

**ОПД.Р.03 СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА
МЕТОДЫ РАСЧЕТА КОЛЕБАНИЙ СПЕЦИАЛЬНЫХ
МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Учебное пособие

В учебном пособии излагаются методы составления математических моделей специальных механических систем, совершающих колебания. Приведены методы расчета и анализа свободных и вынужденных колебаний систем с одной и несколькими степенями свободы, определены спектры собственных частот и формы колебаний. Описываются условия возникновения параметрического резонанса. Приводятся исследования уравнений Матье. Исследуются колебания линейных механических систем с ограниченным возбуждением. Рассматриваются примеры расчета конкретных механических систем.

Учебное пособие предназначено для студентов технических вузов, слушателей факультетов повышения квалификации преподавателей и университетов педагогического мастерства.

ВВЕДЕНИЕ

В.1. Предмет теории колебаний

Академик Л. И. Мандельштам со ссылкой на известного немецкого физика М. Планка говорил, что правильная классификация – это уже высокий вид познания. Действительно, классифицировать – это значит устанавливать место изучаемой дисциплины среди других естественнонаучных и технических дисциплин, определять характер их взаимодействия и взаимовлияния, понимать внутреннюю логику предмета и перспективы его развития.

Наиболее близко теория колебаний механических систем примыкает к теоретической механике, сопротивлению материалов, теории упругости, на основе которых она и развивается. Методами исследования в теории колебаний являются как хорошо разработанные к настоящему времени аппараты дифференциальных и интегральных уравнений, а также высшей алгебры, так и развивающиеся по сей день численные методы, методы приближенного интегрирования нелинейных дифференциальных и интегральных уравнений. Одним из важнейших методов исследования является эксперимент, который, в конечном счете, является единственным критерием правильности той или иной теории.

В чем же проявляются отличия теории колебаний от теоретической механики, в частности, динамики?

Обычную динамику интересует, в первую очередь, то, что происходит с исследуемым телом в данном месте или в данное время. Теория колебания меняет эту постановку вопроса. Для нее нетипичен интерес к тому, что происходит в данном месте в данное время. Ее интересует, главным образом, общий характер процесса, взятого в целом, за большое время – так называемые интегральные характеристики движения.

Теорию колебаний не интересует и произвольный вид движения. Для нее характерно исследование тех движений, которые сопровождаются по-

очередным возрастанием и убыванием исследуемого параметра (перемещения, скорости, ускорения) во времени. Соответствующий параметр носит название колеблющейся величины.

Одной из характерных тенденций развития современной техники является рост мощностей машин, скоростей движения их агрегатов и механизмов, уменьшение относительной массы, с одновременным требованием к увеличению их прочности, долговечности и надежности, обеспечению управляемости. Естественно, что рост мощностей машин и их рабочих скоростей зачастую приводит к появлению дополнительных инерционных нагрузок, действующих на машины, их детали и узлы, которые, в свою очередь, становятся источниками колебаний, сопутствующих работе практически любой машины и механизма. В этих случаях колебания чрезвычайно опасны. Вследствие непредвиденного уровня колебаний возникают погрешности в работе машин и механизмов, увеличивается их износ, понижается надежность, а иногда колебания приводят и к авариям.

С другой стороны, существует опыт и полезного применения вибраций в технике. В настоящее время происходит бурное развитие вибротехнологии, которая позволяет значительно интенсифицировать различные технологические процессы, а в ряде случаев только на основе вибраций и возможно их осуществление.

Поэтому уметь рассчитывать колебания различных объектов и правильно оценивать их воздействие на изучаемые системы, экспериментально исследовать параметры колебаний и должным образом толковать результаты наблюдений – необходимые качества современного квалифицированного инженера.

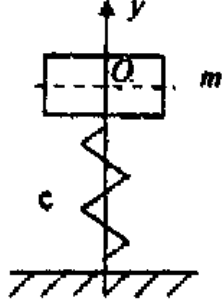
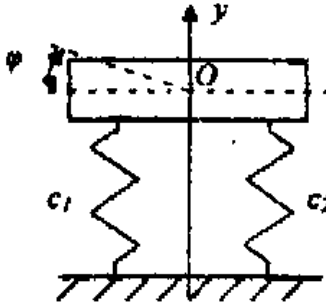
В.2. Выбор расчетной схемы

Для механических систем с голономными связями, которые чаще всего рассматриваются в курсе теории колебаний, числом степеней свободы называют число независимых параметров (обобщенных координат), однозначно определяющих положение механической системы в любой момент времени. Строго говоря, все реальные деформируемые системы обладают бесконечным числом степеней свободы. Расчет колебаний таких систем в общем случае представляет большие трудности. Задачу, однако, можно существенно упростить, ограничив число учитываемых в расчетах степеней свободы. В зависимости от характера изучаемого явления и требуемой точности решения, в качестве расчетной схемы реальной конструкции в этом случае выбирают систему с одной или несколькими степенями свободы.

В качестве примера в табл. В.1 приведены две расчетные схемы одного и того же объекта (автомобиля), отличие которых объясняется различием в постановке задачи исследования. В первом случае для описания движения достаточно выбрать в качестве обобщенной координаты вертикальное перемещение у центра масс объекта, а во втором движении может быть описано не менее чем двумя обобщенными координатами: вертикальным перемещением центра масс y и углом поворота φ рамы автомобиля относительно оси, перпендикулярной плоскости колебаний и проходящей через центр масс автомобиля. Таким образом, в первом случае исследуемый объект представлен системой с одной степенью свободы, а во втором – с двумя.

Обобщая вышесказанное, можно констатировать, что для более детального описания движения реального объекта при одной и той же степени учета действующих на него сил, в качестве расчетной схемы следует выбирать схему с большим числом степеней свободы.

Таблица В.1

Постановка задачи	Возможная расчетная схема	Примечание
1. Изучаются вертикальные колебания центра тяжести автомобиля		m – приведенная к центру тяжести масса автомобиля; c – приведенная жесткость подвески
2. Изучаются вертикальные колебания центра масс и угловые колебания рамы автомобиля		m, J – приведенные к центру тяжести масса и момент инерции автомобиля; c_1, c_2 – приведенные жесткости подвесок

В.3. Классификация сил, действующих на механические системы

В.3.1. Восстанавливающие силы

Восстанавливающие силы относятся к категории позиционных сил, зависящих от отклонения системы из положения равновесия, а их особенность состоит в том, что они стремятся вернуть систему в положение равновесия. В механических системах с упругими связями восстанавливающие силы возникают вследствие деформирования этих связей в процессе колебаний. В других случаях роль восстанавливающих сил могут играть силы тяжести (колебания маятника в поле сил тяжести), выталкивающие силы жидкости (колебания корабля) и др. Восстанавливающие силы, отличные от упругих, иногда называют квазиупругими. Восстанавливающие свойства упругой связи определяются силовой характеристикой:

$$Q = Q(q), \quad (\text{В.1})$$

где Q – обобщенная сила; q – вызываемое этой силой перемещение (обобщенная координата).

Если

$$Q(q) = -Q(-q), \quad (\text{B.2})$$

то силовую характеристику называют симметричной.

В линейных системах обобщенная сила прямо пропорциональна перемещению:

$$Q = cq. \quad (\text{B.3})$$

Однако строгий анализ показывает, что для большинства механических систем (B.3) выполняется лишь приближенно. Поэтому часто принимаемое допущение о линейности восстанавливающих сил есть идеализация, нуждающаяся в обосновании в каждой конкретной технической ситуации.

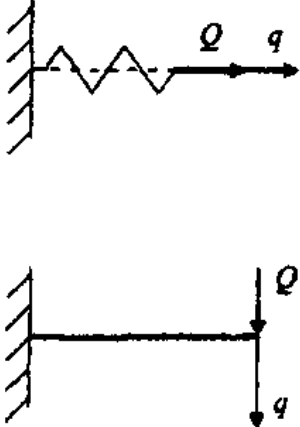
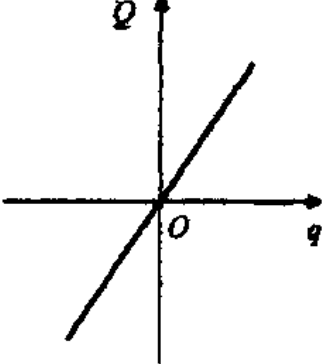
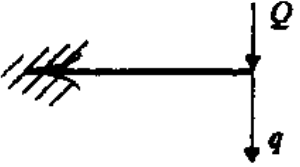
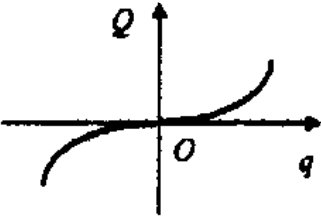
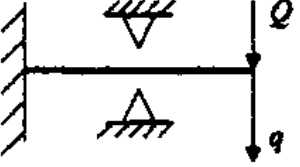
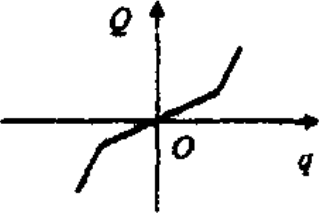
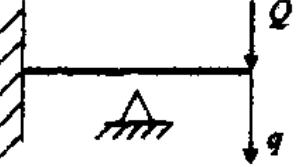
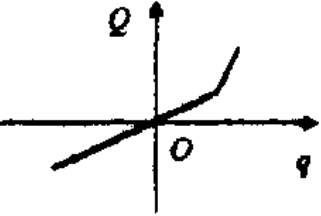
Некоторые типичные схемы упругих элементов и соответствующие им силовые характеристики приведены в табл. B.2.

V.3.2. Силы сопротивления или диссипативные силы

Помимо упругих (или квазиупругих) восстанавливающих сил на колебания реальных механических систем большое влияние оказывают и всевозможные силы сопротивления (сухое и вязкое трение; внутреннее трение в материалах, обусловленное несовершенством их упругости и т.п.).

Они совершают необратимую работу, что приводит к рассеиванию (диссипации) энергии колебаний, поэтому эти силы называют еще диссипативными. Механические системы, движение которых сопровождается необратимыми потерями энергии, называются неконсервативными системами (в отличие от систем консервативных, в процессе движения которых не происходит диссипации энергии и выполняется закон сохранения энергии).

Таблица В.2

Расчетная схема упругого элемента	Графическое изображение упругой характеристики	Классификация упругой характеристики
		<p>симметричная, линейная</p>
		<p>симметричная, нелинейная</p>
		<p>асимметричная, нелинейная</p>
		<p>асимметричная, нелинейная</p>

Диссипативные свойства механических систем можно описать с помощью характеристик трения – кривых зависимости обобщенной силы сопротивления R от скорости \dot{q} . Наиболее типичные из таких характеристик приведены в табл. В.3. Независимо от природы сил сопротивления, они всегда направлены противоположно вектору скорости.

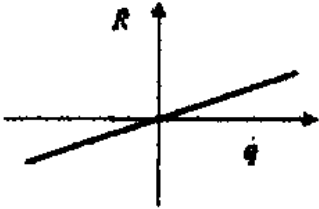
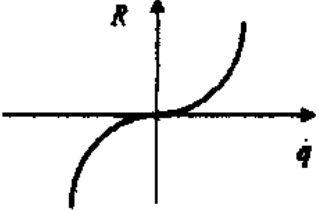
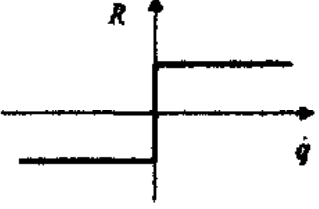
Характеристики вязкого, нелинейного или сухого трения конкретных систем, как правило, могут быть либо рассчитаны, либо определены экспериментально прямым измерением сил трения и скорости. Имеются, однако, и случаи, когда эту характеристику получить практически невозможно. Это, в первую очередь, относится к механическим системам, силы сопротивления которых распределены по объему системы или ее отдельных частей (например, силы внутреннего трения в материалах, силы конструкционного демпфирования в сочленениях элементов машин и т. д.). В этих случаях сопротивление системы принято оценивать не по характеристикам трения, а по энергии, рассеиваемой ею за цикл. Интегральные характеристики рассеяния энергии – абсолютное рассеяние энергии за цикл S и коэффициент поглощения Ψ (относительное рассеяние энергии) связаны между собой соотношением:

$$\Psi = \frac{S}{T_{\text{max}}}, \quad (\text{В.4})$$

где T_{max} – максимальная потенциальная энергия в цикле колебаний.

Коэффициенты поглощения различных материалов, обусловленные несовершенством их упругости (внутренним трением), могут отличаться друг от друга на несколько порядков. Они, как правило, сравнительно невысокие у большинства металлических конструкционных материалов, существенно более высокие у многих пластмасс и специальных сплавов высокого демпфирования и очень высокие у специальных полимерных вибропоглощающих материалов.

Таблица В.3

Вид трения	Характеристика трения	Аналитическая зависимость
1. Вязкое		$R = \mu \dot{q}$
2. Турбулентное		$R = \mu \dot{q}^2 \frac{\dot{q}}{ \dot{q} }$
3. Сухое		$R = R_0 \frac{\dot{q}}{ \dot{q} }$

В общем случае коэффициенты поглощения материалов зависят от многих факторов – состояния материала (термообработки, степени наклепа, структуры и т. д.), температуры, напряженного состояния и уровня напряжений (деформаций), частоты колебаний и т. д. Ориентировочные значения коэффициентов поглощения при комнатной температуре для некоторых конструкционных материалов и специальных материалов с повышенными диссипативными свойствами в диапазоне напряжений, представляющем интерес для инженерной практики, приведены в табл. В.4.

При сравнительно невысоких значениях коэффициента поглощения системы (а во многих практических случаях это именно так) расчет свободных затухающих колебаний, вынужденных околорезонансных и резонансных колебаний, переходных процессов в системе и т. д. можно выполнить с непо-

средственным использованием коэффициента поглощения системы и его амплитудной зависимости, без конкретизации характеристики трения.

Таблица В 4

Материал	Коэффициент поглощения
титан и его сплавы	0,0005-0,0050
конструкционные стали	0,01-0,04
алюминий и его сплавы	0,001-0,020
сплавы высокого демпфирования	0,20-0,50
пластмассы общего назначения	0,01-0,60
специальные полимерные вибропоглощающие материалы	1-3

3.3. Вынуждающие силы

Источником вынуждающих сил, действующих на механическую систему, могут быть узлы и механизмы, звенья которых совершают возвратно-поступательное движение, неуравновешенные вращающиеся части машин, неудовлетворительно сбалансированные валы и роторы (балансировка может нарушиться и в процессе эксплуатации машин и механизмов вследствие износа подшипников) и некоторые другие факторы. Как правило, вынуждающие силы можно задать в виде функций времени:

$$H = H(t). \quad (B.5)$$

При более строгом анализе можно показать, что вынуждающие силы зависят также от перемещения q и скорости \dot{q} механической системы, на которую они действуют:

$$H = H(t, q, \dot{q}). \quad (B.6)$$

Однако для большинства задач в инженерной практике использование (B.5) вместо (B.6) вполне оправдано, а те случаи, когда потребуется привлечение (B.6), будут в дальнейшем оговорены.

В.4. Составление дифференциальных уравнений движения

Наиболее общей формой уравнений движения механических систем, на которые наложены голономные связи, являются уравнения Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad (j=1, 2, \dots, n), \quad (\text{В.7})$$

где n – число степеней свободы; q_j, \dot{q}_j – соответственно j обобщенная координата и обобщенная скорость; Q_j – обобщенная сила, соответствующая j обобщенной координате; T – кинетическая энергия системы; t – время.

В общем случае все действующие на систему силы можно условно разделить на потенциальные и непотенциальные. Тогда, в силу линейности всех операций, с которыми связан подсчет обобщенных сил Q_j , последние можно представить как сумму двух слагаемых:

$$Q_j = Q_j^i + Q_j^{ii}, \quad (\text{В.8})$$

где $Q_j^i = -\partial I / \partial q_j$ – потенциальные части обобщенных сил (I – потенциальная энергия системы); Q_j^{ii} – непотенциальные части обобщенных сил.

С учетом (В.8) уравнения Лагранжа второго рода (В.7) можно представить в форме:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial I}{\partial q_j} + Q_j^{ii}. \quad (\text{В.9})$$

Для того, чтобы составить уравнения Лагранжа для некоторой конкретной механической системы, нужно выполнить следующие операции:

- 1) определить число степеней свободы системы;
- 2) ввести независимые обобщенные координаты в количестве, равном числу степеней свободы системы;
- 3) определить обобщенные силы системы, для чего можно воспользоваться одним из следующих способов:

• дать системе произвольное возможное перемещение, при котором варьируются все обобщенные координаты $\delta q_j \neq 0$ ($j=1, 2, 3, \dots, n$), вычислить на нем элементарную работу действующих на систему активных сил, неидеальных реакций связей и сил сопротивления и привести полученное выражение для элементарной работы к виду:

$$\delta A = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_n \delta q_n = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i. \quad (B.10)$$

Коэффициенты при вариациях обобщенных координат в выражении (B.10) и будут соответствующими этим координатам обобщенными силами Q_1, Q_2, \dots, Q_n . Таким образом, при таком способе определяются сразу все n обобщенных сил;

• более прост, и поэтому более предпочтителен, способ вычисления обобщенных сил по элементарным работам на частных возможных перемещениях, когда варьируется только одна обобщенная координата, например, j , а остальные $(n-1)$ координаты сохраняются неизменными, то есть $\delta q_i (i \neq j) = 0$. Элементарная работа сил системы на таком частном возможном перемещении будет определяться только одним j -м членом суммы (B.10) и, следовательно, множитель перед δq_j в этом выражении элементарной работы и будет j -й обобщенной силой Q_j .

Если среди действующих на систему сил имеются потенциальные, то соответствующие им обобщенные силы Q_j^* ($j=1, 2, 3, \dots, n$) можно найти дифференцированием потенциальной энергии системы по обобщенным координатам $Q_j^* = -\partial I / \partial q_j$;

4) определить кинетическую энергию системы и выполнить операции ее дифференцирования, предусмотренные уравнениями Лагранжа второго рода.

1. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

1.1. Свободные колебания в отсутствии сил сопротивления

1.1.1. Дифференциальное уравнение движения

При достаточно малых перемещениях механических систем силы упругости деформируемых элементов, как правило, линейно зависят от перемещений. Так, если при анализе колебаний системы (рис. 1.1) начало отсчета смещения совместить с положением статического равновесия тела массы m , то $F = -cx$ и дифференциальное уравнение движения системы будет иметь вид:

$$m\ddot{x} + cx = 0 \quad (1.1)$$

или

$$\ddot{x} + k^2x = 0, \quad (1.2)$$

где c – коэффициент жесткости (или просто жесткость) системы; k – постоянный коэффициент, равный

$$k = \sqrt{c/m}. \quad (1.3)$$

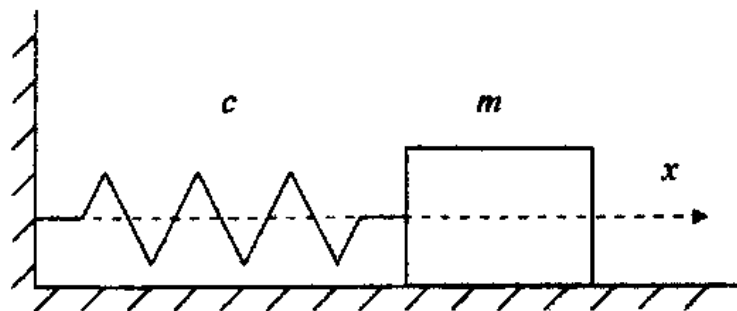


Рис. 1.1

Нетрудно показать, что при надлежащем выборе начала отсчета вид дифференциальных уравнений (1.1) и (1.2) не изменится и при действии на систему постоянных сил. Действительно, если за начало отсчета по-прежнему принять положение статического равновесия, то, например,

дифференциальное уравнение движения системы, приведенной на рис. 1.2, можно записать в форме

$$m\ddot{x} = mg - c(f_{\text{ст}} + x), \quad (1.4)$$

где $f_{\text{ст}} = \frac{mg}{c}$ – статическое перемещение груза массы m под действием статически приложенной силы тяжести mg .

Очевидно, что

$$mg - cf_{\text{ст}} = 0, \quad (1.5)$$

а уравнение (1.4) приводится к виду

$$m\ddot{x} + cx = 0 \quad (1.6)$$

или

$$\ddot{x} + k^2x = 0. \quad (1.7)$$

Легко видеть, что уравнения (1.6) и (1.7) полностью совпадают с уравнениями (1.1) и (1.2). Отметим, однако, что такое соответствие достигается лишь при выборе начала координат в положении статического равновесия. В противном случае дифференциальное уравнение движения оказывается неоднородным.

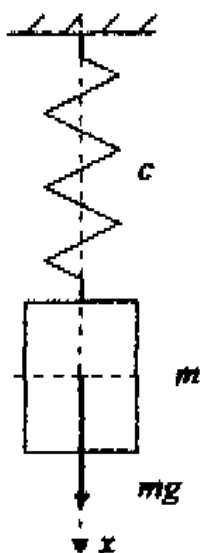


Рис. 1.2

В табл. 1.1 представлены еще примеры трех типичных механических систем, движение которых описывается дифференциальными уравнениями типа (1.1), (1.2).

Таблица 1.1

Механическая система	Дифференциальное уравнение	Жесткость
	$J_0 \ddot{\varphi} + c\varphi = 0$	$c = \frac{(GJ_p)}{l}$
	$m\ddot{y} + cy = 0$	$c = \frac{3(EJ)}{l^3}$
	$m\ddot{y} + cy = 0$	$c = \frac{48(EJ)}{l^3}$

Здесь введены обозначения:

m – масса груза; J_0 – момент инерции диска; l – длина вала или стержня; (EJ) – жесткость стержня на изгиб; (GJ_p) – жесткость вала на кручение.

1.1.2. Определение жесткости конструкции

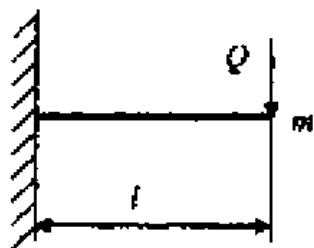
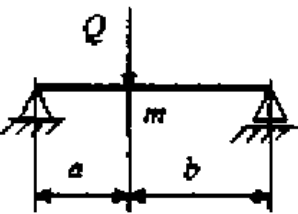
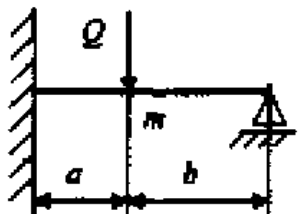
Приведенная жесткость конструкции c определяется методами, рассматриваемыми в курсе сопротивления материалов (метод Мора, способ Верещагина и др.). Вычисляется она по следующей схеме. К точке крепления инерционного элемента системы прикладывается единичная обобщенная сила в направлении

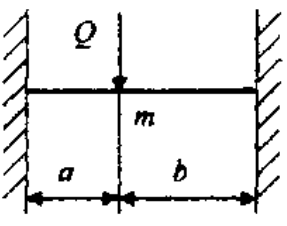
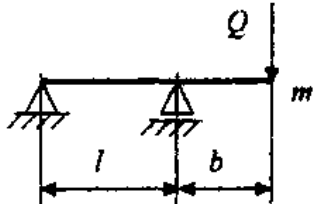
отсчета обобщенной координаты, и записываются аналитические выражения изгибающего момента, нормальной и поперечной сил. Далее с помощью этих аналитических выражений составляется и вычисляется интеграл Мора для перемещения δ_{11} точки приложения единичной обобщенной силы или строятся соответствующие эпюры и δ_{11} определяется перемножением эпюр по методу Верещагина. Величина, обратная δ_{11} , и будет искомой жесткостью:

$$c = 1/\delta_{11}. \quad (1.8)$$

В табл. 1.2 для некоторых часто встречающихся расчетных схем механических систем с одной степенью свободы даны жесткости конструкций, приведенные к точке крепления массы m .

Таблица 1.2

Расчетная схема	Жесткость
	$c = \frac{3(EJ)}{l^3}$
	$c = \frac{3(EJ)(a+b)}{a^2b^2}$
	$c = \frac{12(EJ)(a+b)^2}{a^2b^2(3a+4b)}$

	$c = \frac{3(EJ)(a+b)^3}{a^3b^3}$
	$c = \frac{3(EJ)}{(b+l)b^2}$

1.1.3. Решение дифференциального уравнения

Дифференциальное уравнение (1.1) в обобщенных координатах имеет вид:

$$a\ddot{q} + cq = 0 \text{ или } \ddot{q} + k^2q = 0, \quad (1.9)$$

где a – обобщенная масса.

Известно, что решение уравнения (1.9) можно представить в одной из двух равнозначных форм:

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt \quad (1.10)$$

или

$$q = A \sin(kt + \alpha), \quad (1.11)$$

где C_1, C_2, A, α – произвольные постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий движения.

Так, если при $t = 0, q = q_0$ и $\dot{q} = \dot{q}_0$, то

$$C_1 = q_0, C_2 = \dot{q}_0/k, \\ A = \sqrt{q_0^2 + (\dot{q}_0/k)^2}, \alpha = \arctg \dot{q}_0 k / q_0. \quad (1.12)$$

Форма решения (1.11) оказывается более удобной при анализе движения, так как произвольные постоянные A и α имеют ясный физический смысл:

A – амплитуда колебаний; α – начальная фаза.

Постоянная $k = \sqrt{c/m}$ в решениях (1.10), (1.11) называется собственной угловой частотой консервативной системы. Термином «собственная» подчеркивается независимость ее от начальных условий. Угловая частота k представляет собой количество полных колебаний системы за 2π секунд (размерность рад/с), и поэтому она в 2π раз выше частоты колебаний в одну секунду f (Гц)

$$k = 2\pi f. \quad (1.13)$$

Период колебаний T связан с частотой f и угловой частотой k соотношением

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{k}. \quad (1.14)$$

На рис. 1.3 представлен график колебательного процесса, представляющего собой зависимость обобщенной координаты q от времени.

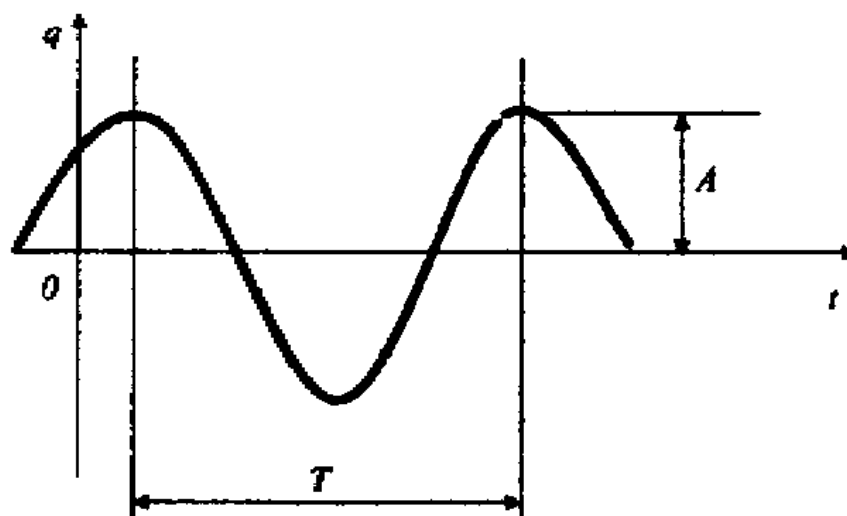


Рис. 1.3

1.1.4. Энергетический способ определения собственной частоты

В прикладных расчетах исследователя иногда интересуют не все параметры, характеризующие свободные колебания системы с одной степенью свободы (собственная частота, начальная фаза, амплитуда, период и т. д.),

а только собственная частота. Выше она определялась из дифференциального уравнения колебаний системы по коэффициенту при обобщенной координате. В сложных механических системах, условно сводимых к системам с одной степенью свободы, этот путь может оказаться неоправданно трудоемким из-за трудностей определения коэффициентов дифференциального уравнения. В этих случаях более предпочтительным оказывается способ определения собственной частоты, основанный на энергетических соображениях. Суть его сводится к следующему.

Если потенциальную энергию системы отсчитывать от положения статического равновесия, то ее максимальное значение P_{\max} , достигаемое в момент наибольшего отклонения системы от положения статического равновесия, будет, в силу консервативности системы, равно максимальной кинетической энергии T_{\max} , достигаемой при прохождении системы через положение равновесия, то есть

$$\dot{I}_{\max} = T_{\max}. \quad (1.15)$$

Это и есть равенство, из которого определяется собственная угловая частота системы k , квадрат которой входит множителем в выражение максимальной кинетической энергии.

Применение энергетического метода для определения собственной частоты проиллюстрируем на примере рассмотренной выше системы с одной степенью свободы (рис. 1.1). Поскольку система линейна и консервативна, ее колебания описываются гармоническим законом:

$$q = A \sin(k\tau + \alpha), \quad q_{\max} = A, \quad (1.16)$$

откуда для обобщенной скорости \dot{q} получим

$$\dot{q} = Ak \cos(k\tau + \alpha), \quad \dot{q}_{\max} = Ak. \quad (1.17)$$

С учетом (1.16) и (1.17) для максимальных потенциальной P_{\max} и кинетической T_{\max} энергий системы получим следующие выражения:

$$I_{\text{max}} = \frac{1}{2} c q_{\text{max}}^2 = \frac{1}{2} c A^2 \quad (1.18)$$

и

$$T_{\text{max}} = \frac{1}{2} m \dot{q}_{\text{max}}^2 = \frac{1}{2} m A^2 k^2, \quad (1.19)$$

где, c и m – жесткость и масса системы.

Подставив (1.18) и (1.19) в (1.15), получим:

$$\frac{1}{2} c A^2 = \frac{1}{2} m A^2 k^2, \quad (1.20)$$

откуда

$$k = \sqrt{c/m}, \quad (1.21)$$

что полностью совпадает с формулой для собственной угловой частоты, полученной из дифференциального уравнения колебаний этой системы.

1.1.5. Представление решения на фазовой плоскости

Анализ движения механических систем иногда удобно проводить с помощью фазовой плоскости, представляющей собой координатную систему: обобщенная координата q – обобщенная скорость \dot{q} . Каждое состояние механической системы изображается на фазовой плоскости точкой с координатами (q, \dot{q}) . В процессе движения системы ее состояние изменяется, в результате изображающая точка описывает на фазовой плоскости некоторую кривую, называемую фазовой траекторией. Совокупность фазовых траекторий, соответствующих различным вариантам начальных условий, образует фазовый портрет системы, который полностью определяет характер движения системы. Метод фазовой плоскости широко используется для качественного анализа колебаний нелинейных механических систем, для анализа систем автоматического регулирования и т. д.

В качестве иллюстрации этого метода построим фазовый портрет свободных колебаний консервативной системы с одной степенью свободы.

Обобщенное перемещение и обобщенная скорость такой системы определяются соотношениями:

$$q = A \sin(kt + \alpha), \quad \dot{q} = Ak \cos(kt + \alpha). \quad (1.22)$$

Исключая из этих уравнений время, найдем траекторию изображающей точки на фазовой плоскости:

$$\frac{q^2}{A^2} + \frac{\dot{q}^2}{A^2 k^2} = 1. \quad (1.23)$$

Это уравнение эллипса с центром в начале координат и полуосями, равными соответственно A и Ak . Начальное положение изображающей точки M и фазовая траектория (эллипс), по которому она движется, определяются начальными условиями $M(q_0, \dot{q}_0)$. Таким образом, фазовой траекторией свободных колебаний консервативной системы с одной степенью свободы является эллипс, а фазовым портретом – семейство эллипсов, вложенных друг в друга (рис. 1.4). Начало координат ($q_0 = 0, \dot{q}_0 = 0$) фазовой плоскости соответствует состоянию покоя системы. Такая точка называется особой точкой типа «центр».

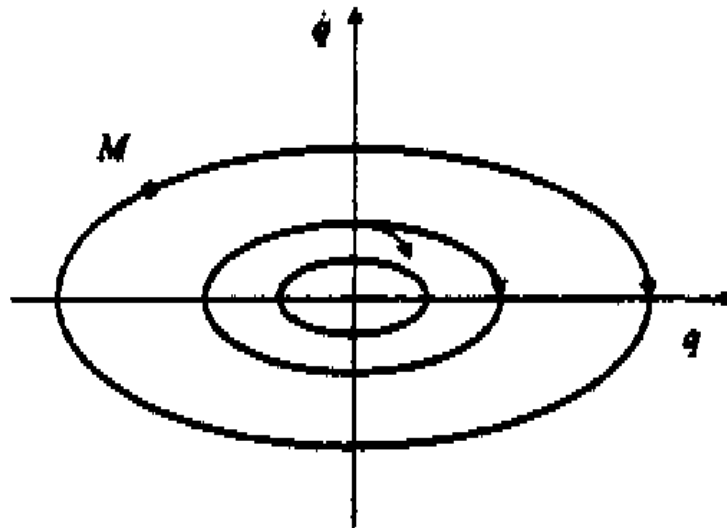


Рис. 1.4

1.1.6. Некоторые общие свойства фазовых траекторий

В верхней полуплоскости движение изображающей точки происходит слева направо; в нижней полуплоскости – справа налево.

Действительно,

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt}. \quad (1.24)$$

Поэтому при $\dot{q} > 0$ обобщенная координата возрастает, а при $\dot{q} < 0$ – убывает, что и является доказательством высказанного утверждения.

Фазовые траектории пересекают ось Oq под прямым углом.

Из (1.24) следует, что при $\dot{q} = 0$ изображающая точка находится на оси Oq и координата q имеет экстремум. Следовательно, касательная, проведенная к фазовой траектории в точке с координатами $(q, 0)$, параллельна оси $O\dot{q}$.

1.2. Свободные колебания при вязком сопротивлении (трении)

1.2.1. Дифференциальное уравнение движения

Дифференциальное уравнение движения, описывающее движение механической системы с одной степенью свободы при наличии линейной силы сопротивления (трения) в обобщенных координатах имеет вид:

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = 0, \quad (1.25)$$

где $n = \frac{\mu}{2m}$ – коэффициент, зависящий от вязких свойств системы и называемый коэффициентом демпфирования. В учебной и технической литературе используется и устаревшее название этого коэффициента – коэффициент затухания.

1.2.2. Решение дифференциального уравнения при малом демпфировании ($n < k$)

В случае, когда $n < k$ решение дифференциального уравнения (1.25) можно представить в форме:

$$q = A_0 e^{-nt} \sin(k_0 t + \alpha), \quad (1.26)$$

где $k_0 = \sqrt{k^2 - n^2}$ частота затухающих колебаний; A_0 , α – соответственно начальная амплитуда и начальная фаза колебаний.

Если в начальный момент времени (при $t=0$) $q = q_0$ и $\dot{q} = \dot{q}_0$, то

$$A = \sqrt{q_0^2 + \left(\frac{\dot{q}_0 + nq_0}{k_0} \right)^2}, \quad \alpha = \arctg \frac{q_0 k_0}{\dot{q}_0 + nq_0}. \quad (1.27)$$

Строго говоря, процесс, описываемый уравнением (1.26), не является периодическим, что объясняется наличием в уравнении экспоненциального множителя e^{-nt} . Однако и в этом случае удобно ввести понятие периода затухающих колебаний T как величины, связанной с частотой k_0 соотношением

$$T = \frac{2\pi}{k_0}. \quad (1.28)$$

Период затухающих колебаний T можно трактовать как время между двумя последовательными максимальными (минимальными) отклонениями системы из положения статического равновесия. На рис. 1.5 показан график зависимости обобщенной координаты от времени, соответствующий уравнению (1.26). График наглядно показывает, что процесс, описываемый уравнением (1.26) носит затухающий характер. Максимальное отклонение системы из положения равновесия (часто этот параметр называют амплитудой колебаний) с течением времени убывает и сам график располагается внутри области, ограниченной экспонентами $\pm A_0 e^{-nt}$.

1.2.3. Характеристики темпа затухания колебаний

Для характеристики темпа затухания вводится понятие декремента колебаний D , который определяется как отношение двух последовательных амплитуд (рис. 1.5):

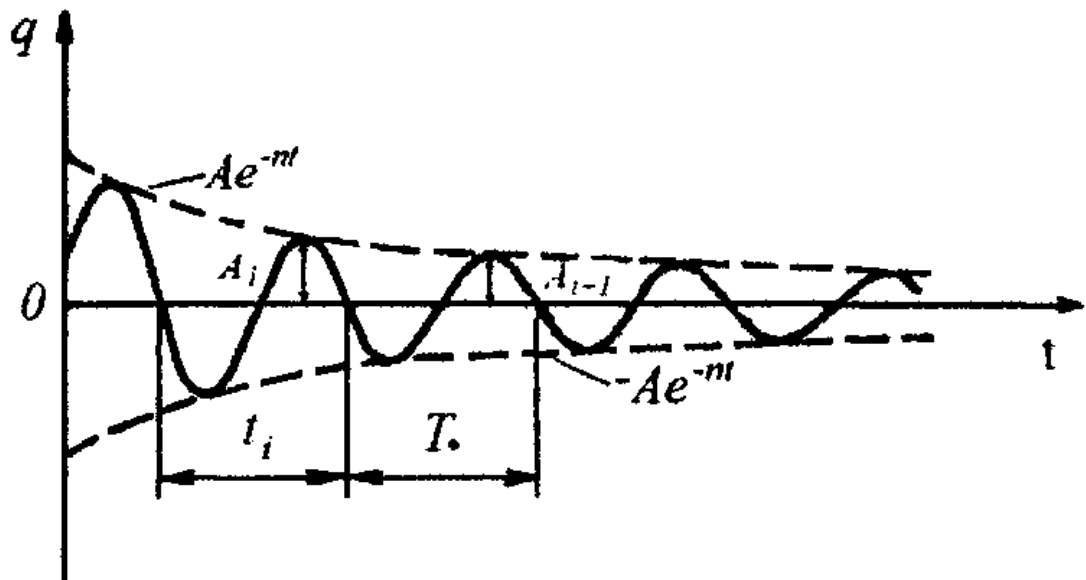


Рис. 1.5.

$$D = \frac{A_i}{A_{i+1}} \quad (1.29)$$

Подставив сюда значения i и $(i+1)$ амплитуд колебаний

$$A_i = A_0 e^{-m t_i}, \quad A_{i+1} = A_0 e^{-m(t_i + T_0)},$$

получим окончательно

$$D = \frac{A_0 e^{-m t_i}}{A_0 e^{-m(t_i + T_0)}} = e^{n T_0}. \quad (1.30)$$

Откуда становится видно, что с ростом коэффициента демпфирования n декремент колебаний увеличивается, и процесс затухания колебаний становится более интенсивным. Важно также отметить, что декремент колебаний в случае действия сил вязкого трения не зависит от амплитуды колебаний.

Другой характеристикой темпа затухания является логарифмический декремент колебаний δ , равный натуральному логарифму декремента колебаний D :

$$\delta = \ln D = n T_0 = \frac{2\pi n}{\sqrt{k^2 - n^2}}. \quad (1.31)$$

Подставив в (1.31) значение D по (1.29), получим другую форму для δ :

$$\delta = \ln \frac{A_i}{A_{i+1}}, \quad (1.32)$$

широко используемую в экспериментальной практике для определения логарифмического декремента колебаний по развертке (осциллограмме) затухающих колебаний системы.

1.2.4. Связь логарифмического декремента колебаний с коэффициентом поглощения

Выше уже отмечалось, что при рассмотрении колебаний механических систем с внутренним трением сопротивления принято оценивать либо энергией S , рассеиваемой системой за цикл, либо коэффициентом поглощения Ψ , равным отношению этой энергии к максимальной потенциальной энергии цикла (В.4). Нетрудно показать, что коэффициент поглощения системы связан простым соотношением с логарифмическим декрементом δ .

Для определения связи коэффициента поглощения с логарифмическим декрементом колебаний воспользуемся формулой (В.4), представив ее в виде:

$$\Psi = \frac{S}{I_{\max}^{(i)}} = \frac{I_{\max}^{(i)} - I_{\max}^{(i+1)}}{I_{\max}^{(i)}}, \quad (1.33)$$

где $I_{\max}^{(i)}$ и $I_{\max}^{(i+1)}$ – максимальная потенциальная энергия системы в i и $(i+1)$ циклах.

Так как в упругой области максимальная потенциальная энергия цикла пропорциональна квадрату амплитуды колебаний:

$$I_{\max}^{(i)} = 0,5cA_i^2, \quad I_{\max}^{(i+1)} = 0,5cA_{i+1}^2,$$

из (1.33) получим:

$$\Psi = \frac{A_i^2 - A_{i+1}^2}{A_i^2} = 1 - \left(\frac{A_{i+1}}{A_i} \right)^2. \quad (1.34)$$

С другой стороны из (1.32) следует, что входящее в (1.34) отношение двух последовательных амплитуд A_{i+1}/A_i равно:

$$A_{i+1}/A_i = e^{-\delta}. \quad (1.35)$$

Следовательно,

$$\Psi = 1 - e^{-\delta} \quad (1.36)$$

или, разложив $e^{-\delta}$ в ряд, получим:

$$\Psi = 2\delta - \frac{2}{3}\delta^2 + \dots \quad (1.37)$$

При малых неупругих сопротивлениях (малых δ) в (1.37) можно пренебречь величинами второго (δ^2) и высшего порядка малости и приближенно положить $\Psi \approx 2\delta$. Более строгими выкладками можно, однако, показать, что это равенство не приближенное, а точное и справедливое при любых значениях логарифмического декремента. Таким образом, коэффициент поглощения системы равен удвоенному логарифмическому декременту колебаний:

$$\Psi = 2\delta. \quad (1.38)$$

Из (1.38) следует, и это подтверждается экспериментально, что логарифмический декремент колебаний реальных систем также, как и коэффициент поглощения, в общем случае не является постоянной величиной. У большинства конструкционных материалов он зависит от амплитуды колебаний, а у пластмасс – и от частоты. Особенности расчета колебаний систем с неупругими сопротивлениями, зависящими от амплитуды колебаний, рассмотрены при анализе нелинейных колебаний.

1.2.5. Представление решения в фазовой плоскости

На фазовой плоскости решению (1.26) соответствует траектория движения изображающей точки в форме закручивающейся спирали вокруг на-

чала координат, как это показано на рис. 1.6. Особая точка в начале координат называется устойчивым фокусом.

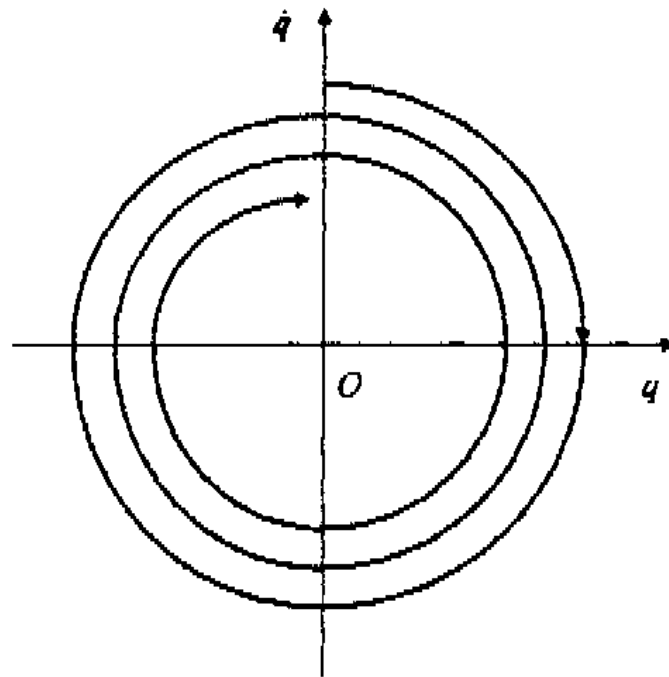


Рис. 1.6

1.2.6. Случай сильного и критического демпфирования

В случае сильного ($n > k$) и критического ($n = k$) демпфирования решение уравнения (3.1) имеет соответственно вид:

$$q = e^{-\mu t} \left(C_1 e^{\sqrt{\mu^2 - k^2} t} + C_2 e^{-\sqrt{\mu^2 - k^2} t} \right) \quad (1.39)$$

и

$$q = e^{-\mu t} (C_1 t + C_2). \quad (1.40)$$

Здесь C_1 и C_2 – произвольные постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

Движения, описываемые функциями (1.39) и (1.40), являются неколебательными, затухающими (апериодическими).

1.3. Пример расчета нагрузок при установке транспортно-пускового контейнера на грузовую платформу

1.3.1. Постановка проблемы

На многоосную грузовую платформу с несущим элементом (рамой) устанавливают транспортно-пусковой контейнер (ТПК).

В результате обрыва тросов или отказа тормозных устройств лебедки крана ТПК падает (поступательно) на платформу с высоты h , отсчитываемой от положения статического равновесия многоосного шасси (рис. 1.7).

Определить максимально допустимое значение h , превышение которого ведет к пробою подвески транспортного средства.

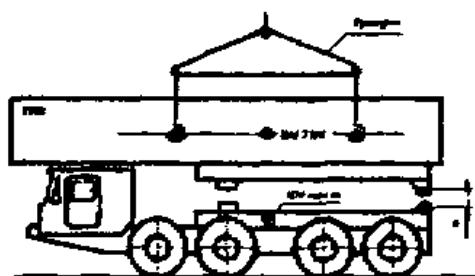


Рис. 1.7

1.3.2. Выбор расчетной схемы

Для исследования колебаний подрессоренного груза суммарной массы $(m_1 + m_2)$, возникающих после соприкосновения падающего с высоты h ТПК массой m_2 на шасси массой m_1 , предполагаем, что при дальнейшем движении контейнер от рамы шасси не отделяется. Полный динамический ход подвески при сжатии составляет b . Жесткость подвески каждого из N колес равна c .

Условия задачи позволяют принять ряд допущений, которые упрощают анализ и дают возможность составить достаточно адекватную математическую модель совместного движения масс m_1 , (подрессоренная масса шасси) и m_2 (масса пустого контейнера). Размещение осей вдоль базы ходовой части и расположение центра масс (ЦМ) шасси таково, что распределение нагрузки от веса системы на опорные оси при поступательном движении платформы явля-

ется равномерным, а, следовательно, главный вектор сил реакции колес проходит через ЦМ шасси. Принимаем, что ЦМ ТПК лежит на одной вертикали с ЦМ шасси.

Поскольку для описания поступательного движения системы достаточно одной координаты – вертикального перемещения ЦМ $x(t)$, рассматриваются одномерные вертикальные колебания многоосной платформы вдоль оси Ox , расчетная схема показана на рис. 1.8.

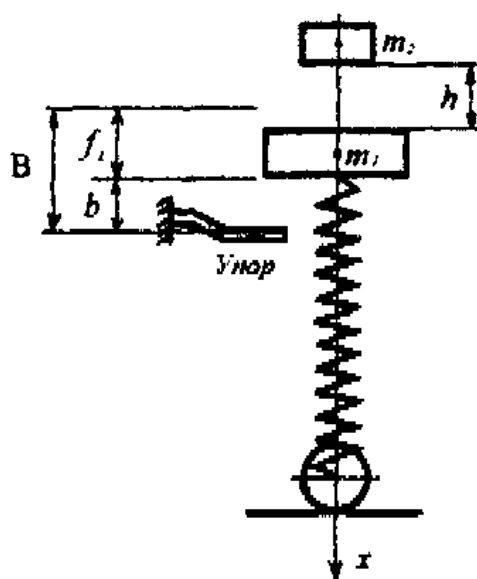


Рис. 1.8

На рис. 1.9 приведена последовательность операций при вводе дифференциального уравнения движения поддресоренного груза суммарной массы $(m_1 + m_2)$.

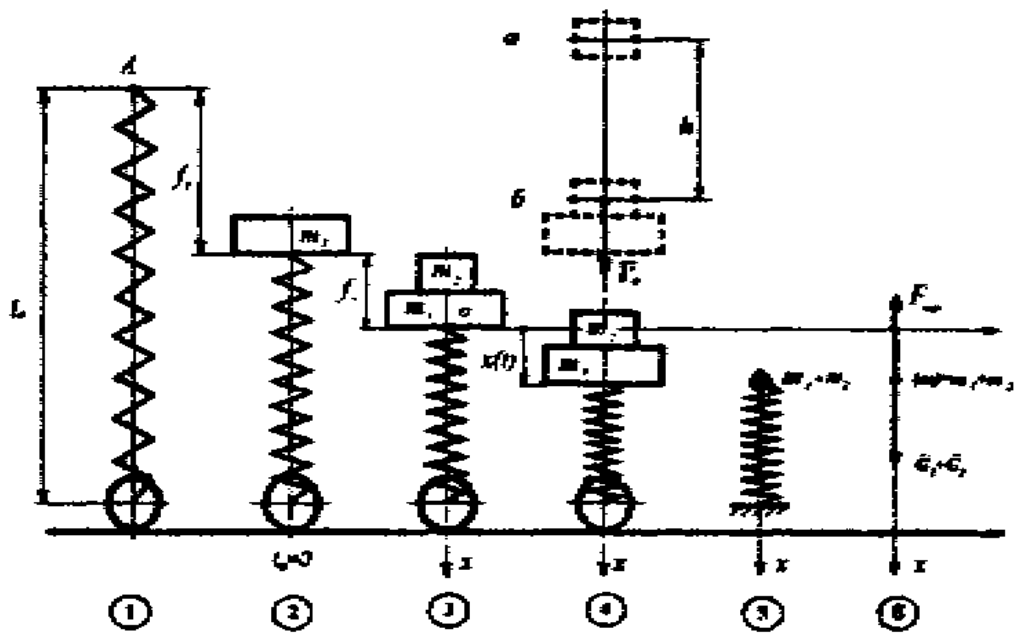


Рис. 1.9

l – ненапряженное состояние подвески; l_0 – длина свободной пружины, поддерживающей подвеску; 2 – положение статического равновесия поддрессоренных масс платформы; f_1 – статическая деформация подвески от веса платформы; 3 – положение статического равновесия поддрессоренных масс платформы и контейнера; f_2 – статический прогиб подвески от веса контейнера. В этом положении выбираем начало отсчета на оси Ox ; 4 – текущее положение совместно движущихся грузов с массами m_1 и m_2 ; а) положение контейнера в момент начала аварийной ситуации; б) положение шасси и контейнера в момент удара и начало их совместного движения; V_0 – скорость встречи контейнера с шасси; 5 и 6 – расчетная и силовая схемы процесса колебаний (силы сопротивления отсутствуют).

1.3.3. Математическая модель совместного движения контейнера и поддрессоренной части платформы

В соответствии с законом Гука при относительно небольших перемещениях модуль силы упругости пропорционален деформации пружины. В рассматриваемом случае деформация пружины равна $f_1 + f_2 + x(t)$. Поэтому проекция силы $F_{уд}$ на ось x равна

$$F_{уд} = -c(f_1 + f_2 + x), \quad (1.41)$$

где c – суммарная жесткость подвесок.

Дифференциальное уравнение движения грузов, принимаемых за материальную точку массой $m = (m_1 + m_2)$, подчиняется уравнению

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t). \quad (1.42)$$

В рассматриваемом случае на материальную точку действуют две силы: постоянная сила ее собственного веса $(G_1 + G_2)$ и переменная (позиционная) сила упругости пружины $F_{\Delta\delta}$.

Тогда проекция равнодействующей в правой части уравнения (1.42) примет вид:

$$\sum F_{kx}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = G_1 + G_2 + F_{\Delta\delta} = G_1 + G_2 - c(f_1 + f_2 + x) \quad (1.43)$$

и уравнение (1.42) можно переписать

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} = G_1 + G_2 - cf_1 - cf_2 - cx. \quad (1.44)$$

В положении статического равновесия вес грузов $G_1 + G_2$ уравновешивается упругой силой пружины, сжатой на величину $(f_1 + f_2)$:

$$\begin{aligned} G_1 + G_2 &= c(f_1 + f_2), \\ G_1 + G_2 - cf_1 - cf_2 &= 0. \end{aligned} \quad (1.45)$$

После подстановки (1.45) в (1.44) дифференциальное уравнение упрощается

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} = -cx. \quad (1.46)$$

Разделив уравнение на $(m_1 + m_2)$ и обозначив $c/(m_1 + m_2) = k^2$, получим дифференциальное уравнение свободных колебаний материальной точки без учета сил сопротивления:

$$\ddot{x} + k^2x = 0. \quad (1.47)$$

Решение данного уравнения имеет вид

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad (1.48)$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования.

Это решение можно представить в амплитудной форме

$$x = A \sin(kt + \alpha), \quad (1.49)$$

где $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$; $tg \epsilon = C_1/C_2$; A – амплитуда колебаний, то есть максимальное отклонение груза от равновесного положения при его колебательных движениях; α – начальная фаза колебаний.

Используя начальные условия движения, получим

$$t_0 = 0, \quad x_0 = -f_2 = -G_2/c = -m_2 g/c, \quad \dot{x}_0 = +v_0. \quad (1.50)$$

Проекция начальной скорости $\dot{x}_0 = +v_0$ вычисляется по теореме об изменении кинетической энергии

$$v_0 = \sqrt{2gh}. \quad (1.51)$$

Тогда, подставив в уравнение (1.49) и в выражение для скорости $\dot{x}(t) = Ak \cos(kt + \alpha)$ начальные условия (1.50) и (1.51), найдем

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}, \quad tg \alpha = \frac{kx_0}{v_0}. \quad (1.52)$$

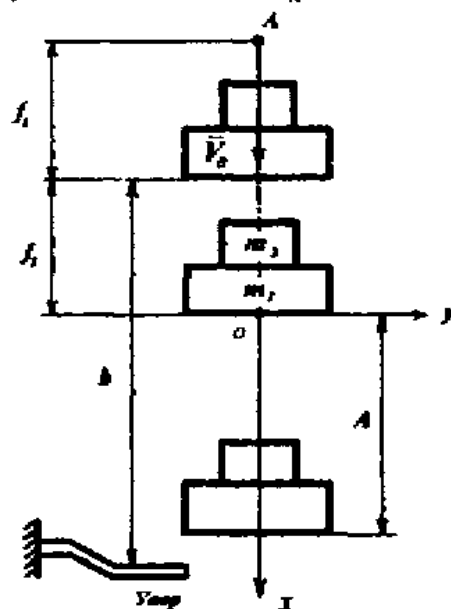


Рис. 1.10

Из рис. 1.10 следует, что пробой подвески наступает с момента, когда

$$A = b - f_2. \quad (1.53)$$

С учетом (1.50) и (1.52) получаем

$$h = \frac{k^2}{2g} \left(b^2 - 2bG_2 \right). \quad (1.54)$$

Выполним расчет при следующих числовых данных:

$$G_1 = 30 \text{ кН}, \quad G_2 = 2 \text{ кН}.$$

Жесткость c (одной из 8-ми подвесок) = 35 кН/м ($N = 8$ подвесок).

Определяем собственную частоту свободных колебаний

$$k = \sqrt{\frac{8 \cdot 35 \cdot 9,81}{32}} \approx 9,26 \text{ с}^{-1}.$$

$$\text{Для } b = 0,2 \text{ м получаем } h = \frac{9,26^2}{2 \cdot 9,81} \left(0,2^2 - 2 \cdot 0,2 \cdot \frac{2}{8 \cdot 35} \right) = 0,16 \text{ м}.$$

Вывод: предельная высота падения контейнера, не вызывающая пробой подвески, равна 16 см.

2. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

2.1. Вынужденные колебания в отсутствии сил сопротивления

2.1.1. Дифференциальное уравнение движения

Вынужденные колебания – это колебания, вызываемые действием внешних вынуждающих сил или кинематическим возбуждением. Для механических систем с одной степенью свободы с линейной силовой характеристикой и в отсутствии сил сопротивления дифференциальное уравнение движения, описывающее вынужденные колебания, имеет вид

$$\ddot{q} + k^2 q = \frac{H(t)}{a} \quad (2.1)$$

где $H(t)$ – обобщенная вынуждающая сила; q – обобщенная координата; a – обобщенная масса; k – собственная частота системы.

Уравнение (2.1) решается достаточно просто в случае, когда $H(t)$ – гармоническая функция времени. Решение этого уравнения для $H(t)$ произвольного вида можно получить обобщением на этот случай решения рассматриваемых ниже частных задач о колебаниях систем с одной степенью свободы, вызванных единичным толчком и единичным импульсом.

2.1.2. Колебания, вызываемые единичным толчком

Рассмотрим механическую систему с одной степенью свободы, движение которой описывается уравнением (2.1) и вызывается внезапно приложенной в момент времени $t = \tau$ и затем постоянно действующей силой $H(t) = 1$ (рис. 2.1).

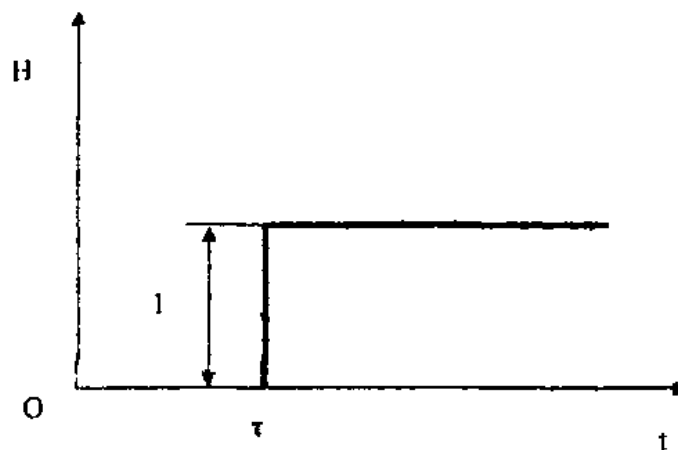


Рис. 2.1

Показанную на графике функцию можно записать и в аналитической форме

$$H(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < \tau, \\ 1, & \text{если } t > \tau. \end{cases} \quad (2.2)$$

Общее решение уравнения (2.1) состоит, как известно, из двух составляющих

$$q = q_1 + q_2, \quad (2.3)$$

где q_1 – общее решение соответствующего однородного уравнения

$$q_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad (2.4)$$

q_2 – частное решение неоднородного уравнения (2.1).

При $H(t)$, определяемым соотношением (2.2),

$$q_2 = \frac{1}{ak^2} \quad (2.5)$$

и, следовательно, общее решение в рассматриваемом случае имеет вид:

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{1}{ak^2}. \quad (2.6)$$

Произвольные постоянные C_1, C_2 в решении (2.6) определяются из начальных условий. При нулевых начальных условиях $q|_{t=0} = 0$; $\dot{q}|_{t=0} = 0$.

Для определения произвольных состояний C_1, C_2 из (2.6) получим следующую систему двух алгебраических уравнений

$$\begin{cases} C_1 \cos k\tau + C_2 \sin k\tau + \frac{1}{ak^2} = 0, \\ -C_1 \sin k\tau + C_2 \cos k\tau = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

откуда

$$C_1 = -\frac{\cos k\tau}{ak^2}; \quad C_2 = -\frac{\sin k\tau}{ak^2}. \quad (2.8)$$

и общее решение (2.6) после несложных преобразований принимает вид:

$$q = \frac{1 - \cos k(t - \tau)}{ak^2} \quad (2.9)$$

Соответствующий этому решению график движения приведен на рис. 2.2. Из него видно, что максимальное отклонение системы из положения равновесия вдвое превышает статическое отклонение, вызванное той же единичной силой.

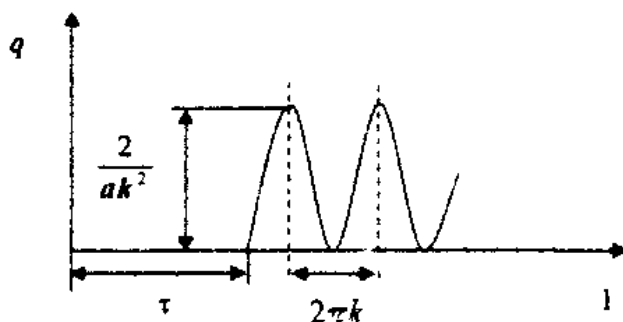


Рис. 2.2

2.1.3. Обобщение решения на случай действия произвольной нагрузки

Для обобщения решения (2.9) на случай вынуждающей силы произвольного вида воспользуемся принципом суперпозиции, справедливым для любой физической системы, описываемой линейными дифференциальными уравнениями. На основании этого принципа, называемого также принципом независимости действия сил, перемещение, вызываемое несколькими

ми силами, равно сумме перемещений, вызываемых каждой из сил в отдельности.

Пусть вынуждающая сила изменяется со временем по закону, графически изображенному на рис. 2.3.

Этот закон можно представить в виде последовательности бесконечно малых толчков $\dot{H}(\tau)d\tau$, каждый из которых вызывает движение, описываемое выражением (2.9):

$$\frac{\dot{H}(\tau)}{ak^2} [1 - \cos k(t - \tau)] d\tau \quad (2.10)$$

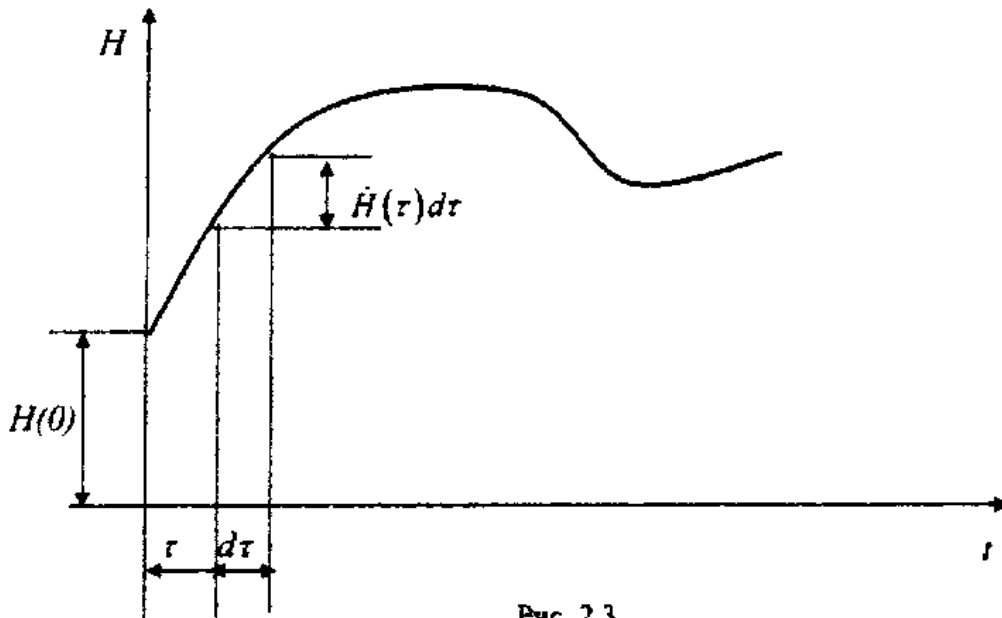


Рис. 2.3

Суммарное действие всех толчков определяется интегралом

$$\int_0^t \frac{\dot{H}(\tau)}{ak^2} [1 - \cos k(t - \tau)] d\tau = \frac{1}{ak^2} [H(t) - H(0)] - \int_0^t \dot{H}(\tau) \cos k(t - \tau) d\tau. \quad (2.11)$$

Чтобы получить полное решение, необходимо еще учесть действие начального толчка, вызванного силой $H(0)$

$$\frac{H(0)}{ak^2} [1 - \cos kt]. \quad (2.12)$$

Таким образом, общее решение уравнения (2.1) в случае произвольного вида принимает форму:

$$q(t) = \frac{1}{ak^2} [H(t) - H(0)\cos kt - \int_0^t \dot{H}(\tau)\cos k(t-\tau)d\tau]. \quad (2.13)$$

**2.1.4. Пример расчета и анализа колебаний,
вызванных действием линейно возрастающей силы**

Пусть внешняя вынуждающая сила, действующая на линейную колебательную систему с одной степенью свободы, изменяется по закону

$$H(t) = ht, \quad (2.14)$$

где h – некоторая постоянная.

Для определения закона движения воспользуемся решением (2.13) с учетом значений $H(0)$ и $\dot{H}(\tau)$:

$$H(0) = 0, \quad \dot{H}(\tau) = h.$$

Подставив эти значения в (2.13) и выполнив интегрирование, получим

$$q = \frac{1}{ak^2} [ht - \frac{h}{k} \sin kt] = \frac{ht}{ak^2} - \frac{h}{ak^3} \sin kt. \quad (2.15)$$

Первое слагаемое в (2.15) отражает статическое действие силы, а второе является динамической поправкой. На графике (рис. 2.4) показан закон изменения обобщенной координаты q от времени.

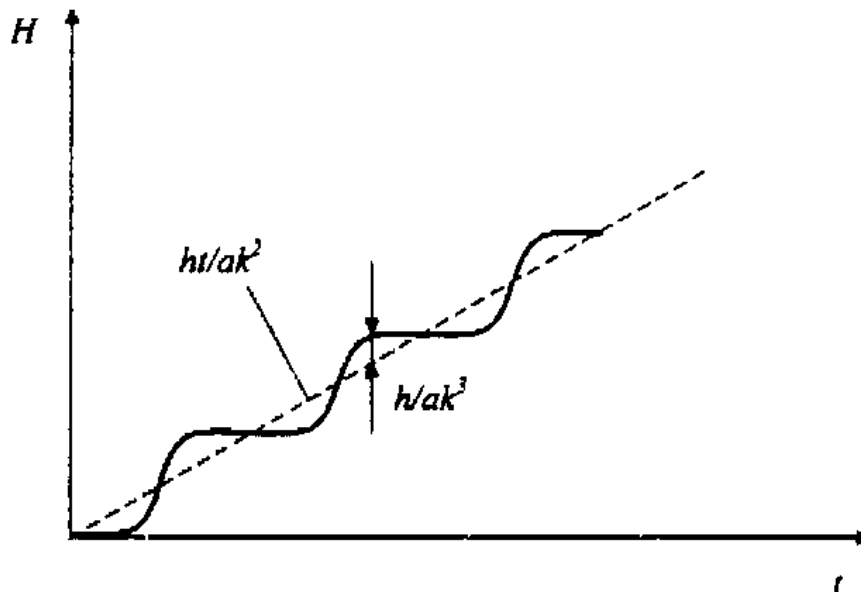


Рис. 2.4

2.1.5. Пример расчета и анализа колебаний, вызванных единичным импульсом

Рассмотрим свободные колебания тела массы a на упругой связи жесткости c , вызываемые единичным мгновенным импульсом $S=1$, приложенным в момент $t = \tau$. Пусть до приложения импульса механическая система находилась в покое. Тогда при $t > \tau$ движение описывается функцией

$$q = A \sin(kt + \alpha), \quad (2.16)$$

а скорость – выражением

$$\dot{q} = Ak \cos(kt + \alpha), \quad (2.17)$$

где $k = \sqrt{c/a}$ – собственная частота; A, α – произвольные постоянные, подлежащие определению из начальных условий.

Очевидно, что к моменту исчезновения ударного импульса перемещение тела еще отсутствует:

$$q(\tau) = 0, \quad (2.18)$$

а скорость изменяется на конечную величину

$$\dot{q}(\tau) = \frac{S}{a} = \frac{1}{a}. \quad (2.19)$$

Совместное рассмотрение (2.16)–(2.19) приводит к системе алгебраических уравнений

$$\begin{cases} q(\tau) = A \sin(k\tau + \alpha) = 0, \\ \dot{q}(\tau) = Ak \cos(k\tau + \alpha) = \frac{1}{a}, \end{cases} \quad (2.20)$$

решая которую получим

$$A = \frac{1}{ak}, \quad \alpha = -k\tau. \quad (2.21)$$

Следовательно, движение в рассматриваемом случае определяется законом

$$q(t, \tau) = \frac{1}{ak} \sin k(t - \tau). \quad (2.22)$$

Полученное решение называется импульсной переходной функцией для дифференциального уравнения (2.1).

2.1.6. Распространение решения на общий случай нагрузки

Представим внешнюю силу $H(t)$ в виде совокупности бесконечно малых импульсов $H(\tau)d\tau$ (рис. 2.5).

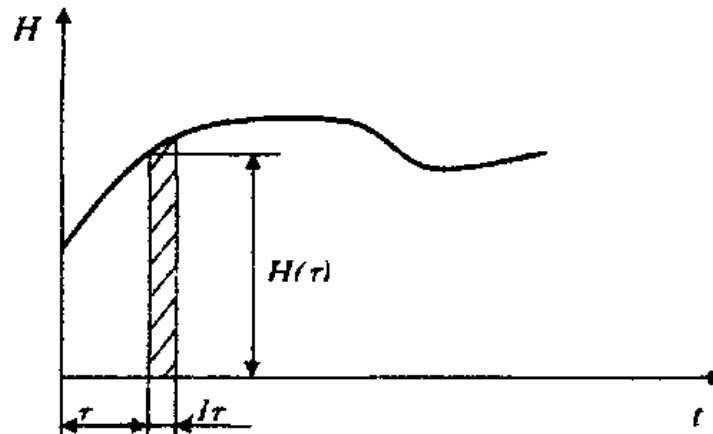


Рис. 2.5

Движение, вызванное каждым из таких импульсов, будет определяться выражением (2.22), умноженным на $H(\tau)d\tau$:

$$\frac{H(\tau)d\tau}{ak} \sin k(t - \tau), \quad (2.23)$$

а перемещение, вызванное всей последовательностью импульсов, расположенных в интервале $(0, t)$, найдем, опять же на основании справедливости принципа суперпозиции, интегрированием

$$q(t) = \frac{1}{ak} \int_0^t H(\tau) \sin k(t - \tau) d\tau. \quad (2.24)$$

2.1.7. Пример расчета и анализа колебаний, вызванных гармонической вынуждающей силой

Нерезонансный случай $\omega \neq k$

Пусть

$$H(t) = H_0 \sin \alpha t. \quad (2.25)$$

Для определения закона движения колебательной системы с одной степенью свободы, вызванного действием вынуждающей гармонической силы (2.25), воспользуемся уравнением (2.24):

$$q(t) = \frac{H_0}{ak} \int_0^t \sin \omega t \sin k(t - \tau) d\tau = \frac{H_0}{a(k^2 - \omega^2)} \left[\sin \omega t - \frac{\omega}{k} \sin kt \right] \quad (2.26)$$

Принимая во внимание, что $ak^2 = c$, где c – жесткость упругой связи, и учитывая, что $H_0/c = q_{\text{ст}}$ – статическое перемещение системы под действием статически приложенной силы H_0 , получим

$$q(t) = \frac{q_{\text{ст}}}{1 - (\omega/k)^2} \left[\sin \omega t - \frac{\omega}{k} \sin kt \right]. \quad (2.27)$$

Из (2.27) следует, что колебания, вызываемые гармонической нагрузкой при нулевых начальных условиях, носят сложный характер и представляют собой наложение двух гармоник: одной – с частотой вынуждающей силы ω (первое слагаемое) и второй – с собственной частотой k (второе слагаемое). В реальных механических системах колебания с собственной частотой k , вследствие наличия сил сопротивления, с течением времени затухают. Поэтому ограничимся исследованием стационарной, незатухающей части решения (2.27):

$$q(t) = \frac{q_{\text{ст}}}{1 - (\omega/k)^2} \sin \omega t. \quad (2.28)$$

Анализ (2.28) показывает, что движение, вызванное действием гармонической вынуждающей нагрузки, происходит по гармоническому закону на частоте вынуждающей силы ω и с амплитудой

$$A = \frac{q_{\text{ст}}}{|1 - (\omega/k)^2|} \quad (2.29)$$

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний A от частоты вынуждающей силы ω называется амплитудно-частотной характеристикой. Однако более удобным является построение амплитудно-частотной характе-

ристики в безвременных координатах: β , η , $\omega/k = \beta$ – относительная частота вынужденных колебаний (расстройка); $1/q_{\text{д}} = \eta$ – коэффициент динамичности.

Из (2.29) следует, что зависимость коэффициента динамичности η от расстройки β имеет вид:

$$\eta = \frac{1}{|1 - \beta^2|} \quad (2.30)$$

На рис. 2.6. показана полученная зависимость

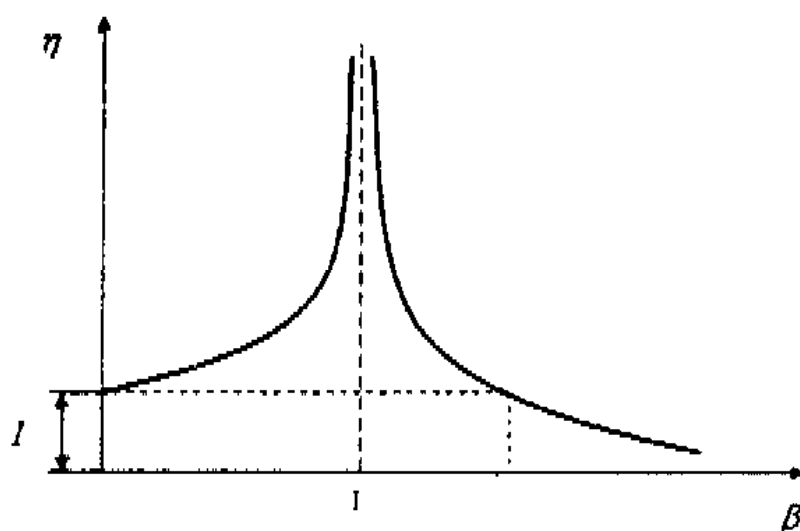


Рис. 2.6

Исследование зависимости (2.30) показывает, что при малых значениях коэффициента расстройки $\beta \ll 1$ ($\omega \ll k$) коэффициент динамичности близок к единице. С ростом β коэффициент динамичности η возрастает и при $\beta \rightarrow 1$ ($\omega \rightarrow k$) стремится к бесконечности. При дальнейшем возрастании расстройки коэффициент динамичности монотонно убывает, а при $\beta > \sqrt{2}$ ($\omega > \sqrt{2}k$) – оказывается меньше единицы.

Резонансный случай

В случае $\omega = k$ для рассматриваемой механической системы из (2.24) получим

$$q(t) = q_{\text{см}}(\sin kt - kt \cos kt) \quad (2.31)$$

График движения, соответствующий закону (2.31), показан на рис. 2.7.

Таким образом, в резонансном случае амплитуда вынужденных колебаний неограниченно возрастает не сразу, а линейно, с течением времени. Поэтому кратковременные резонансные состояния не всегда являются опасными для инженерных конструкций, машин и механизмов.

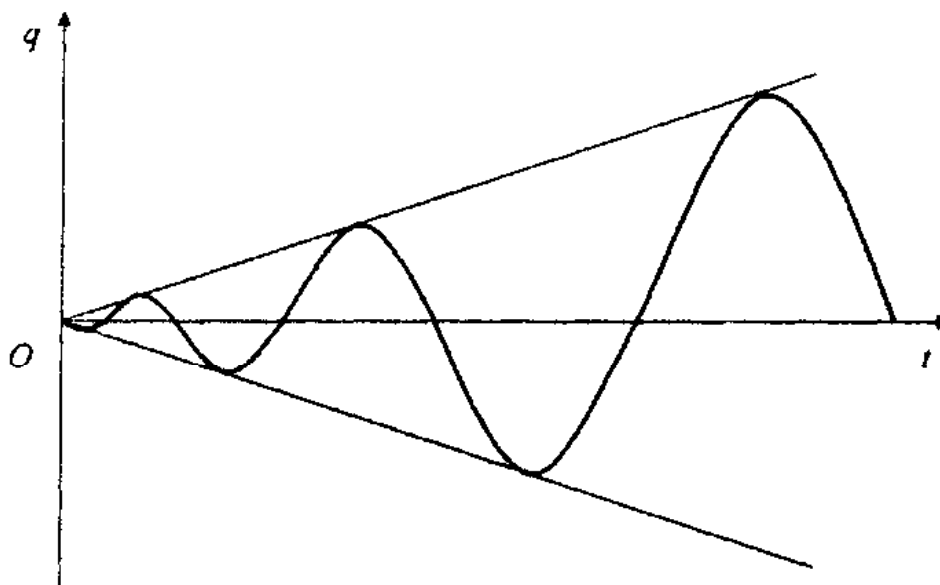


Рис. 2.7

2.1.8. Пример расчета и анализа колебаний на основе предположения о характере установившегося движения (метод Дурффинга)

Рассмотренные выше методы решения задач о вынужденных колебаниях систем с одной степенью свободы при произвольном законе $H(t)$, базирующиеся на использовании уравнений колебаний тех же систем, вызванных единичным толчком или единичным импульсом, не являются единственными. Более того, ими не всегда целесообразно и пользоваться. В частности, на примере задачи о действии периодических импульсов на линейную систему с одной степенью свободы рассмотрим другой способ

решения, основанный на предположении о том, что под действием приложенных импульсов в системе устанавливается периодический режим движения с периодом, равным периоду следования импульсов. Пусть вынуждающая сила, действующая на механическую систему с одной степенью свободы, изменяется по закону, графически изображенному на рис. 2.8.

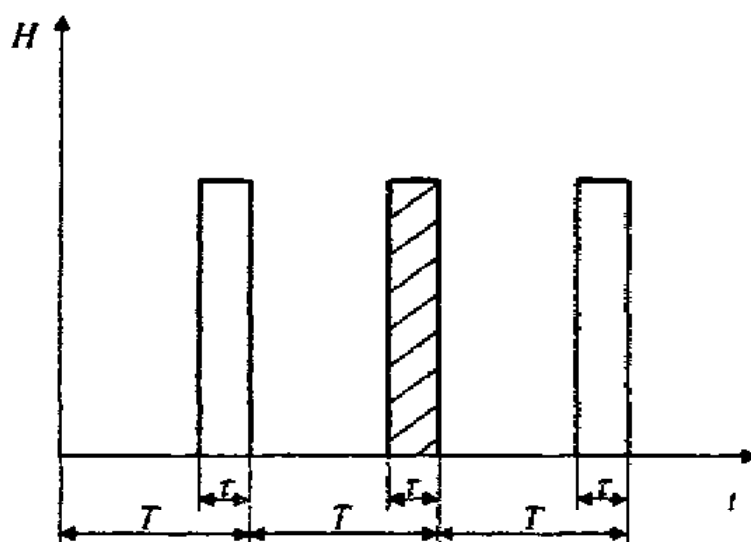


Рис. 2.8

Такую нагрузку можно трактовать как последовательность повторяющихся с периодом T импульсов, величина каждого из которых определяется заштрихованной на графике площадью. Длительность каждого импульса τ будем считать малой ($\tau \ll T$). Учитывая, что движение рассматриваемой системы описывается дифференциальным уравнением типа (2.1), запишем закон движения системы на интервале времени после окончания действия очередного импульса до начала действия следующего в форме:

$$q = q_0 \cos kt + \dot{q}_0 / k \sin kt \quad (2.32)$$

где q_0 , \dot{q}_0 — неизвестная координата и скорость системы в конце действия очередного импульса.

В конце интервала движения, перед началом действия следующего импульса

$$\begin{cases} q(T - \tau) = q_0 \cos kT + \frac{\dot{q}_0}{k} \sin kT, \\ \dot{q}(T - \tau) = -q_0 k \sin kT + \dot{q}_0 \cos kT. \end{cases} \quad (2.33)$$

В результате действия очередного импульса положение системы за время удара не изменяется, а скорость изменится на конечную величину S/a :

$$\begin{cases} q(T) = q(T - \tau) = q_0 \cos kT + \frac{\dot{q}_0}{k} \sin kT, \\ \dot{q}(T) = \frac{S}{a} + \dot{q}(T - \tau) = \frac{S}{a} - q_0 k \sin kT + \dot{q}_0 \cos kT. \end{cases} \quad (2.34)$$

Но так как движение предполагается периодическим, то

$$q_0 = q(T); \quad \dot{q}_0 = \dot{q}(T). \quad (2.35)$$

Отсюда, для определения неизвестных q_0, \dot{q}_0 получим систему двух алгебраических линейных уравнений

$$\begin{cases} q_0 = q_0 \cos kT + \frac{\dot{q}_0}{k} \sin kT, \\ \dot{q}_0 = \frac{S}{a} - kq_0 \sin kT + \dot{q}_0 \cos kT, \end{cases} \quad (2.36)$$

решая которую, найдем

$$\begin{cases} q_0 = \frac{S}{2ak} \operatorname{ctg} kT/2, \\ \dot{q}_0 = \frac{S}{2a}. \end{cases} \quad (2.37)$$

С учетом (2.37) решение (2.32) принимает вид:

$$q = \frac{S}{2ak} \left(\sin kt + \operatorname{ctg} \frac{kT}{2} \cos kt \right). \quad (2.38)$$

Если формально ввести понятие частоты следования импульсов

$$\omega = 2\pi/T, \quad (2.39)$$

то решение (2.38) можно приобрести в другую форму:

$$q = \frac{S}{2ak} \left(\sin kt + \operatorname{ctg} \frac{\pi k}{\omega} \cos kt \right). \quad (2.40)$$

Следует однако помнить, что решения (2.38) и (2.40) справедливы только на отрезке времени $0 < t < T$. Поэтому на всем интервале следования ударных импульсов движение не будет гармоническим. Тем не менее, введем понятие амплитуды колебаний, понимая под амплитудой максимальное отклонение системы из положения равновесия:

$$A = \frac{S}{2ak} \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi k}{\omega}} = \frac{S}{2ak |\sin \frac{\pi k}{\omega}|}. \quad (2.41)$$

Учитывая, что S/ak – максимальное отклонение, вызванное одним импульсом, выражение

$$\eta = \frac{1}{2 |\sin \frac{\pi k}{\omega}|}, \quad (2.42)$$

можно назвать коэффициентом влияния повторности импульсов.

На рис. 2.9 показана зависимость этого коэффициента от отношения частоты следования ударных импульсов ω к собственной частоте системы k .

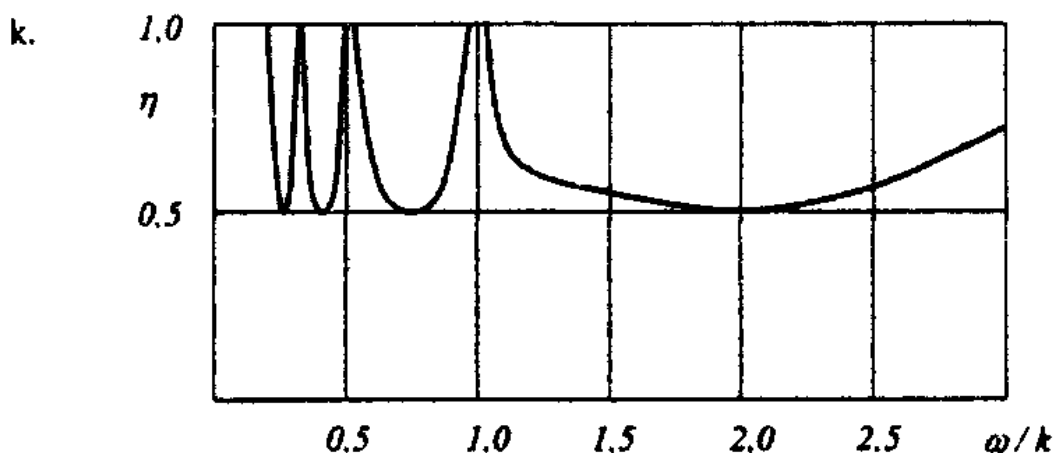


Рис. 2.9

Из (2.42) и рис. 2.9 следует, что в системе возможно возникновение бесконечного числа ударных резонансов, когда коэффициент влияния повторности импульсов неограниченно возрастает. Это достигается при $k = n\omega$ ($n = 1, 2, \dots$). Минимальное значение коэффициента η равно 0,5.

2.2. Вынужденные колебания при наличии сил сопротивления

2.2.1. Дифференциальное уравнение движения

Вынужденные колебания механической системы с одной степенью свободы, на которую, помимо ранее учитывавшихся сил, действует еще и сила сопротивления R , пропорциональная первой степени скорости v (вязкое трение $R = \mu v$), описываются, как известно, дифференциальным уравнением

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = \frac{H(t)}{a}, \quad (2.43)$$

где, как и ранее, q – обобщенная координата; a – обобщенная масса системы; k – ее собственная частота в отсутствии сил трения; $H(t)$ – обобщенная вынуждающая сила; n – коэффициент демпфирования.

2.2.2. Общее решение, основанное на введении функций отклика на единичный импульс

Если на изучаемую систему, находящуюся в покое в положении статического равновесия, в момент времени τ действует единичный импульс, то можно показать, что ее движение будет описываться уравнением

$$q(t) = \frac{1}{a\sqrt{k^2 - n^2}} e^{-n(t-\tau)} \sin[\sqrt{k^2 - n^2}(t - \tau)], \quad (2.44)$$

которое является обобщением уравнения (2.22) и сводится к нему при $n = 0$. Основываясь далее на принципе суперпозиции и представляя вынуждающую силу $H(\tau)$ в виде бесконечной последовательности малых импульсов $H(\tau)d\tau$, общее решение уравнения (2.43), при действии произвольной нагрузки и нулевых начальных условиях, получим из (2.44) интегрированием

$$q(t) = \frac{1}{a\sqrt{k^2 - n^2}} \int_0^t H(\tau) e^{-n(t-\tau)} \sin[\sqrt{k^2 - n^2}(t - \tau)] d\tau. \quad (2.45)$$

2.2.3. Пример расчета и анализа колебаний при прохождении системы через резонанс

Во многих практически важных случаях представляет интерес изучение колебаний механических систем под действием внешней силы с изменяющейся частотой. Такие задачи, например, типичны для случаев разгона или торможения двигателя. Допустим, что в случае разгона двигателя частота ω вынуждающей силы изменяется по линейному закону

$$\omega = 2bt, \quad (2.46)$$

где $2b$ – угловое ускорение вала двигателя.

Тогда вынуждающую силу можно представить в форме:

$$H(t) = H_0 \sin(bt^2 + \varphi),$$

где H_0 – амплитуда вынуждающей силы; φ – начальный фазовый угол.

Воспользовавшись результатом (2.45), запишем выражение для перемещения системы $q(t)$:

$$q(t) = \frac{H_0}{a\sqrt{k^2 - n^2}} \int_0^t e^{-n(t-\tau)} \sin[\sqrt{k^2 - n^2}(t - \tau)] \sin(bt^2 + \varphi) d\tau. \quad (2.47)$$

В общем случае интеграл (2.47) аналитически взять не удастся, поэтому для его вычисления применяют численные методы. Результаты численного решения проиллюстрированы сплошной линией на графиках (рис. 2.10), здесь показана характерная зависимость относительного смещения $q/q_{\text{ст}}$ от времени t или пропорциональной ему относительной мгновенной частоты ω/k .

Эта зависимость, также как и все другие зависимости этого графика, построена для систем без затухания ($n=0$). Пунктирными линиями здесь показаны огибающие процессов при различных темпах роста частоты вынуждающей силы. Качественный анализ графиков позволяет сделать следующий вывод: с возрастанием темпа роста частоты вынуждающей силы

$\vartheta = 4\pi h/k^2$: максимальный коэффициент динамичности уменьшается, а частота, при которой он реализуется, возрастает ($\nu_5 > \nu_4 > \nu_3 > \nu_2 > \nu_1$).

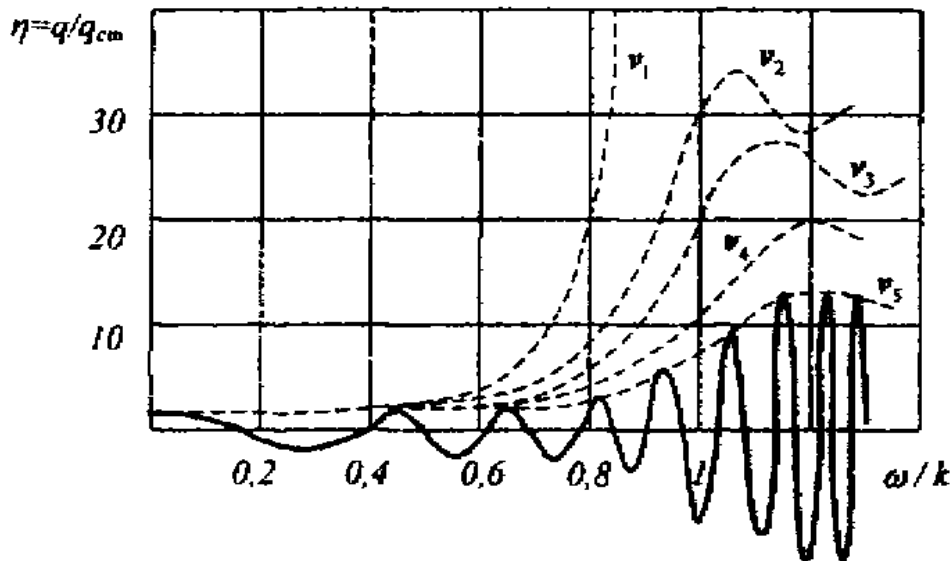


Рис. 2.10

2.2.4. Метод комплексных амплитуд. Пример расчета и анализа колебаний при действии гармонической вынуждающей силы

Рассмотрим два дифференциальных уравнения, описывающих вынужденные колебания одной и той же системы

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + 2n\dot{q}_1 + k^2 q_1 = \frac{H_0}{a} \sin \omega t, \\ \ddot{q}_2 + 2n\dot{q}_2 + k^2 q_2 = \frac{H_0}{a} \cos \omega t, \end{cases} \quad (2.48)$$

Умножим первое уравнение на мнимую единицу i и сложим со вторым, получим:

$$(\ddot{q}_2 + i\ddot{q}_1) + 2n(\dot{q}_2 + i\dot{q}_1) + k^2(q_2 + iq_1) = \frac{H_0}{a}(\cos \omega t + i \sin \omega t). \quad (2.49)$$

Введем новую комплексную переменную

$$q = q_2 + iq_1 \quad (2.50)$$

и учтем, что

$$\cos \omega t + i \sin \omega t = e^{i\omega t} \quad (2.51)$$

Тогда дифференциальное уравнение (2.49) можно записать в форме:

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = \frac{H_0}{a} e^{i\omega t}. \quad (2.52)$$

В (2.52) действительная часть переменной q описывает движение системы под действием вынуждающей силы $H_0/a \cos \omega t$, а мнимая – движение, вызванное силой $H_0/a \sin \omega t$. Установившееся движение будем искать в форме

$$q = A e^{i\omega t} \quad (2.53)$$

Подставляя (2.53) в (2.52), получим комплексное алгебраическое уравнение относительно комплексной амплитуды A , решив которое найдем

$$A = \frac{H_0}{a \left[(k^2 - \omega^2) + i2n\omega \right]}. \quad (2.54)$$

Теперь в решении (2.53) с учетом (2.54) можно выделить действительную и мнимую части

$$\begin{aligned} q_1 &= A \sin(\omega t - \gamma), \\ q_2 &= A \cos(\omega t - \gamma), \end{aligned} \quad (2.55)$$

где

$$A = \frac{H_0}{a \sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{2n\omega}{k^2 - \omega^2}. \quad (2.56)$$

Важно обратить внимание на то, что амплитуда колебаний A равна модулю комплексной амплитуды A , а сдвиг фаз определяется соотношением

$$\gamma = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} A}{\operatorname{Re} A}. \quad (2.57)$$

Это позволяет исключить процесс выделения действительных и мнимых частей в решении (2.53), а амплитуду A колебаний и сдвиг фаз γ определять непосредственно из (2.54). Зависимость амплитуды колебаний A от частоты вынуждающей силы ω носит название амплитудно-частотной характеристики системы, а зависимость сдвига фаз γ от частоты ω – фазочастотной характеристики. Фазочастотные характеристики систем с раз-

личным относительным коэффициентом демпфирования n/k показаны на рис. 2.11.

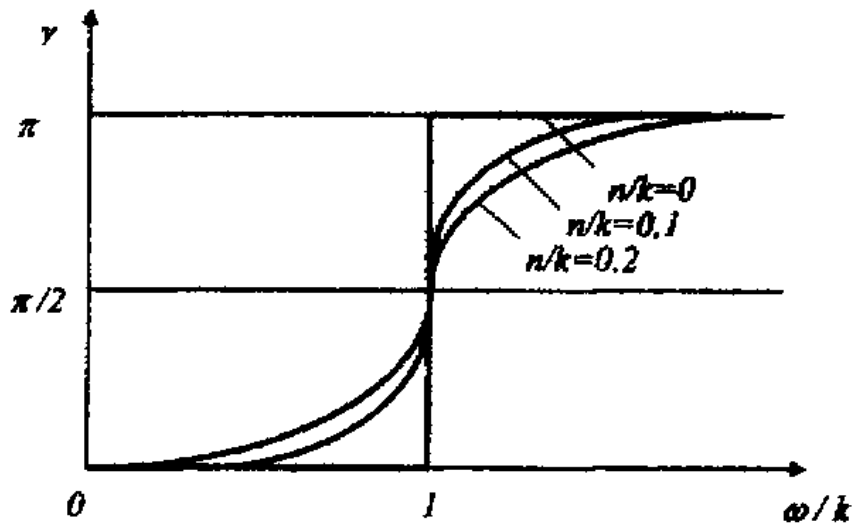


Рис. 2.11

Анализ приведенных на рис. 2.11 фазочастотных характеристик показывает, что при малых частотах сдвиг фаз γ между силой $H(t)$ и перемещением $q(t)$ невелик. При резонансе он равен $\pi/2$ независимо от уровня сил трения, и при дальнейшем увеличении частоты стремится к π . Для инженерной практики больший интерес представляют амплитудно-частотные характеристики. Их удобно строить в безразмерных координатах $\beta - \eta$ ($\beta = \omega/k$ — коэффициент расстройки; $\eta = A/A_{em}$ — коэффициент динамичности). Коэффициент динамичности определяется соотношением

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + 4\xi^2\beta^2}}, \quad (2.58)$$

где $\xi = n/k$ — относительный коэффициент демпфирования.

Используя соотношения между различными характеристиками демпфирования, формуле (2.58) можно придать вид зависимости $\eta = \eta(\beta, \delta)$

или $\eta = \eta(\beta, \psi)$, где δ – логарифмический декремент колебаний, $\psi = 2\delta$ – коэффициент поглощения систем:

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + \left(\frac{\delta}{\pi}\right)^2 \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + \left(\frac{\psi}{2\pi}\right)^2 \beta^2}}. \quad (2.59)$$

Преимущество последних формул перед (2.58) состоит в том, что коэффициент динамичности ставится в зависимость от энергетических характеристик трения δ , ψ , что позволяет использовать эту формулу не только для вязкого, но и для других законов трения.

График зависимости коэффициента динамичности η от расстройки β при различных коэффициентах относительного демпфирования ξ приведен на рис. 2.12.

Из анализа зависимостей (2.58) и (2.59) следует, что при приближении частоты вынуждающей силы ω к собственной частоте системы k , амплитуда вынужденных колебаний возрастает. Максимум она достигает при

$$\omega = \sqrt{k^2 - 2\pi^2}, \quad (\beta = \sqrt{1 - 2\xi^2}), \quad (2.60)$$

подставив (2.60) в (2.58), найдем

$$\eta_{\max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}. \quad (2.61)$$

При малых ξ ($\xi \ll 1$) с достаточной для практики точностью можно считать, что максимум коэффициента динамичности достигается при резонансе ($\omega \approx k$, $\beta \approx 1$)

$$\eta_{\max} \approx \eta_{\text{ст}} \approx \frac{1}{2\xi} = \frac{\pi}{\delta} = \frac{2\pi}{\psi}. \quad (2.62)$$

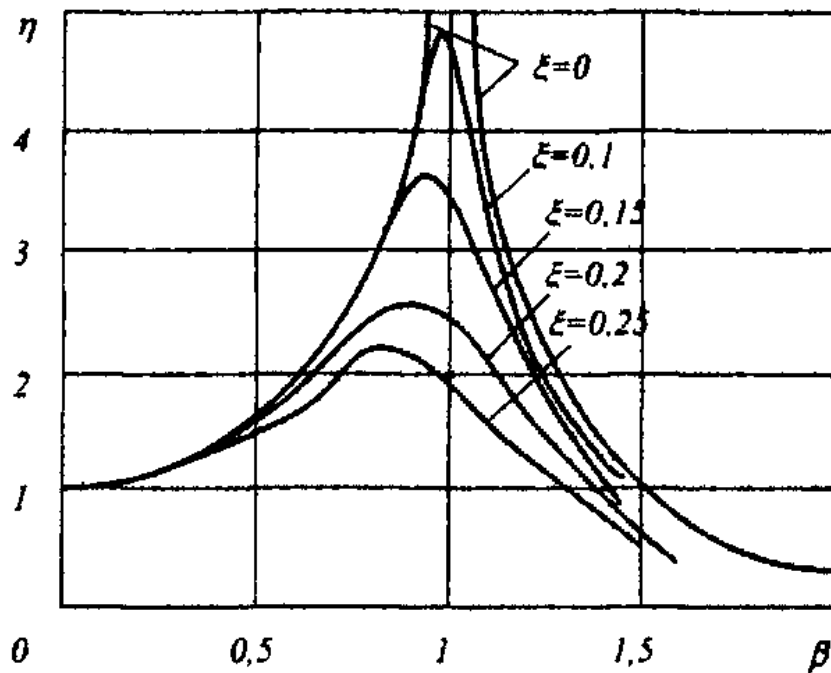


Рис. 2.12

2.2.5. Способ разложения на гармонические составляющие

Пример расчета и анализа колебаний при действии произвольной вынуждающей силы

Пусть вынуждающая сила $H(t)$ в дифференциальном уравнении (2.43) является произвольной периодической функцией периода T , допускающей разложение в ряд Фурье:

$$H(t) = N_0 + N_1 \cos \omega t + M_1 \sin \omega t + N_2 \cos 2\omega t + M_2 \sin 2\omega t + \dots + N_j \cos j\omega t + M_j \sin j\omega t + \dots, \quad (2.63)$$

где $\omega = 2\pi/T$ – основная частота,

$$N_0 = \frac{1}{T} \int_0^T H(t) dt; \quad N_j = \frac{1}{T} \int_0^T H(t) \cos j\omega t dt; \quad (2.64)$$

$$M_j = \frac{1}{T} \int_0^T H(t) \sin j\omega t dt.$$

В этом случае по формулам (2.27), (2.28) можно определить движение рассматриваемой системы под действием каждой из гармоник, а движение

системы под действием силы $H(t)$ получить суммированием движений, вызванных каждой из гармоник в отдельности

$$q = \frac{N_0}{ak^2} + \frac{N_1 \cos(\alpha t - \gamma_1) + M_1 \sin(\alpha t - \gamma_1)}{a\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}} + \dots$$

$$+ \frac{N_j \cos(j\alpha t - \gamma_j) + M_j \sin(j\alpha t - \gamma_j)}{a\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}}, \quad (2.65)$$

где фазовый сдвиг γ_j определяется выражением

$$\gamma_j = \operatorname{arctg} \frac{2nj\omega}{k^2 - (j\omega)^2}. \quad (2.66)$$

Пример расчета и анализа колебаний при действии двух гармонических сил с близкими частотами

Пусть механическая система с одной степенью свободы испытывает действие двух гармонических вынуждающих сил с близкими частотами

$$H(t) = H_{10} \sin \omega_1 t + H_{20} \sin \omega_2 t, \quad (2.67)$$

где $\omega_1 = \omega_2 + \Delta\omega$.

На основании (2.65) можно считать, что движение системы в этом случае будет описываться функцией

$$q = A_{10} \sin(\omega_1 t - \gamma_1) + A_{20} \sin(\omega_2 t - \gamma_2), \quad (2.68)$$

где A_{10} , A_{20} – амплитуды соответствующих гармоник. Преобразуем выражение (2.68) к виду, удобному для анализа

$$A_{10} \sin(\omega_1 t - \gamma_1) + A_{20} \sin(\omega_2 t - \gamma_2) = \frac{A_{10} + A_{20}}{2} [\sin(\omega_1 t - \gamma_1) + \sin(\omega_2 t - \gamma_2)] +$$

$$+ \frac{A_{10} - A_{20}}{2} [\sin(\omega_1 t - \gamma_1) - \sin(\omega_2 t - \gamma_2)] = (A_{10} + A_{20}) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2}\right) \times$$

$$\times \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{\gamma_2 + \gamma_1}{2}\right) + (A_{10} - A_{20}) \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{\gamma_2 + \gamma_1}{2}\right). \quad (2.69)$$

и введем обозначения:

$$\begin{aligned}
 B_1(t) &= (A_{10} + A_{20}) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2}\right); \\
 B_2(t) &= (A_{10} + A_{20}) \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2}\right).
 \end{aligned}
 \tag{2.70}$$

Примем далее во внимание, что $B_1(t)$, $B_2(t)$ – медленно меняющиеся периодические функции времени. Период их изменения τ равен:

$$\tau = \frac{4\pi}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{4\pi}{\Delta\omega}.
 \tag{2.71}$$

С учетом принятых обозначений уравнение движения (2.69) примет вид:

$$q = B_1(t) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t - \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}\right) + B_2(t) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t - \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}\right).
 \tag{2.72}$$

или

$$q = \sqrt{B_1^2(t) + B_2^2(t)} \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t - \gamma\right),
 \tag{2.73}$$

где $\operatorname{tg} \gamma = B_1(t)/B_2(t)$.

Таким образом, под действием двух гармонических сил с близкими частотами система совершает колебания по закону

$$q = A \sin(\omega t - \gamma),
 \tag{2.74}$$

где $A = \sqrt{B_1^2(t) + B_2^2(t)}$ – медленно меняющаяся амплитуда колебаний; $\omega = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ – среднее значение частоты; γ – медленно меняющаяся фаза колебаний.

Следовательно, движение системы носит почти гармонический характер, причем амплитуда A периодически меняется с периодом гораздо большим, чем период основных колебаний $T = 4\pi/(\omega_1 - \omega_2)$.

Примерный характер рассмотренного движения, называемого биением, показан на рис. 2.13.

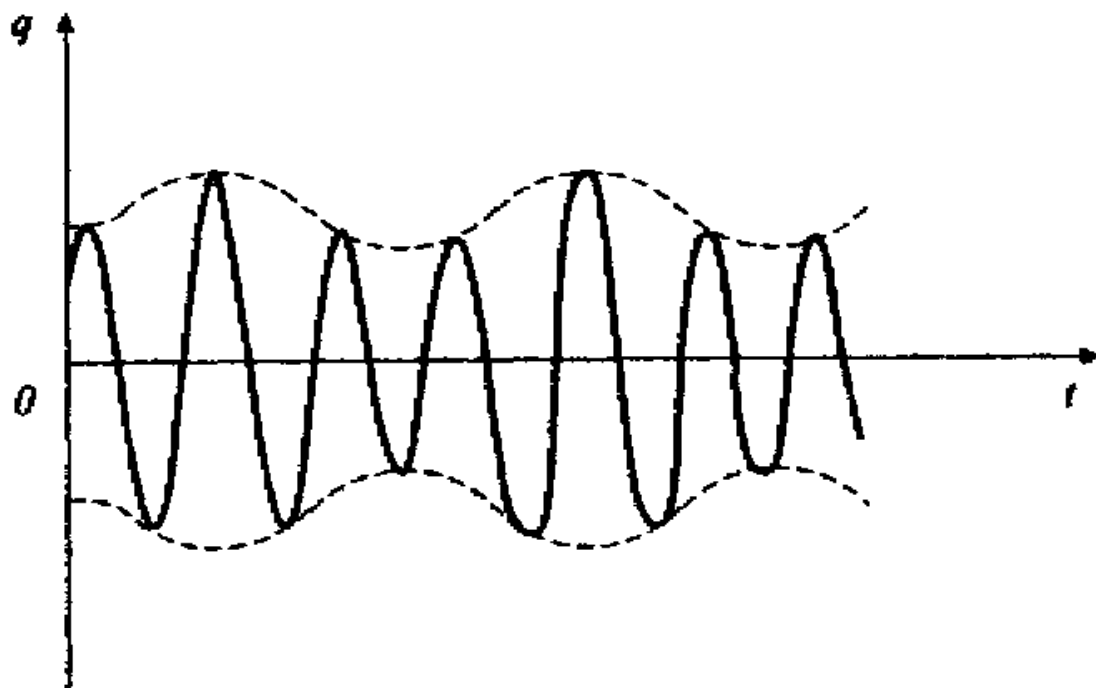


Рис. 2.13

3. РАСЧЕТ И АНАЛИЗ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

3.1. Элементы теории параметрических колебаний

3.1.1. Примеры систем, совершающих параметрические колебания

Укажем несколько примеров систем, совершающих параметрические колебания:

– раскачивание на качелях, где увеличивать размахи колебаний удастся только за счет периодического изменения расстояния от центра тяжести (точка C) системы до точки O подвеса качелей (рис. 3.1, а);

– колебания груза на упругой балке с периодически изменяющейся длиной $l(t)$ рабочего участка (рис. 3.1, б);

– шахтная клеть, равномерно движущаяся по вертикальным направляющим, которые закреплены на шпалах (рис. 3.1, в). В этой системе поперечная жесткость, определяющая восстанавливающую силу при поперечных колебаниях клетки, переменна: если клеть находится на уровне очередной пары шпал, то эта жесткость достигает максимума; если же клеть расположена в середине свободного пролета направляющих, жесткость минимальна;

– маятник с вибрирующей точкой подвеса (рис. 3.2) и др.

3.1.2. Основное уравнение

Вывод дифференциального уравнения параметрических колебаний системы, его решение и последующий анализ проведем на примере маятника с вибрирующей точкой подвеса O (рис. 3.2).

Если точка подвеса маятника O неподвижна, то на массу m маятника действуют сила тяжести mg и натяжения нити T . Если же точка подвеса O совершает вертикальные колебания по закону

$$y = A \cos \omega t, \quad (3.1)$$

то при составлении уравнения движения маятника дополнительно следует принять в расчет переносную силу инерции $\Phi = -m\ddot{y}$. С помощью теоремы об изменении кинетического момента системы получим следующее дифференциальное уравнение движения маятника:

$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\varphi}) = -mgl \sin \varphi + m\dot{y}l \sin \varphi. \quad (3.2)$$

При малых углах φ оно сводится к уравнению:

$$\ddot{\varphi} + \left(g/l + A\omega^2/l \cos \omega t \right) \varphi = 0. \quad (3.3)$$

Если ввести новую безразмерную независимую переменную τ и безразмерные параметры δ, ε , определяемые соотношениями

$$\tau = \omega t; \quad \delta = g/l\omega^2; \quad \varepsilon = A/l \quad (3.4)$$

и учесть, что

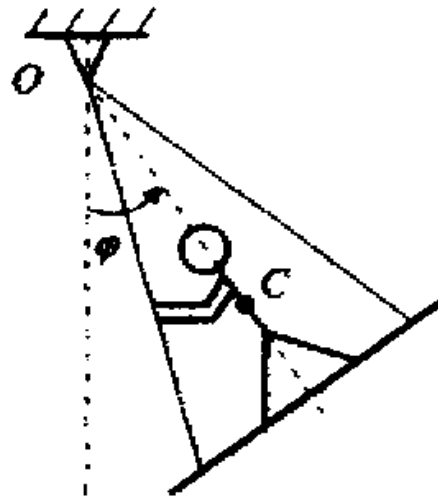
$$\ddot{\varphi} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \omega^2 \frac{d^2\varphi}{d\tau^2}, \quad (3.5)$$

то уравнению (1.3) можно придать каноническую форму:

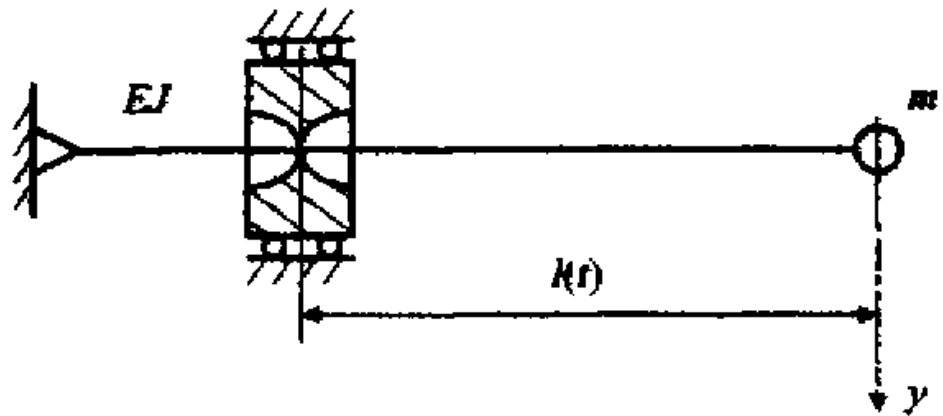
$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + (\delta + \varepsilon \cos \tau) \varphi = 0, \quad (3.6)$$

известную в научной литературе как уравнение Матье.

a)



b)



в)

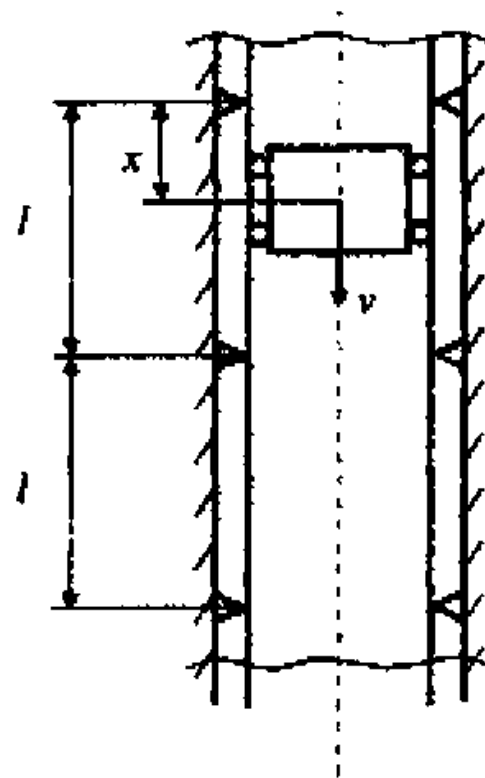


Рис. 3.1

Таким образом, колебания параметрических возбуждаемых систем описываются уравнением Матье.

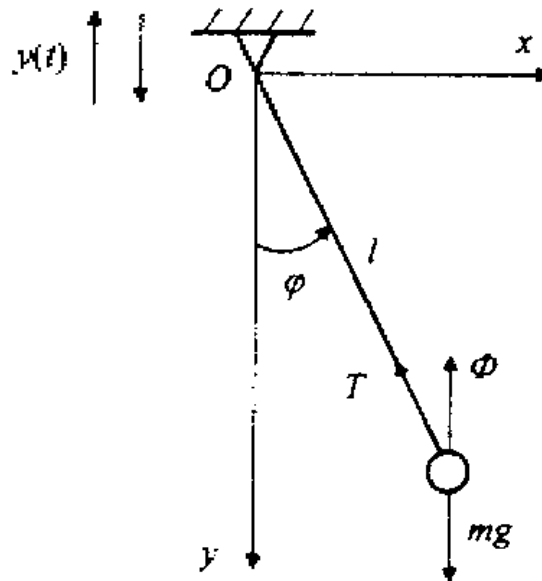


Рис. 3.2

3.1.3. Учет сил вязкого сопротивления

Практика показывает, что колебания любой механической системы сопровождаются действием сил трения. Не являются исключением и параметрические колебания. При учете сил сопротивления в дифференциальном уравнении (3.6) появится дополнительное слагаемое. В случае вязкого трения оно принимает вид:

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + 2n\frac{d\varphi}{d\tau} + (\delta + \varepsilon \cos\tau)\varphi = 0, \quad (3.7)$$

где n – коэффициент демпфирования.

Введением нового безразмерного параметра δ_1 и новой переменной z , определяемыми соотношениями

$$\delta_1 = \delta - n^2; \quad z = \varphi \cdot e^{n\tau}, \quad (3.8)$$

уравнение (3.7) сводится к уравнению Матье (3.6):

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} + (\delta_1 + \varepsilon \cos \tau) z = 0. \quad (3.9)$$

Таким образом, задача о параметрических колебаниях системы с вязким трением и без трения сводится к решению по сути дела одного и того же уравнения Матье. Решение его, естественно, будет в этих двух случаях разным из-за того, что коэффициенты уравнения (3.6) отличаются от коэффициентов уравнения (3.9).

3.1.4. Исследование уравнения Матье. Диаграмма Айнса-Стретта

Форма решения уравнения Матье зависит от значения параметров δ , ε и несет, как правило, колебательный характер. Поиск этого решения представляет в общем случае большие математические трудности. На практике, однако, можно выполнить анализ решения уравнения (3.6) без определения самого решения $\varphi(\tau)$. Строгое математическое решение уравнения (3.6) и его анализ показывают, а эксперимент подтверждает, что уравнением (3.6) могут описываться два принципиально различных режима движения. асимптотически устойчивый, когда с течением времени, несмотря на периодическое изменение параметров системы, первоначально возбужденные колебания «затухают», и неустойчивый, характеризующийся непрерывным возрастанием экстремальных значений колеблющейся величины $\varphi(\tau)$ (параметрический резонанс). Граничным между ними является периодический режим движения. Поэтому в инженерной практике оказывается достаточным определение тех значений безразмерных параметров δ и ε , которые обеспечивают устойчивый режим движения и тем самым устраняется опасность возникновения параметрического резонанса в системе.

Этой цели служит диаграмма Айнса-Стретта (рис. 3.3), на которой показаны границы областей параметров, разделяющих устойчивые (заштрихованные зоны) и неустойчивые режимы. Здесь же приведены уравнения, приближенно определяющие (при малых ε) положение границ устойчивости.

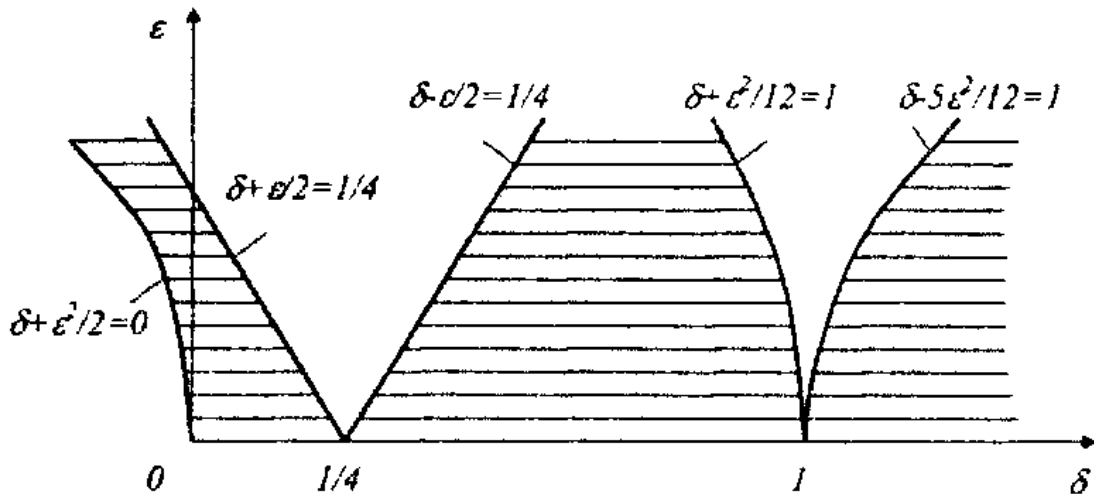


Рис. 3.3

Таким образом, если параметры механической системы, совершающей параметрические колебания, соответствуют таким δ и ϵ , что они попадают в заштрихованные области диаграмм Айнса-Стретта, то устанавливается устойчивый режим движения. По диаграмме Айнса-Стретта можно также установить, как будет изменяться характер режима в зависимости от изменения частоты ω параметрического возбуждения. Так, при одной и той же глубине возбуждения ϵ с изменением частоты ω от 0 до ∞ , δ изменяется от ∞ до 0, что соответствует прямой линии на диаграмме, параллельной оси δ . В этом случае будут происходить последовательные переходы системы с устойчивых на неустойчивые режимы движения и наоборот. Из этой же диаграммы следует, что при малых ϵ неустойчивые режимы движения реализуются в окрестностях δ , равных 0.25 и 1. Более подробное исследование показывает, что параметрический резонанс наступает при всех δ , удовлетворяющих условию:

$$\delta = \frac{1}{4} k^2 \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (3.10)$$

В этом проявляется одно из основных отличий «обычного» резонанса от параметрического. «Обычный» резонанс (при отсутствии диссипативных сил) представляет собой возрастающие вынужденные колебания устойчивой системы, возникающие под действием вынуждающей силы.

Он проявляется только при одной частоте вынуждающей силы, равной частоте собственных колебаний и при любых начальных условиях.

Параметрический резонанс – это возрастающие колебания около неустойчивого положения равновесия. Он возникает при бесчисленном множестве значений частот возбуждения в результате появления неизбежных начальных возмущений. При нулевых начальных условиях система находится в покое. В этом нетрудно убедиться, приняв во внимание, что уравнение (3.6) при нулевых начальных условиях допускает тривиальное решение $\varphi(t)=0$.

Отличие параметрического резонанса от «обычного» проявляется и в особенностях влияния диссипативных сил на характер колебаний. Известно, что амплитуда вынужденных резонансных колебаний существенно уменьшается при действии сил неупругого сопротивления, то есть наличие диссипативных сил всегда приводит к ослаблению резонансных явлений. При параметрических колебаниях влияние диссипативных сил сказывается лишь на расположении границ областей параметров, разделяющих устойчивые и неустойчивые режимы (рис. 3.4), и делает невозможным параметрическое возбуждение при достаточно малых ε . В целом, области устойчивых режимов расширяются, но по-прежнему существуют такие сочетания параметров (δ и ε), при которых возможно возникновение параметрического резонанса.

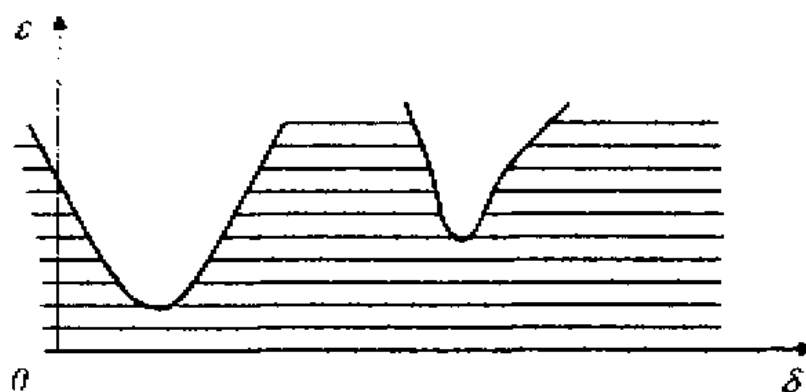


Рис. 3.4

3.2. Примеры расчета и анализа параметрических колебаний конкретных механических систем

3.2.1. Стабилизация верхнего неустойчивого положения математического маятника.

Для получения дифференциального уравнения малых колебаний маятника около верхнего положения равновесия достаточно в уравнении (3.3) поменять знак перед g (рис. 3.5).

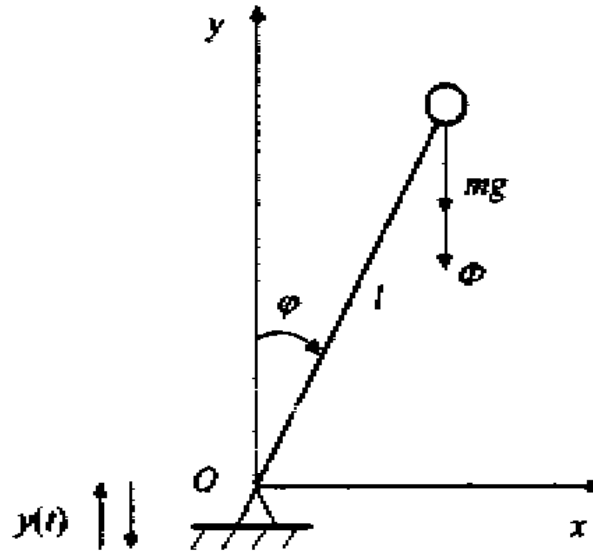


Рис. 3.5

Тогда получим:

$$\ddot{\varphi} + \left(-\frac{g}{l} + \frac{A\omega^2}{l} \cos \omega t \right) \varphi = 0$$

или

$$\frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} + (\delta + \varepsilon \cos \tau) \varphi = 0, \quad (3.11)$$

где

$$\delta = -\frac{g}{l\omega^2}; \quad \varepsilon = \frac{A}{l}. \quad (3.12)$$

Будем считать, что амплитуда колебаний A точки опоры много меньше длины маятника l , то есть $\varepsilon = A/l \ll 1$ и, следовательно, можно пользоваться аналитическими выражениями для границ устойчивости на диаграмме Айнса-Стретта. Из диаграммы видно, что устойчивые режимы движения

возможны и при отрицательных значениях δ . Для этого необходимо, чтобы выполнялись условия:

$$-\frac{\varepsilon^2}{2} < \delta < \frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{2}, \quad (3.13)$$

то есть точка с координатами (δ, ε) должна находиться выше параболы $\delta = -\frac{\varepsilon^2}{2}$ и ниже прямой $\delta = \frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{2}$.

С учетом (3.12) неравенства (3.13) можно привести к виду:

$$\frac{g}{\omega^2} > \frac{2A-l}{4}, \quad \frac{g}{\omega^2} < \frac{A^2}{2l} \quad (3.14)$$

При сделанном предположении о том, что $A \ll l$, первое неравенство (3.13) выполняется всегда. Тогда содержательным остается только второе неравенство, которое удобно записать в форме:

$$A\omega > \sqrt{2gl} \quad (3.15)$$

Таким образом, верхнее статически неустойчивое положение маятника может быть стабилизировано высокочастотными колебаниями точки подвеса при условии, что максимальная скорость $A\omega$ превышает скорость свободного падения маятника с высоты, равной его длине ($\sqrt{2gl}$).

3.2.2. Потеря устойчивости вращающегося вала с различными главными моментами инерции

В некоторых случаях в инженерной практике применяются валы с различными главными моментами инерции площади поперечного сечения $J_x \neq J_y$ (рис. 3.6).

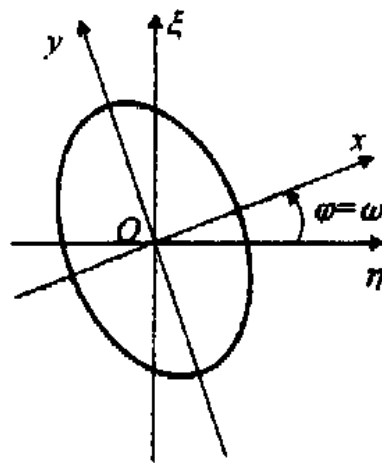


Рис 3.6

Тогда моменты инерции площади поперечного сечения относительно неподвижных осей координат $O\eta$ и $O\xi$ вычисляются по формулам:

$$J_{\eta} = J_x \cos^2 \varphi + J_y \sin^2 \varphi, \quad J_{\xi} = J_x \sin^2 \varphi + J_y \cos^2 \varphi. \quad (3.16)$$

Или, учитывая, что

$$\varphi = \omega t, \quad \cos^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi), \quad \sin^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi). \quad (3.17)$$

получим:

$$\begin{aligned} J_{\eta} &= \frac{1}{2}(J_x + J_y) + \frac{1}{2}(J_x - J_y) \cos 2\omega t, \\ J_{\xi} &= \frac{1}{2}(J_x + J_y) - \frac{1}{2}(J_x - J_y) \cos 2\omega t. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Для исключения из рассмотрения силы тяжести будем считать, что ось вала расположена вертикально, а с валом в его середине жестко связан маховик массы m (рис. 3.7).

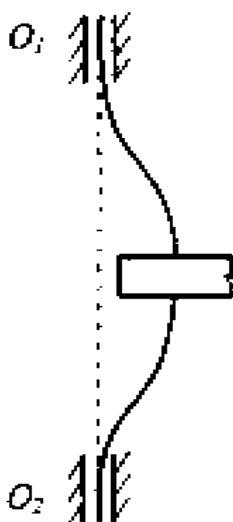


Рис. 3.7

Жесткость c такого вала на изгиб будет определяться известной формулой:

$$c = \frac{48EJ}{l^3}, \quad (3.19)$$

где E – модуль упругости материала вала; l – длина вала.

При вращении вала вокруг оси O_1O_2 , в силу действия различных случайных факторов, вал получает возмущения, в результате которых проги-

баются, и его ось не совпадает с геометрической осью O_1O_2 (рис. 3.7). Следовательно, дальнейшее движение центра масс маховика около положения равновесия будет описываться дифференциальными уравнениями:

$$m\ddot{\eta} + c_\eta \eta = 0, \quad m\ddot{\xi} + c_\xi \xi = 0, \quad (3.20)$$

где c_η, c_ξ – жесткость вала в направлении осей $O\eta$ и $O\xi$ соответственно.

Учитывая (3.18) и (3.19), получим зависимости для жесткостей:

$$\begin{aligned} c_\eta &= \frac{24E}{l^3} \left[(J_x + J_y) + (J_x - J_y) \cos 2\omega t \right], \\ c_\xi &= \frac{24E}{l^3} \left[(J_x + J_y) - (J_x - J_y) \cos 2\omega t \right]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Теперь уравнение (3.20) с учетом (3.21) можно записать в форме, явно представляющей периодическую зависимость жесткостей от времени:

$$\begin{aligned} m\ddot{\eta} + \frac{24E}{l^3} \left[(J_x + J_y) + (J_x - J_y) \cos 2\omega t \right] \eta &= 0, \\ m\ddot{\xi} + \frac{24E}{l^3} \left[(J_x + J_y) - (J_x - J_y) \cos 2\omega t \right] \xi &= 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Полученные уравнения идентичны. Поэтому проанализируем только одно из них. Для того, чтобы привести его к форме уравнения Матье, перейдем к безразмерным параметрам

$$\tau = 2\omega t; \quad \delta = \frac{6E(J_x + J_y)}{ml^3\omega^2}; \quad \varepsilon = \frac{6E(J_x - J_y)}{ml^3\omega^2}, \quad (3.23)$$

и после выполнения стандартных преобразований, вместо первого уравнения системы (3.22) получим:

$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} + (\delta + \varepsilon \cos \tau)\eta = 0. \quad (3.24)$$

Таким образом, движение системы в направлении оси $O\eta$ описывается уравнением Матье. Следовательно, параметрический резонанс этого движения возможен при выполнении условия (3.10). Критические угловые скорости вращения вала в этом случае найдем подстановкой (3.23) в (3.10):

$$\frac{6E(J_x + J_y)}{ml^3\omega^2} = \frac{k^2}{4}, \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (3.25)$$

откуда

$$\omega_{\text{ф}} = \frac{2}{k} \sqrt{\frac{6E(J_x + J_y)}{ml^3}}. \quad (3.26)$$

Таким образом, не вдаваясь в детали решения уравнения Матье, получена информация о недопустимых (критических) скоростях вращения вала в данном конкретном случае. Этой информации, как правило, вполне достаточно для проектирования надежных систем подобного типа.

4. РАСЧЕТ И АНАЛИЗ КОЛЕБАНИЙ ЛИНЕЙНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ОГРАНИЧЕННЫМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ

4.1. Общие сведения

Известно, что вынуждающие силы, формируемые каким-либо источником энергии, строго говоря, зависят не только от способа управления этим источником (то есть являются не только функциями времени), но и от движения механической системы, на которую они воздействуют. В этом смысле такие источники энергии, режим работы которых зависит от параметров колебаний системы, называют еще неидеальными.

Рассмотрим качественные особенности колебаний механической системы с одной степенью свободы, возбуждаемых неидеальным источником энергии, на примере шунтового электродвигателя, вращающего в противоположные стороны два одинаковых неуравновешенных ротора, установленных на колебательной системе (рис. 4.1).

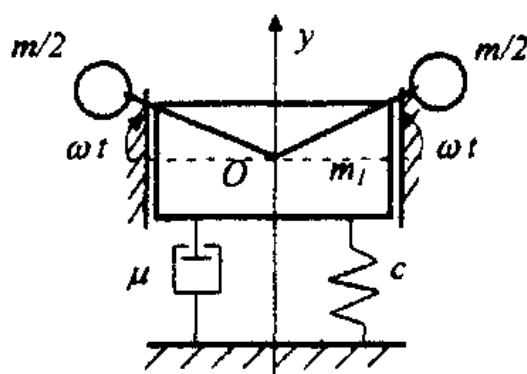


Рис. 4.1

Очевидно, что в этом случае происходит возбуждение колебаний тела массы m , вдоль вертикальной оси y за счет сил инерции неуравновешенных масс ротора:

$$H(t) = mr\omega^2 \sin \omega t,$$

где r – расстояние от оси вращения ротора до жестко закрепленных неуравновешенных масс; m – масса неуравновешенных частей ротора.

Для учета свойств источника энергии достаточно иметь семейство статических характеристик 1–3 (рис. 4.2).

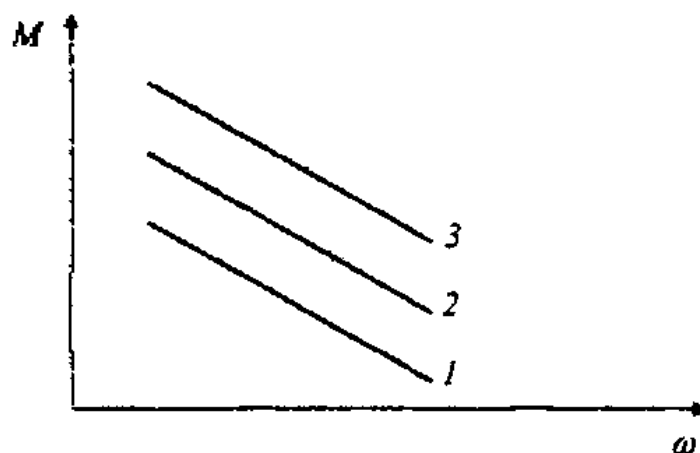


Рис. 4.2

Здесь по оси абсцисс отложена угловая скорость ω вращения якоря, а по оси ординат – крутящий момент M , который может создавать двигатель при данной угловой скорости ω . Управление двигателем осуществляется изменением положения регулировочного органа, при этом фиксируется та или иная характеристика.

Располагая семейством характеристик (рис. 4.2), можно построить семейство зависимостей мощности $N_{\text{дв}}$ двигателя от угловой скорости ω : $N_{\text{дв}} = M\omega$ (рис. 4.3).

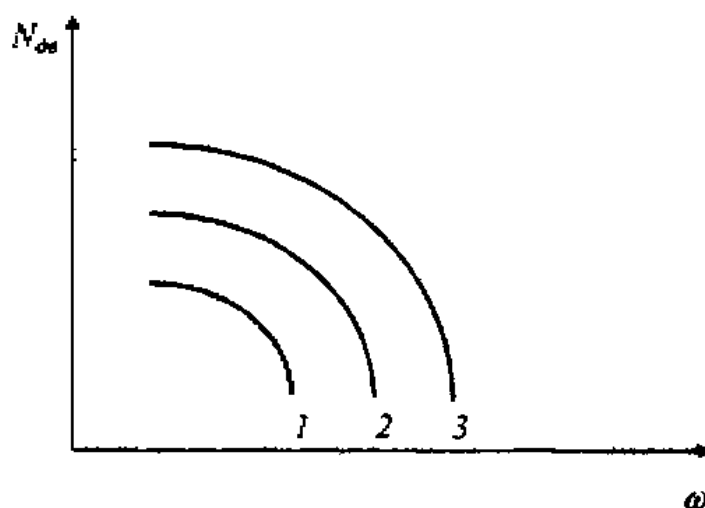


Рис 4.3

Теперь для решения поставленной задачи необходимо сопоставить мощность, развиваемую источником энергии, с рассеиваемой мощностью в колебательной системе. Для этого найдем работу s сил вязкого трения R за цикл колебаний, предполагая, что движение происходит по гармоническому закону $y = A \sin(\omega t - \gamma)$:

$$s = \int R dy = \int_0^{2\pi/\omega} \mu \dot{y}^2 dt = \int_0^{2\pi/\omega} \mu A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - \gamma) dt = \pi \mu \omega A^2. \quad (4.1)$$

Тогда средняя за период мощность сил сопротивления равна:

$$N_{\text{в}} = S/T = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2. \quad (4.2)$$

Подставляя сюда выражение для амплитуды вынужденных колебаний

$$A = \frac{mr\omega^2}{(m_1 + m) \sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}}, \quad (4.3)$$

получим:

$$N_{\text{в}} = \frac{nm^2 r^2 \omega^6}{(m_1 + m) [(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2]}, \quad (4.4)$$

где: $k^2 = c/(m_1 + m)$; $n = \mu/2(m_1 + m)$.

На рис. 4.4 представлен качественный вид графика зависимости $N_{\text{в}} = N_{\text{в}}(\omega)$, причем локального максимума $N_{\text{сп}}$ достигает в околорезонансной зоне, при $\omega \approx k$.

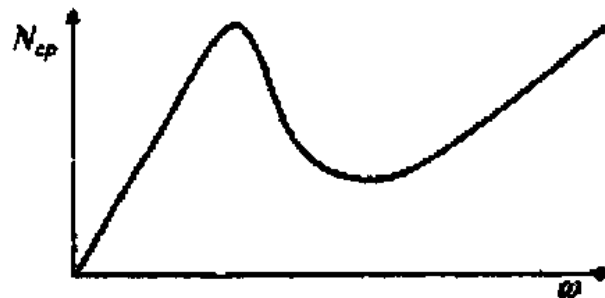


Рис. 4.4

4.2. Особенности управления источником энергии

Сопоставляя теперь зависимость мощности $N_{\text{дв}}$, развиваемой двигателем (рис. 4.3), с мощностью $N_{\text{ср}}$ сил сопротивления, можно составить представление об особенностях колебаний механической системы. Рассмотрим сначала управление двигателем, осуществляемое с целью увеличения его угловой скорости (увеличения частоты вынужденных колебаний).

При положении регулировочного органа, соответствующего характеристике 1 (рис. 4.5, а) в системе устанавливается стационарный режим колебаний с частотой ω_1 , определяемой абсциссой точки пересечения кривых $N_{\text{дв}} = N_{\text{дв}}(\omega)$ и $N_{\text{ср}} = N_{\text{ср}}(\omega)$ (рис. 4.5, а). При этом колебания массы m_1 происходят с амплитудой A_1 (рис. 4.5, б). При последующем медленном перемещении регулировочного органа, соответствующем последовательной реализации характеристик 2, 3, 4, 5, колебания будут происходить с частотами $\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5$ — соответственно и амплитудами A_2, A_3, A_4, A_5 (рис. 4.5, б). Характеристика 5 является критической, так как при последующем незначительном перемещении регулировочного органа, соответствующем переходу на характеристику, лежащую незначительно выше, произойдет нестационарный переход системы вдоль характеристики б на новый стационарный режим с частотой ω_6 (рис. 4.5, а) и амплитудой A_6 (рис. 4.5, б). При дальнейшем перемещении регулировочного органа (переходу на характеристику б и выше) в системе происходит непрерывное увеличение частоты ω и уменьшение амплитуды A колебаний. Таким образом, приходим к выводу, что в рассматриваемой механической системе невозможны устойчивые стационарные режимы движения с частотами, лежащими в диапазоне $\omega_3 < \omega < \omega_6$.

Рассмотрим теперь особенности движения при управлении двигателем с целью уменьшения его угловой скорости (уменьшения частоты вынужденных колебаний). Пусть в начальный момент угловая скорость вращения

двигателя равна $\omega = \omega_6$ (рис. 4.5, а), а амплитуда колебаний тела массой m , равна A_9 (рис. 4.5, в). При дальнейшем медленном последовательном перемещении регулировочного органа, соответствующем последовательному переходу на характеристики 5, 4, 3, в системе будут устанавливаться стационарные режимы движения с частотами $\omega_8, \omega_7, \omega_6$ (рис. 4.5, а) и амплитудами A_8, A_7, A_6 (рис. 4.5, в). Характеристика 3 является критической, вдоль которой происходит нестационарный переход системы в новое устойчивое состояние с частотой ω_3 и амплитудой A_3 . Далее происходит непрерывный процесс уменьшения частоты и амплитуды колебаний (рис. 4.5, а, 4.5, в). Таким образом, в этом случае также имеется нереализуемый диапазон частот $\omega_3 < \omega < \omega_6$, отличный от диапазона, соответствующего возрастанию угловой скорости двигателя.

Важность рассмотренного явления состоит в том, что в современных условиях, исходя из принципов рационального конструирования, а также по соображениям снижения капитальных затрат, экономии энергоресурсов стремятся так подобрать мощность приводного двигателя, чтобы она лишь соответствовала потребностям машины под нагрузкой, а не многократно их превышала. В этом случае нельзя уже вести расчет машины, полагая, что источник энергии имеет неограниченную мощность. Поэтому в машине, сконструированной на принципах максимального использования резервов, обязательно будет иметь место взаимодействие между колебательной системой и двигателем.

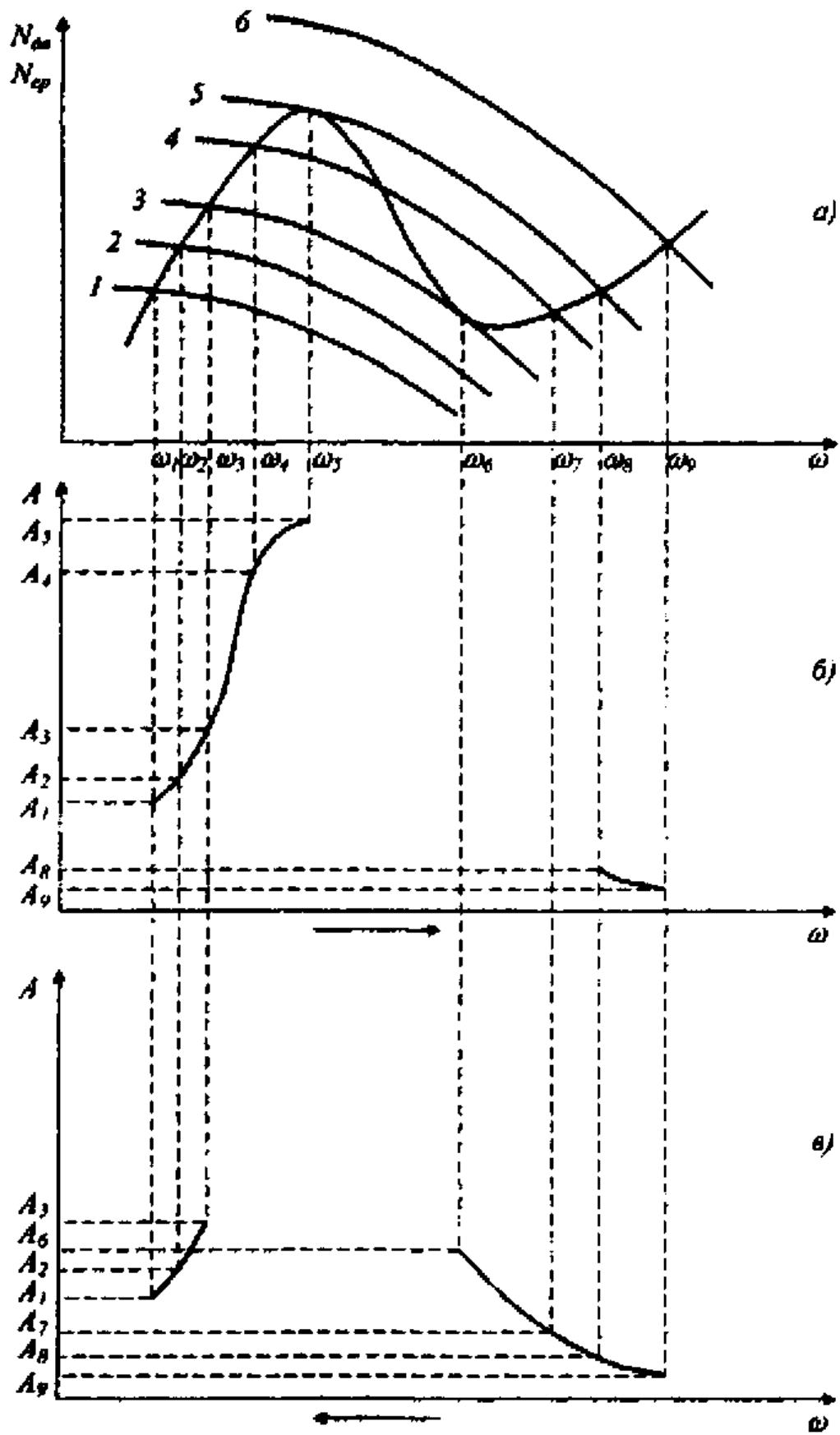


Рис. 4.5

5. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Детали, узлы и элементы реальных машин и аппаратов представляют собой, как правило, механические системы с распределенными параметрами и, следовательно, имеют в общем случае бесчисленное количество степеней свободы. Поведение таких систем при динамических нагрузках далеко не всегда удается удовлетворительно описать упрощенной расчетной схемой, учитывающей лишь одну (естественно, наиболее значимую) степень свободы. Для более полного описания динамического поведения системы в этом случае приходится усложнять расчетную схему, учитывая несколько (две, три и более) степеней свободы. К расчетным схемам с несколькими степенями свободы приходится, например, прибегать при анализе колебаний транспортных средств, валов редукторов, трансмиссий, балочных систем и во многих других случаях.

В методическом плане исследование свободных колебаний механических систем с несколькими степенями свободы предшествует анализу и расчету колебаний этих систем с учетом сил сопротивления, периодических вынуждающих сил и специальных силовых воздействий – ударных, полигармонических, случайных и т. д. Поэтому в настоящем пособии даются рекомендации по составлению дифференциальных уравнений движения систем с несколькими степенями свободы, по расчету спектра собственных частот, определению собственных форм колебаний и нахождению уравнений движения системы с учетом начальных условий.

5.1. Способы составления дифференциальных уравнений движения

5.1.1. Использование уравнений Лагранжа второго рода

Также, как и для систем с одной степенью свободы, наиболее общим способом составления дифференциальных уравнений движения систем с несколькими степенями свободы является способ, основанный на приме-

нении уравнений Лагранжа второго рода. Для консервативных систем с голономными связями они имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial I}{\partial q_j}, \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (5.1)$$

где \dot{q}_j и q_j — j -я обобщенная координата и скорость; T , I — кинетическая и потенциальная энергия системы; n — число степеней свободы.

В случае малых колебаний систем со стационарными связями кинетическую энергию T можно представить в форме

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad (5.2)$$

где a_{jk} — постоянные, называемые инерционными коэффициентами.

Они удовлетворяют условию симметрии $a_{jk} = a_{kj}$ и образуют симметричную квадратную матрицу порядка n

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n} \\ \dots \dots \dots \\ a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Матрица \bar{A} называется матрицей инерционных коэффициентов или инерционной матрицей.

При малых колебаниях относительно положения равновесия принимаемого за начало отсчета обобщенных координат

$$q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0, \quad (5.4)$$

потенциальная энергия I допускает представление в форме

$$I = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{jk} q_j q_k, \quad (5.5)$$

где c_{jk} — постоянные, называемые квазиупругими коэффициентами или обобщенными коэффициентами жесткости.

Они также удовлетворяют условию симметрии $c_{\mu\nu} = c_{\nu\mu}$ и образуют симметричную квадратную матрицу порядка n

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1n} \\ c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2n} \\ \dots \\ c_{n1}, c_{n2}, \dots, c_{nn} \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

называемую матрицей квазиупругих коэффициентов или просто квазиупругой матрицей.

Теперь, подставляя выражения для кинетической энергии T (5.2) и потенциальной Π (5.5) в уравнения Лагранжа второго рода (5.1) и учитывая, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} &= 0, & \frac{\partial T}{\partial q_j} &= \sum_{k=1}^n a_{jk} \dot{q}_k, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) &= \sum_{k=1}^n a_{jk} \ddot{q}_k, & \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} &= \sum_{k=1}^n c_{jk} q_k, \end{aligned} \quad (5.7)$$

получим систему n дифференциальных уравнений для исследуемой механической системы в развернутой форме:

$$\sum_{k=1}^n (a_{jk} \ddot{q}_k + c_{jk} q_k) = 0. \quad (5.8)$$

Надлежащим выбором обобщенных координат можно добиться диагональности матриц \bar{A} (5.3) и \bar{C} (5.6) или хотя бы одной из них. Система дифференциальных уравнений (5.8) при этом более или менее существенно упрощается. Так, если диагональная матрица \bar{A} , то есть

$$a_{jk} = \begin{cases} a_j & \text{if } j = k \\ 0 & \text{if } j \neq k \end{cases}, \quad (5.9)$$

выражение для кинетической энергии системы имеет каноническую форму:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n a_j \dot{q}_j^2, \quad (5.10)$$

и уравнения (5.8) упрощаются до вида

$$a_j \ddot{q}_j + \sum_{k=1}^n c_{jk} q_k = 0. \quad (5.11)$$

Если диагональная матрица \bar{C} ,

$$c_{jk} = \begin{cases} c_j & j=k \\ 0 & j \neq k \end{cases}, \quad (5.12)$$

каноническую форму имеет потенциальная энергия

$$I = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n c_j q_j^2, \quad (5.13)$$

и уравнения (5.8) принимают вид:

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} \ddot{q}_k + c_j q_j = 0. \quad (5.14)$$

Наиболее простыми дифференциальные уравнения движения оказываются в случае, когда обе матрицы диагональны. Уравнения (5.8) распадаются при этом на n независимых дифференциальных уравнений второго порядка:

$$a_j \ddot{q}_j + c_j q_j = 0, \quad (j=1, 2, \dots, n), \quad (5.15)$$

каждое, из которых может быть проинтегрировано независимо от других. Механическая система в этом случае как бы представляет собой совокупность n независимых (парциальных) систем с одной степенью свободы.

Обобщенные координаты, для которых обе матрицы диагональны, называются нормальными или главными. К сожалению, заранее угадать такие координаты трудно. Они определяются, как правило, с помощью линейного преобразования произвольно выбранных обобщенных координат.

В инженерной практике, и в частности при выполнении всевозможных аналитических выкладок, весьма удобной оказывается матричная форма записи дифференциальных уравнений (5.8):

$$\bar{A} \ddot{\bar{q}} + \bar{C} \bar{q} = 0, \quad (5.16)$$

где \bar{A} и \bar{C} – введенные выше матрицы инерционных (5.3) и квазиупругих (5.6) коэффициентов; \bar{q} – матрица-столбец обобщенных координат

$$\bar{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

5.1.2. Прямой и обратный способы составления дифференциальных уравнений движения

Помимо уравнений Лагранжа второго рода для составления дифференциальных уравнений колебаний систем с несколькими степенями свободы широко используются и известные из курса теоретической механики непосредственные способы написания уравнений движения материальных тел и систем – дифференциальные уравнения движения материальной точки, твердого тела, системы; общие теоремы динамики точки и системы; общее уравнения динамики и т. д. При этом различают прямой и обратный способы составления уравнений движения.

При прямом способе для составления уравнений движения используется принцип освобождения от связей. На основании этого принципа из системы выделяют сосредоточенные массы (число их меньше или равно числу степеней свободы системы) и заменяют действие на них отброшенных упругих связей соответствующими реакциями, выраженными через выбранные обобщенные координаты и жесткости упругих связей системы. Далее для каждой из выделенных масс составляют уравнения движения с учетом того, что в рамках рассматриваемой задачи она представляет из себя – материальную точку или твердое тело, и в последнем случае – какое движение оно совершает (поступательное, вращательное, плоскопараллельное и т. д.). Совокупность записанных для всех выделенных масс уравнений (количество их равно числу степеней свободы) и представляет собой дифференциальные уравнения движения системы.

При обратном способе составления уравнений движения массы также мысленно отделяются от связей, но в противоположность прямому способу, далее рассматриваются не массы, а оставшаяся безинерционная система упругих и жестких связей, то есть «безмассовый скелет системы», нагруженный силами инерции (кинетическими реакциями отброшенных масс). Поскольку силы инерции выражаются через обобщенные ускорения, статические соотношения для перемещений безмассового (безинерционного) скелета и будут представлять собой дифференциальные уравнения движения системы.

Прямой способ составления уравнений движения системы с несколькими степенями свободы удобен для систем цепной структуры (например, масса-пружина-масса-пружина и т. д.), в которых реакции упругих связей несложно выражаются через перемещения двух соседних тел. В этом случае в каждом из дифференциальных уравнений движения содержится не более двух-трех неизвестных обобщенных координат: по две в уравнениях движения крайних масс (тел) и по три в уравнениях средних масс. Легко при этом вычисляются и коэффициенты уравнений по исходным данным задачи. Обратный способ более предпочтителен при рассмотрении колебаний стержневых (балочных) систем с сосредоточенными массами. Такие системы часто анализируются в динамике сооружений.

5.1.3. Пример составления дифференциальных уравнений крутильных колебаний системы с двумя степенями свободы

В порядке иллюстрации различных способов составления дифференциальных уравнений колебаний систем с несколькими степенями свободы составим уравнения крутильных колебаний системы с двумя степенями свободы, состоящей из двух дисков с моментами инерции J_1 и J_2 , насаженных на вал с одним свободным и одним заземленным концами (рис. 5.1, а). Пусть жесткость на кручение участков АВ и ВD вала рав-

на соответственно \bar{N}_1 и \bar{N}_2 . В качестве обобщенных координат целесообразно выбрать углы поворота дисков φ_1 и φ_2 .

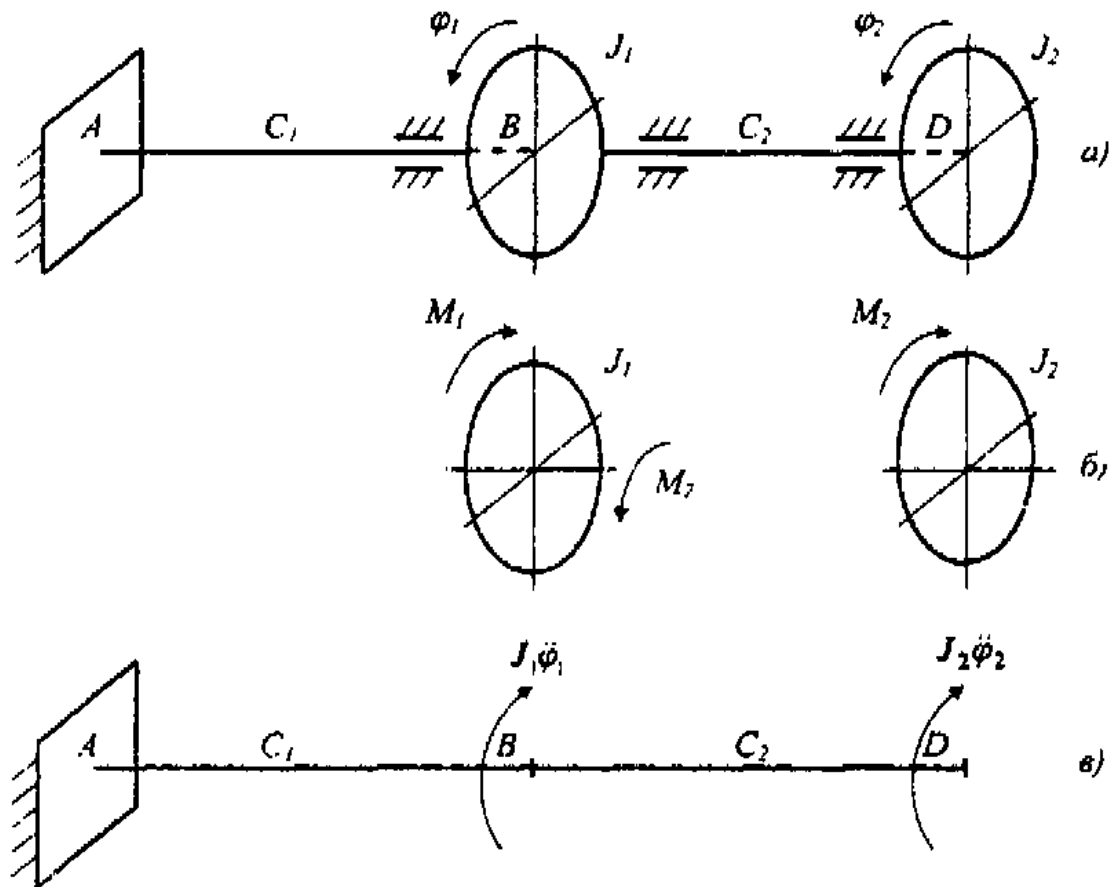


Рис. 5.1

Основной способ (уравнения Лагранжа). Кинетическая и потенциальная энергии рассматриваемой системы равны соответственно

$$\left. \begin{aligned} \dot{O} &= \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}_2^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 J_j \dot{\varphi}_j^2, \\ \bar{I} &= \frac{1}{2} \bar{N}_1 \varphi_1^2 + \frac{1}{2} \bar{N}_2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 C_{jk} \varphi_j \varphi_k, \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

где C_{jk} ($j=1,2; k=1,2$) – коэффициенты квазиупругой матрицы, равные соответственно

$$\left. \begin{aligned} C_{11} &= C_1 + C_2, & C_{12} &= -C_2, \\ C_{21} &= -C_2, & C_{22} &= C_2 \end{aligned} \right\} \quad (5.19)$$

Вычислив производные (5.7) от выражений (5.18) для T и Π и подставив их в уравнения Лагранжа (5.1), получим следующую систему дифференциальных уравнений колебаний рассматриваемой системы

$$\left. \begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 + (C_1 + C_2) \varphi_1 - C_2 \varphi_2 &= 0, \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 + C_2 \varphi_2 - C_2 \varphi_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

или

$$J_j \ddot{\varphi}_j + \sum_{k=1}^2 C_{jk} \varphi_k = 0, \quad (j=1,2) \quad (5.21)$$

Таким образом, дифференциальные уравнения колебаний рассматриваемой системы имеют форму (5.11). Это обусловлено тем, что, как это видно из (5.18), матрица инерционных коэффициентов диагональная

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}. \quad (5.22)$$

Прямой способ. В соответствии с основной идеей прямого способа составления уравнений движения отделим диски J_1 и J_2 от упругих связей системы (вала), заменив действие на них моментами M_1 и M_2 , (рис. 5.1, б), равными соответственно

$$M_1 = C_1 \varphi_1, \quad M_2 = C_2 (\varphi_2 - \varphi_1). \quad (5.23)$$

Теперь диски представляют собой свободные тела, которые будут совершать вращательное движение относительно оси, совпадающей с осью вала, под действием моментов M_1 и M_2 . Запишем дифференциальные уравнения вращения дисков

$$\left. \begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 &= M_2 - M_1, \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 &= -M_2 \end{aligned} \right\} \quad (5.24)$$

Подставив сюда значения моментов M_1 и M_2 (5.23), после несложных преобразований получим:

$$\left. \begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 + (C_1 + C_2) \varphi_1 - C_2 \varphi_2 &= 0, \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 - C_2 \varphi_1 + C_2 \varphi_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{или}$$

$$J_j \ddot{\varphi}_j + \sum_{k=1}^2 C_{jk} \varphi_k = 0, \quad (j=1,2) \quad (5.25)$$

что полностью совпадает с дифференциальными уравнениями (5.20) и (5.21), полученными для этой системы с помощью уравнений Лагранжа.

Обратный способ. Отделим диски J_1 и J_2 от упругого скелета системы (вала) и загрузим последний моментами сил инерции дисков $J_1 \ddot{\varphi}_1$ и $J_2 (\ddot{\varphi}_2 + \ddot{\varphi}_1)$ (рис. 5.1, в). Вычислив теперь абсолютный угол поворота φ_1 и относительный φ_2 сечений вала, в которых расположены диски

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= -\frac{1}{C_1} [J_1 \ddot{\varphi}_1 + J_2 (\ddot{\varphi}_2 + \ddot{\varphi}_1)] \\ \varphi_2 &= -\frac{1}{C_1} J_2 (\ddot{\varphi}_2 + \ddot{\varphi}_1) \end{aligned} \right\} \quad (5.26)$$

после преобразований получим

$$\left. \begin{aligned} (J_1 + J_2) \ddot{\varphi}_1 + J_2 \ddot{\varphi}_2 + C_1 \varphi_1 &= 0, \\ J_2 \ddot{\varphi}_1 + J_2 \ddot{\varphi}_2 + C_2 \varphi_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

или

$$\sum_{k=1}^2 a_{jk} \ddot{\varphi}_k + C_j \varphi_j = 0, \quad (j=1,2), \quad (5.28)$$

где a_{jk} ($j=1,2; k=1,2$) и C_j ($j=1,2$) — коэффициенты инерционной \bar{A} и квазиупругой \bar{C} матриц

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} J_1 + J_2 & J_2 \\ J_2 & J_2 \end{pmatrix}; \quad \bar{C} = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix}. \quad (5.29)$$

Нетрудно заметить, что уравнения движения (5.28), полученные обратным способом, совпадают по форме с уравнениями (5.14), получаемыми с помощью уравнений Лагранжа второго рода в случае, когда матрица квазиупругих коэффициентов системы диагональная.

Итак, при составлении уравнений движения системы с несколькими степенями свободы основным способом (с помощью уравнений Лагранжа) уравнения колебаний имеют, в зависимости от вида инерционной \bar{A} и квазиупругой \bar{C} матрицы, одну из четырех возможных форм (5.8), (5.11), (5.14) или (5.15). При прямом и обратном способах дифференциальные уравнения колебаний получают только одного вида: (5.11) – при прямом и (5.14) – при обратном способах составления уравнений движения. В связи с этим форму (5.11) дифференциальных уравнений колебаний систем с несколькими степенями свободы называют прямой, а (5.14) – обратной.

5.1.4. Составление дифференциальных уравнений колебаний однопролетной балки с помощью матрицы единичных перемещений

Рассмотрим линейную механическую систему с n степенями свободы, например, в форме однопролетной балки, несущей n сосредоточенных масс (рис. 5.2, а). За обобщенные координаты системы примем вертикальные перемещения масс q_1, q_2, \dots, q_n . Для определения этих перемещений под действием приложенной к массам системы обобщенных сил (Q_1, Q_2, \dots, Q_n) , воспользуемся коэффициентами влияния δ_{jk} ($j, k = 1, 2, \dots, n$). Коэффициент δ_{jk} представляет собой обобщенное перемещение j массы под действием единичной обобщенной силы, приложенной к k массе (рис. 5.2, б). Поскольку система линейна (справедлив принцип суперпозиции), перемещение j массы под действием обобщенной силы Q_k , приложенной к k массе составит $\delta_{jk} Q_k$, а перемещение q_j от всей системы сил (Q_1, Q_2, \dots, Q_n) будет определяться суммой

$$q_j = \sum_{k=1}^n \delta_{jk} Q_k, \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (5.30)$$

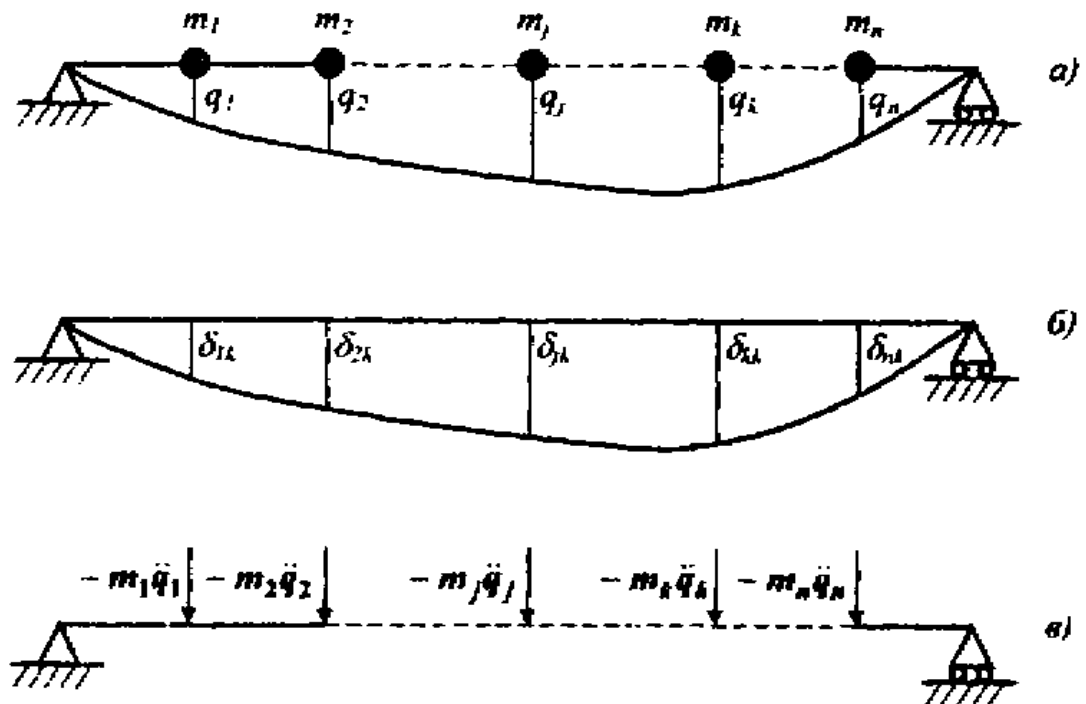


Рис. 5.2

Матрица, составленная из коэффициентов влияния

$$\bar{\Delta} = \begin{pmatrix} \delta_{11}, \delta_{12}, \dots, \delta_{1n} \\ \delta_{21}, \delta_{22}, \dots, \delta_{2n} \\ \delta_{n1}, \delta_{n2}, \dots, \delta_{nn} \end{pmatrix}, \quad (5.31)$$

называется матрицей единичных перемещений или матрицей единичных податливостей. С помощью теоремы Бетти о взаимности работ можно доказать, что

$$\delta_{jk} = \delta_{kj}, \quad (5.32)$$

то есть матрица $\bar{\Delta}$ симметрична. Нетрудно также показать, что матрица $\bar{\Delta}$ является обратной по отношению к квазиупругой матрице \bar{C} , то есть

$$\bar{\Delta} \cdot \bar{C} = \bar{E}, \quad (5.33)$$

где \bar{E} – единичная матрица

$$\bar{E} = \begin{pmatrix} 1, 0, \dots, 0 \\ 0, 1, \dots, 0 \\ \dots \\ 0, 0, \dots, 1 \end{pmatrix}. \quad (5.34)$$

Фундаментальные соотношения (5.30), определяющие статические перемещения линейной системы в упругой области, позволяют построить дифференциальные уравнения колебаний системы с помощью обратного способа. Действительно, освободив упругий скелет системы от сосредоточенных масс и нагрузив его силами инерции $-m_j \ddot{q}_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$) (рис. 5.2 в) с помощью (5.30), получим уравнения свободных колебаний системы в форме

$$\ddot{q}_j = - \sum_{i=1}^n \delta_{ji} m_i \ddot{q}_i \quad (5.35)$$

В матричной форме уравнение (5.35) принимает вид:

$$\ddot{\vec{q}} + \bar{\Delta} \cdot \bar{A} \vec{q} = 0. \quad (5.36)$$

5.1.5. Пример составления дифференциальных уравнений изгибных колебаний балки с двумя степенями свободы

Для иллюстрации метода составления дифференциальных уравнений движения с помощью матрицы единичных перемещений составим дифференциальные уравнения колебаний двух грузов, имеющих массы m_1 и m_2 соответственно и укрепленных на упругой невесомой балке, имеющей изгибную жесткость EJ (рис. 5.3)

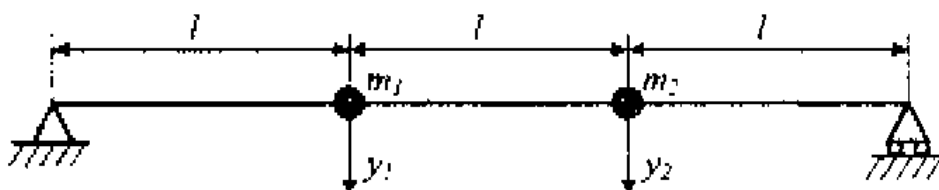


Рис 5.3

В качестве обобщенных координат в данной задаче удобно принять вертикальные перемещения грузов y_1 и y_2 . Для составления дифференциальных уравнений движения в форме (5.35) предварительно необходимо

определить коэффициенты влияния δ_{jk} . Для этого, последовательно прикладывая единичные силы Q_1 и Q_2 к точкам балки, в которых расположены массы m_1 и m_2 , определим перемещения масс, вызванные этими силами, например, с помощью формул Мора, известных из курса сопротивления материалов:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} &= \int_0^{3l} \frac{\bar{M}_1^2}{EJ} dx = \frac{4}{9} \frac{l^3}{EJ}, \\ \delta_{22} &= \int_0^{3l} \frac{\bar{M}_2^2}{EJ} dx = \frac{4}{9} \frac{l^3}{EJ}, \\ \delta_{12} &= \delta_{21} = \int_0^{3l} \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{EJ} dx = \frac{7}{18} \frac{l^3}{EJ} \end{aligned} \right\} \quad (5.37)$$

Здесь \bar{M}_1 , \bar{M}_2 — изгибающие моменты, вызванные соответствующими единичными силами.

Тогда для матрицы $\bar{\Delta}$ будем иметь

$$\bar{\Delta} = \frac{l^3}{EJ} \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{7}{18} \\ \frac{7}{18} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}. \quad (5.38)$$

Определим кинетическую энергию T системы

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2. \quad (5.39)$$

Из (5.39) следует, что инерционная матрица \bar{A} имеет вид:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}. \quad (5.40)$$

Подставляя теперь (5.38) и (5.40) в (5.35), получим уравнения колебаний рассматриваемой механической системы:

$$\begin{vmatrix} C_1 + C_2 - k^2 J_1 & -C_2 \\ -C_2 & C_2 - k^2 J_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (5.51)$$

В развернутой форме получим квадратное уравнение относительно k^2

$$k^4 J_1 J_2 - k^2 (J_2 C_1 + J_2 C_2 + J_1 C_2) + C_1 C_2 = 0, \quad (5.52)$$

которое имеет два корня

$$k_{1,2}^2 = \frac{J_2 C_1 + J_2 C_2 + J_1 C_2 \pm \sqrt{(J_2 C_1 + J_2 C_2 + J_1 C_2)^2 - 4 C_1 C_2 J_1 J_2}}{2 J_1 J_2}. \quad (5.53)$$

Каждый из этих корней и определяет квадрат собственной частоты.

Определим спектр собственных частот для системы, показанной на рис. 5.3. В этом случае за основу необходимо взять уравнение (5.49). Ранее были определены матрицы \tilde{A} и \tilde{A} (5.38 и 5.40). Поэтому получим

$$\begin{vmatrix} 1 - k^2 \frac{4}{9} \frac{l^3}{EJ} m_1 & -k^2 \frac{7}{18} \frac{l^3}{EJ} m_2 \\ -k^2 \frac{7}{18} \frac{l^3}{EJ} m_1 & 1 - k^2 \frac{4}{9} \frac{l^3}{EJ} m_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (5.54)$$

Уравнение (5.54) в развернутой форме также является квадратным алгебраическим уравнением относительно k^2

$$m_1 m_2 \left(\frac{l^3}{EJ} \right)^2 \frac{15}{324} k^4 - \frac{4}{9} \frac{l^3}{EJ} (m_1 + m_2) k^2 + 1 = 0, \quad (5.55)$$

которое имеет два действительных корня – две собственные частоты.

5.3. Определение собственных форм колебаний

5.3.1. Общие положения

Каждой собственной частоте k спектра (5.50) соответствует определенная форма колебаний механической системы, то есть между амплитудными перемещениями u будет иметь место определенное соотношение. Действительно, если в уравнения (5.44) или (5.45) подставить одну из найденных собственных частот, например k_j , то определитель системы алгебраических уравнений (5.48) или (5.49) станет равным нулю. Это означает,

что система алгебраических уравнений не является линейно-независимой и одно из уравнений является следствием остальных $n-1$. Тогда, произвольно задав одно из перемещений, например, $u_j = 1$, из оставшихся $n-1$ уравнений можно найти все остальные: u_1, u_2, \dots, u_n . Здесь индекс j указывает, для какой собственной частоты характерно найденное соотношение между амплитудными перемещениями. Это соотношение и называют j собственной формой колебаний.

5.3.2. Определение собственных форм колебаний для систем с двумя степенями свободы

Определим собственные формы колебаний для системы, показанной на рисунке 5.1. Взяв за основу матричное уравнение (5.44), коэффициенты квазиупругой матрицы \bar{C} (5.19) и выражение инерционной \bar{A} матрицы (5.22), получим для рассматриваемой системы уравнения типа (5.46):

$$\begin{cases} (C_1 + C_2 - k^2 J_1) u_1 - C_2 u_2 = 0, \\ -C_2 u_1 + (C_2 - k^2 J_2) u_2 = 0 \end{cases} \quad (5.56)$$

Если в систему алгебраических уравнений (5.46) подставить одну из собственных частот k_1 или k_2 (5.53), то определитель системы, как это следует и из общей теории, обратится в нуль. Поэтому, полагая $u_1 = 1$, из второго уравнения (5.46) для u_2 получим:

$$\begin{aligned} \text{а) для } k = k_1; \quad u_{11} &= 1; \\ u_{21} &= \frac{C_2}{C_2 - k_1^2 J_2}; \\ \text{б) для } k = k_2; \quad u_{12} &= 1, \\ u_{22} &= \frac{C_2}{C_2 - k_2^2 J_2}. \end{aligned}$$

В частном случае, при $J_1 = J_2 = J$; $C_1 = C_2 = C$ будем иметь

$$\begin{aligned} k_1 &= 0,618 P_0; \quad k_2 = 1,618 P_0; \quad P_0 = \sqrt{C/J}, \\ u_{21} &= 1,618; \quad u_{22} = -0,618. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Собственные формы колебаний удобно проиллюстрировать графически в форме эпюр углов поворота соответствующих сечений вала (рис. 5.4).

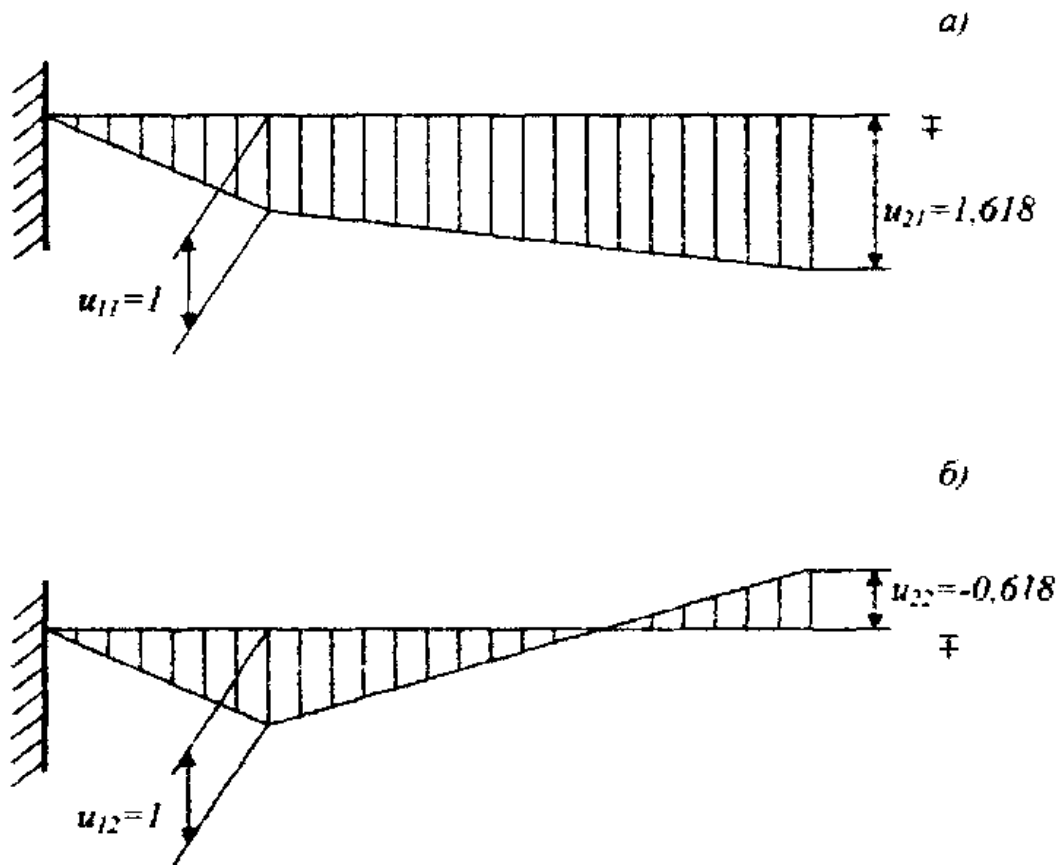


Рис. 5.4:
а – первая форма колебаний; б – вторая форма колебаний

Определим теперь собственные формы колебаний для системы, показанной на рис. 5.3. В этом случае необходимо обратиться к матричному уравнению (5.45) и выражениям для матрицы единичных перемещений $\bar{\Delta}$ и инерционной матрицы \bar{A} (5.38, 5.40). Тогда получим систему алгебраических уравнений в форме

$$\begin{cases} \left(1 - k^2 \frac{4}{9} \frac{l^3}{EJ} m_1\right) u_1 - k^2 \frac{7}{18} \frac{l^3}{EJ} m_2 u_2 = 0, \\ -k^2 \frac{7}{18} \frac{l^3}{EJ} m_1 u_1 + \left(1 - k^2 \frac{4}{9} \frac{l^3}{EJ} m_2\right) u_2 = 0. \end{cases} \quad (5.58)$$

Как и для системы (5.46), определитель составленный из коэффициентов системы уравнений (2.47), при подстановке одной из собственных час-

тот k_1 или k_2 , обращается в нуль. Поэтому, полагая $u_1 = 1$, из второго уравнения (2.47) для u_2 получим:

$$\text{а) для } k = k_1, \quad u_{11} = 1, \quad u_{21} = \frac{k_1^2 \frac{7}{18} \frac{l^3}{EJ} m_1}{1 - k_1^2 \frac{4}{9} \frac{l^3}{EJ} m_2};$$

$$\text{б) для } k = k_2, \quad u_{12} = 1, \quad u_{22} = \frac{k_2^2 \frac{7}{18} \frac{l^3}{EJ} m_1}{1 - k_2^2 \frac{4}{9} \frac{l^3}{EJ} m_2}.$$

В частном случае при $m_1 = m_2 = m$, будем иметь

$$k_1 = \sqrt{6/5} P_0; \quad k_2 = \sqrt{18} P_0; \quad P_0 = \sqrt{EJ/ml^3}; \quad (5.59)$$

$$u_{21} = 1; \quad u_{22} = -1.$$

Полученные собственные формы также проиллюстрируем графически в форме эпюр вертикальных перемещений соответствующих сечений балки (рис 5.5).

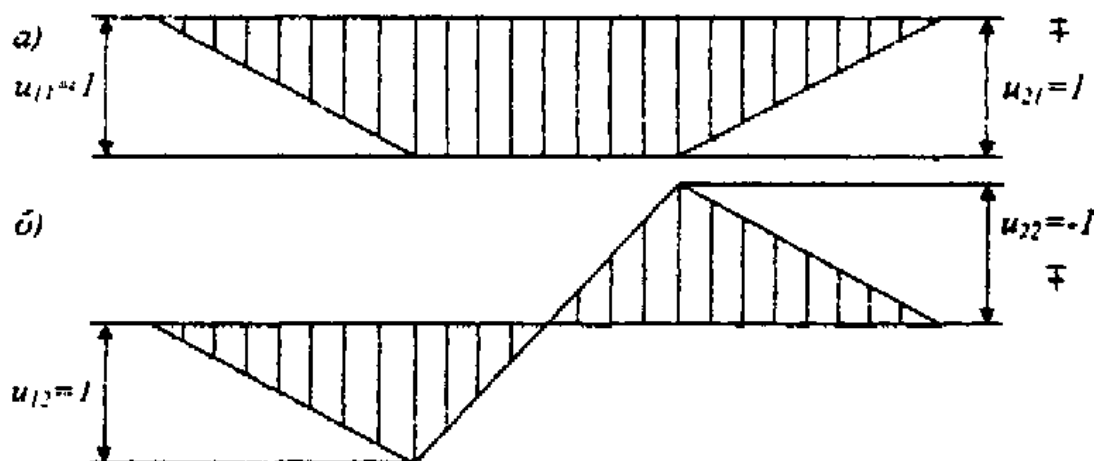


Рис 5.5:
а - первая форма колебаний; б - вторая форма колебаний

5.4. Определение собственных частот привода генератора

Основным источником электрической энергии всех потребителей постоянного тока на пусковой установке (ПУ) является стартер-генератор (СГ). В генераторном режиме часть мощности кодового двигателя (ХД) че-

рез систему валов и редукторов приводит во вращение ротор генератора и раскручивает его до необходимой частоты вращения.

При эксплуатации подобного привода генератора на реальной установке обнаруживаются поломки соединительной муфты, обеспечивающей связь несоосно сидящих ротора и вала последней ступени редуктора. Подобные поломки равносильны выходу из строя всей ПУ (или ослабления ее боеспособности).

5.4.1. Постановка задачи

Обработка и анализ осциллограмм механических напряжений на выходном валу редуктора позволили определить главную причину выхода из строя муфты – недопустимо высокие амплитуды крутильных колебаний выходного вала редуктора привода (перед муфтой). Наиболее правдоподобной гипотезой, объясняющей поломки муфты, являются резонансные явления в системе привода СГ на одном из режимов его работы.

Необходимо найти возможность уменьшения амплитуды крутильных колебаний вала редуктора, сопрягаемого через муфту с ротором генератора, без существенных конструктивных передпосок всей цепи привода стартера-генератора.

С этой целью определяются собственные колебания механической системы, включающей торсионный вал, редуктор, ротор стартера-генератора и соединительную упругую муфту. Необходимо оценить опасные резонансные зоны данной системы и, в случае попадания их в рабочий диапазон оборотов установки, выбрать меры для отстройки от резонансных режимов, то есть решить задачу вибpационного синтеза.

5.4.2. Определение параметров привода генератора

Кинематическая схема привода генератора изображена на рис. 5.6.

Передаточное отношение редуктора

$$U_{1,2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{56}{60} \approx 0,933,$$

$$U_{2,3} = \frac{z_1}{z_3} = \frac{16}{55} = 0,2909, \quad (5.60)$$

$$U_{1,3} = \frac{\omega_1}{\omega_3} = \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right) \cdot \left(\frac{\omega_2}{\omega_3} \right) = U_{1,2} \cdot U_{2,3} = 0,933 \cdot 0,2909 = 0,2715.$$

Часть мощности ходового двигателя через карданный вал (КВ) и раздаточную коробку (РК) поступает на редуктор привода через торсионный вал (ТВ)

Движение всех упругих звеньев исследуемой механической системы можно представить как сложное, состоящее из переносного вращательного движения, обусловленного только кинематикой привода (при абсолютно жестких деталях), и относительного движения тех же звеньев около равновесного их состояния.

При установившемся режиме работы генератора переносное движение каждого звена привода (жесткого или упругого) – равномерное вращение с угловой скоростью $\omega_i = \overline{\omega_i} t$ ($i = \overline{1, n}$ – число рассматриваемых звеньев). Очевидно, что система может перемещаться без угловых деформаций, и поэтому при определении спектра ее частот один из ее корней характеристического (частотного уравнения) получится нулевым. Этот нулевой корень соответствует вращению системы без относительных угловых деформаций ее звеньев с угловыми скоростями, обусловленных жесткой кинематической связью идеализированного привода. Таким образом, основное динамическое поведение системы привода СГ определяется относительными (колебательными) движениями упругих ее частей, и расчетную модель исследуемого привода можно представить в виде рис. 5.7, где C_0^T – приведения к выходному валу редуктора угловая жесткость упругого торсиона; $J_{\text{ш}}$ – приведенный к выходному валу

редуктора момент инерции вращающихся шестерен и осей; $\Lambda_{\mu}^{\text{тв}}$ – собственная угловая жесткость муфты; $J_{\text{ш}}$ – собственный момент инерции ротора СГ.

Определим приведенный момент инерции торсионного вала и деталей (шестерни, оси и т. п.) редуктора исследуемого привода. Для этого воспользуемся кинематической схемой и значениями собственных моментов инерции каждой вращающейся детали. Составим выражение кинетической энергии системы:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{J_1 \omega_1^2}{2} + \frac{J_2 \omega_2^2}{2} + \frac{J_3 \omega_3^2}{2} = \frac{J_1 \left(\frac{\omega_1}{\omega_3} \right)^2 \omega_3^2}{2} + \frac{J_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_3} \right)^2 \omega_3^2}{2} + \frac{J_3 \omega_3^2}{2} = \\
 &= (J_1 U_{1-3}^2 + J_2 U_{2-3}^2 + J_3) \frac{\omega_3^2}{2} = (0,48 \cdot 0,2715^2 + 0,45 \cdot 0,291^2 + 0,01) \frac{\omega_3^2}{2} = (5.61) \\
 &= 0,083459 \frac{\omega_3^2}{2} = J_{\text{пр}} \cdot \frac{\omega_3^2}{2},
 \end{aligned}$$

где $J_{\text{пр}} = 0,083459 \cdot 10^{-2} [\text{ед} \cdot \text{с}^2]$, $J_{\text{пр}} = J_{\text{ш}}$.

Определим приведенную жесткость торсионного вала. Она определяется величиной потенциальной энергии его деформации. При построении эквивалентных схем удобно воспользоваться понятием приведенной жесткости участка.

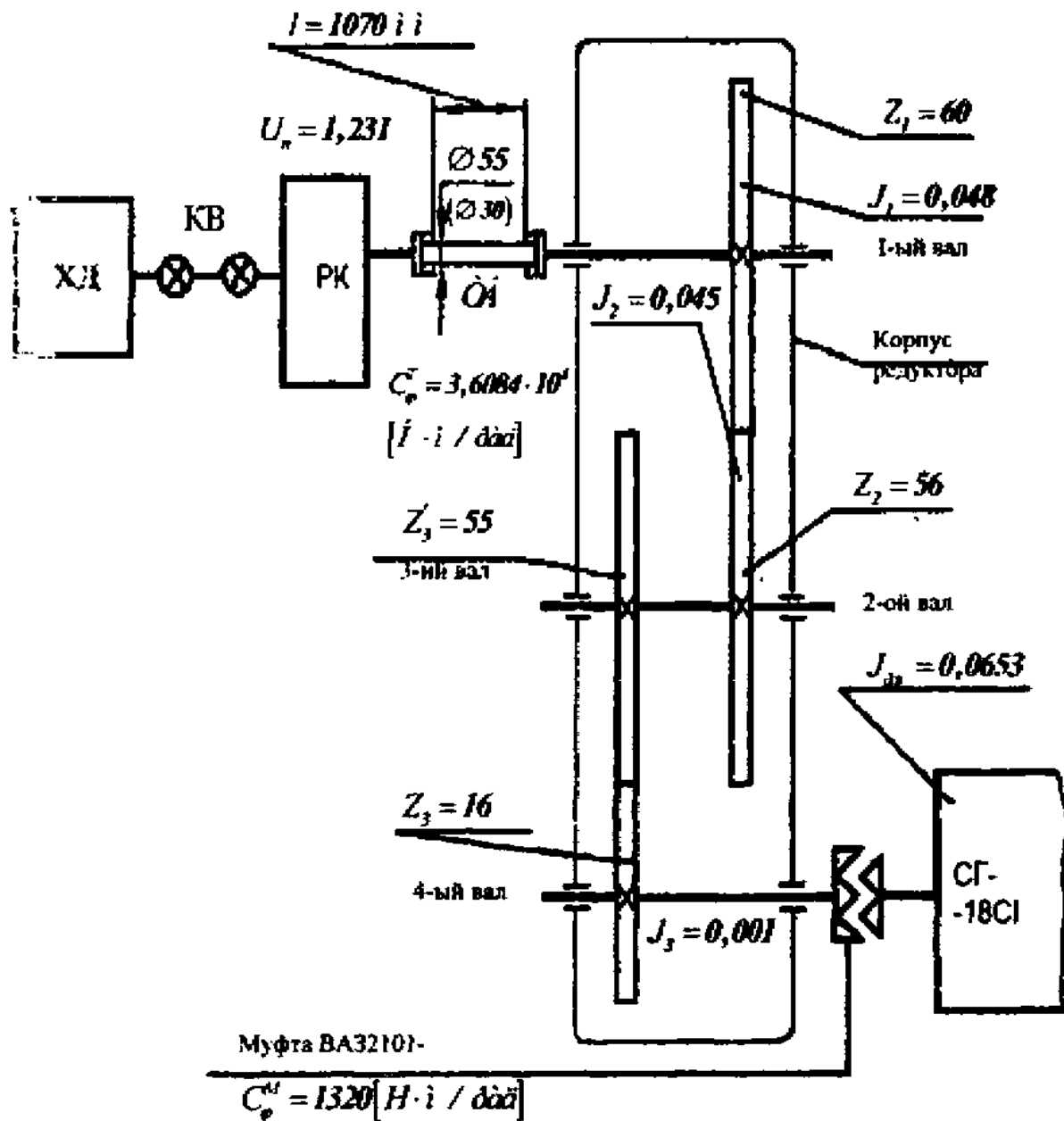


Рис. 5.6

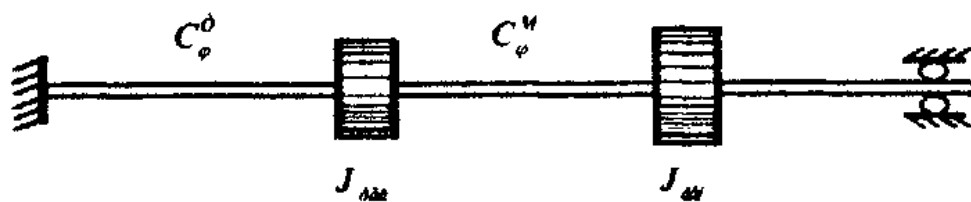


Рис 5.7

Приведенную жесткость участка от начала торсиона и до центра приведения на оси выходного вала можно подсчитать, если известна собственная жесткость элементов этого участка и кинематические характеристики редуктора. Считая жесткость валов редукторов, шестерен и их зубьев значительно превосходящими жесткость основного элемента – торсиона, определим потенциальную энергию выбранного участка по формуле

$$I = \frac{C_{\varphi}^T \varphi_T^2}{2}, \quad (5.62)$$

где C_{φ}^T – собственная жесткость торсиона; φ_T – угол закручивания торсиона

Очевидно, что приведенный упругий элемент должен иметь такую же потенциальную энергию

$$I = \frac{\tilde{C}_{\varphi}^T \varphi_1^2}{2}, \quad (5.63)$$

где φ_1 – угол закручивания центра приведения за счет поворота торсиона на угол φ_T ; \tilde{C}_{φ}^T – приведенная жесткость.

Приравняв выражения (5.63) и (5.64), находим

$$\tilde{C}_{\varphi}^T = C_{\varphi}^T \cdot \left(\frac{\varphi_T}{\varphi_1} \right)^2, \quad (5.64)$$

но так как угловые перемещения валов пропорциональны их угловым скоростям, получим, что

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_T}{\varphi_1} &= \frac{\omega_1}{\omega_3} = U_{1-3} = 0,2715 \\ \tilde{C}_{\varphi}^T &= C_{\varphi}^T \cdot U_{1-3}^2. \end{aligned} \quad (5.65)$$

Угловая (крутильная) жесткость торсиона равна

действующими на точки системы потенциальными силами упругости получаем по выражениям

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} (a_{11} \cdot \dot{q}_1^2 + 2a_{12} \cdot \dot{q}_1 \cdot \dot{q}_2 + a_{22} \cdot \dot{q}_2^2), \\ I &= \frac{1}{2} (c_{11} \cdot q_1^2 + 2c_{12} \cdot q_1 \cdot q_2 + c_{22} \cdot q_2^2). \end{aligned} \quad (5.69)$$

Для составления дифференциальных уравнений движения расчетной механической системы воспользуемся уравнениями Лагранжа II рода и запишем ее движение в обобщенных координатах:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial I}{\partial q_1}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = \frac{\partial I}{\partial q_2}. \quad (5.70)$$

Подставляя в уравнения Лагранжа значения T и I , получаем дифференциальные уравнения свободных колебаний системы с двумя степенями свободы в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} \cdot \ddot{q}_1 + a_{12} \cdot \ddot{q}_2 + c_{11} \cdot q_1 + c_{12} \cdot q_2 &= 0, \\ a_{12} \cdot \ddot{q}_1 + a_{22} \cdot \ddot{q}_2 + c_{21} \cdot q_1 + c_{22} \cdot q_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.71)$$

где a_{ij} – инерционные и c_{ij} – квазиупругие коэффициенты.

Имеем систему двух однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Частные решения этих уравнений можно представить в следующем виде:

$$q_1 = A_1 \cdot \sin(kt + \beta), \quad q_2 = A_2 \cdot \sin(kt + \beta). \quad (5.72)$$

Обозначим отношение обобщенных координат, равное отношению амплитуд колебаний, через μ

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{A_1}{A_2} = \mu, \quad (5.73)$$

откуда $q_2 = \mu \cdot q_1 = \mu A_1 \cdot \sin(kt + \beta)$.

Подставляя (5.72) и (5.73) в (5.71) и после деления на $\sin(kt + \beta)$ получаем

$$\left. \begin{aligned} (c_{11} - a_{11} \cdot k^2) + \mu(c_{12} - a_{12} \cdot k^2) &= 0, \\ (c_{12} - a_{12} \cdot k^2) + \mu(c_{22} - a_{22} \cdot k^2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.74)$$

Исключив μ из этих уравнений, найдем

$$(c_{11} - a_{11} \cdot k^2)(c_{22} - a_{22} \cdot k^2) - (c_{12} - a_{12} \cdot k^2)^2 = 0. \quad (5.75)$$

или в развернутом виде:

$$(a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2)k^4 - (a_{11} \cdot c_{22} + a_{22} \cdot c_{11} - 2a_{12} \cdot c_{12})k^2 + c_{11} \cdot c_{22} - c_{12}^2 = 0. \quad (5.76)$$

Это уравнение называют частотным, корни его k_1^2 и k_2^2 (причем $k_1 < k_2$) определяют частоты собственных колебаний k_1 и k_2 исследуемой системы.

Для исследуемой расчетной модели находим коэффициенты a_{ij}, c_{ij} :

$$a_{11} = J_{\omega_1} = 0,083459 \cdot 10^2$$

$$a_{22} = J_2 = J_{\omega_2} = 0,0653$$

$$a_{12} = a_{21} = 0$$

$$\tilde{c}_{12} = \tilde{c}_{21} = \tilde{c}_{12}^I + \tilde{c}_{12}^{II} = 37404$$

$$c_{22} = c_2 = C_{\omega_2}^{II} = 1320,0$$

$$c_{12} = c_{21} = -c_2 = -C_{\omega_2}^{II} = -13200$$

После подстановки в (5.76) получаем уравнение

$$k^4 - 496861,1 k^2 + 6439555804 = 0.$$

$$k_2 = 695,4 \text{ с}^{-1}.$$

$$k_1 = 115,4 \text{ с}^{-1}$$

Им соответствуют частоты

$$f_2 = \frac{k_2}{2\pi} = \frac{695,4}{6,28} = 111 \text{ Гц}$$

$$f_1 = \frac{115,4}{6,28} = 18,4 \text{ Гц}$$

Б.4.4. Анализ результатов расчета

Расчетное значение второй гармоники собственных колебаний (111 Гц) привода генератора близко к частоте вращения вала-шестерни генератора при $n_{\text{вд}} = 2000$ об/мин.

$$n_{\text{ш}} = U_{\text{вд}} \cdot 2000 = 2,9 \cdot 2000 \approx 6000 \text{ в/с},$$

Тогда
$$f_{\text{ш}} = \frac{6000}{60} = 100 \text{ Гц}.$$

Таким образом, на этой частоте режим колебаний исследуемой системы близок к резонансному. Возникает необходимость отстройки от резонанса, например, за счет уменьшения диаметра торсионного вала (с 55 до 30 мм).

Как показывает расчет, такое конструктивное изменение снижает собственную резонансную частоту с 111 до 72 Гц.

6. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

6.1. Дифференциальные уравнения движения

Наиболее удобным методом составления дифференциальных уравнений движения для механических систем, на которые накладываются голономные связи и находящиеся под воздействием, помимо восстанавливающих сил, периодических внешних вынуждающих сил, являются уравнения Лагранжа второго рода.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial I}{\partial q_j} + Q_j(t), \quad (j=1, 2, \dots, n), \quad (6.1)$$

где $Q_j(t)$ – обобщенная внешняя вынуждающая сила, соответствующая j -ой обобщенной координате. Остальные обозначения сохраняют прежнее значение (5.1).

Определение обобщенной силы $Q_j(t)$ производится обычным методом, применяемым в теоретической механике (см. В.4). Подсчитывается виртуальная работа δA всех непотенциальных сил, действующих на точки механической системы, на возможном перемещении, соответствующем выбранной обобщенной координате δq_j , тогда

$$Q_j(t) = \frac{\delta A}{\delta q_j} \quad (6.2)$$

Принимая во внимание, что в отсутствии внешних сил уравнения Лагранжа сводятся к уравнениям (5.8), то при их наличии (6.1) приводятся к форме

$$\sum_{k=1}^n (a_{jk} \ddot{q}_k + c_{jk} q_k) = Q_j(t), \quad (6.3)$$

где a_{jk} , c_{jk} – соответственно инерционные и квазиупругие коэффициенты.

В развернутой форме уравнения (6.3) для системы с двумя степенями свободы сводятся к виду:

$$\begin{cases} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = Q_1(t), \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 = Q_2(t). \end{cases} \quad (6.4)$$

Уравнения (6.4) допускают представление и в матричной форме

$$\bar{A}\ddot{\bar{q}} + \bar{C}\bar{q} = \bar{Q}(t) \quad (6.5)$$

где \bar{A}, \bar{C} – матрицы инерционных и квазиупругих коэффициентов, \bar{q} – матрица столбец обобщенных координат (5.16), (5.17):

$$\bar{Q}(t) = \begin{pmatrix} Q_1(t) \\ \vdots \\ Q_n(t) \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

матрица столбец обобщенных сил.

Помимо уравнений Лагранжа второго рода можно, как и в случае исследования свободных колебаний, применять прямой и обратный методы составления дифференциальных уравнений движения. Прямой метод базируется на общих теоремах динамики, а обратный – на методе кинетостатики.

Если составлять дифференциальные уравнения движения обратным методом, то вместо уравнений (5.35, 5.36) соответственно получаем

$$\begin{aligned} q_i &= -\sum_{k=1}^n \delta_{ik} m_k \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^n \delta_{ik} Q_k(t), \\ \bar{q} + \bar{\Delta} \cdot \bar{A} \ddot{\bar{q}} &= \bar{\Delta} \cdot \bar{Q}(t), \end{aligned} \quad (6.7)$$

где δ_{ik} – коэффициенты влияния; $\bar{\Delta}$ – матрица единичных перемещений, $\bar{Q}(t)$ – матрица столбец вынуждающих сил.

6.2. Примеры

6.2.1. Пример составления дифференциальных уравнений вынужденных крутильных колебаний системы с двумя степенями свободы на основе уравнений Лагранжа 2-го рода

Рассмотрим механическую систему изображенную на рис. 5.1, а. Пусть на диск с моментом инерции J_1 действует момент $M_1(t)$, а на диск с моментом инерции $J_2 = M_2(t)$.

$$M_1(t) = M_{10} \sin \alpha t, \quad M_2(t) = M_{20} \sin \alpha t, \quad (6.8)$$

где M_{10}, M_{20} – амплитудное значение момента ω – частота вынуждающего воздействия

Тогда в отличие от уравнений (5.20) и при тех же обобщенных координатах получаем

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\varphi}_1 + (c_1 + c_2) \dot{\varphi}_1 - c_2 \dot{\varphi}_2 = M_{10} \sin \omega t, \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 - c_2 \dot{\varphi}_1 + c_2 \dot{\varphi}_2 = M_{20} \sin \omega t \end{cases} \quad (6.9)$$

6.2.2. Пример составления дифференциальных уравнений вынужденных колебаний обратным методом

Пусть на механическую систему, рассмотренную в п. 5.1.5 дополнительно действуют внешние гармонические силы (рис. 5.3)

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= Q_{10} \sin \omega t, \\ Q_2(t) &= Q_{20} \sin \omega t, \end{aligned} \quad (6.10)$$

где Q_{10}, Q_{20} – амплитудные значения сил, ω – частота вынуждающих сил

Тогда в соответствии с уравнениями (6.7) получаем

$$\begin{aligned} y_1 + \frac{4 l^3}{9 EJ} m_1 y_1 + \frac{7 l^3}{18 EJ} m_2 y_2 &= \frac{4 l^3}{9 EJ} Q_1 + \frac{7 l^3}{18 EJ} Q_2, \\ y_2 + \frac{7 l^3}{18 EJ} m_1 y_1 + \frac{4 l^3}{9 EJ} m_2 y_2 &= \frac{7 l^3}{18 EJ} Q_1 + \frac{4 l^3}{9 EJ} Q_2. \end{aligned} \quad (6.11)$$

6.3. Решение дифференциальных уравнений

При исследовании вынужденных колебаний в инженерной практике наибольший интерес представляет собой стационарная часть решения, так сопровождающие свободные колебания достаточно быстро затухают, вследствие возникновения в реальных конструкциях, машинах и механизмах диссипативных сил. Поэтому рассматриваемые ниже методы решения дифференциальных уравнений нацелены на получение стационарной части решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений.

Метод разложения по собственным формам

Рассматривается система дифференциальных уравнений, полученных или с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода, или одним из прямых методов

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij} \ddot{q}_j + c_{ij} \dot{q}_j) = Q_i(t), \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (6.12)$$

Введем новые переменные $f_k(t)$ ($k=1, 2, \dots, n$), так, что

$$q_i(t) = \sum_{k=1}^n f_k(t) U_{ik}, \quad (6.13)$$

где U_{ik} – амплитуда перемещения механической системы, соответствующая координате q_i (собственные формы колебаний) при конкретной форме колебаний. Переменные $f_k(t)$ носят названия главных или нормальных координат. Подставляя (6.13) в (6.12) получаем

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} U_{j,k} \ddot{f}_k + c_{ij} U_{j,k} \dot{f}_k \right) = Q_i(t). \quad (6.14)$$

Теперь, домножив (6.14) на U_{il} и просуммировав по i от 1 до n имеем:

$$\sum_{k=1}^n \ddot{f}_k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} U_{j,k} U_{i,l} + \sum_{k=1}^n \dot{f}_k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} U_{j,k} U_{i,l} = \sum_{i=1}^n Q_i(t) U_{i,l} \quad (6.15)$$

В соответствии со свойством ортогональности собственных форм колебаний получим

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} U_{j,k} U_{i,l} = 0, \quad k \neq l, \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} U_{j,k} U_{i,l} = 0, \quad k \neq l, \quad (6.16)$$

Тогда уравнения (6.15) упрощаются

$$M_i \ddot{f}_i + C_i \dot{f}_i = P_i(t), \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (6.17)$$

где

$$\begin{aligned}
 M_l &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} U_{il} U_{jl}, \\
 C_l &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} U_{il} U_{jl}, \\
 P_l(t) &= \sum_{i=1}^n Q_i(t) U_{il}.
 \end{aligned}
 \tag{6.18}$$

физический смысл которых соответственно приведенная к l -ой форме колебаний масса и жесткость системы.

Особенность уравнений (6.17) по сравнению с исходной системой уравнений (6.12) состоит в возможности независимого решения каждого из уравнений. Так для системы с двумя степенями свободы уравнения (6.17) приводятся к виду:

$$\begin{aligned}
 \ddot{f}_1 + k_1^2 f_1 &= \frac{Q_1(t)U_{11} + Q_2(t)U_{21}}{a_{11}U_{11}^2 + a_{22}U_{21}^2 + 2a_{12}U_{11}U_{21}}, \\
 \ddot{f}_2 + k_2^2 f_2 &= \frac{Q_1(t)U_{12} + Q_2(t)U_{22}}{a_{11}U_{12}^2 + a_{22}U_{22}^2 + 2a_{12}U_{12}U_{22}}.
 \end{aligned}
 \tag{6.19}$$

где $k_1 = \sqrt{\frac{C_1}{M_1}}$, $k_2 = \sqrt{\frac{C_2}{M_2}}$

Каждое из уравнений (6.19) решается также, как и для системы с одной степенью свободы.

6.4. Примеры исследования вынужденных колебаний механической системы с двумя степенями свободы

6.4.1. Крутильные колебания вала с двумя дисками

Рассматривается механическая система, изображенная на рис. 5.1, а, к которой приложены моменты $M_1(t)$ и $M_2(t)$, изменяющиеся по гармоническому закону. Дифференциальные уравнения движения записываются в форме (6.9). Принимая $J_1 = J_2 = J$, $C_1 = C_2 = C$ для собственных частот и собственных форм, соответственно получаем:

$$k_1 = 0,618P_0, k_2 = 1,618P_0$$

$$U_{11} = U_{12} = 1; U_{21} = 1,618; U_{22} = -0,618,$$

$$P_0 = \sqrt{C/J}$$

Инерционные коэффициенты a_{ij} соответственно равны

$$a_{11} = a_{22} = J; \quad a_{12} = a_{21} = 0,$$

тогда уравнения (6.19) приводятся к виду:

$$\ddot{f}_1 + (0,618)^2 P_0^2 f_1 = \frac{M_{10} + 1,618M_{20}}{J[1 + (1,618)^2]} \sin \alpha t, \quad (6.20)$$

$$\ddot{f}_2 + (1,618)^2 P_0^2 f_2 = \frac{M_{10} - 0,618M_{20}}{J[1 + (0,618)^2]} \sin \alpha t.$$

Каждое из уравнений (6.20) имеет форму уравнения (2.1), а его решение можно представить в виде (2.28). Теперь, чтобы найти решение для исходной механической системы с обобщенными координатами φ_1 и φ_2 , следует найти

$$\varphi_1 = f_1(t)U_{11} + f_2(t)U_{12}, \quad (6.21)$$

$$\varphi_2 = f_1(t)U_{21} + f_2(t)U_{22}.$$

6.4.2. Изгибные колебания невесомой балки с двумя сосредоточенными грузами

Рассматривается механическая система, изображенная на рис. 5.3, к которой приложены две сосредоточенные гармонические силы:

$$Q_1(t) = Q_{10} \sin \alpha t, \quad Q_2(t) = Q_{20} \sin \alpha t$$

Если $m_1 = m_2 = m$, то

$$k_1^2 = \frac{6 EJ}{5 ml^3}, \quad k_2^2 = 18 \frac{EJ}{ml^3}, \quad a_{11} = a_{22} = m; \quad a_{12} = a_{21} = 0,$$

$$U_{11} = 1, \quad U_{21} = 1, \quad U_{12} = 1, \quad U_{22} = -1.$$

а дифференциальные уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned}
 f_1 + \frac{6 EJ}{5 ml^3} f_1 &= \frac{(Q_{10} + Q_{20}) \sin \omega t}{2} \\
 f_2 + 18 \frac{EJ}{ml^3} f_2 &= \frac{Q_{10} - Q_{20}}{2} \sin \omega t
 \end{aligned}
 \tag{6.22}$$

Как и в предыдущем случае, каждое из уравнений решается независимо, а для обобщенных координат получаем:

$$y_1 = \frac{1}{2} [f_1(t) + f_2(t)], \quad y_2 = \frac{1}{2} [f_1(t) - f_2(t)]
 \tag{6.23}$$

6.5. Метод комплексных амплитуд

Рассматривается линейная механическая система, на которую, кроме потенциальных, действуют линейные силы вязкого сопротивления. В случае действия на систему вынуждающих сил, изменяющихся по гармоническому закону, дифференциальные уравнения движения в матричной форме имеют вид

$$\bar{A}\bar{q} + \bar{B}\dot{\bar{q}} + \bar{C}\bar{q} = \bar{Q}(t),
 \tag{6.24}$$

где

$$\bar{Q}(t) = \begin{pmatrix} Q_{10} \\ \vdots \\ Q_{n0} \end{pmatrix} e^{i\omega t},
 \tag{6.25}$$

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \text{ — диссипативная матрица;}$$

$$\bar{q} = \begin{pmatrix} q_{10} \\ q_{20} \\ \vdots \\ q_{n0} \end{pmatrix} e^{i\omega t}
 \tag{6.26}$$

Подставляя (6.26) в (6.24), получаем

$$-\omega^2 \bar{A}\bar{q} + i\bar{B}\bar{q}\omega + \bar{C}\bar{q} = \bar{Q}_0
 \tag{6.27}$$

В развернутой форме уравнениям (6.27) соответствует система уравнений:

$$\begin{cases} (C_{11} + i\omega b_{11} - \omega^2 a_{11})q_{10} + \dots + (c_{1n} + i\omega b_{1n} + \omega^2 a_{1n})q_{n0} = Q_{10}, \\ \dots \\ (C_{n1} + i\omega b_{n1} - \omega^2 a_{n1})q_{10} + \dots + (c_{nm} + i\omega b_{nm} + \omega^2 a_{nm})q_{n0} = Q_{n0}. \end{cases} \quad (6.28)$$

Уравнения (6.28) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами относительно неизвестных амплитуд колебаний q_{n0} . Результатом решения является выражение

$$q_{n0} = U_n + iV_n, \quad (6.29)$$

тогда модуль

$$q_{n0} = \sqrt{U_n^2 + V_n^2}. \quad (6.30)$$

является амплитудой колебаний, соответствующей координате q_n , а φ – фазой:

$$\varphi = \text{arctg} \frac{V_n}{U_n} \quad (6.31)$$

6.6. Вынужденные колебания многоосного транспортного средства

Многоосное транспортное средство с ответственным грузом движется со скоростью V по пересеченной местности. Неровности дороги, воздействуя на ходовую часть машины, вызывают ее колебания. Водитель интуитивно стремится двигаться так, чтобы колебания, которые он испытывает, были близки к допустимым. Кроме того, для обеспечения сохранности приборов точной механики, размещенных в отсеке А (рис. 6.3) – приборы навигационные, оптические датчики и другое – нормируются также амплитудные значения ускорений.

Учитывая особенности грузов, перевозимых многоосными автомобилями и необходимость высоких средних скоростей движения по неразведанной местности, требуется определить, при каких условиях движения (микропрофиль дороги, скорость движения) показатели плавности хода (амплитудные значения линейных ускорений центра масс

(ЦМ) и угловых ускорений системы) не превысят предельно допустимых по техническому заданию (ТЗ).

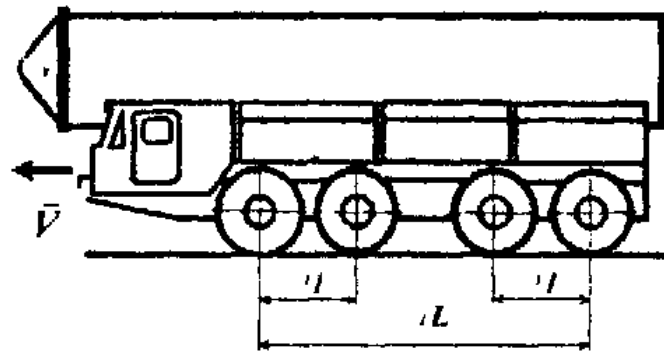


Рис 6 i

6.6.1. Формулировка задачи

Исследуются колебания многоосного автомобиля с известными массовыми и геометрическими параметрами корпуса, груза и жесткостными параметрами подвески при его движении по грунтовой дороге гармонического профиля. Известно, что конструкция подвесок современных многоосных грузовых автомобилей такова, что практически оказываются возможными лишь колебания в вертикальной плоскости.

Для теоретического исследования колебаний многоопорной системы, которой является рассматриваемый автомобиль, большое значение имеет правильный выбор адекватной расчетной схемы, наиболее полно отражающей важнейшие факторы, влияющие на параметры колебаний. Условия задачи позволяют принять ряд допущений, которые упрощают анализ. Поскольку две независимые переменные $Y(t)$ и $\varphi(t)$ в нашей задаче изменяются в продольной плоскости (по принятым допущениям поперечными колебаниями пренебрегаем), рассматриваем плоскую расчетную схему колебаний многоопорного автомобиля. Принимаем, что грузовая платформа с ее несущим элементом (рамой), перевозимым грузом и надстройками является абсолютно твердым телом, имеющим про-

дольную плоскость симметрии, то есть изгибными деформациями рамы пренебрегаем.

При детерминистической оценке микропрофиля дороги рассматриваем как сочетание отдельных неровностей, характеризующихся длиной, высотой, формой и чередованием. Радиус автомобильного колеса значительно больше высоты неровности, а упругая шина обладает способностью сглаживать резкие очертания неровностей. Поэтому для предварительных исследований можно принять профиль неровностей гармоническим (синусоидальным) относительно средней линии неровностей.

Относительно срединной плоскости дороги кривая микропрофиля смещена на h_0 (рис. 6.2).

Статистическая обработка экспериментальных результатов показывает, что на грунтовых дорогах, наезженных многоосными автомобилями, высота неровности веднообразного профиля с правильно чередующимися неровностями равна 100–200 мм. Примем для нашего расчета $h_0 = 100$ мм.

Контакт шин с дорогой принимаем точечный, то есть вместо распределенного воздействия дороги по площадке конечных размеров (пятну контакта) к шине прикладывается равнодействующая сила, точка приложения которой определяется ординатой (h) дорожной поверхности под центром колеса.

Для текущего значения пути X уравнение профиля неровности имеет вид:

$$h = h_0 \left(1 - \frac{2\pi x}{S} \right), \quad (6.32)$$

где S – длина одиночной неровности профиля; x – текущая координата точечного контакта колеса с дорогой.

Поскольку рассматривается установившийся режим движения автомобиля, начало отсчета пути не имеет принципиального значения. Тогда под каждую ось многоосного автомобиля возмущение от данной неровности воздействует с запаздыванием, которое определяется фазовым углом β_i :

$$\beta_i = \frac{2\pi l_i}{S},$$

где l_i – расстояние от первой по ходу движения оси автомобиля; i – номер оси.

Кроме того, будем считать, что центр масс автомобиля движется в продольном направлении с постоянной скоростью V , поэтому $x = Vt$, отсутствует влияние продольных и поперечных реакций дороги на колебания масс автомобиля; неуравновешенность вращающихся масс трансмиссии и двигателя равны нулю; рассматриваемые колебания автомобиля малыми для предварительных расчетов.

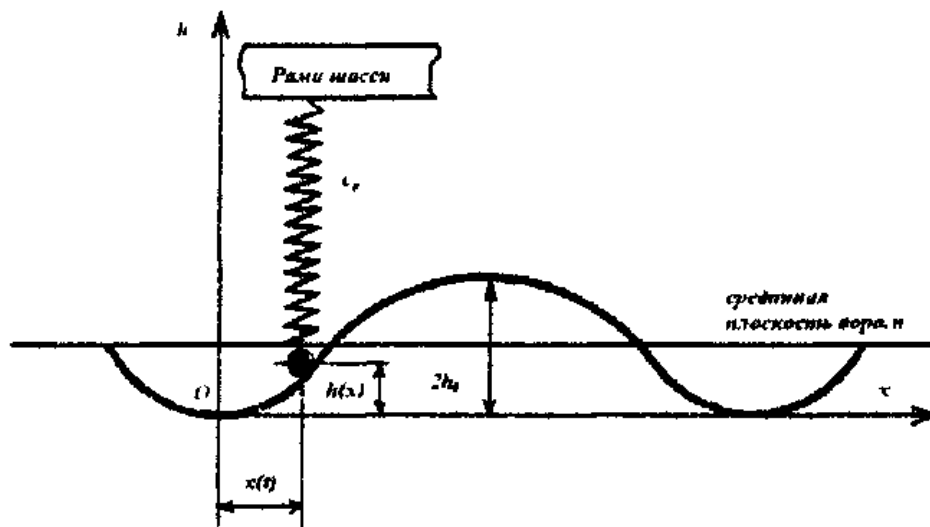


Рис. 6.2

С учетом принятых допущений получаем расчетную схему в виде одно-массовой системы с двумя степенями свободы. Колебания автомобиля описываются двумя обобщенными координатами – вертикальным перемеще-

нием центра масс $Y(t)$ и углом крена $\varphi(t)$ – полностью определяющими положение продольного сечения автомобиля, имеющего подрессоренную массу m и собственный момент инерции J .

6.6.2. Уравнения математической модели

Для вывода уравнений изображенной на рис. 6.3 расчетной динамической модели одномассового двухопорного автомобиля воспользуемся уравнением Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_{q_i} \quad (i=1,2), \quad (6.33)$$

где $q_1 = Y(t)$, $q_2 = \varphi(t)$ – обобщенные координаты; T – кинетическая энергия автомобиля, выраженная через обобщенные координаты и их скорости; Q_{q_i} – обобщенные силы, соответствующие каждой обобщенной координате.

Так как сила тяжести подрессоренной части автомобиля и сила упругости подвески являются потенциальными силами, то обобщенные силы можно вычислить по выражению:

$$Q_{q_i} = - \frac{\partial I}{\partial q_i}. \quad (6.34)$$

Кинетическую энергию плоскопараллельного движения автомобиля найдем, используя теорему Кёнига

$$T = T_1 + T_2, \quad (6.35)$$

где $T_1 = \frac{m(\dot{Y}^2 + V^2)}{2}$ – кинетическая энергия поступательной составляющей движения автомобиля со скоростью центра масс

$\vec{V}_m = \vec{V}_y + \vec{V}$; $T_2 = \frac{J \cdot \dot{\varphi}^2}{2}$ – кинетическая энергия вращательной составляющей плоского движения автомобиля относительно его центра масс.

Потенциальную энергию деформации рессор при движении машины по неровной дороге будем вычислять, используя текущее положение продольной оси автомобиля, показанной на рис. 6.3:

$$U = \frac{c_1}{2} (l_1 + c_2 l_2 - h_0)^2 + \frac{c_2}{2} (Y - \varphi l_2 - h_0)^2, \quad (6.36)$$

где l_1 и l_2 — расстояния верха переднего и заднего колес при движении автомобиля по неровному профилю (рис. 6.3). Y — текущее положение центра масс автомобиля, c_1 и c_2 — жесткости продольной оси автомобиля в радианах.

Учитывая, что положение автомобиля на дороге определяется координатой $X = V \cdot t$, а базисной $I = l_1 + L$, получаем

$$\begin{aligned} l_1 &= h \left[1 - \cos \frac{2\pi V t}{S} \right] \\ l_2 &= h \left[1 - \cos \frac{2\pi (l_1 + L)}{S} \right] \end{aligned} \quad (6.37)$$

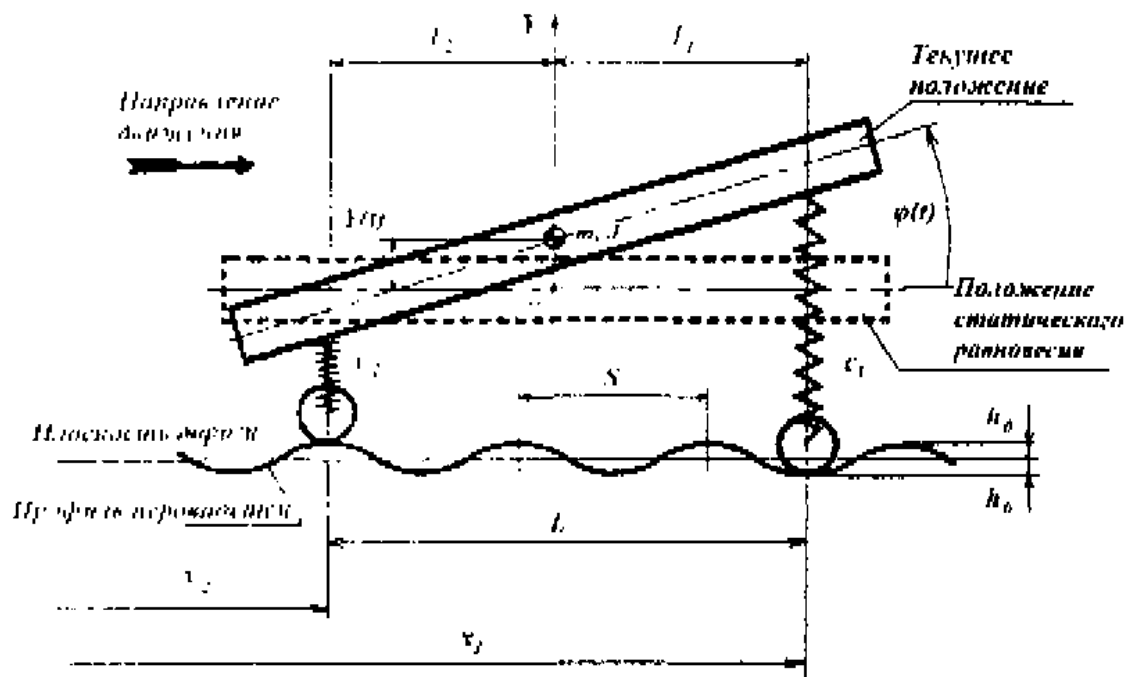


Рис. 6.3

После подстановки (6.35), (6.36) в (6.33) с учетом (6.34) получаем дифференциальные уравнения малых колебаний двухпорного автомобиля:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{y} + \frac{C_1 + C_2}{m} y + \frac{C_1 l_1 - C_2 l_2}{m} \varphi &= \frac{C_1 h_1 + C_2 h_2}{m}, \\ \ddot{\varphi} + \frac{C_1 l_1 + C_2 l_2}{J} y + \frac{C_1 l_1^2 + C_2 l_2^2}{J} \varphi &= \frac{C_1 l_1 h_1 + C_2 l_2 h_2}{J}. \end{aligned} \right\} \quad (6.38)$$

Уравнения (6.38) удобнее представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \ddot{y} + c_{11} y + c_{12} \varphi &= H_{11} - H_{12} \cos\left(\frac{2\pi V t}{S}\right) + H_{13} \sin\left(\frac{2\pi V t}{S}\right), \\ \ddot{\varphi} + c_{21} y + c_{22} \varphi &= H_{21} - H_{22} \cos\left(\frac{2\pi V t}{S}\right) + H_{23} \sin\left(\frac{2\pi V t}{S}\right), \end{aligned} \right\} \quad (6.39)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{C_1 + C_2}{m}, & c_{12} &= \frac{C_1 l_1 - C_2 l_2}{m}, \\ c_{21} &= \frac{C_1 l_1 + C_2 l_2}{J}, & c_{22} &= \frac{C_1 l_1^2 + C_2 l_2^2}{J}, \\ H_{11} &= \frac{C_1 + C_2}{m} h_0, & H_{21} &= \frac{C_1 l_1 + C_2 l_2}{J} h_0, \\ H_{12} &= \frac{h_0}{m} \left(C_1 + C_2 \cos\left(\frac{2\pi L}{S}\right) \right), & H_{13} &= \frac{h_0}{m} C_2 \sin\left(\frac{2\pi L}{S}\right), \\ H_{22} &= \frac{h_0}{J} \left(C_1 l_1 + C_2 l_2 \cos\left(\frac{2\pi L}{S}\right) \right), & H_{23} &= \frac{h_0}{J} C_2 l_2 \sin\left(\frac{2\pi L}{S}\right). \end{aligned}$$

Решение системы уравнений (6.39) можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} y &= y_0 + A \cos \frac{2\pi V t}{S} + B \sin \frac{2\pi V t}{S}, \\ \varphi &= \varphi_0 + A_1 \cos \frac{2\pi V t}{S} + B_1 \sin \frac{2\pi V t}{S} \end{aligned} \right\} \quad (6.40)$$

где

$$A = \frac{1}{\delta_2} [c_{12} H_{21} - H_{12} (c_{22} - \omega^2)];$$

$$A_1 = \frac{1}{\delta_2} [c_{21} H_{12} - H_{22} (c_{11} - \omega^2)];$$

$$B = \frac{1}{\delta_2} [H_{11} (c_{22} - \omega^2) - c_{12} H_{21}];$$

$$B_1 = \frac{1}{\delta_2} [H_{21} (c_{11} - \omega^2) - c_{21} H_{11}];$$

$$y_0 = \frac{1}{\delta_1} (H_{11} c_{22} - H_{21} a_{12});$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{\delta_1} (H_{21} c_{11} - H_{11} c_{21});$$

$$\delta = (c_{11} - \omega^2)(c_{22} - \omega^2) - c_{12} \cdot c_{21};$$

$$\delta_1 = c_{11} \cdot c_{21} - c_{12} \cdot c_{21};$$

$$\omega = \frac{2\pi V}{S}.$$

Выражения (6.40) можно представить в амплитудной форме:

$$\left. \begin{aligned} Y &= y_0 + \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sin(\omega x + \alpha), \\ \varphi &= \varphi_0 + \sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sin(\omega x + \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (6.41)$$

Выполним расчеты для следующего набора исходных данных

$$m = 6000 \text{ кг},$$

$$J = 1,2 \cdot 10^3 \text{ кг м}^2,$$

$$C_1 = 200000 \text{ Н/м},$$

$$C_2 = 250000 \text{ Н/м},$$

$$l_1 = 100 \text{ см} = 1 \text{ м},$$

$$l_2 = 150 \text{ см} = 1,5 \text{ м},$$

$$S = 500 \text{ см} = 5 \text{ м},$$

$$h_0 = 10 \text{ см} = 0,1 \text{ м}.$$

Амплитудные значения ускорений центра масс автомобиля равно

$$\ddot{Y}_{\max} = \left(\frac{2\pi V}{S} \right)^2 \sqrt{A^2 + B^2};$$

амплитуда углового ускорения корпуса автомобиля равна:

$$\ddot{\phi}_{\max} = \left(\frac{2\pi V}{S} \right)^2 \sqrt{A_1^2 + B_1^2}.$$

Для обеспечения необходимой плавности хода автомобиля должны выполняться следующие неравенства:

$$\ddot{Y}_{\max} \leq [\ddot{Y}] = 8 \text{ м/с}^2,$$

$$\ddot{\phi}_{\max} \leq [\ddot{\phi}] = 0,25 \text{ 1/с}^2.$$

где $[\ddot{Y}]$, $[\ddot{\phi}]$ – допустимые значения ускорений, заданных в ТЗ.

Решая последние неравенства относительно скорости движения, находим, что допустимая скорость движения автомобиля по данному микропрофилю равна 25 км/час.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
В.1. Предмет теории колебаний	3
В.2. Выбор расчетной схемы	4
В.3. Классификация сил, действующих на механические системы	6
В.3.1. Восстанавливающие силы	6
В.3.2. Силы сопротивления или диссипативные силы	7
В.3.3. Вынуждающие силы	11
В.4. Составление дифференциальных уравнений движения	12
1. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ	14
1.1. Свободные колебания в отсутствие сил сопротивления	14
1.1.1. Дифференциальное уравнение движения	14
1.1.2. Определение жесткости конструкции	16
1.1.3. Решение дифференциального уравнения	18
1.1.4. Энергетический способ определения собственной частоты	19
1.1.5. Представление решения на фазовой плоскости	21
1.1.6. Некоторые общие свойства фазовых траекторий	23
1.2. Свободные колебания при вязком сопротивлении (трении)	23
1.2.1. Дифференциальное уравнение движения	23
1.2.2. Решение дифференциального уравнения при малом демпфировании ($\rho < 1$)	23
1.2.3. Характеристики темпа затухания колебаний	24
1.2.4. Связь логарифмического декремента колебаний с коэффициентом потерь	26
1.2.5. Представление решения в фазовой плоскости	27
1.2.6. Случай сильного и критического демпфирования	28
1.3. Пример расчета нагрузок при установке транспортно-авиационного контейнера на грузовую платформу	29
1.3.1. Постановка проблемы	29
1.3.2. Выбор расчетной схемы	29
1.3.3. Математическая модель совместного движения контейнера и подпрессоренной части платформы	31
2. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ	35
2.1. Вынужденные колебания в отсутствие сил сопротивления	35
2.1.1. Дифференциальное уравнение движения	35
2.1.2. Колебания, вызываемые единичным толчком	35
2.1.3. Обобщение решения на случай действия произвольной нагрузки	37
2.1.4. Пример расчета и анализа колебаний, вызванных действием линейно возрастающей силы	39
2.1.5. Пример расчета и анализа колебаний, вызванных единичным импульсом	40
2.1.6. Распространение решения на общий случай нагрузки	41
2.1.7. Пример расчета и анализа колебаний, вызванных гармонической вынуждающей силой	41
2.1.8. Пример расчета и анализа колебаний на основе предположения о характере установившегося движения (метод Дурффинга)	44

1.2. Вынужденные колебания при малом сил сопротивления.....	48
2.2.1 Дифференциальное уравнение движения.....	48
2.2.2 Общее решение, основанное на введении функции отклика на единичный импульс.....	48
2.2.3 Пример расчета и анализа колебаний при прохождении системы через резонанс.....	49
2.2.4 Метод комплексных амплитуд. Пример расчета и анализа колебаний при действии гармонической вынуждающей силы.....	50
2.2.5 Способ разложения на гармонические составляющие.....	54
3. РАСЧЕТ И АНАЛИЗ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ.....	58
3.1. Элементы теории параметрических колебаний.....	58
3.1.1 Примеры систем, совершающих параметрические колебания.....	58
3.1.2 Основное уравнение.....	58
3.1.3 Учет сил вязкого сопротивления.....	61
3.1.4 Исследование уравнения Матье. Диаграмма Айкса-Стретта.....	62
3.2. Примеры расчета и анализа параметрических колебаний конкретных механических систем.....	64
3.2.1 Стабилизация верхнего неустойчивого положения математического маятника.....	65
3.2.2 Потеря устойчивости вращающегося вала с различными главными моментами инерции.....	66
4. РАСЧЕТ И АНАЛИЗ КОЛЕБАНИЙ ЛИНЕЙНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ОГРАНИЧЕННЫМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ.....	70
4.1. Общие сведения.....	70
4.2. Особенности управления источником энергии.....	73
5. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ.....	76
5.1. Способы составления дифференциальных уравнений движения.....	76
5.1.1 Использование уравнений Лагранжа второго рода.....	76
5.1.2 Прямой и обратный способы составления дифференциальных уравнений движения.....	80
5.1.3 Пример составления дифференциальных уравнений крутильных колебаний системы с двумя степенями свободы.....	81
5.1.4 Составление дифференциальных уравнений колебаний однопролетной балки с помощью матрицы единичных перемещений.....	85
5.1.5 Пример составления дифференциальных уравнений изгибных колебаний балки с двумя степенями свободы.....	87
5.2. Определение спектра собственных частот.....	89
5.2.1 Общие положения.....	89
5.2.2 Примеры определения спектра собственных частот систем с двумя степенями свободы.....	90
5.3. Определение собственных форм колебаний.....	91
5.3.1 Общие положения.....	91
5.3.2 Определение собственных форм колебаний для систем с двумя степенями свободы.....	92
5.4. Определение собственных частот вращающегося генератора.....	94
5.4.1 Постановка задачи.....	95
5.4.2 Определение параметров вращающегося генератора.....	95
5.4.3 Математическая модель свободных колебаний вращающегося генератора.....	100
5.4.4 Анализ результатов расчета.....	103

6. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ.....	104
6.1 Дифференциальные уравнения движения.....	104
6.2 Примеры.....	105
6.2.1 Пример составления дифференциальных уравнений вынужденных крутильных колебаний системы с двумя степенями свободы на основе уравнений Лагранжа 2-го рода	105
6.2.2 Пример составления дифференциальных уравнений вынужденных колебаний обратным методом	106
6.3 Решение дифференциальных уравнений.....	106
6.4. Примеры исследования вынужденных колебаний механической системы с двумя степенями свободы	108
6.4.1 Крутильные колебания вала с двумя дисками	108
6.4.2 Изгибные колебания невесомой балки с двумя сосредоточенными грузами	109
6.5 Метод комплексных амплитуд.....	110
6.6 Вынужденные колебания многосвязного транспортного средства.....	111
6.6.1 Формулировка задачи	112
6.6.2 Уравнения математической модели	115