{\mathbf{a}} \cdot \boldsymbol{\theta}', \quad \mathbf{u}' = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{t}. \quad (1.5)$$

Однако эти уравнения не описывают такие важные явления, как продольные и крутильные колебания прямого стержня. Для исправления этого недостатка необходимо обобщить модель, учитывая растяжимость, инерцию вращения вокруг касательной и распределенный крутящий момент:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}' + \mathbf{q} &= \rho \ddot{\mathbf{u}}, & \mathbf{M}' + \mathbf{t} \times \mathbf{Q} &= \left(I \ddot{\theta}_t - m \right) \mathbf{t}, \\ \mathbf{M} &= \underline{\mathbf{a}} \cdot \boldsymbol{\theta}', & Q_t &= b\varepsilon, & \mathbf{u}' &= \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{t} + \varepsilon \mathbf{t}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь учтено лишь самое необходимое; нет, например, перекрестной связи через вектор \mathbf{c} , которая была в нелинейной модели п. 1.10.

Уравнения (1.6) можно рекомендовать для прямых или малоискривленных стержней. Если же общая искривленность значительна, то может быть достаточно более простых уравнений (1.5). Эти вопросы будут рассмотрены и позднее — с помощью асимптотического анализа. А пока остановимся на наиболее общей системе (1.1).

2.2. Теоремы единственности

Не имея возможности охватить все многообразие краевых условий, ограничимся случаем заданного движения на концах, когда \mathbf{u} и $\boldsymbol{\theta}$ при $s = 0$ и $s = l$ являются заданными функциями времени. Начальные условия задают \mathbf{u} , $\boldsymbol{\theta}$, $\dot{\mathbf{u}}$ и $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ как определенные функции s . Докажем, что при таких условиях уравнения (1.1) имеют не более одного решения.

Как обычно в таких случаях, рассуждаем от противного. Допустим, что есть еще одно решение: $\mathbf{u}_1, \boldsymbol{\theta}_1$ и т. д. Составим разности: $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u} \equiv \mathbf{u}_0, \boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta} \equiv \boldsymbol{\theta}_0$ и т. д. Эти разности будут тоже удовлетворять уравнениям (1.1), но однородным, без \mathbf{q} и \mathbf{m} ; граничные и начальные условия для разностей также однородны. Рассмотрим далее для разностей полную энергию

$$E \equiv \int_0^l (\Pi + K) ds. \quad (2.1)$$

Нетрудно показать, что при отсутствии распределенных нагрузок и неподвижно закрепленных концах будет $\dot{E} = 0$. При нулевых начальных условиях получим $E = 0$. Под интегралом в (2.1) стоит положительная квадратичная форма четырех векторных аргументов: $\boldsymbol{\theta}', \boldsymbol{\gamma}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\boldsymbol{\theta}}$. Все они должны быть равны нулю. Но из равенств $\boldsymbol{\theta}' = 0, \boldsymbol{\gamma} = 0$ вытекает в случае закрепленных концов, что $\boldsymbol{\theta} = 0$ и $\mathbf{u} = 0$. Разности оказались нулями — единственность решения задачи динамики установлена.

Рассмотрим далее задачу статики с распределенными нагрузками \mathbf{q} и \mathbf{m} и заданными на концах перемещениями и поворотами. При доказательстве единственности будем опираться на теорему Клапейрона: в положении равновесия при закрепленных концах выполняется равенство

$$\int_0^l (\mathbf{q} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\theta}) ds = 2 \int_0^l \Pi(\boldsymbol{\theta}', \boldsymbol{\gamma}) ds. \quad (2.2)$$

Доказывается это так. В положении равновесия $\mathbf{q} = -\mathbf{Q}', \mathbf{m} = -\mathbf{M}' - \mathbf{t} \times \mathbf{Q}$; интегрируя слева в (2.2) по частям и учитывая однородные граничные условия, получим под интегралом $\mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\theta}'$ — это и есть 2Π .

Когда нагрузок нет, то из (2.2), учитывая положительность Π , будем иметь $\boldsymbol{\theta}' = 0$ и $\boldsymbol{\gamma} = 0$, что при закрепленных концах влечет за собой $\boldsymbol{\theta} = 0$ и $\mathbf{u} = 0$. Предположив в статике наличие двух решений, получим для разностей именно такую ситуацию, что и означает единственность.

2.3. Теоремы взаимности работ

Для стержня с закрепленными концами рассмотрим две разные задачи статики. В первой — $\mathbf{q}_1, \mathbf{m}_1, \mathbf{u}_1, \boldsymbol{\theta}_1$, во второй — все с индексом (2).

Теорема взаимности выражается равенством

$$\int_0^l (\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{u}_2 + \mathbf{m}_1 \cdot \boldsymbol{\theta}_2) ds = \int_0^l (\mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{u}_1 + \mathbf{m}_2 \cdot \boldsymbol{\theta}_1) ds. \quad (3.1)$$

Для доказательства используем уравнения равновесия так же, как в случае с теоремой Клапейрона. После интегрирования по частям слева под интегралом получим $\mathbf{Q}_1 \cdot \boldsymbol{\gamma}_2 + \mathbf{M}_1 \cdot \boldsymbol{\theta}'_2$, справа — $\mathbf{Q}_2 \cdot \boldsymbol{\gamma}_1 + \mathbf{M}_2 \cdot \boldsymbol{\theta}'_1$. Привлекая соотношения упругости, увидим, что это одно и то же.

Столь просто выводимая теорема взаимности имеет нетривиальные следствия даже в динамике, как это ни удивительно.

Заметим, что (3.1) и (2.2) справедливы и в модели Кирхгофа-Клебша, где $\boldsymbol{\gamma} = 0$.

Рассмотрим теперь обобщение теоремы взаимности, относящееся к уравнениям

$$\mathbf{Q}' + \mathbf{q} = 0, \quad \mathbf{M}' + \mathbf{t} \times \mathbf{Q} + \mathbf{m} = 0, \quad \boldsymbol{\theta}' = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \mathbf{M} + \boldsymbol{\alpha}, \quad \mathbf{u}' = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{t} + \boldsymbol{\beta}. \quad (3.2)$$

Эта система отличается от уравнений Кирхгофа-Клебша невязками $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ — заданными функциями s . Так же, как выше, в случае закрепленных концов нетрудно установить равенство

$$\begin{aligned} \int_0^l (\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{u}_2 + \mathbf{m}_1 \cdot \boldsymbol{\theta}_2 + \boldsymbol{\alpha}_1 \cdot \mathbf{M}_2 + \boldsymbol{\beta}_1 \cdot \mathbf{Q}_2) ds = \\ = \int_0^l (\mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{u}_1 + \dots + \boldsymbol{\beta}_2 \cdot \mathbf{Q}_1) ds. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Такое обобщение может быть полезно в случае начальных деформаций, а также в некоторых теоретических выкладках.

2.4. Теоремы Лагранжа и Кастильяно

Эти теоремы вообще-то относятся к системам с конечным числом степеней свободы. Рассмотрим консервативную¹ систему с набором обобщенных координат q_i и потенциальной энергией $U(q_i)$. Пусть к системе

¹ Консервативной называют систему, в которой все связи стационарны и голономны, а все внешние силы имеют не зависящий от времени потенциал.

приложены дополнительные внешние обобщенные силы Q_i^e . Потенциалу U соответствуют обобщенные силы $-\partial U/\partial q_i$. Поскольку в положении равновесия суммарные обобщенные силы равны нулю, то

$$Q_i^e = \partial U/\partial q_i. \quad (4.1)$$

Это и есть теорема Лагранжа. Она следует и из принципа виртуальных работ в форме $\sum Q_i^e \delta q_i = \delta U$.

Равенства (4.1) определяют Q_i^e как функции q_i . Обратные функции можно представить преобразованием Лежандра

$$q_i = \partial \hat{U}/\partial Q_i^e, \quad \hat{U} = \sum Q_i^e q_i - U(q_i). \quad (4.2)$$

В этом и состоит теорема Кастильяно. \hat{U} называется дополнительной энергией. Для линейной системы U — квадратичная форма. По теореме Эйлера об однородных функциях $U = 1/2 \sum q_i \partial U/\partial q_i$ (теорема Клапейрона!), так что получаем $\hat{U} = U$.

Но какое отношение эти теоремы имеют к стержням — континуальным системам? Пусть внешние нагрузки на стержень сосредоточены в узлах:

$$\mathbf{q}(s) = \sum \overset{\circ}{\mathbf{q}}_i \delta(s - s_i), \quad \mathbf{m}(s) = \sum \overset{\circ}{\mathbf{m}}_i \delta(s - s_i)$$

($\delta(s)$ — дельта-функция). Обозначим $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}(s_i)$, $\boldsymbol{\theta}_i = \boldsymbol{\theta}(s_i)$ и будем рассматривать эти равенства как граничные условия для пролетов — отрезков между соседними узлами. Поскольку внутри пролетов нет нагрузок, то \mathbf{u}_i и $\boldsymbol{\theta}_i$ полностью определяют \mathbf{u} и $\boldsymbol{\theta}$ везде. Набор \mathbf{u}_i и $\boldsymbol{\theta}_i$ может выступать в роли обобщенных координат стержня и даже системы стержней, ведь наши рассуждения годятся и для этого случая. Теорема Лагранжа предстанет в виде

$$\overset{\circ}{\mathbf{q}}_i = \partial U/\partial \mathbf{u}_i, \quad \overset{\circ}{\mathbf{m}}_i = \partial U/\partial \boldsymbol{\theta}_i. \quad (4.3)$$

Изложенная процедура известна как метод перемещений. U — квадратичная форма от узловых перемещений и поворотов; ее матрица обычно называется глобальной матрицей жесткости (элементы матрицы — тензоры второго ранга). Поскольку энергия стержневой системы — сумма энергий отдельных пролетов, то для построения U достаточно иметь ее выражение для одного типичного пролета. Алгоритмической стороне расчетов стержневых систем посвящено много книг.

Теорема Кастильяно как преобразование Лежандра по отношению к (4.3) выразится равенствами

$$\mathbf{u}_i = \partial \hat{U}/\partial \overset{\circ}{\mathbf{q}}_i, \quad \boldsymbol{\theta}_i = \partial \hat{U}/\partial \overset{\circ}{\mathbf{m}}_i. \quad (4.4)$$

Чтобы воспользоваться этими формулами, надо найти \hat{U} как функцию внешних нагрузок. Для статически определимых систем это можно сделать.

Вернемся к теореме Кастильяно в исходной форме (4.2). Поскольку дополнительная энергия имеет вид

$$\hat{U} = \frac{1}{2} \int (M \cdot \underline{A} \cdot M + Q \cdot \underline{B} \cdot Q + 2M \cdot \underline{C} \cdot Q) ds, \quad (4.5)$$

то обобщенные перемещения будут такими:

$$q_i = \int \left[M_i \cdot (\underline{A} \cdot M + \underline{C} \cdot Q) + (Q \cdot \underline{B} + M \cdot \underline{C}) \cdot Q_i \right] ds, \\ M_i \equiv \partial M / \partial Q_i^e, \quad Q_i \equiv \partial Q / \partial Q_i^e. \quad (4.6)$$

Это — интеграл Мора. M_i и Q_i — моменты и силы, которые возникают при соответствующей единичной обобщенной нагрузке ($Q_k^e = \delta_{ik}$).

Интеграл (4.6) можно найти во всех курсах сопротивления материалов, но без перекрестных членов.

2.5. Принцип минимума потенциальной энергии системы

Принцип виртуальной работы, положенный выше в основу механики стержней, — это дифференциальный вариационный принцип. Теперь обратимся к традиционным принципам с функционалами [12] и начнем с принципа Лагранжа.

Рассмотрим равновесие стержня с нагрузками q и m при заданных перемещениях и поворотах концов: $u(0) = u_0$, $\theta(0) = \theta_0$, $u(l) = u_l$, $\theta(l) = \theta_l$. Потенциальной энергией системы назовем функционал

$$\mathcal{E}(u, \theta) = \int_0^l \left[\Pi(\theta', \gamma) - q \cdot u - m \cdot \theta \right] ds, \quad (5.1)$$

причем будем рассматривать его лишь на таких u и θ , которые удовлетворяют заданным геометрическим краевым условиям.

Покажем, что функционал \mathcal{E} на истинных \mathbf{u} и $\boldsymbol{\theta}$ имеет минимум. Возьмем какие-нибудь другие допустимые \mathbf{u}_1 и $\boldsymbol{\theta}_1$ и рассмотрим разность

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{u}_1, \boldsymbol{\theta}_1) - \mathcal{E}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}) &= \int_0^l \left[\Pi(\boldsymbol{\theta}'_1, \gamma_1) - \Pi(\boldsymbol{\theta}', \gamma) + \mathbf{Q}' \cdot (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}) + \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{M}' + \mathbf{t} \times \mathbf{Q}) \cdot (\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}) \right] ds = \int_0^l \Pi(\boldsymbol{\theta}'_1 - \boldsymbol{\theta}', \gamma_1 - \gamma) ds > 0. \end{aligned}$$

В этом выводе участвуют истинные \mathbf{Q} и \mathbf{M} : $-\mathbf{q} = \mathbf{Q}'$, $-\mathbf{m} = \mathbf{M}' + \mathbf{t} \times \mathbf{Q}$; при интегрировании по частям учтены краевые условия.

Традиционный способ изучения функционала — варьирование:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E} &= \int_0^l (\mathbf{M} \cdot \delta \boldsymbol{\theta}' + \mathbf{Q} \cdot (\delta \mathbf{u}' - \delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{t}) - \mathbf{q} \cdot \delta \mathbf{u} - \mathbf{m} \cdot \delta \boldsymbol{\theta}) ds = \\ &= - \int_0^l \left[(\mathbf{Q}' + \mathbf{q}) \cdot \delta \mathbf{u} + (\mathbf{M}' + \mathbf{t} \times \mathbf{Q} + \mathbf{m}) \cdot \delta \boldsymbol{\theta} \right] ds. \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{M} и \mathbf{Q} — просто производные Π по $\boldsymbol{\theta}'$ и γ . Видим, что на истинных \mathbf{u} и $\boldsymbol{\theta}$

$$\delta \mathcal{E} = 0. \quad (5.2)$$

Это, в сущности, принцип виртуальной работы в линейной теории. Наоборот, из вариационного уравнения (5.2) благодаря произвольности $\delta \mathbf{u}$ и $\delta \boldsymbol{\theta}$ вытекают уравнения в перемещениях и поворотах.

Минимальность функционала можно установить и с помощью повторного варьирования:

$$\delta^2 \mathcal{E} = \int_0^l (\delta \mathbf{M} \cdot \delta \boldsymbol{\theta}' + \delta \mathbf{Q} \cdot \delta \gamma) ds = 2 \int_0^l \Pi(\delta \boldsymbol{\theta}', \delta \gamma) ds \geq 0.$$

Рассмотрен случай с заданными \mathbf{u} и $\boldsymbol{\theta}$ на обоих концах. Если же они заданы лишь при $s = 0$, а конец $s = l$ свободен и нагружен силой \mathbf{Q}_l и моментом \mathbf{M}_l , то вид функционала изменится:

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}) = \int_0^l \left[\Pi(\boldsymbol{\theta}', \gamma) - \mathbf{q} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\theta} \right] ds - \mathbf{Q}_l \cdot \mathbf{u}(l) - \mathbf{M}_l \cdot \boldsymbol{\theta}(l).$$

Это выражение рассматривается лишь при тех \mathbf{u} и $\boldsymbol{\theta}$, которые удовлетворяют геометрическим условиям при $s = 0$. Условия же при $s = l$ ($\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_l$, $\mathbf{M} = \mathbf{M}_l$) будут следствиями вариационного принципа.

Представленная формулировка принципа справедлива и в классической модели, где $\Pi = \Pi(\boldsymbol{\theta}')$ и $\gamma = 0$. Однако при этом имеем вариационную задачу на условный экстремум — между функциями \mathbf{u} и $\boldsymbol{\theta}$ есть связь. Можно вводить множители Лагранжа $\boldsymbol{\lambda}(s)$ добавляя к Π слагаемое $\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\gamma}$. Другая возможность — штрафные добавки в функционал; можно к $\Pi(\boldsymbol{\theta}')$ прибавить $1/2 \boldsymbol{\gamma} \cdot \underline{\mathbf{b}} \cdot \boldsymbol{\gamma}$ с достаточно большим $\underline{\mathbf{b}}$. Но ведь это — энергия поперечного сдвига!

Отметим, что условие $\boldsymbol{\gamma} = 0$ не создает проблем в случае изгиба прямого стержня. При этом $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_\perp = \mathbf{t} \times \mathbf{u}'$ ($\mathbf{u} = \mathbf{u}_\perp$ — вектор прогиба) и функционал (5.1) примет вид

$$\mathfrak{E}(\mathbf{u}) = \int_0^l \left[\frac{1}{2} \mathbf{u}'' \cdot (-\mathbf{t} \times \underline{\mathbf{a}} \times \mathbf{t}) \cdot \mathbf{u}'' - \mathbf{q} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{m} \times \mathbf{t} \cdot \mathbf{u}' \right] ds,$$

где \mathbf{u} и \mathbf{u}' должны принимать заданные значения на концах. Здесь $\mathbf{u}(s)$ должна иметь непрерывную производную, в то время как в (5.1) достаточно непрерывности \mathbf{u} и $\boldsymbol{\theta}$.

2.6. Принцип минимума дополнительной работы

Функционал дополнительной работы в случае заданных на концах \mathbf{u} и $\boldsymbol{\theta}$ имеет вид

$$A(\mathbf{Q}, \mathbf{M}) = \int_0^l \widehat{\Pi}(\mathbf{M}, \mathbf{Q}) ds - (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\theta}) \Big|_0^l. \quad (6.1)$$

Он рассматривается лишь для статически возможных \mathbf{Q} и \mathbf{M} — таких, которые удовлетворяют уравнениям баланса сил и моментов.

На истинных \mathbf{Q} и \mathbf{M} функционал имеет минимум. В самом деле, возьмем какую-либо другую статически возможную пару \mathbf{Q}_1 , \mathbf{M}_1 и рассмотрим разность

$$\begin{aligned}
& A(\mathbf{Q}_1, \mathbf{M}_1) - A(\mathbf{Q}, \mathbf{M}) - \int_0^l \left[\hat{\Pi}(\mathbf{M}_1, \mathbf{Q}_1) - \hat{\Pi}(\mathbf{M}, \mathbf{Q}) - \right. \\
& \left. - (\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q})' \cdot \mathbf{u} - (\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{u}' - (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M})' \cdot \boldsymbol{\theta} - (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}) \cdot \boldsymbol{\theta}' \right] ds = \\
& = \int_0^l \hat{\Pi}(\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}, \mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}) ds > 0.
\end{aligned}$$

Мы ввели истинные \mathbf{u} и $\boldsymbol{\theta}$ и потому смогли преобразовать двойную подстановку в интеграл. Учтено еще, что $\mathbf{Q}'_1 = \mathbf{Q}'$ и $\mathbf{M}'_1 - \mathbf{M}' = (\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}) \times \mathbf{t}$.

Рассмотрим вариацию

$$\begin{aligned}
\delta A - \int_0^l \left(\frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \mathbf{M}} \cdot \delta \mathbf{M} + \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \mathbf{Q}} \cdot \delta \mathbf{Q} - \delta \mathbf{Q}' \cdot \mathbf{u} - \delta \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}' - \delta \mathbf{M}' \cdot \boldsymbol{\theta} - \delta \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\theta}' \right) ds = \\
= \int_0^l \left[\left(\frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \mathbf{M}} - \boldsymbol{\theta}' \right) \cdot \delta \mathbf{M} + \left(\frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \mathbf{Q}} - \boldsymbol{\gamma} \right) \cdot \delta \mathbf{Q} \right] ds.
\end{aligned}$$

Видим, что вариационное условие $\delta A = 0$ эквивалентно соотношениям упругости.

Однако необходимо заметить следующее. Статически возможные состояния допускают очевидное представление

$$\mathbf{Q}(s) = \mathbf{Q}_* - \int_0^s \mathbf{q} ds, \quad \mathbf{M}(s) = \mathbf{M}_* + \mathbf{Q}(s) \times \mathbf{r} - \int_0^s (\mathbf{r} \times \mathbf{q} + \mathbf{m}) ds \quad (6.2)$$

с двумя произвольными векторными константами \mathbf{Q}_* и \mathbf{M}_* . Значит, дополнительная работа $A(\mathbf{Q}, \mathbf{M})$ оказывается функцией (!) от \mathbf{Q}_* , \mathbf{M}_* и минимизация сводится к алгебраическим уравнениям $\partial A / \partial \mathbf{Q}_* = 0$, $\partial A / \partial \mathbf{M}_* = 0$, что можно рассматривать как модификацию теоремы Кастильяно.

2.7. Принцип типа Рейсснера

Функционал типа Рейсснера содержит в качестве аргументов \mathbf{u} , $\boldsymbol{\theta}$, \mathbf{Q} и \mathbf{M} . Никаким граничным условиям они при этом удовлетворять не обязаны, вариационный принцип «позаботится о них». Если при $s = l$ заданы нагрузки \mathbf{Q}_l и \mathbf{M}_l , а при $s = 0$ — перемещения и повороты \mathbf{u}_0 и $\boldsymbol{\theta}_0$, то функционал будет таким:

$$R(\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{Q}, \mathbf{M}) = \int_0^l \left[\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\theta}' + \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\gamma} - \hat{\Pi}(\mathbf{M}, \mathbf{Q}) - \mathbf{q} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\theta} \right] ds - \\ - \mathbf{Q}_l \cdot \mathbf{u}(l) - \mathbf{M}_l \cdot \boldsymbol{\theta}(l) + \mathbf{Q}(0) \cdot [\mathbf{u}(0) - \mathbf{u}_0] + \mathbf{M}(0) \cdot [\boldsymbol{\theta}(0) - \boldsymbol{\theta}_0]. \quad (7.1)$$

Вариация функционала после интегрирования по частям

$$\delta R = \int_0^l \left[-(\mathbf{Q}' + \mathbf{q}) \cdot \delta \mathbf{u} - (\mathbf{M}' + \mathbf{t} \times \mathbf{Q} + \mathbf{m}) \cdot \delta \boldsymbol{\theta} + \right. \\ \left. + \left(\boldsymbol{\theta}' - \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \mathbf{M}} \right) \cdot \delta \mathbf{M} + \left(\boldsymbol{\gamma} - \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \mathbf{Q}} \right) \cdot \delta \mathbf{Q} \right] ds + [\mathbf{Q}(l) - \mathbf{Q}_l] \cdot \delta \mathbf{u}(l) + \\ + [\mathbf{M}(l) - \mathbf{M}_l] \cdot \delta \boldsymbol{\theta}(l) + [\mathbf{u}(0) - \mathbf{u}_0] \cdot \delta \mathbf{Q}(0) + [\boldsymbol{\theta}(0) - \boldsymbol{\theta}_0] \cdot \delta \mathbf{M}(0).$$

На истинном решении $\delta R = 0$. Наоборот, из этого вариационного уравнения вытекает вся исходная постановка задачи.

Чуждым свойствам смешанного принципа типа Рейсснера противостоит один недостаток: здесь нет минимума. При построении приближенных решений на основе вариационного принципа этот недостаток может все испортить.

2.8. Введение в асимптотический анализ

Это математическое отступление имеет большое значение не только для механики стержней. Рассмотрим задачу

$$C\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad C = C_0 + \lambda C_1 + \lambda^2 C_2 + \dots, \quad \lambda \rightarrow 0. \quad (8.1)$$

Хотелось бы говорить о линейном операторе C , действующем в некотором пространстве с элементами \mathbf{u} , но мы будем считать C матрицей, а \mathbf{u} — столбцами.

Сначала — об общих конструктивных условиях разрешимости системы (8.1). Условие одно: правая часть должна быть ортогональна всем линейно независимым решениям сопряженной однородной системы:

$$\psi_k^T f = 0, \quad C^T \psi_k = 0. \quad (8.2)$$

Если матрица C невырожденная, т. е. $\det C \neq 0$, то $\psi = 0$ и условие разрешимости (8.2) выполнено при любой правой части f . В случае же $\det C = 0$ решения существуют лишь при таких f , которые удовлетворяют (8.2), причем этих решений бесконечно много:

$$u = u_* + \sum a_k \varphi_k, \quad C u_* = f, \quad C \varphi_k = 0. \quad (8.3)$$

Здесь u_* — какое-либо частное решение; φ_k — линейно независимые решения однородной системы; a_k — произвольные числа.

Приступим к асимптотическому анализу системы (8.1). Возможны три случая, рассмотрим их.

1°. $\det C_0 \neq 0$. Этот случай характеризуется тем, что однородная задача $C_0 u = 0$ имеет лишь тривиальное решение. А для (8.1) будем иметь

$$u = u_0 + \lambda u_1 + \dots, \quad C_0 u_0 = f, \quad C_0 u_1 = -C_1 u_0, \dots \quad (8.4)$$

Этот случай не слишком интересен: главный член решения u_0 определяется на первом же шаге, в матрице C достаточно отбросить формально малые члены. Впрочем, поправочный член u_1 иногда бывает нужен, если он содержит нечто принципиальное, чего нет в u_0 .

2°. $\det C_0 = 0$, система $C_0 u = f$ неразрешима. Решение задачи (8.1) может быть таким:

$$u = \lambda^{-1} u_0 + u_1 + \lambda u_2 + \dots, \quad C_0 u_0 = 0, \quad C_0 u_1 = -C_1 u_0 + f, \\ u_0 = \sum a_k \varphi_k, \quad C_0 \varphi_k = 0, \quad \psi_k^T (-C_1 u_0 + f) = 0, \quad C_0^T \psi_k = 0. \quad (8.5)$$

3°. $\det C_0 = 0$, система $C_0 u = f$ разрешима:

$$u = u_0 + \lambda u_1 + \dots, \quad u_0 = u_* + \sum a_k \varphi_k, \dots$$

Здесь также имеем на первом шаге неопределенные числа a_k ; условия разрешимости на втором шаге дадут систему для их определения.

В механике стержней встречаются все три случая. Как мы далее увидим, одномерные модели стержней возникают из трехмерной модели посредством асимптотического расщепления, которое мы только что наблюдали в случаях 2 и 3.

Изложенное — лишь малая часть множества асимптотических методов. Универсальных асимптотических методов нет; но удается изобретать все более общие и мощные методы [10].

2.9. Интегрирование уравнений статики и их асимптотический анализ

Уравнения линейной статики интегрируются в квадратурах. Уже получили Q и M в виде квадратур (6.2). Интегрируя далее соотношения упругости, будем иметь

$$\begin{aligned} \theta(s) &= \theta_* + \int_0^s (\underline{\underline{A}} \cdot M + \underline{\underline{C}} \cdot Q) ds, \\ u(s) &= u_* + \theta(s) \times r + \int_0^s \left[(r \times \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{C}}^T) \cdot M + (r \times \underline{\underline{C}} + \underline{\underline{B}}) \cdot Q \right] ds. \end{aligned} \quad (9.1)$$

Осталось найти векторные константы Q_* , M_* , θ_* и u_* . Если в какой-либо точке известны Q и M , то можно сразу найти Q_* и M_* — это статически определяемая задача. Более сложен случай, когда на концах заданы u и θ . При этом будут известны значения интегралов

$$\begin{aligned} \int_0^l (\underline{\underline{A}} \cdot M + \underline{\underline{C}} \cdot Q) ds &= a, \\ \int_0^l \left[(r \times \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{C}}^T) \cdot M + (r \times \underline{\underline{C}} + \underline{\underline{B}}) \cdot Q \right] ds &= b. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Если концы закреплены, то a и b равны нулю. Так будет и в случае замкнутого стержня. Подставив (6.2) в (9.2), получим алгебраическую систему

для Q_* и M_*

$$\begin{aligned}\underline{\lambda} \cdot M_* + \underline{\nu} \cdot Q_* &= \alpha, & M_* \cdot \underline{\nu} + \underline{\mu} \cdot Q_* &= \beta, \\ \underline{\lambda} &\equiv \int_0^l \underline{A} ds, & \underline{\nu} &\equiv \int_0^l (\underline{C} - \underline{A} \times \mathbf{r}) ds, \\ \underline{\mu} &\equiv \int_0^l \left[\underline{B} - \mathbf{r} \times \underline{A} \times \mathbf{r} + 2(\mathbf{r} \times \underline{C})^S \right] ds.\end{aligned}\quad (9.3)$$

Здесь значок $(\dots)^S$ — символ симметрирования: $\underline{a}^S \equiv 1/2(\underline{a} + \underline{a}^T)$.

Правые части имеют вид $\alpha = \mathbf{a} + \dots$, $\beta = \mathbf{b} + \dots$, где невыписанные члены — линейные функционалы от \mathbf{q} и \mathbf{m} .

Опираясь на положительность $\widehat{\Pi}(M, Q)$, можно доказать следующие утверждения:

1°. Тензоры $\underline{\lambda}$ и $\underline{\mu}$ положительны и потому обратимы.

2°. Система (9.3) однозначно разрешима.

Для доказательства положим в (4.5) $Q = Q_*$, $M = M_* + Q_* \times \mathbf{r}$; получим неравенство

$$2\widehat{U} = M_* \cdot \underline{\lambda} \cdot M_* + Q_* \cdot \underline{\mu} \cdot Q_* + 2M_* \cdot \underline{\nu} \cdot Q_* \geq 0. \quad (9.4)$$

Равенство нулю будет лишь при нулевых Q_* и M_* — видно, что 1° справедливо. Переходя к 2°, отметим, что оно равносильно следующему: система (9.3) при $\alpha = 0$ и $\beta = 0$ имеет лишь тривиальное решение. Но последнее вытекает из (9.4).

Решение (9.3) таково:

$$\begin{aligned}M_* &= \underline{\lambda}^{-1} \cdot (\alpha - \underline{\nu} \cdot Q_*), & Q_* &= \underline{\Lambda}^{-1} \cdot (\beta - \underline{\nu}^T \cdot \underline{\lambda}^{-1} \cdot \alpha), \\ \underline{\Lambda} &\equiv \underline{\mu} - \underline{\nu}^T \cdot \underline{\lambda}^{-1} \cdot \underline{\nu}.\end{aligned}\quad (9.5)$$

По доказанному $\det \underline{\Lambda} \neq 0$. Рассмотрим подробнее этот тензор. Положим $\underline{C} = h\widehat{\underline{C}}$, $\underline{B} = h^2\widehat{\underline{B}}$, где h имеет размерность длины; тогда тензоры \underline{A} , $\widehat{\underline{B}}$ и $\widehat{\underline{C}}$ будут одной размерности и даже одного порядка при надлежащем

выборе h . Из (9.3) и (9.5) получим

$$\begin{aligned} \underline{\nu} &= \underline{\nu}_0 + h\underline{\nu}_1, \quad \underline{\mu} = \underline{\mu}_0 + h\underline{\mu}_1 + h^2\underline{\mu}_2, \quad \underline{\Lambda} = \underline{\Lambda}_0 + h\underline{\Lambda}_1 + h^2(\underline{\Lambda}_2 + \underline{\mu}_2); \\ \underline{\nu}_0 &\equiv - \int \underline{A} \times \mathbf{r} \, ds, \quad \underline{\nu}_1 \equiv \int \widehat{C} \, ds, \quad \underline{\mu}_0 \equiv - \int \mathbf{r} \times \underline{A} \times \mathbf{r} \, ds, \\ \underline{\mu}_1 &\equiv 2 \int (\mathbf{r} \times \widehat{C})^S \, ds, \quad \underline{\mu}_2 \equiv \int \widehat{B} \, ds; \quad \underline{\Lambda}_0 \equiv \underline{\mu}_0 - \underline{\nu}_0^T \cdot \underline{\lambda}^{-1} \cdot \underline{\nu}_0, \\ \underline{\Lambda}_1 &\equiv \underline{\mu}_1 - 2(\underline{\nu}_0^T \cdot \underline{\lambda}^{-1} \cdot \underline{\nu}_1)^S, \quad \underline{\Lambda}_2 \equiv \underline{\nu}_1^T \cdot \underline{\lambda}^{-1} \cdot \underline{\nu}_1. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Обычно для стержней величина h мала. Нехорошо говорить о малости размерной величины, но в данном случае это допустимо: введение соответствующего безразмерного параметра (относительной толщины) не даст ничего нового.

Как показано в п. 2.8, при возмущении матрицы алгебраической системы все зависит от того, вырождена предельная матрица или нет. Если нет, достаточно решения без формально малых членов. Если же да, то надо начинать разложение с отрицательных степеней, рассматривать условия разрешимости и т. д. Поэтому сосредоточим внимание на тензоре $\underline{\Lambda}_0$. Он играет роль $\underline{\Lambda}$ в модели Кирхгофа-Клебша. Справедливо утверждение:

3°. Условие $\det \underline{\Lambda}_0 \neq 0$ может быть нарушено лишь для прямого стержня.

Доказательство таково. Если $\det \underline{\Lambda}_0 = 0$, то система $\underline{\lambda} \cdot M_* + \underline{\nu}_0 \cdot Q_* = 0$, $M_* \cdot \underline{\nu}_0 + \underline{\mu}_0 \cdot Q_* = 0$ имеет нетривиальное решение. При этом

$$M_* \cdot \underline{\lambda} \cdot M_* + Q_* \cdot \underline{\mu}_0 \cdot Q_* + 2M_* \cdot \underline{\nu}_0 \cdot Q_* = 0,$$

что равносильно $\int M \cdot \underline{A} \cdot M \, ds = 0$; $M = M_* + Q_* \times \mathbf{r}$. Но \underline{A} положителен, поэтому должно быть $M(s) = 0$. Дифференцируя это тождество, получим $Q_* \times \mathbf{r}' = 0$, что возможно лишь для прямого стержня.

Доказанное означает, что при малой толщине модель Коссера не переходит в модель Кирхгофа-Клебша разве лишь в случае прямого стержня. Понятно, что при $\gamma = 0$ с прямым стержнем могут быть проблемы — нельзя задавать различными продольные перемещения концов. Но важно, что случай прямого стержня оказался единственным.

2.10. Задача о полой арке

В качестве иллюстрации к вышеизложенному рассмотрим равновесие полой круговой арки, нагруженной постоянным давлением (рис. 2).

Здесь — плоская задача; векторы \mathbf{Q} и \mathbf{u} лежат в плоскости чертежа, а векторы \mathbf{M} и $\boldsymbol{\theta}$ ей перпендикулярны: $\mathbf{M} = M\mathbf{k}$, $\boldsymbol{\theta} = \theta\mathbf{k}$, где \mathbf{k} — орт третьей оси.

Уравнения баланса сил и моментов здесь такие: $\mathbf{Q}' = -p\mathbf{n}$, $M' = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{Q}$ (\mathbf{n} — орт нормали). Учитывая соотношения $\mathbf{r}' = \mathbf{t}$, $\mathbf{t}' = k\mathbf{n}$, $\mathbf{n}' = -k\mathbf{t}$, $\mathbf{n} = -k\mathbf{r}$ (k — кривизна), получим интеграл $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_* - pk^{-1}\mathbf{t}$. В середине арки (при $s = l$) благодаря симметрии имеем $Q_y(l) = 0$, откуда следует $\mathbf{Q}_* = Q_*\mathbf{i}$. Тогда из уравнения моментов, учитывая равенство $n_x = -y'$, получим $M = M_* + Q_*y$.

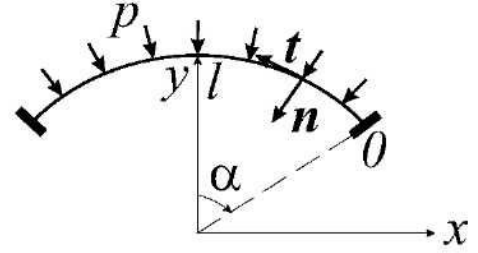


Рис. 2.

Для определения констант Q_* и M_* необходимо привлечь соотношения упругости; примем их в виде $\theta' = AM + C\mathbf{t} \cdot \mathbf{Q}$, $\boldsymbol{\gamma} = \underline{\underline{B}} \cdot \mathbf{Q} + MC\mathbf{t}$, что соответствует тензору перекрестных связей $\underline{\underline{C}} = Ck\mathbf{t}$, характерному для криволинейных стержней. Положим также $\underline{\underline{B}} = B_t\mathbf{t}\mathbf{t} + B_n\mathbf{n}\mathbf{n}$.

Учитывая условия $\theta(0) = \theta(l) = 0$, $\mathbf{u}(0) = 0$, $u_x(l) = 0$, получим

$$\int_0^l \theta' ds = \int_0^l [A(M_* + Q_*y) + C(Q_*t_x - pk^{-1})] ds = 0,$$

$$\int_0^l \mathbf{u}' ds = \int_0^l (\mathbf{r} \times \mathbf{k}\theta' + \boldsymbol{\gamma}) ds = u_y(l)\mathbf{j}.$$

Спроектировав второе уравнение на ось x и взяв интегралы, придем к следующей алгебраической системе:

$$\begin{aligned} M_*\alpha A + Q_* \sin \alpha (Ak^{-1} - C) &= Cpl, \\ M_* \sin \alpha (Ak^{-1} - C) + Q_* \left[k^{-1} (Ak^{-1} - C) \left(\frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{4} \sin 2\alpha \right) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} (B_t + B_n) + \frac{1}{4} (B_t - B_n) \sin 2\alpha \right] = pk^{-1} \sin \alpha (Ck^{-1} - B_t). \end{aligned} \quad (10.1)$$

Заметим, что в классической модели C , B_t и B_n — нули, и тогда (10.1) дает $M_* = 0$, $Q_* = 0$. Но что будет при $\alpha \rightarrow 0$, $l = \text{const}$, когда арка переходит в обычную прямую балку? Должен ведь получаться элементарный изгиб с прогибами, моментами, перерезывающими силами и без продольных сил. В классике же все наоборот: безмоментное недеформированное

состояние с колоссальными продольными силами. Ясно, что для обеспечения предельного перехода к балке необходимо удержать γ . При этом в самом предельном случае γ уже не нужен, он даст лишь малые поправки в балочное решение.

2.11. Колебания стержней

В общей механике анализ колебательных систем начинается с главных или нормальных колебаний — таких свободных колебаний, при которых все обобщенные координаты меняются по закону $q_i(t) = \overset{\circ}{q}_i \sin \omega t$. Полагая в (1.1) $\mathbf{q} = 0$, $\mathbf{m} = 0$, $\mathbf{Q}(s, t) = \overset{\circ}{\mathbf{Q}}(s) \sin \omega t$, $\mathbf{u}(s, t) = \overset{\circ}{\mathbf{u}}(s) \sin \omega t$ и т. д., получим

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\mathbf{Q}}' + \omega^2 \rho \left(\overset{\circ}{\mathbf{u}} + \overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}} \times \boldsymbol{\varepsilon} \right) &= 0, \quad \overset{\circ}{\mathbf{M}}' + \mathbf{t} \times \overset{\circ}{\mathbf{Q}} + \omega^2 \left(\rho \boldsymbol{\varepsilon} \times \overset{\circ}{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{I}} \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}} \right) = 0, \\ \overset{\circ}{\mathbf{M}} &= \underline{\mathbf{a}} \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}' + \underline{\mathbf{c}} \cdot \overset{\circ}{\gamma}, \quad \overset{\circ}{\mathbf{Q}} = \underline{\mathbf{b}} \cdot \overset{\circ}{\gamma} + \overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}' \cdot \underline{\mathbf{c}} \quad \left(\overset{\circ}{\gamma} \equiv \overset{\circ}{\mathbf{u}}' - \overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}} \times \mathbf{t} \right). \end{aligned} \quad (11.1)$$

Эти уравнения для амплитуд в сочетании с однородными граничными условиями образуют задачу на собственные значения. Нетривиальное решение существует при некоторых $\omega = \omega_k$ ($k = 1, 2, \dots$) — это собственные частоты. Соответствующие $\overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}}(s)$, $\overset{\circ}{\mathbf{u}}(s)$ образуют собственные формы $\mathbf{U}_k(s)$ и $\boldsymbol{\Theta}_k(s)$ (моды колебаний).

Убедимся, что колебания стержней подчиняются тем же общим законам, что и колебания дискретных систем [1]. Ограничимся случаем с закрепленными концами.

Утверждение 1°. Моды, соответствующие разным частотам, ортогональны в следующем смысле:

$$\int \left[\rho \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{U}_k + \rho \boldsymbol{\varepsilon} \cdot (\mathbf{U}_i \times \boldsymbol{\Theta}_k + \mathbf{U}_k \times \boldsymbol{\Theta}_i) + \boldsymbol{\Theta}_i \cdot \underline{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\Theta}_k \right] ds = \delta_{ik}^2. \quad (11.2)$$

Доказательство можно построить на теореме взаимности (3.1). Ведь (11.1) выглядят как уравнения статики с нагрузками $\mathbf{q} = \omega^2 \rho \left(\overset{\circ}{\mathbf{u}} + \overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}} \times \boldsymbol{\varepsilon} \right)$,

$\mathbf{m} = \omega^2 \left(\rho \boldsymbol{\varepsilon} \times \overset{\circ}{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{I}} \cdot \overset{\circ}{\boldsymbol{\theta}} \right)$. Рассматривая моду с частотой ω_i как первое состояние, а моду с ω_k — как второе, придем к выводу, что левая часть в (11.2) равна нулю при $\omega_i \neq \omega_k$. Учитывая далее, что $\boldsymbol{\Theta}_k$ и \mathbf{U}_k определены

²Символ Кронекера

с точностью до общего постоянного множителя, произведем их соответствующую нормировку.

Утверждение 2°. Справедлива формула Релея

$$\omega_k^2 = 2 \int \Pi (\Theta'_k, \Gamma_k) ds \quad (\Gamma_k \equiv U' - \Theta_k \times t). \quad (11.3)$$

Этот результат выводится из теоремы Клапейрона (2.2). Рассматривая моду как статическое решение при соответствующей нагрузке и учитывая нормировку (11.2), приходим к (11.3). Отметим, что при закрепленных концах все ω_k строго больше нуля. Если же рассмотреть свободный стержень, то обнаружится нулевая частота шестой кратности; соответствующие моды будут «жесткими» смещениями — это видно из (11.3).

Без доказательства выскажем следующие два утверждения. Первое — об отношении Релея как функционале: на первой моде будет минимум, равный ω_1^2 [11]. Второе — о возможности разложения u и θ в ряд по модам данного стержня (с определенными связями на концах):

$$u(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k U_k(s), \quad \theta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \Theta_k(s)$$

$$\alpha_k = \int [\rho u \cdot (U_k + \Theta_k \times \varepsilon) + \theta \cdot (\rho \varepsilon \times U_k + \underline{I} \cdot \Theta_k)] ds. \quad (11.4)$$

Подставив разложения u и θ в этот интеграл, почленно проинтегрировав их и учтя (11.2), убедимся в справедливости выражения коэффициентов Фурье α_k . Но это — лишь наводящие соображения.

Обратимся к вынужденным колебаниям. Известно, что их расчет сильно упрощается, если найдены собственные частоты и формы. Вынужденное движение стержня будем искать в виде (11.4), где α_k — подлежащие определению функции времени. Дифференциальные уравнения для $\alpha_k(t)$ можно быстро вывести опять-таки с помощью теоремы взаимности. Общая система (1.1) выпадит как статическая, если включить в нагрузку инерционные члены. Пусть первое состояние в (3.1) им и соответствует. Взяв в качестве второго моду с частотой ω_k , получим

$$\int \left\{ [q - \rho (\ddot{u} + \ddot{\theta} \times \varepsilon)] \cdot U_k + (m - \rho \varepsilon \times \ddot{u} - \underline{I} \cdot \ddot{\theta}) \cdot \Theta_k \right\} ds =$$

$$= \omega_k^2 \int [\rho (U_k + \Theta_k \times \varepsilon) \cdot \ddot{u} + (\rho \varepsilon \times U_k + \underline{I} \cdot \Theta_k) \cdot \theta] ds.$$

Принимая во внимание выражение α_k из (11.4), приходим к уравнению осциллятора

$$\ddot{\alpha}_k + \omega_k^2 \rho \alpha_k = \beta_k(t) \equiv \int (\mathbf{q} \cdot \mathbf{U}_k + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\Theta}_k) ds. \quad (11.5)$$

Этот результат можно получить и другим путем — через уравнения Лагранжа второго рода. Разложения (11.4) позволяют рассматривать α_k как обобщенные координаты. Кинетическая энергия (1.4) будет равна $1/2 \sum \dot{\alpha}_k^2$, потенциальная — $1/2 \sum \omega_k^2 \alpha_k^2$; из выражения виртуальной работы получим β_k как обобщенные силы.

2.12. Малые поправки к собственным частотам

Как уже отмечалось, уравнения теории Коссера отличаются от уравнений теории Кирхгофа-Клебша малыми членами. Влияние этих членов удастся описать конкретными формулами. Идею вывода этих формул рассмотрим на простейшей модели — системе с конечным числом степеней свободы:

$$(C - \omega^2 A) q = 0. \quad (12.1)$$

Здесь C и A — матрицы потенциальной и кинетической энергий; ω — частота колебаний; q — столбец собственной формы. Пусть $C = C_0 + \lambda C_1 + \dots$, $\lambda \rightarrow 0$. Задача на собственные значения (12.1) решается посредством разложений следующим образом:

$$q = q_0 + \lambda q_1 + \dots, \quad \omega = \omega_0 + \lambda \omega_1 + \dots;$$

$$(C_0 - \omega_0^2 A) q_0 = 0, \quad (C_0 - \omega_0^2 A) q_1 = (2\omega_0 \omega_1 A - C_1) q_0, \dots$$

На первом шаге имеем невозмущенную систему с набором частот ω_0 и форм q_0 ; $\det(C_0 - \omega_0^2 A) = 0$. Неоднородная система для q_1 на втором шаге разрешима лишь в случае (см. п. 2.8)

$$q_0^T (2\omega_0 \omega_1 A - C_1) q_0 = 0.$$

Это условие и определяет поправку к частоте: $\omega_1 = q_0^T C_1 q_0 / 2\omega_0 q_0^T A q_0$.

Рассмотрим стержень с закрепленными концами. Систему для амплитуд (11.1) запишем в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}' + \omega^2 \rho (\mathbf{u} + h \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\varepsilon}) &= 0, & \mathbf{M}' + \mathbf{t} \times \mathbf{Q} + \omega^2 (h \rho \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{u} + h^2 \underline{\underline{I}} \cdot \boldsymbol{\theta}) &= 0, \\ \boldsymbol{\theta}' &= \underline{\underline{A}} \cdot \mathbf{M} + h \underline{\underline{C}} \cdot \mathbf{Q}, & \mathbf{u}' &= \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{t} + h^2 \underline{\underline{B}} \cdot \mathbf{Q} + h \mathbf{M} \cdot \underline{\underline{C}}. \end{aligned} \quad (12.2)$$

Здесь h — величина размерности длины, назовем ее толщиной. Безразмерным стал ε ; одной размерности теперь будут ρ и \underline{I} , а также \underline{A} , \underline{B} и \underline{C} . Поскольку h мала, можно вместо нее положить λh и рассмотреть процесс при $\lambda \rightarrow 0$. Но последнее равносильно процессу при $h \rightarrow 0$; на этом и остановимся, несмотря на то, что считать малым параметром размерную величину не очень хорошо.

Представляя все величины разложениями типа $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 + h\mathbf{Q}_1 + \dots$, получим для главных членов

$$\mathbf{Q}'_0 + \omega_0^2 \rho \mathbf{u}_0 = 0, \quad \mathbf{M}'_0 + \mathbf{t} \times \mathbf{Q}_0 = 0, \quad \boldsymbol{\theta}'_0 = \underline{\underline{A}} \cdot \mathbf{M}_0, \quad \mathbf{u}'_0 = \boldsymbol{\theta}_0 \times \mathbf{t}. \quad (12.3)$$

Это — уравнения Кирхгофа-Клебша. В сочетании с граничными условиями они определяют набор собственных частот $\omega_0^{(k)}$ и форм $\mathbf{u}_0^{(k)}$, $\boldsymbol{\theta}_0^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots$).

Первые поправочные члены $O(h)$ (т. е. порядка h) таковы:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}'_1 + \omega_0^2 \rho \mathbf{u}_1 &= -\rho(2\omega_0 \omega_1 \mathbf{u}_0 + \omega_0^2 \boldsymbol{\theta}_0 \times \boldsymbol{\varepsilon}), \quad \mathbf{M}'_1 + \mathbf{t} \times \mathbf{Q}_1 = -\omega_0^2 \rho \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{u}_0, \\ \boldsymbol{\theta}'_1 &= \underline{\underline{A}} \cdot \mathbf{M}_1 + \underline{\underline{C}} \cdot \mathbf{Q}_0, \quad \mathbf{u}'_1 = \boldsymbol{\theta}_1 \times \mathbf{t} + \underline{\underline{M}}_0 \cdot \underline{\underline{C}}. \end{aligned} \quad (12.4)$$

Два первых уравнения выглядят так, как будто рассматриваются вынужденные колебания стержня Кирхгофа-Клебша. А соотношения упругости содержат необычные добавки (подчеркнуты). Но именно для подобных случаев была выведена выше обобщенная теорема взаимности (3.3); применим ее.

В качестве первого состояния возьмем моду с частотой ω_0 в классической модели (12.3). Второе же состояние описывается системой (12.4). При этом величины в (3.3) будут иметь следующий смысл:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 &= \omega_0^2 \rho \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{m}_1 = 0, \quad \boldsymbol{\alpha}_1 = 0, \quad \boldsymbol{\beta}_1 = 0; \\ \mathbf{q}_2 &= \omega_0^2 \rho (\mathbf{u}_1 + \boldsymbol{\theta}_0 \times \boldsymbol{\varepsilon}) + 2\rho \omega_0 \omega_1 \mathbf{u}_0, \\ \mathbf{m}_2 &= \omega_0^2 \rho \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{u}_0, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \underline{\underline{C}} \cdot \mathbf{Q}_0, \quad \boldsymbol{\beta}_2 = \underline{\underline{M}}_0 \cdot \underline{\underline{C}}. \end{aligned}$$

Подставив это в (3.3), придем к итоговой формуле

$$\omega_1 = - \frac{\int (M_0 \cdot \underline{\underline{C}} \cdot Q_0 + \omega_0^2 \rho \boldsymbol{\theta}_0 \times \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{u}_0) ds}{\omega_0 \int \rho |\mathbf{u}_0|^2 ds}. \quad (12.5)$$

Таким образом, первая поправка к частоте оказалась обусловленной тензором перекрестных связей $\underline{\underline{C}}$ и эксцентриситетом $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Нередко бывает, что \underline{C} и ε — нули. Тогда $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 + h^2 \mathbf{Q}_2 + \dots$,
 $\omega = \omega_0 + h^2 \omega_2 + \dots$. Обобщенная теорема взаимности в этом случае даст

$$\omega_2 = - \frac{\int (\mathbf{Q}_0 \cdot \underline{B} \cdot \mathbf{Q}_0 + \omega_0^2 \boldsymbol{\theta}_0 \cdot \underline{I} \cdot \boldsymbol{\theta}_0) ds}{2\omega_0 \int \rho |\mathbf{u}_0|^2 ds}. \quad (12.6)$$

Здесь поправка связана с податливостью на растяжение и сдвиг (\underline{B}) и инерцией вращения (\underline{I}).

2.13. Уравнения в компонентах.

Круговое кольцо

Вернемся к исходной системе (1.1). Представим все векторы в виде $\mathbf{Q} = Q_i \mathbf{e}_i$ и т. д. Учитывая равенства $\mathbf{e}'_i = \Omega_j \mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_i = \epsilon_{jik} \Omega_j \mathbf{e}_k$ (ϵ_{jik} — символы Леви-Чивита), для производных получим $\mathbf{Q}' = (Q'_i + \epsilon_{ijk} \Omega_j Q_k) \mathbf{e}_i$ и т. д.

Видим явное усложнение уравнений: вместо простой производной имеем операторы с переменными, вообще говоря, коэффициентами. Однако в переходе к компонентам есть и польза: для однородных стержней в базисе \mathbf{e}_k не дифференцируются компоненты тензоров жесткости.

В качестве примера рассмотрим круговое кольцо. Ограничимся простейшим случаем, когда $\varepsilon = 0$ и $\underline{C} = 0$, а тензоры \underline{a} , \underline{b} , \underline{I} имеют главными осями касательную, нормаль и бинормаль: $\underline{a} = a_t \mathbf{t}\mathbf{t} + a_n \mathbf{n}\mathbf{n} + a_z \mathbf{k}\mathbf{k}$ (геометрия кольца описана в п. 2.10). Система из 12 уравнений разделится в этом случае на две группы по шесть в каждой.

Одна группа описывает деформацию кольца в своей плоскости:

$$\begin{aligned} Q'_t - kQ_n + q_t &= \rho \ddot{u}_t, \quad Q'_n + kQ_t + q_n = \rho \ddot{u}_n, \quad M'_z + Q_n + m_z = I_z \ddot{\theta}_z, \\ M_z &= a_z \theta'_z, \quad Q_t = b_t (u'_t - k u_n), \quad Q_n = b_n (u'_n + k u_t - \theta_z). \end{aligned} \quad (13.1)$$

Другая группа характеризует деформацию с выходом из плоскости:

$$\begin{aligned} Q'_z + q_z &= \rho \ddot{u}_z, \quad M'_t - kM_n + m_t = I_t \ddot{\theta}_t, \quad M'_n + kM_t - Q_z + m_n = I_n \ddot{\theta}_n, \\ M_t &= a_t (\theta'_t - k \theta_n), \quad M_n = a_n (\theta'_n + k \theta_t), \quad Q_z = b_z (u'_z + \theta_n). \end{aligned} \quad (13.2)$$

Для вывода этих уравнений достаточно расписать компоненты векторов и тензоров в системе (1.1). Нет необходимости строить громоздкий чертеж с элементом стержня до и после деформации и тройками сил и моментов на каждом конце.

В качестве иллюстрации возможностей уравнений (13.1), (13.2) можно рассмотреть главные колебания замкнутого кольца. Полагая (при $q = 0$ и $m = 0$) все величины в виде $Q_t = \dot{Q}_t e^{ikms} \sin \omega t$ и т. д. (m — целое), получим для амплитуд (\dot{Q}_t и т. д.) линейную алгебраическую однородную систему. Приравняв нулю ее определитель, найдем собственные частоты ω как функции номера гармоники m .

Отметим, что уравнения (13.1) и (13.2) соответствуют определенному виду упругих и инерционных характеристик. На деле может оказаться существенным учет тензора \underline{C} , эксцентриситета и пр. Тогда может помочь подход из п. 2.12.

2.14. Прямой стержень

Декартову ось x системы x, y, z направим вдоль стержня. При простейшем виде упругих и инерционных характеристик система уравнений в компонентах разделится на четыре группы.

Пара уравнений описывает продольные смещения

$$Q'_x + q_x = \rho \ddot{u}_x, \quad Q_x = b_x u'_x. \quad (14.1)$$

Аналогичная пара уравнений относится к кручению:

$$M'_x + m_x = I_x \ddot{\theta}_x, \quad M_x = a_x \theta'_x. \quad (14.2)$$

Следующая четверка равенств описывает изгиб в плоскости x, y :

$$\begin{aligned} Q'_y + q_y &= \rho \ddot{u}_y, & M'_z + Q_y + m_z &= I_z \ddot{\theta}_z, \\ M_z &= a_z \theta'_z, & Q_y &= b_y (u'_y - \theta_z). \end{aligned} \quad (14.3)$$

И почти так же выглядят уравнения изгиба в плоскости x, z :

$$\begin{aligned} Q'_z + q_z &= \rho \ddot{u}_z, & M'_y - Q_z + m_y &= I_y \ddot{\theta}_y, \\ M_y &= a_y \theta'_y, & Q_z &= b_z (u'_z + \theta_y). \end{aligned} \quad (14.4)$$

Для продольных смещений и кручения получили неоднородные волновые уравнения, методы решения которых излагаются в курсах математической физики. Остановимся на уравнениях изгиба (14.3); исключая M_z и Q_y и опуская индексы, получим систему

$$b(u'' - \theta') + q = \rho \ddot{u}, \quad a\theta'' + b(u' - \theta) + m = I\ddot{\theta}. \quad (14.5)$$

По форме это линейная алгебраическая система с операторными коэффициентами. Разрешая ее через определители, приходим к уравнению $(\partial_x \equiv (\dots)', \partial_t \equiv (\dots) \dot{})$:

$$[ab\partial_x^4 - (a\rho + bI)\partial_x^2\partial_t^2 + \rho I\partial_t^4 + b\rho\partial_t^2]u = (b - a\partial_x^2 + I\partial_t^2)q - b\partial_x m. \quad (14.6)$$

Для сравнения приведем уравнения балки Бернулли-Эйлера

$$Q' + q = \rho\ddot{u}, \quad M' + q = 0, \quad M = a\theta', \quad \theta = u' \quad \Rightarrow \quad au^{IV} + \rho\ddot{u} = q. \quad (14.7)$$

Можно показать, что уравнение Тимошенко (14.6) переходит в классическое (14.7) в случае малой изменяемости решения по x и t .

Рассматривая колебания стержней, нельзя обойти вопрос о распространении волн. Пусть распределенные нагрузки отсутствуют. Тогда общие решения уравнений для u_x и θ_x будут иметь вид $f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$, где f_1 и f_2 — произвольны, а $c = \sqrt{b_x/\rho}$ и $\sqrt{a_x/I}$ для u_x и θ_x соответственно.

Сложнее с изгибными волнами. Уравнения допускают решения в виде синусоидальных волн. Полагая, например, в (14.7) $u = u_0 e^{i(kx - \omega t)}$, получим $ak^4 = \rho\omega^2$ — такова связь волнового числа k с частотой ω в классической балке. Вводя фазовую скорость $c \equiv \omega/k$, будем иметь $c = k\sqrt{a/\rho}$. Такого рода соотношения называются дисперсионными, они описывают зависимость фазовой скорости от волнового числа. Однако смущает неограниченное возрастание c при $k \rightarrow \infty$.

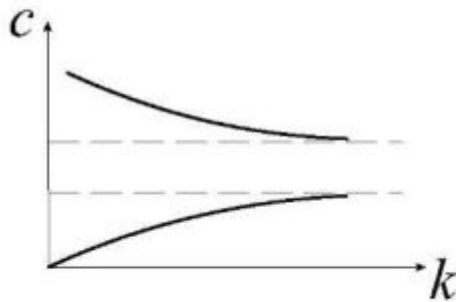


Рис. 3.

Дисперсионное соотношение для балки Тимошенко следует из (14.7):

$$k^2 (Ic^2 - a) (\rho c^2 - b) = b\rho c^2. \quad (14.8)$$

В плоскости k, c имеем две дисперсионные ветви (рис. 3). Они имеют горизонтальные асимптоты на уровнях $\sqrt{b/\rho}$ и $\sqrt{a/I}$ — можно назвать эти значения скоростями двух разных изгибных волн. Начальный участок первой ветви соответствует уравнению Бернулли-Эйлера.

2.15. Задачи к главе 2

2.1. Стержень произвольной формы заделан на одном конце и нагружен силой \mathbf{F} на другом. Интегрируя векторные уравнения линейной теории, получить выражения поворота и перемещения свободного конца.

2.2. Замкнутое круговое кольцо нагружено двумя противоположными силами на концах диаметра. Проинтегрировать векторные уравнения модели без растяжения и сдвига с тензором жесткости $\underline{\underline{a}} = a_t \mathbf{t}\mathbf{t} + a_n \mathbf{n}\mathbf{n} + a_z \mathbf{k}\mathbf{k}$ (\mathbf{t} — орт касательной, \mathbf{n} — орт главной нормали, $\mathbf{k} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$). Учесть равенства $s = R\varphi$, $\mathbf{t}'(s) = R^{-1}\mathbf{n}$, $\mathbf{n}' = -R^{-1}\mathbf{t}$, $\mathbf{r} = -R\mathbf{n}$ (R — радиус кольца).

2.3. Рассмотреть п. 2.2, заменив силовую нагрузку моментной: $\mathbf{q} = 0$, $\mathbf{m} = m_0 \mathbf{i}(\delta(s) - \delta(s - \pi R))$.

2.4. Проинтегрировать уравнения кругового кольца в компонентах при нагрузке $\mathbf{q} = q_0 \mathbf{n} \sin(NR^{-1}s)$ ($N = 1, 2, \dots$), $\mathbf{m} = 0$. Выяснить, всегда ли разрешима эта задача статики. Матрицы компонент тензоров $\underline{\underline{a}}$ и $\underline{\underline{b}}$ в базисе \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{k} диагональны и постоянны, $\underline{\underline{c}} = 0$.

2.5. Определить напряженное состояние замкнутого стержня от дислокации Вольтерры: $\oint d\mathbf{u} = \mathbf{b}$, $\oint d\theta = 0$ (стержень разрезали, сдвинули концы на вектор \mathbf{b} , затем восстановили сплошность). Ограничиться моделью без растяжения и сдвига.

2.6. Энергия деформации стержня без распределенных нагрузок вполне определяется перемещениями и поворотами концов — это квадратичная форма от четырех векторных аргументов. Вычислить ее коэффициенты для прямого стержня при простейшем виде тензоров жесткости (податливости).

2.7. Вывести уравнения в компонентах для спиральной пружины, считая $\underline{\underline{a}} = a_t \mathbf{t}\mathbf{t} + a_n \mathbf{n}\mathbf{n} + a_b \mathbf{b}\mathbf{b}$ ($\mathbf{b} \triangleq \mathbf{t} \times \mathbf{n}$), $\gamma = 0$. Начать с параметрического задания спирали: $\mathbf{r}(s) = A(\mathbf{i} \cos \lambda s + \mathbf{j} \sin \lambda s) + B\mathbf{k}s$, $A^2 \lambda^2 + B^2 = 1$.

2.8. Найти частоты главных колебаний кругового кольца с формой $(u_t, u_n, u_z) = (U_t, U_n, U_z)e^{iNR^{-1}s}$ ($N = 1, 2, \dots$). Рассмотреть простейший случай без растяжения, сдвига и инерции вращения — движение в плоскости ($u_z = 0$).

2.9. Рассмотреть п. 2.8, полагая, что движение кольца происходит с выходом из плоскости ($u_t = u_n = 0$).

2.10. Балка Бернулли-Эйлера на двух опорах несет в середине малую дополнительную массу μ . Используя асимптотический метод (с теоремой взаимности работ), вывести формулу для первой собственной частоты.

Глава 3

Задачи устойчивости

3.1. Различные подходы к проблеме устойчивости

Существует классическая, хорошо развитая теория устойчивости движения [9]. По Ляпунову, процесс устойчив в том случае, когда малые начальные отклонения остаются малыми и в будущем. Это относится и к состоянию равновесия. Мы должны рассмотреть динамику малых отклонений от равновесной конфигурации и убедиться, что они остаются малыми. В этом состоит так называемый динамический подход к задачам устойчивости, и он справедливо считается наиболее достоверным.

Однако в задачах устойчивости равновесия упругих систем получил распространение иной подход, называемый статическим и связываемый с именем Эйлера. При этом критическими считают те значения параметров, при которых уравнения статики для малых отклонений приобретают нетривиальное решение. Иными словами, критическим считается то равновесное состояние, которое перестает быть изолированным, — в его окрестности появляется множество смежных равновесных форм. При таком подходе достаточно решить соответствующую задачу на собственные значения.

Но есть и другие подходы, например, метод несовершенств. Если малые произвольные изменения начальной формы, жесткостей, нагрузок и др. приводят лишь к малому изменению равновесного деформированного состояния, то имеем устойчивость. Отметим также энергетический подход: потеря устойчивости происходит тогда, когда она становится энергетически выгодной, т. е. ведет к уменьшению энергии.

Перечисленные подходы составляют пеструю картину. Однако в ней нетрудно разобратся на модели с конечным числом степеней свободы.

Большой общностью обладают следующие уравнения в форме Лагранжа:

$$A\ddot{q} = Q(q, p). \quad (1.1)$$

Здесь q — столбец обобщенных координат, A — постоянная матрица кинетической энергии (симметричная и положительная), Q — столбец обобщенных сил, p — параметр нагрузки. В положении равновесия $q = q_0(p)$ — такова зависимость равновесной конфигурации от нагрузки. Малые приращения координат и нагрузки (\tilde{q} и \tilde{p}) связаны равенством

$$C\tilde{q} = \tilde{p} \partial Q / \partial p, \quad C \equiv -\partial Q / \partial q. \quad (1.2)$$

Если $\det C \neq 0$, равновесное состояние изолировано — при фиксированной нагрузке существует лишь тривиальное решение $\tilde{q} = 0$. Смежные формы равновесия появляются при достижении равенства $\det C = 0$, уравнение $C\tilde{q} = 0$ будет иметь тогда нетривиальные решения. Вблизи этого критического состояния возможны большие \tilde{q} при малом возмущении нагрузки. Такова суть подхода Эйлера.

Рассмотрим теперь динамику малых отклонений. Линеаризуя (1.1) при постоянной нагрузке, получим

$$A\ddot{\tilde{q}} + C\tilde{q} = 0. \quad (1.3)$$

Общее решение этого уравнения — линейная комбинация из $q_k e^{\lambda_k t}$, причем $(\lambda_k^2 A + C)q_k = 0$. Если хоть одно из собственных значений λ_k этой задачи находится в правой полуплоскости, положение равновесия неустойчиво.

В консервативной системе $Q = -\partial U / \partial q \Rightarrow C = \partial^2 U / \partial q^2$ — симметрична. В таком случае нетрудно показать, что все λ_k^2 вещественны. Если все они отрицательны, имеем устойчивость, если хоть одно λ_k^2 положительно, — неустойчивость. Поскольку λ_k непрерывно зависят от параметра нагрузки p , то потеря устойчивости связана с появлением нулевого собственного числа. При этом $\det C = 0$, что и лежит в основе метода Эйлера. Итак, для консервативных систем эйлеров подход эффективен и нет необходимости рассматривать динамику.

В неконсервативной системе матрица C несимметрична (антисимметричная часть C называется матрицей циркуляционных сил). Переход λ_k в правую полуплоскость возможен в любой точке мнимой оси, условие $\det C = 0$ не связано с потерей устойчивости. Значит, устойчивость равновесия неконсервативной системы следует рассматривать динамическим методом.

Но не только необходимость динамического подхода осложняет анализ устойчивости неконсервативных систем. Реальная система всегда содержит диссипативные факторы. Если при анализе консервативной системы обнаружена устойчивость, то при учете диссипации устойчивость «улучшится» — станет асимптотической. Иное положение в неконсервативных системах: учет диссипации может качественно изменить результат расчета, вместо устойчивости можно получить неустойчивость. В этом — возможное дестабилизирующее действие диссипативных сил [9].

3.2. Уравнения теории устойчивости стержней. Классические задачи

Если (1.1) считать аналогом уравнений нелинейной динамики стержней, то (1.2) или (1.3) будут аналогичны уравнениям теории устойчивости. Эти уравнения выведены в п. 1.9 и имеют вид (9.1). В более простом случае статики по Кирхгофу-Клебшу будем иметь

$$\begin{aligned} \tilde{Q}' + \tilde{q} &= 0, \quad \tilde{M}' + u' \times Q + t \times \tilde{Q} + \tilde{m} = 0, \\ \tilde{M} &= \theta \times M + \underline{a} \cdot \theta', \quad u' = \theta \times t. \end{aligned} \quad (2.1)$$

При внешней простоте этой системы задачи устойчивости весьма сложны. Ведь коэффициенты уравнений (2.1) зависят от геометрии и напряженного состояния перед потерей устойчивости. Лишь в немногих случаях эти коэффициенты находятся легко. Эта легкость характерна для задач, которые мы далее рассмотрим. Сосредоточим внимание на выводе уравнений и опустим мелкие подробности решения задач на собственные значения.

1°. Задача о предельной высоте колонны

Вертикально расположенный консольный стержень нагружен собственным весом. Декартову ось z с ортом k направим по вертикали вверх. Обозначим γ вес единицы длины стержня. Тогда $q = -\gamma k$, $\tilde{q} = 0$ — нагрузка «мертвая» (в задачах устойчивости очень важно знать поведение нагрузки при деформации). Перед потерей устойчивости будем иметь недеформированное напряженное состояние, в котором $t = k$, $Q = \gamma(s-l)k$, $M = 0$. Уравнения (2.1) примут вид

$$\tilde{Q}' = 0, \quad \tilde{M}' + (\theta \times k) \times k\gamma(s-l) + k \times \tilde{Q} = 0, \quad \tilde{M} = \underline{a} \cdot \theta', \quad u' = \theta \times k.$$

Граничные условия таковы:

$$s = 0: \quad u = 0, \quad \theta = 0; \quad s = l: \quad \tilde{Q} = 0, \quad \tilde{M} = 0.$$

Видим, что $\tilde{Q} = 0$, а для $\theta(s)$ получается следующая задача на собственные значения:

$$(\underline{a} \cdot \theta')' + \gamma(l-s)\theta_{\perp} = 0 \quad (\theta_{\perp} \equiv \theta - \theta_z \mathbf{k}), \quad \theta(0) = 0, \quad \theta'(l) = 0. \quad (2.2)$$

Здесь весьма общая постановка. Но при тензоре жесткости $\underline{a} = a_x \mathbf{i}\mathbf{i} + a_y \mathbf{j}\mathbf{j} + a_z \mathbf{k}\mathbf{k} = \text{const}$ (простейший случай) получим $a_x \theta_x'' + \gamma(l-s)\theta_x = 0$. Подобные уравнения интегрируются в бесселевых функциях:

$$\begin{aligned} x^2 y'' + b x^m y &= 0 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow y &= \sqrt{x} [C_1 J_{1/m}(z) + C_2 J_{-1/m}(z)], \quad z \equiv \frac{2}{m} \sqrt{b} x^{m/2}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

У нас $x = l - s$, $y = \theta_x$, $b = \gamma/a_x$, $m = 3$. Для постоянных C_1 и C_2 из граничных условий следует линейная однородная алгебраическая система. Равенство нулю ее определителя ведет к уравнению для критических параметров: $J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} \sqrt{\gamma/a_x} l^{3/2} \right) = 0$. Поскольку первый корень функции $J_{-1/3}(x)$ равен 1.86, то критическая высота колонны $l_* = 1.98 (a_x/\gamma)^{1/3}$. Разумеется, при этом считалось, что a_x — меньшая изгибная жесткость.

2°. Задача об опрокидывании балки

Балка в виде прямоугольного параллелепипеда $0 \leq x \leq l$, $-h/2 \leq y \leq h/2$, $-b/2 \leq z \leq b/2$ ($l \gg h \gg b$) закреплена на торце $x = 0$ и нагружена «мертвой» силой $P\mathbf{j}$ на свободном конце $x = l$ (рис. 4).

Жесткость на изгиб в плоскости x, y настолько велика, что состояние перед потерей устойчивости можно считать недеформированным. В нем $\mathbf{t} = \mathbf{i}$, $\mathbf{Q} = P\mathbf{j}$, $\mathbf{M} = P(l-s)\mathbf{k}$.

Уравнения (2.1) примут вид

$$\tilde{Q}' = 0, \quad \tilde{M}' + (\theta \times \mathbf{i}) \times P\mathbf{j} + \mathbf{i} \times \tilde{Q} = 0, \quad \tilde{M} = \theta \times P(l-s)\mathbf{k} + \underline{a}\theta', \quad \mathbf{u}' = \theta \times \mathbf{i}.$$

Учитывая граничные условия ($\mathbf{u}(0) = 0$, $\theta(0) = 0$, $\tilde{Q}(l) = 0$, $\tilde{M}(l) = 0$), получим $\tilde{Q} = 0$ и придем к следующей системе:

$$\tilde{M}'_x + P\theta_y = 0, \quad \tilde{M}'_y = 0, \quad \tilde{M}_x = P(l-s)\theta_y + a_x \theta'_x, \quad \tilde{M}_y = -P(l-s)\theta_x + a_y \theta'_y.$$

При наших граничных условиях отсюда имеем $\tilde{M}_y = 0$, $\theta'_y = P(l-s)\theta_x/a_y$, и тогда

$$a_x \theta_x'' + P^2(l-s)^2 \theta_x / a_y = 0.$$

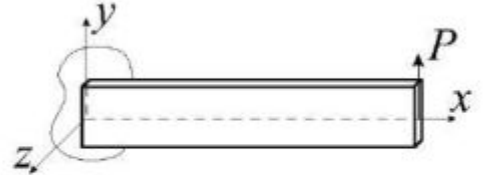


Рис. 4.

Но это опять разновидность (2.3): $x = l - s$, $y = \theta_x$, $b = P^2/a_x a_y$, $m = 4$. И граничные условия, как в 1°, $\theta_x(0) = 0$, $\theta'_x(l) = 0$. Критические параметры находятся из уравнения $J_{-1/4}(Pl^2/2\sqrt{a_x a_y}) = 0$. Первый корень бесселевой функции равен 2.006.

3°. Устойчивость кольца при внешнем давлении

Будем считать, что деформация кольца возможна лишь в своей плоскости x, y . Перед потерей устойчивости при нагрузке равномерным давлением p имеем недеформированное, но напряженное кольцо; если k — его кривизна, то $Q = -pk^{-1}t$, $M = 0$. Орты e_k при этом направим так: $e_3 = t$, $e_2 = k$ (орт оси z , перпендикулярной плоскости кольца), $e_1 = n$ — орт нормали. Отметим, что $t' = kn$, $n' = -kt$. Векторы Q , \tilde{Q} и u лежат в плоскости кольца, а \tilde{M} и θ ей перпендикулярны: $\tilde{M} = \tilde{M}k$ и $\theta = \theta k$. Нагрузка все время имеет вид $q = pe_1$; тогда ее вариация $\tilde{q} = p\theta \times e_1 = -p\theta t$.

Уравнения (2.1) в соответствующих компонентах будут такими:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}'_t - k\tilde{Q}'_n - p\theta = 0, \quad \tilde{Q}'_n + k\tilde{Q}'_t = 0, \quad \tilde{M}' + pk^{-1}\theta + \tilde{Q}'_n = 0, \\ \tilde{M} = a\theta', \quad u'_t - ku'_n = 0, \quad u'_n + ku'_t = \theta. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Экспоненциальные частные решения этой системы ($\tilde{Q}_t = \tilde{Q}_t e^{\lambda s}$ и т. д.) должны иметь период $2\pi k^{-1}$ вследствие замкнутости кольца. Поэтому характеристическое уравнение системы (2.4) обязано иметь корни вида $\lambda = ikm$, где m — целое. Получив таким образом соотношение между p и m , обнаружим, что нетривиальное, т. е. сопровождающееся деформацией решение возникает при $m = 2$ и критическим будет $p_* = 3ak^3$.

4°. Устойчивость сжатого стержня на упругом основании.

Прямой стержень с шарнирными опорами на концах сжат продольной силой P . Перед потерей устойчивости имеем недеформированное напряженное состояние, в котором $t = i$ (орт декартовой оси вдоль стержня) $Q = -Pi$, $M = 0$. При малых смещениях возникает реакция упругого основания $\tilde{q} = -ku$, где k — коэффициент жесткости. В случае простейшего варианта тензора \underline{a} получим следующую задачу на собственные значения:

$$au^{IV} + Pu'' + ku = 0; \quad s = 0, l: \quad u = 0, \quad u'' = 0. \quad (2.5)$$

Разыскивая экспоненциальные частные решения $u = \tilde{u}e^{ims}$, получим $am^4 - Pm^2 + k = 0$. Построив общее решение как линейную комбинацию частных и потребовав выполнения граничных условий, обнаружим, что среди корней характеристического уравнения должно быть значение

$m = n\pi/l$ ($n = 1, 2, \dots$): $n^4 a \pi^4 / l^4 + k = n^2 P^2 \pi^2 / l^2$. При заданных параметрах a, l, k критической является та минимальная нагрузка, которая удовлетворяет этому равенству при каком-либо целом n . Эти значения P могут быть разными, на рис. 5 показаны три из них, соответствующие значениям $n = 1, 2$ и 3. Граница области устойчивости отмечена штриховкой.

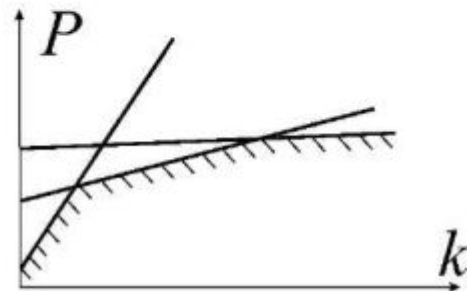


Рис. 5.

В связи с этим решением иногда говорят, что форма потери устойчивости не обязательно является безусловной. Но здесь это не важно: ищется критическая нагрузка, а нетривиальным решениям задач типа (2.5) физический смысл не придается.

5°. Скрученный вал (рис. 6)

Разыскивается критическое значение крутящего момента H , приложенного на конце стержня в цилиндрическом шарнире. Другой конец зашпелен. Будем считать жесткость на кручение a_z настолько большой, что до потери устойчивости деформация пренебрежимо мала. Пусть также $a_x = a_y = a$. Перед потерей устойчивости $t = k, Q = 0, M = Hk$; с учетом граничных условий приходим к следующей задаче на собственные значения:

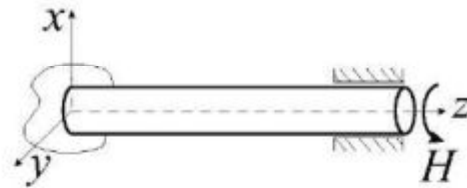


Рис. 6.

$$a u^{IV} - i H u''' = 0; \quad s = 0, l: \quad u = 0, u' = 0. \quad (2.6)$$

Здесь введена комплексная комбинация $u = u_x + i u_y$.

Решение уравнения (2.6) имеет вид $u = C_1 + C_2 s + C_3 s^2 + C_4 e^{i H s / a}$. Подстановка в граничные условия приводит к однородной системе для констант C_1, \dots, C_4 , которая разрешима при условии $\operatorname{tg} x = x, x \equiv H l / 2 a$. Первый нетривиальный корень $x = 4.49$ — такова критическая комбинация параметров.

3.3. О следящих нагрузках

В задачах устойчивости чрезвычайно важно учитывать поведение нагрузки при деформации системы. Ведь в уравнения входят вариации \tilde{q}, \tilde{m}

и др. Для «мертвых» нагрузок это нули. Но распространены следующие нагрузки, т. е. меняющиеся определенным образом при смещениях частиц тела. Статический подход Эйлера работает для тех из них, которые обладают потенциалом.

В качестве примера рассмотрим балку с высоким поперечным сечением при нагрузке моментом на свободном конце (рис. 7).

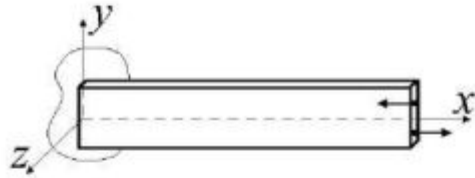


Рис. 7.

Перед варьированием имеем $t = i$, $Q = 0$, $M = Hk$. Поскольку $\tilde{q} = 0$, $\tilde{Q}(l) = 0$, то $\tilde{Q} = 0$. Из общих уравнений (2.1) получим $\tilde{M}' = 0$, $\tilde{M} = \theta \times Hk + \underline{a} \cdot \theta'$. На конце $s = 0$ имеем $\theta = 0$, а вот условие при $s = l$ требует особого внимания.

Пусть момент на конце — «мертвый».

Тогда $\tilde{M}(l) = 0$. Но это ведет к задаче Коши $\underline{a} \cdot \theta' + \theta \times Hk = 0$, $\theta(0) = 0$, имеющей, в отличие от краевой задачи, лишь тривиальное решение. Метод Эйлера здесь отказал. Это не удивительно, поскольку «мертвый» момент — неконсервативная нагрузка¹.

Но пусть концевой момент создан двумя постоянными силами P , приложенными к частицам сечения, расстояние между которыми равно h . В этом случае $M(l) = Hi \times e_2$, $H \equiv Ph$. Поскольку $\tilde{e}_2 = \theta \times e_2$, а перед варьированием $e_2 = j$, то $\tilde{M}(l) = -H\theta_x j$. Приходим к задаче

$$a_x \theta'_x + H\theta_y = 0, \quad a_y \theta'_y - H\theta_x = -H\theta_x(l); \quad \theta_x(0) = \theta_y(0) = 0. \quad (3.1)$$

Нетривиальное решение здесь существует при условии $\cos \lambda l = 0$, $\lambda \equiv H/\sqrt{a_x a_y}$, так что критическое значение момента $H_* = \pi\sqrt{a_x a_y}/2l$.

О влиянии поведения нагрузок на устойчивость написано в книге [13].

Если нагрузка неконсервативна, то необходим динамический подход. Уравнения в вариациях пишут с инерционными членами, и для экспоненциальных частных решений $u(s, t) = U(s)e^{\lambda t}$ и т. д. ищут те значения нагрузки, при которых показатель λ переходит в правую полуплоскость. Значений λ бесконечно много (характеристическое уравнение трансцендентно), и это не единственная трудность. Проблема еще и в том, что необходим учет диссипативных сил: внешних распределенных, внешних на концах, а также внутренних (от несовершенной упругости).

¹Работа момента $\delta A = M \cdot \delta O$ не является полной вариацией при $M = \text{const}$, поскольку δO — не вариация

3.4. Эффекты, обусловленные растяжением и сдвигом

Первая встреча с этими эффектами уже состоялась выше, в п. 1.8. В задаче Эйлера о прямом консольном стержне, сжатом «мертвой» силой Q на свободном конце, для критической нагрузки получили квадратное уравнение (8.11). Рассмотрим ее подробнее.

Обычно $b_3 > b_1$ (жесткость на растяжение больше, чем на сдвиг). Тогда $P \equiv (b_1^{-1} - b_3^{-1})^{-1} > 0$, и корни квадратного уравнения будут иметь разные знаки. Положительный корень

$$Q_1 = \frac{P}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4Q_*}{P}} \right) = Q_* \left(1 - \frac{Q_*}{P} + O\left(\frac{Q_*^2}{P^2}\right) \right). \quad (4.1)$$

Как правило, $P \gg Q_*$, так что получили малую поправку к решению Эйлера. Расчетная критическая сила уменьшилась при учете растяжения и сдвига.

В технической литературе встречается следующее выражение критической силы для модели со сдвигом: $Q = Q_* (1 + Q_*/b_1)^{-1}$ (формула Энгессера-Прандтля). Видим, что при $b_3 \rightarrow \infty$, $Q_* \ll b_1$ оно совпадает с (4.1).

В связи с найденными критическими нагрузками следует подчеркнуть возможность потери устойчивости при растяжении. Критическая растягивающая сила соответствует отрицательному корню

$$-Q_2 = \frac{P}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4Q_*}{P}} \right).$$

При $P \gg Q_*$ эта сила очень велика. Если реальный стержень при этом и не разрушится, то может перестать работать квадратичная аппроксимация энергии.

Третья характерная черта найденных критических нагрузок — невозможность потери устойчивости при сжатии в случае $-4Q_* < P < 0$. При малой b_3 более выгодным энергетически оказывается простое сжатие, чем изгиб.

Обратимся теперь к более сложной задаче о кольце при действии внешнего давления (обобщение 3° из п. 3.2). Как и в п. 3.2, допускается деформация кольца лишь в своей плоскости.

Сначала найдем состояние перед потерей устойчивости. Используем общие уравнения из главы 1:

$$\begin{aligned} Q' + q = 0, \quad M' + r' \times Q = 0, \quad M = \underline{a} \cdot \kappa, \\ Q = \underline{b} \cdot \Gamma, \quad \kappa = -\frac{1}{2} \left(\underline{P}' \cdot \underline{P}'^T \right)_{\times}, \quad \Gamma = r' - \underline{P} \cdot r'_0. \end{aligned}$$

При нагрузке давлением $q = pk \times r'$. Перед потерей устойчивости будем иметь также круговое кольцо, но меньшего радиуса: вместо r_0 теперь станет $r = (1 - \varepsilon)r_0$, $\varepsilon = \text{const}$. Поворота при этом не будет, тогда $\kappa = 0$, $\Gamma = \varepsilon t$, ($t \equiv r'_0$), $M = 0$, $Q = -Qt$;

$$Q = pk^{-1}(1 - \varepsilon) = b_t \varepsilon \Rightarrow Q = \frac{pk^{-1}}{1 + pk^{-1}b_t^{-1}}. \quad (4.2)$$

При этом предполагалось, что перед потерей устойчивости тензор $\underline{b} = b_t tt + b_n nn + b_z kk$, и так же $-\underline{a}$.

Далее рассмотрим уравнения в вариациях. Учтем, что $\tilde{q} = pk \times u'$; $\tilde{M} = \tilde{M}k$; $\theta = \theta k$. В статике из (9.1) получим

$$\begin{aligned} \tilde{Q}'_t - k\tilde{Q}'_n - p(u'_n + ku_t) = 0, \quad \tilde{Q}'_n + k\tilde{Q}'_t + p(u'_t - ku_n) = 0, \\ \tilde{M}' + (1 - \varepsilon)\tilde{Q}'_n + Q(u'_n + ku_t) = 0, \quad \tilde{M} = a\theta' \quad (a \equiv a_z), \\ \tilde{Q}_t = b_t(u'_t - ku_n), \quad \tilde{Q}_n = -Q\theta + b_n(u'_n + ku_t - (1 - \varepsilon)\theta). \end{aligned} \quad (4.3)$$

В качестве граничных выступают условия периодичности, поэтому решение будем искать в виде $\tilde{Q}_t = \tilde{Q}_t e^{ikms}$ и т. д., где m — целое. Для амплитуд получим линейную алгебраическую однородную систему. Ее определитель должен быть равен нулю:

$$\begin{aligned} \left[\left(k + \frac{p}{b_t} \right) \left(k + \frac{p}{b_n} \right) - k^2 m^2 \right] \left[Q \left(\frac{Q}{b_n} + 1 - \varepsilon \right) - ak^2 m^2 \right] = \\ = p \left(k + \frac{p}{b_t} \right) \left(\frac{Q}{b_n} + 1 - \varepsilon \right)^2. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Выразив Q и ε через p согласно (4.2), придем к алгебраическому уравнению четвертой степени для p . Ограничимся далее случаем достаточно больших жесткостей на растяжение и сдвиг, для чего формально заменим b_t и b_n на $\lambda^{-1}b_t$ и $\lambda^{-1}b_n$, $\lambda \rightarrow 0$. Критическое давление p будем искать в виде $p = p_0 + \lambda p_1 + \dots$. Из (4.4) получим

$$p_0 = ak^3(m^2 - 1),$$

$$p_1 = \frac{p_0^2}{km^2} \left[b_t^{-1} \left(2m^2 - 1 - \frac{1}{m^2 - 1} \right) - b_n^{-1} \left(m^2 + 1 + \frac{1}{m^2 - 1} \right) \right].$$

Но ведь нужно минимальное p , при котором появляется нетривиальное решение. При малом λ такому p соответствует $m = 2$, и тогда

$$p = 3ak^3 [1 + \lambda ak^2 (5b_t^{-1} - 4b_n^{-1})] + O(\lambda^2). \quad (4.5)$$

Осталось положить $\lambda = 1$. Видим, что учет сжимаемости увеличивает расчетное критическое давление, а учет сдвига уменьшает его.

3.5. Вариационные формулировки

В линейной теории стержней, как и в линейной теории упругости вообще, исключительно важную роль играют вариационные постановки. Они служат основой вычислительных алгоритмов, в частности, того варианта метода Ритца, за которым закрепилось название «метод конечных элементов».

Слабее развиты вариационные постановки для задач устойчивости. Здесь получил распространение метод Галеркина. Например, задачу Эйлера

$$(a\theta')' + Q\theta = 0, \quad \theta(0) = 0, \quad \theta'(l) = 0 \quad (5.1)$$

предлагается решать через вариационное уравнение

$$\int_0^l [(a\theta')' + Q\theta] \delta\theta ds = 0, \quad (5.2)$$

рассматривая его на множестве функций, удовлетворяющих всем краевым условиям. Примем аппроксимацию $\hat{\theta} = \sum \alpha_k \varphi_k(s)$, где φ_k — задаваемые функции ($\varphi_k(0) = 0$, $\varphi_k'(l) = 0$), а α_k — варьируемые параметры. Заменяя в (5.2) θ на $\hat{\theta}$, а $\delta\theta$ — на φ_k , получим линейную алгебраическую систему для α_k . Поскольку она однородна, ее определитель приравняем нулю — это будет уравнение для критической нагрузки Q .

Но как обобщить такой подход на более сложные задачи, где есть не одна скалярная функция θ , а две векторных \mathbf{u} и $\boldsymbol{\theta}$? Здесь можно опереться на фундаментальный вариационный принцип виртуальной работы. Рассмотрим малую деформацию при напряженной отсчетной конфигурации. Перемещение и поворот \mathbf{u} и $\boldsymbol{\theta}$ — малые величины одного порядка $\lambda \rightarrow 0$, а силы

и моменты представляются выражениями типа $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 + \tilde{\mathbf{Q}}$, $\tilde{\mathbf{Q}} = O(\lambda)$. В вариационном уравнении принципа виртуальной работы удерживаются все члены второго порядка. При этом используются равенства

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{P}} &= \underline{\mathbf{E}} + \boldsymbol{\theta} \times \underline{\mathbf{E}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \underline{\mathbf{E}} \times \boldsymbol{\theta} + \dots, \quad \boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\theta}' + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\theta}' + \dots, \\ \boldsymbol{\Gamma} &= \mathbf{u}' - \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}'_0 - \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}'_0) + \dots, \\ \mathbf{M} \cdot \delta \mathbf{O} &= \left(\mathbf{M}_0 + \tilde{\mathbf{M}} + \frac{1}{2} \mathbf{M}_0 \times \boldsymbol{\theta} \right) \cdot \delta \boldsymbol{\theta} + \dots\end{aligned}\quad (5.3)$$

Здесь $\boldsymbol{\theta} = \theta \mathbf{k}$ из п. 1.2. В результате получается выражение энергии

$$\begin{aligned}\Pi &= \underline{\mathbf{Q}}_0 \cdot \left[\gamma - \boldsymbol{\theta} \times \left(\mathbf{u}' + \frac{1}{2} \mathbf{r}'_0 \times \boldsymbol{\theta} \right) \right] + \underline{\mathbf{M}}_0 \cdot \left(\boldsymbol{\theta}' + \frac{1}{2} \boldsymbol{\theta}' \times \boldsymbol{\theta} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta}' \cdot \underline{\mathbf{a}} \cdot \boldsymbol{\theta}' + \gamma \cdot \underline{\mathbf{b}} \cdot \gamma + 2\boldsymbol{\theta}' \cdot \underline{\mathbf{c}} \cdot \gamma) + \dots \quad (\gamma \equiv \mathbf{u}' - \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}'_0).\end{aligned}\quad (5.4)$$

Подчеркнутые линейные члены в дальнейшем исчезнут. Квадратичные же члены в выражении виртуальных работ дадут вариационное уравнение

$$\begin{aligned}\int_0^l \left[(\tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{Q}}') \cdot \delta \mathbf{u} + (\tilde{\mathbf{m}} + \tilde{\mathbf{M}}' + \mathbf{r}'_0 \times \tilde{\mathbf{Q}} + \mathbf{u}' \times \mathbf{Q}_0) \cdot \delta \boldsymbol{\theta} \right] ds + \\ + \left[(\tilde{\mathbf{Q}}^e - \tilde{\mathbf{Q}}) \cdot \delta \mathbf{u} + (\tilde{\mathbf{M}}^e - \tilde{\mathbf{M}}) \cdot \delta \boldsymbol{\theta} \right] \Big|_0^l = 0,\end{aligned}\quad (5.5)$$

где $\tilde{\mathbf{Q}}$ и $\tilde{\mathbf{M}}$ — выражения из (9.1), а $\tilde{\mathbf{Q}}^e$ и $\tilde{\mathbf{M}}^e$ — вариации заданных нагрузок на концах.

Итоговое уравнение (5.5) очевидным образом связано с (9.1), но выражение (5.4) отнюдь не тривиально. Его можно использовать для разработки соответствующих численных алгоритмов.

3.6. Задачи к главе 3

3.1. Сжимающая сила на свободном конце прямого консольного стержня создается нитью, протянутой в основании (рис. 8). Поставить соответствующую задачу на собственные значения и найти критическое значение натяжения T .

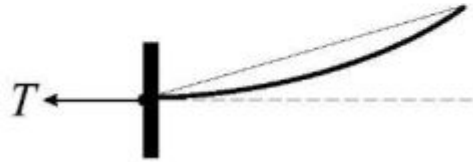


Рис. 8.

3.2. Вместо натяжения нити в п. 3.1 действует сила отталкивания электрических зарядов $F = C/r^2 \triangleq F_0(h/r)^2$ (h — начальное расстояние между зарядами, r — оно же после деформации; один заряд закреплен, другой — на конце стержня — рис. 9). Найти критическое значение F_0 .

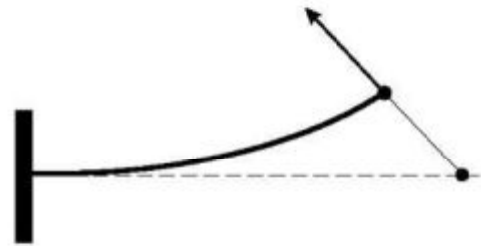


Рис. 9.

3.3. Прямой консольный стержень сжат постоянной продольной силой F , но прогиб в середине стержня запрещен шарнирной опорой. Определить критические параметры.

3.4. Круговое кольцо равномерно нагружено в своей плоскости давлением p . Перед потерей устойчивости $q = pn$, и далее постоянно по величине и направлению ($\tilde{q} = 0$). Найти критическую нагрузку при деформации в плоскости.

3.5. Нагрузка на кольцо $q = -pr^{-1}\mathbf{r}$ — направлена в центр и постоянна по модулю. Найти критическое значение p при деформации из плоскости.

3.6. Изгибная жесткость прямого консольного стержня с постоянной сжимающей силой F меняется по закону $a(x) = a_0 + a_1x$. Методом Галеркина найти приближенное критическое значение F .

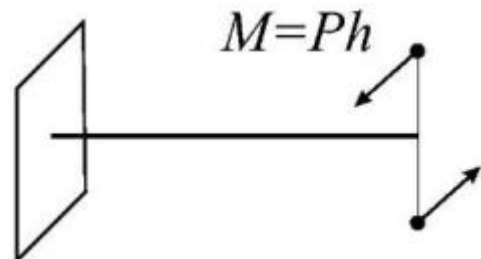


Рис. 10.

3.7. Прямой стержень с равными жесткостями на изгиб заделан на одном конце и нагружен «крутящим» моментом на другом. Момент создан парой постоянных сил P , приложенных к точкам сечения на расстоянии h (рис. 10) — он консервативен. Найти критическое значение M , пренебрегая податливостью на кручение.

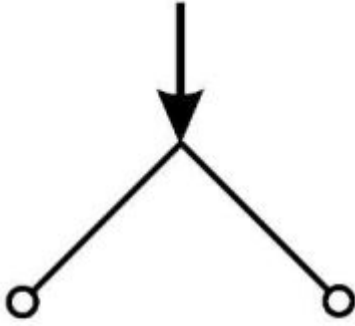


Рис. 11.

3.8. Прямой консольный стержень с постоянной сжимающей силой F нагружен на свободном конце малой поперечной силой P . Найти прогиб стержня при плоском изгибе.

3.9. Изменим постановку п. 3.7, считая момент на конце постоянным (как вектор). Показать, что статический метод в этом случае не работает. Построить алгоритм расчета критического значения M динамическим методом.

3.10. Г-образный стержень (два одинаковых перпендикулярных прямых участка) шарнирно оперт на концах и нагружен постоянной силой в вершине (по биссектрисе — рис. 11). Найти критическую комбинацию параметров.

Глава 4

Переход от трехмерной модели к одномерной

4.1. Уравнения трехмерной теории упругости

Следуя [7], дадим сводку соотношений линейной теории упругости. Рассмотрим материальный объем V с границей O . В объеме имеем поля вектора перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{r})$, тензора деформаций $\underline{\underline{\epsilon}}(\mathbf{r})$ и тензора напряжений $\underline{\underline{T}}(\mathbf{r})$. Полная система уравнений теории упругости имеет вид

$$\nabla \cdot \underline{\underline{T}} + \mathbf{K} = 0, \quad \underline{\underline{\epsilon}} = \nabla \mathbf{u}^S, \quad \underline{\underline{T}} = {}^4\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{\epsilon}}. \quad (1.1)$$

Здесь ∇ — оператор Гамильтона; \mathbf{K} — вектор объемных сил; ${}^4\underline{\underline{C}}$ — тензор упругих модулей (четвертого ранга).

Для изотропного тела $\underline{\underline{T}} = 2\mu (\underline{\underline{\epsilon}} + \nu(1 - 2\nu)^{-1} (\text{tr } \underline{\underline{\epsilon}}) \underline{\underline{E}})$, где μ — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, $\text{tr } \underline{\underline{\epsilon}}$ — след $\underline{\underline{\epsilon}}$ (объемное расширение).

Часто используются уравнения только в перемещениях или только в напряжениях. Первые с очевидностью вытекают из (1.1):

$$\nabla \cdot ({}^4\underline{\underline{C}} \cdot \nabla \mathbf{u}) + \mathbf{K} = 0. \quad (1.2)$$

Чтобы получить уравнения в напряжениях, следует привлечь уравнение совместности деформаций

$$\text{inc } \underline{\underline{\epsilon}} \equiv \nabla \times (\nabla \times \underline{\underline{\epsilon}})^T = 0. \quad (1.3)$$

Оно следует из связи $\underline{\underline{\epsilon}}$ с \mathbf{u} и вместе с тем гарантирует однозначность

перемещений и при их определении по $\underline{\underline{\varepsilon}}$ ¹. Выразив $\underline{\underline{\varepsilon}}$ через $\underline{\underline{T}}$ по закону Гука, получим уравнения Бельтрами

$$\Delta \underline{\underline{T}} + \frac{1}{1+\nu} \nabla \nabla \sigma + 2 \nabla \mathbf{K}^S + \frac{\nu}{1-\nu} \nabla \cdot \mathbf{K} \underline{\underline{E}} = 0 \quad (\sigma \equiv \text{tr} \underline{\underline{T}}). \quad (1.4)$$

Вместе с первым уравнением (1.1) имеем систему девяти уравнений для шести компонент $\underline{\underline{T}}$, но переопределенности в ней, оказывается, нет.

Уравнения в перемещениях кажутся намного проще, чем в напряжениях, но эта простота обманлива. Часто именно постановка в напряжениях ведет к успеху.

Граничные условия на поверхности O ставятся так: на части ее O_1 заданы перемещения $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$, на другой части O_2 заданы поверхностные силы $\mathbf{n} \cdot \underline{\underline{T}} = \mathbf{p}$ (\mathbf{n} – орт внешней нормали к O). Встречаются и другие варианты.

Уравнения в перемещениях (1.2) эквивалентны следующей вариационной постановке. Функционал

$$\mathfrak{E}(\mathbf{u}) = \int_V [\Pi(\underline{\underline{\varepsilon}}) - \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}] dV - \int_{O_2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} dO, \quad (1.5)$$

рассматриваемый при условии $\mathbf{u}|_{O_1} = \mathbf{u}_0$, принимает минимальное значение на истинном поле \mathbf{u} . Под интегралом $\Pi(\underline{\underline{\varepsilon}}) = 1/2 \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}$ – энергия деформации на единицу объема. Равенство

$$-\delta \mathfrak{E} = \int_V [\mathbf{K} \cdot \delta \mathbf{u} - \delta \Pi] dV + \int_{O_2} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} dO = 0 \quad (1.6)$$

выражает принцип виртуальной работы. Из него следуют уравнения (1.2) и граничное условие на O_2 .

Изложенное относилось к статике. Для перехода к динамике достаточно добавить силы инерции $-\rho \ddot{\mathbf{u}}$ (ρ – масса на единицу объема).

4.2. Задача Сен-Венана

Рассмотрим призматический стержень (цилиндр) из однородного изотропного материала с произвольным односвязным сечением (рис. 12).

¹ Если область неодносвязная, то для однозначности \mathbf{u} должны быть выполнены дополнительные условия, говорящие об отсутствии дислокаций Вольтерры [7].

Введем декартовы оси x_1, x_2, z ; ось z идет вдоль цилиндра через центры тяжести его сечений, торцы расположены в плоскостях $z = 0$ и $z = L$. Объемных сил нет, а поверхностные действуют лишь на торцах. Нагрузки характеризуются своими главными векторами $-Q_0$ и Q_L и главными моментами относительно центров торцов $-M_0$ и M_L . Можно ввести силы $Q(z)$ и моменты $M(z)$ для каждого сечения $z = \text{const}$ как характеристики воздействия со стороны $z + 0$ на сторону $z - 0$; из условий равновесия отрезков стержня следует

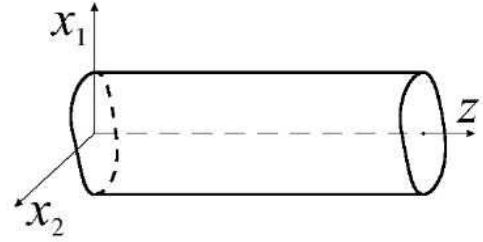


Рис. 12.

$$Q(z) = Q_L, \quad M(z) = M_L + (L - z)\mathbf{k} \times Q. \quad (2.1)$$

Общий случай нагружения стержня в рассматриваемой задаче характеризуется константами Q и M_L . Благодаря правилу суперпозиции общая задача делится на следующие четыре:

- 1°. $Q = Q\mathbf{k}$, $M_L = 0$ — растяжение-сжатие;
- 2°. $Q = 0$, $M_L = M_\alpha e_\alpha \equiv M_\perp$ — чистый изгиб;
- 3°. $Q = 0$, $M_L = M\mathbf{k}$ — кручение;
- 4°. $Q = Q_\perp$, $M_L = 0$ — изгиб силой.

Задачи расположены в порядке возрастания сложности. Разделы, посвященные им, есть во всех курсах теории упругости, но изложение у разных авторов различно. Рассматриваемый здесь вариант позволяет охватить весь общий случай.

Необходимо отметить следующую особенность задачи Сен-Венана. Разыскиваемое в ней решение должно удовлетворять уравнениям в объеме и граничным условиям на боковой поверхности, в то время как условиям на торцах достаточно удовлетворить в интегральном смысле — по силе Q и моменту M . Возникающие при этом невязки в граничных условиях $\mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{T}} = \mathbf{p}$ на торцах порождают некоторые дополнительные поля. Но они локализованы у торцов — в этом состоит известный принцип Сен-Венана.

Данную задачу удобнее решать в напряжениях. Тензор напряжений будем искать в виде $\underline{\mathbf{T}} = \sigma_z \mathbf{k}\mathbf{k} + \boldsymbol{\tau}\mathbf{k} + \mathbf{k}\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\tau} \equiv \tau_{z\alpha} e_\alpha$. Из общих уравнений (1.1), (1.4) получим

$$\sigma_z = a + \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = -\mathbf{b}' \cdot \mathbf{x}, \quad \Delta \boldsymbol{\tau} = -\frac{1}{1 + \nu} \mathbf{b}', \quad (2.2)$$

причем a и \mathbf{b} — линейные функции z (тогда $\mathbf{b}' \equiv d\mathbf{b}/dz = \text{const}$) и $\boldsymbol{\tau}$ не зависит от z ; \mathbf{x} — радиус-вектор в сечении.

Силы и моменты являются следующими интегралами по сечению F :

$$\mathbf{Q} = \int_F (\sigma_z \mathbf{k} + \boldsymbol{\tau}) dF, \quad \mathbf{M} = \int_F \mathbf{x} \times (\sigma_z \mathbf{k} + \boldsymbol{\tau}) dF. \quad (2.3)$$

Вычислив по σ_z растягивающую силу Q_z и изгибающий момент \mathbf{M}_\perp , найдем

$$a = F^{-1} Q_z, \quad \mathbf{b} = \underline{\mathbf{J}}^{-1} \times \mathbf{k} \cdot \mathbf{M}_\perp. \quad (2.4)$$

Учтено, что $\int \mathbf{x} dF = 0$ и обозначено $\int \mathbf{x} \mathbf{x} dF = \underline{\mathbf{J}}$. С помощью (2.1) далее найдем

$$\mathbf{b}' = \underline{\mathbf{J}}^{-1} \cdot \mathbf{Q}_\perp. \quad (2.5)$$

Определив σ_z , приступим к решению уравнений (2.2) для вектора касательного напряжения $\boldsymbol{\tau}$. На свободном контуре ∂F сечения имеем

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0. \quad (2.6)$$

Далее заметим, что всякое векторное поле можно представить в виде $\mathbf{u} = \nabla \varphi + \nabla \times \boldsymbol{\psi}$ (φ – скалярный потенциал, $\boldsymbol{\psi}$ – векторный). Для плоского поля $\boldsymbol{\tau}$ представление таково:

$$\boldsymbol{\tau} = \nabla \varphi + \nabla \boldsymbol{\psi} \times \mathbf{k}. \quad (2.7)$$

Подставив (2.7) в (2.2), получим

$$\Delta \varphi = -\mathbf{b}' \cdot \mathbf{x}, \quad \Delta \boldsymbol{\psi} = -\frac{\nu}{1+\nu} \mathbf{b}' \times \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - 2\mu \boldsymbol{\alpha}, \quad (2.8)$$

где $\boldsymbol{\alpha}$ – некая константа. Заметим, что при отсутствии перерезывающей силы $\mathbf{b}' = 0$ и уравнение для $\boldsymbol{\psi}$ приобретает известный (по задаче о кручении [7]) вид.

Граничное условие (2.7) ведет к следующему:

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = \partial_n \varphi + \partial_l \boldsymbol{\psi} = 0. \quad (2.9)$$

($\partial_n \equiv \mathbf{n} \cdot \nabla$; $\partial_l \equiv \mathbf{k} \times \mathbf{n} \cdot \nabla$ – операторы дифференцирования по нормали и дуговой координате на контуре ∂F). Условие будет выполнено, если принять

$$\partial_n \varphi|_{\partial F} = 0, \quad \boldsymbol{\psi}|_{\partial F} = 0. \quad (2.10)$$

Конечно, это не следует из (2.9). Но ясно, что $\boldsymbol{\tau}$ в форме (2.7) является решением задачи (2.2), (2.6), если φ и $\boldsymbol{\psi}$ удовлетворяют (2.8), (2.10) – чего и достаточно.

Константа α определяется по крутящему моменту M_z . Имеем

$$M_z \mathbf{k} = \int_F \mathbf{x} \times \boldsymbol{\tau} dF = \int_F \mathbf{x} \times \nabla \varphi dF - \mathbf{k} \left(\oint_{\partial F} \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} \psi dl - 2 \int_F \psi dF \right) \quad (2.11)$$

(использованы теорема о дивергенции и равенство $\nabla \cdot (\mathbf{x}\psi) = 2\psi + \mathbf{x} \cdot \nabla \psi$). Контурный интеграл в (2.11) исчезает, а для двух остальных интегралов имеем формулы

$$\begin{aligned} 2 \int_F u dF &= - \int_F \Phi \Delta u dF - \oint_{\partial F} u \partial_n \Phi dl \quad (\Phi : \Delta \Phi = -2, \Phi|_{\partial F} = 0), \\ \int_F \mathbf{x} \times \nabla u \cdot \mathbf{k} dF &= - \oint_{\partial F} W \partial_n u dl + \int_F W \Delta u dF \\ & \quad (W : \Delta W = 0, \partial_n W|_{\partial F} = \mathbf{n} \times \mathbf{x} \cdot \mathbf{k}). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Эти формулы вытекают из равенства

$$\int (u \Delta v - v \Delta u) dF = \oint (u \partial_n v - v \partial_n u) dl$$

при $v = \Phi$ и $v = W$. Φ — это функция напряжений при кручении, W — функция деформации. Используя (2.12) в (2.11), получим

$$\begin{aligned} M_z &= \int (W \Delta \varphi - \Phi \Delta \psi) dF - \oint (W \partial_n \varphi + \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} \psi + \psi \partial_n \Phi) dl = \\ &= -\mathbf{b}' \cdot \left(\int \mathbf{x} W dF + \frac{\nu}{1+\nu} \int \mathbf{x} \Phi dF \times \mathbf{k} \right) + \mu \alpha C, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где $C \equiv 2 \int \Phi dF$ — геометрическая жесткость на кручение.

Допустим, что нагрузка на торце $z = L$ представлена одной лишь сосредоточенной силой. Определив центр изгиба как точку, при приложении силы в которой будет $\alpha = 0$, получим выражение радиус-вектора центра изгиба

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{k} \times \underline{\underline{\mathbf{J}}}^{-1} \cdot \left(\int \mathbf{x} W dF + \frac{\nu}{1+\nu} \int \mathbf{x} \Phi dF \times \mathbf{k} \right). \quad (2.14)$$

Найдя напряжения, можно далее определить перемещения интегрированием соотношений закона Гука ($\nabla = \nabla_{\perp} + \mathbf{k} \partial_z$)

$$(\nabla_{\perp} + \mathbf{k} \partial_z) (\mathbf{u}_{\perp} + \mathbf{k} u_z)^S = \frac{1}{2\mu} \left(\underline{\underline{\mathbf{T}}} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma \underline{\underline{\mathbf{E}}} \right).$$

Подставив в правую часть найденные напряжения, приходим к системе ($E \equiv 2\mu(1 + \nu)$ — модуль Юнга):

$$\nabla_{\perp} \mathbf{u}_{\perp}^S = -\frac{\nu}{E} (a + \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}) \underline{\underline{\mathbf{E}}}_{\perp}, \quad \partial_z u_z = \frac{1}{E} (a + \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}) \quad (2.15)$$

$$\partial_z \mathbf{u}_{\perp} + \nabla_{\perp} u_z = \frac{1}{\mu} (\nabla \varphi + \nabla \psi \times \mathbf{k}). \quad (2.16)$$

Из (2.15) следует

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\perp} &= -\frac{\nu}{E} \left(a\mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}\mathbf{x} - \frac{1}{2} \mathbf{b}x^2 \right) + U_{\perp}(z) + \omega(z)\mathbf{k} \times \mathbf{x} \quad (x \equiv |\mathbf{x}|), \\ u_z &= \frac{1}{E} \left\{ az + \left[\mathbf{b}(L)z - \left(Lz - \frac{1}{2}z^2 \right) \mathbf{b}' \right] \cdot \mathbf{x} \right\} + U_z(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Функции U_{\perp} , ω , U_z пока произвольны. Подставим выражение (2.17) в (2.16); взяв от обеих частей получившегося равенства ротор ($\nabla_{\perp} \times$), получим $\omega' = \alpha$. Взяв же дивергенцию ($\nabla_{\perp} \cdot$), приходим к уравнению

$$\Delta U_z = -\frac{2}{E} \mathbf{b}' \cdot \mathbf{x}. \quad (2.18)$$

Отделяя далее в (2.16) функции только z и только \mathbf{x} , получим

$$U'_{\perp} + \frac{1}{E} \left[\mathbf{b}(L)z - \left(Lz - \frac{1}{2}z^2 \right) \mathbf{b}' \right] = \text{const} = 0, \quad (2.19)$$

$$\nabla \left(U_z - \frac{\nu}{4E} \mathbf{b}' \cdot \mathbf{x}x^2 - \frac{1}{\mu} \varphi \right) = \nabla \left(\frac{1}{\mu} \psi + \frac{\nu}{4E} \mathbf{b}' \times \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}x^2 + \frac{1}{2} \alpha x^2 \right) \times \mathbf{k}. \quad (2.20)$$

Уравнение (2.19) определяет U_{\perp} как прогиб в элементарной теории балки; отброшенная константа соответствует перемещению твердого тела. Равенство (2.20) — условие Коши-Римана из теории функций комплексного переменного ($\nabla u = \nabla v \times \mathbf{k} \Rightarrow \partial_x u = \partial_y v, \partial_y u = -\partial_x v$). Значит, в скобках в (2.20) стоят сопряженные гармонические функции. Зная одну из них, можно простым интегрированием определить другую. Поэтому депланацию U_z можно определить по φ и ψ , минуя (2.18).

4.3. Определение жесткостей по энергии

В одномерной модели стержня имеем перемещение $\mathbf{u}(s)$, поворот $\theta(s)$, силу $\mathbf{Q}(s)$ и момент $\mathbf{M}(s)$. Первая пара связана со второй соотношениями

упругости $\theta' = \underline{\underline{A}} \cdot M + \underline{\underline{C}} \cdot Q$, $u' - \theta \times t = \underline{\underline{B}} \cdot Q + M \cdot \underline{\underline{C}}$. Ясно, что модули (тензоры податливости $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$, $\underline{\underline{C}}$ или тензоры жесткости $\underline{\underline{a}}$, $\underline{\underline{b}}$, $\underline{\underline{c}}$) можно определить только с помощью решений трехмерных задач для стержня. Но возникают два вопроса: какие задачи рассматривать и что конкретно следует сделать с их решениями?

О задачах. На первом месте стоит задача Сен-Венана, ведь жесткость на кручение — из нее. Но есть бесконечно много доступных точных решений, получаемых в обратном порядке: задаем поле $u(\mathbf{r})$, по нему находим $\underline{\underline{T}} = {}^4\underline{\underline{C}} \cdot \nabla u$ и далее определяем объемные $K = -\nabla \cdot \underline{\underline{T}}$ и поверхностные $p = n \cdot \underline{\underline{T}}$ нагрузки ...

Следующий вопрос — что делать с решением? Ясно, что Q и M — это интегралы (2.3). Но что считать перемещением и поворотом в одномерной модели? Можно, например, предложить варианты

$$u_1(z) = F^{-1} \int_F u_3(\mathbf{x}, z) dF, \quad \theta(z) = \frac{1}{2} F^{-1} \int_F \nabla \times u_3 dF$$

(значок $(\dots)_1$ или $(\dots)_3$ указывает на размерность модели). Но возможны и многие другие варианты — чем они хуже?

Но есть еще величина, смысл которой не вызывает сомнений, — энергия деформации. Естественно потребовать, чтобы в одномерной и трехмерной моделях энергии совпали. При этом будем исходить из $\hat{\Pi}(M, Q)$, а не $\Pi(\theta', \gamma)$ — тогда исчезнет произвол в трактовке u_1 и θ . Итак, постулируем равенство ²

$$\hat{\Pi}(M, Q) = \int_F \Pi_3 dF \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} \left(2\hat{\Pi} = M \cdot \underline{\underline{A}} \cdot M + Q \cdot \underline{\underline{B}} \cdot Q + 2M \cdot \underline{\underline{C}} \cdot Q, \quad 2\Pi_3 = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{\epsilon}} = \right. \\ \left. = \frac{1}{2\mu} \left(\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{T}} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma^2 \right) \right). \end{aligned}$$

Отметим, что речь идет о тождестве аналитических выражений энергии, а не просто о равенстве численных значений. Это согласуется как с правилами общей механики, так и с представлениями механики композитов и континуальной теории дефектов.

²По z это тождество

В правой части (3.1) для задачи Сен-Венана имеем

$$\begin{aligned}\hat{\Pi} &= \frac{1}{2} \int_F (E^{-1} \sigma_z^2 + \mu^{-1} \tau^2) dF \quad (\tau \equiv |\tau|), \\ \int \sigma_z^2 dF &= F^{-1} Q_z^2 + M_{\perp} \cdot \underline{\underline{I}} \cdot M_{\perp} \quad (\underline{\underline{I}} \equiv -\mathbf{k} \times \underline{\underline{J}} \times \mathbf{k}), \\ \int \tau^2 dF &= \oint (\varphi \partial_n \varphi + \psi \partial_n \psi - 2\psi \mathbf{n} \times \nabla \varphi \cdot \mathbf{k}) dl - \int (\varphi \Delta \varphi + \psi \Delta \psi) dF. \quad (3.2)\end{aligned}$$

В последнем равенстве контурный интеграл равен нулю. Представим далее потенциалы в виде

$$\varphi = -\mathbf{b}' \cdot \boldsymbol{\varphi}, \quad \psi = -\frac{\nu}{1+\nu} \mathbf{b}' \times \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\psi} + \mu \alpha \Phi, \quad (3.3)$$

$$\Delta \varphi = \Delta \psi = \mathbf{x}, \quad \partial_n \varphi|_{\partial F} = 0, \quad \psi|_{\partial F} = 0. \quad (3.4)$$

Введем также векторы

$$\boldsymbol{\eta} \equiv \underline{\underline{J}}^{-1} \cdot \int \mathbf{x} W dF, \quad \boldsymbol{\xi} \equiv \frac{\nu}{1+\nu} \underline{\underline{J}}^{-1} \cdot \int \mathbf{x} \Phi dF \times \mathbf{k}; \quad (3.5)$$

тогда радиус-вектор центра изгиба $\mathbf{x}^* = \mathbf{k} \times (\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi})$ (формула (2.14) и (2.13) примет вид

$$\mu \alpha C = M_z + \mathbf{Q}_{\perp} \cdot (\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}). \quad (3.6)$$

Подставив (3.3) и (3.6) в (3.2), получим

$$\int \tau^2 dF = \mathbf{Q}_{\perp} \cdot (F \underline{\underline{K}})^{-1} \cdot \mathbf{Q}_{\perp} + (M_z^2 + 2M_z \mathbf{Q}_{\perp} \cdot \boldsymbol{\eta}) / C, \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned}(F \underline{\underline{K}})^{-1} &\equiv \underline{\underline{J}}^{-1} \cdot \left(- \int \varphi \mathbf{x} dF + \left(\frac{\nu}{1+\nu} \right)^2 \mathbf{k} \times \int \psi \mathbf{x} dF \times \mathbf{k} \right) \cdot \underline{\underline{J}}^{-1} + \\ &+ (\boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\xi}) / C. \quad (3.8)\end{aligned}$$

Равенства (3.2) и (3.7) дают искомое выражение энергии. Проверим его:

$$\begin{aligned}\delta \Pi &= (EF)^{-1} Q_z \delta Q_z + M_{\perp} \cdot (EI)^{-1} \cdot \delta M_{\perp} + \mathbf{Q}_{\perp} \cdot (\mu F \underline{\underline{K}})^{-1} \cdot \delta \mathbf{Q}_{\perp} + \\ &+ (\mu C)^{-1} [(M_z + \mathbf{Q}_{\perp} \cdot \boldsymbol{\eta}) \delta M_z + M_z \boldsymbol{\eta} \cdot \delta \mathbf{Q}_{\perp}]. \quad (3.9)\end{aligned}$$

С другой стороны, в одномерной модели имеем

$$\delta\Pi = \boldsymbol{\theta}'_{\perp} \cdot \delta\mathbf{M}_{\perp} + \theta'_z \delta M_z + \boldsymbol{\gamma}_{\perp} \cdot \delta\mathbf{Q}_{\perp} + \gamma_z \delta Q_z.$$

Сравнивая это выражение с (3.9), заключаем:

$$\begin{aligned} \gamma_z &= (EF)^{-1} Q_z, \quad \boldsymbol{\theta}'_{\perp} = (E\mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{M}_{\perp}, \quad \theta'_z = (\mu C)^{-1} (M_z + \mathbf{Q}_{\perp} \cdot \boldsymbol{\eta}) \\ \boldsymbol{\gamma}_{\perp} &= (\mu F \mathbf{K})^{-1} \cdot \mathbf{Q}_{\perp} + (\mu C)^{-1} \boldsymbol{\eta} M_z. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Это и есть искомые соотношения упругости. В них фигурируют известные по курсам сопротивления материалов жесткости на растяжение (EF) и изгиб $(E\mathbf{I})$, а также знакомая по задаче Сен-Венана жесткость на кручение (μC) . Но есть две новые детали.

Во-первых, перекрестная связь между изгибом и кручением определяется в (3.10) вектором $\boldsymbol{\eta}$ — не суммой $\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}$, как в (3.6). Соответственно упрощается формула для радиуса-вектора центра изгиба: в (2.14) исчезает второе слагаемое (с Φ). Такое превращение связано с тем, что $\theta'_z \neq \alpha$.

Второе, что следует отметить, — это тензор жесткости на сдвиг $\mu F \mathbf{K}$. Коэффициенты сдвига \mathbf{K} определяются формой сечения по решениям краевых задач для φ , ψ , W и Φ . Для прямоугольного сечения задачи решаются методом собственных функций, а для эллипса решение оказывается элементарным. В случае круга получим

$$\mathbf{K} = \frac{6(1 + \nu)^2}{7 + 14\nu + 8\nu^2} \mathbf{E}_{\perp}. \quad (3.11)$$

4.4. Вариационный метод сведения трехмерной задачи к одномерной

Рассмотрим стержень произвольной геометрии как трехмерное тело (рис. 13). Ось стержня определяется зависимостью радиуса-вектора от дуговой координаты $\mathbf{r}(s)$. В каждой точке оси имеем нормальное сечение с декартовыми осями x_{α} и ортами \mathbf{e}_{α} . Радиус-вектор любой точки стержня как трехмерного тела представляется в виде

$$\mathbf{R}(s, x_{\alpha}) = \mathbf{r}(s) + \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \equiv x_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha}(s). \quad (4.1)$$

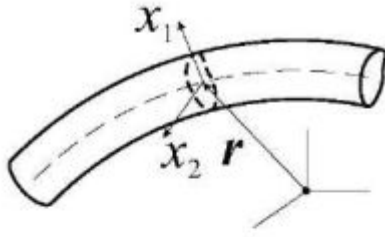


Рис. 13.

За долгую историю механики стержней было много попыток перейти от трехмерной модели к одномерной с помощью тех или иных гипотез о распределении неизвестных по сечению, т. е. о зависимости их от x_α . Как правило, при этом получались какие-либо невязки в уравнениях теории упругости. Но был найден способ облагородить такой «метод гипотез», сделать его формально чистым. Это — метод Канторовича [14]. В нашем случае он состоит в следующем. Задается аппроксимация перемещений

$$\hat{u} = \sum \alpha_k(s) \varphi_k(x_\beta), \quad (4.2)$$

где φ_k назначаются, а α_k подлежат определению. Это аппроксимация подставляется в вариационное уравнение Лагранжа (1.6). Результатом будут система обыкновенных дифференциальных уравнений (для α_k) и естественные граничные условия к ним.

Направивается следующая аппроксимация:

$$\hat{u} = U(s) + \theta(s) \times x; \quad (4.3)$$

при независимых U и θ получим систему уравнений модели Коссера. Если же задать связь $U' = \theta \times r'$, то вариационная процедура даст модель Кирхгофа-Клебша. При этом нет, кажется, проблем с упругими модулями — достаточно вычислить соответствующие интегралы по сечению.

Этот метод допускает грандиозные обобщения. Добавляя в аппроксимацию новые варьируемые функции, можно строить уточненные модели с внутренними степенями свободы. Можно учесть динамику, вводя варьируемые силы инерции. Нет трудностей с неоднородным телом (изменятся лишь интегралы по сечению). Наконец, можно рассмотреть и температурные деформации, взяв соответствующий вариационный принцип.

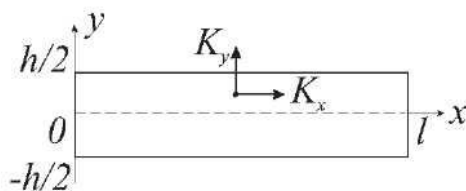


Рис. 14.

вариационного метода.

Однако у метода есть серьезнейший недостаток: аппроксимация задается нами, а не выводится из законов природы. . . Это не в правилах фундаментальных исследований, но допустимо для прикладных разработок.

Рассмотрим примеры применения вариационного метода.

1°. Изгиб полосы

Полоса (рис. 14) нагружена лишь объемными силами \mathbf{K} и находится в плоском напряженном состоянии. Компонента K_x нечетна по y , а K_y — четна. Тогда нечетными будут u_x , σ_x и σ_y , а u_y и τ_{xy} — четными.

Исходное вариационное уравнение имеет вид

$$\int_0^l dx \int_{-h/2}^{h/2} (\mathbf{K} \cdot \delta \mathbf{u} - \delta \Pi) dy = 0;$$

$$\Pi \equiv \frac{E}{2(1-\nu^2)} (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_y) + \frac{\mu}{2} \gamma_{xy}^2$$

$$(\varepsilon_x \equiv \partial_x u_x, \quad \varepsilon_y \equiv \partial_y u_y, \quad \gamma_{xy} \equiv \partial_x u_y + \partial_y u_x). \quad (4.4)$$

Зададим аппроксимацию

$$u_x = -\theta(x)y, \quad u_y = v(x). \quad (4.5)$$

Тогда двумерная вариационная постановка (4.4) перейдет в одномерную:

$$\int_0^l (q\delta v + m\delta\theta - \delta\Pi_1) dx = 0;$$

$$q \equiv \int_{-h/2}^{h/2} K_y dy, \quad m \equiv - \int_{-h/2}^{h/2} K_x y dy,$$

$$\Pi_1 \equiv \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \theta'^2 + \frac{\mu h}{2} (v' - \theta)^2. \quad (4.6)$$

Это — модель Тимошенко. Но упругие модули получились не такими, как в энергии по Сен-Венану: в жесткости на изгиб появился множитель $1 - \nu^2$, а коэффициент сдвига оказался единицей вместо $5/6$.

Если вместо (4.5) взять $u_x = -v'y$, $u_y = v$, то получится модель Бернулли-Эйлера; вариационная постановка даст не систему, а лишь одно уравнение для v .

2°. Уточненная теория продольной деформации

Опять рассмотрим полосу (рис. 14), но теперь K_x четна по y , K_y — нечетна. Простейшая модель продольной деформации соответствует аппроксимации $u_x = u(x)$, $u_y = 0$. В динамике при этом имеем волновое

уравнение, дисперсии нет. Более сложная модель получится при

$$u_x = u(x, t), \quad u_y = \psi(x, t)y. \quad (4.7)$$

Опуская простые выкладки, отметим лишь, что здесь будет пара дисперсионных ветвей. Это модель с внутренней степенью свободы — поперечной деформацией ψ . Соответственно и во внешней нагрузке появится новый силовой фактор (множитель при $\delta\psi$).

3°. Применение принципа Рейсснера

Разберем подробнее этот вопрос как для иллюстрации возможностей нового вариационного принципа, так и для освоения техники произвольных криволинейных координат.

Речь пойдет о криволинейной полосе (рис. 15) при плоском напряженном состоянии. Радиус-вектор произвольной точки представляется в виде

$$\mathbf{R}(s, n) = \mathbf{r}(s) + n\mathbf{n}(s) \quad (4.8)$$

($\mathbf{t} = \mathbf{r}'$, $\mathbf{t}' = kn$ — соотношения для ортов касательной и нормали, а также кривизны k).

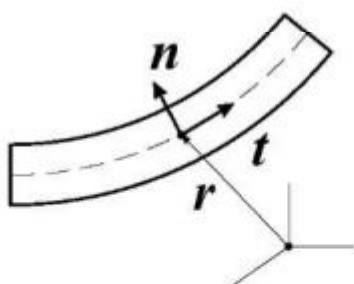


Рис. 15.

В общем случае криволинейных координат радиус-вектор является функцией $\mathbf{r}(q^i)$. В каждой точке тела имеем векторный базис $\mathbf{r}_i \equiv \partial\mathbf{r}/\partial q^i$. Там же вводится и взаимный базис, или кобазис \mathbf{r}^k , так, чтобы выполнялись равенства $\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}^k = \delta_i^k$ (в подобных случаях различают нижние и верхние индексы). Оператор Гамильтона будет равен $\nabla = \mathbf{r}^i \partial/\partial q^i$.

Эта техника в случае (4.8) выглядит так:

$$q^1 \equiv s, \quad q^2 \equiv n; \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{t}(1 - kn), \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{n}, \quad \mathbf{r}^1 = \mathbf{t}(1 - kn)^{-1}, \quad \mathbf{r}^2 = \mathbf{n};$$

$$\nabla = (1 - kn)^{-1} \mathbf{t} \partial_s + \mathbf{n} \partial_n. \quad (4.9)$$

Теперь обратимся к принципу Рейсснера. Для трехмерной задачи (п. 4.1) он формулируется следующим образом [7]:

$$\delta R = 0, \quad R(\mathbf{u}, \underline{\mathbf{T}}) \equiv \int_V \left(\underline{\mathbf{T}} \cdot \nabla \mathbf{u}^S - \widehat{\Pi}(\underline{\mathbf{T}}) - \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} \right) dV -$$

$$- \int_{O_1} \mathbf{n} \cdot \underline{\mathbf{T}} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) dO - \int_{O_2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} dO, \quad (4.10)$$

где $\widehat{\Pi}$ — дополнительная энергия; $\partial\widehat{\Pi}/\partial\underline{\mathbf{T}} = \underline{\underline{\varepsilon}}$. Варьируемые функции \mathbf{u} и $\underline{\mathbf{T}}$ не обязаны удовлетворять краевым условиям, принцип их обеспечит.

Для краткости будем считать, что полоса, изображенная на рис. 15, нагружена лишь внутри. Тогда функционал (4.10) примет вид

$$R = \int_0^l ds \int_{-h/2}^{h/2} \left[\sigma_t \varepsilon_t + \sigma_n \varepsilon_n + \tau_{tn} \gamma_{tn} - \frac{1}{2E} (\sigma_t^2 + \sigma_n^2 - 2\nu\sigma_t\sigma_n) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2\mu} \tau_{tn}^2 - K_t u_t - K_n u_n \right] (1 - kn) dn. \quad (4.11)$$

Здесь учтено, что элемент площади $dF = (1 - kn) ds dn$. Выражения деформаций через перемещения выводятся так:

$$\mathbf{u} = u_t \mathbf{t} + u_n \mathbf{n}, \quad \nabla \mathbf{u} = (1 - kn)^{-1} \mathbf{t} [(\partial_s u_t - k u_n) \mathbf{t} + (\partial_s u_n + k u_t) \mathbf{n}] + \\ + \mathbf{n} (\partial_n u_t \mathbf{t} + \partial_n u_n \mathbf{n}) \Rightarrow \varepsilon_t = (1 - kn)^{-1} (\partial_s u_t - k u_n), \quad \varepsilon_n = \partial_n u_n, \\ \gamma_{tn} = (1 - kn)^{-1} (\partial_s u_n + k u_t) + \partial_n u_t. \quad (4.12)$$

Самый ответственный шаг при вариационном построении одномерной модели — аппроксимация по сечению:

$$u_t = U_t(s) - \theta(s)n, \quad u_n(s) = U_n(s), \\ \sigma_t = \frac{1}{h} Q_t(s) - \frac{12}{h^3} M(s)n, \quad \sigma_n = 0, \quad \tau_{tn} = \frac{1}{h} Q_n(s). \quad (4.13)$$

Это соответствует представлениям о перемещении стержня U , повороте θ , силе Q и моменте M .

Подстановка (4.13) в (4.11) с учетом (4.12) дает функционал

$$R = \int_0^l \left[\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{U}' - \theta \mathbf{n}) + M \theta' - \frac{1}{2Eh} Q_t^2 - \frac{6}{Eh^3} M^2 - \frac{k}{Eh} Q_t M - \frac{1}{2\mu h} Q_n^2 - \right. \\ \left. - \mathbf{q} \cdot \mathbf{U} - m \theta \right] ds; \quad \mathbf{q} \equiv \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{K} (1 - kn) dn, \quad m \equiv - \int_{-h/2}^{h/2} K_t (1 - kn) n dn. \quad (4.14)$$

Из вариационного уравнения $\delta R = 0$ после интегрирования по частям получим систему уравнений одномерной модели и естественных граничных

условий к ним:

$$\begin{aligned}
 Q' + q &= 0, & M' + Q_n + m &= 0, \\
 U_t' - kU_n &= \frac{1}{Eh} (Q_t + kM), & U_n' + kU_t - \theta &= \frac{1}{\mu h} Q_n, \\
 \theta' &= \frac{12}{Eh^3} M + \frac{k}{Eh} Q_t; \\
 s = 0, l : & \quad Q = 0, \quad M = 0.
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Обращает на себя внимание перекрестная связь в соотношениях упругости, обусловленная кривизной k .

Но почему в этой задаче применили именно принцип Рейсснера? Потому что он позволяет аппроксимировать напряжения независимо от перемещений. Это упрощает построение одномерной модели.

4.5. Асимптотический метод в плоской задаче об изгибе

Рассмотрим снова задачу об изгибе полосы (рис. 14). Чтобы подчеркнуть малость относительной толщины, введем малый параметр λ и представим радиус-вектор в области полосы в виде $\mathbf{R} = \lambda^{-1}x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$; $0 \leq x \leq l$, $-h/2 \leq y \leq h/2$, \mathbf{i} и \mathbf{j} — орты декартовых осей x и y . Тогда полная система уравнений теории упругости запишется в виде

$$\begin{aligned}
 \lambda \partial_x \sigma_x + \partial_y \tau + K_x &= 0, & \lambda \partial_x \tau + \partial_y \sigma_y + K_y &= 0, \\
 \varepsilon_x = \lambda \partial_x u_x = E^{-1} (\sigma_x - \nu \sigma_y), & \quad \varepsilon_y = \partial_y u_y = E^{-1} (\sigma_y - \nu \sigma_x), \\
 2\varepsilon_{xy} = \lambda \partial_x u_y + \partial_y u_x &= \mu^{-1} \tau.
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned}
 y = \pm h/2 : & \quad \sigma_y = \tau = 0; \\
 x = 0, l : & \quad \sigma_x = f_{x0,l}(y), \quad \tau = f_{y0,l}(y).
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Учет нагрузок на сторонах $|y| = h/2$ малоинтересен, в то время как с условиями при $x = 0, l$ придется повозиться. Вся система нагрузок предполагается самоуравновешенной.

Поставленную задачу с малым параметром можно решать как систему для \mathbf{u} , $\underline{\underline{\varepsilon}}$, $\underline{\underline{\tau}}$, можно все выразить через \mathbf{u} , но лучше всего исходить из уравнений «в напряжениях». При этом понадобится уравнение совместности

$$\Delta \theta = \nabla \cdot \nabla \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (\theta \equiv \text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}}), \tag{5.3}$$

что в пересчете на напряжения означает $\Delta\sigma + (1 + \nu)\nabla \cdot \mathbf{K} = 0$.

Поскольку у нас $\nabla = \lambda i \partial_x + j \partial_y$, то будем иметь

$$(\lambda^2 \partial_x^2 + \partial_y^2) (\sigma_x + \sigma_y) + (1 + \nu) (\lambda \partial_x K_x + \partial_y K_y) = 0. \quad (5.4)$$

Систему трех уравнений — (5.4) и два первых в (5.1) — и предстоит решать.

Разложение $\underline{\mathbf{T}} = \underline{\mathbf{T}}^{(0)} + \lambda \underline{\mathbf{T}}^{(1)} + \dots$ не проходит, так как ведет к противоречиям. Так же будет и в случае $\underline{\mathbf{T}} = \lambda^{-1} \underline{\mathbf{T}}^{(0)} + \underline{\mathbf{T}}^{(1)} + \dots$. Остановимся на следующем:

$$\underline{\mathbf{T}} = \lambda^{-2} \underline{\mathbf{T}}^{(0)} + \lambda^{-1} \underline{\mathbf{T}}^{(1)} + \dots \quad (5.5)$$

Для главных членов получим

$$\partial_y \tau^{(0)} = 0, \quad \partial_y \sigma_y^{(0)} = 0, \quad \partial_y^2 (\sigma_x^{(0)} + \sigma_y^{(0)}) = 0,$$

что в сочетании с условиями при $|y| = h/2$ дает

$$\tau^{(0)} = \sigma_y^{(0)} = 0, \quad \sigma_x^{(0)} = b^{(0)}(x)y. \quad (5.6)$$

Функция $b^{(0)}(x)$ пока произвольна; учтено, что σ_x нечетно по y .

На следующем шаге будем иметь

$$\begin{aligned} \partial_x \sigma_x^{(0)} + \partial_y \tau^{(1)} = 0, \quad \partial_x \tau^{(0)} + \partial_y \sigma_y^{(1)} = 0, \quad \partial_y^2 (\sigma_x^{(1)} + \sigma_y^{(1)}) = 0; \\ \tau^{(1)} = \frac{1}{2} b^{(0)} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right), \quad \sigma_y^{(1)} = 0, \quad \sigma_x^{(1)} = b^{(1)}(x)y \quad \left((\dots)' \equiv d/dx \right). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Наконец, для членов $O(1)$ получим

$$\begin{aligned} \partial_x \sigma_x^{(1)} + \partial_y \tau^{(2)} + K_x = 0, \quad \partial_x \tau^{(1)} + \partial_y \sigma_y^{(2)} + K_y = 0, \\ \partial_x^2 (\sigma_x^{(0)} + \sigma_y^{(0)}) + \partial_y^2 (\sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(2)}) + (1 + \nu) \partial_y K_y = 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Назначение этой системы — не в определении малых поправочных членов. Важны условия разрешимости

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} (\partial_x \sigma_x^{(1)} + K_x) dy + \tau^{(2)} \Big|_{-h/2}^{h/2} = 0, \\ \int_{-h/2}^{h/2} (\partial_x \tau^{(1)} + K_y) dy + \sigma_y^{(2)} \Big|_{-h/2}^{h/2} = 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Первое из этих условий удовлетворяется тождественно, а второе дает

$$\frac{h^3}{12} \ddot{b}^{(0)} + q = 0, \quad q \equiv \int_{-h/2}^{h/2} K_y dy. \quad (5.10)$$

О граничных условиях к этому уравнению — позже. Как и в случае сингулярно возмущенной алгебраической системы (п. 2.8), мы сделали ровно столько шагов, сколько необходимо для определения главного члена асимптотики. При этом на последнем шаге понадобились лишь соответствующие условия разрешимости.

По найденным напряжениям можно определить перемещения интегрированием соотношений закона Гука (5.1). Очевидно, \mathbf{u} должно содержать λ^{-2} , но оказывается, что начать надо с λ^{-4} :

$$\mathbf{u} = \lambda^{-4} \mathbf{u}^{(0)} + \lambda^{-3} \mathbf{u}^{(1)} + \dots \quad (5.11)$$

Для главных членов получим

$$\partial_x u_x^{(0)} = 0, \quad \partial_y u_y^{(0)} = 0, \quad \partial_y u_x^{(0)} = 0.$$

Отсюда, учитывая четность u_y и нечетность u_x , находим

$$u_x^{(0)} = 0, \quad u_y^{(0)} = v^{(0)}(x). \quad (5.12)$$

Следующие члены:

$$\begin{aligned} \partial_x u_x^{(1)} &= E^{-1} \left(\sigma_x^{(0)} - \nu \sigma_y^{(0)} \right) = E^{-1} b^{(0)} y, \quad \partial_y u_y^{(1)} = 0, \\ \partial_x u_y^{(0)} + \partial_y u_x^{(1)} &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow u_y^{(1)} &= v^{(1)}(x), \quad u_x^{(1)} = -\dot{v}^{(0)} y, \quad -\ddot{v}^{(0)} = E^{-1} b^{(0)}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Подставив последнее соотношение в (5.10), получим

$$\frac{1}{12} E h^3 \frac{d^4 v^{(0)}}{dx^4} = q. \quad (5.14)$$

Подтвердились все положения элементарной теории балки Бернулли-Эйлера; в отличие от задачи Сен-Венана рассмотрен случай произвольных «объемных» сил.

Однако необходимо поставить граничные условия. Найденным напряжениям соответствуют следующие изгибающие моменты и перерезывающие силы:

$$M = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x y dy = -\lambda^{-2} b^{(0)} h^3 / 12 + \dots = \lambda^{-2} \ddot{v}^{(0)} E h^3 / 12 + \dots$$

$$Q = \int_{-h/2}^{h/2} \tau dy = \lambda^{-1} \dot{b}^{(0)} h^3 / 12 + \dots = -\lambda^{-1} \ddot{v}^{(0)} E h^3 / 12 + \dots \quad (5.15)$$

Можно потребовать, чтобы на концах полосы эти M и Q , принимали значения, соответствующие приложенным нагрузкам $f_{0,l}$. При этом граничные условия для σ_x и τ на концах выполнены не будут. Но со ссылкой на принцип Сен-Венана можно заявить, что последствия невязок в граничных условиях будут локализованы у концов.

В данной задаче можно обойтись без принципа Сен-Венана и рассмотреть граничные условия более тщательно. Выше мы построили так называемое внешнее разложение (по другой терминологии — проникающее решение, или основной итерационный процесс). Вблизи же концов решение следует искать в другом виде, называемом внутренним разложением, или погранслоем, или вспомогательным итерационным процессом. Рассмотрим погранслоем у $x = 0$.

В уравнениях (5.1), (5.4) положим $x = \lambda \tilde{x}$, считая при этом $0 \leq \tilde{x} < \infty$; для краткости вместо \tilde{x} будем писать просто x . Это значит, что в (5.1) и (5.4) будет $\lambda = 1$. Поскольку во внешнем разложении $\underline{T} = O(\lambda^{-2})$, то внутреннее разложение будем также искать в виде (5.5). Для главных членов получим

$$\begin{aligned} \partial_x \sigma_x^{(0)} + \partial_y \tau^{(0)} &= 0, & \partial_x \tau^{(0)} + \partial_y \sigma_y^{(0)} &= 0, \\ (\partial_x^2 + \partial_y^2) (\sigma_x^{(0)} + \sigma_y^{(0)}) &= 0. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Граничные условия на сторонах $|y| = h/2$: $\sigma_y = \tau = 0$. А вот условие при $x = 0$ следует скорректировать. Концевые нагрузки $f_{0,l}$ должны уравновешивать систему «объемных» нагрузок K . Отсюда в общем случае следует, что $f_x = O(\lambda^{-2})$, $f_y = O(\lambda^{-1})$. Поэтому изменим условие так:

$$x = 0 : \quad \sigma_x = \lambda^{-2} f_{0x}(y), \quad \tau = \lambda^{-1} f_{0y}(y),$$

что для внутреннего разложения означает

$$x = 0 : \quad \sigma_x^{(0)} = f_{0x}, \quad \tau^{(0)} = 0; \quad \sigma_x^{(1)} = 0, \quad \tau^{(1)} = f_{0y}. \quad (5.17)$$

Отметим, что уравнения с $\underline{T}^{(1)}$ выглядят так же, как с $\underline{T}^{(0)}$ — (5.16).

Еще надо поставить условия при $x \rightarrow \infty$. Это будут условия сращивания с внешним разложением, о них — позже.

Приступая к решению (5.16), будем опираться на аналогию с системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Начнем с экспоненциальных частных решений:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(0)} &= \sigma_x(y)e^{-\Lambda x}, \quad \sigma_y^{(0)} = \sigma_y(y)e^{-\Lambda x}, \quad \tau^{(0)} = \tau(y)e^{-\Lambda x}; \\ \tau' &= \Lambda\sigma_x, \quad \sigma_y' = \Lambda\tau, \quad (d^2/dy^2 + \Lambda^2)(\sigma_x + \sigma_y) = 0; \\ |y| &= h/2 : \quad \sigma_y = \tau = 0. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Пришли к задаче на собственные значения. Считая, что $\Lambda \neq 0$, получим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \Lambda^{-2}\sigma_y'', \quad (d^2/dy^2 + \Lambda^2)^2\sigma_y = 0; \\ \sigma_y &= B_1 \sin \Lambda y + B_2 \Lambda y \cos \Lambda y, \quad \tau = (B_1 + B_2) \cos \Lambda y - B_2 \Lambda y \sin \Lambda y; \\ \Lambda h &\equiv \alpha = \sin \alpha. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Константа B_1 произвольна, учтены соображения четности.

Корни характеристического уравнения известны [7]:

$$\alpha_1 = 7.46 + 2.77i, \quad \alpha_2 = 13.90 + 3.35i, \quad \alpha_3 = 20.24 + 3.72i, \dots$$

Это корни из первого квадранта; противоположные по знаку и комплексно сопряженные также будут корнями.

Собственные функции, отвечающие корням α_k , не дают в сечении $x = \text{const}$ ни сил, ни моментов:

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \tau dy &= \Lambda^{-1} \sigma_y \Big|_{-h/2}^{h/2} = 0, \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x y dy &= \Lambda^{-1} \left(\tau y \Big|_{-h/2}^{h/2} - \int_{-h/2}^{h/2} \tau dy \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Однако характеристическое уравнение $\sin \alpha = \alpha$ имеет еще нулевой корень третьей кратности. Он требует особого рассмотрения. Соответствующее ему решение ищем в виде

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(0)} &= \sigma_{x0} + \sigma_{x1}x + \sigma_{x2}x^2, & \sigma_y^{(0)} &= \sigma_{y0} + \sigma_{y1}x + \sigma_{y2}x^2, \\ \tau^{(0)} &= \tau_0 + \tau_1x + \tau_2x^2.\end{aligned}\quad (5.21)$$

Девять величин $\sigma_{x0}, \dots, \tau_2$ — искомые функции y . При этом $\sigma_{y0}, \sigma_{y1}, \dots, \tau_2$ должны обращаться в нуль при $|y| = h/2$. Подставив (5.21) в (5.16) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x , получим систему обыкновенных уравнений для $\sigma_{x0}, \dots, \tau_2$. Учитывая условия при $|y| = h/2$, окончательно придем к следующему вкладу нулевого корня:

$$\sigma_x = (A_0 + A_1x)y, \quad \tau = \frac{1}{2}A_1 \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right), \quad \sigma_y = 0, \quad (5.22)$$

где A_0 и A_1 — произвольные константы. Отметим, что так же выглядит решение задачи Сен-Венана об изгибе полосы.

Получив набор частных решений, общее решение примем в виде

$$\begin{aligned}\sigma_x^{(0)} &= (A_0 + A_1x)y + \sum_k C_k^{(0)} \sigma_{x(k)}(y) e^{-\Lambda_k x}, \\ \tau^{(0)} &= \frac{1}{2}A_1^{(0)} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) + \sum_k C_k^{(0)} \tau_{(k)}(y) e^{-\Lambda_k x}, \\ \sigma_y^{(0)} &= \sum_k C_k^{(0)} \sigma_{y(k)}(y) e^{-\Lambda_k x}.\end{aligned}\quad (5.23)$$

Для набора констант $A_0^{(0)}, A_1^{(0)}, C_k^{(0)}$ у нас есть условия при $x = 0$ (5.17). Чтобы определить все константы, придется привлечь соотношения обобщенной ортогональности [7]. Однако $A_0^{(0)}$ и $A_1^{(0)}$ можно найти просто по моменту и силе, опираясь на (5.20):

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x^{(0)} \Big|_{x=0} y dy = A_0^{(0)} \frac{h^3}{12}, \quad \int_{-h/2}^{h/2} \tau^{(0)} \Big|_{x=0} dy = A_1^{(0)} \frac{h^3}{12}. \quad (5.24)$$

Левые части здесь известны из (5.17), при этом $A_1^{(0)} = 0$.

Точно так же строится следующий член внутреннего разложения $\underline{\underline{T}}^{(1)}$. Он будет иметь вид (5.23), но с другими константами $A_0^{(1)}, A_1^{(1)}, C_k^{(1)}$; теперь получим $A_0^{(1)} = 0$.

Будем считать, что погранслоем построен. Правда, нет выражений $C_k^{(0)}$ и $C_k^{(1)}$, но к проблеме перехода от «трехмерной» модели к одномерной они не имеют отношения. Назначение погранслоя при этом — в постановке граничных условий для внешнего разложения. Эта постановка называется процедурой сращивания [10].

Простейшая процедура сращивания была предложена Прандтлем: предел погранслоя при $\tilde{x} \rightarrow \infty$ должен быть равен пределу внешнего разложения при $x \rightarrow 0$. Но иногда требуется более общее условие Ван Дайка « m -членное внутреннее разложение n -членного внешнего разложения равно n -членному внешнему разложению m -членного внутреннего разложения». Часто берут $m = n = 2$.

При сращивании отбрасывают растущие экспоненты во внутреннем разложении. В (5.23) оставляют лишь те $C_k^{(0)}$, которые связаны с α_k из правой полуплоскости. Растущий член A_1xy в выражении σ_x не может быть отброшен и «подталкивает» к применению условия Ван Дайка. Но можно ограничиться условием Прандтля, если разложения σ_x и τ сращивать независимо одно от другого.

В результате получим граничные условия для уравнений (5.10) и (5.14): сращивая σ_x , приходим к условиям на $b^{(0)}$ и $\dot{v}^{(0)}$, а сращивание τ даст условия на $\dot{b}^{(0)}$ и $\ddot{v}^{(0)}$. Отметим, что построение погранслоя сложно, а итоги оказались в полном соответствии с принципом Сен-Венана.

Вернемся к внешним разложениям. Мы построили их для задачи статики. Рассмотрим теперь возможности перехода к динамике. Этот вопрос очень сложен. Но приемлемое и простое решение можно получить, если вместе с продольным растяжением изменить и временной масштаб, т. е. искать решение вида $\mathbf{u}(\lambda x, y, \lambda^2 t)$.

При обычной постановке динамических задач к объемным силам \mathbf{K} добавляются инерционные $-\rho \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2$. В постановке с малым параметром роль инерционной нагрузки сыграет $-\lambda^4 \rho \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2$.

Но поскольку $\mathbf{u} = O(\lambda^{-4})$, то инерционная нагрузка будет $O(1)$, как и \mathbf{K} . Итак, вместо \mathbf{K} будем иметь $\mathbf{K} - \rho \partial^2 v^{(0)} / \partial t^2 \mathbf{j} + O(\lambda)$. Мы можем подставить это в (5.14) и получить известное

$$\left(\frac{Eh^3}{12} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \rho_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) v^{(0)} = q, \quad \rho_1 \equiv \int_{-h/2}^{h/2} \rho dy. \quad (5.25)$$

Заметим, что плотность ρ при этом может быть весьма произвольной функцией координат.

4.6. Тонкий стержень произвольной геометрии

В общем случае трехмерного тонкого стержня также имеет место асимптотическое расщепление задачи. Анализ пространственной задачи статики начнем с представления радиуса-вектора

$$\mathbf{R}(s, x_\alpha) = \lambda^{-1} \mathbf{r}(s) + \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \equiv x_\alpha \mathbf{e}_\alpha(s). \quad (6.1)$$

Здесь $\mathbf{r}(s)$ — радиус-вектор точек на оси как функция дуговой координаты; x_α и \mathbf{e}_α ($\alpha = 1, 2$) — декартовы координаты и соответствующие орты в плоскости сечения (рис. 16).

Соотношениями $d\mathbf{r}/ds = \mathbf{t} \equiv \mathbf{e}_3$, $d\mathbf{e}_k/ds = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}_k$ введем орт касательной и вектор кривизны и кручения $\boldsymbol{\Omega}$. Будем считать, что при каждом значении s имеем одну и ту же плоскую фигуру сечения с фиксированными в ней осями x_α .

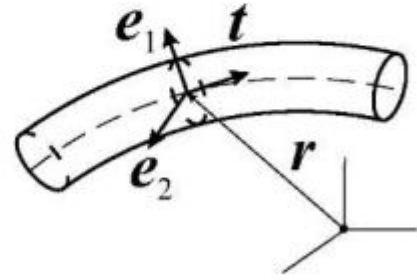


Рис. 16.

В координатах s, x_α оператор Гамильтона примет вид

$$\begin{aligned} \nabla &= \mathbf{R}^i \partial / \partial q^i = \nabla_\perp + v^{-1} \mathbf{t} (\partial_s - \Omega_t D), \\ \nabla_\perp &\equiv \mathbf{e}_\alpha \partial / \partial x_\alpha, \quad D \equiv \mathbf{t} \cdot \mathbf{x} \times \nabla_\perp, \quad v \equiv \lambda^{-1} + \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\Omega}_\perp \times \mathbf{x}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

здесь $\boldsymbol{\Omega}_\perp \equiv \boldsymbol{\Omega} - \Omega_t \mathbf{t}$.

Представив тензор напряжений в виде

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} = \underline{\underline{\mathbf{T}}}_\perp + \sigma_t \mathbf{t} \mathbf{t} + 2\mathbf{t} \boldsymbol{\tau}^S, \quad \underline{\underline{\mathbf{T}}}_\perp \equiv T_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta, \quad \boldsymbol{\tau} \equiv T_{t\alpha} \mathbf{e}_\alpha, \quad (6.3)$$

из уравнения баланса сил получим

$$\begin{aligned} \nabla_\perp \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}}_\perp + v^{-1} [\dot{\boldsymbol{\tau}} - \Omega_t (D\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{t}) + \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\Omega}_\perp \times \underline{\underline{\mathbf{T}}}_\perp - \sigma_t \mathbf{t} \times \boldsymbol{\Omega}_\perp] + \mathbf{K}_\perp &= 0, \\ \nabla_\perp \cdot \boldsymbol{\tau} + v^{-1} (\dot{\sigma}_t - \Omega_t D\sigma_t + 2\mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\Omega}_\perp \times \boldsymbol{\tau}) + K_t &= 0, \end{aligned} \quad (6.4)$$

где $(\dots)^\cdot$ — оператор дифференцирования в подвижном базисе $\dot{\sigma}_t \equiv \partial_s \sigma_t$, $\dot{\boldsymbol{\tau}} \equiv \partial_s \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\tau}$.

Без ущерба для общности будем считать боковую поверхность свободной. Тогда граничные условия на ней запишутся в виде

$$\mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}}_\perp = v^{-1} \Omega_t \mathbf{x} \times \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = v^{-1} \Omega_t \mathbf{x} \times \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}_t; \quad (6.5)$$

\mathbf{n} — нормаль к контуру сечения в его плоскости.

Рассмотрим стержень из неоднородного и анизотропного материала. Вместо уравнений Бельтрами придется обратиться непосредственно к уравнениям совместности деформаций:

$$\begin{aligned} \operatorname{inc} \underline{\underline{\varepsilon}} = 0, \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}_{\perp} + \gamma \mathbf{t}^S + \varepsilon_t \mathbf{t} \mathbf{t} \Rightarrow \Delta_{\perp} \theta_{\perp} = \nabla_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}_{\perp} + \dots \\ (\theta_{\perp} \equiv \operatorname{tr} \underline{\underline{\varepsilon}}_{\perp}), \quad \Delta_{\perp} \gamma = \nabla_{\perp} \nabla_{\perp} \cdot \gamma + \dots, \quad \nabla_{\perp} \nabla_{\perp} \varepsilon_t = \underline{\underline{\mathbf{E}}}_{\perp} \Delta_{\perp} \varepsilon_t + \dots \end{aligned} \quad (6.6)$$

Здесь выписаны лишь главные при $\lambda \rightarrow 0$ члены.

Далее нужен закон Гуна. Чтобы не лишаться преимуществ прямого тензорного исчисления, возьмем трансверсально-изотропный материал: любую плоскость, параллельную \mathbf{t} , будем считать плоскостью материальной симметрии. Упругие свойства такого материала задаются пятью константами, и закон Гука будет выглядеть так:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\varepsilon}}_{\perp} = \frac{1}{2\mu_{\perp}} \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\perp} - \left(\frac{\nu_{\perp}}{E_{\perp}} \sigma_{\perp} + \frac{\nu_t}{E_t} \sigma_t \right) \underline{\underline{\mathbf{E}}}_{\perp}, \quad \varepsilon_t = \frac{1}{E_t} (\sigma_t - \nu_t \sigma_{\perp}), \\ \gamma = \frac{1}{\mu_t} \tau \quad (E_{\perp} = 2\mu_{\perp} (1 + \nu_{\perp})). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Решение задачи (6.4) – (6.7) будем искать в виде $\underline{\underline{\mathbf{T}}} = \lambda^{-2} \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{(0)} + \dots$. Такие же степени будут и в разложении $\underline{\underline{\varepsilon}}$. Для главных членов получим

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\perp}^{(0)} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\perp}^{(0)}|_{\partial F} = 0, \\ \Delta_{\perp} \theta_{\perp}^{(0)} = \nabla_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}_{\perp}^{(0)}, \quad \nabla_{\perp} \nabla_{\perp} \varepsilon_t^{(0)} = \underline{\underline{\mathbf{E}}}_{\perp} \Delta_{\perp} \varepsilon_t^{(0)}; \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$\nabla_{\perp} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(0)} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau}^{(0)}|_{\partial F} = 0, \quad \Delta_{\perp} \gamma^{(0)} = \nabla_{\perp} \nabla_{\perp} \cdot \gamma^{(0)}. \quad (6.9)$$

Первое уравнение (6.8) позволяет ввести функцию напряжений Эри

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\perp}^{(0)} = -\mathbf{t} \times \nabla_{\perp} \nabla_{\perp} f \times \mathbf{t}. \quad (6.10)$$

Из граничного условия (6.8), считая сечение односвязным, получим

$$f|_{\partial F} = 0, \quad \partial_n f|_{\partial F} = 0. \quad (6.11)$$

Последнее из уравнений (6.8) позволяет заключить, что

$$\nabla_{\perp} \nabla_{\perp} \varepsilon_t^{(0)} = 0 \Rightarrow \varepsilon_t^{(0)} = A(s) + \mathbf{B}(s) \cdot \mathbf{x}. \quad (6.12)$$

Это важный и нетривиальный результат: несмотря на неоднородность и анизотропию, деформация ε_t в главном члене линейно распределена по сечению. Функции A и B определятся позднее.

С помощью (6.7) выразим $\underline{\underline{\varepsilon}}_{\perp}^{(0)}$ через $\varepsilon_t^{(0)}$ и $\underline{\underline{T}}_{\perp}^{(0)}$. Подставив результат в третье уравнение (6.8), получим для функции напряжений следующее обобщение плоской задачи:

$$\begin{aligned} f &= Af_A + \mathbf{B} \cdot \mathbf{f}_B; \quad \mathcal{L}f_A = \Delta_{\perp}\nu_t, \quad \mathcal{L}\mathbf{f}_B = \mathbf{x}\Delta_{\perp}\nu_t + 2\nabla_{\perp}\nu_t, \\ \mathcal{L} &\equiv \nabla_{\perp} \cdot \nabla_{\perp} \cdot \left[\frac{1}{2\mu_{\perp}} \nabla_{\perp} \nabla_{\perp} - \left(\frac{1}{E_{\perp}} - \frac{\nu_t^2}{E_t} \right) \underline{\underline{E}}_{\perp} \Delta_{\perp} \right] + \\ &\quad + \Delta_{\perp} \left[\frac{1 - \nu_{\perp}}{E_{\perp}} - \frac{2\nu_t^2}{E_t} \Delta_{\perp} \right]. \end{aligned} \quad (6.13)$$

В случае однородного материала будем иметь обычный бигармонический оператор.

Граничные условия для f_A и \mathbf{f}_B — (6.11). Решение отлично от нуля лишь при непостоянстве коэффициента Пуассона ν_t по сечению.

Обратимся к задаче (6.9). Можно положить

$$\nabla_{\perp} \times \boldsymbol{\gamma}^{(0)} = 2C\mathbf{t}. \quad (6.14)$$

Пока $C = C(s, \mathbf{x})$; но согласно (6.9)

$$\nabla_{\perp} \times \left(\nabla_{\perp} \times \boldsymbol{\gamma}^{(0)} \right) = 2\nabla_{\perp} C \times \mathbf{t} = \nabla_{\perp} \nabla_{\perp} \cdot \boldsymbol{\gamma}^{(0)} - \Delta_{\perp} \boldsymbol{\gamma}^{(0)} = 0.$$

Следовательно, $C = C(s)$. Из (6.9) имеем также $\boldsymbol{\tau}^{(0)} = \nabla_{\perp} \tilde{g} \times \mathbf{t}$, $\tilde{g}|_{\partial F} = 0$ — введена функция напряжений. Уравнение для нее следует из (6.14), поскольку $\boldsymbol{\gamma}^{(0)} = \boldsymbol{\tau}^{(0)}/\mu_t$. Очевидно, \tilde{g} пропорциональна C , и в итоге получим

$$\boldsymbol{\tau}^{(0)} = C\nabla_{\perp} g \times \mathbf{t}; \quad \nabla_{\perp} \cdot (\mu_t^{-1} \nabla_{\perp} g) = -2, \quad g|_{\partial F} = 0. \quad (6.15)$$

Осталось определить A , \mathbf{B} и C , тогда расчет напряжений будет закончен. Эти величины связаны с продольной силой и моментами в сечении.

Имеем

$$\begin{aligned}
\sigma_t^{(0)} &= A\sigma_A + \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma}_B, \quad \sigma_A \equiv E_t + \nu_t \Delta_{\perp} f_A, \quad \boldsymbol{\sigma}_B = E_t \mathbf{x} + \nu_t \Delta_{\perp} \mathbf{f}_B, \\
Q_t &= \int \sigma_t dF = \lambda^{-2} \left(A \int \sigma_A dF + \mathbf{B} \cdot \int \boldsymbol{\sigma}_B dF \right) + \dots \\
\mathbf{M}_{\perp} &= \int \mathbf{x} \sigma_t dF \times \mathbf{t} = \lambda^{-2} \left(A \int \sigma_A \mathbf{x} dF + \mathbf{B} \cdot \int \boldsymbol{\sigma}_B \mathbf{x} dF \right) \times \mathbf{t} + \dots \\
M_t &= \int \mathbf{x} \times \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{t} dF = \lambda^{-2} 2C \int g dF + \dots \quad (6.16)
\end{aligned}$$

Из этих равенств легко выразить A , \mathbf{B} и C через Q_t и \mathbf{M} . Что же касается самих сил и моментов, то их можно определить из соответствующих уравнений одномерной модели. Однако попробуем подойти более формально. Рассмотрим двумерные постановки

$$\begin{aligned}
\nabla_{\perp} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\perp} + \mathbf{K}_{\perp} &= 0, \quad \mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\perp} \Big|_{\partial F} = \mathbf{p}_{\perp}; \\
\nabla_{\perp} \cdot \boldsymbol{\tau} + K &= 0, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \Big|_{\partial F} = p. \quad (6.17)
\end{aligned}$$

С помощью теоремы о дивергенции легко могут быть обоснованы следующие необходимые условия разрешимости:

$$\begin{aligned}
\oint \mathbf{p}_{\perp} dl + \int \mathbf{K}_{\perp} dF &= 0, \quad \oint p dl + \int K dF = 0, \\
\oint \mathbf{x} \times \mathbf{p}_{\perp} \cdot \mathbf{t} dl + \int \mathbf{x} \times \mathbf{K}_{\perp} \cdot \mathbf{t} dF &= 0. \quad (6.18)
\end{aligned}$$

Отметим также соотношение

$$\int \boldsymbol{\tau} dF = \oint p \mathbf{x} dl + \int K \mathbf{x} dF. \quad (6.19)$$

Далее перепишем (6.4) и (6.5):

$$\begin{aligned}
\nabla_{\perp} \cdot (v \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\perp}) + \dot{\boldsymbol{\tau}} - \Omega_t (D\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{t}) - \sigma_t \mathbf{t} \times \boldsymbol{\Omega}_{\perp} + v \mathbf{K}_{\perp} &= 0, \\
\nabla_{\perp} \cdot (v \boldsymbol{\tau}) + \dot{\sigma}_t - \Omega_t D\sigma_t + \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{\perp} \times \boldsymbol{\tau} + v K_t &= 0, \\
\mathbf{n} \cdot (v \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\perp}) \Big|_{\partial F} = \Omega_t \mathbf{x} \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} \boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{n} \cdot (v \boldsymbol{\tau}) \Big|_{\partial F} = \Omega_t \mathbf{x} \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} \sigma_t. \quad (6.20)
\end{aligned}$$

Это — двумерные постановки вида (6.17). Соотношения (6.18), (6.19) для

них можно представить так:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}' + \mathbf{q} &= 0, \quad \mathbf{M}' + \lambda^{-1} \mathbf{t} \times \mathbf{Q} + \mathbf{m} = 0, \\ \mathbf{Q} &\equiv \int (\sigma_t \mathbf{t} + \boldsymbol{\tau}) dF, \quad \mathbf{M} \equiv \int \mathbf{x} \times (\sigma_t \mathbf{t} + \boldsymbol{\tau}) dF, \\ \mathbf{q} &\equiv \int \mathbf{K} v dF, \quad \mathbf{m} \equiv \int \mathbf{x} \times \mathbf{K} v dF. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Пришли к уравнениям баланса сил и моментов в одномерной модели.

Поскольку $\underline{\mathbf{T}} = O(\lambda^{-2})$, то $\mathbf{Q} = \lambda^{-2} \mathbf{Q}^{(0)} + \lambda^{-1} \mathbf{Q}^{(1)} + \dots$, $\mathbf{M} = \lambda^{-2} \mathbf{M}^{(0)} + \dots$. Тогда из (6.21) следует $\mathbf{Q}^{(0)'} = 0$, $\mathbf{t} \times \mathbf{Q}^{(0)} = 0$, что для непрямого стержня влечет за собой $\mathbf{Q}^{(0)} = 0$. Но в этом случае в (6.16) можно исключить A :

$$Q_t^{(0)} = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -\mathbf{B} \cdot \frac{\int \sigma_B dF}{\int \sigma_A dF}, \quad (6.22)$$

после чего вектор \mathbf{B} будет связан лишь с $\mathbf{M}_{\perp}^{(0)}$.

Для главных членов получим

$$\mathbf{Q}^{(1)'} + \int \mathbf{K} dF = 0, \quad \mathbf{M}^{(0)'} + \mathbf{t} \times \mathbf{Q}^{(1)} = 0. \quad (6.23)$$

Стоит обратить внимание на вид \mathbf{q} и исчезновение \mathbf{m} .

Разбор напряженного состояния закончен, обратимся к перемещениям. Представив $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\perp} + u_t \mathbf{t}$, будем иметь

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp} \mathbf{u}_{\perp}^S &= \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\perp}, \quad v^{-1} (\dot{u}_t - \Omega_t D u_t + \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{\perp} \times \mathbf{u}_{\perp}) = \varepsilon_t, \\ \nabla_{\perp} u_t + v^{-1} (\dot{u}_{\perp} - \Omega_t D \mathbf{u}_{\perp} + \Omega_t \mathbf{t} \times \mathbf{u}_{\perp} + \boldsymbol{\Omega}_{\perp} \times \mathbf{t} u_t) &= \boldsymbol{\gamma}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Правые части здесь выражаются через напряжения согласно (6.7).

Поскольку $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = O(\lambda^{-2})$, а $v = O(\lambda^{-1})$, разложение \mathbf{u} должно содержать λ^{-3} . Но начать придется раньше: $\mathbf{u} = \lambda^{-4} \mathbf{u}^{(0)} + \lambda^{-3} \mathbf{u}^{(1)} + \dots$. Для главных членов с (6.24) получим

$$\nabla_{\perp} \mathbf{u}_{\perp}^{(0)S} = 0, \quad \dot{u}_t^{(0)} - \Omega_t D u_t^{(0)} + \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{\perp} \times \mathbf{u}_{\perp}^{(0)} = 0, \quad \nabla_{\perp} u_t^{(0)} = 0. \quad (6.25)$$

Первое из этих равенств означает, что $\mathbf{u}_{\perp}^{(0)} = \mathbf{U}_{\perp}^{(0)}(s) + \theta_t^{(0)}(s) \mathbf{t} \times \mathbf{x}$, а последнее, что $u_t^{(0)} = U_t^{(0)}(s)$. Тогда из среднего равенства будем иметь

$$\theta_t^{(0)} = 0, \quad \dot{U}_t^{(0)} + \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{\perp} \times \mathbf{U}_{\perp}^{(0)} = 0. \quad (6.26)$$

Соотношения второго шага в (6.24) таковы:

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp} \mathbf{u}_{\perp}^{(1)S} = 0, \quad \dot{u}_t^{(1)} - \Omega_t D u_t^{(1)} + \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{\perp} \times \mathbf{u}_{\perp}^{(1)} = \varepsilon_t^{(0)}, \\ \nabla_{\perp} u_t^{(1)} + \dot{u}_{\perp}^{(0)} - \Omega_t D u_{\perp}^{(0)} + \Omega_t \mathbf{t} \times \mathbf{u}_{\perp}^{(0)} + \boldsymbol{\Omega}_{\perp} \times t u_t^{(0)} = 0. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Первое и последнее соотношения дадут

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\perp}^{(1)} = \mathbf{U}_{\perp}^{(1)}(s) + \boldsymbol{\theta}_t^{(1)}(s) \mathbf{t} \times \mathbf{x}, \quad u_t^{(1)} = U_t^{(1)}(s) + \boldsymbol{\theta}_{\perp}^{(1)}(s) \times \mathbf{x} \cdot \mathbf{t}, \\ \boldsymbol{\theta}_{\perp}^{(1)} \times \mathbf{t} \equiv \dot{U}_{\perp}^{(0)} + \Omega_t \mathbf{t} \times \mathbf{U}_{\perp}^{(0)} + \boldsymbol{\Omega}_{\perp} \times t U_t^{(0)} = \left(\mathbf{U}^{(0)'} \right)_{\perp}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Эти формулы, во-первых, показывают, что главные члены перемещений соответствуют гипотезе плоских сечений – подтверждается основное предположение теории Кирхгофа-Клебша. Во-вторых, выведена первая формула Клебша; из (6.26) и (6.28) следует

$$\mathbf{U}^{(0)'} = \boldsymbol{\theta}^{(1)} \times \mathbf{t}. \quad (6.29)$$

Однако не использовано второе уравнение в (6.27). Из него найдем

$$\begin{aligned} \dot{U}_t^{(1)} + \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{\perp} \times \mathbf{U}_{\perp}^{(1)} = A, \\ \mathbf{t} \times \dot{\boldsymbol{\theta}}_{\perp}^{(1)} - \Omega_t \boldsymbol{\theta}_{\perp}^{(1)} + \boldsymbol{\Omega}_{\perp} \boldsymbol{\theta}_t^{(1)} = \mathbf{t} \times \boldsymbol{\theta}^{(1)'} = B. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Второе равенство приближает нас к соотношениям упругости, поскольку B связан с $M_{\perp}^{(0)}$. Первое равенство определяет растяжение оси.

Осталось использовать информацию о $C(s)$, связанной с $M_t^{(0)}$. Очевидно, понадобится компонента $(\boldsymbol{\theta}')_t$. Но для этого нужен третий шаг в (6.24). Рассмотрим лишь одно уравнение

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp} u_t^{(2)} + \dot{u}_{\perp}^{(1)} - \Omega_t D u_{\perp}^{(1)} + \Omega_t \mathbf{t} \times \mathbf{u}_{\perp}^{(1)} + \boldsymbol{\Omega}_{\perp} \times t u_t^{(1)} - \\ - \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{\perp} \times \mathbf{x} \left(\dot{u}_{\perp}^{(0)} - \Omega_t D u_{\perp}^{(0)} + \Omega_t \mathbf{t} \times \mathbf{u}_{\perp}^{(0)} + \boldsymbol{\Omega}_{\perp} \times t u_t^{(0)} \right) = \gamma^{(0)}. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Вычислив далее $C = 1/2 \mathbf{t} \cdot \nabla_{\perp} \times \boldsymbol{\gamma}^{(0)}$, получим

$$C = \dot{\boldsymbol{\theta}}_t^{(1)} + \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{\perp} \times \boldsymbol{\theta}_{\perp}^{(1)} = \left(\boldsymbol{\theta}^{(1)'} \right)_t. \quad (6.32)$$

Теперь имеем все для написания соотношений упругости. Из (6.16), (6.29), (6.30) и (6.32) следует

$$\begin{aligned} M_t^{(0)} = a_t \kappa_t \quad \left(\boldsymbol{\kappa} \equiv \boldsymbol{\theta}^{(1)'} \right), \quad M_{\perp}^{(0)} = \underline{\mathbf{a}}_{\perp} \cdot \boldsymbol{\kappa}_{\perp}, \quad a_t \equiv 2 \int g dF, \\ \underline{\mathbf{a}}_{\perp} = -\mathbf{t} \times \int \mathbf{x} \left(\boldsymbol{\sigma}_B - \frac{\int \boldsymbol{\sigma}_B dF}{\int \boldsymbol{\sigma}_A dF} \boldsymbol{\sigma}_A \right) dF \times \mathbf{t}. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Система уравнений (6.23), (6.29) и (6.33) для $Q^{(1)}$, $M^{(0)}$, $U^{(0)}$ и $\theta^{(1)}$ подтверждает теорию Кирхгофа-Клебша для нерастяжимых стержней. Рассмотрена статика, но переход к динамике можно осуществить так же, как в п. 4.5. О температурных деформациях можно прочесть в [2].

Но вышеизложенное является не только обоснованием теории Кирхгофа-Клебша. Произведено расщепление трехмерной задачи на двумерные (в сечении) и одномерную. Стоит выделить задачу для $\underline{T}_\perp^{(0)}$, поскольку эти напряжения часто игнорируются. Имеем постановку

$$\begin{aligned} \nabla_\perp \cdot \underline{T}_\perp^{(0)} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \underline{T}_\perp^{(0)}|_{\partial F} = 0, \\ \underline{\varepsilon}_\perp^{(0)} = \nabla_\perp \mathbf{u}_\perp^{(2)} = \frac{1}{2\mu_\perp} \underline{T}_\perp^{(0)} - \left(\frac{\nu_\perp}{E_\perp} + \frac{\nu_t^2}{E_t} \right) \sigma_\perp^{(0)} \underline{E}_\perp - \underline{\nu}_t \varepsilon_t^{(0)} \underline{E}_\perp. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Но точно так же ставится задача о температурных напряжениях. Роль температурной деформации играет подчеркнутое слагаемое. Достаточно решить три конкретных плоских задачи термоупругости, полагая $\varepsilon_t^{(0)} = 1$, x_1 и x_2 . Эти задачи целесообразно решать численными методами — в таких случаях они эффективны.

4.7. Задачи к главе 4

4.1. При плоском напряженном состоянии полосы $0 \leq x \leq l$, $|y| \leq h/2$ заданы перемещения $u_x = -v'(x)y$, $u_y = v(x)$; $v = cx^2$ (соответствует элементарным представлениям о чистом изгибе). Найти нагрузки внутри полосы и на границе.

4.2. Решить задачу Сен-Венана об изгибе полосы (из п. 4.1) силой.

4.3. Построить синусоидальное решение для бесконечной полосы $|y| \leq h/2$ с «объемными» силами $\mathbf{K} = K_0 \mathbf{i} \sin \omega x$. Сравнить с решением в одномерной модели.

4.4. Вместо растяжения полосы рассмотреть изгиб — заменить в п. 4.3 орт \mathbf{i} на \mathbf{j} .

4.5. Рассмотреть «продольные» свободные синусоидальные волны в полосе: $\mathbf{u}(x, y, t) = U(y)e^{i(kx - \omega t)}$, $U_x(y) = U_x(-y)$, $U_y(y) = -U_y(-y)$. Выявить переход к одномерной модели при малых k и ω .

4.6. Тонкое плоское круговое кольцо $|r - R| \leq h/2$ нагружено по синусоиде на внутреннем радиусе: $\sigma_r = -p \cos n\varphi$ ($n = 0, 2, 3, \dots$) при $r = R - h/2$. Построить и сравнить решения в двумерной и одномерной моделях. Выяснить необходимость перекрестных связей в соотношениях упругости стержня.

4.7. Определить тензор жесткости на изгиб и кручение для стержня из однородного изотропного материала с эллиптическим сечением.

4.8. Рассмотреть п. 4.7, считая сечение стержня равносторонним треугольником (задача кручения решается с кубичным полиномом).

4.9. Вариационным методом построить уточненную одномерную модель растяжения плоской неоднородной полосы. Модуль Юнга и коэффициент Пуассона четны по y . Использовать принцип минимума энергии с аппроксимацией $u_x = U(x)$, $u_y = -\nu U'(y)$.

4.10. Асимптотическим методом построить одномерную модель растяжения плоской полосы при действии температуры $T(x, y) = T(x, -y)$.

Глава 5

Тонкостенные стержни

5.1. Построение модели вариационным методом

В рассмотренных выше одномерных моделях частицы стержня обладали лишь степенями свободы трансляции и поворота. Однако это не означает безусловного торжества гипотезы плоских сечений: приняв аппроксимацию

$$\mathbf{u}(s, x_\alpha) = \mathbf{U}(s) + \boldsymbol{\theta}(s) \times \mathbf{x}, \quad (1.1)$$

получим неприятности (жесткость на кручение, например, окажется пропорциональной полярному моменту инерции, что резко расходится с решением Сен-Венана).

Ряд авторов, понимая необходимость учета деформации сечения, предлагает уточнение (1.1)

$$\mathbf{u}(s, x_\alpha) = \mathbf{U}(s) + \boldsymbol{\theta}(s) \times \mathbf{x} + \alpha(s)W(\mathbf{x})\mathbf{t}, \quad (1.2)$$

где W — заданная функция деформации, а α — дополнительная варьируемая обобщенная координата. Вариационный метод позволяет легко построить соответствующую одномерную модель. В ней семь варьируемых скаляров и столько же силовых факторов — к силам и моментам добавятся так называемые бимоменты, работа которых пропорциональна $\delta\alpha$. Рассмотрим простейшую модель такого рода.

Для прямого стержня (рис. 17) возьмем следующую аппроксимацию:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_\perp + u_z \mathbf{k}, & \mathbf{u}_\perp &= \mathbf{U}_\perp(z) + \theta(z)\mathbf{k} \times \mathbf{x}, \\ u_z &= U_z(z) - \mathbf{U}' \cdot \mathbf{x} + \theta'W. \end{aligned} \quad (1.3)$$



Рис. 17.

Здесь два упрощения по сравнению с общим (1.2). Во-первых, принято соотношение Клебша $U'_\perp = \theta_\perp \times \mathbf{k} \Leftrightarrow \theta_\perp = \mathbf{k} \times U'_\perp$. Во-вторых, результат задачи Сен-Венана $\alpha = \theta'_z$ распространен на общий случай деформации.

Система уравнений для варьируемых U_\perp , U_z и θ вместе с естественными граничными условиями может быть получена из принципа виртуальной работы

$$\int_V (\mathbf{K} \cdot \delta \mathbf{u} - \delta \Pi) dV + \int_{O_2} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} dO = 0 \quad (1.4)$$

(\mathbf{K} — объемные силы; \mathbf{p} — заданные на части границы O_2 поверхностные силы; $\Pi = 1/2 \underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ — плотность энергии деформации). При этом должны быть обеспечены заданные перемещения на части O_1 .

Будем считать, что O_2 на рис. 17 — это свободная боковая поверхность ∂F и нагруженный торец $z = L$, а O_1 — это закрепленный торец $z = 0$.

Работа заданных сил в (1.4) представляется в виде

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{K} \cdot \delta \mathbf{u} dV &= \int_0^L (\mathbf{q} \cdot \delta U + \mathbf{m}_\perp \times \mathbf{k} \cdot \delta U'_\perp + m_z \delta \theta + b \delta \theta') dz, \\ \mathbf{q} &\equiv \int \mathbf{K} dF, \quad \mathbf{m} \equiv \int \mathbf{x} \times \mathbf{K} dF, \quad b \equiv \int K_z W dF; \\ \int_{O_2} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} dO &= (\mathbf{Q} \cdot \delta U + \mathbf{M}_\perp \times \mathbf{k} \cdot \delta U'_\perp + M_z \delta \theta + B \delta \theta')_{z=L}, \\ \mathbf{Q}_L &\equiv \int \mathbf{p} dF, \quad \mathbf{M}_L \equiv \int \mathbf{x} \times \mathbf{p} dF, \quad B_L \equiv \int p_z W dF. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Приступим к вычислению энергии деформации:

$$\begin{aligned} \Pi &= \mu \left(\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} + \frac{\nu}{1-2\nu} \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \right) \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}, \quad \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_\perp + \varepsilon_z \mathbf{k} \mathbf{k} + \gamma \mathbf{k}^S, \\ \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_\perp &= \nabla_\perp \mathbf{u}_\perp^S = 0, \quad \varepsilon_z = \partial_z u_z = U'_z - \mathbf{U}''_\perp \cdot \mathbf{x} + \theta'' W, \\ \gamma &= \nabla_\perp u_z + \partial_z \mathbf{u}_\perp = \theta' (\nabla W + \mathbf{k} \times \mathbf{x}). \end{aligned}$$

Будем считать, что W — это решение задачи Сен-Венана о кручении (п. 4.2):

$$\nabla W = (\nabla \Phi + \mathbf{x}) \times \mathbf{k}, \quad \Delta \Phi = -2, \quad \Phi|_{\partial F} = 0. \quad (1.6)$$

Тогда $\boldsymbol{\gamma} = \theta' \nabla \Phi \times \mathbf{k}$,

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \left(\mu \theta'^2 |\nabla \Phi|^2 + \widehat{E} \varepsilon_z^2 \right), \quad \widehat{E} \equiv E \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \Pi_1 \equiv \int \Pi dF = \\ &= \frac{1}{2} \left[\mu C \theta'^2 + \widehat{E} \left(F U_z'^2 + \mathbf{U}_\perp'' \cdot \underline{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{U}_\perp'' + J_W \theta''^2 - 2 \boldsymbol{\eta} \cdot \underline{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{U}_\perp'' \theta'' \right) \right] \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь использованы прежние обозначения (пп. 4.2, 4.3),

$$C \equiv \int |\nabla \Phi|^2 dF = 2 \int \Phi dF, \quad \underline{\mathbf{J}} \equiv \int \mathbf{x} \mathbf{x} dF, \quad \boldsymbol{\eta} \equiv \underline{\mathbf{J}}^{-1} \cdot \int \mathbf{x} W dF,$$

введено новое обозначение $J_W \equiv \int W^2 dF$ и дополнительно принято

$$\int \mathbf{x} dF = 0, \quad \int W dF = 0, \quad (1.8)$$

что достигается параллельным переносом оси z и выбором аддитивной константы в W .

Из (1.4), (1.5) и (1.7) вытекает следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений и естественных граничных условий:

$$Q_z' + q_z = 0, \quad Q_z = \frac{\partial \Pi_1}{\partial U_z'} = \widehat{E} F U_z'; \quad z = L: \quad Q_z = Q_{Lz}; \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_\perp' + \mathbf{q}_\perp &= 0, \quad \mathbf{M}_\perp' + \mathbf{k} \times \mathbf{Q}_\perp + \mathbf{m}_\perp = 0, \\ \mathbf{M}_\perp &= \mathbf{k} \times \frac{\partial \Pi_1}{\partial \mathbf{U}_\perp''} = \widehat{E} \mathbf{k} \times \underline{\mathbf{J}} \cdot (\mathbf{U}_\perp'' - \boldsymbol{\eta} \theta''); \\ z = L: \quad \mathbf{Q}_\perp &= \mathbf{Q}_{L\perp}, \quad \mathbf{M}_\perp = \mathbf{M}_{L\perp}; \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} M_z' + m_z &= 0, \quad M_z = \frac{\partial \Pi_1}{\partial \theta'} - B' - b, \quad \frac{\partial \Pi_1}{\partial \theta'} = \mu C \theta', \\ B &= \frac{\partial \Pi_1}{\partial \theta''} = \widehat{E} (J_W \theta'' - \mathbf{U}_\perp'' \cdot \underline{\mathbf{J}} \cdot \boldsymbol{\eta}); \\ z = L: \quad M_z &= M_{Lz}, \quad B = B_L. \end{aligned} \quad (1.11)$$

На закрепленном конце $z = 0$ должно быть обеспечено $U = 0$, $U'_\perp = 0$, $\theta = 0$ и $\theta' = 0$.

Главная особенность выведенных уравнений — более высокий порядок уравнения кручения. Дополнительный член с четвертой производной дает

медленно затухающие решения, плохо согласующиеся с принципом Сен-Венана.

В представленном выводе никак не использовалось то обстоятельство, что сечение является тонким. Необходимость учета деформации также пока неясна, как и отождествление α и θ' . Во всем этом можно разобраться лишь путем асимптотического анализа — о нем п. 5.3.

5.2. Тонкие сечения

Не сомневаясь пока в выводах п. 5.1, рассмотрим функции W и Φ в случае, когда сечение является тонкой полоской (см. рис. 15). В представлении радиус-вектора (4.8) введем малый параметр

$$\mathbf{R}(s, n) = \mathbf{r}(s) + \lambda n \mathbf{n}(s) \Rightarrow \nabla = \lambda^{-1} \mathbf{n} \partial_n + (1 - \lambda k n)^{-1} \mathbf{t} \partial_s. \quad (2.1)$$

Для функции напряжений получаем следующую постановку:

$$\left\{ \lambda^{-2} \partial_n^2 - \lambda^{-1} k (1 - \lambda k n)^{-1} \partial_n + [(1 - \lambda k n)^{-1} \partial_s]^2 \right\} \Phi = -2, \\ \Phi \Big|_{|n|=h/2} = \Phi \Big|_{s=0,l} = 0. \quad (2.2)$$

Решение будем искать в виде $\Phi = \lambda^2 \Phi_0 + \lambda^3 \Phi_1 + \dots$. После подстановки в (2.2) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях λ получим

$$\partial_n^2 \Phi_0 = -2, \quad \partial_n^2 \Phi_1 - k \partial_n \Phi_0 = 0, \dots; \quad \Phi = \lambda^2 \left(\frac{h^2}{4} - n^2 \right) + O(\lambda^3). \quad (2.3)$$

Но это выражение не удовлетворяет условиям на концах полоски. Там возникают погранслои, и полное решение можно получить методом сращивания асимптотических разложений. Однако, опираясь на мембранную аналогию Прандтля, можно не сомневаться в достаточности внешнего разложения (2.3) для большинства приложений.

Далее рассмотрим функцию деформации W . Это гармоническая функция, для которой при $|n| = h/2$ будем иметь $\lambda^{-1} \partial_n W = -\mathbf{t} \cdot \mathbf{r}$. По виду граничного условия можно предположить, что $W = O(\lambda)$; однако это ведет

к противоречиям. Поэтому рассмотрим следующий вариант:

$$\begin{aligned} W &= W_0 + \lambda W_1 + \dots; \quad \partial_n^2 W_0 = 0, \quad \partial_n W_0 \Big|_{|n|=h/2} = 0; \\ \partial_n^2 W_1 - k \partial_n W_0 &= 0, \quad \partial_n W_1 \Big|_{|n|=h/2} = -\mathbf{t} \cdot \mathbf{r}; \\ \partial_n^2 W_2 - k \partial_n W_1 - k^2 n \partial_n W_0 + \partial_s^2 W_0 &= 0, \quad \partial_n W_2 \Big|_{|n|=h/2} = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

На первом шаге получаем $W_0 = W_0(s)$ — произвольную функцию. На втором шаге будем иметь $W_1 = \widehat{W}_1(s) - \mathbf{t} \cdot \mathbf{r}n$, где \widehat{W}_1 произвольна. На третьем шаге понадобится условие разрешимости

$$\begin{aligned} \partial_n W_2 \Big|_{-h/2}^{h/2} = 0 &= \int_{-h/2}^{h/2} (k \partial_n W_1 + k^2 n \partial_n W_0 - \partial_s^2 W_0) dn \Rightarrow \\ \Rightarrow k \mathbf{t} \cdot \mathbf{r} + W_0'' &= 0, \quad W_0 = A + Bs + \omega(s), \quad \omega(s) \equiv \int_0^s \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} ds. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь A и B — произвольные константы, а ω — так называемая секториальная площадь. Выражение $d\omega = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} ds = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \times d\mathbf{r}$ представляет собой площадь заштрихованного на рис. 18 треугольника с множителем (-2) , так что ω равна «заметаемой» радиус-вектором при возрастании s площади (с тем же множителем).

Еще раз отметим следующее. Был нужен лишь главный член асимптотики W_0 (остальное — малые добавки). Но найти его мы смогли лишь с помощью условия разрешимости для поправочных членов. Подобный ход асимптотического анализа характерен для случаев сингулярных возмущений.

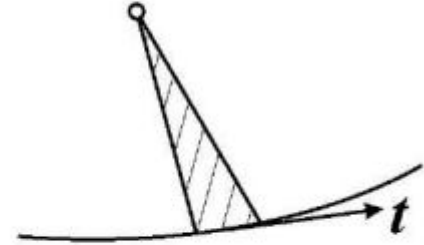


Рис. 18.

Определим константы в (2.5). Поскольку W определена с точностью до аддитивной константы, то A можно найти из условия (1.8). Для вычисления же B следует обратиться к условиям на концах полоски. Там возникают погранслои; построив их и применив условия срачивания, получим информацию о величине B . Такой путь трудоемок, поэтому поступим иначе. Для гармонической функции интеграл от нормальной производной по любому замкнутому контуру должен быть равен нулю. Применив это к отрезку полоски между концом и текущим значением s , получим $B = 0$.

Отметим, что W можно найти и по-другому — простым интегрированием соотношений (1.6). Результат будет тем же.

Найдя Φ и W , можно вычислить необходимые геометрические характеристики сечения. Элемент площади $dF = \lambda(1 - \lambda kn) ds dn$. Учитывая лишь главные члены асимптотики и полагая $\lambda = 1$, получим

$$C = \frac{1}{3}h^3l + \dots \quad \left(l \equiv \int ds \right), \quad \underline{\underline{J}} = h \int \mathbf{r}\mathbf{r} ds + \dots$$

$$\eta = \left(\int \mathbf{r}\mathbf{r} ds \right)^{-1} \cdot \int \mathbf{r}\omega ds + \dots, \quad J_W = h \int \omega^2 ds + \dots \quad (2.6)$$

5.3. Асимптотический анализ пространственной задачи

Рассмотрим все тот же призматический стержень с односвязным сечением в виде тонкой криволинейной полоски (рис. 17). Радиус-вектор в объеме представим следующим образом:

$$\mathbf{R}(s, n, z) = \mathbf{r}(s) + \lambda n \mathbf{n}(s) + \lambda^{-1} z \mathbf{k}, \quad \lambda \rightarrow 0;$$

$$s_0 \leq s \leq s_1, \quad -h/2 \leq n \leq h/2, \quad 0 \leq z \leq L. \quad (3.1)$$

Отсюда вытекает выражение набла-оператора

$$\nabla = \mathbf{R}^i \partial / \partial q^i = \lambda^{-1} \mathbf{n} \partial_n + (1 - \lambda kn)^{-1} \mathbf{t} \partial_s + \lambda \mathbf{k} \partial_z. \quad (3.2)$$

Соответственно малый параметр появляется в уравнениях п. 4.1. Но теперь мы лишаемся преимуществ прямого тензорного исчисления, поскольку все тензоры придется представить в базисе $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{k}$:

$$\underline{\underline{T}} = \sigma_t \mathbf{t}\mathbf{t} + \sigma_n \mathbf{n}\mathbf{n} + \sigma_z \mathbf{k}\mathbf{k} + 2 \left(\tau_{tn} \mathbf{t}\mathbf{n}^S + \tau_{tz} \mathbf{t}\mathbf{k}^S + \tau_{nz} \mathbf{n}\mathbf{k}^S \right). \quad (3.3)$$

Связанная с этим громоздкость уравнений не окажется главной трудностью.

Разыскивая решение уравнений в напряжениях в виде $\underline{\underline{T}} = \lambda^{-2} \underline{\underline{T}}^{(0)} + \dots$, обнаружим, что это лишь внешнее разложение $\underline{\underline{T}}^0$, с которым нельзя выходить на концы полоски $s = s_0$ и s_1 . У концов придется строить пограничные $\underline{\underline{T}}^i$ и сращивать их с $\underline{\underline{T}}^0$. Без такой процедуры не поставить граничные условия для $\underline{\underline{T}}^0$ на концах полоски. Окажутся необходимы четыре шага;

на каждом определяются соответствующие члены \underline{T}^{r0} и \underline{T}^{ri} и производится сращивание по принципу Ван Дайка. Первый шаг прост, на третьем шаге трудности едва преодолимы, на четвертом — последнем — достаточно некоторых условий разрешимости [2].

После того, как напряжения будут найдены, перемещения определяются интегрированием соотношений закона Гука.

Результаты асимптотического анализа оказываются очень близкими к выводам п. 5.1. Отличие лишь в том, что в уравнения для главных членов не войдут распределенные моменты m_{\perp} и бимоменты b , а вместо модуля \hat{E} появится просто E .

5.4. Задачи к главе 5

5.1. Определить секториальную площадь $\omega(s)$ для уголкового профиля (два прямых перпендикулярных равных отрезка).

5.2. Для профиля из п. 5.1 вычислить коэффициенты в соотношениях упругости.

5.3. Консольная балка с уголковым профилем расположена горизонтально и изгибается собственным весом. Найти прогиб; как он зависит от ориентации сечения в вертикальной плоскости?

5.4. Поставить задачу кручения прямого стержня, сечение которого — разрезанная окружность.

5.5. Вариационным методом вывести уравнения динамики и естественные граничные условия для консольной тонкостенной балки.

5.6. Продолжая п. 5.5, определить первую собственную частоту.

Библиографический список

1. *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике: учеб. пособие / Ф. Р. Гантмахер. — М.: Физматлит, 2001. — 264 с.
2. *Елисеев В. В.* Механика упругих тел / В. В. Елисеев. — СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. — 336 с.
3. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. — СПб.: Лань, 2003. — 576 с.
4. *Корн Г.* Справочник по математике для научных работников и инженеров: Определения, теоремы, формулы / Г. Корн, Т. Корн. — СПб.: Лань, 2003. — 832 с.
5. *Ландау Л. Д.* Теоретическая физика: учебное пособие в 10 т. Т.7. Теория упругости / Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц. — 5-е изд. — М.: Физматлит, 2007. — 264 с.
6. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. — М.: Наука, 1980. — 512 с.
7. *Лурье А. И.* Теория упругости / А. И. Лурье. — М.: Наука, 1970. — 939 с.
8. *Меркин Д. Р.* Введение в механику шти / Д. Р. Меркин. — М.: Наука, 1981. — 240 с.
9. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения / Д. Р. Меркин. — СПб.: Лань, 2003. — 304 с.
10. *Найфэ А. Х.* Введение в методы возмущений / А. Х. Найфэ. — М.: Мир, 1984. — 535 с.
11. *Пановко Я. Г.* Устойчивость и колебания упругих систем: современные концепции, парадоксы и ошибки / Я. Г. Пановко, И. И. Губанова. — 5-е изд. — М.: ЛКИ, 2006. — 352 с.

12. *Работнов Ю. П.* Механика деформируемого твердого тела: учеб. пособие / Ю. П. Работнов. — М.: Наука, 1988. — 711 с.
13. *Феодосьев В. И.* Сопротивление материалов: учебник / В. И. Феодосьев. — 14-е изд. — М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2007. — 592 с.
14. *Эльсгольц Л. Э.* Вариационное исчисление: учебник / Л. Э. Эльсгольц. 7-е изд. — М.: ЛКИ, 2008. — 208 с.