

**ОПД.Р.03 СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА**  
**МЕТОДЫ, АЛГОРИТМЫ И ПРОГРАММЫ РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВЫХ**  
**СИСТЕМ НА УСТОЙЧИВОСТЬ И КОЛЕБАНИЯ**  
Учебное пособие

Рассмотрены классические методы строительной механики, предназначенные для расчета стержней и плоских рам на устойчивость. Представлены конечно-элементные алгоритмы решения задач устойчивости в линейно упругой постановке и с учетом конечных перемещений. Приведен порядок динамического расчета рам с конечным числом степеней свободы методами сил и перемещений. Изложены алгоритмы численного модального анализа и прямого интегрирования уравнения движения стержневых систем при силовом и кинематическом способах возбуждения колебаний. Теоретический материал пособия снабжен учебными примерами.

Пособие предназначено студентам высших учебных заведений, обучающимся по направлению подготовки дипломированных специалистов “Строительство”.

## Оглавление

|   |    |
|---|----|
| Предисловие .....   | 6  |
| Глава 1. Устойчивость стержневых систем .....   | 8  |
| 1.1. Понятие о потере устойчивости 1-го и 2-го рода .....   | 8  |
| 1.2. Классические методы линейного анализа устойчивости стержней .....                                | 10 |
| 1.2.1. Статический метод .....  | 10 |
| 1.2.2. Энергетический метод .....   | 16 |
| 1.3. Дифференциальное уравнение упругой линии при продольном изгибе стержня .....                     | 18 |
| 1.4. Упругие единичные реакции сжато- и растянуто-изогнутых стержней .....                            | 21 |
| 1.5. Расчет плоских стержневых систем на устойчивость методом перемещений .....                       | 28 |
| 1.6. Вычисление параметра критической нагрузки в среде Maple .....                                    | 45 |
| Глава 2. Метод конечных элементов в статике стержневых систем .....                                   | 49 |
| 2.1. Матрицы жесткости стержневого конечного элемента .....   | 49 |
| 2.2. Комбинированные балочные конечные элементы .....   | 56 |
| 2.3. Преобразование матриц жесткости при переходе к глобальным осям .....                             | 59 |
| 2.4. Формирование результирующей системы уравнений стержневой системы .....                           | 61 |
| 2.5. Линейный анализ устойчивости методом конечных элементов .....                                    | 64 |
| 2.6. Итерационный анализ устойчивости с применением шаговой процедуры метода конечных элементов ..... | 66 |

|   |  |     |
|---|--|-----|
| 2.7.                                      | Примеры линейного анализа устойчивости методом конечных элементов .....  | 71  |
| 2.8.                                      | Примеры деформационного расчета стержневых систем .....  | 80  |
| Глава 3. Динамика стержневых систем ..... |  | 91  |
| 3.1.                                      | Виды динамического воздействия на строительные сооружения .....  | 91  |
| 3.2.                                      | Число динамических степеней свободы стержневой системы .....   | 92  |
| 3.3.                                      | Уравнение движения и свободные колебания системы с одной степенью свободы .....                                    | 94  |
| 3.4.                                      | Свободные колебания системы с одной степенью свободы с учетом силы сопротивления .....                             | 98  |
| 3.5.                                      | Динамический отклик системы с одной степенью свободы на частные виды внешних воздействий .....                     | 100 |
| 3.5.1.                                    | Действие внезапно приложенной силы .....   | 100 |
| 3.5.2.                                    | Действие гармонической вынуждающей силы .....  | 102 |
| 3.6.                                      | Динамический расчет плоских рам .....  | 105 |
| 3.6.1.                                    | Свободные колебания рам с конечным числом степеней свободы .....   | 105 |
| 3.6.2.                                    | Ортогональность собственных форм колебаний .....   | 109 |
| 3.6.3.                                    | Примеры определения частот свободных колебаний многомассовых рам .....   | 110 |
| 3.6.4.                                    | Расчет многомассовых рам на вынужденные колебания .....  | 117 |
| 3.6.5.                                    | Итерационный алгоритм вычисления частот и форм свободных колебаний систем с конечным числом степеней свободы ..... | 126 |
| 3.7.                                      | Уравнение движения в формулировке метода конечных элементов .....  | 131 |
| 3.8.                                      | Матрица масс стержневого конечного элемента .....  | 135 |
| 3.9.                                      | Анализ частот и мод свободных колебаний стержневых конструкций .....   | 137 |

|  |   |     |
|--|---|-----|
| 3.10.  | Примеры расчета частот и форм свободных колебаний .....           | 141 |
| 3.11.  | Конечно-элементный анализ вынужденных колебаний .....             | 150 |
| 3.12.  | Примеры расчетов на вынужденные колебания .....                   | 154 |
| 3.13.  | Численное моделирование сейсмического возбуждения колебаний ..... | 162 |
| Заключение .....   |   | 175 |
| Библиографический список .....   |   | 176 |
| Приложения .....   |   | 177 |
| Приложение 1. Таблица значений реакций для сжато-изогнутых стержней .....                                  |   | 177 |
| Приложение 2. Таблицы реакций для балок, используемые при расчете рам по методу перемещений .....          |   | 178 |
| Приложение 3. Варианты заданий для самостоятельной работы .....  |   | 180 |
| Приложение 4. Краткие сведения из матричной алгебры .....  |   | 186 |
| Приложение 5. Примеры оформления файлов исходных данных в формате языка Фортран 90 .....                   |   | 192 |
| Приложение 6. Программа ANSYS на языке APDL для расчета устойчивости плоской рамы .....                    |   | 206 |
| Приложение 7. Программа ANSYS на языке APDL для деформационного расчета Г-образной рамы .....              |   | 213 |
| Приложение 8. Программа на языке Фортран для определения собственных значений .....                        |   | 219 |
| Приложение 9. Программа ANSYS на языке APDL для расчета двухшарнирной балки на вынужденные колебания ..... |   | 226 |



## Предисловие

*“Размышлять, не познавая – бесполезно,  
познать, не размышляя – опасно”.*

*Конфуций*

Рациональное проектирование зданий и сооружений требует проведения всесторонних исследований напряженно-деформированного состояния при различных сценариях нагружения. Кроме этого необходим анализ предельных состояний проектируемого объекта при действии всех опасных сочетаний нагрузок. Такой комплексный подход невозможен без глубоких знаний в области строительной механики и применения современных компьютерных технологий.

Согласно сложившейся практике преподавания строительной механики в “Южно-Российском государственном техническом университете (НПИ)” принято разделы, связанные с теорией расчета на устойчивость и динамическое воздействие, выделять в специальный курс, называемый “Устойчивость и динамика строительных систем”. Полученные при этом знания студенты используют при дальнейшем изучении специальных курсов: металлических, железобетонных, деревянных и других конструкций, а также в дипломном проектировании.

Большинство расчетных схем современных зданий и сооружений можно представить набором стержневых элементов, имеющих один доминирующий размер (длину). Поэтому в качестве объекта изучения в предлагаемом учебном пособии рассмотрены упруго деформируемые стержневые системы, представляющие собой инженерные конструкции, образованные из линейных элементов, идентичных балкам, колоннам, аркам, тросам и т. п. Размерность задачи напрямую зависит от количества узловых соединений стержневых элементов. Для расчета стержневых систем используются как классические методы сил и перемещений, так и численный метод, базирующийся на конечно-элементном моделировании. Последний метод обладает большими вычислительными возможностями и является основой современных вычислительных комплексов.

Метаморфоза сознания современного студента такова, что для него работа за компьютером намного привлекательнее работы с кни-

гами, карандашом и калькулятором на письменном столе. Этим обстоятельством продиктовано стремление автора изложить материал пособия по большей части в виде руководства пользователя персонального компьютера с приложением необходимых теоретических данных, большого числа учебных примеров и справочных материалов. Общеизвестно, что только во время самостоятельной работы студент получает навыки исследователя, т. к. в процессе освоения темы в расчетном задании можно варьировать исходными данными и граничными условиями, достигая требуемого результата.

Используемое в пособии программное обеспечение ориентировано на среду Windows с применением компьютерных систем Maple и Matlab. Вычислительное ядро пакета прикладных конечно-элементных программ разработано на Фортране – Microsoft Fortran PowerStation версии 4.0. Расчетно-вычислительный комплекс построен по модульному принципу и позволяет выполнять расчеты плоских и пространственных стержневых систем при статическом и динамическом (включая модальный анализ) воздействии. Комплекс имеет открытую структуру, что позволяет при необходимости вносить изменения в вычислительную процедуру. Возможности комплекса ограничены размером оперативной памяти и быстродействием используемого компьютера.

При написании настоящего учебного пособия преследовались две цели:

познакомить студентов с инженерными основами теории устойчивости и динамики на примере стержневых систем;

описать численные алгоритмы анализа предельного состояния, ориентированные на использование метода конечных элементов.

# Глава 1. УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

## 1.1. Понятие о потере устойчивости 1-го и 2-го рода

Оценка несущей способности сооружения помимо прочностного расчета должна включать вопросы устойчивости. В зависимости от времени, в течение которого происходит нагружение конструкции, различают статическую или динамическую устойчивость. В дальнейшем будем рассматривать только статическое нагружение и соответственно статическую потерю устойчивости всей системы, либо отдельных ее элементов.

Устойчивость – это свойство сооружения оказывать сопротивление внешним воздействиям и самостоятельно восстанавливать исходную форму после прекращения силового воздействия.

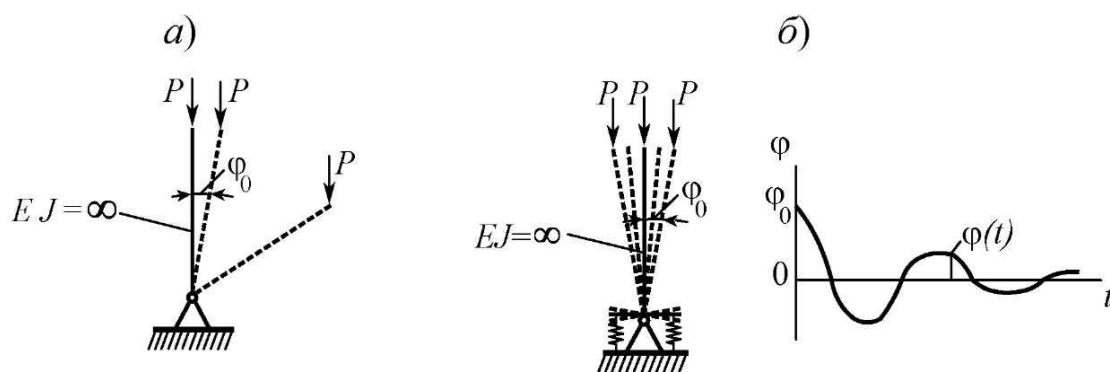


Рис. 1.1

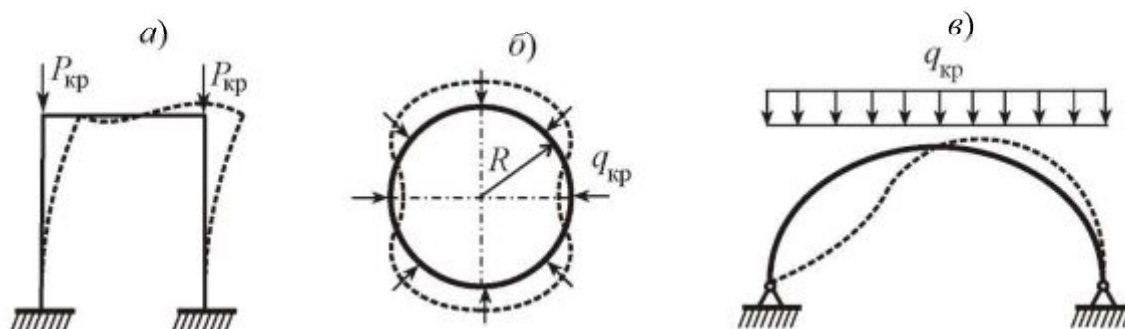


Рис. 1.2

Если вертикальная центрально сжатая стойка с шарнирным закреплением на конце (рис. 1.1, а) после малого возмущения  $\varphi_0$  резко отклоняется в сторону, то исходное теоретически возможное равновесное состояние является неустойчивым.

Если прямолинейный центрально сжатый стержень с упругим закреплением на конце (рис. 1.1, б), выведенный из положения равновесия с помощью слабого возмущения  $\varphi_0$ , поколебавшись, возвращается в первоначальное положение, то такое исходное равновесное состояние является устойчивым.

В качестве примера на рис. 1.2 сплошными и штриховыми линиями соответственно показаны первоначальные формы равновесия и возможные состояния после потери устойчивости для плоской рамы (рис. 1.2, а), кольца (рис. 1.2, б) и арки (рис. 1.2, в).

При расчете стержневых систем на устойчивость принято внешнюю распределенную и сосредоточенную нагрузку приводить к узлам расчетной схемы и вектор узловых сил  $\{P\}$  представлять в виде

$$\{P\} = \lambda \{p\},$$

где  $\lambda$  – параметр нагружения ( $0 \leq \lambda \leq 1$ );  $\{p\}$  – проектный вектор внешней нагрузки, включающий сосредоточенные моменты. Будем рассматривать так называемое “простое нагружение”, когда все составляющие вектора  $\{P\}$  изменяются пропорционально параметру  $\lambda$ .

В инженерной практике принято различать потерю устойчивости 1-го и 2-го рода [3]. Под потерей устойчивости 1-го рода или Эйлеровой потерей устойчивости принято понимать состояние системы, при котором происходит внезапный переход к качественно новой деформированной форме равновесия. Такой переход, называемый бифуркацией, может привести к разрушению конструкции. Поэтому соответствующая величина нагрузки характеризуется как критическая. Экспериментально установлено, что незадолго до бифуркации элементы сооружения начинают самопроизвольно вибрировать, что объясняется переходом части потенциальной энергии деформации в кинетическую энергию малых упругих колебаний.

Для иллюстрации Эйлеровой потери устойчивости рассмотрим гипотетический шарнирно закрепленный идеально прямолинейный стержень, нагруженный центрально приложенной силой  $P$  (рис. 1.3, а). Будем постепенно увеличивать величину  $P$  при одновременном слабом кинематическом возмущении в центре стержня –  $v_0$ . При достижении  $P = P_{кр}$  наступит такой момент, когда прогиб  $v$  резко увеличится от  $v_0$  до  $v_{max}$  ( $v_{max} \gg v_0$ ). На рис. 1.3, б представлен идеализированный график нагрузка ~ прогиб ( $P \sim v$ ) для данного центрально-сжатого стержня.

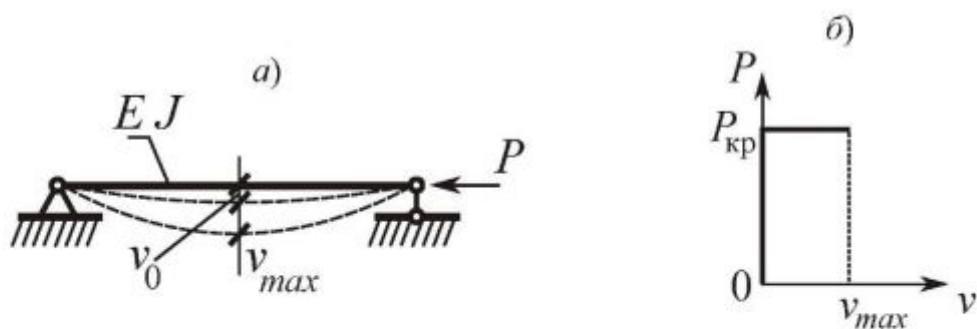


Рис. 1.3

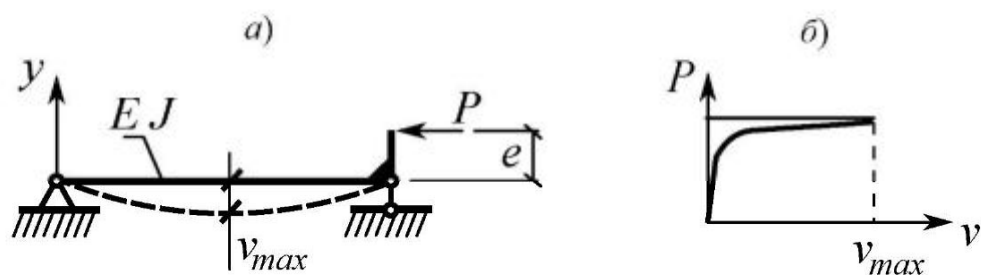


Рис. 1.4

Потеря устойчивости 2-го рода характеризуется нелинейной зависимостью между параметром нагружения и перемещениями конструкции. В простейшем случае однопролетного внецентренно сжатого стержня (рис. 1.4, а) в процессе квазистатического (медленного) нагружения наступает момент, когда незначительное увеличение силы приводит к значительному прогибу (рис. 1.4, б). Состояние системы, при котором рост перемещений продолжается без увеличения нагрузки, называется потерей несущей способности. В строительной механике решение задач устойчивости 2-го рода называют расчетом по деформированной схеме или деформационным расчетом.

Строительные нормы и правила регламентируют работу стержневых конструкций только в докритической стадии.

## 1.2. Классические методы линейного анализа устойчивости стержней

### 1.2.1. Статический метод

Рассмотрим прямолинейный идеально упругий центрально-сжатый стержень постоянного поперечного сечения в сочетании с различными схемами закрепления его концов (рис. 1.5, а, б, в). Схему



закрепления стержня пока не конкретизируем. При значении силы  $P < P_{кр}$  стержень находится в состоянии равновесия и сохраняет первоначально прямолинейную форму. В случае, когда величина силы составляет  $P \geq P_{кр}$ , стержень при малейшем отклонении от продольной оси переходит в новое равновесное изогнутое состояние, смежное с первоначальным состоянием. Считаем, что изгиб стержня происходит в плоскости наименьшей жесткости, которой соответствует минимальный момент инерции сечения  $J$ . Для определения критической силы  $P_{кр}$  составим уравнение равновесия стержня в изогнутом состоянии.

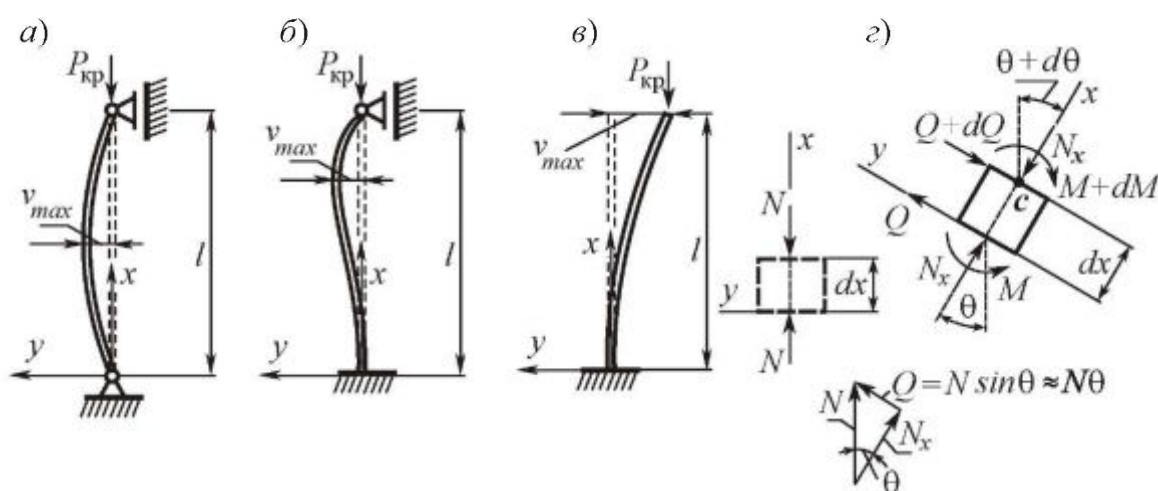


Рис. 1.5

Принимаем следующие допущения (рис. 1.5,  $\delta$ ): считаем выделенный элемент стержня  $dx$  недеформируемым; поперечная сила  $Q$  возникает за счет проекции силы  $N$  на ось  $y$ ; в виду малых деформаций полагаем  $\cos \theta \approx 1$ ,  $\sin \theta \approx \theta$ .

Отметим, что угол поворота  $\theta$  нормального сечения стержня связан с прогибом  $v$  соотношением (курс “Сопrotивление материалов”)

$$\theta = -\frac{dv}{dx} = -v'.$$

Запишем уравнение равновесия для выделенного элемента стержня, находящегося в изогнутом состоянии:

$$\sum M_c = -N\theta dx + M - M - dM = 0.$$

Отсюда

$$-N\theta dx - dM = 0, \quad \frac{dM}{dx} + N\theta = 0, \quad \frac{dM}{dx} = Nv', \quad \frac{dM}{dx} = Q.$$

С другой стороны, проецируя поперечные силы на ось  $y$ , имеем:

$$Q - (Q + dQ) = N\theta - N(\theta + d\theta) = -Nv' + N(v' + v'' dx);$$

$$dQ = Nv'' dx; \quad \frac{dQ}{dx} = Nv''.$$

В результате устанавливаем зависимость вида

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = Nv''.$$

С учетом выражения для изгибающего момента (курс “Сопро­тивление материалов”)

$$M = -EJ \frac{d^2 v}{dx^2} = -EJv''$$

получим дифференциальное уравнение устойчивости стержня посто­янной жесткости ( $EJ = const$ ):

$$\frac{d^2}{dx^2} (EJv'') + Nv'' = 0,$$

$$v^{IV} + k^2 v'' = 0, \quad (1.1)$$

где  $v^{IV} = \frac{d^4 v}{dx^4}$ ;  $k = \sqrt{\frac{N}{EJ}}$ .

Однородное дифференциальное уравнение (1.1) четвертого по­рядка справедливо при любых условиях закрепления торцов стержня.

Общее решение уравнения (1.1) имеет вид

$$v(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \sin kx + C_4 \cos kx, \quad (1.2)$$

где  $C_1, C_2, C_3, C_4$  – константы, определяемые из граничных условий задачи.

Напомним, что в курсе “Сопро­тивление материалов” для цен­трально-сжатого стержня было получено однородное дифференци­альное уравнение второго порядка в виде

$$v'' + k^2 v = 0.$$

Особенность вывода данного уравнения заключалась в том, что при изгибе стержня вертикальные реакции в опорах считались равными нулю, т. е. поперечная сила  $Q$  не учитывалась.

**Пример 1.** Требуется определить выражение критической силы для стержня с шарнирными опорами на концах (рис. 1.5, а). В этом случае граничные условия имеют вид:

$$v(0) = 0; \left. \frac{d^2 v}{dx^2} \right|_{x=0} = v''(0) = 0; v(l) = 0; \left. \frac{d^2 v}{dx^2} \right|_{x=l} = v''(l) = 0. \quad (1.3)$$

В развернутом виде граничные условия (1.3) с учетом выражения (1.2) представим с помощью следующей однородной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} C_1 + C_4 = 0; \\ -k^2 C_4 = 0; \\ C_1 + C_2 l + C_3 \sin kl + C_4 \cos kl = 0; \\ -C_3 k^2 \sin kl - C_4 k^2 \cos kl = 0. \end{cases}$$

Условие ненулевого решения этой системы уравнений имеет вид

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -k^2 \\ 1 & l & \sin kl & \cos kl \\ 0 & 0 & -k^2 \sin kl & -k^2 \cos kl \end{bmatrix} = 0. \quad (1.4)$$

Это и есть уравнение устойчивости или характеристическое уравнение.

Вычислив определитель, получим выражение

$$lk^4 \sin kl = 0.$$

Так как  $lk^4 \neq 0$  по определению, то  $\sin kl = 0$ . Таким образом, корни уравнения (1.4) определяются по формуле

$$kl = n\pi, \quad \sqrt{\frac{P}{EJ}} l = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Наименьшему корню характеристического уравнения  $k_{min}$  соответствует критическое значение силы:

$$P_{кр} = P|_{n=1} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$

(значение корня  $n = 0$  не имеет физического смысла).

Соответствующая форма потери устойчивости представляет собой полуволну синусоиды.



**Пример 2.** Требуется определить выражение Эйлеровой критической силы для стержня, жестко защемленного одним концом и шарнирно закрепленным на другом конце (рис. 1.5, б). В этом случае краевую задачу формализуем в виде:

$$v^{IV} + kv'' = 0;$$

$$v(0) = 0; \quad v'(0) = 0; \quad v(l) = 0; \quad v''(l) = 0.$$

Общее решение дифференциального уравнения – аналогично выражению (1.2).

Производные  $v'$  и  $v''$  имеют вид

$$v' = C_2 + C_3 k \cos kx - C_4 k \sin kx, \quad v'' = -C_3 k^2 \sin kx - C_4 k^2 \cos kx.$$

Уравнение устойчивости принимает форму

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 1 & l & \sin kl & \cos kl \\ 0 & 0 & -k^2 \sin kl & -k^2 \cos kl \end{bmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, запишем  $\Psi_1 + \Psi_2 = 0$ , где  $\Psi_1 = kl \cos kl$ ,  $\Psi_2 = -\sin kl$ .

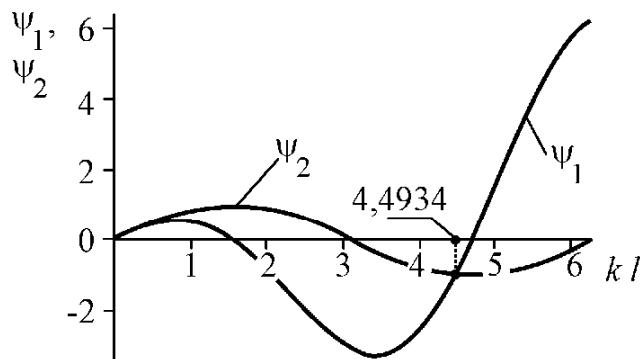


Рис. 1.6

Решение данного трансцендентного уравнения ищем в численном виде с помощью компьютерной математики системы Maple. В результате получим  $kl = 4,4934$ . На рис. 1.6 представлена графическая интерпретация полученного решения.

Из выражения  $l \sqrt{\frac{P_{кр}}{EJ}} = 4,4934$  находим значение критической

силы:

$$P_{\text{кр}} = \frac{(4,4934)^2 E J}{l^2} = \frac{20,191 E J}{l^2}.$$

**Пример 3.** Требуется найти выражение критической силы для стержня, один конец которого жестко зашпемлен, а другой свободен (рис. 1.5, в). Полагаем, что сила, приложенная к свободному концу, после потери устойчивости стержня сохраняет свое направление.

Граничные условия задачи:

$$v(0) = 0; \quad v'(0) = 0; \quad v''(l) = 0; \quad E J v'''(l) = -P v'(l).$$

Граничное условие при  $x = l$  представляет собой равенство поперечной силы  $Q$  и проекции продольной силы  $P$  на ось  $y$ . Отсюда следует

$$C_2 = C_3 = 0, \quad C_1 = -C_4; \quad \cos kl = 0.$$

Корни характеристического уравнения  $kl = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \dots$

Тогда  $\sqrt{\frac{P_{\text{кр}}}{E J}} l = \frac{\pi}{2}$  и выражение для критической силы принимает вид

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E J}{4l^2}.$$

Полученные в примерах 1-3 выражения для  $P_{\text{кр}}$  являются решениями линеаризованных уравнений частных задач устойчивости. Следует отметить, что основной недостаток статического метода состоит в отсутствии информации о перемещении  $v_{\text{max}}$  стержня после потери устойчивости. Как будет показано ниже, более полную информацию о закритическом поведении стержня можно получить, если использовать геометрически нелинейную постановку задачи.

Критическая сила для стержней, изображенных на рис. 1.5, а, б, в, может быть вычислена с помощью универсальной формулы Эйлера:

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E J}{l_{\text{пр}}^2}, \quad l_{\text{пр}} = \mu l, \quad (1.5)$$

где  $l_{\text{пр}}$  – приведенная длина стержня;  $\mu$  – коэффициент приведения длины (впервые введен инженером-механиком Ф.С. Ясинским);  $l$  – фактическая длина стержня. Величина  $\mu$  для рассмотренных схем

имеет следующие значения:  $\mu = 1$  (рис. 1.5, а);  $\mu = 0,7$  (рис. 1.5, б);  $\mu = 2$  (рис. 1.5, в).

Формулой Эйлера (1.5) можно пользоваться только в рамках закона Гука:

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} < \sigma_{\text{пц}}.$$

Здесь введены обозначения:  $\lambda = l_{\text{пр}} / i$  – гибкость стержня;  $i = \sqrt{J / F}$  – радиус инерции сечения стержня;  $\sigma_{\text{пц}}$  – предел пропорциональности материала.

### 1.2.2. Энергетический метод

Рассмотрим энергетический вариант статического метода анализа устойчивости. Потенциальную энергию деформации сжато изогнутого стержня определяем по формуле

$$U = \int_0^l \int_0^F \sigma_x \varepsilon_x dF dx,$$

где  $\sigma_x$  и  $\varepsilon_x$  – соответственно напряжение и деформация вдоль оси стержня  $x$ ;  $dF$  – элементарная площадка поперечного сечения стержня. При отклонении стержня от состояния устойчивого равновесия происходит увеличение значения  $U$ . При этом критическая нагрузка находится как минимальная сила, с помощью которой можно отклонить стержень от положения равновесия при соблюдении условия  $U = 0$ . Величину  $\varepsilon_x$  представим в виде суммы:

$$\varepsilon = \varepsilon_{x0} + \varepsilon_{x1},$$

где  $\varepsilon_{x0} = \frac{du}{dx}$  – составляющая деформации стержня до потери устойчивости ( $u$  – перемещение вдоль оси  $x$ );  $\varepsilon_{x1} = -y \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2$  –

дополнительная изгибная деформация стержня, обусловленная потерей устойчивости ( $v$  – прогиб стержня).

Тогда вариацию потенциальной энергии  $\delta U$ , вызванную малым возмущением, можно также представить в виде суммы:

$$\delta U = \delta U_0 + \delta U_1,$$

где

$$\delta U_0 = \int_0^l \int_F \sigma_x \frac{d(\delta u)}{dx} dF dx;$$

$$\delta U_1 = - \int_0^l \int_F \sigma_x y \frac{d^2(\delta v)}{dx^2} dF dx + \int_0^l \int_F \sigma_x \frac{dv}{dx} \frac{d(\delta v)}{dx} dF dx.$$

Учитывая, что

$$N = - \int_F \sigma_x dF; \quad M = \int_F \sigma_x y dF = -EJ \frac{d^2 v}{dx^2},$$

запишем выражение для составляющей  $\delta U_1$  в форме

$$\delta U_1 = EJ \int_0^l \frac{d^2 v}{dx^2} \frac{d^2(\delta v)}{dx^2} dx - N \int_0^l \frac{dv}{dx} \frac{d(\delta v)}{dx} dx. \quad (1.6)$$

Условие потери устойчивости стержня формулируем в виде равенства

$$\delta U_1 = 0. \quad (1.7)$$

Для вычисления значения критической силы необходимо задать аппроксимирующую функцию, описывающую изгибную форму равновесия стержня.

Рассмотрим шарнирно закрепленный стержень (рис. 1.5, а). Изогнутую ось стержня описываем уравнением (полуволна синусоиды)

$$v(x) = c \sin \frac{\pi x}{l},$$

где  $c$  – масштабный коэффициент.

Выполним необходимые символьные вычисления:

$$\frac{dv}{dx} = v' = \frac{c\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l}; \quad \frac{d^2 v}{dx^2} = v'' = -\frac{c\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l};$$

$$\int_0^l v' dx = \int_0^l \frac{c^2 \pi^2}{l^2} \cos^2 \left( \frac{\pi x}{l} \right) dx = \frac{c^2 \pi^2}{l^2} \frac{l}{2};$$

$$\int_0^l (v'')^2 dx = \int_0^l \frac{c^2 \pi^4}{l^4} \sin^2 \left( \frac{\pi x}{l} \right) dx = \frac{c^2 \pi^4}{l^4} \frac{l}{2}.$$

Подставив найденные выражения интегралов в (1.6) и учитывая условие (1.7), получим

$$\delta U_1 = EJ \frac{c^2 \pi^4}{l^4} \frac{l}{2} - N \frac{c^2 \pi^2}{l^2} \frac{l}{2} = 0.$$

Отсюда, выразив продольную силу  $N$  через  $P_{кр}$ , запишем

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}.$$

Это выражение совпадает с результатом, ранее полученным статическим методом (пп. 1.2.1, пример 1).

Выполним аналогичные выкладки для консольно закрепленного стержня (рис. 1.5, в). Уравнение изогнутой оси в этом случае аппроксимируем функцией

$$v(x) = c \left( 1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right).$$

Тогда интегралы, входящие в выражение (1.6), принимают вид:

$$\int_0^l v' dx = \frac{1}{8} \frac{c^2 \pi^2}{l};$$

$$\int_0^l (v'')^2 dx = \frac{1}{32} \frac{c^2 \pi^4}{l^3}.$$

Подставив эти выражения в (1.6) и учитывая условие (1.7), получим формулу для определения критической силы  $P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}$ .

Как видно данная запись совпадает с ранее полученным выражением (пп. 1.2.1, пример 3).

Следует отметить, что если выбрать иное выражение для аппроксимации перемещения  $v(x)$ , то вид выражения для  $P_{кр}$  будет отличаться от Эйлеровой формулы (1.5).

### 1.3. Дифференциальное уравнение упругой линии при продольном изгибе стержня

Рассмотрим стержень, сжатый продольной силой  $N$  в равновесном деформированном состоянии, обусловленном малыми поперечными перемещениями (рис. 1.7). Данная форма продольного изгиба

стержня имеет место при Эйлеровой потере устойчивости. Начало координат  $0$  помещаем на левом конце стержня, ось  $x$  совмещаем с упругой линией стержня до деформации. Подчеркнем, что до потери устойчивости на прямолинейный стержень действует только сжимающая сила  $N$ . Как видно из рис. 1.7 после потери устойчивости левый конец стержня сместится на величину  $v_0$  и повернется на угол  $v'_0$ . Полагаем, что на левом конце стержня возникают сила  $H_0$  и момент  $M_0$ .

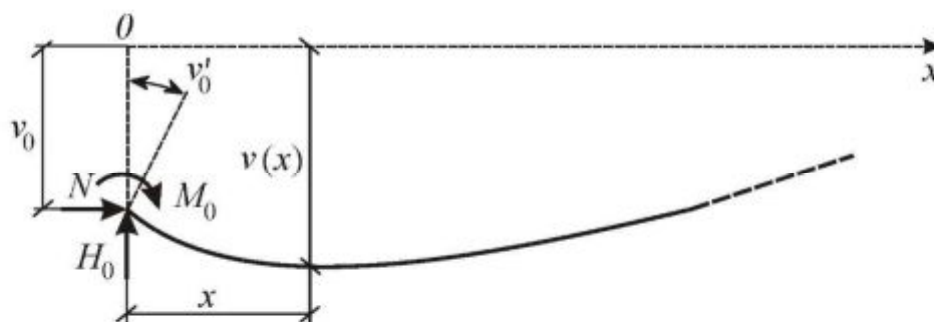


Рис. 1.7

Пренебрегая укорочением стержня, запишем выражение для изгибающего момента в сечении  $x$

$$M(x) = N(v - v_0) + M_0 + H_0 x.$$

Дифференциальное уравнение продольного изгиба стержня имеет вид

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{1}{EJ} [N(v - v_0) + M_0 + H_0 x]. \quad (1.8)$$

Решение уравнения (1.8) ищем в следующей форме [1-3]:

$$v(x) = v_0 - \frac{1}{k^2 EJ} (M_0 + H_0 x) + C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx),$$

где, как и ранее,  $k = \sqrt{N/EJ}$ .

Для определения постоянных  $C_1$  и  $C_2$  используем граничные условия в начале координат:

$$\text{при } x=0 \rightarrow \begin{cases} v = v_0, \text{ откуда } C_1 = \frac{M_0}{k^2 EJ}; \\ \frac{dv}{dx} = v'_0, \text{ откуда } C_2 = \frac{1}{k} \left( v'_0 + \frac{H_0}{k^2 EJ} \right). \end{cases}$$

В результате преобразований получим выражение для прогиба стержня  $v(x)$ :

$$v(x) = v_0 + \frac{v'_0}{k} \sin(kx) + \frac{M_0}{k^2 EJ} [\cos(kx) - 1] + \frac{H_0}{k^3 EJ} [\sin(kx) - kx]. \quad (1.9)$$

С помощью выражения (1.9) получим формулы для угла поворота  $v'(x)$  и изгибающего момента в произвольном сечении  $x$ :

$$v'(x) = v'_0 \cos(kx) - \frac{M_0}{k EJ} \sin(kx) + \frac{H_0}{k^2 EJ} (\cos(kx) - 1); \quad (1.10)$$

$$M(x) = -EJv'' = v'_0 k EJ \sin(kx) + M_0 \cos(kx) + H_0 \frac{\sin(kx)}{k}. \quad (1.11)$$

Приведенные выражения  $v(x)$ ,  $v'(x)$  и  $M(x)$  являются основой для вывода формул упругих реакций сжато-изогнутых стержней, которые в свою очередь используются при расчете плоских рам на устойчивость методом перемещений.

Если стержень растянут силой  $N_{\text{раст}}$ , то выражения (1.9), (1.10) и (1.11) принимают вид<sup>1</sup>:

$$v(x) = v_0 + \frac{v'_0}{\beta} \operatorname{sh}(\beta x) + \frac{M_0}{\beta^2 EJ} [1 - \operatorname{ch}(\beta x)] + \frac{H_0}{\beta^3 EJ} [\beta x - \operatorname{sh}(\beta x)]; \quad (1.12)$$

$$v'(x) = v'_0 \operatorname{ch}(\beta x) - \frac{M_0}{\beta EJ} \operatorname{sh}(\beta x) + \frac{H_0}{\beta^2 EJ} [1 - \operatorname{ch}(\beta x)]; \quad (1.13)$$

$$M(x) = -v'_0 \beta EJ \operatorname{sh}(\beta x) + M_0 \operatorname{ch}(\beta x) + \frac{H_0}{\beta} \operatorname{sh}(\beta x). \quad (1.14)$$

---

<sup>1</sup> Киселев В.А. Строительная механика: Спец. курс. Динамика и устойчивость сооружений. Учебник для вузов – М.: Стройиздат, 1980. – 616 с.

Здесь введены обозначения:  $\beta = \sqrt{N_{\text{раст}} / EJ}$ ;  $sh(\beta x)$ ,  $ch(\beta x)$  – гиперболический синус и косинус. Выражения (1.12), (1.13) и (1.14) используется при анализе устойчивости 1-го рода сжато-растянутых стержней.

#### 1.4. Упругие единичные реакции сжато- и растянуто-изогнутых стержней

Наиболее универсальной методикой определения критической нагрузки для плоских стержневых систем является анализ деформированного состояния в форме метода перемещений. При этом, сохраняя общий подход к формированию канонической системы уравнений равновесия, коэффициенты матрицы упругих реакций в сжатых стержнях от единичных смещений будем определять на основании уравнений (1.9), (1.10) и (1.11).

В качестве примеров рассмотрим расчетные схемы сжатых стержней, показанные на рис. 1.8. Граничные условия для стержня с жестко защемленными концами (рис. 1.8, а) имеют следующий вид:

$$\text{при } x = 0 \rightarrow \begin{cases} v_a = 0; \\ v'_a = 1, \end{cases} \quad \text{при } x = l \rightarrow \begin{cases} v_b = 0; \\ v'_b = 0. \end{cases}$$

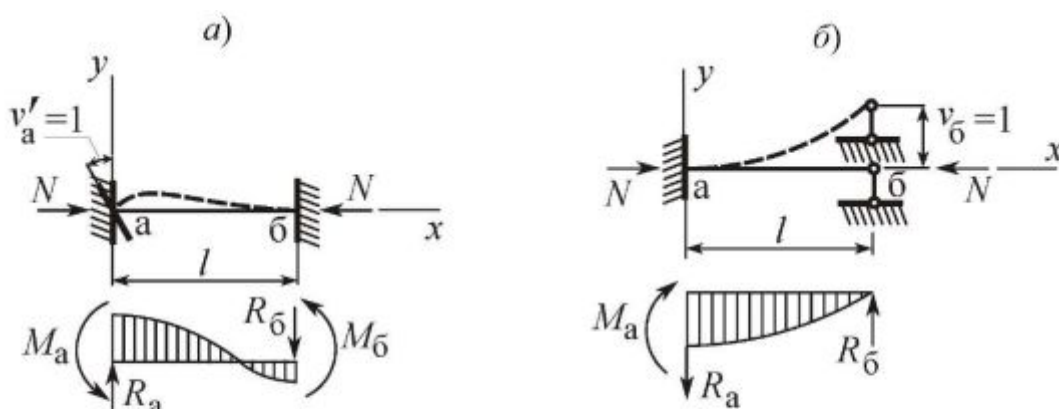


Рис. 1.8

На основании уравнений (1.9) и (1.10) при  $x = l$  составим систему уравнений:



$$\begin{cases} \frac{\sin \nu}{k} + \frac{\cos \nu - 1}{k^2 E J} M_a + \frac{\sin \nu - \nu}{k^3 E J} R_a = 0; \\ \cos \nu - \frac{\sin \nu}{k E J} M_a + \frac{\cos \nu - 1}{k^2 E J} R_a = 0, \end{cases}$$

где  $\nu = l\sqrt{N/EJ} = lk$  – безразмерный параметр продольной нагрузки [1, 3].

$$\text{Отсюда } M_a = \frac{k E J (\nu \cos \nu - \sin \nu)}{2 \cos \nu + \nu \sin \nu - 2}, \quad R_a = -\frac{k^2 E J (\cos \nu - 1)}{2 \cos \nu + \nu \sin \nu - 2}.$$

Подставляя полученные выражения для  $M_a$  и  $R_a$  в формулу (1.11) и учитывая, что  $\nu'_a = 1$ , запишем

$$M_{\delta} = \frac{k E J (\nu - \sin \nu)}{2 \cos \nu + \nu \sin \nu - 2}.$$

Вводя обозначение для погонной жесткости стержня  $i = (EJ)/l$ , представим полученные выражения для реакций  $M_a$ ,  $M_{\delta}$  и  $R_a$  в компактном общепринятом виде [1, 3]:

$$M_a = 4i\varphi_2(\nu); \quad M_{\delta} = 2i\varphi_3(\nu); \quad R_a = R_{\delta} = \frac{6i}{l}\varphi_4(\nu),$$

где специальные функции

$$\varphi_2(\nu) = \frac{\nu(\nu \cos \nu - \sin \nu)}{4(2 \cos \nu + \nu \sin \nu - 2)}; \quad \varphi_3(\nu) = \frac{\nu(\sin \nu - \nu)}{2(2 \cos \nu + \nu \sin \nu - 2)};$$

$$\varphi_4(\nu) = \frac{1}{3}[2\varphi_2(\nu) + \varphi_3(\nu)].$$

Граничные условия для стержня с комбинированным закреплением концов (рис. 1.8, б) имеют вид:

$$\text{при } x=0 \rightarrow \begin{cases} \nu_a = 0; \\ \nu'_a = 0, \end{cases} \quad \text{при } x=l \rightarrow \begin{cases} \nu_{\delta} = 1; \\ M_{\delta} = 0. \end{cases}$$

Подставляя значение  $x=l$  в выражения (1.9) и (1.11) запишем систему уравнений для определения  $M_a$  и  $R_a$ :

$$\begin{cases} \frac{\cos \nu - 1}{k^2 E J} M_a + \frac{\sin \nu - \nu}{k^3 E J} R_a = 1; \\ \cos \nu M_a + \frac{\sin \nu}{k} R_a = 0. \end{cases}$$

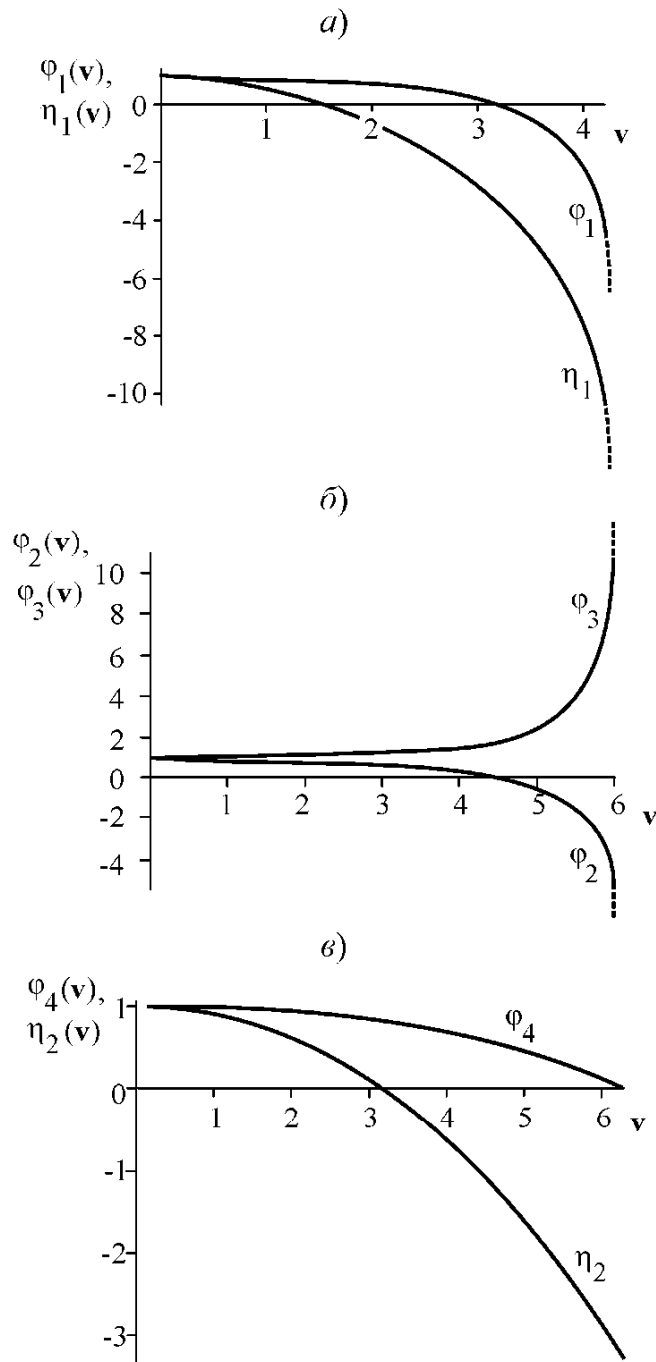


Рис. 1.9

Отсюда  $M_a = \frac{k^2 EJ \sin v}{v \cos v - \sin v}$ ,  $R_a = -\frac{k^3 EJ \cos v}{v \cos v - \sin v}$  или в компактной форме  $M_a = \frac{3i}{l} \varphi_1(v)$ ,  $R_a = R_b = \frac{3i}{l^2} \eta_1(v)$ , где специальные

функции  $\varphi_1(\nu) = \frac{\nu^2 \sin \nu}{3(\sin \nu - \nu \cos \nu)}$ ;  $\eta_1(\nu) = \varphi_1(\nu) - \nu^2/3$ .

В приложении 1 приведены значения упругих реакций  $M_a, R_a, M_b, R_b$  и эпюры изгибающих моментов для сжато-изогнутого стержня при различных единичных смещениях и схемах закрепления концов. Эти данные предназначены для практических расчетов стержневых систем на устойчивость. Графики специальных функций  $\varphi_1(\nu), \varphi_2(\nu), \varphi_3(\nu), \varphi_4(\nu), \eta_1(\nu), \eta_2(\nu) = \varphi_4(\nu) - \nu^2/12$ , входящих в выражения для реакций  $M_a, R_a, M_b, R_b$ , показаны на рис. 1.9. В общем случае параметр продольной нагрузки  $\nu$  изменяется в диапазоне от 0 до  $2\pi$ .

Следует отметить, что специальные функции  $\varphi_1(\nu), \varphi_2(\nu), \varphi_3(\nu)$  имеют сингулярность (особенность в виде деления на ноль) в точках  $\nu = 0, \pi, 2\pi$ . Поэтому при вычислениях обычно принимают значения функций  $\varphi_1(0), \varphi_2(0), \varphi_3(0), \varphi_4(0), \eta_1(0), \eta_2(0)$  равными единице. При этом упругие единичные реакции  $M_a, R_a, M_b, R_b$  автоматически преобразуются к форме, используемой при обычном прочностном расчете по методу перемещений (приложение 2).

В расчетной практике иногда встречаются сжато-растянутые стержневые схемы. В этом случае необходимо иметь выражения упругих реакций при единичных смещениях и углах поворота для растянуто-изогнутых стержней. На основании зависимостей (1.12), (1.13), (1.13) получим выражения упругих реакций  $M_a, R_a, M_b, R_b$  для растянуто-изогнутого стержня с жестко защемленными концами при единичном повороте ( $\nu'_a = 1$ ) и единичном смещении ( $\nu_a = 1$ ) левой опоры стержня (рис. 1.10).

В случае единичного поворота (рис. 1.10, а) граничные условия представим в форме:

$$\text{при } x = 0 \rightarrow \begin{cases} \nu_a = 0; \\ \nu'_a = 1, \end{cases} \quad \text{при } x = l \rightarrow \begin{cases} \nu_b = 0; \\ \nu'_b = 0. \end{cases}$$

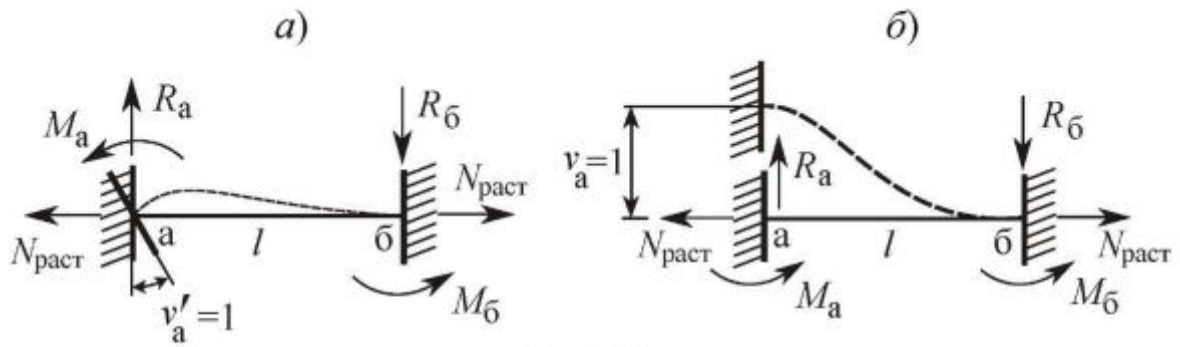


Рис. 1.10

Используя граничные условия при  $x = l$  и выражения (1.12) и (1.13), составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{sh \nu}{\beta} + \frac{1 - ch \nu}{\beta^2 E J} M_a + \frac{\nu - sh \nu}{\beta^3 E J} R_a = 0; \\ ch \nu - \frac{sh \nu}{\beta E J} M_a + \frac{1 - ch \nu}{\beta^2 E J} R_a = 0, \end{cases}$$

где безразмерный параметр продольной нагрузки  $\nu = l\beta$ , аналогичный ранее введенному параметру  $\nu = lk$ .

Отсюда получим в символьном виде формулы для упругих реакций в левой опоре стержня:

$$M_a = \frac{\beta E J (-e^{2\nu} + \nu e^{2\nu} + 1 + \nu)}{(e^\nu - 1)(\nu e^\nu - 2e^\nu + 2 + \nu)}; \quad R_a = -\frac{\beta^2 E J (e^\nu - 1)}{\nu e^\nu - 2e^\nu + 2 + \nu}.$$

Подставив полученные выражения  $M_a$  и  $R_a$  в уравнение (1.14), запишем

$$M_b = \frac{\beta E J e^\nu (e^{-\nu} + 2\nu - e^\nu)}{(e^\nu - 1)(\nu e^\nu - 2e^\nu + 2 + \nu)}.$$

Приведенные выражения для  $M_a$ ,  $M_b$ ,  $R_a$  можно представить в общепринятом компактном виде:

$$M_a = 4i\bar{\varphi}_2(\nu); \quad M_b = 2i\bar{\varphi}_3(\nu) \quad R_a = R_b = \frac{6i}{l}\bar{\varphi}_4(\nu).$$

В выражениях для  $M_a$ ,  $M_b$ ,  $R_a$ ,  $R_b$  введены следующие специальные функции:

$$\bar{\varphi}_2(\nu) = \frac{\nu(-e^{2\nu} + \nu e^{2\nu} + 1 + \nu)}{4(e^\nu - 1)(\nu e^\nu - 2e^\nu + 2 + \nu)};$$

$$\bar{\varphi}_3(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v}(e^{-\mathbf{v}} + 2\mathbf{v} - e^{\mathbf{v}})}{2(e^{\mathbf{v}} - 1)(\mathbf{v}e^{\mathbf{v}} - 2e^{\mathbf{v}} + 2 + \mathbf{v})};$$

$$\bar{\varphi}_4(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v}^2(e^{\mathbf{v}} - 1)}{6(\mathbf{v}e^{\mathbf{v}} - 2e^{\mathbf{v}} + 2 + \mathbf{v})}.$$

Для единичного смещения (рис. 1.10, б) граничные условия запишем в виде:

$$\text{при } x=0 \rightarrow \begin{cases} v_a = 1; \\ v'_a = 0, \end{cases} \quad \text{при } x=l \rightarrow \begin{cases} v_b = 0; \\ v'_b = 0. \end{cases}$$

На основании граничных условий на правом конце стержня ( $x=l$ ) и зависимостей (1.12) и (1.13), составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 1 + \frac{1 - ch\mathbf{v}}{\beta^2 EJ} M_a + \frac{\mathbf{v} - sh\mathbf{v}}{\beta^3 EJ} R_a = 0; \\ -\frac{sh\mathbf{v}}{\beta EJ} M_a + \frac{1 - ch\mathbf{v}}{\beta^2 EJ} R_a = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим:

$$M_a = \frac{\beta^2 EJ(e^{\mathbf{v}} - 1)}{\mathbf{v}e^{\mathbf{v}} - 2e^{\mathbf{v}} + 2 + \mathbf{v}}; \quad R_a = -\frac{\beta^3 EJ(e^{\mathbf{v}} + 1)}{\mathbf{v}e^{\mathbf{v}} - 2e^{\mathbf{v}} + 2 + \mathbf{v}}.$$

Или в компактном виде:

$$M_a = M_b = \frac{6i}{l} \bar{\varphi}_4(\mathbf{v}); \quad R_a = R_b = \frac{12i}{l^2} \bar{\eta}_2(\mathbf{v}),$$

где специальная функция  $\bar{\eta}_2(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v}^3(e^{\mathbf{v}} + 1)}{12(\mathbf{v}e^{\mathbf{v}} - 2e^{\mathbf{v}} + 2 + \mathbf{v})}$ .

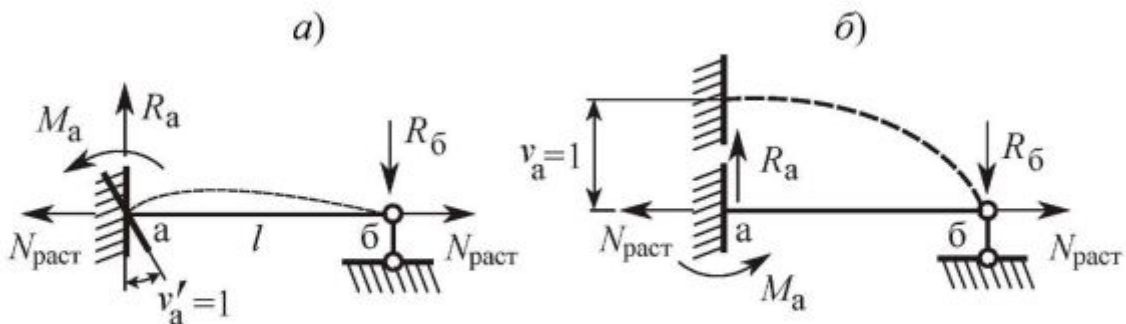


Рис.1.11

Аналогично для стержня с комбинированной схемой закрепле-

ния (рис. 1.11) выражения упругих реакций имеют следующий вид.

При единичном угле поворота  $v'_a = 1$ :

$$M_a = 3i\bar{\varphi}_1(v); \quad R_a = R_b = \frac{3i}{l}\bar{\varphi}_1(v).$$

При единичном смещении  $v_a = 1$ :

$$M_a = \frac{3i}{l}\bar{\varphi}_1(v); \quad R_a = R_b = \frac{3i}{l^2}\bar{\eta}_1(v).$$

Здесь введены обозначения:

$$\bar{\varphi}_1(v) = \frac{v^2(e^{2v} - 1)}{3(v e^{2v} - e^{-2v} + 1 + v)}; \quad \bar{\eta}_1(v) = \frac{v^3(e^{2v} + 1)}{3(v e^{2v} - e^{-2v} + 1 + v)}.$$

На рис. 1.12 представлены графики функций  $\bar{\varphi}_1(v)$ ,  $\bar{\varphi}_2(v)$ ,  $\bar{\varphi}_3(v)$ ,  $\bar{\varphi}_4(v)$ ,  $\bar{\eta}_1(v)$ ,  $\bar{\eta}_2(v)$ .

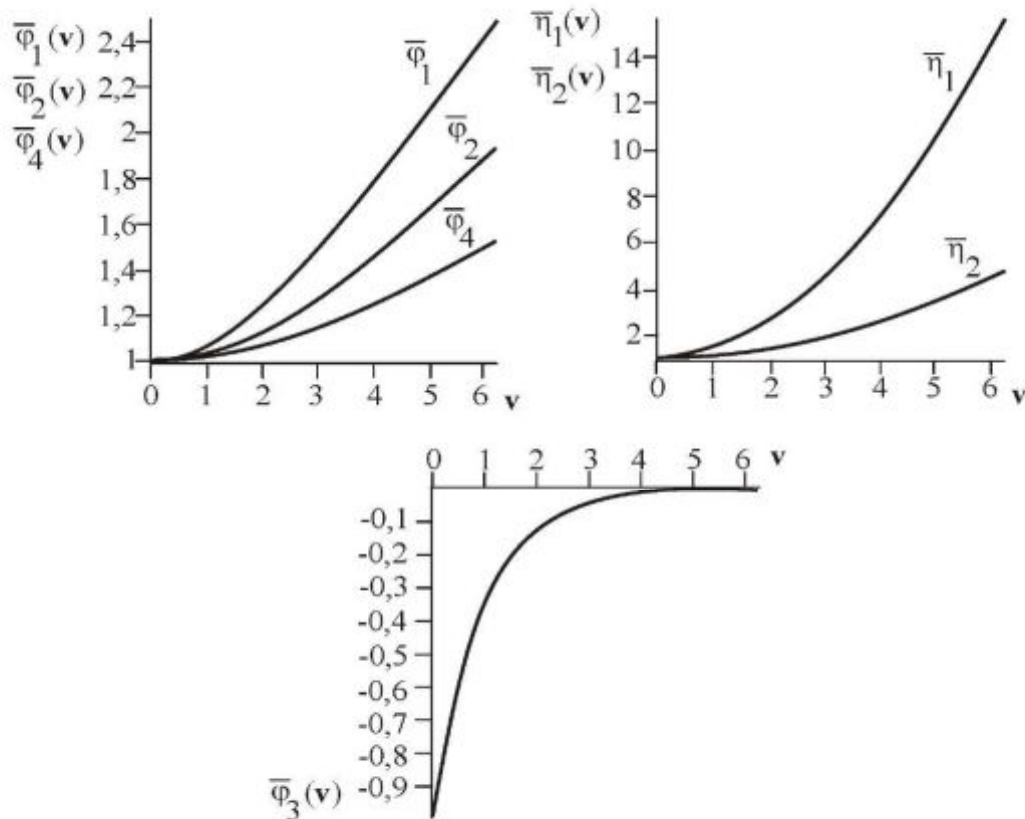


Рис. 1.12

На представленных графиках параметр  $v$  изменяется в диапазоне  $[0, 2\pi]$ . В точке 0 функции  $\bar{\varphi}_1(v)$ ,  $\bar{\varphi}_2(v)$ ,  $\bar{\varphi}_3(v)$ ,  $\bar{\varphi}_4(v)$ ,  $\bar{\eta}_1(v)$ ,  $\bar{\eta}_2(v)$  принимают значение 1. Отметим, что эпюры изгибающих мо-

ментов для растянуто- и сжато- изогнутых стержней качественно совпадают (см. приложение 1).

### 1.5. Расчет плоских стержневых систем на устойчивость методом перемещений

Общий порядок определения критической нагрузки для плоских рам включает следующие шаги [4].

**Шаг 1.** Расчет по недеформированной схеме. Построение эпюр изгибающих моментов  $M_0$ , поперечных  $Q_0$  и продольных  $N_0$  сил. Уточнение, заданных априори, параметров поперечных сечений стержней.

**Шаг 2.** Формирование матриц упругих реакций для ожидаемых форм потери устойчивости с использованием функций  $\varphi_1(\mathbf{v})$ ,  $\varphi_2(\mathbf{v})$ , ...,  $\eta_2(\mathbf{v})$ , зависящих от продольных сил, полученных на шаге 1. Решение соответствующих уравнений устойчивости.

**Шаг 3.** Расчет по деформированной схеме. Формирование канонической системы метода перемещений с учетом уточненных параметров поперечных сечений и фактических значений параметров  $\mathbf{v}_{ij}$  ( $i, j$  – номера узлов стержней). Решение результирующей системы уравнений и построение эпюр изгибающих моментов  $M(\mathbf{v})$ , поперечных  $Q(\mathbf{v})$  и продольных  $N(\mathbf{v})$  сил.

**Шаг 4.** Сравнительный анализ эпюр  $M_0$  (шаг 1) и  $M(\mathbf{v})$  (шаг 3). Проверка на прочность сжато-изогнутых стержней, в которых имеет место увеличение изгибающего момента более 5%. Повторный расчет выполняется по формуле

$$\frac{|N(\mathbf{v})|_{max}}{F} + \frac{|M(\mathbf{v})|_{max}}{W} < R_y \gamma_c,$$

где  $F, W$  – площадь и момент сопротивления сечения стержня;  $R_y$  – расчетное сопротивление стали;  $\gamma_c$  – коэффициент условий работы.

Для более точного анализа перераспределения внутренних усилий в раме, обусловленного учетом продольной нагрузки, всегда можно повторить расчет, начиная с шага 2, используя новые значения  $\mathbf{v}_{ij}$ , вычисленные по эпюре  $N(\mathbf{v})$  (шаг 3). Для сходимости такого



процесса достаточно двух, трех последовательных приближений.

Более детально рассмотрим данную последовательность на примере расчета плоской трехэтажной рамы, показанной на рис. 1.13, а. Стойки и ригели рамы выполнены из стального двутавра. Считаем, что имеет место центральное приложение продольных усилий в стержнях. Назначаем:  $P_1=400\text{кН}$ ;  $P_2=P_3=300\text{кН}$ ;  $q_1=30\text{кН/м}$ ;  $q_2=q_3=20\text{кН/м}$  (рис. 1.13, а).

В соответствии с *шагом 1* выполняем линейный расчет рамы методом перемещений. Для определения числа неизвестных представим раму в деформированном состоянии (рис. 1.13, б). При этом учитываем симметрию геометрии и нагрузки. Основная система метода перемещений будет иметь вид, приведенный на рис. 1.13, в. Здесь неизвестными являются  $Z_1, Z_2, Z_3, Z'_1, Z'_2, Z'_3$  – углы поворотов узлов 2, 3, 4, 2', 3', 4'. Причем в силу симметрии деформации имеем  $Z_1 = Z'_1, Z_2 = Z'_2, Z_3 = Z'_3$ .

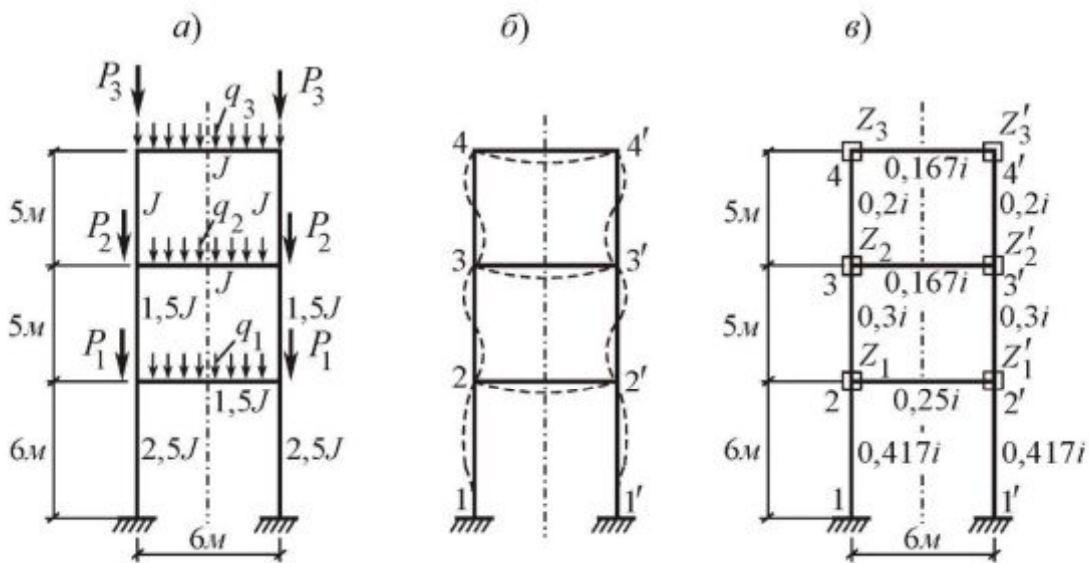


Рис. 1.13

Составляем систему канонических уравнений метода перемещений:

$$\begin{cases} r_{11} Z_1 + r_{12} Z_2 + r_{13} Z_3 + r_{1p} = 0; \\ r_{21} Z_1 + r_{22} Z_2 + r_{23} Z_3 + r_{2p} = 0; \\ r_{31} Z_1 + r_{32} Z_2 + r_{33} Z_3 + r_{3p} = 0. \end{cases}$$

Здесь  $r_{ij}, i, j=1,2,3$  – упругая реакция в связи  $i$  от единичного



смещения связи  $j$  ( $r_{ij} = r_{ji}$ ,  $i \neq j$ ). Величины  $r_{ij}$  определяем из условия равновесия узлов и считаем положительными, если они совпадают с принятыми в данном расчете направлениями перемещений  $Z_j$ ;  $r_{1p}$ ,  $r_{2p}$ ,  $r_{3p}$  – грузовые члены, обусловленные действием нагрузки. На рис. 1.14 приведены единичные  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  и грузовая  $m_p$  эпюры, а также схемы для определения упругих реакций  $r_{11}$ ,  $r_{12}$ ,  $r_{22}$ ,  $r_{32}$ ,  $r_{33}$  и грузовых членов  $r_{1p}$ ,  $r_{2p}$ ,  $r_{3p}$  в узлах 2, 3, 4.

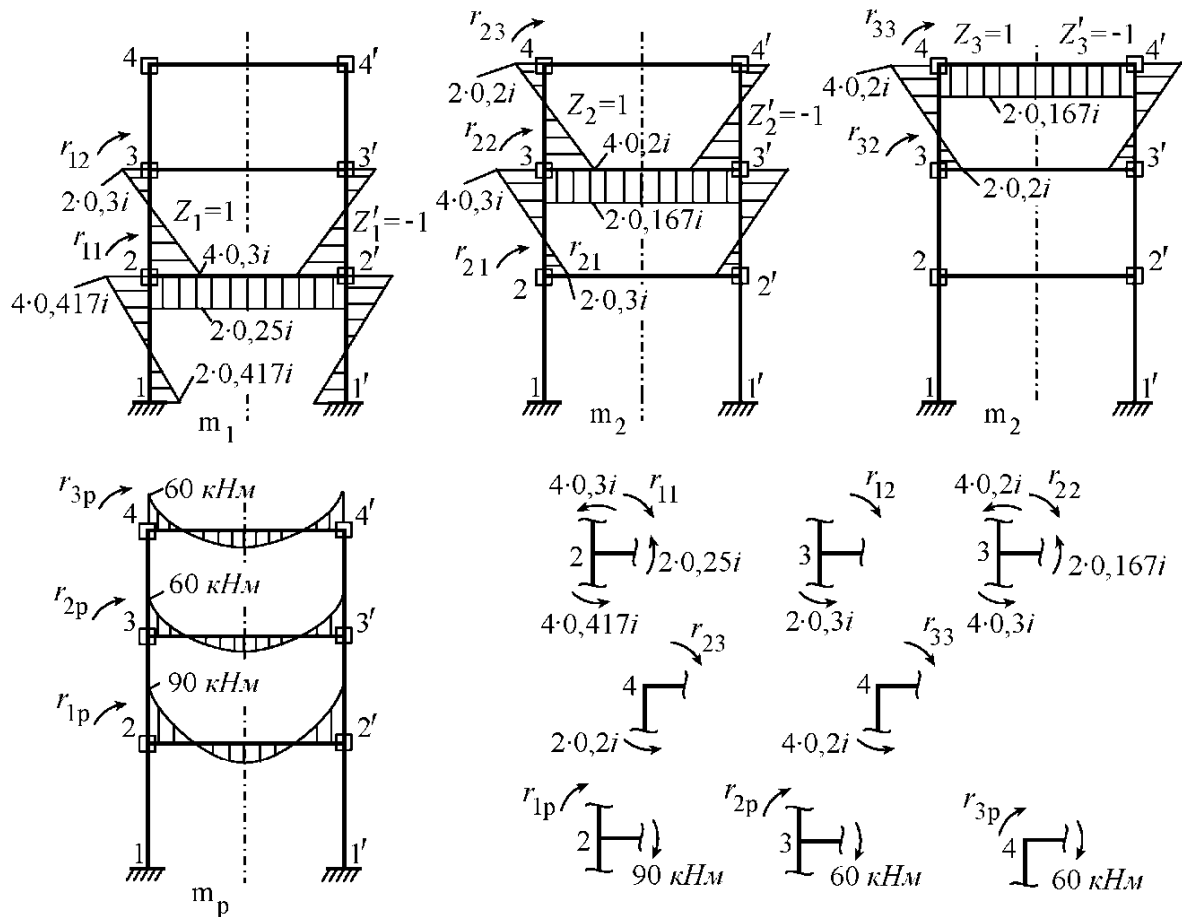


Рис. 1.14

После подстановки величин  $r_{ij}$  и  $r_{ip}$  в исходную систему уравнений получим:

$$\begin{cases} 3,368i \cdot Z_1 & + 0,6i \cdot Z_2 & & = 9 \cdot 10^4; \\ 0,6i \cdot Z_1 & + 2,334i \cdot Z_2 & + 0,4i \cdot Z_3 & = 6 \cdot 10^4; \\ & 0,4i \cdot Z_2 & + 1,134i \cdot Z_3 & = 6 \cdot 10^4. \end{cases}$$

$$\text{Отсюда находим: } Z_1 = \frac{24775}{i}; \quad Z_2 = \frac{10931}{i}; \quad Z_3 = \frac{49054}{i}.$$

Результаты расчета рамы по недеформированной схеме (*шаг I*) в виде эпюр изгибающих моментов  $M_0$ , поперечной  $Q_0$  и продольной  $N_0$  сил приведены на рис. 1.15.

Далее по условиям прочности уточняем параметры поперечных сечений стержней рамы. В соответствии со СНиП 11-23-81 [10] расчет на прочность стержней, изгибаемых в одной из главных плоскостей, выполняем по формуле

$$\frac{M_{max}}{W_x} \leq R_y \gamma_c,$$

где  $M_{max}$  – максимальное значение изгибающего момента в стержне, Н·м;  $W_x$  – момент сопротивления сечения, м<sup>3</sup>;  $R_y$  – расчетное сопротивление стали растяжению, сжатию и изгибу по пределу текучести, Н/м<sup>2</sup>;  $\gamma_c$  – коэффициент условий работы.

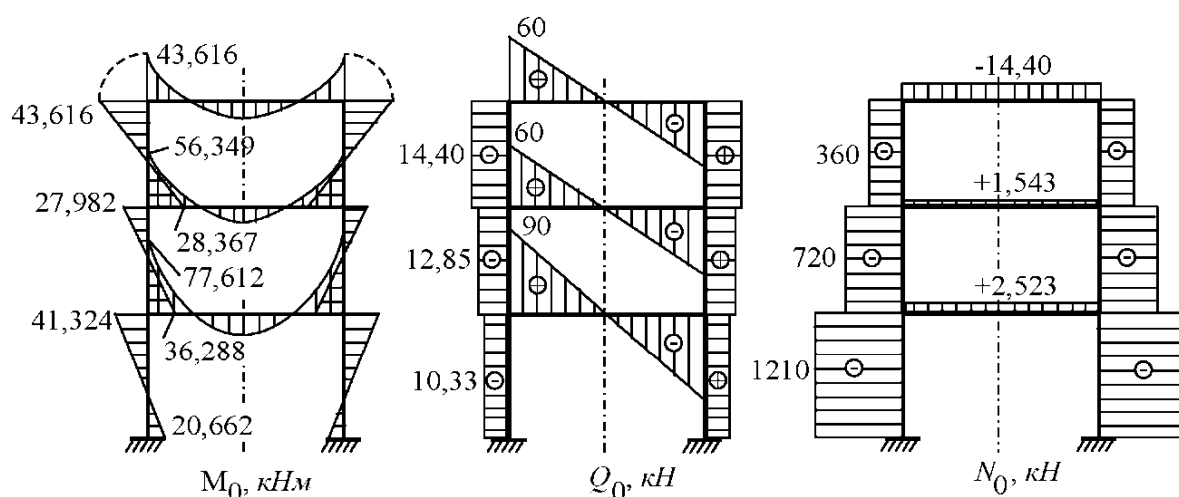


Рис. 1.15

Расчет на устойчивость стержней, подверженных центральному сжатию силой  $N$ , выполняем по формуле

$$\frac{N}{\varphi A} \leq R_y \gamma_c,$$

где  $A$  – площадь поперечного сечения, м<sup>2</sup>;  $\varphi$  – коэффициент продольного изгиба, зависящий от гибкости стержня  $\lambda$  и величины  $R_y$ . Значения  $\varphi = f(\lambda, R_y)$  приведены в [10].

Выполнив соответствующие вычисления, получим новые значения погонных жесткостей стержней рамы:

стойки –  $i_{12} = 1,22i$ ,  $i_{23} = 0,3i$ ,  $i_{34} = 0,2i$ ;

ригели –  $i_{22'} = 0,45i$ ,  $i_{33'} = 0,25i$ ,  $i_{44'} = 0,167i$ ,

где нижние индексы соответствуют номерам узлов рамы (рис. 1.13, б).

Для реализации вычислений на *шаге 2* рассмотрим две возможные формы потери устойчивости рамы, показанные штриховой линией на рис. 1.16. Как видно, форме *I* отвечает кососимметричная деформация рамы, а форме *II* – симметричная. Очевидно, что жесткость рамы, соответствующая деформации по форме *I*, меньше жесткости, соответствующей деформации по форме *II*. Основные системы метода перемещений для форм *I* и *II* представлены на рис. 1.17. Вычислим значения параметра критической нагрузки  $\nu$  для обеих форм потери устойчивости.

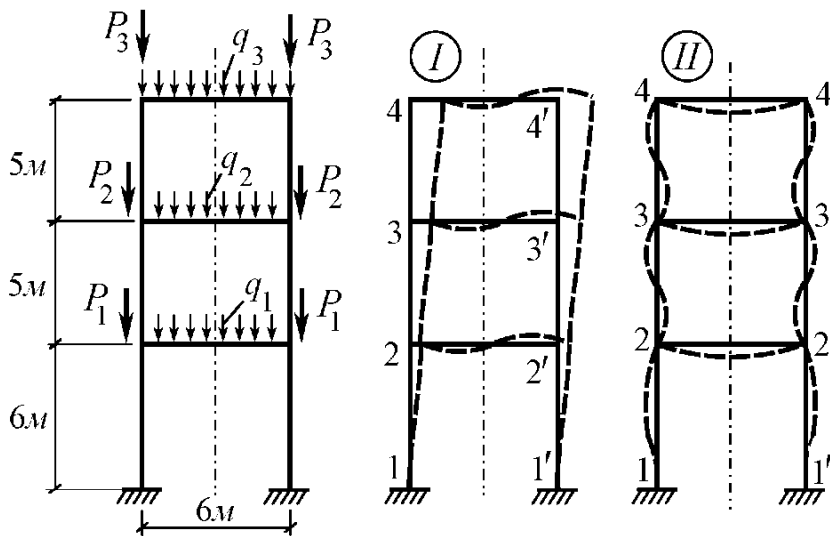


Рис. 1.16

Система канонических уравнений метода перемещений для формы *I* имеет следующую структуру:

$$\begin{cases} Z_1 r_{11} + Z_2 r_{12} & + Z_4 r_{14} + Z_5 r_{15} & = 0; \\ Z_1 r_{21} + Z_2 r_{22} + Z_3 r_{23} + Z_4 r_{24} + Z_5 r_{25} + Z_6 r_{26} & = 0; \\ & Z_2 r_{32} + Z_3 r_{33} & + Z_5 r_{35} + Z_6 r_{36} = 0; \\ Z_1 r_{41} + Z_2 r_{42} & + Z_4 r_{44} + Z_5 r_{45} & = 0; \\ Z_1 r_{51} + Z_2 r_{52} + Z_3 r_{53} + Z_4 r_{54} + Z_5 r_{55} + Z_6 r_{56} & = 0; \\ & Z_2 r_{62} + Z_3 r_{63} & + Z_5 r_{65} + Z_6 r_{66} = 0. \end{cases}$$

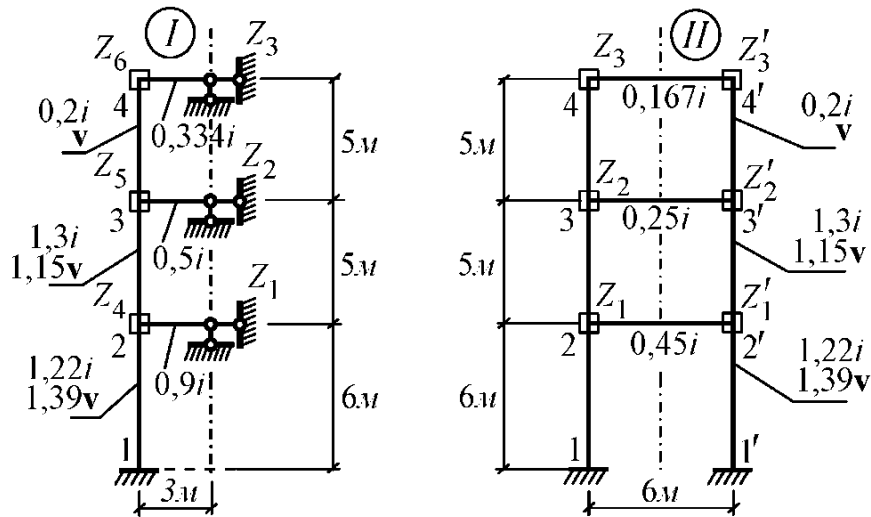


Рис. 1.17

Или в матричной форме

$$[R(\mathbf{v})]\{Z\}=0,$$

где  $[R(\mathbf{v})]$  – симметричная квадратная матрица, составленная из упругих реакций  $r_{ij}$ ,  $i, j=1, 2, \dots, 6$ ;  $\{Z\}$  – вектор-столбец узловых смещений.

Данная система имеет нетривиальное (ненулевое) решение  $\{Z\} \neq 0$ , если определитель  $\det [R(\mathbf{v})]$  равен нулю. Символьная запись  $\det [R(\mathbf{v})]=0$  представляет собой уравнение устойчивости.

Для вычисления коэффициентов  $r_{ij}$ ,  $i, j=1, 2, \dots, 6$  используем эпюры изгибающих моментов и значения реакций от единичных смещений введенных связей (рис. 1.18). Построение единичных эпюр для сжатых стоек выполняем с использованием таблицы приложения 1, а для ригелей – с помощью таблиц метода перемещений (приложение 2).

Выражения для коэффициентов  $r_{ij}$  имеют вид:

$$r_{11} = \frac{12 \cdot 1,22i}{6^2} \eta_2(1,39\mathbf{v}) + \frac{12 \cdot 0,3i}{5^2} \eta_2(1,15\mathbf{v});$$

$$r_{12} = -\frac{12 \cdot 0,3i}{5^2} \eta_2(1,15\mathbf{v});$$

$$r_{14} = \frac{6 \cdot 0,3i}{5} \varphi_4(1,15\mathbf{v}) - \frac{6 \cdot 1,22i}{6} \varphi_4(1,39\mathbf{v}); \quad r_{15} = \frac{6 \cdot 0,3i}{5} \varphi_4(1,15\mathbf{v});$$

$$r_{22} = \frac{12 \cdot 0,3i}{5^2} \eta_2(1,15\mathbf{v}) + \frac{12 \cdot 0,2i}{5^2} \eta_2(\mathbf{v});$$

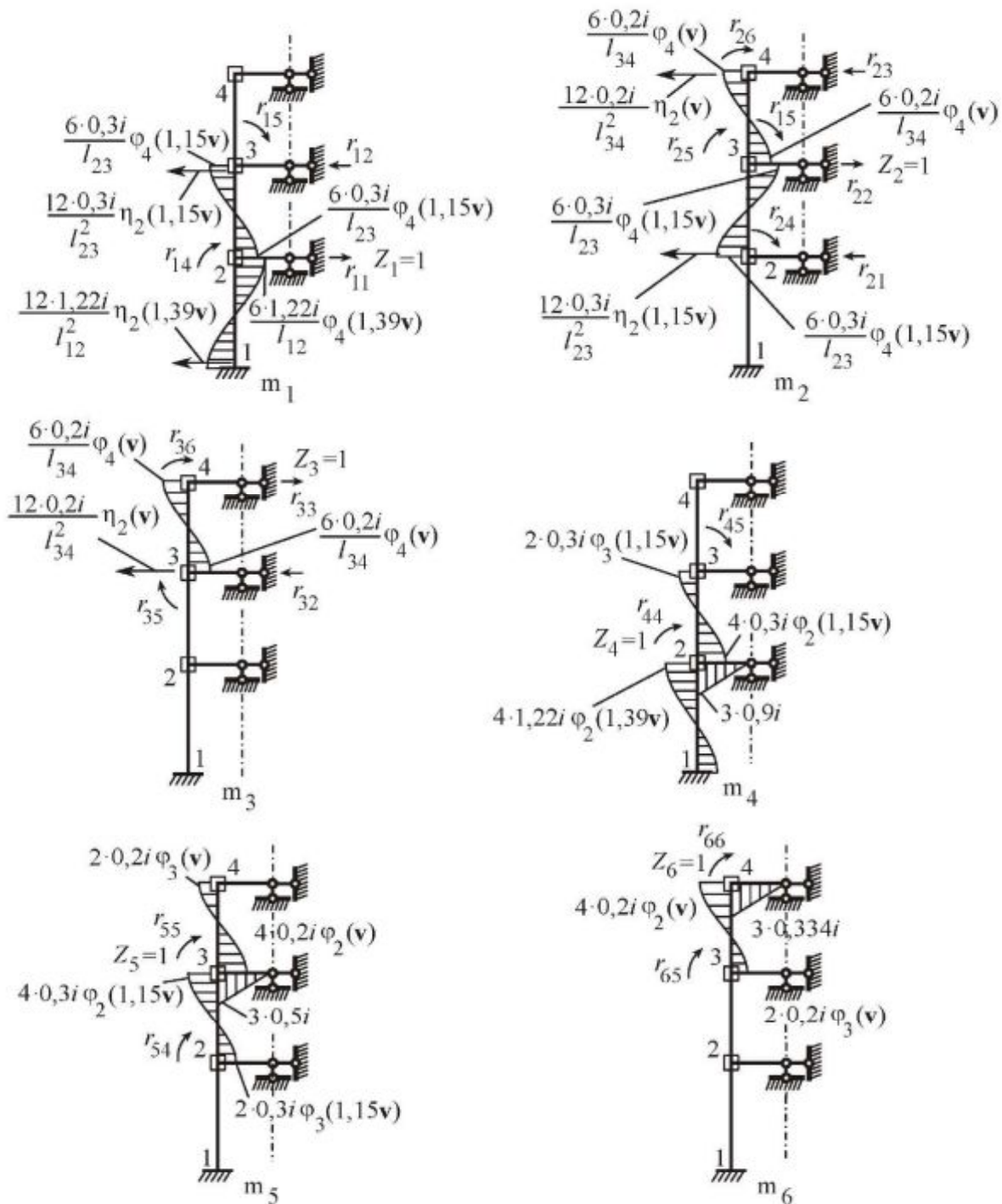


Рис. 1.18

$$r_{24} = \frac{6 \cdot 0,3i}{5} \varphi_4(1,15v);$$

$$r_{25} = \frac{6 \cdot 0,2i}{5} \varphi_4(v) - \frac{6 \cdot 0,3i}{5} \varphi_4(1,15v); \quad r_{26} = \frac{6 \cdot 0,2i}{5} \varphi_4(v);$$

$$r_{33} = \frac{12 \cdot 0,2i}{5^2} \eta_2(v); \quad r_{32} = -\frac{12 \cdot 0,2i}{5^2} \eta_2(v) \quad r_{35} = -\frac{6 \cdot 0,2i}{5} \varphi_4(v);$$

$$r_{36} = -\frac{6 \cdot 0,2i}{5} \varphi_4(\mathbf{v});$$

$$r_{44} = 4 \cdot 1,22i \varphi_2(1,39\mathbf{v}) + 4 \cdot 0,3i \varphi_2(1,15\mathbf{v}) + 3 \cdot 0,9i;$$

$$r_{45} = 2 \cdot 0,3i \varphi_3(1,15\mathbf{v});$$

$$r_{55} = 4 \cdot 0,3i \varphi_2(1,15\mathbf{v}) + 4 \cdot 0,2i \varphi_2(\mathbf{v}) + 3 \cdot 0,5i, \quad r_{56} = 2 \cdot 0,2i \varphi_3(\mathbf{v});$$

$$r_{66} = 4 \cdot 0,2i \varphi_2(\mathbf{v}) + 3 \cdot 0,334i.$$

Определив первый (наименьший) корень  $\mathbf{v}_1$  уравнения  $\det [R(\mathbf{v})]=0$ , можно найти значения критической нагрузки  $P_{кр}$  для сжато-изогнутых элементов рамы. Значение  $\mathbf{v}_1$  вычисляем с помощью компьютерной математики системы Maple. Для визуализации уравнения  $\det [R(\mathbf{v})]=0$  используем графическую функцию, позволяющую оценить интервал, которому принадлежит искомый корень  $\mathbf{v}_1$  (рис. 1.19). Последующее численное уточнение на интервале  $[1,8; 2,0]$  дает величину  $\mathbf{v}_1 = 1,847$ .

С целью проверки решения уравнения устойчивости вычислим с точностью до множителя горизонтальные смещения ригелей рамы  $Z_1, Z_2, Z_3$ . Для этого решим систему уравнений

$$[R_y(\mathbf{v}_1)]\{Z\} = \{b\},$$

где  $[R_y(\mathbf{v}_1)]$  – усеченная матрица упругих реакций, составленная из коэффициентов  $r_{ij}$  при  $\mathbf{v}_1 = 1,847$ ;  $\{b\}$  – вектор-столбец, образованный из элементов первого столбца матрицы  $[R(\mathbf{v}_1)]$ ;  $\{Z\}$  – вектор-столбец узловых смещений, соответствующих рассматриваемой форме потери устойчивости (форма  $\Lambda$ ). Матрицу  $[R_y(\mathbf{v}_1)]$  получаем из матрицы  $[R(\mathbf{v}_1)]$  путем назначения  $r_{11} = 1$  и  $r_{1j} = 0, r_{i1} = 0, i, j = 2, 3, \dots, 6$ . В итоге получим систему уравнений

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1418 & -0,06311 & 0,3320 & -0,1060 & 0,2260 \\ 0 & -0,06311 & 0,06311 & 0 & -0,2260 & -0,2260 \\ 0 & 0,3320 & 0 & 7,408 & 0,5039 & 0 \\ 0 & -0,1060 & -0,2260 & 0,5039 & 3,212 & 0,3523 \\ 0 & 0,2260 & -0,2260 & 0 & 0,3523 & 1,707 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \\ Z_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,07866 \\ 0 \\ -0,7471 \\ 0,3320 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

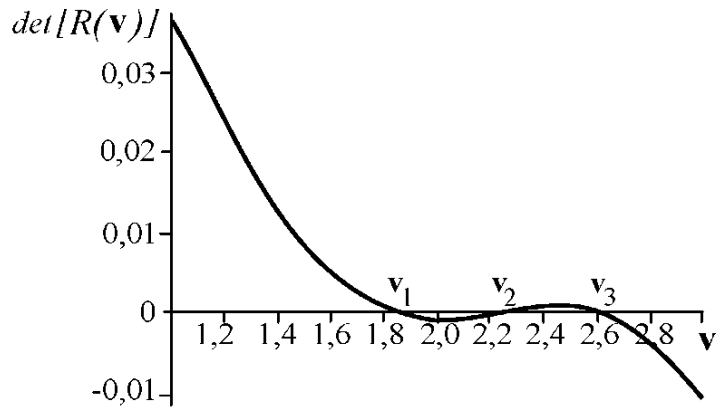


Рис. 1.19

После решения находим

$$\{Z\} = \{1 \quad 3,745 \quad 8,076 \quad -0,3232 \quad 0,8011 \quad 0,4081\}^T.$$

Отсюда устанавливаем, что элементы  $Z_1, Z_2, Z_3$  имеют одинаковый знак и расположены в порядке возрастания. Это качественно соответствует физической картине кососимметричной формы деформации рамы (рис. 1.16).

Выполнив аналогичные вычисления для симметричной формы II (рис. 1.16, 1.17), получим значение параметра продольной нагрузки, равное  $v_1 = 3,450$ . Как видно, данная величина почти в два раза превышает значение  $v_1 = 1,847$ , соответствующее форме I. Поэтому дальнейший расчет выполняем по наименьшему значению параметра  $v_1 = 1,847$ .

Определяем значения критической нагрузки для сжато-изогнутых стоек рассматриваемой рамы:

$$P_{кр 12} = (1,39 v_1)^2 \cdot 1,22i = 8,041i;$$

$$P_{кр 23} = (1,15 v_1)^2 \cdot 0,3i = 1,353i;$$

$$P_{кр 34} = (v_1)^2 \cdot 0,2i = 0,6823i.$$

На *шаге 3* выполняем расчет рамы (рис. 1.13) по деформированной схеме [1, 4], т. е. с учетом влияния продольной нагрузки на жесткость сжатых стоек. Каноническую систему уравнений метода перемещений записываем в форме:

$$\begin{cases} r_{11}(\mathbf{v})Z_1 + r_{12}(\mathbf{v})Z_2 + r_{1p} = 0; \\ r_{21}(\mathbf{v})Z_1 + r_{22}(\mathbf{v})Z_2 + r_{23}(\mathbf{v})Z_3 + r_{2p} = 0; \\ r_{32}(\mathbf{v})Z_2 + r_{33}(\mathbf{v})Z_3 + r_{3p} = 0. \end{cases}$$

Здесь коэффициенты  $r_{ij}$ ,  $i, j=1,2,3$  вычисляем по формулам:

$$r_{11}(\mathbf{v}) = 4 \cdot 1,22i \cdot \varphi_2(1,39\mathbf{v}) + 4 \cdot 0,3i \cdot \varphi_2(1,15\mathbf{v}) + 2 \cdot 0,45i;$$

$$r_{12}(\mathbf{v}) = 2 \cdot 0,3i \cdot \varphi_2(1,15\mathbf{v});$$

$$r_{22}(\mathbf{v}) = 4 \cdot 0,3i \cdot \varphi_2(1,15\mathbf{v}) + 4 \cdot 0,2i \cdot \varphi_2(\mathbf{v}) + 2 \cdot 0,25i;$$

$$r_{23}(\mathbf{v}) = 2 \cdot 0,2i \cdot \varphi_2(\mathbf{v});$$

$$r_{33}(\mathbf{v}) = 4 \cdot 0,2i \cdot \varphi_2(\mathbf{v}) + 2 \cdot 0,167i.$$

Грузовые члены:  $r_{1p} = 9 \cdot 10^4 \text{ Н}$ ;  $r_{2p} = 6 \cdot 10^4 \text{ Н}$ ;  $r_{3p} = 6 \cdot 10^4 \text{ Н}$ .

Решая систему при  $\mathbf{v}_1 = 1,847$ , получим:

$$Z_1 = \frac{14665}{i}; \quad Z_2 = \frac{15413}{i}; \quad Z_3 = \frac{52540}{i}.$$

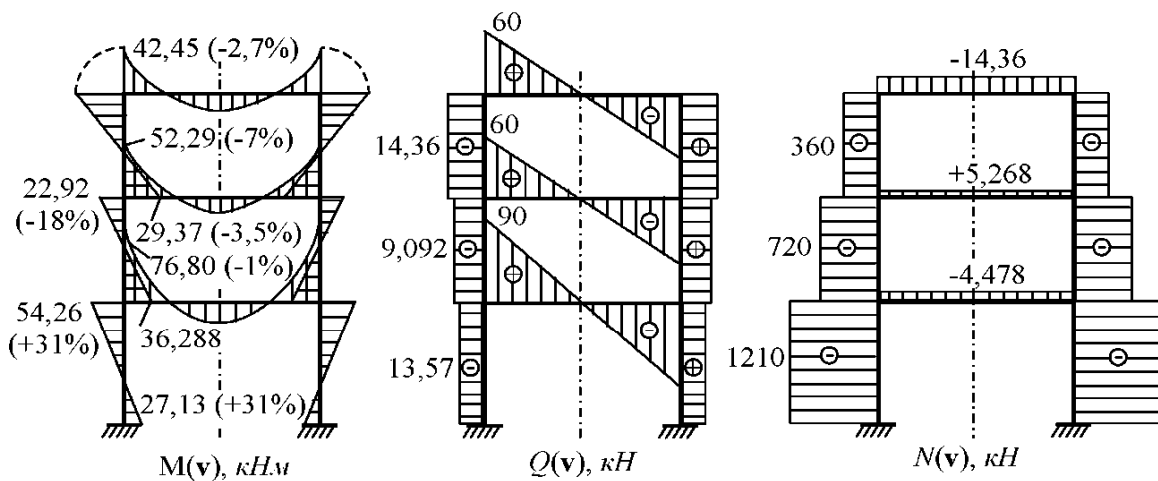


Рис. 1.20

Результаты расчета рамы по деформированной схеме в виде эпюр  $M(\mathbf{v})$ ,  $Q(\mathbf{v})$ ,  $N(\mathbf{v})$  представлены на рис. 1.20. В скобках на эпюре  $M(\mathbf{v})$  в процентах приведены результаты сравнения с данными, полученными на *шаге 1* (эпюра  $M_0$ ).

Как видно, наиболее существенное перераспределение изгибающего момента происходит в сжатых стойках рамы.

На *шаге 4* по формуле



$$\frac{|N|}{A} + \frac{|M|}{W} < R_y \gamma_c$$

выполняем проверку прочности стойки 12, в которой имеет место увеличение изгибающего момента на 31%. В результате вычислений назначаем погонную жесткость равной  $i_{12} = 1,73i$  (для сравнения ранее принималось  $i_{12} = 1,22i$ ). На этом расчет плоской трехэтажной рамы закончен.

Рассмотрим случай, когда величины продольных сил (параметры  $v_{ij}$ ) в стержнях рамы известны заранее. Такие расчетные схемы предлагаются студентам в качестве домашнего задания в приложении 3. В данной постановке алгоритм расчета плоской рамы на устойчивость упрощается. Соответствующий учебный пример приведен на рис. 1.21, а. Исходя из принятой расчетной схемы, представим картину возможного деформированного равновесного состояния рамы (штриховая линия). Далее строим основную систему метода перемещений. За неизвестные принимаем смещения узлов, в которых введены дополнительные связи  $Z_i, i=1,2,\dots,n$ , где  $n$  – степень кинематической неопределимости системы, равная сумме неизвестных линейных смещений  $n_{\text{л}}$  и углов поворота  $n_{\text{у}}$ . В рассматриваемом примере величина  $n = n_{\text{у}} + n_{\text{л}} = 1 + 1 = 2$  (рис. 1.21, б).

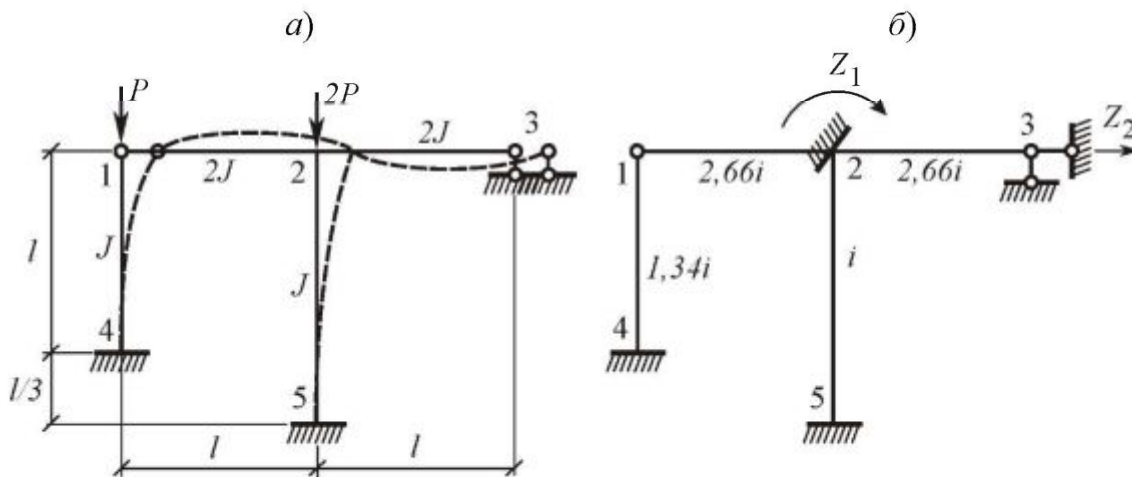


Рис. 1.21

Положив  $l = 6$  м, вычисляем безразмерные параметры продольной силы  $v = l\sqrt{P/(EJ)}$  для стоек рамы:

$$v_{14} = 6 \sqrt{\frac{P}{EJ}}; \quad v_{25} = 8 \sqrt{\frac{2P}{EJ}}; \quad \frac{v_{14}}{v_{25}} = \frac{6}{8\sqrt{2}} = 0,53; \quad v_{25} = v;$$

$$v_{14} = 0,53v.$$

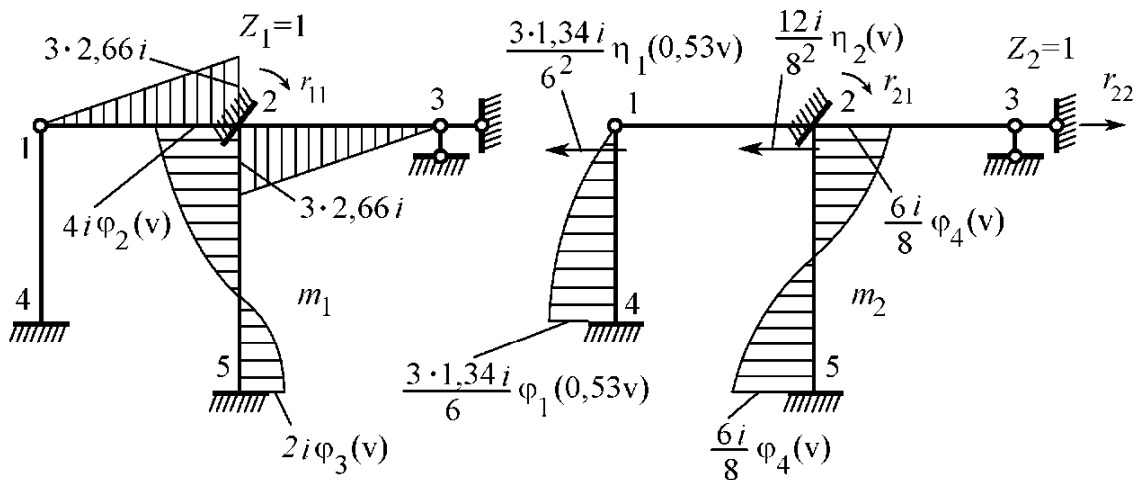


Рис. 1.22

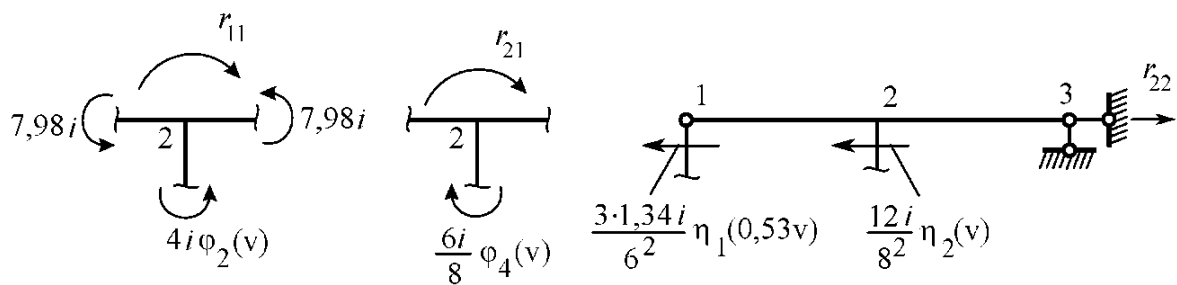


Рис. 1.23

Здесь, как и ранее, нижние индексы в обозначениях  $v_{14}$  и  $v_{25}$  соответствуют номерам узлов рамы.

Матрица коэффициентов канонической системы метода перемещений имеет вид

$$[R(\mathbf{v})] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}.$$

Реакции  $r_{11}$ ,  $r_{12}$  определяем из условий равновесия узла 2 (рис. 1.22, 1.23):

$$r_{11} = [2 \cdot 7,98 + 4 \varphi_2(\mathbf{v})] i; \quad r_{12} = r_{21} = -\frac{6i}{8} \varphi_4(\mathbf{v}).$$

Единичную реакцию  $r_{22}$  находим из условия равновесия ригеля 1-2-3 (рис. 1.22, 1.23):

$$r_{22} = \left[ \frac{3 \cdot 1,34}{6^2} \eta_1(0,53 \mathbf{v}) + \frac{12}{8^2} \eta_2(\mathbf{v}) \right] i .$$

Уравнение устойчивости рассматриваемой рамы записываем в виде

$$\det[R(\mathbf{v})] = \begin{vmatrix} 15,96 + 4 \varphi_2(\mathbf{v}) & -\frac{3}{4} \varphi_4(\mathbf{v}) \\ -\frac{3}{4} \varphi_4(\mathbf{v}) & 0,112 \eta_1(0,53 \mathbf{v}) + \frac{3}{16} \eta_2(\mathbf{v}) \end{vmatrix} = 0 .$$

Раскрыв определитель, получим трансцендентное уравнение  $\det[R(\mathbf{v})] = 1,78 \eta_1(0,53 \mathbf{v}) + 2,99 \eta_2(\mathbf{v}) + 0,447 \varphi_2(\mathbf{v}) \eta_1(0,53 \mathbf{v}) + \frac{3}{4} \varphi_2(\mathbf{v}) \eta_2(\mathbf{v}) - \frac{9}{16} \varphi_4^2(\mathbf{v}) = 0 .$

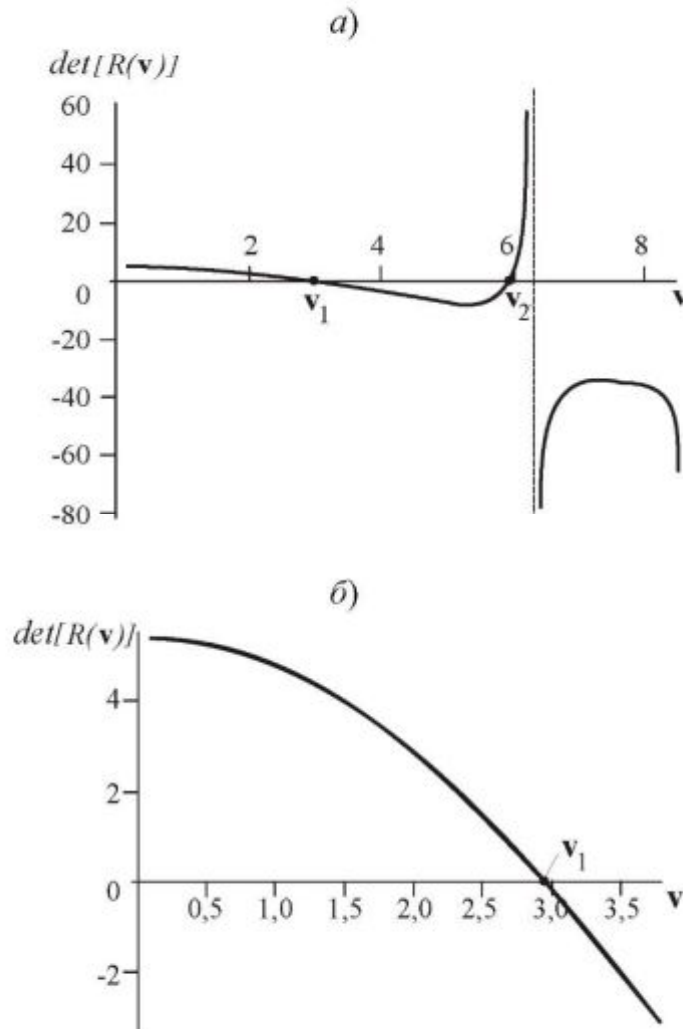


Рис. 1.24

Для вычисления величины наименьшего корня  $v_1$  воспользуемся компьютерной математикой системы Maple. Сначала для оценки интервала, которому принадлежит искомое решение уравнения  $\det[R(v)] = 0$ , построим график зависимости  $\det[R(v)] \sim v$  (рис. 1.24). Как видно, кривая  $\det[R(v)]$  первый раз пересекает ось  $v$  на участке между точками 2,0 и 4,0 (рис. 1.24, а), а при детализации графика – на участке между точками 2,5 и 3,0 (рис. 1.24, б). Точное решение уравнения  $\det[R(v)] = 0$ , вычисленное численно, равно  $v_1 = 2,96$ .

В заключении расчета определяем величины критической нагрузки для стоек 1-4 и 2-5:

$$P_{\text{кр } 14} = (0,53 v_1)^2 \frac{E J_{14}}{l_{14}^2} = (0,53 \cdot 2,96)^2 \frac{E J}{l^2} = 2,46 \frac{E J}{l^2};$$

$$P_{\text{кр } 25} = (v_1)^2 \frac{E J_{25}}{l_{25}^2} = \left( \frac{2,96}{1+1/3} \right)^2 \frac{E J}{l^2} = 4,93 \frac{E J}{l^2}.$$

В следующем учебном примере вычислим величину критической силы для двухступенчатой стойки (рис. 1.25). Особенность данной задачи заключается в том, что теоретическая форма упругой линии стойки после потери устойчивости описывается гладкой функцией вида

$$v(x) = f \left( 1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right),$$

где  $f \ll 1$  – перемещение верхнего конца стойки. В месте с тем реальной форме упругой линии, как это будет показано в разделе 2.7, соответствует более сложная кривая.

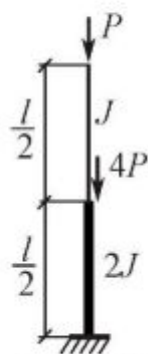


Рис. 1.25

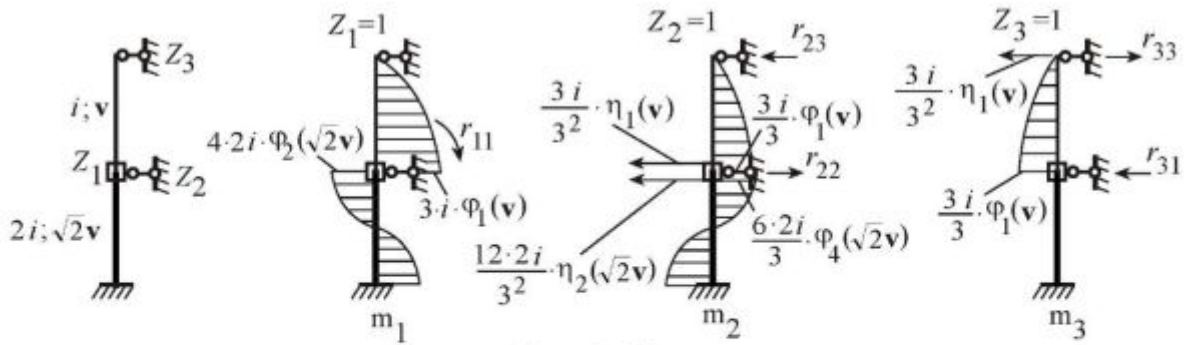


Рис. 1.26

Основная система метода перемещений и соответствующие единичные эпюры  $m_1, m_2, m_3$ , построенные с учетом разных жесткостей участков и продольного сжатия, приведены на рис. 1.26.

На основании данных рис. 1.26 сформируем уравнение устойчивости

$$\det[R(v)] = \begin{vmatrix} 3i\varphi_1(v) + 4 \cdot 2i\varphi_2(\sqrt{2}v) & \frac{3i}{3}\varphi_1(v) - \frac{6 \cdot 2i}{3}\varphi_4(\sqrt{2}v) & -\frac{3i}{3}\varphi_1(v) \\ \text{симметр.} & \frac{3i}{3^2}\eta_1(v) + \frac{12 \cdot 2i}{3^2}\eta_2(\sqrt{2}v) & -\frac{3i}{3^2}\eta_1(v) \\ & & \frac{3i}{3^2}\eta_1(v) \end{vmatrix} = 0.$$

Графическая интерпретация решения уравнения  $\det[R(v)]=0$  показана на рис. 1.27.

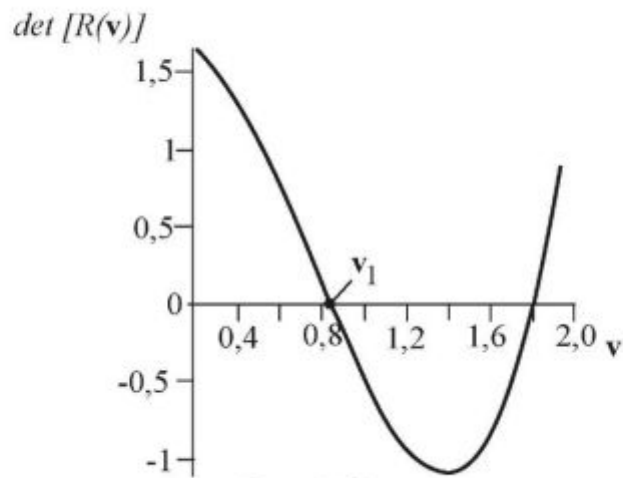


Рис. 1.27



Значение наименьшего корня уравнения устойчивости, вычисленное численно, равно  $\nu_1=0,8434$ . Величина параметра критической нагрузки для двухступенчатого стержня

$$P_{\text{кр}} = \frac{\nu^2}{(l/2)^2} E J = \frac{2,845}{l^2} E J.$$

Для сравнения в работе [3] получены следующие параметры критической нагрузки для аналогичного двухступенчатого стержня:

статическим методом –  $P_{\text{кр}} = \frac{2,53}{l^2} E J$ ;

энергетическим методом –  $P_{\text{кр}} = \frac{2,61}{l^2} E J$ .

Максимальное расхождение с решением, полученным методом перемещений, составляет 11%. Несоответствие в результатах объясняется различным подходом к формированию уравнения устойчивости.

В заключении данного раздела выполним анализ устойчивости 1-го рода для стержня, жестко защемленного по концам и нагруженного в точке  $c$  продольной силой  $P$  (рис. 1.28). Изгибная жесткость стержня  $EJ=1,144 \cdot 10^6$  Н·м<sup>2</sup> (двутавр № 14). Длины участков стержня  $l_1=2$  м,  $l_2=8$  м.

Рассмотрим два варианта нагружения ( $A$  и  $B$ ), отличающиеся только направлением продольной силы  $P$ .

Вычислим значения критической силы  $P_{\text{кр}A}$  и  $P_{\text{кр}B}$  соответственно для вариантов  $A$  и  $B$  с помощью метода перемещений. На рис. 1.29 представлена основная система метода перемещений и единичные эпюры моментов для варианта  $A$ . Здесь же приведены значения реакций, возникающих при единичном смещении связи  $Z_2$ .

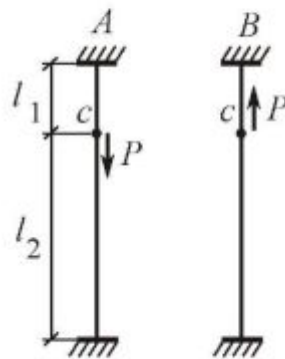


Рис. 1.28

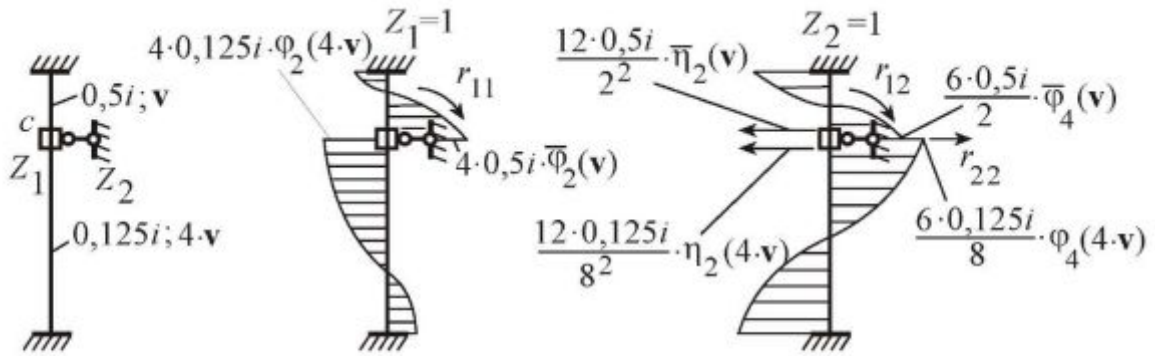


Рис. 1.29

Уравнение устойчивости для сжато-растянутого стержня, составленное на основании данных рис. 1.29, имеет вид

$$\det[R(v)] = \begin{vmatrix} 4 \cdot 0,5 \cdot \bar{\varphi}_2(v) + & \frac{6 \cdot 0,5}{2} \cdot \bar{\varphi}_4(v) - \frac{6 \cdot 0,125}{8} \varphi_4(4 \cdot v) \\ + 4 \cdot 0,125 \cdot \varphi_2(4 \cdot v) & \\ \text{симметр.} & \frac{12 \cdot 0,5}{2^2} \cdot \bar{\eta}_2(v) + \frac{12 \cdot 0,125}{8^2} \eta_2(4 \cdot v) \end{vmatrix} = 0.$$

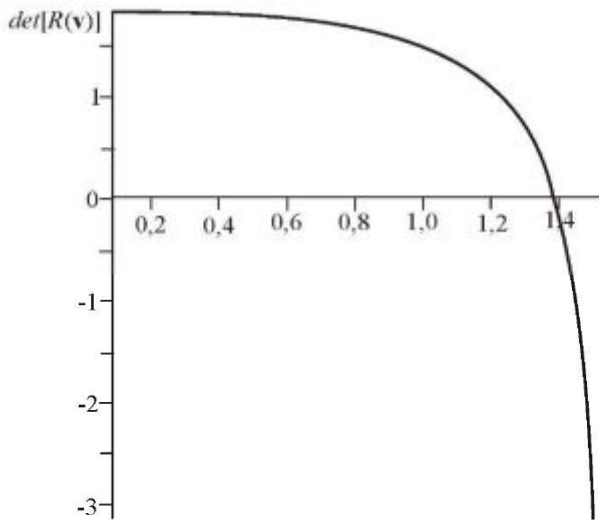


Рис. 1.30

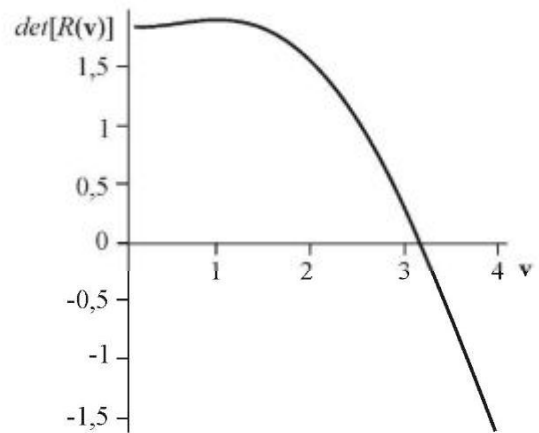


Рис. 1.31

Здесь  $\bar{\varphi}_2(v)$ ,  $\bar{\varphi}_4(v)$ ,  $\bar{\eta}_2(v)$  – специальные функции, учитывающие продольное растяжение стержня на участке  $l_1$ .

Наименьший корень  $v_{1A}$  уравнения устойчивости найдем, используя компьютерную математику системы Maple (рис. 1.30). В ито-

ге получим  $v_{1A} = 1,3891$ .

По аналогии с вариантом  $A$  для варианта  $B$  уравнение устойчивости принимает вид

$$\det[R(v)] = \begin{vmatrix} 4 \cdot 0,125 \cdot \bar{\varphi}_2(4 \cdot v) + & \frac{6 \cdot 0,125}{8} \cdot \bar{\varphi}_4(4 \cdot v) - \frac{6 \cdot 0,5}{2} \varphi_4(v) \\ + 4 \cdot 0,5 \cdot \varphi_2(v) & \\ \text{симметр.} & \frac{12 \cdot 0,125}{8^2} \cdot \bar{\eta}_2(4 \cdot v) + \frac{12 \cdot 0,5}{2^2} \eta_2(v) \end{vmatrix} = 0.$$

Графическая интерпретация решения уравнения  $\det[R(v)] = 0$  для варианта  $B$  представлена на рис. 1.31. Значение вычисленного наименьшего корня составило  $v_{1B} = 3,1877$ .

Данным величинам параметров  $v_{1A}$  и  $v_{1B}$  соответствует критическая нагрузка:

$$P_{крA} = \frac{(4 \cdot v)^2}{l_2^2} E J = \frac{(4 \cdot 1,3891)^2}{8^2} \cdot 1,144 \cdot 10^6 = 0,5519 \cdot 10^6 \text{ Н};$$

$$P_{крB} = \frac{v^2}{l_1^2} E J = \frac{3,1877^2}{2^2} \cdot 1,144 \cdot 10^6 = 2,906 \cdot 10^6 \text{ Н}.$$

Значения критической нагрузки, вычисленные без учета стабилизирующего эффекта от растягивающего усилия, составили:

$$P_{крA} = 0,5119 \cdot 10^6 \text{ Н}; \quad P_{крB} = 1,446 \cdot 10^6 \text{ Н}.$$

Таким образом, учет продольного растягивающего усилия при анализе устойчивости сжато-растянутого стержня дает существенную поправку решения.

## 1.6. Вычисление параметра критической нагрузки в среде Maple

На рис. 1.32 приведен текст учебной программы для расчета параметра  $v_1$  в среде Maple 12. Допустимый размер матрицы  $[R(v)]$  ограничен числом неизвестных  $n \leq 4$ . Для удобства работы отдельные блоки программы снабжены комментариями, начинающимися с сим-



a)

*restart :*

*with(linalg):*

*# Специальные функции : f1(v), f2(v), f3(v), f4(v), n1(v), n2(v)*

$$f1 := v \rightarrow \frac{v^2 \cdot \sin(v)}{3 \cdot (\sin(v) - v \cdot \cos(v))} :$$

$$f2 := v \rightarrow \frac{v^2 \cdot (v \cdot \cos(v) - \sin(v))}{4 \cdot (2 \cdot \cos(v) + v \cdot \sin(v) - 2)} :$$

$$f3 := v \rightarrow \frac{v \cdot (\sin(v) - v)}{2 \cdot (2 \cdot \cos(v) + v \cdot \sin(v) - 2)} :$$

$$f4 := v \rightarrow \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot f2(v) + f3(v)) :$$

$$n1 := v \rightarrow f1(v) - \frac{v^2}{3} :$$

$$n1 := v \rightarrow f4(v) - \frac{v^2}{12} :$$

*n := 2 : # степень кинематической неопределенности задачи*

*# Матрица упругих реакций [R] размерностью n x n*

$$R := \text{matrix} \left( n, n, \left[ \begin{array}{cc} 4 \cdot 0.5 + 4 \cdot 0.125 \cdot f2(v), & \frac{6 \cdot 0.5}{2} - \frac{6 \cdot 0.125}{8} \cdot f4(v), \\ \frac{6 \cdot 0.5}{2} - \frac{6 \cdot 0.125}{8} \cdot f4(v), & \frac{12 \cdot 0.5}{2^2} + \frac{12 \cdot 0.125}{8^2} \cdot n2(v) \end{array} \right] \right) :$$

b)

*# Характеристическое уравнение det [R(v)] = 0*

$$y := v \rightarrow \det(R) :$$

*# График зависимости R ~ v*

*a := plot (y(v), v = 0.1 .. 6, style = line, color = black, thickness = 2) :*

*print("Графическое решение уравнения устойчивости det [R(v)] = 0") :*

*plots / display / (a) :*

*# Численное решение уравнения устойчивости det [R(v)] = 0*

*print("Наименьший корень уравнения устойчивости v1") :*

*fsolve (y(v) = 0, v = 5..6) :*

Рис. 1.32

вола #. Отметим, что программа выполняет только вычислительную часть задачи, а подготовительную работу по выбору основной системы метода перемещений и формированию матрицы упругих реакций осуществляет пользователь (студент).

Для обозначения специальных функций  $\varphi_1(\mathbf{v})$ ,  $\varphi_2(\mathbf{v})$ ,  $\varphi_3(\mathbf{v})$ ,  $\varphi_4(\mathbf{v})$ ,  $\eta_1(\mathbf{v})$ ,  $\eta_2(\mathbf{v})$  в программе использованы следующие переменные в латинской транскрипции: f1(v), f2(v), f3(v), f4(v), n1(v), n2(v).

На первом этапе вычисления параметра  $v_1$  выполняется построение графика  $R \sim v$  с помощью процедуры

“ $a := plot(y(v), v = 0.1 .. 6, style = line, color = black, thickness = 2)$ :“.

Изменяя верхний предел параметра  $v$ , визуально определяем интервал, на котором кривая  $R(v)$  первый раз пересекает ось абсцисс.

```
with ( spline ):
s := 30 : #размерность векторов {x} и {y}
# Формирование массива det [ R(v) ] в точках v = 0.. s
x := vector ( s ):
y := vector ( s ):
x [ 1 ] := 0 :
for i from 2 to s do
x [ i ] := x [ i - 1 ] + 0.1; od :
f := v → det ( R ( v ) ):
vi := 0.01 :
for i from 1 to s do
y [ i ] := evalf ( f ( vi ) );
vi := vi + 0.1; od :
# Построение кубического сплайна функции [ R(v) ] в точках v = 0...s
# Выражения сплайн – функций на отрезках между узловыми точками
# выводятся на экран
f := spline ( x, y, t, cubic );
# Построение графика функции
g := plot ( f, t = 1.. $\frac{s}{10}$ , color = black, thickness = 2 ):
plots [ display ] ( g );
```

Рис. 1.33

На втором этапе с помощью интерактивной процедуры

“*fsolve*( $y(v) = 0, v = 5..6$ );”

находим наименьший корень  $v_1$  уравнения устойчивости

$$\det[R(v)] = 0.$$

Верхнюю и нижнюю границы интервала  $v = 5..6$  следует назначать как можно ближе к искомому корню  $v_1$ .

Изменения в программу вносятся на латинице. Запуск программы на выполнение осуществляется нажатием клавиши “Enter”.

Для вычисления параметра критической нагрузки в случае, когда порядок матрицы  $[R(v)]$  больше четырех необходимо вместо блока программы, показанного на рис. 1.32, *б*, использовать видоизмененный блок, приведенный на рис. 1.33. Эта замена вызвана тем, что прямое вычисление функции  $y(v)$  при формировании списка данных  $a$  требует больших вычислительных ресурсов и при числе неизвестных  $n > 4$  приведет к “зависанию” программы (рис. 1.32). В блоке рис. 1.33 использована векторно-сплайновая схема построения графика функции  $\det[R(v)]$ , что эффективнее с вычислительной точки зрения, но требует дополнительных усилий для окончательного вычисления наименьшего корня уравнения  $\det[R(v)] = 0$ . Как отмечено в комментариях к программе (рис. 1.33) выражения кусочных сплайн-функций выводятся на экран монитора. Пользователю остается с помощью графика  $\det[R(v)] \sim v$  установить границы интервала  $[a, b]$ , которому принадлежит значение  $v_1$ , скопировать из имеющегося списка в буфер обмена соответствующую сплайн-функцию  $u(t)$  и запустить на выполнение оператор “*fsolve*( $u(t), t = a..b$ );”.

```
≠Вычисление наименьшего корня уравнения устойчивости  $\det[R(v)] = 0$   
 $u := t \rightarrow 0.2659987397 - 0.141949773400000007 \cdot t +$   
 $0.360062093798311222 \cdot (t - 1.9)^2 - 0.151228670300000006 \cdot (t - 1.9)^3;$   
fsolve( $u(t), t = 1.8..2$ );
```

Рис. 1.34

Пример такого вычислительного блока представлен на рис. 1.34. В приведенном примере интервалу  $[a, b]$  параметра  $t$  соответствуют значения  $[1.8..2]$ .

## Глава 2. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В СТАТИКЕ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

### 2.1. Матрицы жесткости стержневого конечного элемента

Стержневые системы широко используются в расчетных схемах строительных конструкций. В настоящее время эффективным средством их расчета на ЭВМ является метод конечных элементов (МКЭ) в форме метода перемещений. В терминологии и схеме построения вычислительного процесса этот метод имеет много общего с матричным методом перемещений, получившим широкое распространение в расчетной практике в 60-е – 70-е годы XX века. МКЭ является численным методом прочностного анализа, базирующимся на векторно-матричной записи результирующих выражений. Необходимые сведения из матричной алгебры приведены в приложении 4. Суть МКЭ состоит в представлении пространственной конструкции ансамблем стержневых (балочных) конечных элементов. Причем для повышения точности численного решения отдельные протяженные фрагменты расчетной схемы обычно моделируют сетью конечных элементов с заданным шагом. Жесткостные характеристики стержней в МКЭ вычисляют с помощью соотношений, основанных на принципе возможных перемещений.

Для моделирования двумерных стержневых систем, воспринимающих изгибные деформации в одной плоскости, используют балочные двухузловые конечные элементы, отнесенные к локальной (местной) декартовой системе координат  $\{x, y\}$  (рис. 2.1). Ось  $z$  направлена из узла 1 на наблюдателя и на рис. 2.1 не показана. Характеристиками такого элемента являются: длина  $l$ ; площадь поперечного сечения  $F$ ; момент инерции сечения  $J$ ; модуль упругости  $E$ . Каждый узел имеет три степени свободы: перемещение  $u$  вдоль оси  $x$ ; перемещение  $v$  вдоль оси  $y$ ; угол поворота нормали торцового сечения элемента  $\theta = v' = -dv/dx$ . Вектор-столбец узловых перемещений состоит из шести компонент и имеет следующую структуру (рис. 2.1, а):

$$\{w\} = \{u_1 \ u_2 \ v_1 \ \theta_1 \ v_2 \ \theta_2\}^T.$$

Здесь  $\{\dots\}^T$  – операция транспонирования.

Согласно кинематической гипотезе, выражение для продольной

деформации стержня имеет вид

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} - y \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2. \quad (2.1)$$

В уравнении (2.1) первый член соответствует осевой деформации (растяжение – сжатие), второй – изгибной деформации, третий член – учитывает нелинейность, связанную с продольным изгибом. Координата  $y$  отсчитывается от срединной линии балочного элемента.

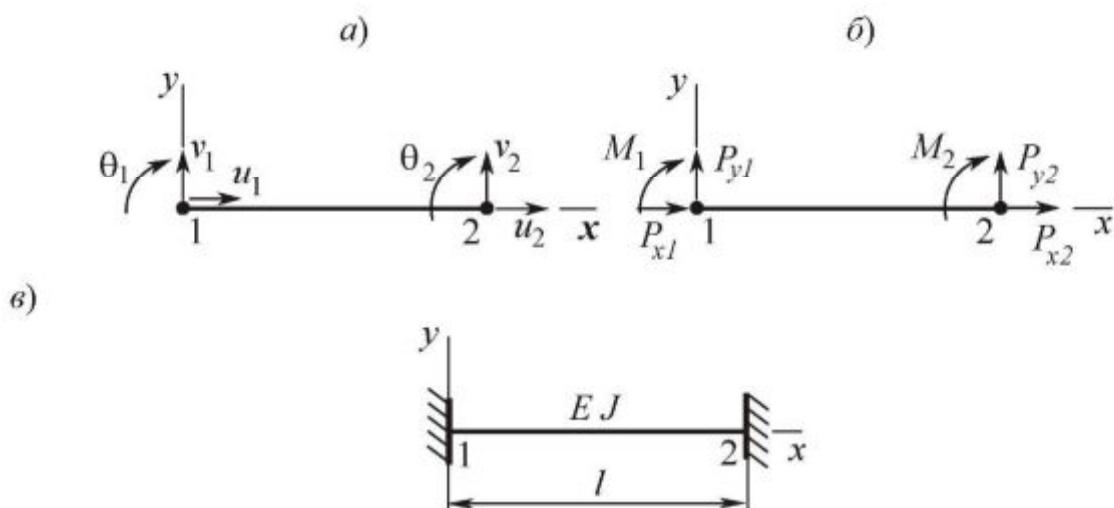


Рис. 2.1

На основании принципа возможных перемещений запишем уравнение, связывающее вариацию потенциальной энергии деформации элемента  $\delta U$  с вариацией работы внешних сил  $\delta A$  на возможных перемещениях системы

$$\delta U = \delta A$$

или в развернутом виде

$$\int_v \sigma_x \delta \varepsilon_x dv = P_{x1} \delta u_1 + P_{x2} \delta u_2 + P_{y1} \delta v_1 + M_1 \delta \theta_1 + \\ + P_{y2} \delta v_2 + M_2 \delta \theta_2. \quad (2.2)$$

Здесь обозначено:  $\sigma_x = E \varepsilon_x$  – продольное напряжение;  $\delta \varepsilon_x$  – вариация осевой деформации;  $v = Fl$  – объем, занимаемый конечным элементом;  $dv = dF dx$  – элементарный объем;  $P_{x1}$ ,  $P_{x2}$ ,  $P_{y1}$ ,  $P_{y2}$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  – узловые силы и моменты (рис. 2.1, б);  $\delta u_1$ ,  $\delta u_2$ ,  $\delta v_1$ ,  $\delta v_2$ ,  $\delta \theta_1$ ,  $\delta \theta_2$  – вариации узловых перемещений и углов поворота

элемента. Под возможными (виртуальными) перемещениями будем понимать малые прогибы и углы поворота, допускаемые наложенными внешними связями.

Подставляя зависимость (2.1) в выражение для вариации  $\delta U$ , получим

$$\delta U = \int_0^l \int_F E \left[ \delta \left( \left( \frac{du}{dx} \right)^2 \right) - y \delta \left( \left( \frac{du}{dx} \right) \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \right) + y^2 \delta \left( \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 \right) + \right. \\ \left. + \delta \left( \left( \frac{du}{dx} \right) \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 \right) - y \delta \left( \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right) \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 \right) + \frac{1}{4} \delta \left( \left( \frac{dv}{dx} \right)^4 \right) \right] dF dx,$$

где в соответствии со свойством вариации произвольной функции использованы соотношения вида

$$\frac{d(\delta u)}{dx} = \delta \left( \frac{du}{dx} \right), \quad \frac{d^2(\delta v)}{dx^2} = \delta \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right).$$

Выполнив интегрирование по толщине элемента с учетом геометрических характеристик сечения стержня

$$\int_F dF = F, \quad \int_F y dF = 0, \quad \int_F y^2 dF = J,$$

получим

$$\delta U = \int_0^l \left[ EF \delta \left( \left( \frac{du}{dx} \right)^2 \right) + EJ \delta \left( \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 \right) - N \delta \left( \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 \right) - \right. \\ \left. - \frac{EF}{4} \delta \left( \left( \frac{dv}{dx} \right)^4 \right) \right] dx.$$

Здесь введено обозначение для величины продольной нагрузки  $N = -EF \frac{du}{dx}$ . Знак минус указывает на то, что сила  $N$  вызывает сжатие стержня.

Опуская член высокого порядка малости  $\frac{EF}{4} \left( \frac{dv}{dx} \right)^4$ , приводим уравнение (2.2) к статически эквивалентному виду

$$EF \int_0^l \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx + EJ \int_0^l \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 dx - N \int_0^l \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 dx =$$

$$= P_{x1} u_1 + P_{x2} u_2 + P_{y1} v_1 + M_1 \theta_1 + P_{y2} v_2 + M_2 \theta_2. \quad (2.3)$$

Выразим функции перемещений  $v(x)$  и  $u(x)$  через узловые перемещения элемента:

$$v(x) = \{ \psi_1(x) \quad \psi_2(x) \quad \psi_3(x) \quad \psi_4(x) \} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix};$$

$$u(x) = \{ \psi_5(x) \quad \psi_6(x) \} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix},$$

где  $\psi_i(x)$ ,  $i=1,2,\dots,6$  – функции формы двухузлового балочного конечного элемента;  $\{\Delta_{\text{н}}\} = \{v_1 \theta_1 v_2 \theta_2\}^T$ ,  $\{\Delta_{\text{с}}\} = \{u_1 u_2\}^T$  – векторы узловых перемещений, учитывающие изгибную  $\{\Delta_{\text{н}}\}$  и осевую  $\{\Delta_{\text{с}}\}$  виды деформации.

Поле перемещений  $v(x)$  элемента аппроксимируем с помощью полного кубического полинома

$$v(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 =$$

$$= \{ 1 \mid x \mid x^2 \mid x^3 \} \{ a_1 \mid a_2 \mid a_3 \mid a_4 \}^T = \{X\} \{a\}. \quad (2.4)$$

Используя граничные условия на концах стержня (рис. 2.1, а):

$$\text{при } x=0 \rightarrow \begin{cases} v = v_1; \\ v' = \theta_1, \end{cases} \quad \text{при } x=l \rightarrow \begin{cases} v = v_2; \\ v' = \theta_2, \end{cases}$$

и зависимость (2.4), определим вектор узловых перемещений в виде  $\{\Delta_{\text{н}}\} = [L] \{a\}$ .

Здесь матрица коэффициентов

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & -1 & -2l & -3l^2 \end{bmatrix}.$$

Полученное выражение позволяет установить связь между перемещением в произвольной точке элемента  $v(x)$  и вектором узловых перемещений  $\{\Delta_{и}\}$ :

$$v(x) = \{X\}[L]^{-1}\{\Delta_{и}\} = \{\Psi_{и}\}\{\Delta_{и}\},$$

где  $[L]^{-1}$  – матрица, обратная матрице  $[L]$ ; вектор функций формы конечного элемента

$$\{\Psi_{и}\} = \{\psi_1(x) \mid \psi_2(x) \mid \psi_3(x) \mid \psi_4(x)\},$$

где балочные функции

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= 1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3}, & \psi_2(x) &= -x + 2\frac{x^2}{l} - \frac{x^3}{l^2}, \\ \psi_3(x) &= 3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3}, & \psi_4(x) &= \frac{x^2}{l} - \frac{x^3}{l^2}. \end{aligned}$$

Элементы вектора  $\{\Psi_{и}\}$  представляют собой кубические полиномы Эрмита, описывающие изгибную деформацию балочного элемента с защемленными концами (рис. 2.1, в) при единичных линейных (функции  $\psi_1(x)$ ,  $\psi_3(x)$ ) и угловых (функции  $\psi_2(x)$ ,  $\psi_4(x)$ ) смещениях. На рис. 2.2, а показаны графики функций  $\psi_1(x)$ ,  $\psi_2(x)$ ,  $\psi_3(x)$ ,  $\psi_4(x)$ .

Функцию осевого перемещения  $u(x)$  в пределах конечного элемента аппроксимируем одномерными линейными полиномами типа (рис. 2.2, б)

$$\psi_5(x) = 1 - \frac{x}{l}, \quad \psi_6(x) = \frac{x}{l}.$$

Тогда  $u(x) = \{\Psi_{с}\}\{\Delta_{с}\}$ , где  $\{\Psi_{с}\} = \{\psi_5(x) \mid \psi_6(x)\}$ .

На основании уравнения (2.3) и вектора  $\{\Psi_{и}\}$  формируем матрицу изгибной жесткости

$$[k_{и}] = EJ \int_0^l \left( \frac{d^2\{\Psi_{и}\}}{dx^2} \right)^T \frac{d^2\{\Psi_{и}\}}{dx^2} dx = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

и матрицу, учитывающую изменение изгибной жесткости стержня в зависимости от величины продольной силы  $N$ ,



$$[k_T] = N \int_0^l \left( \frac{d\{\Psi_{II}\}}{dx} \right)^T \frac{d\{\Psi_{II}\}}{dx} dx = \frac{N}{30l} \begin{bmatrix} 36 & -3l & -36 & -3l \\ -3l & 4l^2 & 3l & -l^2 \\ -36 & 3l & 36 & 3l \\ -3l & -l^2 & 3l & 4l^2 \end{bmatrix}.$$

Как видно, элементы матрицы  $[k_T]$  зависят только от геометрического параметра  $l$  (длины стержня), поэтому ее называют геометрической матрицей жесткости.

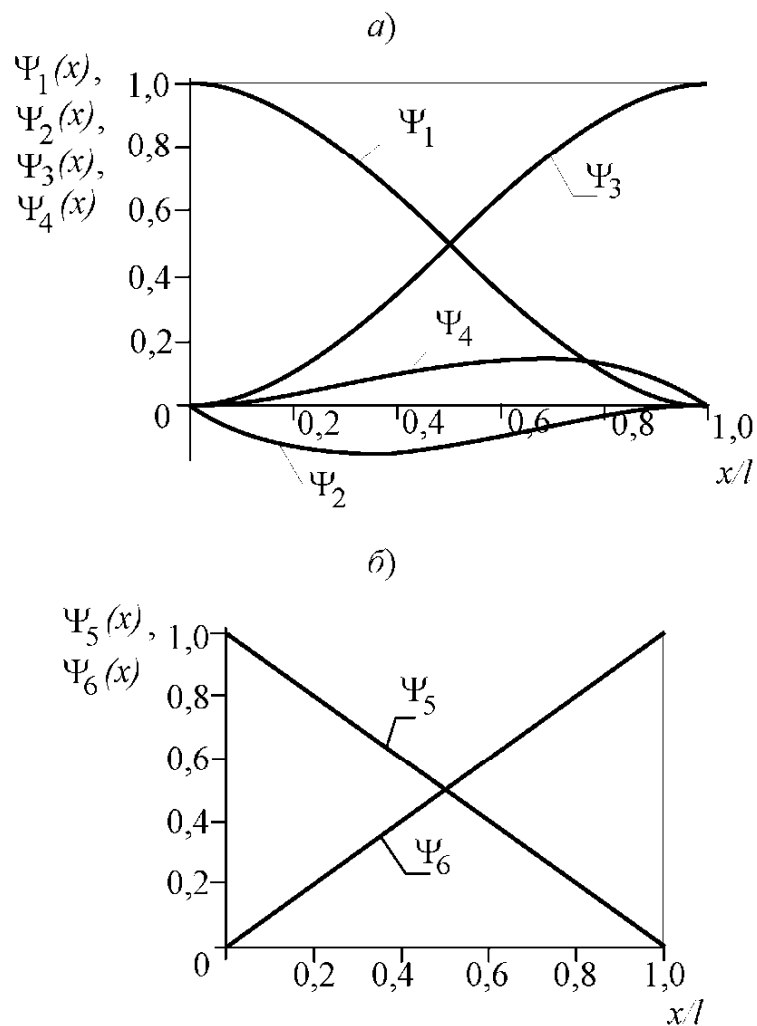


Рис. 2.2

По аналогии формируем матрицу осевой жесткости стержня:

$$[k_c] = EF \int_0^l \{\Psi_c\}^T \{\Psi_c\} dx = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрицу общей жесткости  $[k]$  двухузлового балочного конеч-

ного элемента в локальных осях  $\{x, y\}$  построим с помощью следующей взаимно непроникающей блочной сборки:

$$[k] = \left[ \begin{array}{c|c} [k_c] & 0 \\ \hline 0 & [k_n] \end{array} \right] = \quad (2.5)$$

$$= \left[ \begin{array}{cc|cc|cc} EF/l & -EF/l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EF/l & EF/l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 12EJ/l^3 & -6EJ/l^2 & -12EJ/l^3 & -6EJ/l^2 \\ 0 & 0 & -6EJ/l^2 & 4EJ/l & 6EJ/l^2 & 2EJ/l \\ \hline 0 & 0 & -12EJ/l^3 & 6EJ/l^2 & 12EJ/l^3 & 6EJ/l^2 \\ 0 & 0 & -6EJ/l^2 & 2EJ/l & 6EJ/l^2 & 4EJ/l \end{array} \right].$$

В соответствии с полученной структурой  $[k]$  геометрическую матрицу жесткости элемента представим в форме

$$[k_\Gamma] = \frac{N}{30l} \left[ \begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 36 & -3l & -36 & -3l \\ 0 & 0 & -3l & 4l^2 & 3l & -l^2 \\ \hline 0 & 0 & -36 & 3l & 36 & 3l \\ 0 & 0 & -3l & -l^2 & 3l & 4l^2 \end{array} \right]. \quad (2.6)$$

Таким образом, матрицы  $[k]$  и  $[k_\Gamma]$  имеют одинаковую размерность  $6 \times 6$ , что необходимо для программирования алгоритма формирования матричных уравнений МКЭ.

Результирующее уравнение равновесия для сжатого балочного элемента в местных осях  $\{x, y\}$  имеет вид

$$([k] - N[k_\Gamma]) \{w\} = \{p\}, \quad (2.7)$$

где  $\{p\} = \{P_{x1} \ P_{x2} \ P_{y1} \ M_1 \ P_{y2} \ M_2\}^T$  – вектор узловых сил (рис. 2.1, б).

В приведенном выражении (2.6) элементы матрицы  $[k_\Gamma]$  зависят от продольной силы  $N$ , т. е. в конечном счете, от неизвестных составляющих  $u_1$  и  $u_2$  вектора узловых перемещений  $\{w\}$ . Поэтому уравнение (2.7) оказывается нелинейным и решение его может быть

получено численным методом с использованием итерационной процедуры, например алгоритма Ньютона-Рафсона.

## 2.2. Комбинированные балочные конечные элементы

В расчетной практике часто встречаются схемы рам с шарнирными неопорными соединениями стержней в узлах (рис. 2.3). Данная задача может быть решена тремя способами. Рассмотрим каждый из них в отдельности.

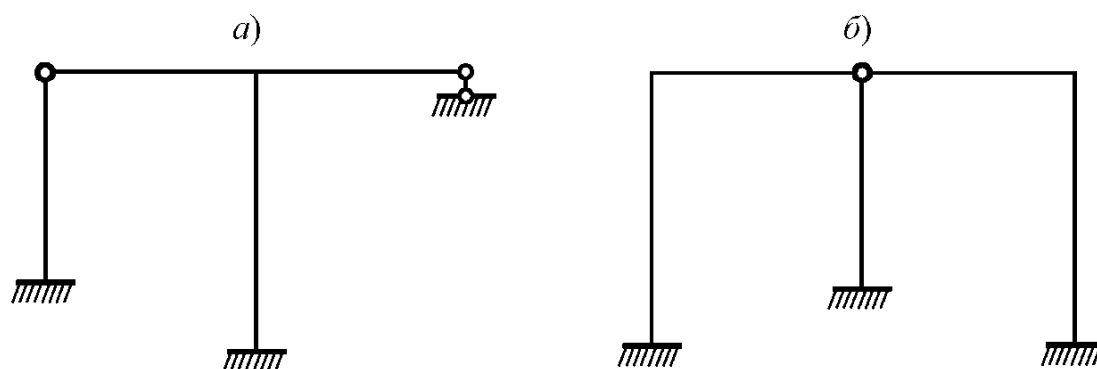


Рис. 2.3

Первый способ заключается в задании дополнительных вращательных степеней свободы для стержней, присоединяемых к основному стержню. За основной обычно принимается стержень, имеющий наименьший номер в каждом конкретном шарнирном соединении. Таким образом, для рам, изображенных на рис. 2.3, необходимо ввести одну (рис. 2.3, *a*) и две (рис. 2.3, *б*) дополнительные степени свободы.

Второй способ основан на задании в неопорном шарнире дополнительных номеров узлов для каждого присоединяемого стержня. Так, для рамы, приведенной на рис. 2.3, *a*, в шарнире необходимо задать два узла, а для рамы, показанной на рис. 2.3, *б* – три узла. Линейные смещения узлов, принадлежащие шарнирному соединению, полагаются равными.

Третий способ учета шарнирных соединений базируется на введении так называемых комбинированных балочных конечных элементов, имеющих шарнир на одном из концов. В дальнейшем будем использовать этот способ.

Выполним построение матрицы общей  $[k]$  и геометрической  $[k_r]$  жесткости для комбинированного балочного конечного элемента (рис. 2.4, а), имеющего шарнирное закрепление в начале (узел 1) и жесткую заделку на конце (узел 2). Используя граничное условие  $x=0 \quad M_1=0$  и четвертую строку матрицы общей жесткости (2.5), составим уравнение

$$M_1 = -\frac{6EJ}{l^2} v_1 + \frac{4EJ}{l} \theta_1 + \frac{6EJ}{l^2} v_2 + \frac{2EJ}{l} \theta_2 = 0.$$

$$\text{Отсюда находим } \theta_1 = \frac{3}{2l} v_1 - \frac{3}{2l} v_2 - \frac{1}{2} \theta_2.$$

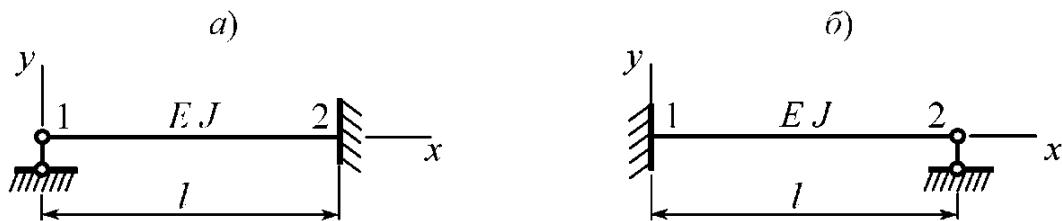


Рис. 2.4

На основании выражения для  $\theta_1$  сформируем матрицу преобразования  $[g_1]$ , устанавливающую связь между векторами узловых перемещений базового (рис. 2.1, в) и рассматриваемого комбинированного элемента

$$[g_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2l} & 0 & -\frac{3}{2l} & -\frac{1}{2} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Составляющие матрицы общей жесткости  $[k_1]$  комбинированного элемента определяем с помощью соотношения

$$[k_1] = [g_1]^T [k] [g_1],$$

или в явном виде

$$[k_1] = \begin{bmatrix} EF/l & -EF/l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EF/l & EF/l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3EJ/l^3 & 0 & -3EJ/l^3 & -3EJ/l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -3EJ/l^3 & 0 & 3EJ/l^3 & 3EJ/l^2 \\ \hline 0 & 0 & -3EJ/l^2 & 0 & 3EJ/l^2 & 3EJ/l \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Выполнив аналогичные преобразования для комбинированного балочного элемента, показанного на рис. 2.4, б, определим:

$$[g_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2l} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2l} & 0 \end{bmatrix};$$

$$[k_2] = [g_2]^T [k] [g_2] =$$

$$= \begin{bmatrix} EF/l & -EF/l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EF/l & EF/l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3EJ/l^3 & -3EJ/l^2 & -3EJ/l^3 & 0 \\ 0 & 0 & -3EJ/l^2 & 3EJ/l & 3EJ/l^2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -3EJ/l^3 & 3EJ/l^2 & 39EJ/l^3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Соответствующие выражения для  $[k_{r1}]$  и  $[k_{r2}]$  вычисляем по формулам:

$$[k_{r1}] = [g_{r1}]^T [k_r] [g_{r2}] = \frac{N}{8l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 9 & 0 & -9 & -l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -9 & 0 & 9 & l \\ 0 & 0 & -l & 0 & l & l^2 \end{bmatrix}; \quad (2.10)$$

$$[k_{r2}] = [g_{r2}]^T [k_r] [g_{r2}] = \frac{N}{8l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 9 & -l & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -l & l^2 & l & 0 \\ \hline 0 & 0 & -9 & l & 9 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

где матрицы преобразования

$$[g_{r1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4l} & 0 & -\frac{3}{4l} & \frac{1}{4} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [g_{r2}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{3}{4l} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4l} & 0 \end{bmatrix},$$

$[k_r]$  – геометрическая матрица жесткости базового элемента (рис. 2.1, в), вычисляемая по формуле (2.6).

Отметим, что в матрицах (2.8), (2.9) элементам, расположенным на главной диагонали, в местах пересечения нулевых строк и столбцов искусственно присвоено значение единицы.

### 2.3. Преобразование матриц жесткости при переходе к глобальным осям

Процедура формирования глобальной матрицы жесткости стержневой системы называется ансамблированием и выполняется в глобальной, как правило, декартовой системе координат  $\{\bar{x}, \bar{y}\}$  (рис. 2.5).

Векторы узловых перемещений и сил для балочного элемента в осях  $\{\bar{x}, \bar{y}\}$  имеют структуру:

$$\{\bar{w}\} = \{\bar{u}_1 \ \bar{u}_2 \ \bar{v}_1 \ \theta_1 \ \bar{v}_2 \ \theta_2\}^T; \quad \{\bar{p}\} = \{\bar{P}_{x1} \ \bar{P}_{x2} \ \bar{P}_{y1} \ M_1 \ \bar{P}_{y2} \ M_2\}^T.$$

Узловые перемещения в локальных  $\{x, y\}$  и глобальных  $\{\bar{x}, \bar{y}\}$  координатах связаны матричным соотношением

$$\{\bar{w}\} = [c]^T \{w\},$$

где диагональная матрица поворота конечного элемента размерностью  $6 \times 6$

$$[c] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & 0 & 0 & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \varphi & 0 & 0 & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

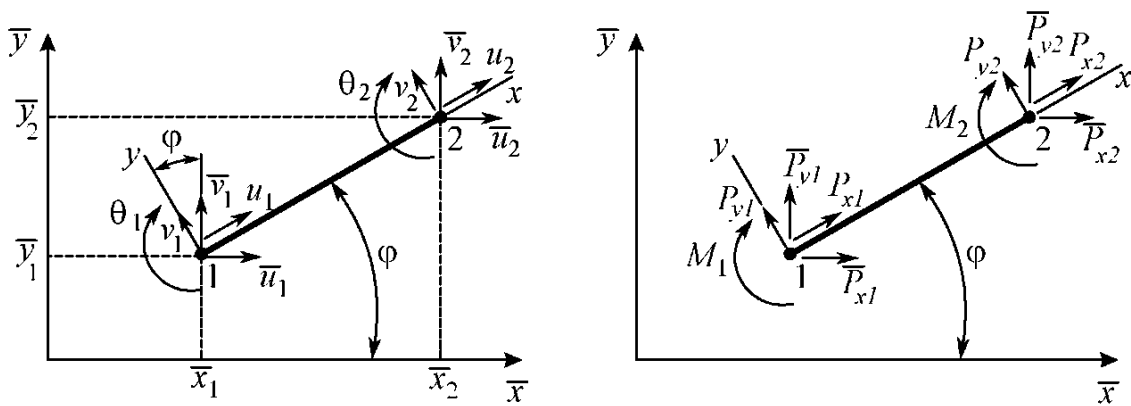


Рис. 2.5

Отметим, что матрица  $[c]$  является ортогональной, т. е.

$$[c]^{-1} = [c]^T.$$

Аналогично осуществляем преобразование вектора-столбца узловых сил

$$\{\bar{p}\} = [c]^T \{p\}.$$

При переходе от локальных осей  $\{x, y\}$  к глобальным координатам  $\{\bar{x}, \bar{y}\}$  матрицы общей  $[k]$  и геометрической  $[k_g]$  жесткости балочного конечного элемента преобразуются с помощью следующих соотношений:

$$[\bar{k}] = [c]^T [k] [c]; \quad [\bar{k}_g] = [c]^T [k_g] [c], \quad (2.12)$$

где  $[\bar{k}]$  и  $[\bar{k}_g]$  – матрицы общей и геометрической жесткости в глобальных осях  $\{\bar{x}, \bar{y}\}$ .

Отметим, что угловые перемещения  $\theta_1$  и  $\theta_2$  и моменты  $M_1$  и  $M_2$  при повороте координат в плоскости изгиба не изменяются, поэтому соответствующим элементам матрицы  $[c]$  присвоены единичные значения.

Величины  $\cos \varphi$  и  $\sin \varphi$  для отрезка  $\overline{12}$  (рис. 2.5) определяем по формулам:

$$\cos \varphi = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{l}; \quad \sin \varphi = \frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1}{l}.$$

При программировании длину элемента удобно вычислять по значениям глобальных координат узлов элемента  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2$  с помощью выражения

$$l = \sqrt{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2}.$$

#### 2.4. Формирование результирующей системы уравнений стержневой системы

Рассмотрим алгоритмические аспекты управления данными и формирования топологических массивов, определяющих конечно-элементную сетку. В качестве примера возьмем раму, показанную на рис. 2.6, а. Величину  $l$  принимаем равной 6 м. В данном случае при дискретизации (разбивке) исходной схемы на конечные элементы используем равномерную сетку (длина конечного элемента 2 м). Однако следует учитывать, что при расчете на устойчивость точность вычислений повышается при сгущении сетки на сжатых стержнях конструкции. Узлы и степени свободы ансамбля элементов нумеруем целыми положительными числами, начиная с единицы. С каждым узлом связываем два перемещения вдоль осей  $\bar{x}, \bar{y}$  и угол поворота относительно оси  $\bar{z}$  (направлена на наблюдателя). Параметры конечно-элементной схемы, представленной на рис. 2.6, б, следующие:  $n_e=13$  – число конечных элементов (номера элементов обведены кружками);  $n_r=14$  – число узлов;  $n_g=42$  – число неизвестных узловых перемещений (степеней свободы).

В дальнейшем будем различать две системы нумерации степеней свободы: глобальную, вводимую расчетчиком в порядке последо-



вательного обхода узлов модели; локальную нумерацию, жестко связанную с узлами 1 и 2 базового конечного элемента (на рис. 2.6, б отмечен символом \*).

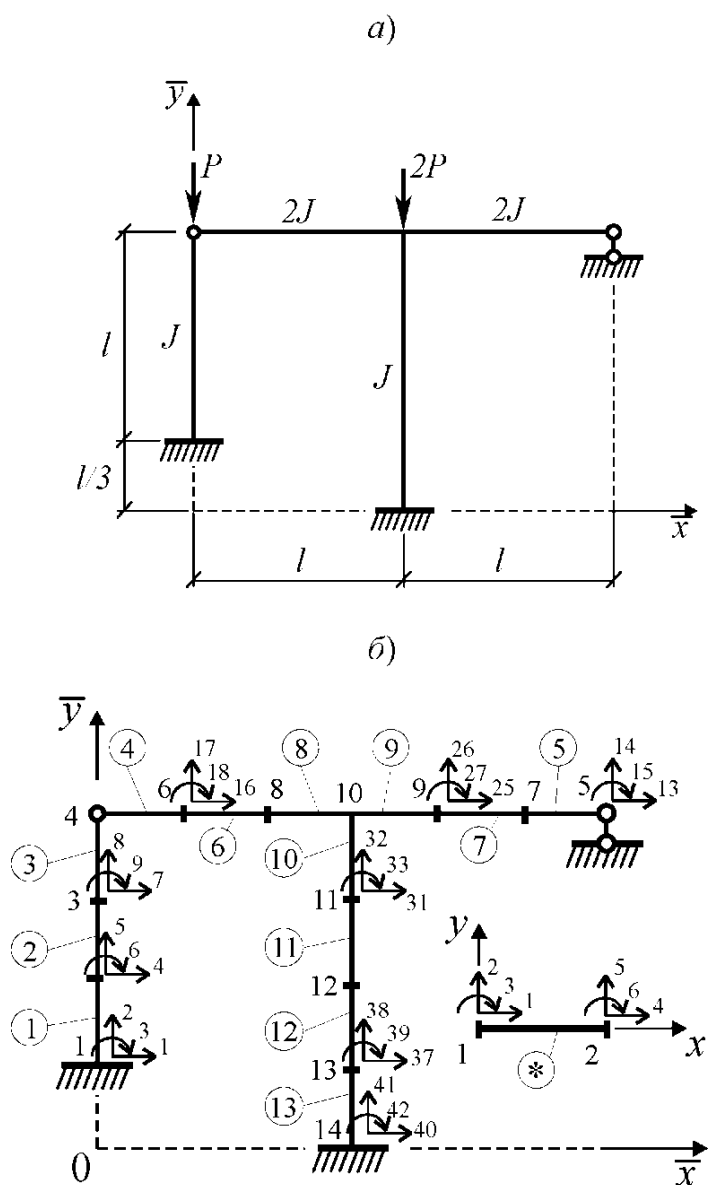


Рис. 2.6

Введем матрицу инцидентности  $[E]$  (связности), устанавливающую однозначное соответствие между строками и столбцами глобальной и локальной матриц жесткости. Матрица  $[E]$  имеет размерность  $n_e \times n_g$  и является булевой матрицей, т. е. состоит из нулей и единиц. Причем  $E_{ij} = 1$ , если номер  $j$  глобальной степени свобо-

ды принадлежит элементу  $i$ . В противном случае  $E_{ij} = 0$ . Для рассматриваемого примера портрет (структура в символьном виде) матрицы  $[E]$  имеет вид, показанный на рис. 2.7.

13×42

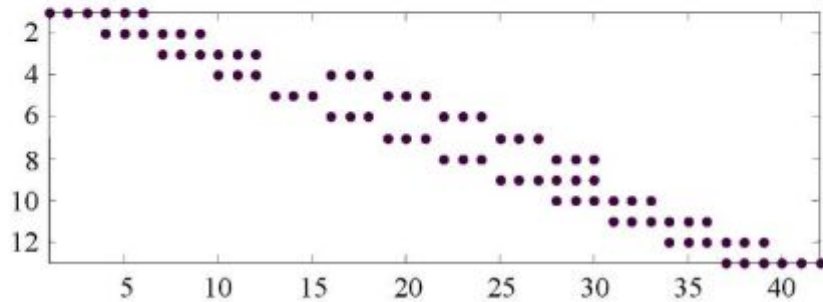


Рис. 2.7

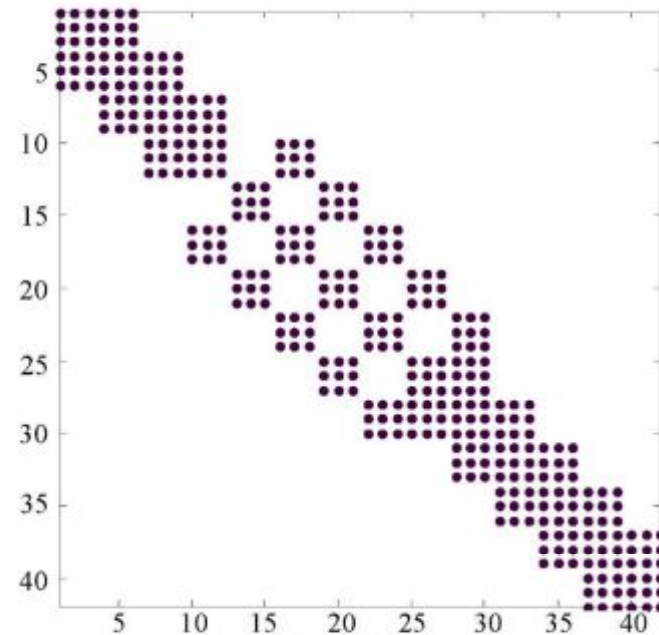


Рис. 2.8

На практике построение матрицы  $[E]$  полностью или частично автоматизировано. Как правило, вводится топологическая информация о нумерации узлов ансамбля элементов, на основании которой формируется матрица  $[E]$ .

Формально процесс конечно-элементной сборки можно представить в виде символьной процедуры произведения матриц  $[E]^T [E]$ . В результате получаем портрет глобальной матрицы жесткости  $[K]$  (рис. 2.8).

(42×42)

Характерной особенностью матрицы  $[K]$  является ее симметричная структура и разреженность. Последнее указывает на то, что матрица  $[K]$  содержит большое количество нулевых элементов. Поэтому в памяти компьютера достаточно хранить верхний треугольник матрицы  $[K]$ , содержащий только ненулевые элементы. Для этого будем использовать экономичную схему хранения числовой информации в виде разреженного строчного формата.

Отметим, что при организации вычислительного процесса процедура символической сборки  $([E]^T [E])$  предшествует процедуре численного включения элементной матрицы жесткости  $[k]$  и вектора сил  $\{p\}$  в глобальную матрицу жесткости  $[K]$  и соответствующий глобальный вектор узловых сил  $\{P\}$ .

## 2.5. Линейный анализ устойчивости методом конечных элементов

Полагая, что в продольно сжатых стержневых элементах конструкции до потери устойчивости отсутствуют изгибные деформации, представим уравнение равновесия в матричной форме

$$[[K] + \lambda [K_\Gamma]] \{W\} = 0,$$

где  $[K]$  и  $[K_\Gamma]$  – глобальные матрицы общей и геометрической жесткости;  $\lambda$  – параметр нагружения (скалярная величина);  $\{W\}$  – вектор узловых перемещений ансамбля элементов, соответствующий нормированному вектору узловых сил  $\{P\}$ , вызывающих только сжатие в конечных элементах. Для формирования матриц  $[K]$  и  $[K_\Gamma]$  используем выражения (2.5), (2.6), (2.8) – (2.12).

После потери устойчивости узловые перемещения становятся неопределенными. Математическим критерием потери устойчивости является равенство нулю определителя

$$\det [[K] + \lambda [K_\Gamma]] = 0.$$

При этом из определителя исключаются “лишние” строки и столбцы, отвечающие номерам узлов, на которые наложены связи. Таким образом, порядок результирующей системы уравнений всегда меньше, чем порядок глобальной матрицы жесткости. С вычислительной точ-

ки зрения определение параметра  $\lambda$  путем раскрытия определителя высокого порядка и решения соответствующего трансцендентного уравнения нереально. Поэтому подойдем к анализу устойчивости стержневой системы как к обобщенной проблеме собственных значений, допускающей прямое решение уравнения вида

$$[K]\{X\} = -\lambda_{\min}[K_{\Gamma}]\{X\}, \quad (2.13)$$

$\lambda_{\min}$  – неизвестное наименьшее собственное значение;  $\{X\}$  – собственный вектор, характеризующий возможную форму потери устойчивости сжатых стержней.

В данной формулировке требуется определить величину  $\lambda_{\min}$ , при которой геометрическая матрица жесткости “компенсирует” влияние матрицы общей жесткости. С физической точки зрения величина  $\lambda_{\min}$  представляет собой критическую силу  $P_{\text{кр}}$ , соответствующую потере устойчивости. При выборе алгоритма решения уравнения (2.13) следует иметь в виду, что матрица  $[K_{\Gamma}]$  имеет нулевые диагональные элементы, т. е. является вырожденной.

Для решения данной смешанной системы алгебраических уравнений применим два специальных итерационных алгоритма.

Первый алгоритм основан на отношении Релея [5]:

$$\lambda_{\min}^{(k+1)} = \frac{\{X\}_{k+1}^T [K] \{X\}_{k+1}}{\{X\}_{k+1}^T [K_{\Gamma}] \{X\}_{k+1}}, \quad k=1, 2, \dots$$

Процесс последовательных приближений останавливаем, когда

$$\frac{|\lambda_{\min}^{(k+1)} - \lambda_{\min}^{(k)}|}{\lambda_{\min}^{(k+1)}} \leq \varepsilon,$$

где  $\varepsilon = 10^{-2s}$ ,  $s$  – требуемое число значащих цифр, с которым вычисляется величина  $\lambda_{\min}$  (обычно  $s=3$ ).

Второй алгоритм определения критической нагрузки базируется на методе итераций векторных подпространств (МИВП) [5]. В соответствии с алгоритмом данного метода в конце каждого итерационного цикла формируем проекции матриц:

$$[K]_{(k)} = [u]_{(k)}^T [K] [u]_{(k)}, \quad [K_{\Gamma}]_{(k)} = [u]_{(k)}^T [K_{\Gamma}] [u]_{(k)},$$

где  $[u]_{(k)} = [\{u\}_1 \{u\}_2 \dots \{u\}_q]$  – матрица итерируемых векторов, чис-  
 $(n \times q)$

ло строк которой  $n$  равно порядку матриц  $[K]$  и  $[K_\Gamma]$ , а число столб-  
 цов  $q \ll n$  соответствует числу одновременно итерируемых векто-  
 ров. Задачу на собственные значения решаем обобщенным методом  
 Якоби:

$$[K]_{(k)} \{X\}_{(k)} = [K_\Gamma] \{X\}_{(k)} \lambda_{\min}^{(k)}$$

В качестве критерия окончания итерационного цикла используем  
 нормы ошибок:

$$\frac{\| [K] \{X\}_{(k)} - \lambda_{\min}^{(k)} [K_\Gamma] \{X\}_{(k)} \|}{\| [K] \{X\}_{(k)} \|}$$

Вектор узловой критической нагрузки определяем по формуле

$$\{P_{\text{кр}}\} = \lambda_{\min} \{P\}.$$

Общеизвестно, что линейный анализ устойчивости стержневых  
 систем дает завышенную величину критической нагрузки. Это связа-  
 но с идеализацией расчетной схемы (отсутствие начальной “погиби”  
 стержней и центральное приложение сил), а также тем, что в общей  
 матрице жесткости блок осевой деформации независим от блока из-  
 гибной деформации. Реальные стержневые элементы имеют началь-  
 ные геометрические несовершенства, что приводит к взаимосвязи  
 между осевыми и изгибными реакциями.

Вместе с тем рассмотренный численный метод позволяет дать  
 верхнюю оценку критической нагрузки, величина которой может  
 быть уточнена с помощью шаговой процедуры МКЭ.

## 2.6. Итерационный анализ устойчивости с применением шаговой процедуры метода конечных элементов

Элементы геометрической матрицы жесткости  $[K_\Gamma]$  являются  
 нелинейными функциями продольных усилий в сжатых стержневых  
 элементах. Поэтому вычислительный процесс МКЭ должен быть ор-  
 ганизован по схеме ступенчатого (шагового) увеличения нагрузки  
 при одновременной корректировке элементов матрицы  $[K_\Gamma]$  и кон-  
 троле несущей способности конструкции по найденным значениям

перемещений  $w$  в конце каждого шага нагружения.

Полагаем, что приращение нагрузки  $P_i$  на  $i$ -ом шаге происходит квазистатически и небольшой порцией. Решение геометрически нелинейной задачи на каждом шаге будем осуществлять итерационным методом Ньютона-Рафсона, суть которого состоит в последовательном вычислении дополнительных перемещений в узлах элементов, обусловленных невязкой сил. Графически такой подход (для трех шагов нагружения) представлен на рис. 2.9, а, где численное решение показано в виде ступенчатой пилообразной линии.

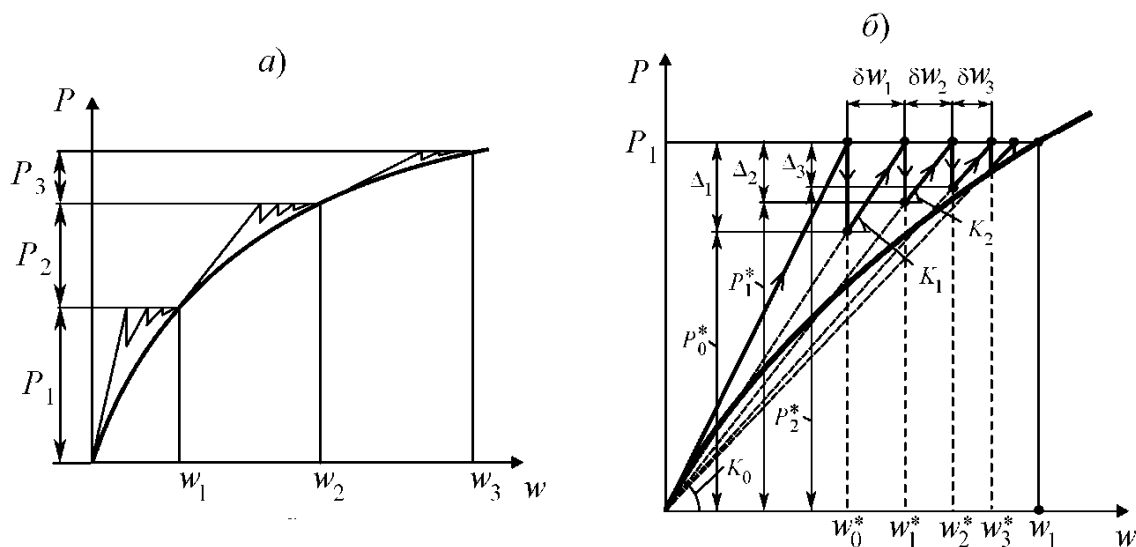


Рис. 2.9

Рассмотрим итерационный алгоритм МКЭ на примере первого шага нагружения (рис. 2.9, б). Для упрощения на рис. 2.9 фигурные и квадратные скобки в обозначениях векторов и матриц опущены.

Вычислительный процесс организуем следующим образом.

1. С помощью уравнения равновесия без учета геометрической матрицы жесткости вычисляем начальный вектор узловых перемещений

$$\{w_0^*\} = [K]^{-1} \{P_1\},$$

где  $[K]$  – матрица общей жесткости;  $\{P_1\}$  – вектор узловых сил на первом шаге нагружения.

2. Начало итерационного цикла  $i = 1, 2, \dots, n_{max}$  ( $i$  – номер итерации,  $n_{max}$  – максимальное число итераций, задаваемое расчетчиком). По найденным значениям  $\{w_{i-1}^*\}$  вычисляем осевые узловые

реакции в сжатых конечных элементах и формируем геометрическую матрицу жесткости  $[K_{\Gamma}(\{w_{i-1}^*\})]$ . В обозначении  $[K_{\Gamma}(\{w_{i-1}^*\})]$  величина в круглых скобках указывает на то, что элементы геометрической матрицы жесткости зависят от узловых перемещений.

3. Формируем “секущую” матрицу жесткости  $[K_i]$ , относящуюся к текущей итерации

$$[K_i] = [K] + [K_{\Gamma}(\{w_{i-1}^*\})].$$

4. Вычисляем узловые реакции  $\{P_{i-1}^*\}$ , соответствующие вектору узловых перемещений  $\{w_{i-1}^*\}$ :

$$\{P_{i-1}^*\} = [K_i]\{w_{i-1}^*\}.$$

5. Вычисляем вектор невязки узловых реакций:

$$\{\Delta_i\} = \{P_1\} - \{P_{i-1}^*\}.$$

6. Вычисляем вектор дополнительных узловых перемещений  $\{\delta w_i\}$ , обусловленных вектором невязки  $\{\Delta_i\}$ :

$$\{\delta w_i\} = [K_i]^{-1}\{\Delta_i\}.$$

7. Осуществляем корректировку вектора узловых перемещений:

$$\{w_i^*\} = \{w_{i-1}^*\} + \{\delta w_i\}.$$

8. Начиная с  $i=2$ , выполняем оценку сходимости итерационной процедуры с помощью условия

$$\|\delta w_i - \delta w_{i-1}\| < \varepsilon, \quad (2.14)$$

где  $\|\delta w_i - \delta w_{i-1}\| = \sqrt{\{\delta w_i - \delta w_{i-1}\}^T \{\delta w_i - \delta w_{i-1}\}}$  – норма вектора разности дополнительных узловых перемещений на смежных итерациях;  $\varepsilon = 10^{-8}$  – положительное малое число, используемое для окончания итерационного процесса уточнения решения.

Этапы 2 ÷ 8 повторяются до тех пор, пока не выполнится условие (2.14) или количество итераций не превысит  $n_{max}$ . Графически минимизация невязки сил представляет собой некоторую траекторию в виде пилообразной линии, приближающуюся к искомой точке решения (рис. 2.9, б).

Старт второго шага нагружения начинаем с решения системы уравнений

$$[[K]+[K_r(\{w_1\})]]\{w_0^*\}=\{P_2\},$$

где  $\{w_1\}$  – вектор узловых перемещений, сформированный на первом шаге нагружения;  $\{P_2\}$  – вектор дополнительных узловых сил, соответствующий второму шагу нагружения.

На этапе 3 итерационного процесса “секущую” матрицу жесткости  $[K_i]$  формируем с учетом данных, полученных на первом шаге нагружения

$$[K_i]=[K]+[K_r(\{w_1\}+\{w_{i-1}^*\})].$$

На этапе 7 корректировку вектора узловых перемещений выполняем по формуле

$$\{w_i^*\}=\{w_1\}+\{w_{i-1}^*\}+\{\delta w_i\}.$$

По аналогии выполняем вычисления на последующих шагах нагружения, используя векторы  $\{P_3\}$ ,  $\{P_4\}$ , ... .

В процессе шагового процесса нагружения осуществляем контроль поведения вектора  $\{\delta w_i\}$  на каждой итерации. Обычно при нелинейном анализе устойчивости уменьшение величины  $\{\delta w_i\}$  между смежными итерациями свидетельствует о достижении системой устойчивого состояния (процесс сходится). Фактом потери устойчивости является состояние, когда величины  $\{\delta w_i\}$  увеличиваются от итерации к итерации (процесс расходится).

В разработанном программном обеспечении по желанию пользователя может быть включена опция “*if\_dis = 1*”, позволяющая после каждого шага нагружения корректировать геометрию расчетной схемы рамы путем алгебраического суммирования узловых координат и полученных перемещений. Эта опция позволяет проследить за эволюцией деформации конструкции. Естественно, что при этом расчетное время увеличивается, т. к. в начале каждого шага нагружения приходится заново формировать матрицу общей жесткости  $[K]$ . В отключенном состоянии “*if\_dis = 0*”.

Следует отметить, что многие упругие системы после достижения точки бифуркации могут переходить в новое устойчивое состоя-



ние при дальнейшем росте нагрузки. Примером такой системы может служить пологая арка, нагруженная сосредоточенной силой в центре (рис. 2.10).

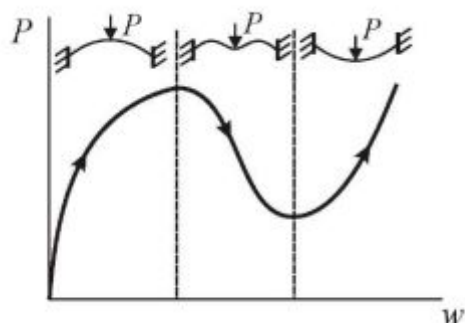


Рис. 2.10

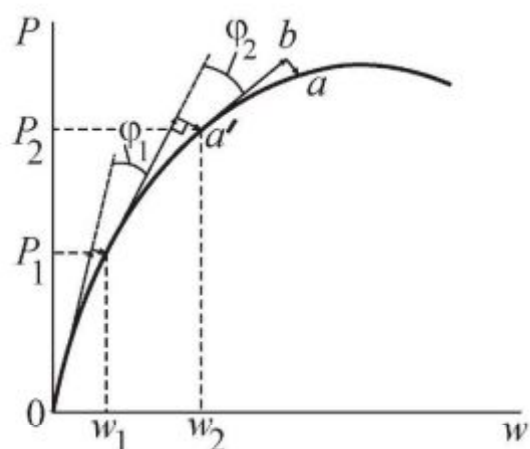


Рис. 2.11

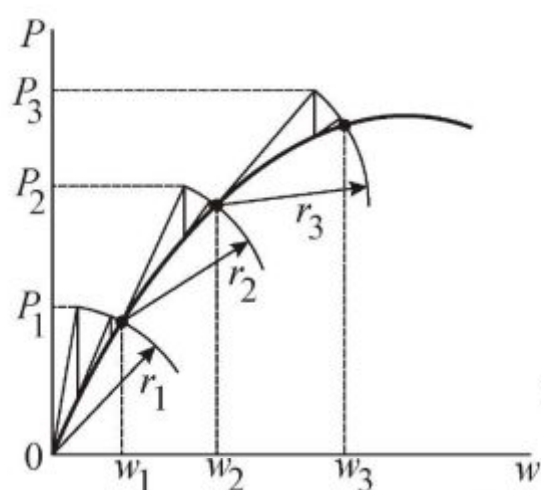
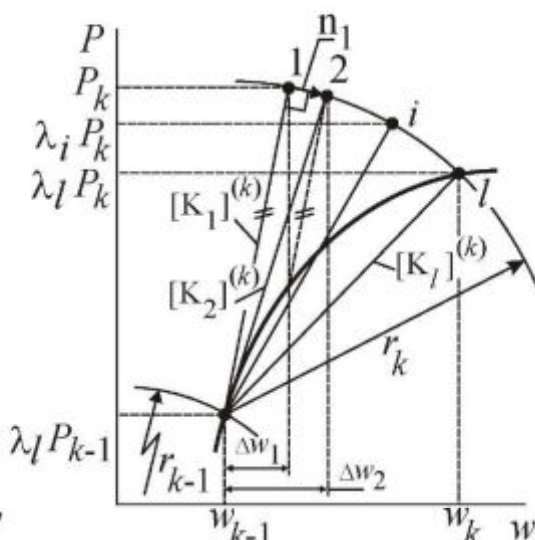


Рис. 2.12



Как видно с ростом нагрузки арка будет прогибаться вниз, пока не наступит момент “прошелкивания”. Далее арка принимает новую устойчивую форму, что позволяет ей вновь сопротивляться увеличению нагрузки.

На практике такое поведение конструкции может быть исследовано с помощью метода продолжения решения по параметру или метода корректирующих дуг. Суть этих методов, базирующихся на процедуре Ньютона-Рафсона, состоит в корректировке величины шага нагружения при приближении и после прохождения точки “бифуркации”. Геометрическая интерпретация этих методов представлена со-

ответственно на рис. 2.11, 2.12.

Метод продолжения решения по параметру основан на корректировке параметра нагружения  $\lambda$ , характеризующего длину вектора  $ab$  (рис. 2.11). Величина  $\lambda_j$  на  $j$ -м шаге определяется по формуле

$$\lambda_j = \lambda_0 \cos^2 \varphi_j,$$

где  $\varphi_j$  – угол между касательными к кривой  $P \sim w$ , построенными в точках  $a'$  и  $a$ . Очевидно, при малой кривизне угол  $\varphi_j$  близок к  $\pi$  и  $\lambda_j \approx \lambda_0$ . При увеличении кривизны угол  $\varphi_j$  значительно уменьшается ( $\lambda_j < \lambda_0$ ), что приводит к снижению приращения нагрузки при прохождении точки перегиба на кривой  $P \sim w$ .

Представленная на рис. 2.12 схема метода корректирующих дуг  $r_1, r_2, r_3, \dots$  обеспечивает сходимость равновесных итераций метода Ньютона-Рафсона путем определения векторов  $n_j, j=1, 2, \dots, l$  ортогональных отрезкам радиуса  $r_k$ , секущих кривую  $P \sim w$ . Каждый отрезок секущей линии представляет собой решение системы:

$$[K_i]^{(k)} \{\Delta w_i\} = \lambda_i \{P\}_k,$$

где  $[K_i]^{(k)} = [[K] + [K_r(\{w_{k-1}\} + \{\Delta w_i\})]]$ .

В обоих методах при переходе к следующему шагу нагружения автоматически осуществляется пересчет геометрии исследуемой конструкции.

## 2.7. Примеры линейного анализа устойчивости методом конечных элементов

С целью верификации (проверки на точность и сходимость) конечно-элементного решателя рассмотрим серию учебных примеров, для которых критическая нагрузка определена аналитически. При линейном анализе устойчивости рам с помощью алгоритма Релея следует придерживаться правила, согласно которому сжатые (нагруженные) стержни, как правило, стойки можно разбивать на несколько конечных элементов, а ненагруженные – обычно ригели – моделируются только одним элементом. При расчете критической силы по МИВП данного правила не придерживаемся. Подробное описание ввода ис-

ходных данных изложено в приложении 5.

**Пример 1.** Требуется определить критическую нагрузку  $P_{кр}$  для плоской рамы, показанной на рис. 2.13, а. Стержни рамы выполнены из стального проката двутаврового поперечного сечения № 14 (ригель двойной профиль). На рис. 2.13, б изображена конечно-элементная модель рамы, состоящая из 13 пространственных балочных элементов. Данная модель применима только для МИВП. Конечные элементы, включающие узлы 3, 4 и 4, 6 являются комбинированными. Причем у элемента с узлами 3, 4 шарнир расположен в конце (рис. 2.4, б), а у элемента с узлами 4, 6 в начале (рис. 2.4, а). Здесь и далее значок “×” связан с ориентацией “третьей точки” (рис. 2.13, в), лежащей в плоскости наибольшей жесткости элемента. Шарнир обозначен выделенной точкой – • (рис. 2.13, б). Введенные дополнительные связи в направлении оси  $Z_1$  позволяют раме деформироваться только в плоскости  $Z_2, Z_3$ .

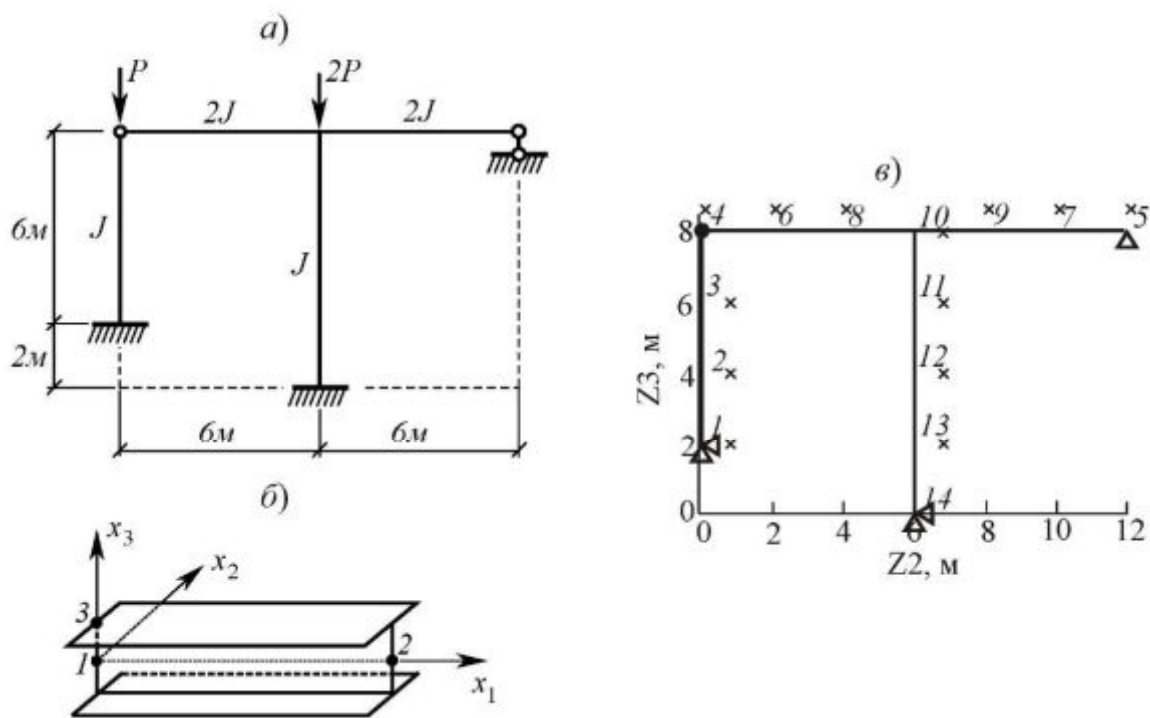


Рис. 2.13

Опытным путем установлено, что при реализации алгоритма Релея конструкционные элементы рам, не воспринимающие сжимающей продольной нагрузки, следует моделировать одним конечным элементом. В противном случае итерационный процесс расходится. Поэтому в рассматриваемом примере ригель представляем двумя ко-

нечными элементами, т.е. узлы 6, 7, 8, 9 отсутствуют.

Безразмерный параметр продольной нагрузки для стойки высотой 6 м принимаем равным 1, для стойки высотой 8 м – 2.

Ранее в пп. 1.5 методом перемещений для рассматриваемой рамы было получено значение критической силы, равное  $P_{кр} = (4,64 \cdot EJ) / l^2 = 78209$  Н. Численное значение критической силы, найденное с помощью алгоритмов Релея и МИВП соответственно за 7 и 11 итераций, составило  $P_{кр} = 78340$  Н. Таким образом, для принятой схемы разбивки рамы на конечные элементы относительная погрешность не превышает 0,2%.

Следует отметить, что при использовании процедуры Релея информация, содержащаяся в собственном векторе  $\{X\}$ , практического значения не представляет. Это связано с ранее указанным ограничением, накладываемым на дискретизацию ригелей рамы.

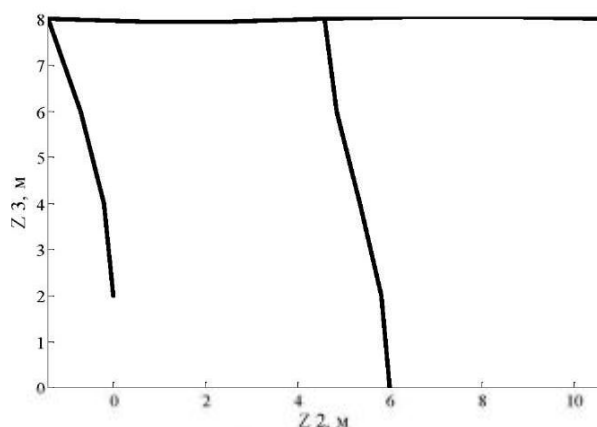
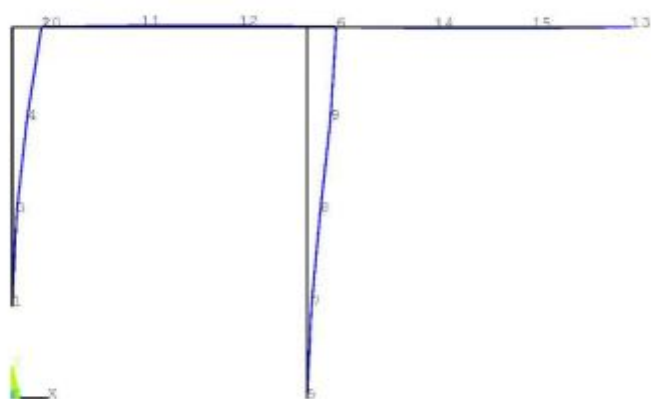


Рис. 2.14



FREQ=78345

Рис. 2.15



Процедура МИВП дает возможность получить как значения критической силы, так и проанализировать соответствующую форму потери устойчивости. На рис. 2.14 приведена картина деформированного состояния рассматриваемой рамы после потери ею устойчивости 1-го рода. Для сравнения на рис. 2.15 представлена аналогичная картина рамы до и после потери устойчивости, полученная с помощью вычислительного комплекса ANSYS 10. Соответствующая программа на языке APDL с комментариями приведена в приложении 6. Как видно в данном случае значение критической силы составило  $FREQ=78345$  Н.

**Пример 2.** Требуется определить критическую нагрузку  $P_{кр}$  для Г-образной плоской рамы, показанной на рис. 2.16, а. Конечно-элементная модель для данного примера при расчете по МИВП представлена на рис. 2.16, б. Параметр продольной нагрузки для стойки принимаем равным 1.

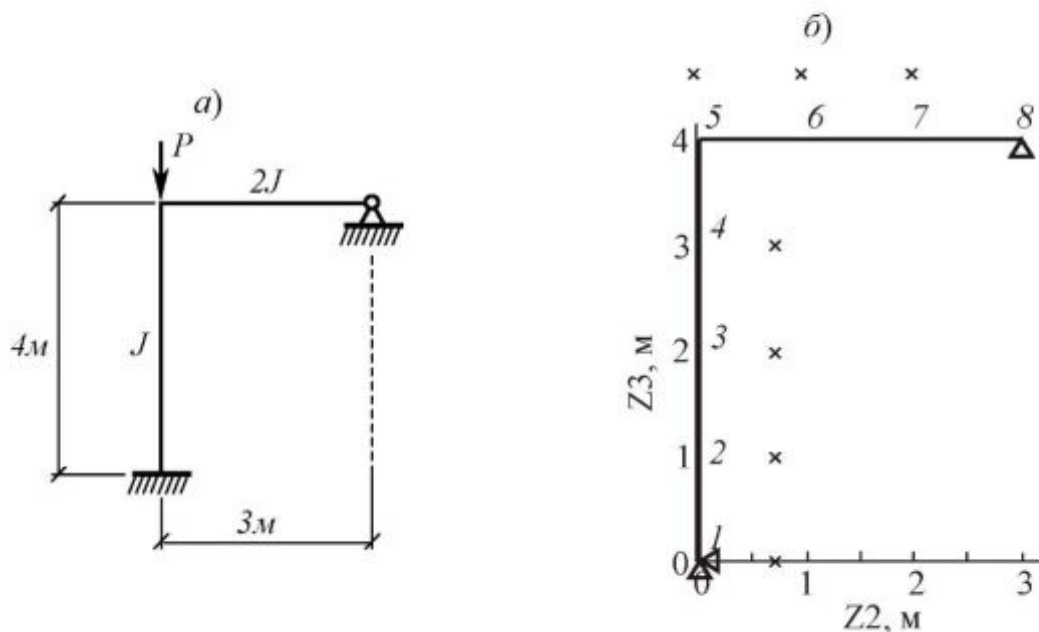


Рис. 2.16

В работе [3] приведено аналитическое значение  $P_{кр} = 2EJ$ . Численное решение, полученное с помощью алгоритмов Релея и МИВП соответственно за 11 и 8 итераций, составило  $P_{кр} = 2,01EJ$ . Величина критической нагрузки, определенная в работе [6] с помощью степенных рядов, равна  $P_{кр} = 2,04EJ$ .

Форма потери устойчивости Г-образной рамы приведена на рис. 2.17.

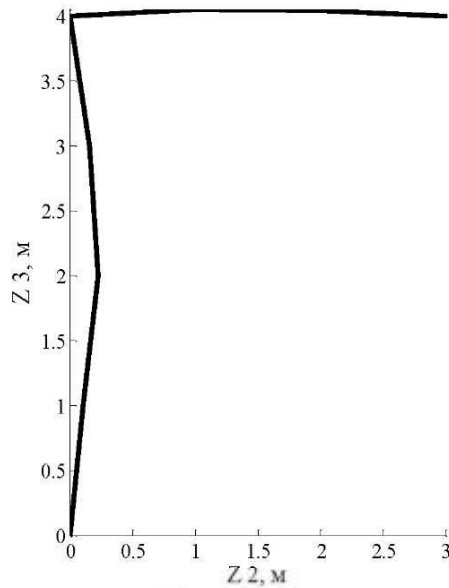


Рис.2.17

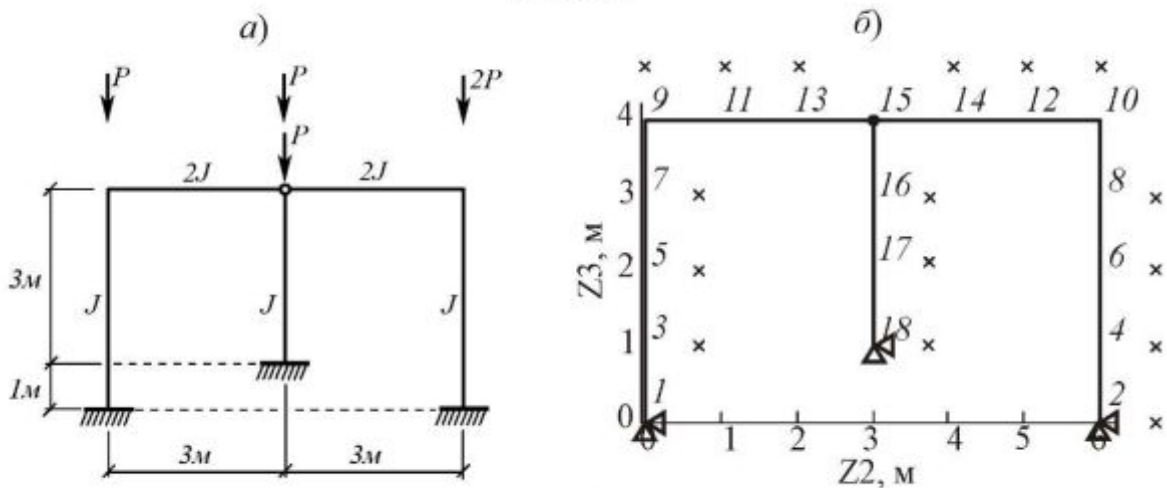


Рис. 2.18

**Пример 3.** Требуется определить критическую нагрузку  $P_{кр}$  для симметричной рамы с центральным шарниром, изображенной на рис. 2.18, а. Рассмотрим два варианта нагружения: а) силой  $P$ , приложенной к средней стойке; б) асимметричной системой сил  $P, P, 2P$ . Разбивка рамы на конечные элементы для МИВП показана на рис. 2.18, б. Конечные элементы, примыкающие к шарниру являются комбинированными. Причем данные элементы располагаем так, что они все ориентированы “шарнирными концами” к общему узлу 15. Шарнирное соединение рамы моделируем путем задания дополнительного граничного условия, запрещающего поворот относительно оси  $Z_1$  в точке с соответствующими координатами. Величину параметра продольной нагрузки назначаем исходя из рассматриваемого варианта нагружения.

В работе [3] аналитически получены следующие результаты:

а)  $P_{кр} = 0,9216 EJ$  б)  $P_{кр} = 0,3108 EJ$ .

В работе [6] для рассматриваемого примера приведены значения критической нагрузки:

а)  $P_{кр} = 0,9253 EJ$ ; б)  $P_{кр} = 0,3116 EJ$ .

Данные численного решения, полученные с помощью итерационного алгоритма, основанного на отношении Релея:

а) 10 итераций,  $P_{кр} = 0,9227 EJ$ ; б) 8 итераций,  $P_{кр} = 0,3102 EJ$ .

Результаты конечно-элементного расчета на базе МИВП:

а) 8 итераций,  $P_{кр} = 0,920 EJ$ ; б) 8 итераций,  $P_{кр} = 0,310 EJ$ .

Соответствующие картины форм потери устойчивости представлены на рис. 2.19 и 2.20.

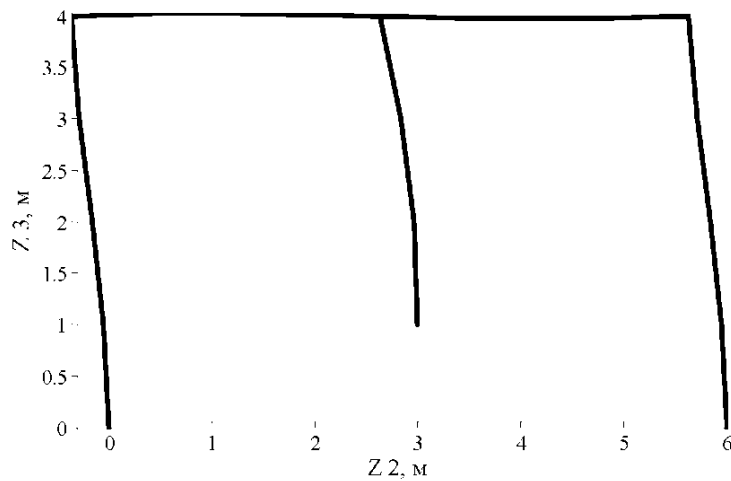


Рис. 2.19

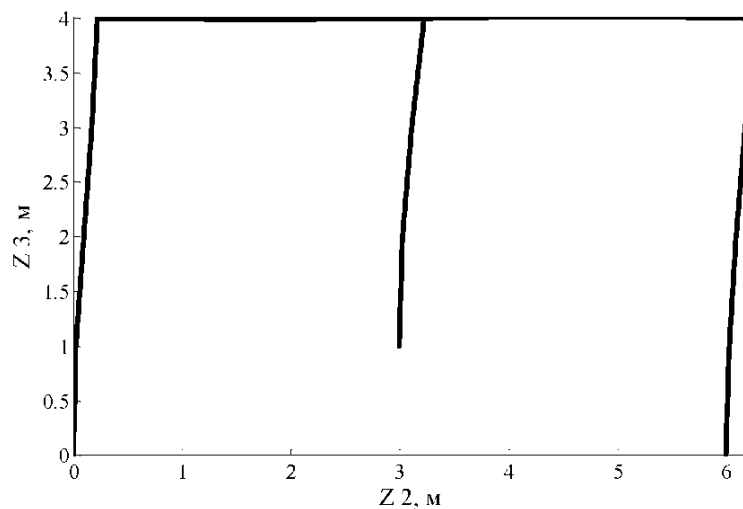


Рис. 2.20

**Пример 4.** Требуется определить критическую силу  $P_{кр}$  для двухступенчатой стойки, изображенной на рис. 2.21, а. Используя равномерный шаг, разбиваем стойку на 6 конечных элементов (рис.2.21, б). Величину параметра продольной нагрузки  $\nu$  назначаем для первой ступени, равной 4, для второй ступени – 1. Изгибную жесткость второй ступени принимаем равной  $EJ=1,144 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$ .

Численные значения критической нагрузки, полученные с помощью алгоритмов Релея и МИВП практически совпадают:  $P_{кр} = 90421 \text{ Н}$ ,  $P_{кр} = 90420 \text{ Н}$ . Для сравнения величина  $P_{кр}$ , полученная для аналогичной двухступенчатой стойки в разделе 1.5 методом перемещений, составила 90413 Н.

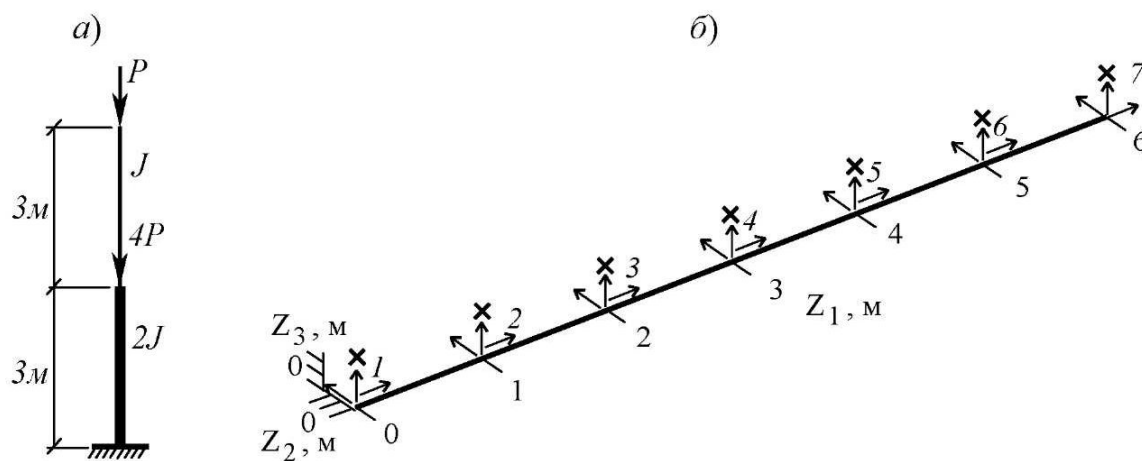


Рис. 2.21

Формы потери устойчивости двухступенчатого стержня, полученные с помощью МИВП и метода Релея, показаны на рис. 2.22.



Рис. 2.22



**Пример 5.** Требуется определить критическую нагрузку  $q_{кр}$  для арки параболической формы (рис. 2.23). Размеры поперечного сечения арки  $0,4 \times 0,4$  м. Модуль упругости материала  $E = 2,7 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>. Уравнение, описывающее положение оси арки принимаем в виде [6]:

$$z = \frac{4f}{l^2}(lx - x^2).$$

Схема равномерной разбивки арки на конечные элементы с шагом 2 м (8 конечных прямолинейных балочных элементов) показана на рис. 2.24. Здесь оси  $Z_2$  и  $Z_3$  соответствуют осям  $x$  и  $z$  расчетной схемы.

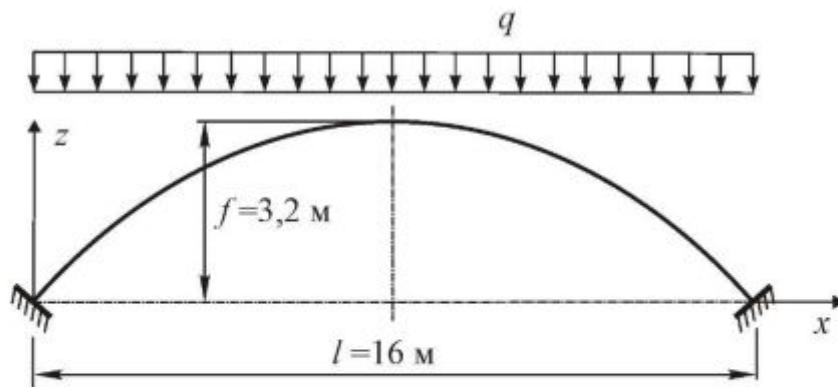


Рис. 2.23

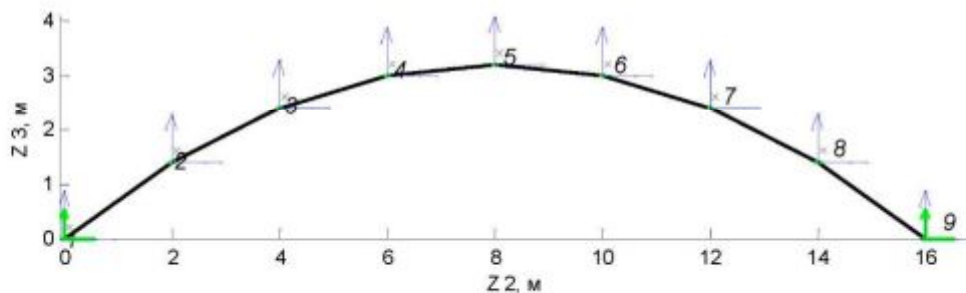


Рис. 2.24

Особенность данной стержневой конструкции состоит в том, что мы заранее не располагаем параметрами продольной нагрузки в конечных элементах. Поэтому предварительно решим обычную статическую задачу прочностного анализа, приняв  $q = 1$  Н/м. Схема приведения равномерно распределенной нагрузки к узловым силам и моментам рассмотрена ниже.

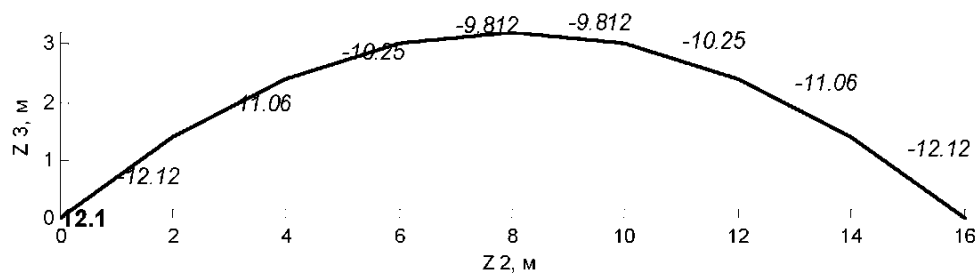


Рис. 2.25

В результате прочностного расчета получим картину распределения продольных сил в элементах (рис. 2.25). Отсюда можно задаться значениями параметра продольной силы для каждого элемента. Так для элементов 4-5, 3-4, 2-3, 1-2 принимаем следующие значения безразмерного параметра продольной силы: 1,0; 1,04; 1,13; 1,23.

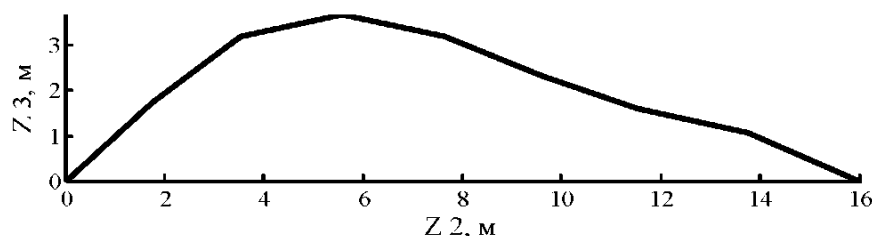


Рис. 2.26

Как следует из полученных данных, минимальному значению критической нагрузки (в замке)  $N_{кр} = 14510 \cdot 10^3$  кН соответствует кососимметричная форма деформации арки (рис. 2.26). Для перехода от  $N_{кр}$  к  $q_{кр}$  используем соотношение:

$$q_{кр} = \frac{14510 \cdot 10^3 \text{ кН} \cdot 1 \text{ Н/м}}{9,81 \text{ Н}} = 1479 \cdot 10^3 \text{ Н/м} .$$

Теоретическое значение критической нагрузки, приведенное в [3], составляет  $q_{кр} = 1420 \cdot 10^3$  Н/м. Относительная погрешность численного решения составляет 4,2%. В работе [6] с помощью МКЭ для аналогичного числа элементов получено значение  $q_{кр} = 1457 \cdot 10^3$  Н/м.

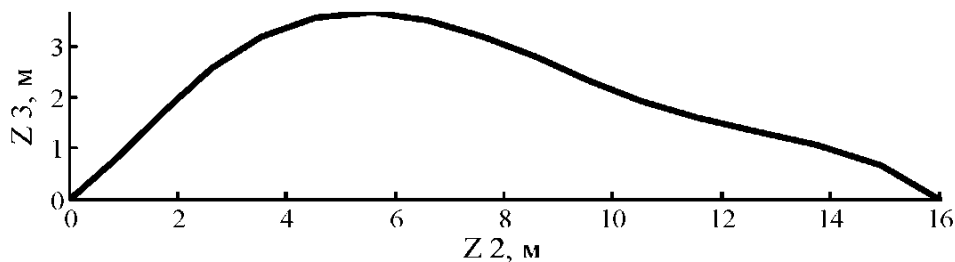


Рис. 2.27

Интерес представляет влияние уменьшения шага разбивки на уточнение значения  $q_{кр}$ . Выполнив расчет с шагом 1 м (16 конечных элементов), получим  $q_{кр} = 1466 \cdot 10^3$  Н/м. Таким образом, двукратное уменьшение размеров конечных элементов практически не отражается на точности численного решения. Соответствующая форма потери устойчивости арки приведена на рис. 2.27.

## 2.8. Примеры деформационного расчета стержневых систем

Напомним, что согласно разработанному алгоритму вычислительный процесс организован в виде шаговой итерационной процедуры, с использованием равномерной схемы разбивки процесса нагружения. Результирующие узловые реакции в элементах вычисляются с помощью формулы

$$\{p\} = ([k] - P_{x\text{ср}}[k_r])\{w\},$$

где  $P_{x\text{ср}} = 1/2(|P_{x1}| + |P_{x2}|)$  – среднее значение сжимающей продольной силы в элементе. Для растянутых элементов принимаем  $P_{x\text{ср}} = 0$ .

**Пример 1.** Требуется оценить напряженно-деформированное состояние portalной рамы, изображенной на рис. 2.28. Сечения всех стержней рамы принимаем одинаковыми, выполненными из стального двутавра с характеристиками:  $I_x = 8950$  см<sup>4</sup>;  $I_y = 518$  см<sup>4</sup>;  $F = 61,2$  см<sup>2</sup>. Параметр нагрузки  $P$  назначаем как в примере [3] равным 1 т. Разбивку стоек и ригеля на конечные элементы выполняем с шагом 1 м. Процесс нагружения осуществляем за десять шагов.

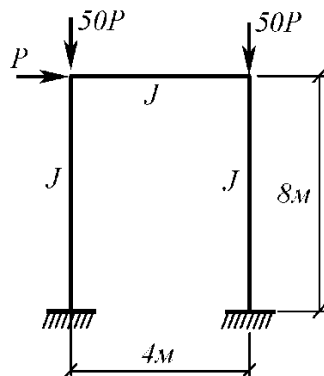


Рис. 2.28

Результаты расчетов в виде картин рамы в деформированном состоянии (визуальный масштаб перемещений 100:1) представлены на рис. 2.29. Данные линейного расчета показаны на рис. 2.29, а.

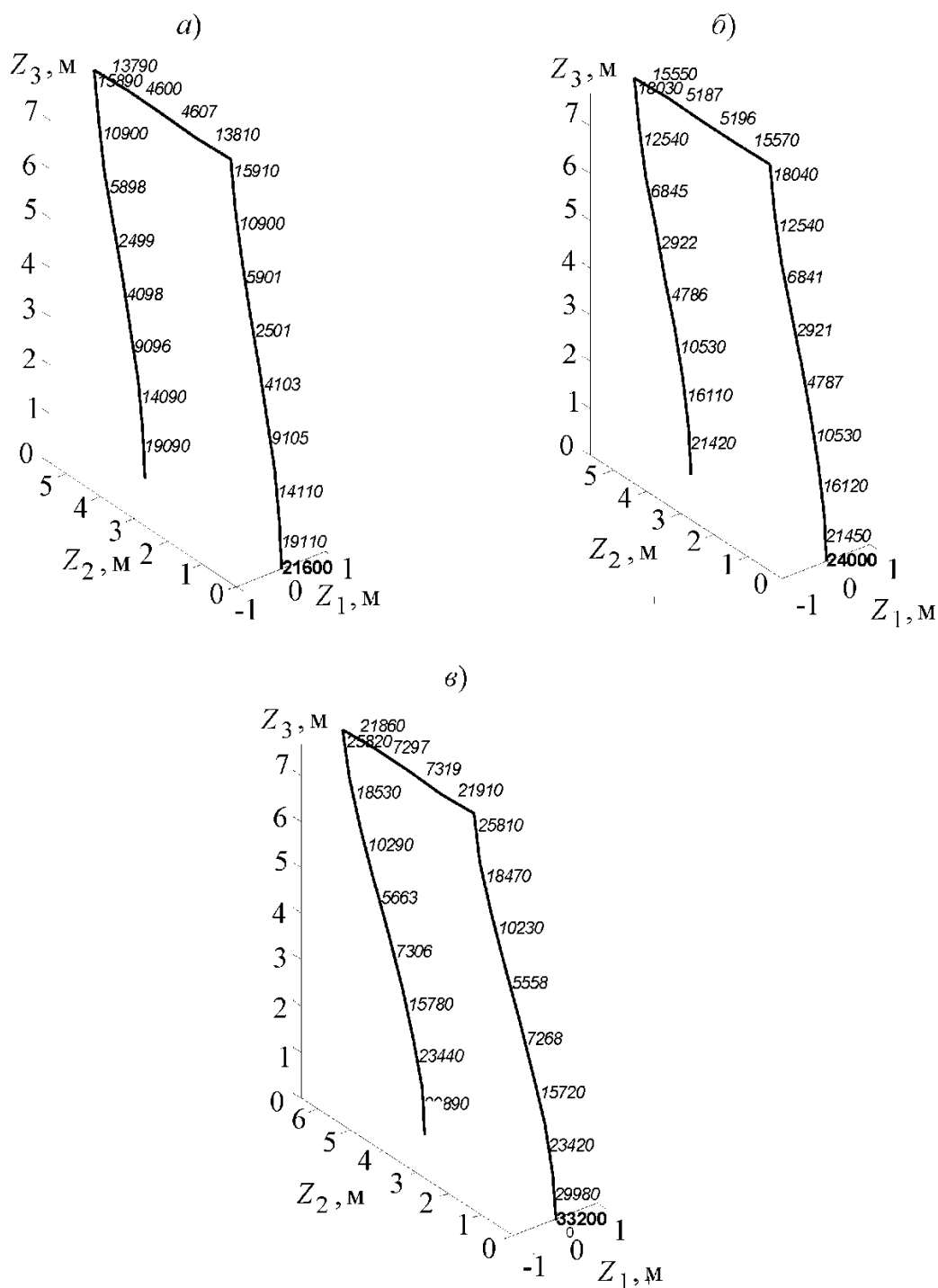


Рис. 2.29

На рис. 2.29, б и 2.29, в приведены результаты деформационного

расчета, полученные соответственно без включения и с включением опции *if\_dis*.

На рис. 2.29 и далее цифры, нанесенные с помощью наклонного шрифта, являются значениями изгибающего момента  $M_{Z_1}$  (Н·м) в центрах конечных элементов. Значение максимального момента на каждом рисунке выделено жирным ненаклонным шрифтом.

Как видно, расчет по деформированной схеме с корректировкой координат узлов после каждого шага нагружения (рис. 2.29, в) приводит к увеличению изгибающего момента по сравнению с линейным расчетом (рис. 2.29, а) на 35%.

Сравнивая полученные величины максимального изгибающего момента  $24,0 \cdot 10^3$  кН·м (рис. 2.29, б) и  $33,2 \cdot 10^3$  кН·м (рис. 2.29, в) с данными, приведенными в [3, 6] ( $26,155 \cdot 10^3$  кН·м), обнаруживаем, что вычисленные значения образуют “вилку”, в которую попадает результат из цитируемых источников.

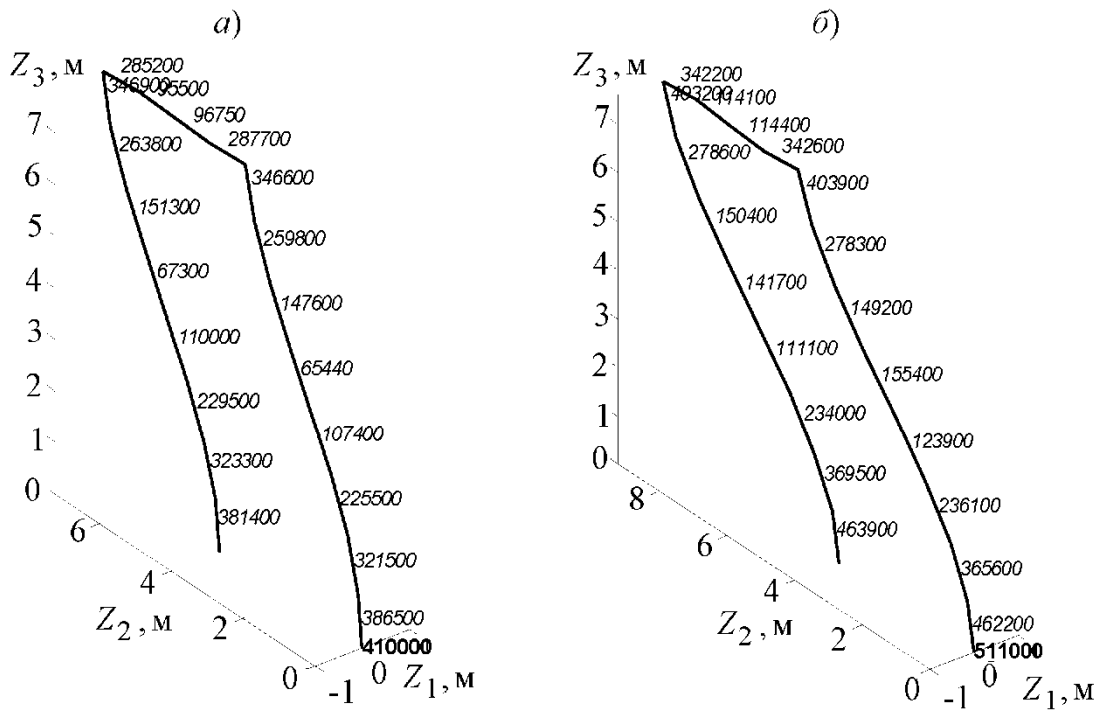


Рис. 2.30

Перемещение ригеля вдоль оси  $Z_2$  принимает следующие значения: 0,01477 м (рис. 2.29, а); 0,01681 м (рис. 2.29, б); 0,02397 м (рис. 2.29, в).

Выполнив расчет рассматриваемой плоской рамы на устойчивость 1-го рода, получаем параметр критической нагрузки  $P_{кр} = 46874$  Н или  $P_{кр} / P = 4,78$ .

Таким образом, критическая нагрузка оказывается почти в 5 раз выше заданной. С целью анализа около критического поведения рамы осуществим расчет по деформированной схеме при значении параметра нагрузки  $P = 4,5$  т. Результаты нелинейного конечно-элементного решения без учета и с учетом конечных перемещений приведены соответственно на рис. 2.30, а и 2.30, б (визуальный масштаб перемещений 10:1).

Значение перемещения ригеля вдоль оси  $Z_2$  при  $P = 4,5$  т увеличилось до 0,3255 (рис. 2.30, а) м и 0,3705 м (рис. 2.30, б).

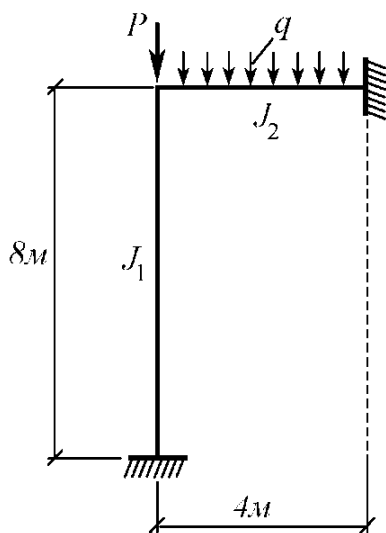


Рис. 2.31

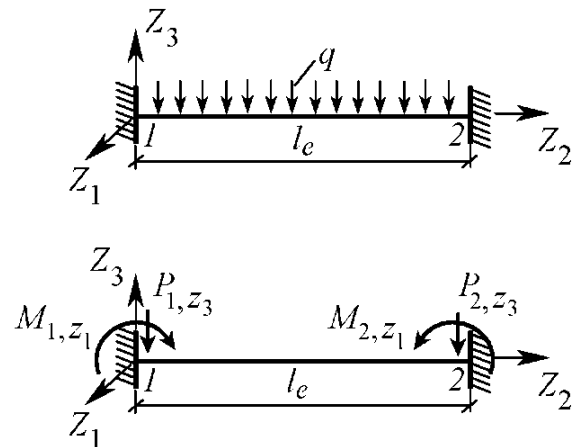


Рис. 2.32

**Пример 2.** Выполним расчет Г-образной стальной рамы, нагруженной сосредоточенной силой  $P = 10$  т и распределенной нагрузкой  $q = 2$  т/м, рис. 2.31. Принимаем, что стойка выполнена из двутавра № 14,  $I_x = 572$  см<sup>4</sup>,  $I_y = 41,9$  см<sup>4</sup>,  $F = 17,4$  см<sup>2</sup>, а ригель – из двутавра № 18,  $I_x = 1290$  см<sup>4</sup>,  $I_y = 82,6$  см<sup>4</sup>,  $F = 23,4$  см<sup>2</sup>. Шаг разбивки на конечные элементы по длине стойки и ригеля принят одинаковым и равным  $l_e = 1$  м. Процесс нагружения разбиваем на десять шагов. Схема приведения распределенной нагрузки к узловой на примере одного элемента показана на рис. 2.32. Считая концы элемента жестко зашкеленными, величины сосредоточенных узловых сил и момен-

тов с учетом знака вычисляем по формулам:

$$P_{1,Z_3} = P_{2,Z_3} = \frac{ql_e}{2}; \quad \cdot - M_{1,Z_1} = M_{2,Z_1} = \frac{ql_e^2}{12}.$$

В дальнейшем формирование вектора  $\{P\}$  выполняем способом адресного включения и аккумуляирования составляющих узловых сил и моментов для всех элементов модели.

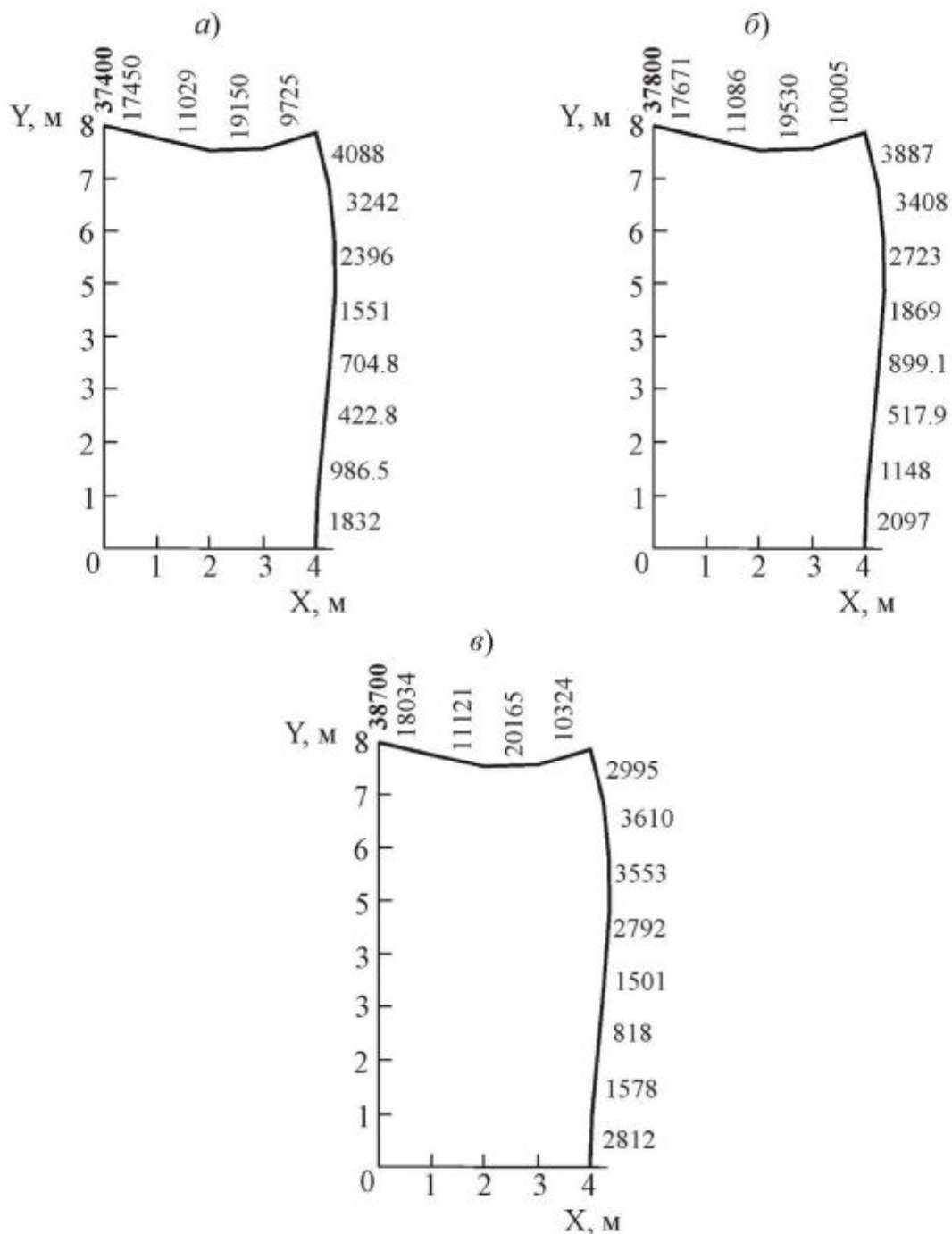


Рис. 2.33

На рис. 2.33 представлены картины распределения изгибающего момента  $M_Z$  (Н·м) в деформированной раме (визуальный масштаб перемещений 50:1) в следующем порядке: рис. 2.33, *a* – линейное решение; рис. 2.33, *б* – обычный деформационный расчет; рис. 2.33, *в* – деформационный расчет с корректировкой узловых координат на каждом шаге нагружения. На рис. 2.33 и далее ось  $Z$  направлена на наблюдателя.

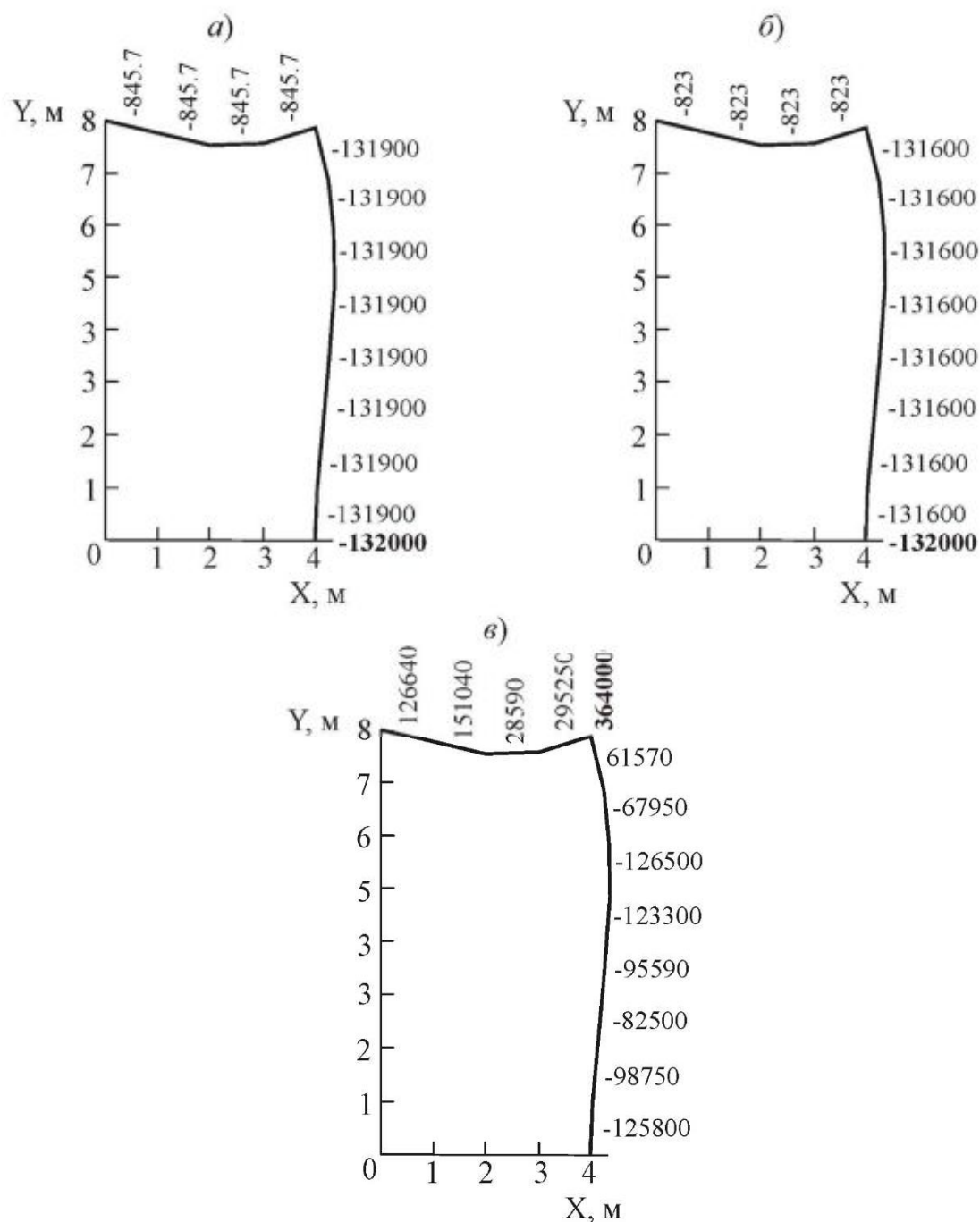


Рис. 2.34



Шаг разбивки рамы на конечные элементы принят равномерным и равным 1 м. Для сравнения точное значение максимального изгибающего момента (в месте заделки ригеля) при линейном решении составляет  $M_Z = 37,58$  кН·м. Таким образом, принятая дискретизация рамы дает относительную погрешность расчета равную 0,5%.

Учет изменения жесткости рамы от действия продольной нагрузки приводит к росту момента на нижнем конце стойки. Наиболее точным следует считать решение по деформированной схеме с корректировкой узлов (рис. 2.33, в), т. к. при таком подходе конечно-элементное решение ближе к результату деформационного расчета в форме метода перемещений [3].

Интересную информацию получаем, сравнивая картины распределения продольной силы  $P_{x\text{cp}}$  (Н) в стойке и ригеле рассматриваемой рамы. Результаты для сравнительного анализа  $P_{x\text{cp}}$ , полученные при линейном расчете, обычном деформационном расчете, и деформационном расчете с корректировкой координат узлов расчетной схемы приведены соответственно на рис. 2.34.

Абсолютное значение максимальной величины  $P_{x\text{cp}}$  на рис. 2.34 обозначено жирным шрифтом. По данным работы [3] значения продольной силы при линейном расчете составили: в стойке – 131600 Н; в ригеле – 800 Н; при деформационном расчете в ригеле – 710 Н.

В табл. 2.1 приведены результаты численного решения данной задачи, полученные с помощью вычислительного комплекса ANSYS 10 шаг разбивки рамы на конечные элементы – равномерный, равный 1 м. В приложении 7 представлен текст соответствующей программы на языке APDL с комментариями.

Таблица 2.1

| Тип балочного<br>конечного элемента | Значение в ригеле<br>$M_{Z\text{max}}$ , кН·м |                     | Значение в стойке<br>$N$ , кН |                     |
|-------------------------------------|---|---------------------|-------------------------------|---------------------|
|                                     | Линейное<br>решение                           | Деформац.<br>расчет | Линейное<br>решение           | Деформац.<br>расчет |
| BEAM3                               | 39,305  | 39,807              | 131,251                       | 130,884             |
| BEAM4                               | 39,305  | 39,812              | 131,251                       | 130,880             |
| BEAM188                             | 37,351  | 37,889              | 131,343                       | 130,950             |

Моделирование рамы элементом BEAM188 с неравномерной сеткой (1 м на стойке и 0,5 м на ригеле) дает следующие значения момента в заделке: при линейном расчете  $M_{Z_{max}}=38,601$  кН·м; при деформационном расчете  $M_{Z_{max}}=39,139$  кН·м.

Как видно из рис. 2.34 при линейном и обычном расчетах по деформированной схеме сжимающие осевые усилия в ригеле и стойке постоянны и численно определяются величинами одного порядка. В случае решения задачи по деформационной схеме с корректировкой координат узлов (рис. 2.34, в) растягивающие усилия  $P_{x_{cp}}$  в ригеле значительно превышают данные предыдущих расчетов и существенно изменяются по длине этого элемента рамы. Последнее является следствием наличия распределенной нагрузки, которая при изгибной деформации ригеля обуславливает неравномерное осевое воздействие на него. Учет изменения податливости стойки при перестройке расчетной схемы рамы также приводит к неоднородному распределению продольной сжимающей силы в этом элементе.

**Пример 3.** Требуется выполнить анализ устойчивости внецентренно сжатой стойки квадратного поперечного сечения 0,4x0,4 м (рис. 2.35). Модуль упругости материала принимаем как и работе [6] равным  $E=2,7 \cdot 10^7$  Н/м<sup>2</sup>.

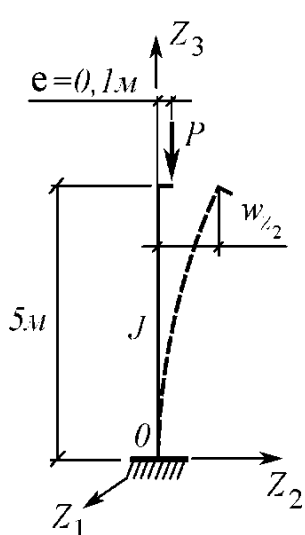


Рис. 2.35

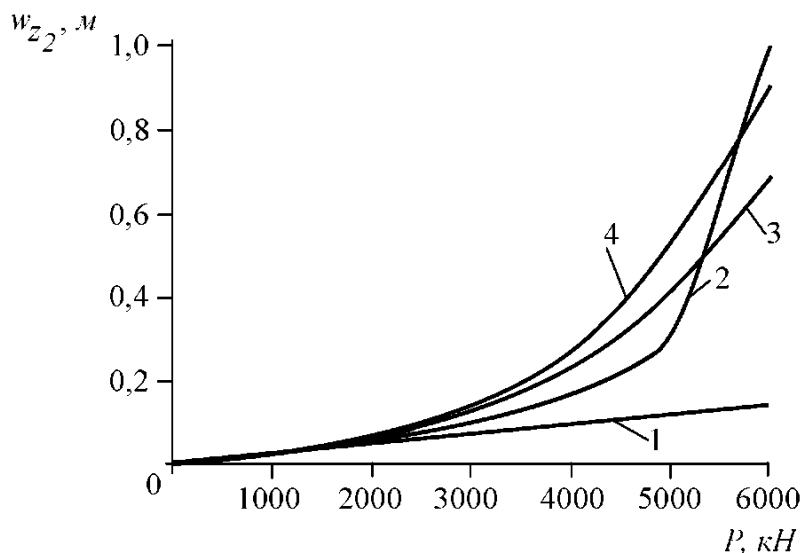


Рис. 2.36

Данные расчетов представлены в виде графиков зависимости горизонтального перемещения свободного конца стойки  $w_{z_2}$  от на-

грузки  $P$  на рис. 2.36. Здесь цифрами обозначено: 1 – линейное решение; 2 – решение по обычной деформированной схеме; 3 – решение по деформированной схеме с пересчетом координат узлов на каждом шаге нагружения; 4 – результаты работы [6]. Во всех вариантах расчетов шаг приращения по нагрузке принимался равным 500 кН.

Отметим, что при максимальном нагружении  $P=6000$  кН деформационный расчет с корректировкой координат узлов дает меньшее значение  $w_{z_2}$ , чем решение по обычной деформированной схеме. Это объясняется тем, что конечно-элементная модель, деформируясь, перестраивается и тем самым активнее сопротивляется внешнему силовому воздействию.

**Пример 4.** Требуется выполнить конечно-элементный анализ зависимости между сосредоточенной силой  $P$  и узловым вертикальным перемещением центрального шарнира  $v$  фермы Мизеса, рис. 2.37. Размеры фермы:  $x_0=3$  м;  $y_0=0,3$  м. Стержни конструкции выполнены из стальной трубы ( $E=2 \cdot 10^5$  МПа), наружный и внутренний диаметры которой соответственно равны 10 см и 9,3 см.

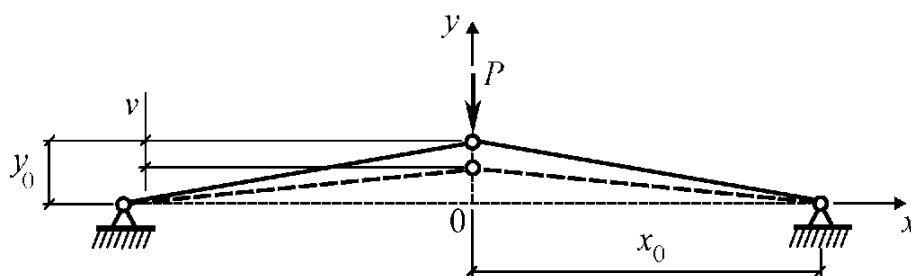


Рис. 2.37

Расчеты осуществлялись с использованием шаговой процедуры процесса нагружения без учета влияния продольной силы на деформацию системы. Рассматривалась 1/2 часть фермы. При этом наклонный стержень моделировался тремя балочными конечными элементами. Начиная со второго шага нагружения, выполнялась корректировка координат узлов расчетной схемы с поправкой на конечные перемещения. На рис. 2.38 показаны результаты численного решения для двух вариантов приращения нагрузки:  $\Delta P=1000$  кН (кривая 1);  $\Delta P=500$  кН (кривая 2). Установлено, что двукратное уменьшение шага  $\Delta P$  приводит к 10%-ому снижению критической нагрузки (рис. 2.38).

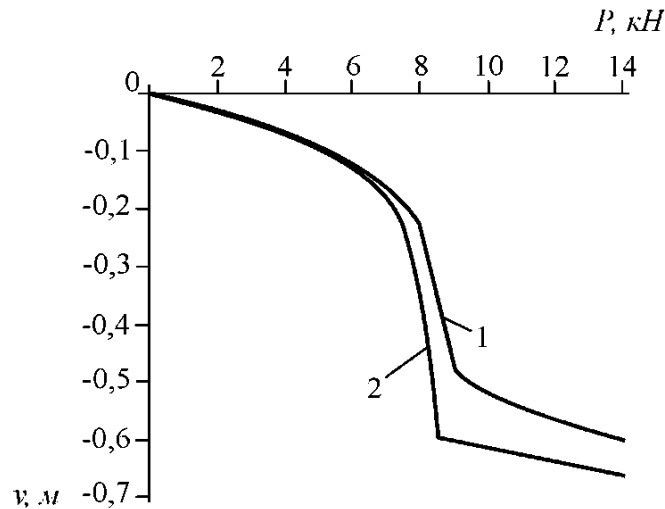


Рис. 2.38

На представленном графике отчетливо прослеживается резкое нелинейное падение осевой жесткости фермы на участке нагрузки от 6 до 9 кН. С физической точки зрения это явление объясняется эффектом “прошелкивания” или Эйлеровой формой потери устойчивости фермы. После “прошелкивания” в предварительно сжатых стержнях возникают растягивающие осевые усилия.

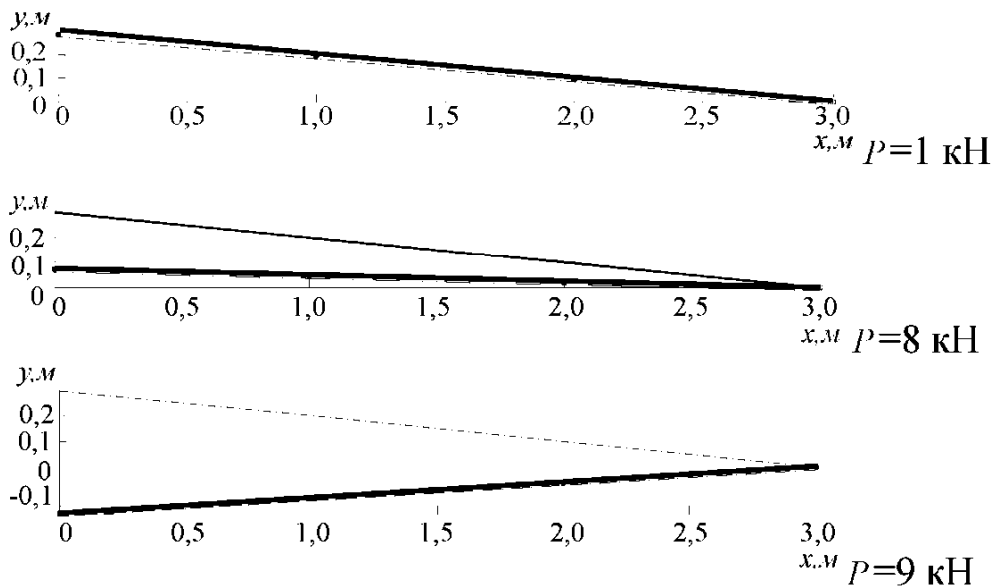


Рис. 2.39

Это видно из серии картин на рис. 2.39, демонстрирующих работу 1/2 части фермы при различных уровнях нагружения ( $\Delta P = 1000$ кН). Здесь исходное положение наклонного стержня показано тонкой линией.

Таблица 2.2

| Решение            | $P_{кр}$ , кН |
|--------------------|---------------|
| Автор (3элемента)  | 90            |
| LINK1 (1 элемент)  | 90            |
| BEAM3 (3 элемента) | 86,14         |

В табл. 2.2 приведены значения критической нагрузки  $P_{кр}$  для фермы Мизеса, полученные с использованием разработанного программного обеспечения и вычислительного комплекса ANSYS10 с применением двух типов конечных элементов LINK1 (2D ферменный элемент) и BEAM3 (2D балочный элемент).

## Глава 3. ДИНАМИКА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

### 3.1. Виды динамического воздействия на строительные сооружения

Силовое воздействие носит динамический характер, если оно изменяется за короткий промежуток времени. При динамическом нагружении массивные элементы сооружения совершают колебательные движения, что может стать причиной аварии. Кроме этого продолжительные механические колебания, вызванные работой механизмов, оказывают негативное воздействие на организм человека. Вместе с тем искусственные колебания широко используются в ряде технологических процессов, например, при уплотнении бетонной массы в опалубке и транспортировке сыпучих грузов.

Динамическую нагрузку разделяют на следующие виды: гармоническое возбуждение с периодом  $T$  (рис. 3.1, а); негармоническое возбуждение с периодом  $T$  (рис. 3.1, б); ударное воздействие (рис. 3.1, в); взрывное воздействие (рис. 3.1, г); сейсмическое воздействие (рис. 3.1, д). Сейсмическое воздействие, как правило, задается в виде акселерограммы (графика ускорения  $v''(t)$ ) для точек опор сооружения.

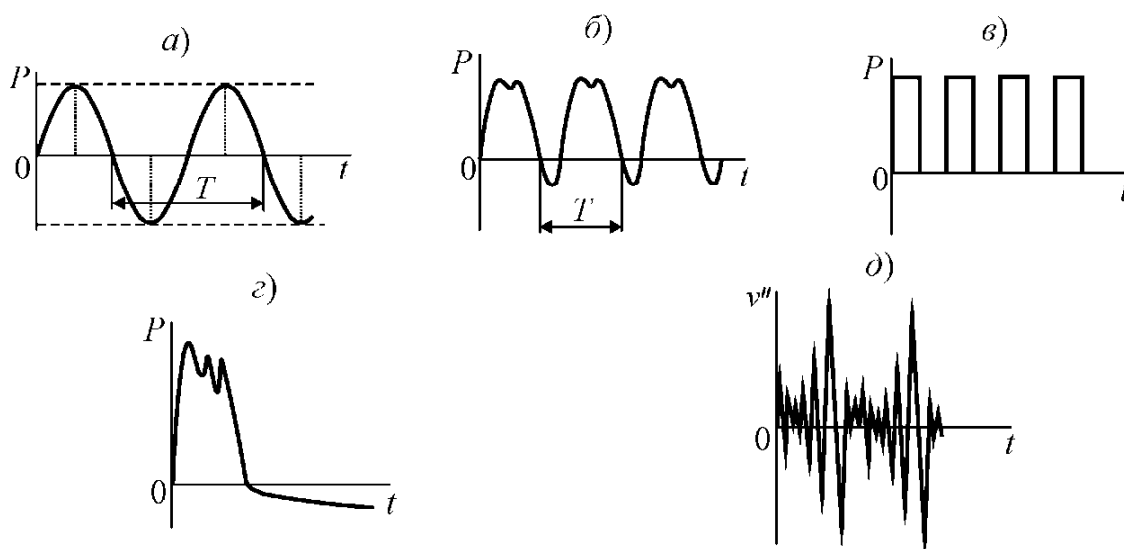


Рис. 3.1

Динамический расчет выполняется с целью проверки системы на резонанс, анализа кинематических параметров (перемещений, скоростей, ускорений) конструктивных элементов, оценки динамиче-

ских реакций и выбора схемы гашения колебаний. Динамический расчет является одной из сложных задач строительной механики. Для его реализации привлекается математический аппарат решения систем дифференциальных уравнений и специальные численные методы, учитывающие динамический характер нагружения.

Такие виды динамического воздействия, как ветровая нагрузка, сейсмическая активность земной коры и ударная волна, носят случайный характер. Динамический расчет при случайном воздействии на сооружение называется недетерминированным и выполняется с использованием математического аппарата теории вероятности.

### 3.2. Число динамических степеней свободы стержневой системы

Числом динамических степеней свободы линейно деформируемой системы, находящейся в движении, называется количество перемещений, определяющих положение всех ее точек в каждый момент времени. Реальные конструкции обладают бесконечно большим числом степеней свободы. На практике принято ограничивать размерность задачи и вводить точечные сосредоточенные массы или массивные недеформируемые диски. Процедура построения расчетной схемы с конечным (ограниченным) числом степеней свободы для динамического расчета называется дискретизацией или приведением масс.

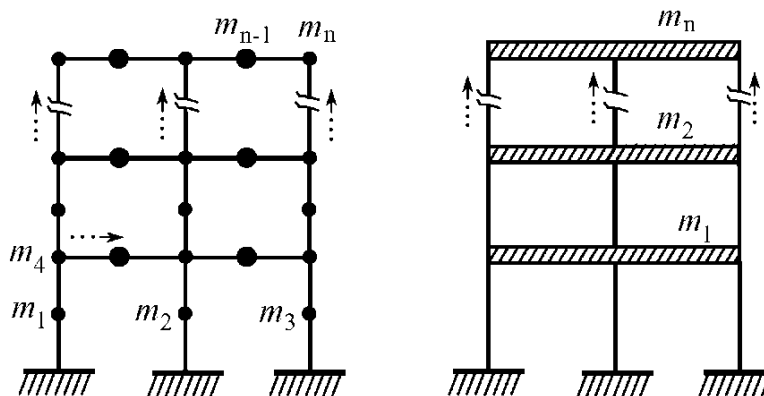


Рис. 3.2

Точки приведения масс выбираются таким образом, чтобы колебания расчетной схемы соответствовали колебаниям реальной конструкции. Точность, а вместе с ней и сложность динамического расчета

возрастает с увеличением числа приведенных масс.

Недеформируемыми дисками можно заменять ригели многоэтажных рамных конструкций, считая несущие стойки безмассовыми элементами. На рис. 3.2 представлены два возможных варианта приведения плоской многоэтажной рамы к  $n$  массовой системе. Естественно, что расчетная схема с дисками будет грубее, но при этом значительно упрощается решение задачи.

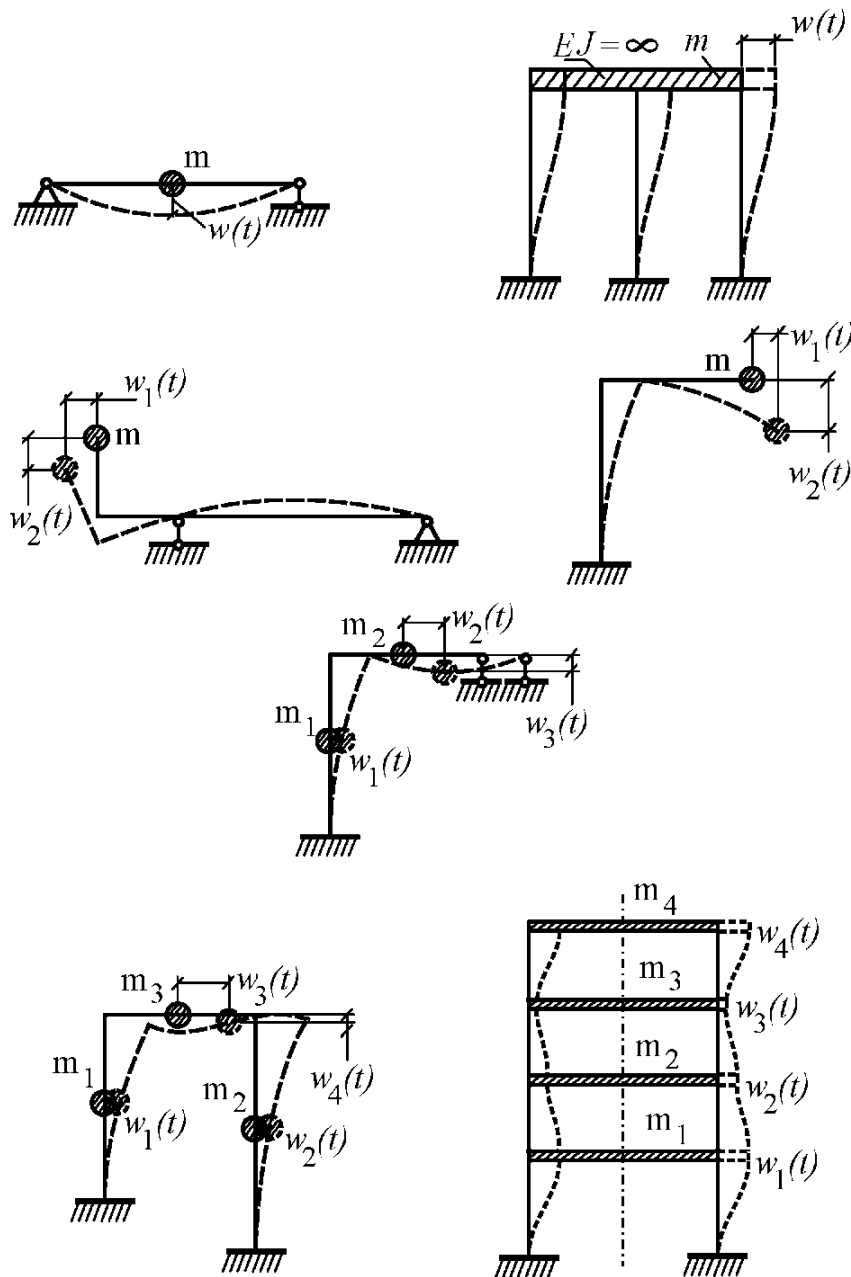


Рис. 3.3

Под числом динамических степеней свободы многомассовой



стержневой системы будем понимать число линейно независимых перемещений точек сосредоточенных масс  $w_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

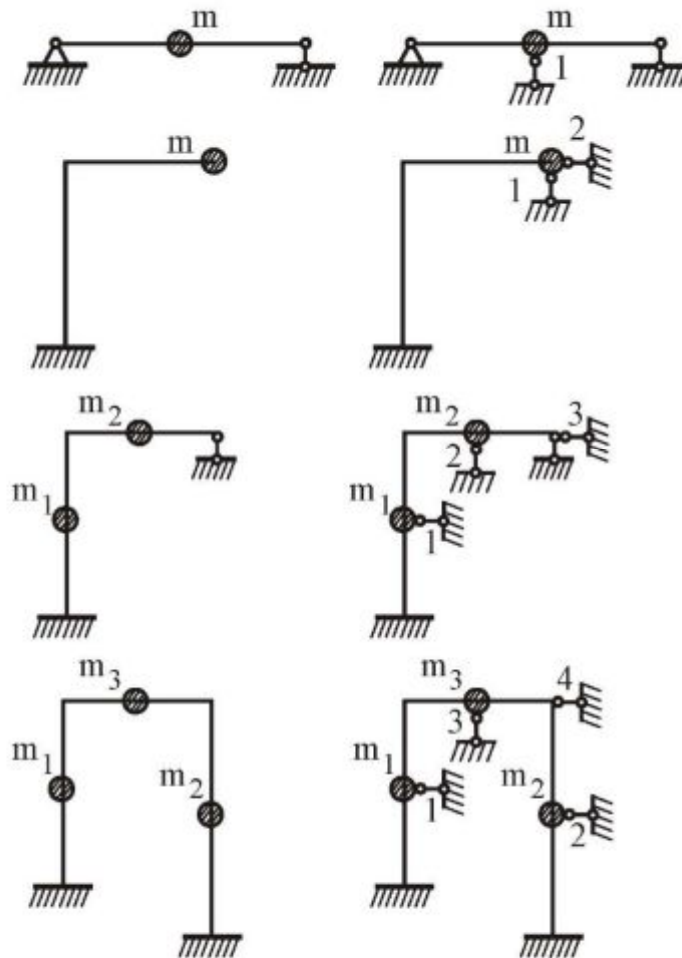


Рис. 3.4

На рис. 3.3 приведены примеры систем с одной, двумя, тремя и четырьмя степенями свободы. Число динамических степеней свободы для плоских рам можно определять путем введения дополнительных связей [3], препятствующих смещениям сосредоточенных масс и дисков (рис. 3.4).

### 3.3. Уравнение движения и свободные колебания системы с одной степенью свободы

Рассмотрим движение одномассовой системы на примере консольной балки, представленной на рис. 3.5. Считаем, что положение всех точек балки в любой момент времени  $t$  определяется функцией

прогиба  $v(t)$ . Осевым и угловым перемещениями массы  $m$  ввиду их малости пренебрегаем.

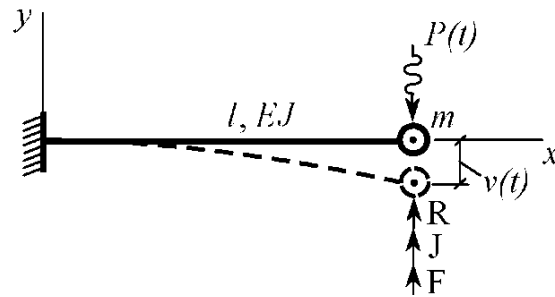


Рис. 3.5

На основании квазистатического принципа Даламбера уравнение движения точечной массы  $m$  представляем в виде суммы проекции на ось  $y$  всех сил, действующих на  $m$ :

$$R + J + F = -P(t), \quad (3.1)$$

где  $R$  – восстанавливающая сила;  $J$  – сила инерции;  $F$  – сила сопротивления движению;  $P(t)$  – внешняя возбуждающая сила.

Остановимся более подробно на каждой составляющей левой части уравнения (3.1).

Восстанавливающая сила  $R$  обусловлена упругостью балки и пропорциональна величине прогиба  $v(t)$ :

$$R = -r v(t).$$

Здесь коэффициент пропорциональности  $r$  численно равен реакции балки при единичном статическом прогибе ( $v_{ст} = 1$ ). Для консольной балки единичная реакция  $r = (3EJ)/l^3$ .

Сила инерции  $J$  определяется по формуле

$$J = -m v'',$$

где  $v'' = d^2v/dt^2$  – ускорение массы  $m$ .

Сила сопротивления  $F$  возникает в результате сопротивления движению внешней среды, внутреннего трения в материале, трения конструктивных элементов в местах соединения и в опорах, а также искусственного демпфирования (гашения) колебаний. Обычно выражение для силы  $F$  представляют в виде

$$F = -\eta v',$$

где  $\eta$  – коэффициент затухания колебаний;  $v' = dv/dt$  – скорость массы  $m$ .

Знак минус в выражениях для  $R$ ,  $J$ ,  $F$  говорит о том, что данные силы направлены противоположно прогибу  $v(t)$  (см. рис. 3.5).

Подставив выражения для сил  $R$  и  $J$  в (3.1) получим уравнение движения точечной массы без учета силы сопротивления:

$$v'' + \omega^2 v = \frac{P(t)}{m}, \quad (3.2)$$

где  $\omega = \sqrt{r/m}$  – угловая частота свободных (собственных) колебаний балки ( $c^{-1}$ ). Величина  $\omega$  представляет собой число циклов колебаний, совершаемых за  $2\pi$  секунд. Период  $T$  – это длительность одного полного цикла колебаний. Величина  $T$  измеряется в секундах и численно равна  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

Технической частотой  $\lambda = 1/T$  называется число колебаний в секунду. Величина  $\lambda$  измеряется в герцах (сокращенно Гц).

Для анализа свободных колебаний одномассовой системы необходимо в уравнении (3.2) положить  $P(t) = 0$ . В результате получим однородное дифференциальное уравнение

$$v'' + \omega^2 v = 0. \quad (3.3)$$

Для возбуждения свободных колебаний в консольной балке (см. рис. 3.5) следует в начальный момент времени  $t = 0$  задать кинематическое возмущение  $v = v_0$ .

Решение уравнения (3.3) имеет вид

$$v(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t,$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – вещественные постоянные, определяемые из начальных условий. При  $t = 0$  имеем  $v = v_0$  и  $v' = v'_0$ . Отсюда найдем  $C_1 = v_0$  и  $C_2 = v'_0 / \omega$ . В результате решение уравнения (3.3) преобразуем к виду

$$v(t) = v_0 \cos \omega t + \frac{v'_0}{\omega} \sin \omega t.$$

Чаше используют другую форму решения в виде гармонического закона колебаний (рис. 3.6):

$$v(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0),$$

где  $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$  – амплитуда колебаний;  $\varphi_0 = \arctg(C_1 / C_2)$  – начальная угловая фаза колебаний.

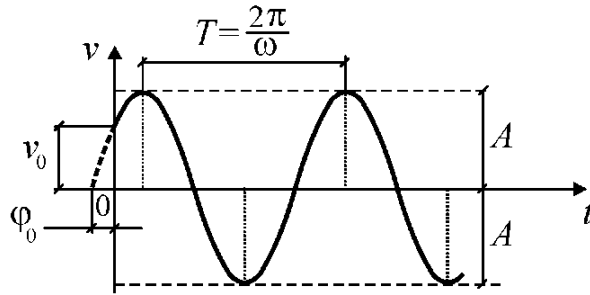


Рис. 3.6

Согласно закону сохранения энергии свободные незатухающие колебания одномассовой системы представляют собой непрерывный циклический переход кинетической энергии движущейся точечной массы  $K = \frac{mv'^2}{2}$  в энергию деформации  $U = \frac{1}{2}rv$ .

**Пример 1.** Требуется определить частоту свободных колебаний эстакады (рис. 3.7), положив:  $l = 6$  м;  $J_c = 572 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ ;  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа;  $m = 3058 \text{ Нс}^2/\text{м}$ .

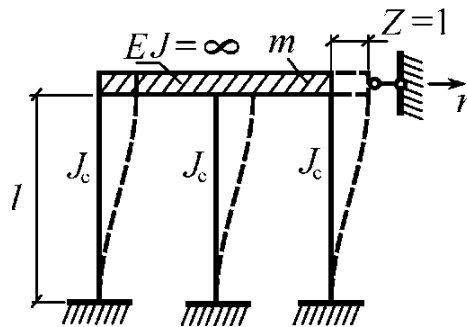


Рис. 3.7

Определяем упругую реакцию  $r$  связи  $Z$  на единичное смещение:

$$r = 3 \frac{12 E J_c}{l^3} = 3 \frac{12 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 572 \cdot 10^{-8}}{6^3} = 190667 \text{ Н/м}.$$

Значение частоты свободных колебаний вычисляем по формуле

$$\omega = \sqrt{\frac{r}{m}} = \sqrt{\frac{190667}{3058}} = 7,90 \text{ с}^{-1}.$$

**Пример 2.** Требуется определить частоту свободных колебаний однопролетной балки с сосредоточенной массой  $m$  (рис. 3.8, а), положив:  $a = 3$  м;  $l = 5$  м;  $J = 3773 \text{ см}^4$  (двутавр № 24);  $E = 2,1 \cdot 10^5$

МПа. Балку считаем невесомой. Силу от веса сосредоточенной массы принимаем равной  $G = 20$  кН.

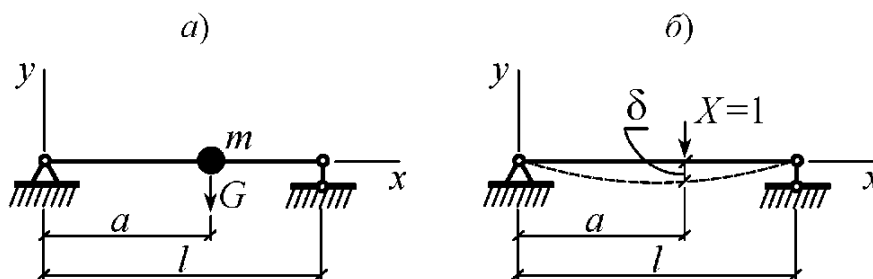


Рис. 3.8

Прогиб  $\delta$  от действия силы  $X=1$  в точке расположения сосредоточенной массы (рис. 3.8, б) вычисляем по формуле

$$\delta = \frac{X a^2 (l-a)^2}{3lEJ} = \frac{1 \cdot 3^2 (5-3)^2}{3 \cdot 5 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 3773 \cdot 10^{-8}} = 0,303 \cdot 10^{-6} \text{ м.}$$

Масса груза  $m = G/g = 20000/9,81 = 2039$  кг ( $\text{Н} \cdot \text{с}^2/\text{м}$ ), где  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$  – ускорение свободного падения.

Частоту свободных колебаний балки определяем по формуле

$$\omega = \sqrt{1/(m\delta)} = \sqrt{1/(2039 \cdot 0,303 \cdot 10^{-6})} = 40,2 \text{ с}^{-1}.$$

### 3.4. Свободные колебания системы с одной степенью свободы с учетом силы сопротивления

На практике свободные колебания быстро затухают, что объясняется наличием силы сопротивления движению. Рассмотрим консольную балку с сосредоточенной массой  $m$  на свободном конце. Свободные колебания возбуждаются путем отклонения свободного конца балки в момент времени  $t = 0$  на величину  $v = v_0$  с последующим его отпусканием. Считаем, что положения всех точек балки в любой момент времени определяются функцией прогиба  $v(t)$ . В последующем колебательном процессе участвуют восстанавливающая сила  $R$ , сила инерции  $J$  и сила сопротивления  $F$ . Последняя обусловлена внутренним трением и сопротивлением внешней среды (рис. 3.9).

В качестве физического аналога, воспроизводящего действие силы  $F$ , принимаем гидравлический демпфер, представляющий собой

цилиндр, в котором расположен поршень с отверстием малого диаметра. Цилиндр полностью заполнен вязкой жидкостью. Механическая модель консольной балки, учитывающая эффект затухания колебаний, представлена на рис. 3.10.

Дифференциальное уравнение движения для рассматриваемой системы принимает вид

$$v'' + 2nv' + \omega_0^2 v = 0, \quad (3.4)$$

где  $2n = \eta/m$ ;  $\omega_0 = \sqrt{r/m}$  – угловая частота свободных колебаний без учета затухания.

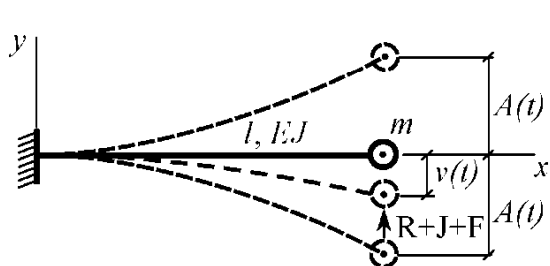


Рис. 3.9

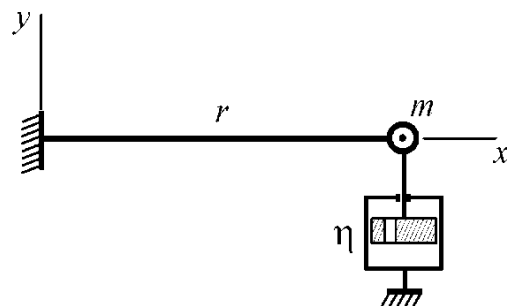


Рис. 3.10

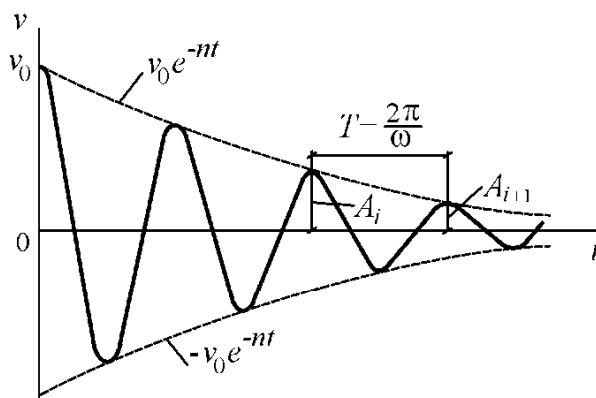


Рис. 3.11

Решение уравнения (3.4) ищем в виде

$$v = A e^{-nt} \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (3.5)$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + n^2}$  – угловая частота затухающих свободных колебаний.

Постоянные  $A$  и  $\varphi_0$  определяем из начальных условий: при  $t = 0$ ;  $v = v_0$ ;  $v' = v'_0$ . После преобразований получим:

$$A = \sqrt{v_0^2 + \frac{(v'_0 + nv_0)^2}{\omega^2}}; \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{v_0 \omega}{v'_0 + nv_0}.$$

Учитывая, что для реальных строительных конструкций  $n \ll \omega_0$ , принимаем  $\omega = \omega_0$ . График уравнения (3.5) показан на рис. 3.11, на котором огибающая колебаний определяется функцией  $\pm v_0 e^{-nt}$ .

В качестве количественной характеристики темпа затухания свободных колебаний обычно принимают величину

$$\delta = \ln \frac{A_i}{A_{i+1}},$$

называемую логарифмическим декрементом колебаний.

Мерой затухания также может служить коэффициент  $\psi$  поглощения энергии деформации за один цикл колебаний, численно равный отношению

$$\psi = \frac{U_i - U_{i+1}}{U_i},$$

где  $U_i, U_{i+1}$  – амплитудные значения упругой энергии деформации в начале и конце  $i$ -го цикла колебаний.

Величины  $\delta$  и  $\psi$  связаны зависимостью  $\psi = 2\delta$ .

### 3.5. Динамический отклик системы с одной степенью свободы на частные виды внешних воздействий

#### 3.5.1. Действие внезапно приложенной силы

Полагаем, что нагрузка  $P = P(t)$  действует на точечную массу  $m$ , расположенную на конце консольной балки. График динамического воздействия показан на рис. 3.12, *a*. В данном случае сила внезапно прикладывается в момент времени  $t = t_0$  и в дальнейшем не изменяется.

Уравнение движения в данном случае имеет вид

$$v'' + \omega^2 v = P_0 / m. \quad (3.6)$$

Общее решение дифференциального уравнения (3.6) ищем в форме

$$v(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + P_0 / (m \omega^2), \quad (3.7)$$

где первые два слагаемые представляют собой решение соответствующего однородного уравнения (3.3), а последнее слагаемое – частное решение неоднородного уравнения (3.6).

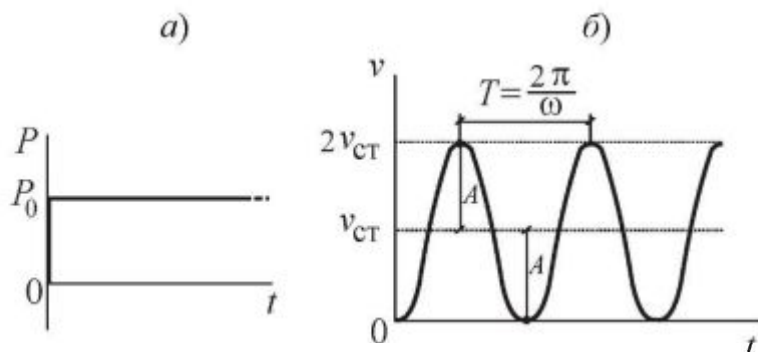


Рис. 3.12

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  найдем из нулевых начальных условий задачи: при  $t = t_0$  имеем  $v_0 = 0$  и  $v'_0 = 0$ . Отсюда на основании выражения (3.7) получим два уравнения:

$$C_1 + P_0 / (m \omega^2) = 0; \quad C_2 \omega = 0,$$

с помощью которых определяем постоянные  $C_1 = -P_0 / (m \omega^2)$  и  $C_2 = 0$ . Подставив в выражение  $P_0 / (m \omega^2)$  вместо  $\omega^2$  ранее введенное соотношение  $\omega^2 = r / m$ , запишем  $P_0 / (m \omega^2) = P_0 / r$ , где  $r$  – единичная реакция консоли. Вводя обозначение для статического прогиба балки  $v_{ст} = P_0 / r$ , уравнение (3.7) преобразуем к виду

$$v(t) = v_{ст} (1 - \cos \omega t). \quad (3.8)$$

Визуализация данной зависимости представлена на рис. 3.12, б). Как видно, решение (3.8) представляет собой незатухающие гармонические колебания с амплитудой  $A = v_{ст}$ . Максимальный динамический прогиб балки равен  $v_{дин} = 2v_{ст}$ . Для установившихся колебаний коэффициент динамичности определяем по формуле  $\mu = v_{дин} / v_{ст}$ . В рассматриваемом примере  $\mu = 2$ .

Вычислив величину  $\mu$ , можно динамический расчет свести к обычному статическому расчету, умножив действующую силу  $P_0$  на коэффициент  $\mu$ .



### 3.5.2. Действие гармонической вынуждающей силы

Принимаем изменение возмущающего внешнего воздействия, прикладываемого к точечной массе  $m$ , в виде гармонического закона:

$$P(t) = P_0 \sin \Theta t,$$

где  $P_0$  и  $\Theta$  – соответственно амплитуда и угловая частота вынуждающей силы. Полагаем, что гармоническая сила  $P(t)$  в начальный момент времени  $t = t_0$  начинает действовать на покоящуюся сосредоточенную массу, расположенную в центре двухопорной балки. График изменения величины  $P(t)$  представлен на рис. 3.13. Такой вид, например, имеет динамическое воздействие, передаваемое на балку от вращающегося ротора электродвигателя с расположенной на нем неуравновешенной точечной массой  $m$ . Динамическая нагрузка в данном случае зависит от величины центробежной силы  $P_0 = mR\Theta^2$ . Если масса совершает  $n$  оборотов в минуту, то  $\Theta = (2\pi n)/60$  ( $\text{с}^{-1}$ ).

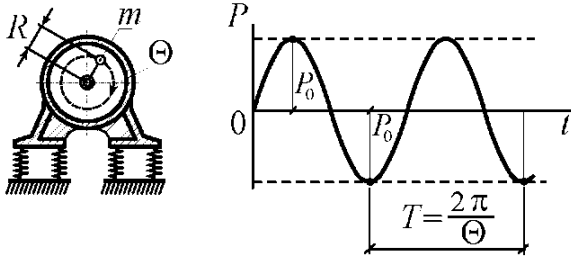


Рис. 3.13

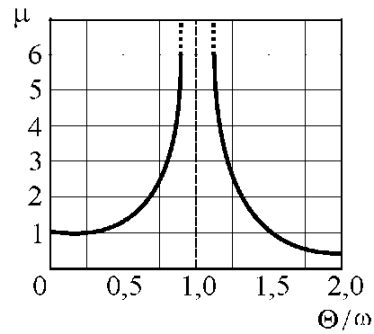


Рис. 3.14

Уравнение движения при гармоническом возбуждении колебаний принимает вид

$$v'' + \omega^2 v = (P_0/m) \sin \Theta t. \quad (3.9)$$

Общее решение дифференциального уравнения при  $\omega \neq \Theta$  (3.9) имеет форму

$$v(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + A \sin \Theta t, \quad (3.10)$$

где  $\bar{v}(t) = A \sin \Theta t$  – частное решение неоднородного уравнения (3.9);  $A$  – неизвестная постоянная величина. Подставив выражение  $\bar{v}(t)$  в уравнение (3.9), получим

$$(-A\Theta^2 + A\omega^2)\sin\Theta t = (P_0/m)\sin\Theta t.$$

После преобразований запишем

$$A = (P_0/m)(\omega^2 - \Theta^2) = \mu v_{ст},$$

где коэффициент динамичности  $\mu = \frac{1}{1 - (\Theta/\omega)^2}$ , показывающий во сколько раз амплитуда установившихся вынужденных колебаний больше величины статического прогиба:  $v_{ст} = P_0/(m\omega^2) = P_0/r$  ( $r$  – единичная реакция балки). График зависимости величины  $\mu$  от отношения частот  $\Theta/\omega$  показан на рис. 3.14.

Как видно, с увеличением частоты вынуждающей силы  $\Theta$  от 0 коэффициент  $\mu$  возрастает и при  $\Theta/\omega \rightarrow 1$  стремится к бесконечности. При дальнейшем увеличении величины  $\Theta$  коэффициент  $\mu$  постепенно уменьшается и при  $\Theta/\omega > \sqrt{2}$  становится меньше единицы. В этой области динамический эффект прикладываемой гармонической силы  $P(t)$  становится меньше, чем ее статическое действие, соответствующее силе  $P_0$ .

На основании нулевых начальных условий получим окончательное решение уравнения (3.10) в виде разности двух гармонических составляющих с различными частотами:

$$v(t) = A[\sin\Theta t - (\Theta/\omega)\sin\omega t]. \quad (3.11)$$

В реальных условиях колебания, описываемые соотношением (3.11), можно наблюдать только в начальной стадии динамического процесса. В дальнейшем вследствие сил внутреннего трения, которые здесь не учитывались, влияние составляющей  $A(\Theta/\omega)\sin\omega t$  уменьшается до нуля. Физически это означает, что свободные колебания быстро затухают и продолжаются только вынужденные колебания, описываемые выражением  $v(t) = A\sin\Theta t$ . Графически решение (3.11) условно можно представить в виде переходного и установившегося динамических процессов (рис. 3.15). Следует отметить, что согласно выражению (3.11) при  $\Theta/\omega < 1$  функция  $v(t)$  находится в фазе с вынуждающей силой  $P(t)$ , а при  $\Theta/\omega > 1$  – в противофазе.

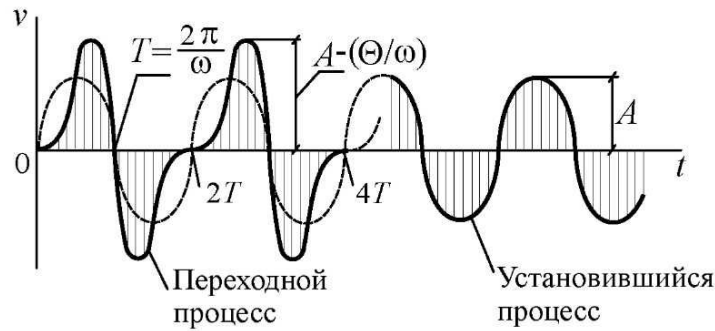


Рис. 3.15

Состояние системы, когда  $\Theta = \omega$ , называется резонансом. В этом случае уравнение движения принимает вид

$$v'' + \omega^2 v = (P_0/m) \sin \omega t.$$

Соответствующее решение при нулевых начальных условиях описывается формулой

$$v_{\text{рез}}(t) = \frac{P_0}{2r_{11}} (\sin \omega t + \omega t \cos \omega t). \quad (3.12)$$

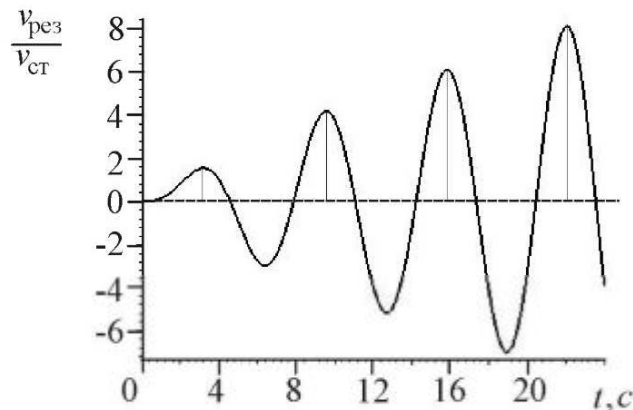


Рис. 3.16

Отметим, что наличие в выражении (3.12) слагаемого  $\omega t \cos \omega t$ , содержащего параметр  $t$  вне знака косинуса, приводит к неограниченному возрастанию функции  $v_{\text{рез}}(t)$  во времени (рис. 3.16). Однако в реальном колебательном процессе наличие сил трения и сопротивления внешней среды приводит к тому, что амплитуды  $v_{\text{рез}}(t)$  остаются некоторыми конечными величинами при  $t \rightarrow \infty$ .

### 3.6. Динамический расчет плоских рам

#### 3.6.1. Свободные колебания рам с конечным числом степеней свободы

Рассмотрим упругую невесомую раму с  $n$  точечными сосредоточенными массами. Полагаем, что в момент времени  $t = 0$  точки, в которых расположены массы  $m_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , получили начальные смещения и затем были мгновенно отпущены. Если силы сопротивления движению отсутствуют, то рама будет совершать незатухающие свободные колебания. Введем вектор независимых перемещений точечных масс

$$\{w\} = \{w_1 \ w_2 \ \dots \ w_i \ \dots \ w_{n-1} \ w_n\}^T,$$

отвечающий заданной форме свободных колебаний (рис. 3.17, а) и соответствующий вектор сил инерции (рис. 3.17, б):

$$\{J\} = \{J_1 \ J_2 \ \dots \ J_i \ \dots \ J_{n-1} \ J_n\}^T.$$

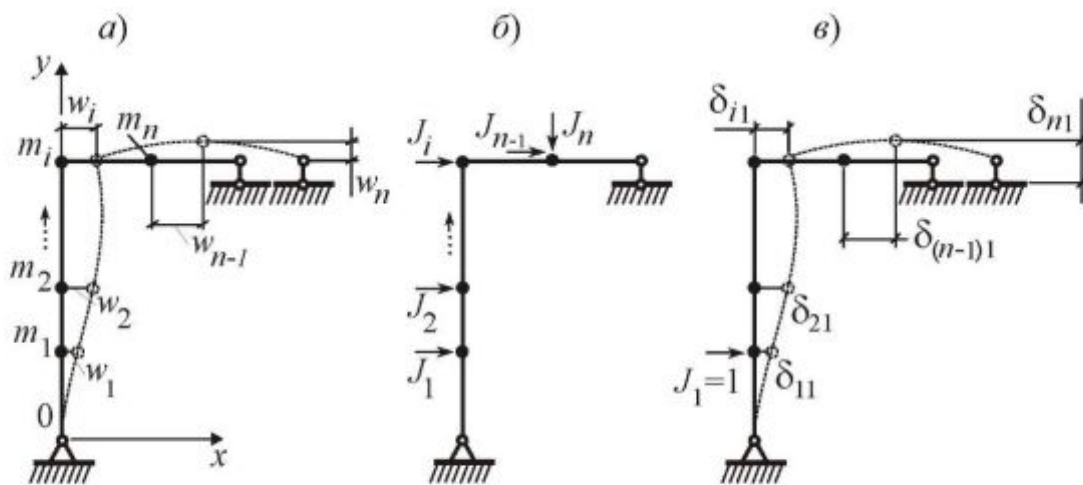


Рис. 3.17

Расчет рам на свободные колебания может быть выполнен с помощью метода сил или метода перемещений [1, 3]. Выбор того или иного метода решения устанавливается в зависимости от вида расчетной схемы рамы и степени статической неопределенности.

При использовании метода сил необходимо сформировать матрицу податливости  $[D]$  от действия единичных сил инерции  $J_i = 1, i = 1, 2, \dots, n$  (3.17, в). Для  $n$ -массовой системы матрица  $[D]$

имеет следующую структуру:

$$[D] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ & & \dots & \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & & \delta_{nn} \end{bmatrix},$$

где  $\delta_{ij}$  – перемещение сосредоточенной массы по направлению  $w_i$  от действия единичной силы инерции  $J_j$ .

Для статически неопределимых рам необходимо предварительно раскрыть статическую неопределимость и построить эпюры изгибающих моментов  $m_1^*$ ,  $m_2^*$ , ...,  $m_n^*$  от действия единичных сил, совпадающих с направлениями сил инерции  $J_1, J_2, \dots, J_n$ . Перемещения  $\delta_{ij}$  вычисляются путем соответствующих перемножений эпюр  $m_1^*, m_2^*, \dots, m_n^*$ . Задача упрощается, если расчетная схема рамы для построения эпюр  $m_1^*, m_2^*, \dots, m_n^*$  позволяет использовать готовые (приведенные в справочнике) формулы<sup>1</sup>.

Уравнение движения, описывающее свободные колебания  $n$  массовой системы в матричной форме, имеет вид

$$[D][M]\{w''\} + \{w\} = 0, \quad (3.13)$$

здесь диагональная матрица масс

$$[M] = \text{diag}[m_1 \ m_2 \ \dots \ m_n].$$

Полагаем, что движение точечных масс подчиняется гармоническому закону

$$\{w\} = \{A\} \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (3.14)$$

где  $\omega$  – частота свободных колебаний;  $\{A\} = \{a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n\}^T$  – вектор формы колебаний ( $a_i, i = 1, 2, \dots, n$  – амплитудные значения перемещений точечных масс рамы).

---

<sup>1</sup> Справочник по сопротивлению материалов/ Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев – Киев: Наук. думка, 1988. – 736 с.

Подставим в уравнение (3.13) зависимость (3.14) и сократим полученное выражение на  $\sin(\omega t + \varphi_0)$ . В результате получим

$$([D][M] - \lambda[I])\{A\} = 0, \quad (3.15)$$

где  $\lambda = 1/\omega^2$  – параметр круговой частоты;  $[I]$  – единичная матрица.

Уравнение (3.15) представляет собой систему однородных линейных алгебраических уравнений. Решение уравнения (3.15) будет нетривиальным (ненулевым), если выполняется условие равенства нулю определителя

$$|[D][M] - \lambda[I]| = 0$$

или в развернутом виде

$$\det(\lambda) = \begin{vmatrix} (\delta_{11} m_1 - \lambda) & \delta_{12} m_2 & \dots & \delta_{1n} m_n \\ & (\delta_{22} m_2 - \lambda) & \dots & \delta_{2n} m_n \\ & & \dots & \\ \text{симметр.} & & & (\delta_{nn} m_n - \lambda) \end{vmatrix} = 0. \quad (3.16)$$

Уравнение (3.16) называется характеристическим. Раскрыв определитель  $\det(\lambda)$ , получим характеристический полином  $n$ -й степени. Корни полинома  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ , расположенные в порядке возрастания, характеризуют спектр частот свободных колебаний системы. С математической точки зрения решение уравнения (3.16) представляет собой стандартную задачу о собственных значениях  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  матрицы  $[H] = [D][M]$ .

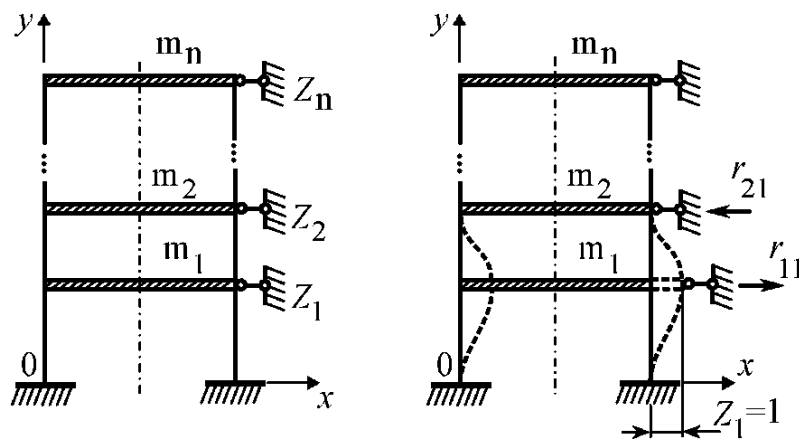


Рис. 3.18

При анализе свободных колебаний многоэтажных рам, моделируемых абсолютно жесткими дисками и невесомыми гибкими стой-

ками, более эффективным является метод перемещений (рис. 3.18).

При использовании этого метода колебательный процесс  $n$  массовой системы описывается матричным уравнением

$$([R] - \omega^2 [M])\{A\} = 0, \quad (3.17)$$

где матрица упругих реакций

$$[R] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ & & \dots & \\ r_{n1} & r_{n2} & & r_{nn} \end{bmatrix}.$$

Нетривиальное решение уравнения (3.17) выглядит следующим образом:

$$\left| [R] - \omega^2 [M] \right| = 0,$$

или в развернутом виде

$$\det(\omega^2) = \begin{vmatrix} (r_{11} - \omega^2 m_1) & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ & (r_{22} - \omega^2 m_2) & \dots & r_{2n} \\ & & \dots & \\ \text{симметр.} & & & (r_{nn} - \omega^2 m_n) \end{vmatrix} = 0. \quad (3.18)$$

На математическом языке решение данного характеристического уравнения представляет собой обобщенную задачу нахождения собственных значений  $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$ .

Отметим, что для рамы с  $n$  динамическими степенями свободы существуют  $n$  вещественных положительных значений частот свободных колебаний  $\omega_i, i=1, 2, \dots, n$ . Каждой частоте  $\omega_i$  соответствует собственный вектор  $\{A_i\}$  или собственная форма (мода) свободных колебаний. На практике не обязательно вычислять все корни  $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$ , достаточно определить несколько первых (в строительстве до 10) собственных чисел. Отметим, что низшие частоты и соответствующие формы свободных колебаний являются важной динамической характеристикой сооружения, позволяющей выявить резонансные режимы и проанализировать возможные формы деформации конструкции.

### 3.6.2. Ортогональность собственных форм колебаний

Рассмотрим  $i$ -ую форму колебаний:

$$\{w_i\} = \{A_i\} \sin(\omega_i t + \varphi_0).$$

Амплитудное значение вектора сил инерции ( $\sin \omega_i t = 1$ ) равно

$$\{J_i\} = \omega_i^2 [M] \{A_i\}.$$

Аналогично записываем для  $j$ -й формы колебаний

$$\{J_j\} = \omega_j^2 [M] \{A_j\}.$$

На основании принципа о взаимности работ внешних сил имеем:

$$\begin{aligned} \{J_i\}^T \{A_j\} &= \{J_j\}^T \{A_i\}; \\ \omega_i^2 \{A_i\}^T [M] \{A_j\} &= \omega_j^2 \{A_j\}^T [M] \{A_i\}; \\ (\omega_i^2 - \omega_j^2) \{A_i\} [M] \{A_j\} &= 0. \end{aligned}$$

Поскольку по определению  $\omega_i^2 \neq \omega_j^2$ , получаем условие  $M$ -ортогональности любых двух собственных форм колебаний системы в виде

$$\{A_i\}^T [M] \{A_j\} = 0.$$

Физический смысл условия  $M$ -ортогональности состоит в том, что суммарная работа сил инерции  $i$ -й формы колебаний на перемещениях  $j$ -й формы равна нулю. При вычислениях часто используют процедуру нормирования собственных векторов в виде

$$\{A_i\}^T [M] \{A_j\} = \delta_{ij}, \quad (3.19)$$

где символ Кронекера

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Используя уравнение (3.17) и выражение (3.19), можно получить условие  $R$ -ортогональности собственных векторов:

$$\{A_i\}^T [R] \{A_j\} = \omega_i^2 \delta_{ij}.$$

Как отмечалось ранее, задача определения частот и форм свободных колебаний линейно деформируемой системы эквивалентна



обобщенной проблеме собственных значений, суть которой состоит в нахождении нетривиального решения уравнения:

$$[R][A] = [\Omega][M][A], \quad (3.20)$$

где  $[\Omega] = \text{diag}[\omega_1^2 \ \omega_2^2 \ \dots \ \omega_n^2]$  – диагональная матрица собственных значений;  $[A] = [\{A_1\} \ \{A_2\} \ \dots \ \{A_n\}]$  – матрица соответствующих собственных векторов. Нетрудно установить, что матрица  $[A]$  – ортогональная, т. е.  $[A]^T = [A]^{-1}$ . Матрицы  $[\Omega]$  и  $[A]$  называются соответственно спектральной и модальной, а сама процедура определения частот и форм свободных колебаний – модальным анализом системы.

### 3.6.3. Примеры определения частот свободных колебаний многомассовых рам методами сил и перемещений

**Пример 1.** Требуется определить частоты свободных колебаний трехмассовой статически неопределимой рамы (рис. 3.19, а), приняв изгибную жесткость и массу сосредоточенных в центрах стержней грузов равными  $EJ = 2 \cdot 10^4 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$ ,  $m = 2,0387 \cdot 10^3 \text{ кг}$ . Как видно из рис. 3.19, б, система имеет четыре динамические степени свободы.

Расчет данной статически неопределимой рамы выполняем методом сил.

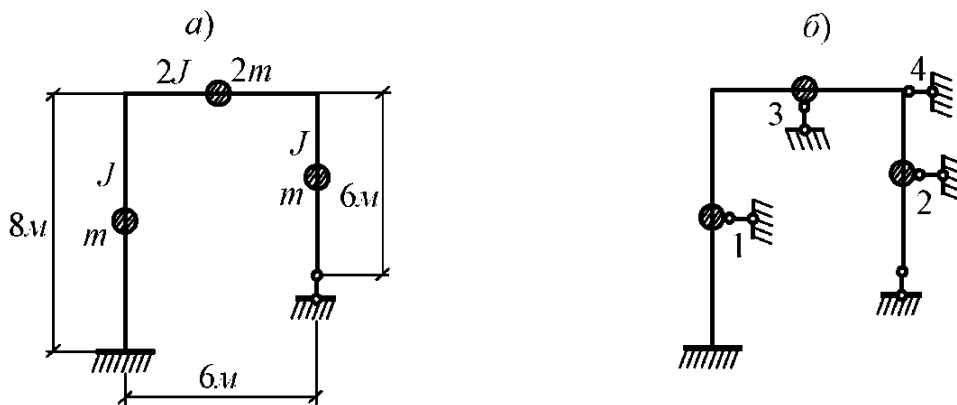


Рис. 3.19

На первом этапе расчета раскрываем статическую неопределимость. Учитывая характер внешнего воздействия (рис. 3.20), основную систему метода сил представим в виде четырех расчетных схем (рис. 3.21). Здесь введены обозначения: **1** – единичные силы, совпа-

дающие с направлениями векторов  $J_1, J_2, J_3, J_4$ ;  $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}$ ,  $X^{(4)}$  – неизвестные усилия, эквивалентные реакции отброшенной связи.

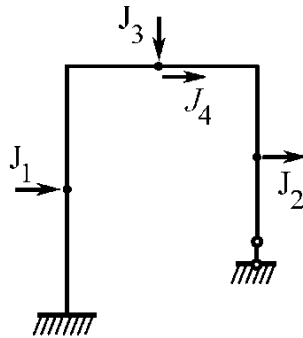


Рис. 3.20

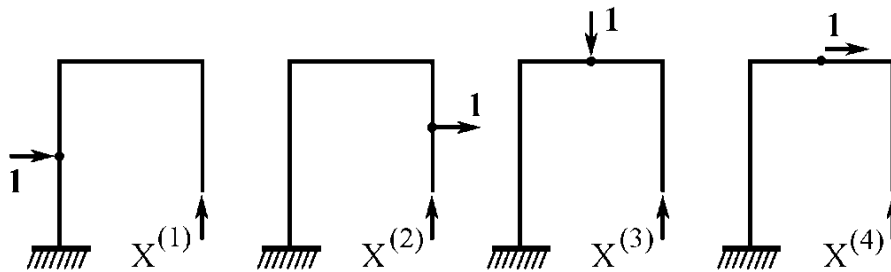


Рис. 3.21

Эпюры изгибающих моментов  $\bar{m}_{1p}, \bar{m}_{2p}, \dots, \bar{m}_{4p}$  от действия единичных сил показаны на рис. 3.22. Для первой расчетной схемы запишем каноническое уравнение метода сил

$$\bar{\delta}_{11}X^{(1)} + \bar{\Delta}_{1p} = 0,$$

где перемещение от единичной силы  $X=1$  (рис. 3.23)

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_{11} &= \sum_{k,s} \int \frac{\bar{m}_1^2}{EJ} ds \approx \frac{8}{6 \cdot EJ} (6 \cdot 6 + 4 \cdot 6 \cdot 6 + 6 \cdot 6) + \\ &+ \frac{6}{6 \cdot 2EJ} (0 + 4 \cdot 3 \cdot 3 + 6 \cdot 6) = \frac{324}{EJ}; \end{aligned}$$

перемещение от единичной силы в направлении вектора  $J_1$

$$\bar{\Delta}_{1p} = \sum_{k,s} \int \frac{\bar{m}_1 \cdot \bar{m}_{1p}}{EJ} ds \approx \frac{4}{6 \cdot EJ} (-4 \cdot 6 - 4 \cdot 2 \cdot 6 - 0) = -\frac{48}{EJ}.$$

Для вычисления интегралов в выражениях  $\bar{\delta}_{11}$  и  $\bar{\Delta}_{1p}$  использо-

вана формула Симпсона ( $k$  – число участков на эпюрах моментов;  $s$  – длина участка интегрирования).

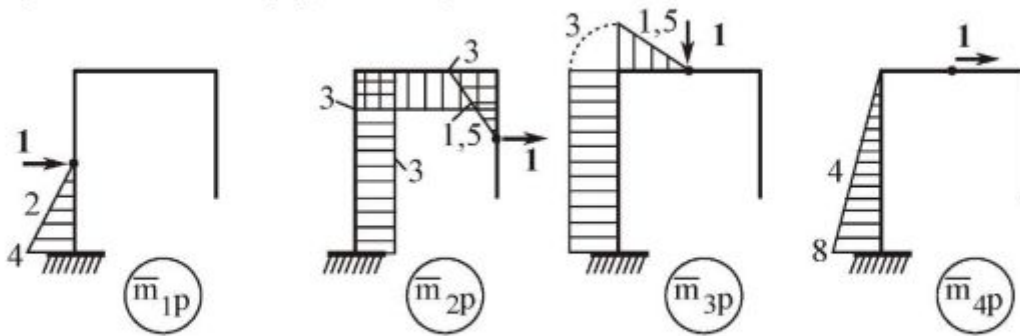


Рис. 3.22

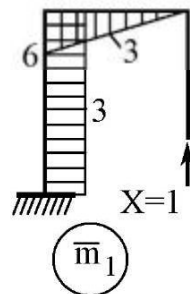


Рис. 3.23

После подстановки величин  $\bar{\delta}_{11}$  и  $\bar{\Delta}_{1p}$  в исходное уравнение получим  $X^{(1)} = 0,1481$ .

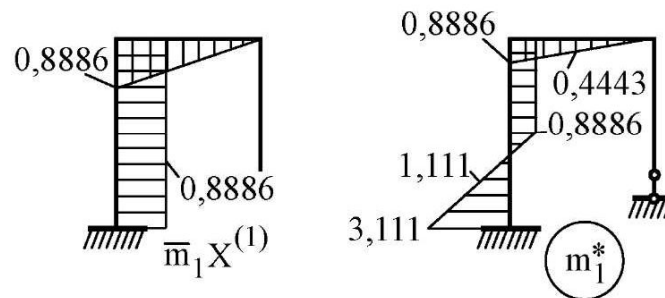


Рис. 3.24

“Исправленная” эпюра  $X^{(1)} \cdot \bar{m}_1$  и эпюра “суммарных” моментов  $m_1^* = X^{(1)} \cdot \bar{m}_1 + \bar{m}_{1p}$  для первой расчетной схемы представлены на рис. 3. 24. По аналогии выполняем вычисления для трех остальных расчетных схем. Последовательно находим:

$$X^{(2)} = -0,5278; \quad X^{(3)} = 0,4792; \quad X^{(4)} = 0,9877.$$

Соответствующие “суммарные” эпюры изгибающих моментов  $m_2^*$ ,  $m_3^*$ ,  $m_4^*$  показаны на рис. 3.25.

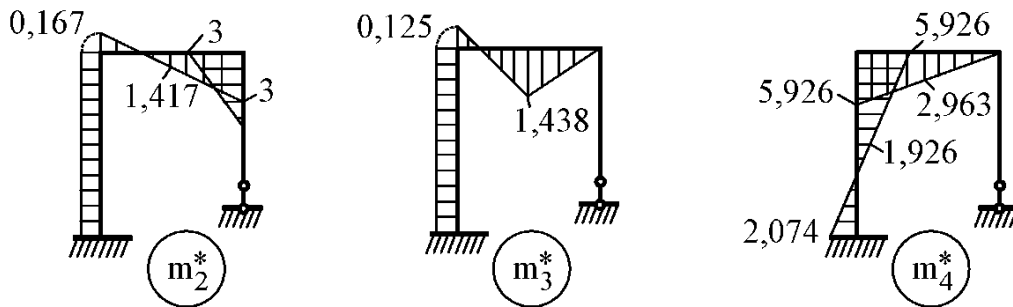


Рис. 3.25

На втором этапе расчета формируем матрицу податливости  $[D]$  трехмассовой системы с учетом действия единичных сил инерции  $J_1 = 1$ ,  $J_2 = 1$ ,  $J_3 = 1$ ,  $J_4 = 1$  (см. рис. 3.20).

Матрица  $[D]$  имеет следующую структуру:

$$[D] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \delta_{14} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \delta_{24} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} & \delta_{34} \\ \delta_{41} & \delta_{42} & \delta_{43} & \delta_{44} \end{bmatrix}, \quad \delta_{ij} = \delta_{ji}, \quad i, j = 1, 4.$$

Перемещения  $\delta_{ij}$  вычисляем на основании результатов первого этапа расчета по формуле

$$\delta_{ij} = \sum_k \int \frac{m_i^* \cdot m_j^*}{EJ}.$$

После “перемножения” эпюр  $m_1^*$ ,  $m_2^*$ , ..., получим

$$[D] = \frac{1}{2 \cdot 10^7} \begin{bmatrix} 42,657 & -99,988 & 92,693 & 176,57 \\ & 378,78 & -324,59 & -551,59 \\ & & 299,68 & 494,68 \\ \text{симметр.} & & & 865,99 \end{bmatrix}.$$

Матрицу масс формируем “прямым” включением диагональных элементов  $m_{11} = m$ ,  $m_{22} = m$ ,  $m_{33} = 2m$ ,  $m_{44} = 2m$ . В итоге имеем

$$[M] = \text{diag} [2038,7 \mid 2038,7 \mid 4077,4 \mid 4077,4].$$

Для определения частот свободных колебаний составим характеристическое уравнение:

$$|[D][M] - \lambda[I]| = 0.$$

Стандартную задачу о собственных значениях матрицы  $[H] = [D][M]$  решаем с помощью интерактивной функции *eigenvalues* компьютерной математики системы Maple V. Получены следующие значения частот свободных колебаний рамы:

$$\omega_1 = (1/\lambda_1)^{1/2} = 6,664 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_2 = (1/\lambda_2)^{1/2} = 22,53 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_3 = (1/\lambda_3)^{1/2} = 34,82 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_4 = (1/\lambda_4)^{1/2} = 59,63 \text{ с}^{-1}.$$

**Пример 2.** Требуется вычислить частоты свободных колебаний трехмассовой статически определимой рамы (рис. 3.26).

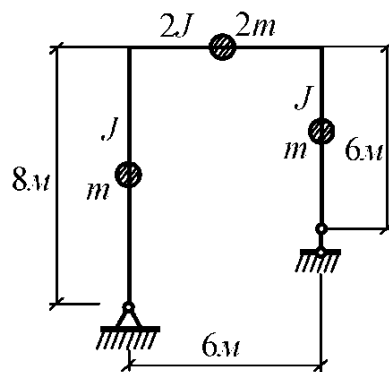


Рис. 3.26

Заметим, что данная рама получена из рамы, рассмотренной в предыдущем примере, путем замены жесткого защемления на левой стойке шарнирно неподвижной опорой. Задачу решаем методом сил.

Эшюры изгибающих моментов  $m_1, m_2, m_3, m_4$  от действия единичных сил инерции  $J_1=1, J_2=1, J_3=1, J_4=1$  приведены на рис. 3.27.

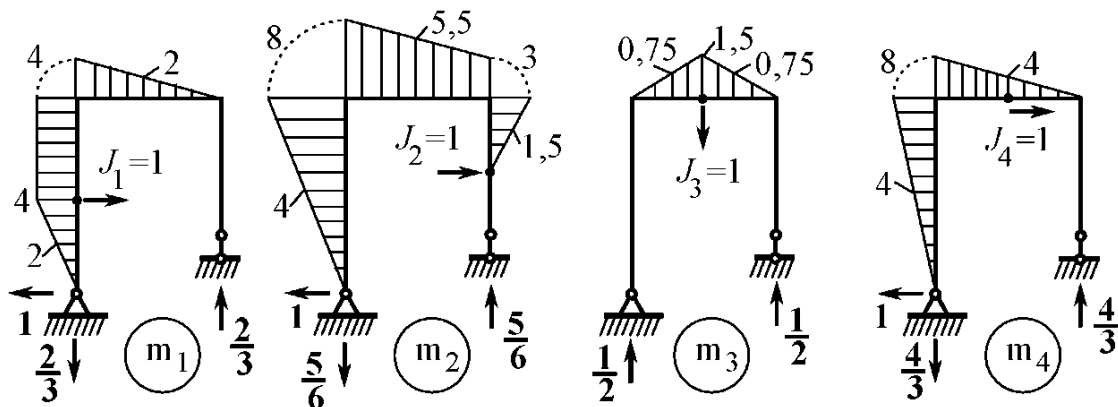


Рис. 3.27

После вычисления перемещений  $\delta_{ij} = \sum_k \int \frac{m_i \cdot m_j}{EJ}$ ,  $i, j = 1, 4$  и соответствующих подстановок матрица податливости принимает форму

$$[D] = \frac{1}{2 \cdot 10^7} \begin{bmatrix} 101,33 & 155,33 & 4,50 & 149,33 \\ & 276,67 & 12,375 & 252,0 \\ & & 2,250 & 9,0 \\ \text{симметр.} & & & 234,67 \end{bmatrix}.$$

Матрица масс  $[M]$  эквивалентна данным предыдущего примера.

Спектр частот свободных колебаний в рассматриваемом случае принимает следующие значения:

$$\omega_1 = 3,425 \text{ с}^{-1}; \omega_2 = 28,03 \text{ с}^{-1}; \omega_3 = 59,75 \text{ с}^{-1}; \omega_4 = 344,1 \text{ с}^{-1}.$$

Сравнивая частоты основного тона свободных колебаний, полученные в первом ( $6,664 \text{ с}^{-1}$ ) и втором ( $3,425 \text{ с}^{-1}$ ) примерах, устанавливаем, что замена жесткой заделки на шарнирно неподвижную опору в левой стойке рамы приводит к уменьшению величины  $\omega_1$  почти в два раза. Это связано с тем, что в результате данной реконструкции жесткость рамы во втором примере понизилась при сохранении инерционных свойств системы.

**Пример 3.** Необходимо вычислить частоты свободных колебаний трехэтажной рамы (рис. 3.28), приняв погонные массы ригелей равными:

$$m_{\Pi 1} = 3,058 \text{ (кН} \cdot \text{с}^2)/\text{м}^2; m_{\Pi 2} = m_{\Pi 3} = 2,039 \text{ (кН} \cdot \text{с}^2)/\text{м}^2.$$

Величины сосредоточенных масс:

$$m_1 = 40,77 \text{ (кН} \cdot \text{с}^2)/\text{м}; m_2 = m_3 = 30,58 \text{ (кН} \cdot \text{с}^2)/\text{м}.$$

Значение изгибной жесткости стоек  $EJ = 3680 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$ .

Основная система метода перемещений показана на рис. 3.29. Как видно система имеет три динамических степени свободы, что совпадает со степенью кинематической неопределимости задачи.

Матрицы жесткости  $[R]$  и масс  $[M]$  имеют вид:

$$[R] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ 0 & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix};$$

$$[M] = \text{diag}[m_{\Pi 1} \cdot 6 + 2 \cdot m_1 \mid m_{\Pi 2} \cdot 6 + 2 \cdot m_2 \mid m_{\Pi 3} \cdot 6 + 2 \cdot m_3].$$

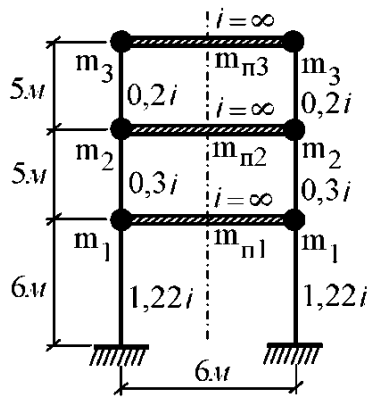


Рис. 3.28

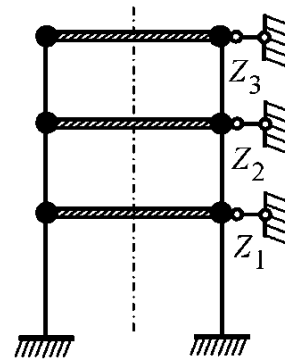


Рис. 3.29

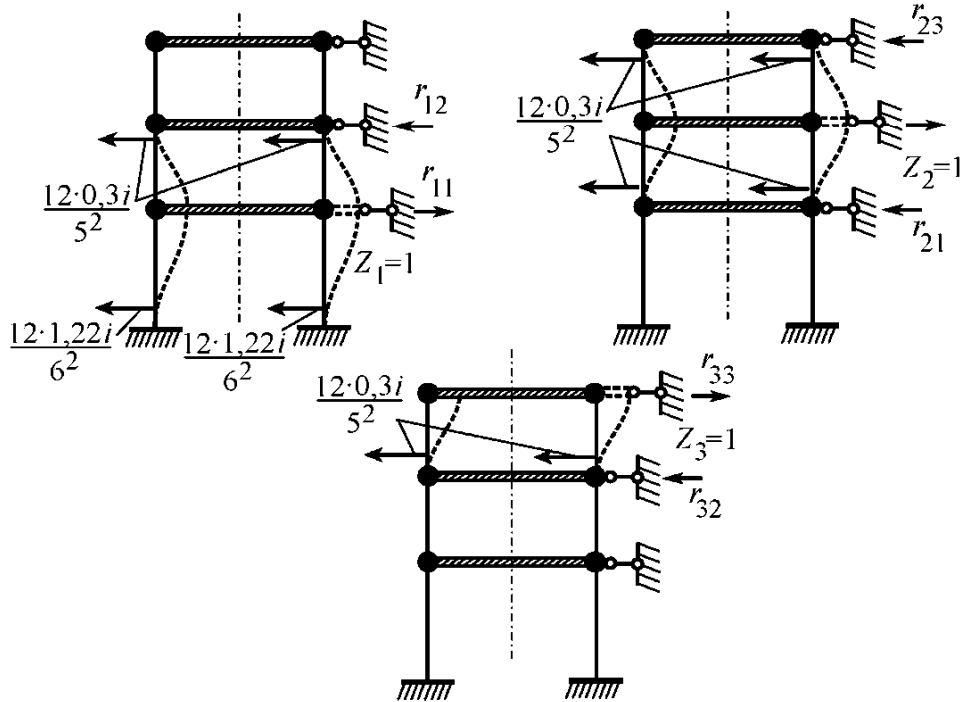


Рис. 3.30

Для вычисления величин  $r_{ij}$ ,  $i, j = 1, 3$  используем выражения для реакций, возникающих при единичных смещениях связей  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $Z_3$  (рис. 3.30).

В итоге получим характеристическое уравнение:

$$\left| 3680 \cdot 10^3 \begin{bmatrix} 1,1013 & -0,2880 & 0 \\ & 0,480 & -0,1920 \\ \text{симметр.} & & 0,1920 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 99898 & 0 & 0 \\ 0 & 73395 & 0 \\ 0 & 0 & 73395 \end{bmatrix} \right| = 0.$$

Решая обобщенную собственную проблему с помощью системы

Maple V, получим следующие значения частот свободных колебаний рамы:

$$\omega_1 = 1,962 \text{ с}^{-1}; \omega_2 = 4,758 \text{ с}^{-1}; \omega_3 = 6,912 \text{ с}^{-1}.$$

### 3.6.4. Расчет многомассовых рам на вынужденные гармонические колебания методом сил

Вынужденные гармонические колебания возникают в рамах при действии вибрационной нагрузки.

Целью “ручного” динамического расчета является определение амплитудных (наибольших) значений внутренних усилий (моментов, поперечных и продольных сил) в стержнях рамы при возбуждении колебаний.

Полагаем, что возмущающие силы изменяются синхронно (по одному закону с одинаковой частотой) и синфазно (без сдвига фаз). Силы сопротивления ввиду их малости не учитываем. Считаем, что значение частоты вибрационной нагрузки  $\Theta$  достаточно удалено от частоты основного тона свободных колебаний  $\omega_1$ .

Каноническая система уравнений метода сил для определения амплитудных значений сил инерции  $X_1^{\text{ИН}}$ ,  $X_2^{\text{ИН}}$ , ...,  $X_n^{\text{ИН}}$  имеет вид:

$$\begin{cases} \delta_{11}^* X_1^{\text{ИН}} + \delta_{12} X_2^{\text{ИН}} + \dots + \delta_{1n} X_n^{\text{ИН}} + \Delta_{1p} = 0; \\ \delta_{21} X_1^{\text{ИН}} + \delta_{22}^* X_2^{\text{ИН}} + \dots + \delta_{2n} X_n^{\text{ИН}} + \Delta_{2p} = 0; \\ \dots \\ \delta_{n1} X_1^{\text{ИН}} + \delta_{n2} X_2^{\text{ИН}} + \dots + \delta_{nn}^* X_n^{\text{ИН}} + \Delta_{np} = 0, \end{cases}$$

где  $\delta_{ij}$  – перемещение сосредоточенной массы по направлению  $X_j^{\text{ИН}}$  от действия единичной силы инерции  $X_j^{\text{ИН}} = 1$ ;  $\Delta_{ip}$  – перемещение сосредоточенной массы  $m_i$  от действия амплитудного значения вибрационной нагрузки.

Диагональные коэффициенты  $\delta_{ii}^*$  вычисляются с учетом силы инерции массы  $m_i$  по формуле



$$\delta_{ii}^* = \delta_{ii} - \frac{1}{m_i \Theta^2}.$$

После вычисления неизвестных  $X_1^{\text{ин}}$ ,  $X_2^{\text{ин}}$ , ...,  $X_n^{\text{ин}}$  строится “суммарная” эпюра динамических изгибающих моментов  $M_{\text{дин}}$  и соответствующие эпюры  $Q_{\text{дин}}$  и  $N_{\text{дин}}$ .

Порядок динамического расчета плоской статически определимой рамы рассмотрим на конкретном числовом примере.

**Пример 1.** Требуется для статически определимой рамы, показанной на рис. 3.31, используя метод сил, определить динамическое воздействие вертикальной вибрационной силы  $P \sin \Theta t$ , приняв  $\Theta = 1/2 \omega_1$ .

Исходные данные:  $l=2$  м;  $Q=10$  кН;  $P=1$  кН;  $EJ=20 \cdot 10^3$  кН·м<sup>2</sup>.

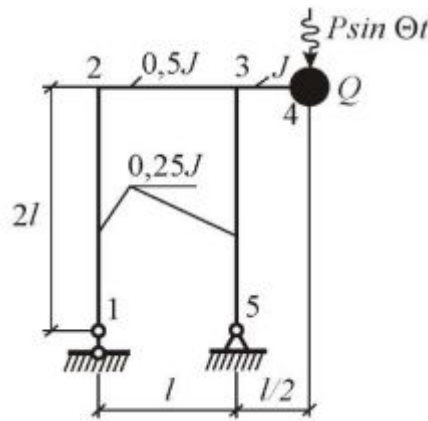


Рис. 3.31

Сначала определим частоты свободных колебаний рамы. Число динамических степеней свободы рамы равно двум (рис. 3.32).

Система уравнений, описывающая свободные колебания, для данной рамы имеет вид:

$$(m_1 \delta_{11} - \lambda) w_1 + m_2 \delta_{12} w_2 = 0,$$

$$m_1 \delta_{21} w_1 + (m_2 \delta_{22} - \lambda) w_2 = 0.$$

Для определения единичных перемещений  $\delta_{11}$ ,  $\delta_{12} = \delta_{21}$ ,  $\delta_{22}$ , приложим в точке расположения сосредоточенной массы силы инерции  $X_1$  и  $X_2$  (рис. 3.33) и построим эпюры изгибающих моментов

$m_1$  и  $m_2$  от действия сил  $X_1 = 1$  и  $X_2 = 1$  (рис. 3.34).

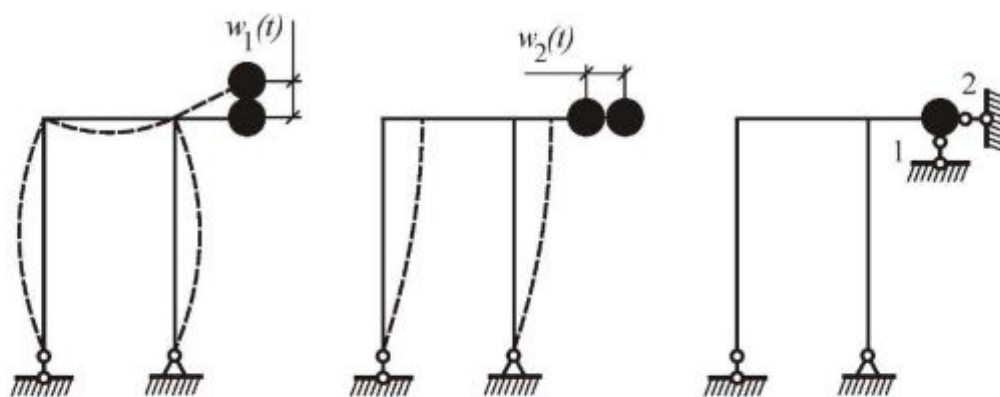


Рис. 3.32

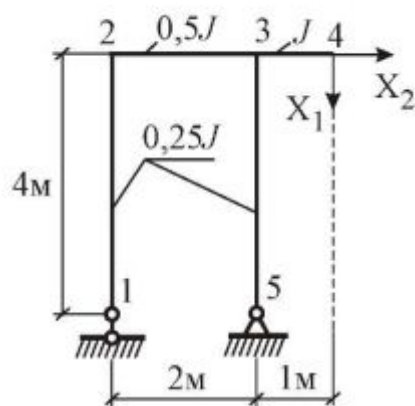


Рис. 3.33

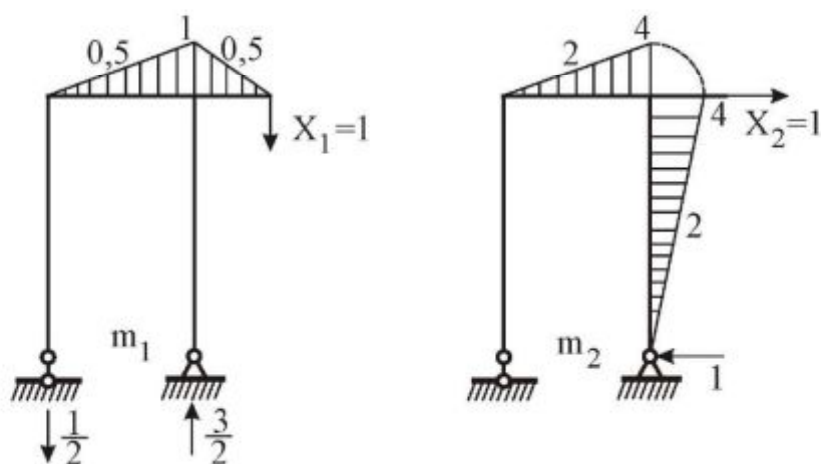


Рис. 3.34

Единичные перемещения определяем по формуле Мора с последующим численным интегрированием:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \sum \int \frac{m_1 m_1}{EJ} ds \approx \frac{2}{6E \cdot 0,5J} [0 + 4 \cdot 0,5^2 + 1] + \frac{1}{6EJ} [1 + 4 \cdot 0,5^2 + 0] = \\ &= \frac{4}{3EJ} + \frac{2}{6EJ} = \frac{5}{3EJ}; \\ \delta_{12} &= \sum \int \frac{m_1 m_2}{EJ} ds \approx \frac{2}{6E \cdot 0,5J} [0 + 4 \cdot 0,5 \cdot 2 + 1 \cdot 4] = \frac{16}{3EJ}; \\ \delta_{22} &= \sum \int \frac{m_2 m_2}{EJ} ds \approx \frac{2}{6E \cdot 0,5J} [0 + 4 \cdot 2^2 + 4^2] + \frac{4}{6E \cdot 0,25J} [4^2 + \\ &+ 4 \cdot 2^2 + 0] = \frac{64}{3EJ} + \frac{128}{1,5EJ} = \frac{320}{3EJ}. \end{aligned}$$

Формируем матрицы податливости  $[D]$  и масс  $[M]$  для рассматриваемой рамы:

$$[D] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{3EJ} \begin{bmatrix} 5 & 16 \\ 16 & 320 \end{bmatrix};$$

$$[M] = \text{diag}[m_1 \quad m_2] = \text{diag}[1019 \quad 1019].$$

$$\text{Здесь } m_1 = m_2 = \frac{Q}{g} = \frac{10^4 \text{ Н}}{9,81 \text{ м/с}^2} = 1019 \text{ (Н} \cdot \text{с}^2\text{)/м.}$$

Составляем характеристическое уравнение в матричной форме:

$$\det(\lambda) = |[D][M] - \lambda[I]| = 0,$$

где параметр круговой частоты  $\lambda = 1/\omega^2$ ,  $\omega$  – круговая частота,  $\text{с}^{-1}$ ;  
 $[I] = \text{diag}[1 \quad 1]$  – единичная матрица.

Раскрыв определитель  $\det(\lambda)$ , получим квадратное уравнение относительно  $\lambda$ :

$$(m\delta_{11} - \lambda)(m\delta_{22} - \lambda) - m^2 \delta_{12}^2 = 0.$$

Корни этого уравнения  $\lambda_1 = 0,7115 \cdot 10^{-4}$ ,  $\lambda_2 = 0,5448 \cdot 10^{-2}$  соответствуют значениям частот:  $\omega_1 = 13,55 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_2 = 118,6 \text{ с}^{-1}$ .

Амплитудные значения сил инерции сосредоточенной массы  $X_1^{\text{ин}}$  и  $X_2^{\text{ин}}$  определим с помощью системы уравнений:

$$\delta_{11}^* X_1^{\text{ин}} + \delta_{12} X_2^{\text{ин}} + \Delta_1 p = 0,$$

$$\delta_{21} X_1^{\text{ин}} + \delta_{22}^* X_2^{\text{ин}} + \Delta_{2p} = 0.$$

Здесь коэффициенты, стоящие на главной диагонали, определяются по формулам:

$$\delta_{11}^* = \delta_{11} - \frac{1}{m\Theta^2} = \frac{5}{3 \cdot 20 \cdot 10^6} - \frac{1}{1019 \cdot 45,97} = -0,213 \cdot 10^{-4},$$

$$\delta_{22}^* = \delta_{22} - \frac{1}{m\Theta^2} = \frac{320}{3 \cdot 20 \cdot 10^6} - \frac{1}{1019 \cdot 45,97} = -0,1605 \cdot 10^{-4},$$

где частота внешнего воздействия  $\Theta = \frac{\omega_1}{2} = 6,78 \text{ с}^{-1}$ .

Коэффициенты  $\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{16}{3EJ} = \frac{16}{3 \cdot 20 \cdot 10^6} = 0,2667 \cdot 10^{-6}$  остаются без изменений.

Для определения свободных членов  $\Delta_{1p}$  и  $\Delta_{2p}$  необходимо построить “грузовую” эпюру  $m_p$  (рис. 3.35).

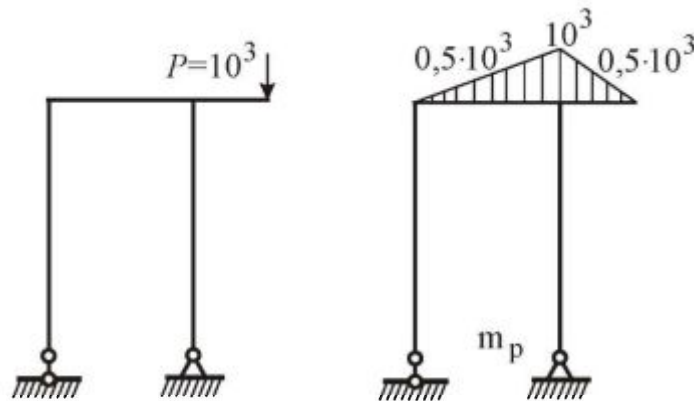


Рис. 3.35

Используя формулу Мора и численное интегрирование, получим:

$$\Delta_{1p} = \sum \int \frac{m_1 m_p}{EJ} ds \approx \frac{2}{6E \cdot 0,5J} [0 + 4 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^3] + \frac{1}{6EJ} [1 \cdot 10^3 + 4 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 10^3 + 0] = 0,8335 \cdot 10^{-4},$$

$$\Delta_{2p} = \sum \int \frac{m_2 m_p}{EJ} ds \approx \frac{2}{6E \cdot 0,5J} [0 + 4 \cdot 2 \cdot 0,5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3] = 0,2667 \cdot 10^{-3}.$$

Решая систему уравнений

$$-0,213 \cdot 10^{-4} X_1^{\text{ин}} + 0,2667 \cdot 10^{-6} X_2^{\text{ин}} + 0,8335 \cdot 10^{-4} = 0,$$

$$0,2667 \cdot 10^{-6} X_1^{\text{ин}} - 0,1605 \cdot 10^{-4} X_2^{\text{ин}} + 0,2667 \cdot 10^{-3} = 0,$$

находим  $X_1^{\text{ин}} = 4,122$  и  $X_2^{\text{ин}} = 16,69$ .

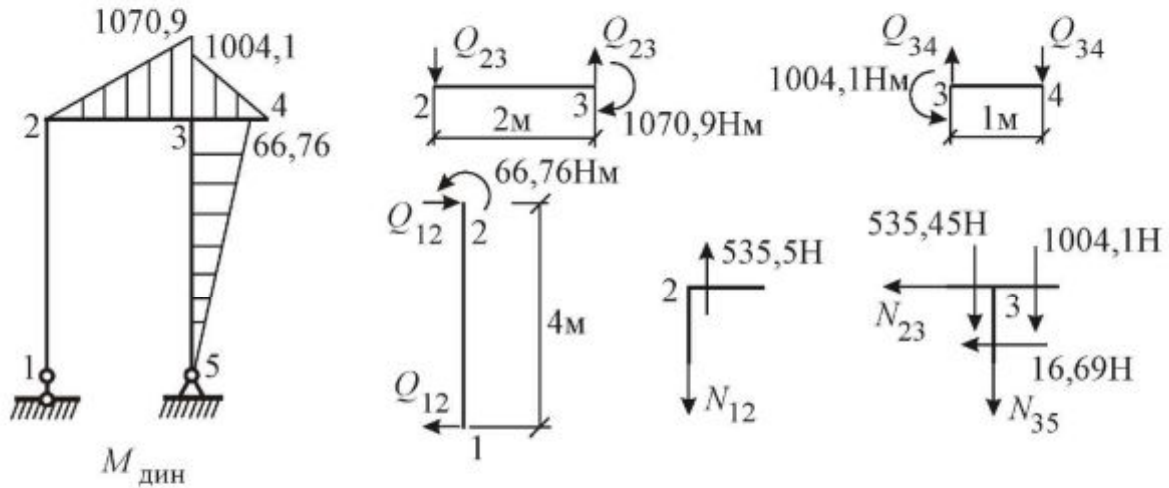


Рис. 3.36

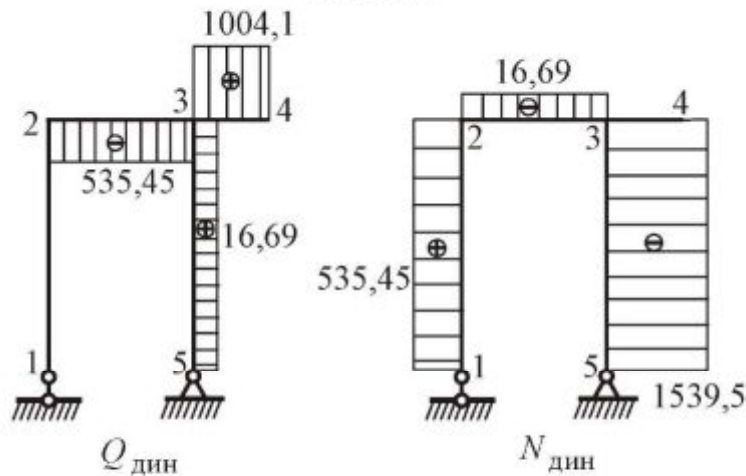


Рис. 3.37

Значения ординат эпюры динамических моментов вычисляем по формуле:

$$M_{\text{дин}} = m_p + m_1 X_1^{\text{ин}} + m_2 X_2^{\text{ин}}.$$

Эпюра  $M_{\text{дин}}$  приведена на рис. 3.36. На этом же рисунке показаны схемы стержней 2-3, 3-4, 1-2, и узлов 2 и 3, которые необходимы для построения эпюр поперечных  $Q_{\text{дин}}$  и продольных  $N_{\text{дин}}$  сил. Эпюры  $Q_{\text{дин}}$  и  $N_{\text{дин}}$  представлены на рис. 3.37



Коэффициент динамичности  $\mu = 1070,9/1000 = 1,07$ .

Выполним статическую проверку, определив по эпюрам  $Q_{\text{дин}}$  и  $N_{\text{дин}}$  реакции опор (рис. 3.38):

$$R_{y1} = 535,45 \text{ Н}; R_{x5} = 16,69 \text{ Н}; R_{y5} = 1539,5 \text{ Н}.$$

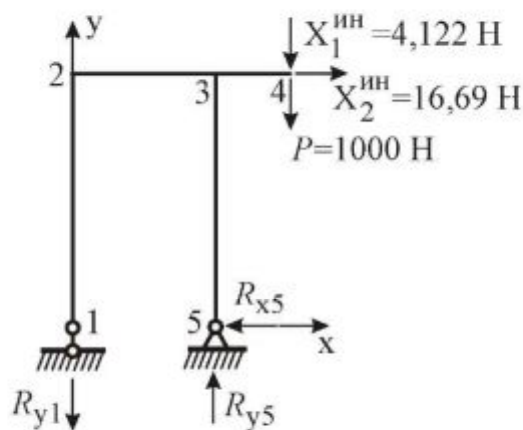


Рис. 3.38

Составим сумму проекции всех сил на оси  $x$  и  $y$ :

$$\sum \text{пр } y = R_{y1} + R_{y5} + X_1^{\text{инн}} + P = -535,45 + 1539,5 - 1000 - 4,122 = -0,07,$$

$$\sum \text{пр } x = R_{x1} + X_2^{\text{инн}} = -16,69 + 16,69 = 0.$$

Сумма моментов сил относительно пятого узла:

$$\begin{aligned} \sum M_5 = & -R_{y1} \cdot 2 + X_1^{\text{инн}} \cdot 1 + P \cdot 1 + X_2^{\text{инн}} \cdot 4 = -535,45 \cdot 2 + 4,122 \cdot 1 + \\ & + 1000 \cdot 1 + 16,69 \cdot 4 = -0,018. \end{aligned}$$

Полученная точность вполне удовлетворительна.

**Пример 2.** Требуется выполнить динамический расчет рамы (рис. 3.39) при действии вибрационной нагрузки  $P(t) = P_0 \sin(\Theta t)$  и  $q(t) = q_0 \sin(\Theta t)$ , приняв  $\Theta = 1/2 \omega_1$ . Данная схема рамы аналогична схеме, приведенной в пп. 3.6.3 (пример 2). Поэтому на основании ранее выполненных расчетов значение частоты основного тона свободных колебаний принимаем равным  $\omega_1 = 3,425 \text{ с}^{-1}$ . Тогда по условию задачи частота гармонического возбуждения колебаний составляет  $\Theta = 0,5 \cdot \omega_1 = 1,712 \text{ с}^{-1}$ .

Система уравнений для определения амплитудных значений сил

инерции принимает вид:

$$\begin{cases} \delta_{11}^* X_1^{\text{ин}} + \delta_{12} X_2^{\text{ин}} + \delta_{13} X_3^{\text{ин}} + \delta_{14} X_4^{\text{ин}} + \Delta_{1p} = 0; \\ \delta_{21} X_1^{\text{ин}} + \delta_{22}^* X_2^{\text{ин}} + \delta_{23} X_3^{\text{ин}} + \delta_{24} X_4^{\text{ин}} + \Delta_{2p} = 0; \\ \delta_{31} X_1^{\text{ин}} + \delta_{32} X_2^{\text{ин}} + \delta_{33}^* X_3^{\text{ин}} + \delta_{34} X_4^{\text{ин}} + \Delta_{3p} = 0; \\ \delta_{41} X_1^{\text{ин}} + \delta_{42} X_2^{\text{ин}} + \delta_{43} X_3^{\text{ин}} + \delta_{44}^* X_4^{\text{ин}} + \Delta_{4p} = 0. \end{cases}$$

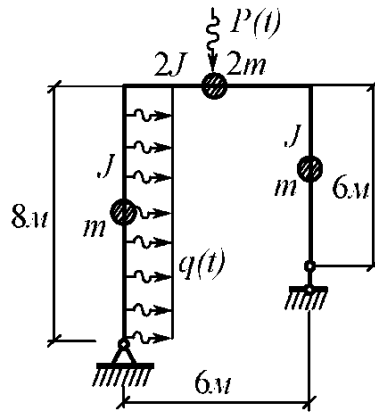


Рис. 3.39

Здесь диагональные коэффициенты:

$$\begin{aligned} \delta_{11}^* &= \delta_{11} - \frac{1}{m_1 \Theta^2} = \frac{101,33}{2 \cdot 10^7} - \frac{1}{2038,7 \cdot 1,712^2} = -0,1622 \cdot 10^{-3}; \\ \delta_{22}^* &= \delta_{22} - \frac{1}{m_2 \Theta^2} = \frac{276,67}{2 \cdot 10^7} - \frac{1}{2038,7 \cdot 1,712^2} = -0,1535 \cdot 10^{-3}; \\ \delta_{33}^* &= \delta_{33} - \frac{1}{m_3 \Theta^2} = \frac{2,250}{2 \cdot 10^7} - \frac{1}{4077,4 \cdot 1,712^2} = -0,8354 \cdot 10^{-4}; \\ \delta_{44}^* &= \delta_{44} - \frac{1}{m_4 \Theta^2} = \frac{234,67}{2 \cdot 10^7} - \frac{1}{2038,7 \cdot 1,712^2} = -0,7192 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Значения недиагональных коэффициентов  $\delta_{ij}$  ( $i \neq j$ ) приведены в разделе 3.6.3 (пример 2).

Свободные члены  $\Delta_{1p}$ ,  $\Delta_{2p}$ , ... системы уравнений вычисляем после построения грузовой эпюры моментов  $m_p$  (рис. 3.40).

В итоге результирующее матричное уравнение принимает вид

$$[D]\{X^{\text{ин}}\} = \{b\},$$

где вектор правой части

$$\{b\} = \{0,1481 \mid 0,2340 \mid 0,7649 \cdot 10^{-2} \mid 0,2237\}^T.$$

Вектор амплитудных значений сил инерции  $\{X^{\text{ин}}\}$  находим с помощью функций матричной алгебры системы Maple V. В итоге получим

$$\{X^{\text{ин}}\} = \{1,167 \mid 1,876 \mid 0,1278 \mid 3,560\}^T.$$

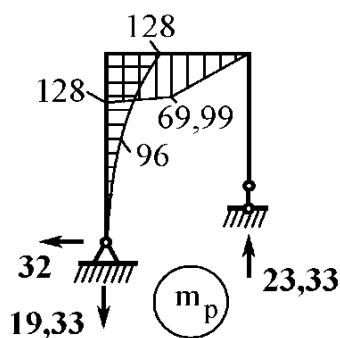


Рис. 3.40

Величины  $X_1^{\text{ин}}$ ,  $X_2^{\text{ин}}$ , ... имеют размерность кН.

“Суммарная” эпюра изгибающих моментов  $M_{\text{дин}}$ , эпюры поперечных  $Q_{\text{дин}}$  и продольных  $N_{\text{дин}}$  сил представлены на рис. 3.41.

Значения коэффициента динамичности  $\mu$  в элементах рамы вычисляем как отношения максимальных ординат эпюры  $M_{\text{дин}}$  (см. рис. 3.41) к ординатам эпюры  $m_p$  (см. рис. 3.40):

в ригеле  $\mu = 97,07/97 = 1,39$ ; в стойке  $\mu = 176,2/128 = 1,38$ .

В заключение выполним статическую проверку правильности построенных эпюр (рис. 3.42).

Сумма проекции сил на ось  $x$ :

$$\sum_{\text{пр}} X = q_0 \cdot 8 + X_1^{\text{ин}} + X_2^{\text{ин}} + X_4^{\text{ин}} - 38,6 = 0;$$

$$4 \cdot 8 + 1,167 + 1,876 + 3,56 - 38,6 = 0; \quad 0 \equiv 0.$$



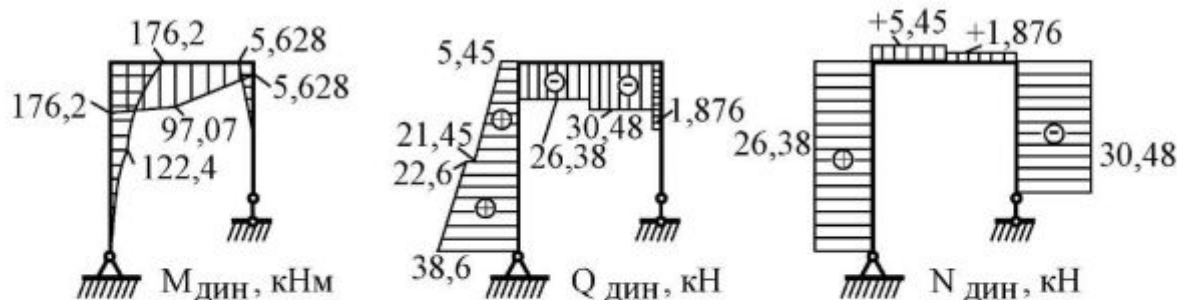


Рис. 3.41

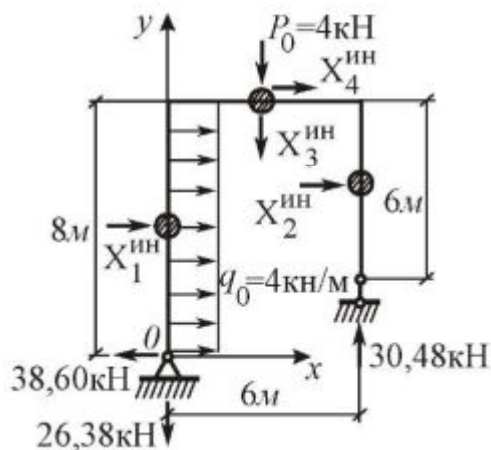


Рис. 3.42

Сумма проекции сил на ось  $y$ :

$$\sum_{\text{пр}} Y = -P_0 - X_3^{\text{ин}} - 26,38 + 30,48 = 0;$$

$$-4 - 0,1278 - 26,38 + 30,48 = -4,1278 + 4,10 = -0,0278$$

(расхождение в третьем знаке, абсолютная погрешность – 2,7%).

### 3.6.5. Итерационный алгоритм вычисления частот свободных колебаний рам с конечным числом степеней свободы

Известно, что характеристические уравнения (3.16) и (3.18) при  $n > 4$  нельзя решить “вручную”, раскрыв определитель. Поэтому задачи на собственные значения при  $n > 4$  решаются с помощью итерационных процедур. Рассмотрим модифицированный алгоритм обратных итераций [5], позволяющий решить усеченную проблему собственных значений, суть которой состоит в вычислении первой и по-

следующей частот свободных колебаний  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_S$  с одновременным определением соответствующих собственных векторов  $\{A_1\}, \{A_2\}, \dots, \{A_S\}$  системы (3.20).

Полагаем, что матрица упругих реакций  $[R]$  положительно определенная, т. е. для нее может быть вычислена обратная матрица  $[R]^{-1}$ . Вычислительный процесс итерационного алгоритма основан на использовании отношения Рэля

$$\rho_S = \frac{\{A_S\}^T [R] \{A_S\}}{\{A_S\}^T [M] \{A_S\}},$$

которое обладает свойством  $\omega_{min}^2 \leq \rho_S \leq \omega_{max}^2$ , где  $\omega_{min}^2$  и  $\omega_{max}^2$  – минимальное и максимальное значения собственных значений системы (3.20). С помощью величины  $\rho_S$  называемой сдвигом, на основании выражения  $[R] - \rho_S [M]$  можно вычислить первое и последующие (низшие) собственные значения. Блок-схема данного алгоритма представлена на рис. 3.43.

Программа на языке Фортран для вычисления частот свободных колебаний приведена в приложении 8.

В качестве исходных данных необходимо задать величину начального сдвига  $\rho_1$  и начальный рабочий вектор  $\{x_1\}$  размерностью  $n$ . При вычислении частоты основного тона  $\omega_1$  принимаем  $\rho_1 = 0$ , а для нахождения последующих частот  $\omega_2, \omega_3, \dots$  начальный сдвиг  $\rho_1$  увеличиваем на величину  $\omega_{S-1}^2 + \Delta$ . Константу  $\Delta$  подбираем способом “пристрелки” таким образом, чтобы искомое собственное число  $\omega_S^2$  было больше предыдущего  $\omega_{S-1}^2$ . Графическая интерпретация выбора величины  $\rho_1$  для  $S > 1$  показана на рис. 3.44.

Так как компоненты вектора  $\{x_1\}$  являются неизвестными, то в первом приближении им можно присвоить единичные значения. Величина  $S$ -го собственного значения  $\omega_S^2$  вычисляется с точностью  $\varepsilon = 10^{-2p}$ , где  $p$  – число верных значащих цифр.

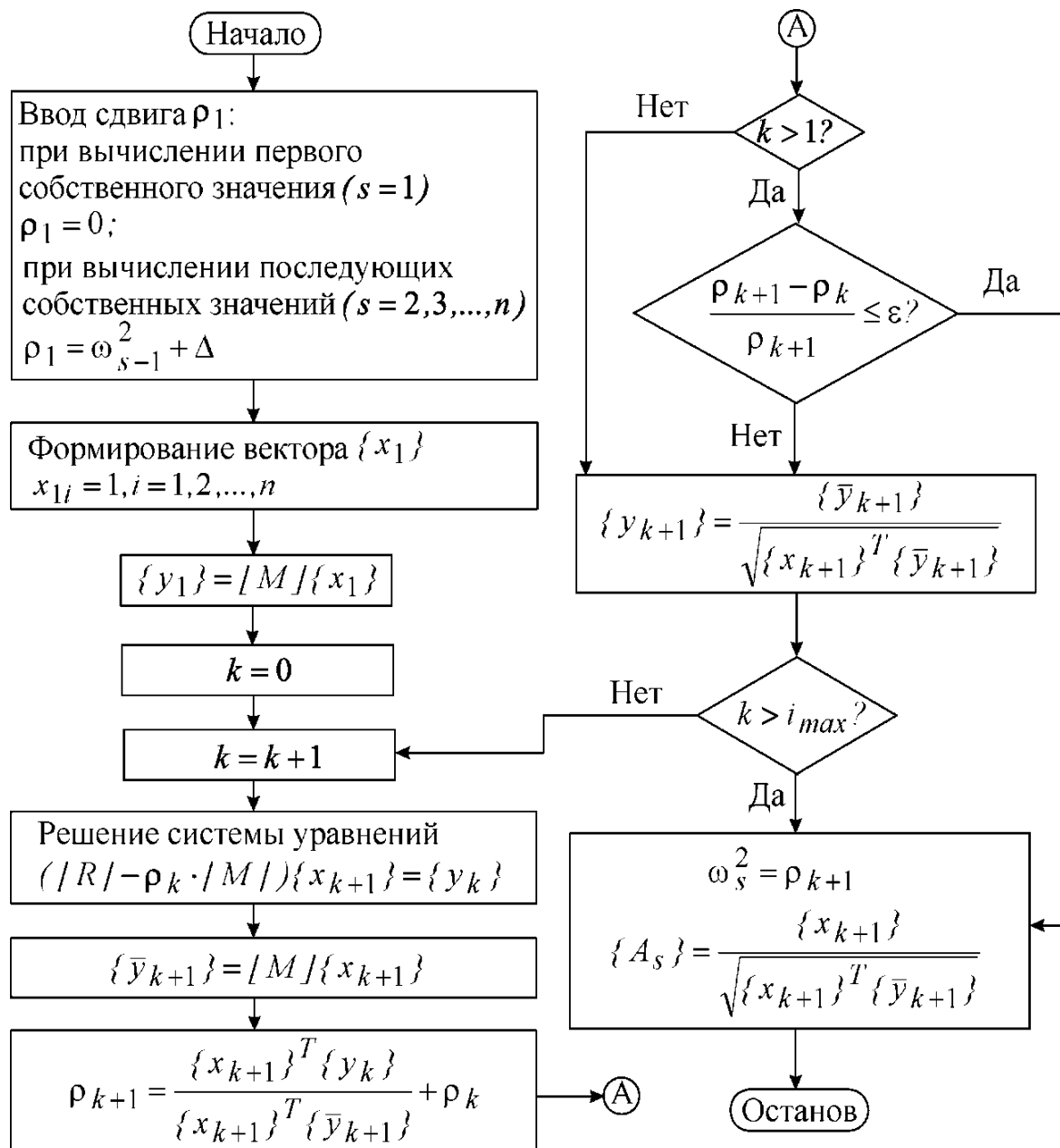


Рис. 3.43

Вычислительной особенностью рассмотренного алгоритма является необходимость введения рабочих векторов  $\{y\}$ ,  $\{\bar{y}\}$ ,  $\{x\}$  размерностью  $n$ , предназначенных для хранения промежуточных данных. Для предотвращения итерационного процесса от закливания задается максимальное число итераций  $i_{max}$ .

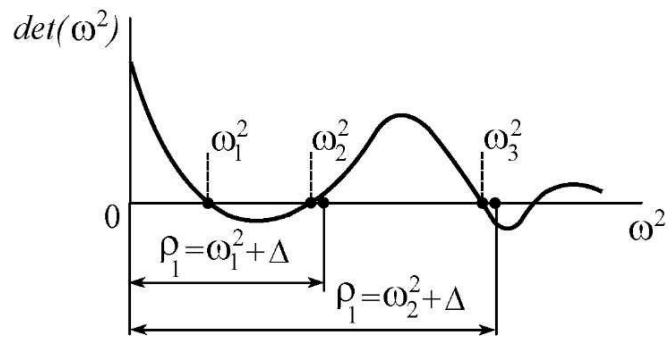


Рис. 3.44

**Пример.** требуется определить модифицированным методом обратных итераций частоты и формы свободных колебаний статически определимой плоской рамы (рис. 3.45, а). Величины сосредоточенной массы и изгибной жесткости принимаем равными  $m = 1,019 \cdot 10^3$  кг и  $EJ = 2 \cdot 10^7$  Н·м<sup>2</sup>.

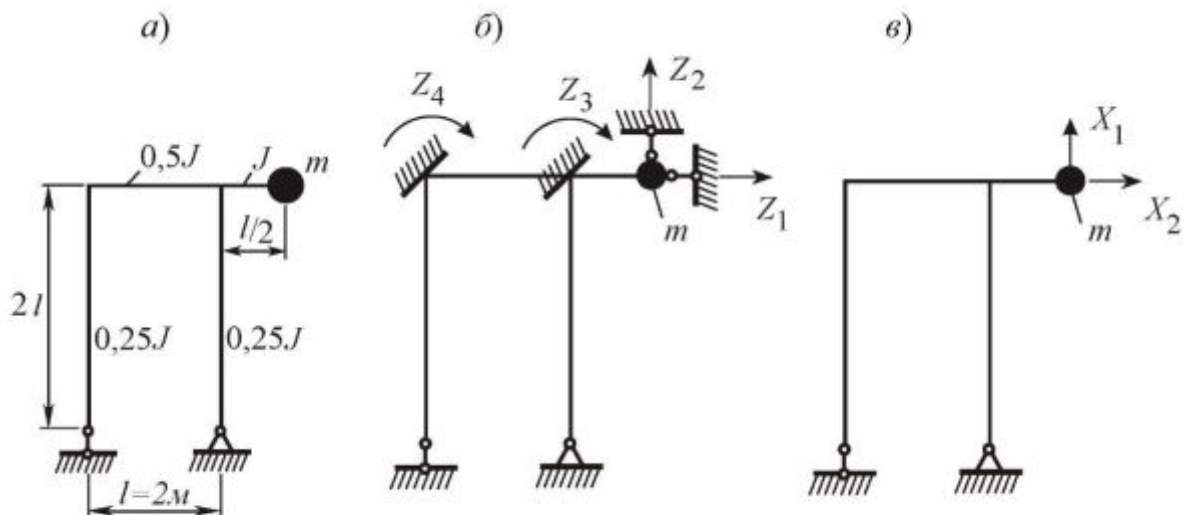


Рис. 3.45

В соответствии с основной системой метода перемещений (рис. 3.45, б) матрица упругих реакций принимает вид

$$[R] = EJ \begin{bmatrix} 0,011719 & 0 & -0,046875 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ -0,046875 & 3 & 4,1875 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица масс для рассматриваемой задачи имеет диагональную структуру

$$[M] = \text{diag}[1,019 \cdot 10^3 \quad 1,019 \cdot 10^3 \quad 0 \quad 0].$$

Отметим, что в данном случае на главной диагонали матрицы  $[M]$  имеются нулевые элементы.

При вычислении первой собственной частоты  $\omega_1$  с точностью  $\varepsilon = 10^{-8}$  получаем значение  $\omega_1 = 13,55 \text{ с}^{-1}$ . Итерационный процесс сошелся за три итерации.

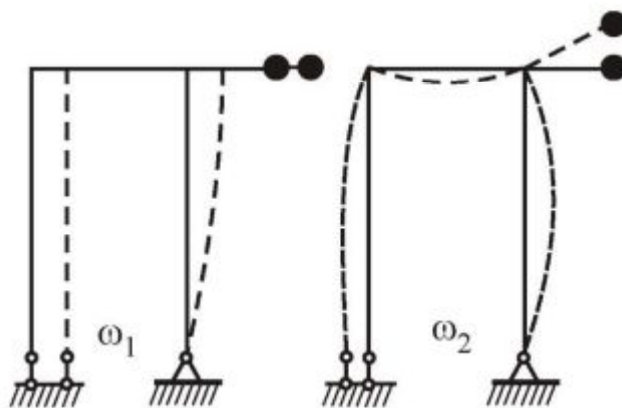


Рис. 3.46

Для вычисления второй собственной частоты  $\omega_2$  величину начального сдвига принимаем равной  $\rho_1 = 10^4$ . В итоге за пять итераций получаем  $\omega_2 = 118,5 \text{ с}^{-1}$ . Отметим, что процедура сдвига приводит к появлению на главной диагонали результирующей системы уравнений отрицательного коэффициента.

Вычисленные векторы  $\{A_1\}$  и  $\{A_2\}$  удовлетворяют условиям  $M$ - и  $R$ -ортогональности. Визуализация возможных первых двух форм свободных колебаний рамы показана на рис. 3.46.

Выполним аналогичный расчет плоской рамы с использованием основной системы метода сил (рис. 3.45, в). Матрицы податливости и масс для рассматриваемой системы имеют вид:

$$[D] = \frac{1}{3EJ} \begin{bmatrix} 5 & 16 \\ 16 & 320 \end{bmatrix}; \quad [M] = \begin{bmatrix} 1,019 \cdot 10^3 & 0 \\ 0 & 1,019 \cdot 10^3 \end{bmatrix}.$$

Матрицу жесткости определим как  $[R]=[D]^{-1}$ . Далее, применив итерационный алгоритм, находим:

$$\omega_1=13,55 \text{ с}^{-1}; \omega_2=118,6 \text{ с}^{-1}.$$

Как и следовало ожидать, полученные с помощью метода перемещений и метода сил значения  $\omega_1$  и  $\omega_2$  практически совпали. Безусловно, трудоемкость решения данного примера по методу перемещений значительно выше, чем по методу сил. Вместе с тем выполненное сопоставление решений представляет определенный методологический интерес. Ниже этот пример будет решен с помощью МКЭ.

### 3.7. Уравнение движения в формулировке метода конечных элементов

В настоящее время МКЭ находит широкое применение при анализе динамического поведения элементов конструкций и сооружений. Это объясняется тем, что лишь небольшой класс динамических задач строительной механики имеет аналитическое решение. С помощью МКЭ выполняются следующие виды динамических расчетов: модальный анализ (определение частот и форм собственных колебаний), исследование переходных процессов, гармонический и спектральный анализ, анализ поведения конструкции при сейсмическом воздействии.

Рассмотрим движение линейно-упругой системы, происходящее на временном интервале  $[t_1, t_2]$ , в глобальных декартовых осях. Примем обозначения:  $\Pi = \Pi(t, w_i)$  – полная потенциальная энергия внутренних и внешних сил, действующих на систему;  $T = T(t, w, w')$  – кинетическая энергия системы;  $w_i, w'_i (i = 1, 2, \dots, n_g)$  – обобщенные перемещения и скорости в глобальных осях;  $n_g$  – число степеней свободы системы. Предполагаем, что в простейшем случае силы демпфирования пропорциональны скоростям и направлены в противоположную сторону. По природе действия эта нагрузка аналогична силам инерции. Работа диссипативных сил

$$\Omega = Q_i w_i,$$

где  $Q_i$  – обобщенные силы, не имеющие потенциала.

При конечно-элементном анализе динамики неконсервативных систем<sup>1</sup> принято исходить из вариационного принципа Гамильтона. Суть этого принципа основана на условии стационарности интеграла

$$\int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi) dt = 0$$

для истинного движения системы от момента времени  $t_1$  до момента  $t_2$ .

Согласно принятым обозначениям, вариационный принцип Гамильтона запишем в виде, удобном для вывода последующих матричных выражений МКЭ [8]:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial(T - \Pi)}{\partial w_i} \delta w_i + \frac{\partial T}{\partial w'_i} \delta w'_i \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} Q_i \delta w_i dt = 0.$$

Интегрируя второе слагаемое, стоящее в скобках, по частям и учитывая, что  $\delta w_i(t_1) = \delta w_i(t_2) = 0$ , получим

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial(T - \Pi)}{\partial w_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial w'_i} + Q_i \right) \delta w_i dt = 0.$$

Отсюда, вследствие того, что  $\delta w_i$  – произвольные независимые величины, в общем случае отличные от нуля, получаем уравнение Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial w'_i} \right) - \frac{\partial(T - \Pi)}{\partial w_i} = Q_i. \quad (3.23)$$

Представим уравнение (3.23) в терминах МКЭ. Полная потенциальная энергия конечного элемента

<sup>1</sup> Система, в которой при ее движении величина энергии  $\Pi$  остается постоянной, называется консервативной, в противном случае система будет неконсервативной.

$$\begin{aligned}
\Pi_e = & \frac{1}{2} \int_{v_e} \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon\} d v - \int_{v_e} \{u\}^T \{g\} d v - \int_{s_e} \{u\}^T \{q\} d s = \\
& \frac{1}{2} \{w\}^T \left( \int_{v_e} [D]^T [E] [D] d v \right) \{w\} - \{w\}^T \int_{v_e} [F]^T \{g\} d v - \\
& - \{w\}^T \int_{s_e} [F]^T \{q\} d s,
\end{aligned} \tag{3.24}$$

где  $\{w\}$  – вектор-столбец узловых перемещений;  $\{\varepsilon\}$  – вектор-столбец деформации;  $[E]$  – матрица упругости материала;  $[D]$  – блочная матрица, устанавливающая связь типа  $\{\varepsilon\} = [D]\{w\}$ ;  $\{g\}$  и  $\{q\}$  – векторы-столбцы объемных и распределенных по поверхности сил в глобальных осях;  $[F]$  – матрица функций формы, осуществляющая преобразование  $\{u\} = [F]\{w\}$ ;  $\{u\}$  – вектор-столбец перемещений произвольной точки конечного элемента относительно глобальных осей;  $v_e$  – объём, занимаемый элементом;  $s_e$  – площадь поверхности элемента, к которой приложена распределенная нагрузка. Учитывая, что элементы  $[F]$  – суть функции только локальных координат, установим соотношение

$$\{u'\} = [F]\{w'\},$$

в котором  $\{u'\}$ ,  $\{w'\}$  – соответственно векторы-столбцы скоростей произвольной точки и узлов элемента.

Кинетическая энергия элемента

$$T_e = \frac{1}{2} \int_{v_e} \rho \{u'\}^T \{u'\} d v = \frac{1}{2} \{w'\}^T \left( \int_{v_e} [F]^T \rho [F] d v \right) \{w'\},$$

(3.25)

где  $\rho$  – плотность материала.

На основании выше принятого предположения вектор-столбец сил демпфирования элемента

$$\{Q\} = - \left( \int_{v_e} [F]^T \gamma [F] d v \right) \{w'\}. \tag{3.26}$$

Здесь  $\gamma$  – коэффициент демпфирования, определяемый экспериментально путем исследования собственных затухающих колебаний



конструкции. Для прокатной стали и железобетона соответственно имеем  $\gamma = 0,025$  и  $\gamma = 0,1$ .

Подставляя выражения (3.24)-(3.26) в уравнение (3.23) и учитывая, что  $\frac{\partial T}{\partial w_i} = 0$ , запишем

$$\left( \int_{v_e} [F]^T \rho [F] d v \right) \{w''\} + \left( \int_{v_e} [D]^T [E] [D] d v \right) \{w\} - \int_{v_c} [F]^T \{g\} d v - \int_{s_e} [F]^T \{q\} d s = - \left( \int_{v_c} [F]^T \gamma [F] d v \right) \{w'\},$$

( $\{w''\}$  – вектор-столбец узловых ускорений) или в матричной форме

$$[m] \{w''\} + [c] \{w'\} + [k] \{w\} = \{p\},$$

где матрица масс элемента

$$[m] = \int_{v_e} [F]^T \rho [F] d v;$$

матрица демпфирования элемента

$$[c] = \int_{v_e} [F]^T \gamma [F] d v;$$

матрица жесткости элемента

$$[k] = \int_{v_e} [D]^T [E] [D] d v;$$

вектор-столбец узловой нагрузки элемента

$$\{p\} = \int_{v_c} [F]^T \{g\} d v + \int_{s_e} [F]^T \{q\} d s.$$

В общем случае, когда элементы  $\{p\}$  зависят от времени, имеем систему линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка.

Использование одних и тех же функций формы для векторов перемещений и ускорений приводит к согласованной структуре матрицы масс, т.е.  $[k]$  и  $[m]$  формально будут иметь одно и то же количество ненулевых элементов.

Построение матрицы масс  $[M]$  ансамбля элементов выполняем аналогично формированию глобальной матрицы жесткости, т.е. пу-

тем прямого адресного включения элементов  $[m]$  в  $[M]$ .

В отличие от глобальных матриц жесткости  $[K]$  и масс  $[M]$  глобальная матрица демпфирования  $[C]$  обычно формируется на уровне ансамбля элементов, т.е. сразу для всей системы. При этом на основании гипотезы Релея записывают [5]:

$$[C] = \alpha [M] + \beta [K],$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$  – постоянные, определяемые по формулам:

$$\alpha = \frac{2\omega_1\omega_2(\omega_2\gamma_1 - \omega_1\lambda_2)}{\omega_2^2 - \omega_1^2}; \quad \beta = \frac{2(\omega_2\lambda_2 - \omega_1\gamma_1)}{\omega_2^2 - \omega_1^2}.$$

Здесь обозначено:  $\omega_1, \omega_2$  – первые две угловые частоты свободных колебаний;  $\gamma_1, \gamma_2$  – коэффициенты демпфирования 1-й и 2-й форм свободных колебаний. Константы  $\alpha$  и  $\beta$  соответствуют инерционному и конструкционному демпфированию.

Если сооружение представляет собой набор фрагментов, обладающих различными демпфирующими свойствами, необходимо использовать различные значения коэффициентов  $\alpha$ ,  $\beta$  для соответствующих типов материалов.

Следует подчеркнуть, что при конструировании граничных условий нужно учитывать характер динамического поведения конструкции. Так, если в статике мы стремились полностью исключить смещения “как жесткого целого”, то в динамике набор связей не должен приводить к образованию динамических реакций, искажающих колебательный процесс.

### 3.8. Матрица масс стержневого конечного элемента

Для динамического расчета стержневых секций используются прямолинейные балочные элементы постоянного поперечного сечения, для которых общая матрица жесткости  $[k]$  приведена в разделе 2.1. Напомним, что для плоской задачи стержневой конечный элемент (рис. 2.1) имеет три степени свободы в узле (два линейных перемещения и угол поворота сечения).

Для стержневых систем используются различные схемы дискретизации при статическом и динамическом способах нагружения. Требуемая точность по перемещениям при статическом расчете достига-

ется при ансамблировании системы стержнями, соизмеримыми (по длине) с конструкционными элементами. В то же время при динамическом расчете с целью учета предыстории движения стержни должны разбиваться на более короткие участки, т. е. дискретизацию осуществляем таким образом, чтобы размеры элемента обеспечивали однозначное соответствие между узловыми перемещениями и формой динамической деформации.

Матрица масс ансамбля конечных элементов формально определяется как сумма матриц масс отдельных элементов

$$[M] = \sum_{i=1}^{n_e} [m]_i,$$

где  $n_e$  – общее число конечных элементов;  $[m]_i$  – матрица масс  $i$ -го элемента. В зависимости от структуры различают согласованную, сосредоточенную и редуцированную матрицы масс конечного элемента.

Согласованная матрица масс стержневого элемента в локальных осях формируется с помощью балочных функций  $\{\Psi_c\}$  и  $\{\Psi_u\}$ , приведенных в разделе 2.1. Для вычисления коэффициентов согласованной матрицы масс используем выражение

$$[m] = \begin{bmatrix} [m_c] & 0 \\ 0 & [m_u] \end{bmatrix},$$

здесь  $[m_c]$ ,  $[m_u]$  – субматрицы, описывающие инерционные свойства элемента при продольной деформации и изгибе.

Блок  $[m_c]$  формируем по формуле

$$[m_c] = \rho F l \int_0^l \{\Psi_c\}^T \{\Psi_c\} d\xi = q_m l \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \\ 1 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix},$$

где  $F$  – площадь поперечного сечения стержня;  $q_m = \rho F$  – масса погонной длины элемента (кг/м);  $l$  – длина элемента;  $\{\Psi_c\}$  – вектор-столбец функций формы, аппроксимирующих осевые перемещения.

Блок  $[m_u]$  формируем по формуле

$$[m_{и}] = \frac{\rho F l^3}{2} \int_0^1 \{\Psi_{и}\}^T \{\Psi_{и}\} d\xi = \frac{q_m l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ & & 156 & -22l \\ \text{симметр.} & & & 4l^2 \end{bmatrix},$$

где  $\{\Psi_{и}\}$  – вектор-столбец функций формы, аппроксимирующих изгибные деформации.

Сосредоточенная матрица масс формируется путем приведения общей массы элемента к узловым точкам. В итоге для плоской задачи сосредоточенная матрица масс принимает диагональную структуру вида

$$[m] = \text{diag}[m_{11} \quad m_{22} \quad m_{33} \quad m_{44} \quad m_{55} \quad m_{66}].$$

Здесь сумма “узловых” масс в каждом направлении равна общей массе элемента.

В ряде случаев из матрицы масс исключаются элементы соответствующие вращательным степеням свободы. Такая матрица масс называется редуцированной.

### 3.9. Анализ частот и мод свободных колебаний стержневых конструкций

Одним из наиболее используемых в строительной механике расчетных методов является модальный анализ, суть которого сводится к исследованию частот и форм свободных колебаний конечно-элементной модели в заданном диапазоне. Наибольший интерес представляют значения первых (низших) частот свободных колебаний  $\omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \dots \leq \omega_n^2$ . В практике инженерных расчетов строительных сооружений ограничиваются числом  $n \leq 10$ . Соответствующие формы свободных колебаний дают представление о возможных способах деформирования конструкции. На этапе проектирования модальный анализ позволяет оценить эффективность несущего каркаса сооружения, уточнить принятые значения геометрических и физических констант, выполнить проверку на резонанс. Модальный анализ предшествует другим видам динамического анализа.

Определенное практическое значение частотный анализ имеет при конструировании граничных условий. Установлено, что каждая

дополнительная связь смещает основной тон и все обертоны конечно-элементной модели в сторону повышения частот, и наоборот освобождение от связей приводит к понижению собственных чисел (свободный объект в общем случае имеет шесть нулевых собственных значений). Отсюда актуальной является проблема собственных чисел для пространственных конструкций, собираемых в определенной последовательности из отдельных фрагментов (секций).

В большинстве практических задач влиянием демпфирования на частоты и формы собственных колебаний пренебрегают. Свободные колебания конечно-элементной модели описываются матричным уравнением

$$[M]\{W''\} + [K]\{W\} = 0. \quad (3.27)$$

Представим вектор-столбец узловых перемещений ансамбля элементов в виде

$$\{W\} = \{\bar{W}\} e^{i\omega t}, \quad e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t,$$

где  $i$  – мнимая единица.

Тогда уравнение (3.27) можно записать в форме так называемого “векового” уравнения

$$([K] - \omega^2 [M])\{\bar{W}\} = 0. \quad (3.28)$$

Зависимость (3.28) представляет обобщенную собственную проблему.

Система (3.28) имеет нетривиальное решение ( $\{\bar{W}\} \neq 0$ ) только тогда, когда определитель характеристического уравнения равен нулю

$$\left| [K] - \omega^2 [M] \right| = 0. \quad (3.29)$$

В развернутом виде выражение (3.29) представляет характеристический полином  $n$ -го порядка ( $n \times n$  – размерность матриц  $[K]$  и  $[M]$ ), имеющий  $n$  упорядоченных неотрицательных корней  $\omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \dots \leq \omega_n^2$ . Как отмечалось ранее в пп. 3.6.1, действительные величины  $\lambda_i = \omega_i^2$  называют собственными числами, а соответствующие векторы  $\{\bar{W}\}_i$  – собственными формами или модами свободных колебаний. Собственные числа и формы еще называют собственными парами.

Отметим, что частотный спектр ряда стержневых конструкций,

обладающих осевой симметрией геометрии, упругих свойств и граничных условий, может включать группы очень близких или одинаковых (кратных) собственных значений. Соответствующие собственные формы будут представлять собой свободные колебания в «противофазе».

На практике для вычисления низших частот и мод собственных колебаний используют методы Ланцоша и итераций векторных подпространств. Рассмотрим подробно алгоритм второго метода [5].

**Шаг 1.** Назначаем начальные векторы-столбцы  $\{u\}_1, \{u\}_2, \dots, \{u\}_q$ , где  $q = \min(2p, p+8)$  - число одновременно итерировуемых векторов;  $p$  - число искоемых первых собственных значений ( $q > p$ ). Начальные векторы должны включать те степени свободы, которые соответствуют наибольшим массам и наименьшим жесткостям. Поэтому  $\{u\}_1$  формируем из диагональных элементов матрицы  $[M]$ ; векторы  $\{u\}_l, l=2, 3, \dots, q$  делаем единичными. Каждому  $i$ -ому элементу  $\{u\}_l$ , соответствующему наименьшему отношению  $k_{ii}/m_{ii}$ , присваиваем значение единицы. В результате получим матрицу  $[u]_{(0)} = [\{u\}_1 \{u\}_2 \dots \{u\}_q]$ , где  $\bar{n}$  - порядок матриц  $[K]$  ( $\bar{n} \times q$ ) и  $[M]$  после исключения „лишних” строк и столбцов, соответствующих внешним связям.

**Шаг 2.** Начало итерационного цикла. Решаем систему уравнений типа

$$[K][\bar{u}]_{(k)} = [M][u]_{(k-1)},$$

где  $k$  - номер итерации (рекомендуемое максимальное количество  $k=15$ ). Отсюда получаем матрицу  $[\bar{u}]_{(k)}$ .

**Шаг 3.** Формируем „проекции” матриц  $[K]$  и  $[M]$  на подпространство. Для этого в каждом итерационном цикле вычисляем

$$[K]_{(k)} = [\bar{u}]_{(k)}^T [K][\bar{u}]_{(k)}, \quad [M]_{(k)} = [\bar{u}]_{(k)}^T [M][\bar{u}]_{(k)}.$$

**Шаг 4.** Решаем вспомогательную задачу на собственные значения обобщенным методом Якоби:

$$[K]_{(k)}[Q]_{(k)} = [M]_{(k)}[Q]_{(k)}[\Lambda]_{(k)}.$$

Здесь  $[\Lambda]_{(k)} = \text{diag}[\lambda_{11}^{(k)} \lambda_{22}^{(k)} \dots \lambda_{ii}^{(k)} \dots \lambda_{qq}^{(k)}]$  - диагональная матрица собственных значений, выстроенных в порядке возрастания;

$[Q]_{(k)}$  – матрица соответствующих собственных векторов.

**Шаг 5.** Определяем „улучшенные” приближения к искомым собственным векторам по формуле

$$[u]_{(k)} = [\bar{u}]_{(k)} [Q]_{(k)}.$$

Найденные собственные векторы удовлетворяют условиям обобщенной ортогональности, т. е.

$$[u]_{(k)}^T [K] [u]_{(k)} = [\Lambda]_{(k)}, \quad [u]_{(k)}^T [M] [u]_{(k)} = [I],$$

где  $[I]$  – единичная матрица порядка  $p$ .

**Шаг 6.** Проверяем сходимость итерационного процесса. В качестве критерия используем условие

$$\left| \frac{\lambda_{ii}^{(k)} - \lambda_{ii}^{(k-1)}}{\lambda_{ii}^{(k)}} \right| \leq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

где  $\varepsilon = 10^{-8}$ . Если это условие выполняется, итерационный процесс заканчиваем. В противном случае переходим к шагу 2.

**Шаг 7.** Проверяем по Штурму правильность определения требуемых собственных значений. Для этого вычисляем сдвиг  $\rho_S$  матрицы  $[K]$ , осуществляющий преобразование типа

$$[\bar{K}] = [K] - \rho_S [M].$$

Выполняем разложение преобразованной матрицы жесткости по формуле

$$[\bar{K}] = [L][D][L]^T,$$

где  $[L]$  – нижняя треугольная матрица;  $[D]$  – диагональная матрица. Вычисляем количество  $t$  отрицательных диагональных элементов матрицы  $[D]$ . Проверку считаем выполненной, если  $t = p$ .

В заключение вычисляем нормы ошибок:

$$\frac{\| [K] \{u\}_{(k)} - \lambda_{ii}^{(k)} [M] \{u\}_{(k)} \|}{\| [K] \{u\}_{(k)} \|}.$$

Вычислительное ядро разработанного программного комплекса реализовано на Фортране 90 с использованием двойной точности и процедур матричной алгебры математической библиотеки *IMSL*. Пре- и постпроцессорные модули разработаны на базе графических

функций системы Matlab. Ввод исходной информации о геометрии и топологии расчетной модели осуществляется фрагментарно (по конгломератам КЭ) с использованием процедур приращений и сшивки. Граничные условия вводятся по геометрическому принципу путем последовательной обработки поверхностей, на которые наложены связи. Конечно-элементную модель, номера узлов и элементов для любой расчетной схемы можно проконтролировать с помощью специальной препроцессорной программы. Хранение матриц  $[K]$  и  $[M]$  ансамбля элементов организовано в виде динамических массивов в разреженном строчном формате. Для решения результирующей системы уравнений (шаг 2) предусмотрено использование методов Холецкого ( $LDL^T$ -факторизации) и сопряженных градиентов. Последний метод эффективен для задач большой размерности (более 5000 неизвестных), т. к. не требует упорядочивания портрета глобальной матрицы жесткости. При использовании метода сопряженных градиентов проверка по Штурму (шаг 7) не выполняется.

### 3.10. Примеры расчета частот и форм свободных колебаний

С целью апробации разработанной программы модального анализа решены следующие числовые примеры.

*Пример 1.* Требуется выполнить анализ свободных колебаний в плоскости наибольшей жесткости двухшарнирной балки двутаврового (№ 30) поперечного сечения длиной  $l=6$  м. Масса погонной длины балки  $q_m=36,5$  кг/м. Расчет выполняем для трех вариантов равномерной разбивки балки на 6, 12 и 24 конечных элемента.

Точные значения частот свободных колебаний балки определяются по формуле [8]:

$$\omega_k = \frac{\pi^2 k^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{q_m}}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Результаты вычислений первых четырех частот сведены в табл. 3.1. Значения частот, найденные на сетке 12 КЭ с использованием комплекса ANSYS10, составляют:  $170,9 \text{ с}^{-1}$ ;  $679,6 \text{ с}^{-1}$ ;  $1327 \text{ с}^{-1}$ ;  $1514 \text{ с}^{-1}$ .



На рис. 3.47 последовательно показаны первые четыре формы свободных колебаний, полученные на сетке из 24 элементов с помощью разработанной программы.

Из полученных данных следует, что аналитическое решение не позволяет определить собственную частоту продольных колебаний балки (третий тон). Как видно из табл. 3.1, двукратное сгущение сетки весьма неравномерно повышает точность вычислений собственных частот. При этом численные значения  $\omega_4$  оказываются больше аналитического решения  $\omega_3$ .

Таблица 3.1

| № Тона | $\omega_{МКЭ}, c^{-1}$ |       |       | Аналитическое решение, $c^{-1}$ |
|--------|------------------------|-------|-------|---------------------------------|
|        | 6 КЭ                   | 12 КЭ | 24 КЭ |                                 |
| 1      | 173,6                  | 171,5 | 170,9 | 170,8                           |
| 2      | 725,4                  | 694,4 | 685,9 | 683,0                           |
| 3      | 1325                   | 1322  | 1322  | 1537                            |
| 4      | 1719                   | 1593  | 1551  | 2732                            |

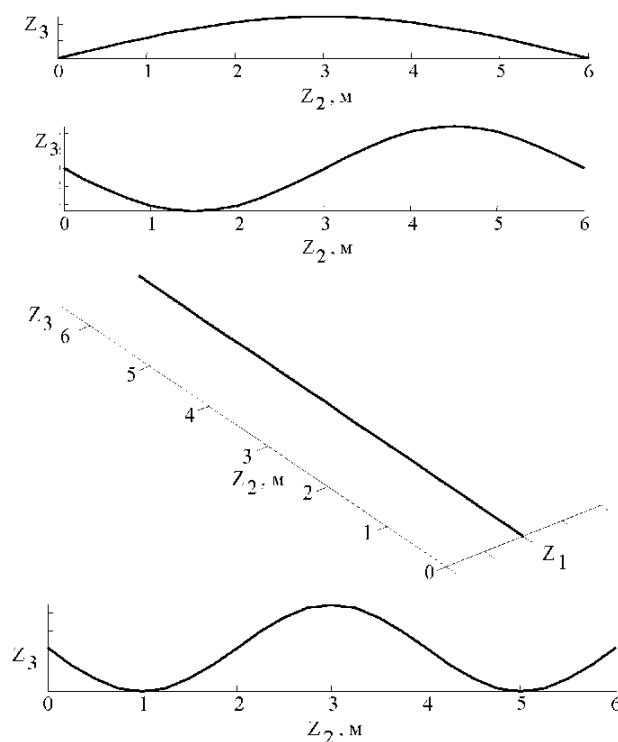


Рис. 3.47

Следует отметить, что при модальном анализе, базирующемся на методе итераций векторных подпространств, необходимо внимательно подходить к назначению способа решения системы алгебраических уравнений. Так, в рассматриваемом примере при использовании метода сопряженных градиентов на сетке, образованной из 24 элементов, итерационный процесс расходится, а применение прямого метода Холецкого на этой же сетке обеспечивает сходимость.

**Пример 2.** Требуется выполнить модальный анализ рамы с равномерно распределенными массами (рис. 3.48) в дву- и трехмерной постановках. Жесткости стоек и ригеля рамы полагаем постоянными. В качестве материала принимаем стальной двутавр № 24. Наибольшая жесткость рамы совпадает с плоскостью  $Z_2, 0, Z_3$ .

Результаты двумерного анализа для первых четырех собственных пар представлены на рис. 3.49. Полученные формы свободных колебаний в дву- и трехмерной постановках совпадают с результатами конечно-элементного анализа, представленными в [6].

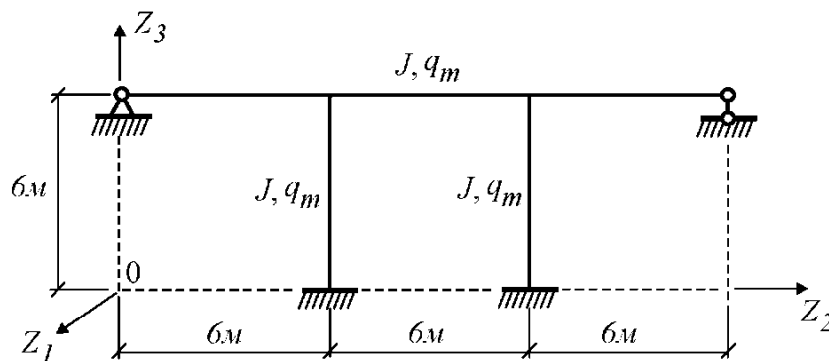


Рис. 3.48

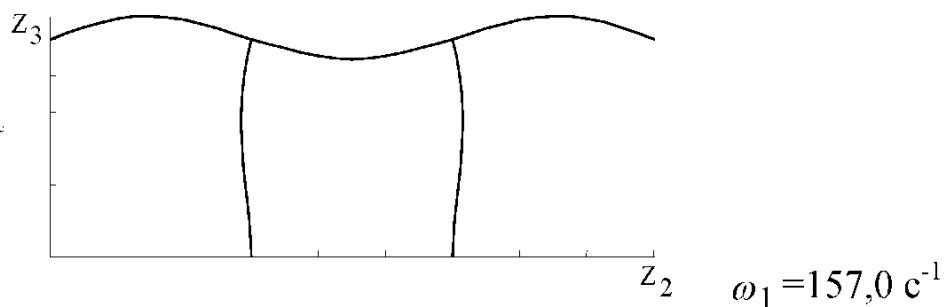


Рис. 3.49 (см. также с. 144)

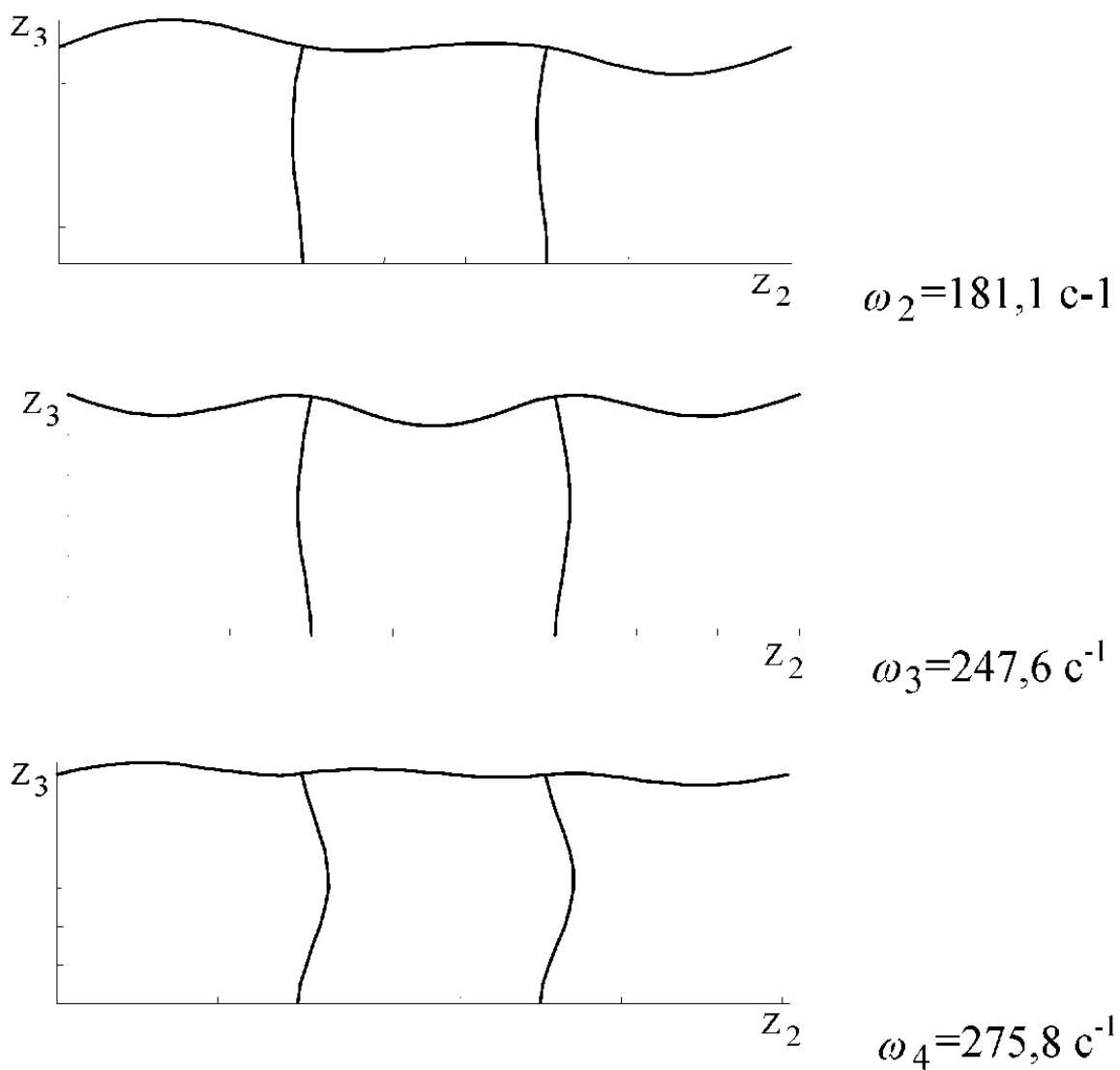


Рис. 3.49. Продолжение

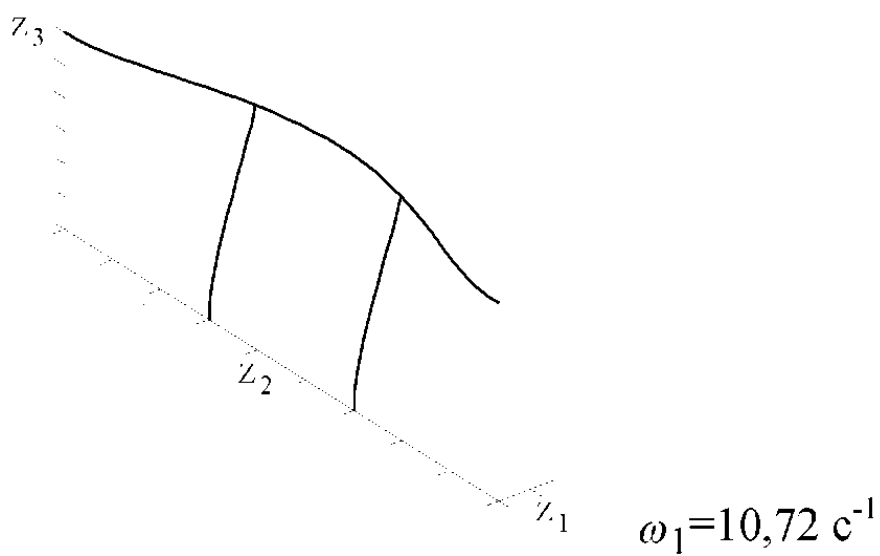


Рис. 3.50 (см. также с. 145)

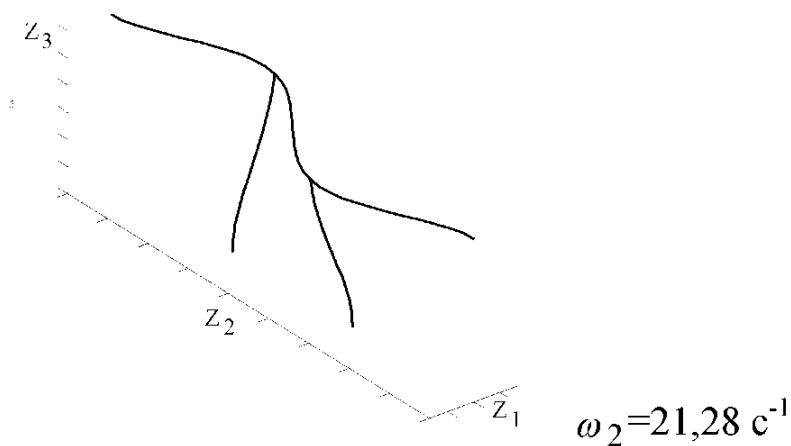


Рис. 3.50. Продолжение

Данные трехмерного модального анализа для двух первых собственных пар приведены на рис. 3.50. Для конечно-элементного моделирования пространственных свободных колебаний в неопорных узлах рамы удалялись ранее введенные связи в направлении глобальной оси  $Z_1$ .

Вполне очевидно, что более реалистичными являются пространственные формы свободных колебаний (рис. 3.50).

**Пример 3.** Требуется вычислить первые три собственные пары для плоской рамы с шарниром (рис. 3.51). Принимаем, что элементы рамы выполнены из двутавра № 14. Стенка двутавра совпадает с плоскостью рамы таким образом, чтобы стойки и ригель имели наибольшую конструкционную жесткость.

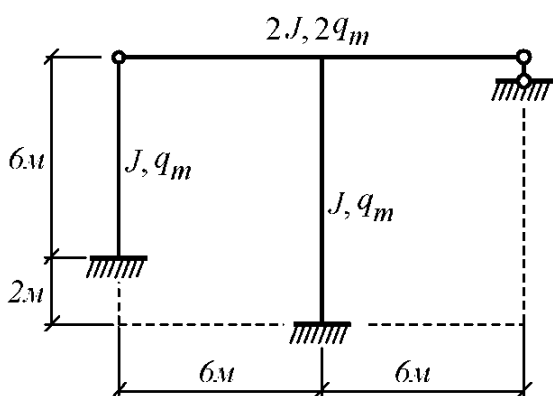


Рис. 3.51

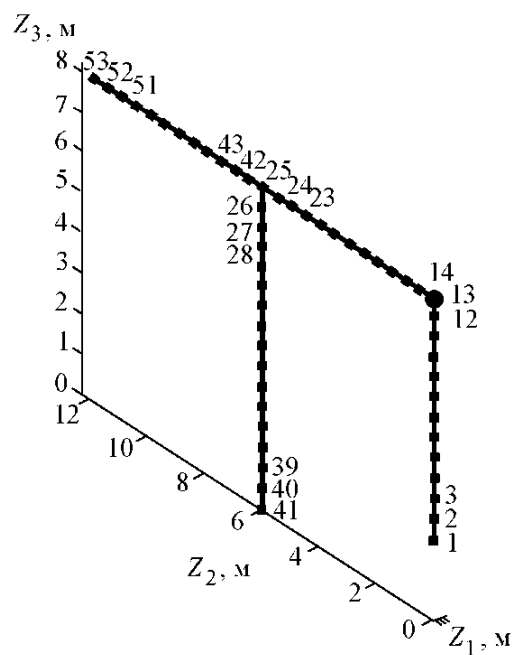


Рис. 3.52

Конечно-элементная модель рамы с шагом разбивки 0,5 м показана на рис. 3.52 (значки ■ соответствуют узлам модели). Жирной точкой указано место расположения шарнира, обеспечивающего свободный поворот относительно оси  $Z_1$  (направлена на наблюдателя).

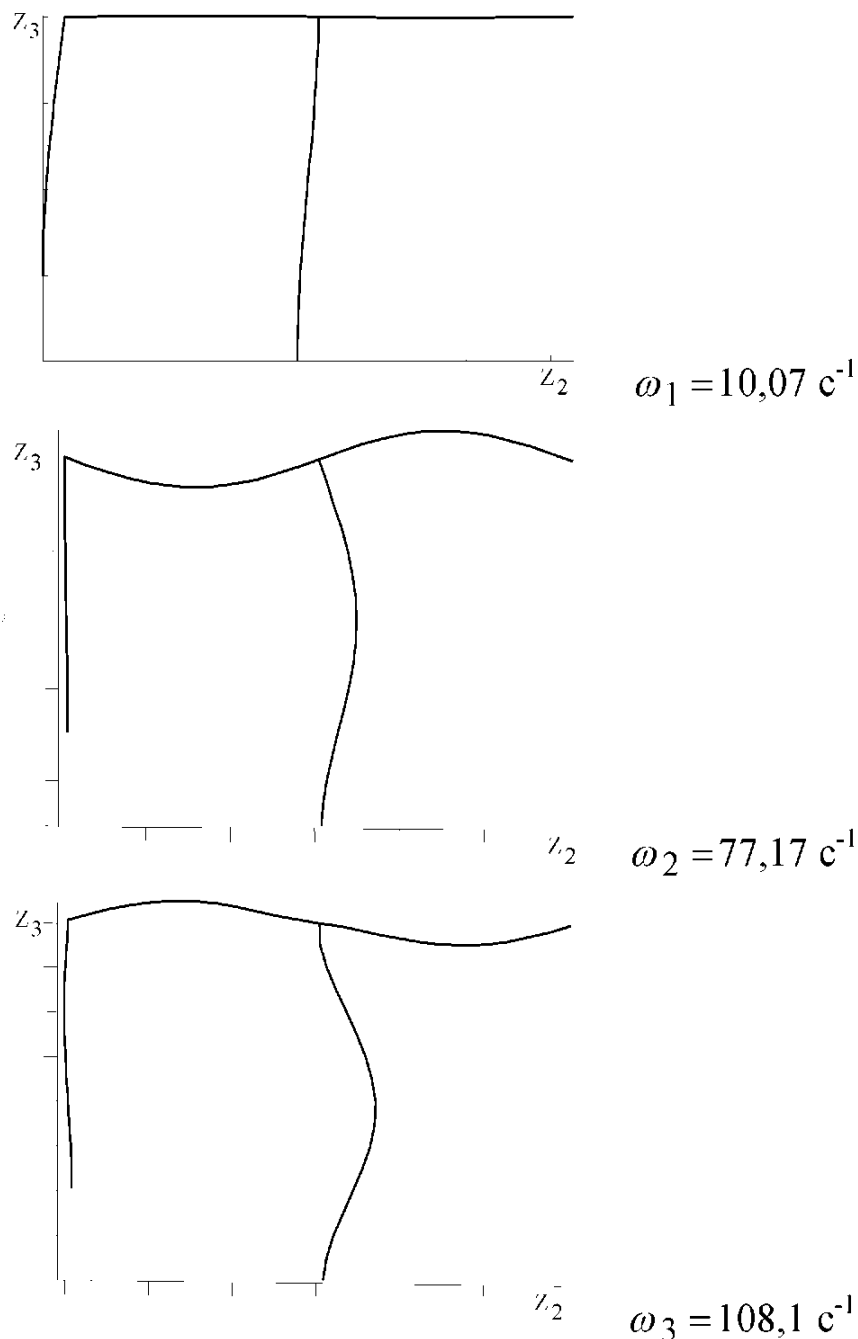


Рис. 3.53

Данные численных расчетов приведены на рис. 3.53. Представленные результаты модального анализа показывают, что в шарнирном соединении левой стойки с ригелем возникает дополнительная

угловая степень свободы. Как видно первоначально прямой угол в данном соединении изменяется. Для сравнения угол между правой стойкой, жестко соединенной с ригелем, для всех форм свободных колебаний остается прямым.

**Пример 4.** Требуется определить две первые собственные пары для плоской статически определимой рамы с сосредоточенной массой  $m = 1,019 \cdot 10^3$  кг (рис. 3.54). Массу стоек и ригеля в расчете не учитываем, также пренебрегаем моментом инерции массы  $m$ . Стойки, ригель и консоль рамы имеют квадратное поперечное сечение с соответствующими размерами ребер: 9,306 см; 13,16 см; 18,6 см. Модуль упругости материала  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>. Конечно-элементная схема рамы показана на рис. 3.55 (значки ■ соответствуют узлам модели). Ранее в разделе 3.6.5 эта задача была решена методами перемещений и сил.

Сравнивая результаты конечно-элементного решения (рис. 3.56) с данными, полученными разделе 3.6.5 ( $\omega_1 = 13,55$  с<sup>-1</sup>;  $\omega_2 = 118,6$  с<sup>-1</sup>), приходим к выводу, что значения соответствующих частот свободных колебаний рамы хорошо согласуются.

Выполнив модальный анализ для рассматриваемой рамы с помощью комплекса ANSYS10, на сетке с шагом 0,5 м получим следующие значения частот:  $\omega_1 = 13,52$  с<sup>-1</sup>;  $\omega_2 = 114,6$  с<sup>-1</sup>. Эти данные согласуются с решением, представленным на рис. 3.56.

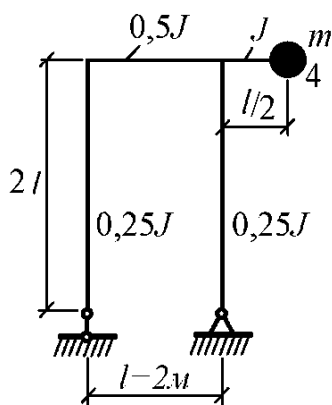


Рис. 3.54

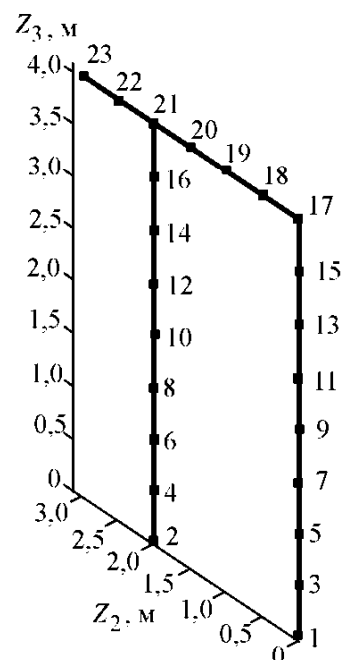


Рис. 3.55

Следует отметить, что в рассматриваемом примере итерацион-

ный алгоритм позволяет вычислить только первые две собственные пары. Это объясняется структурой матрицы масс, состоящей из двух ненулевых диагональных элементов.

Кроме этого выполнить модальный анализ для рассматриваемого примера удастся только при использовании прямого метода решения системы линейных алгебраических уравнений. Метод сопряженных градиентов в данном случае дает расходящееся решение.

**Пример 5.** Требуется определить первые четыре собственные пары для плоской рамы с распределенной  $q_m$  и сосредоточенной  $m$  массами (рис. 3.57). Материал рамы стальной двутавр № 14 (ригели двойной профиль). Длина пролета равна высоте рамы и составляет  $l=6$  м. Конечно-элементную разбивку выполняем с шагом 0,5 м.

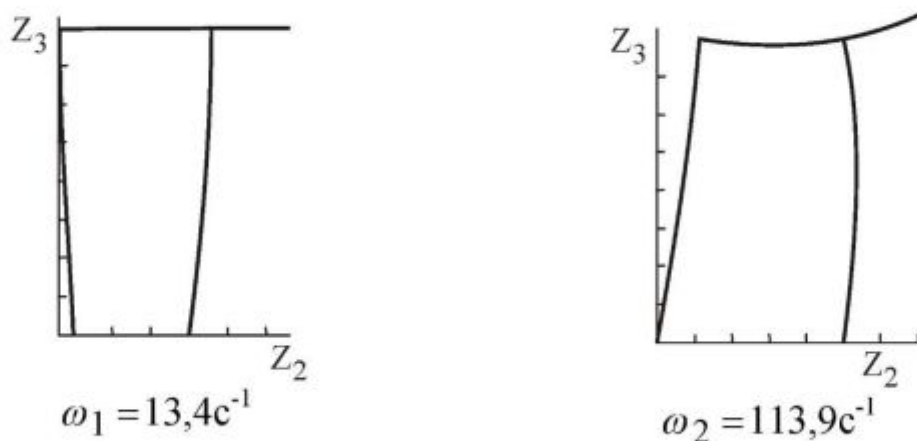


Рис. 3.56

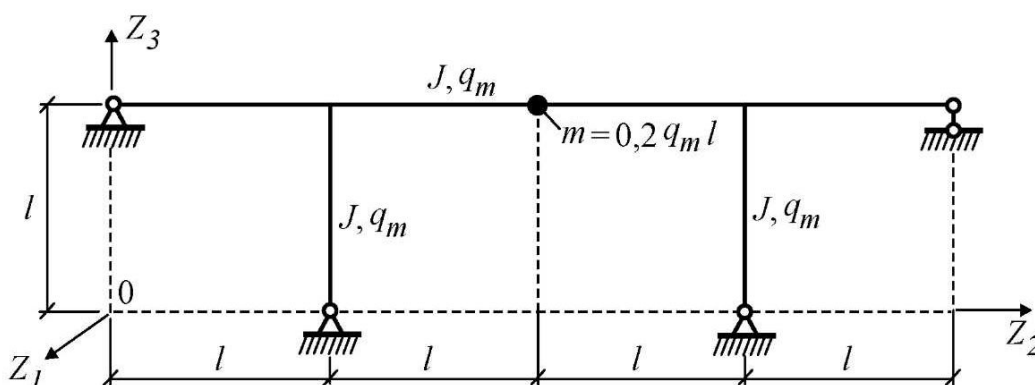


Рис. 3.57

Результаты конечно-элементного расчета показаны на рис. 3.58.

Для сравнения приведем первые две частоты, полученные в работе [1] методом перемещений:

$$\omega_1 = \frac{4}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{q_m}} = 32,1 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_2 = \frac{11,5}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{q_m}} = 92,3 \text{ с}^{-1}.$$

Данные значения хорошо согласуются с первой и третьей частотами, вычисленными численно с помощью МКЭ.

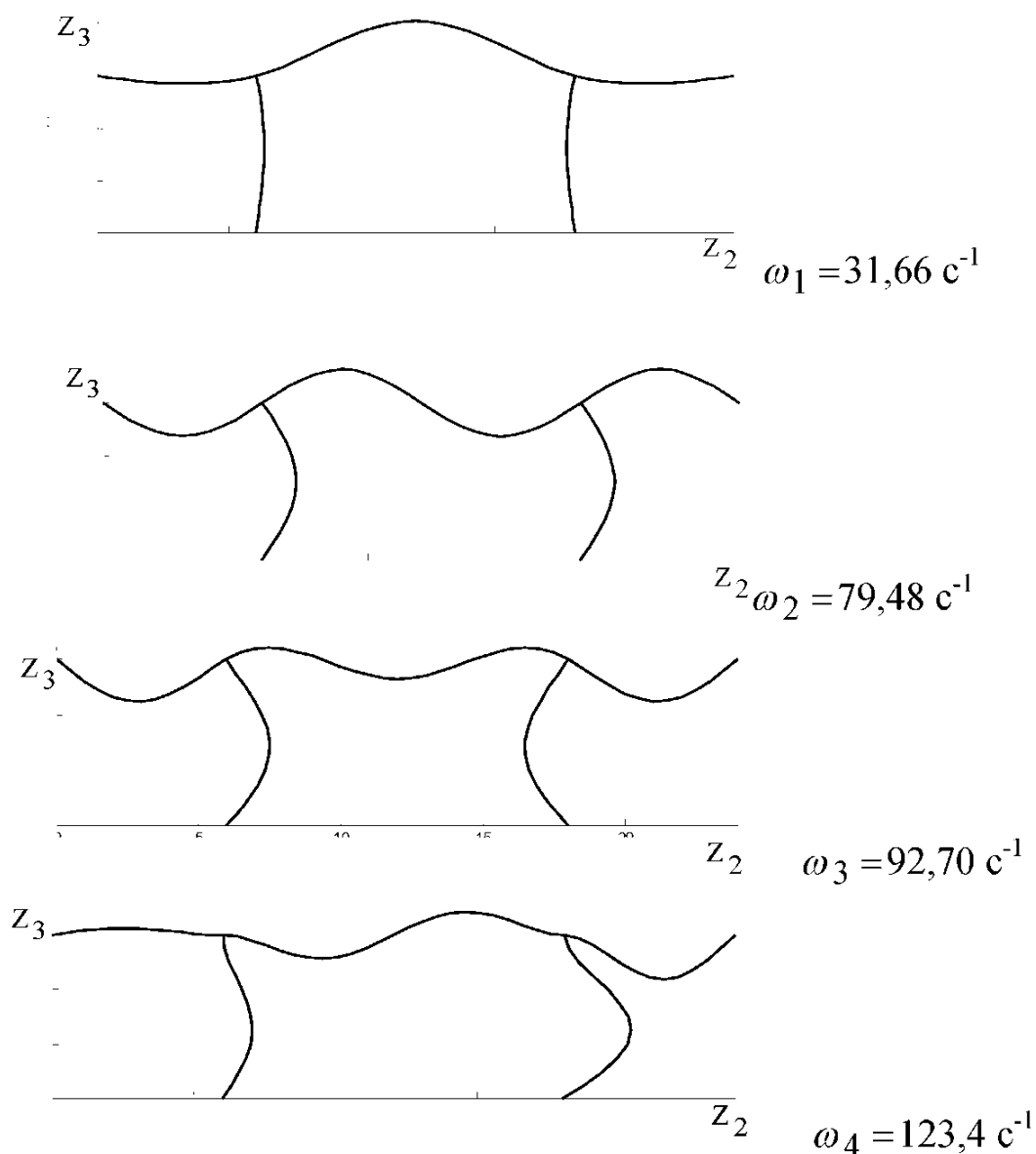


Рис. 3.58

Отметим, что в работе [1] исследовались только симметричные колебания. Конечно-элементное решение, учитывающее и кососимметричные колебания, дает более полный спектр частот, в котором



первая и третья формы соответствуют симметричным колебаниям.

### 3.11. Конечно-элементный анализ вынужденных колебаний

Запишем систему дифференциальных уравнений, описывающих вынужденные колебания конструкции, в матричной форме с начальными условиями

$$[M]\{W''\} + [C]\{W'\} + [K]\{W\} = \{P(t)\}, \quad (3.30)$$

$$\{W(0)\} = \{W\}_0, \{W'(0)\} = \{W'\}_0. \quad (3.31)$$

Здесь обозначено:  $[M], [C], [K]$  – соответственно матрицы масс, демпфирования и жесткости ансамбля КЭ;  $\{W\}, \{W'\}, \{W''\}$  – векторы-столбцы узловых перемещений, скоростей и ускорений;  $\{P(t)\}$  – вектор-столбец узловых сил;  $\{W\}_0, \{W'\}_0$  – заданные векторы-столбцы узловых перемещений и скоростей, характеризующие начальное состояние конструкции в момент времени  $t=0$ .

В случае установки демпфера (гасителя колебаний) уравнение (3.30) можно представить в виде

$$[M]\{W''\} + [C]\{W'\} + ([K] + [D])\{W\} = \{P(t)\},$$

где  $[D] = \text{diag}[d_{11} d_{22} \dots d_{kk} \dots d_{nn}]$  – диагональная матрица внешнего демпфирования, суть которого состоит в исключении эффекта суперпозиции волн упругих колебаний в заданных узлах конечно-элементной сетки. Элементы матрицы  $[D]$  вычисляем по формуле

$$d_{kk} = \chi \rho c^2 l, \quad (3.32)$$

где  $k$  – номер степени свободы, соответствующей перемещению  $j$ -го узла, соединенного с демпфером, в направлении глобальной оси  $Z_i$   $k = 3j + i - 1$ ;  $\chi$  – коэффициент внешнего демпфирования ( $\chi \leq 1$ );  $c$  – скорость распространения поперечной волны в материале конструкции;  $l$  – конструктивная длина стержня, соединенного с демпфером. Произведение  $\rho c^2$ , входящее в выражение (3.32), имеет размерность такую же, как модуль упругости материала.

Система (3.30), (3.31) может быть решена с помощью специально разработанных для МКЭ процедур прямого интегрирования по временной координате, например методами [5]: центральных разно-

стей; Хаболта; Вилсона; Ньюмарка и другими. Все эти методы основаны на разбиении временного интервала, в течение которого рассматривается движение, на  $n$  равных отрезков (шагов)  $\Delta t$ . Величина шага  $\Delta t$  назначается так, чтобы с достаточной точностью учитывались вклады только низших собственных частот, которые играют наиболее существенную роль в динамическом поведении конструкции. Как будет показано ниже, выбор значения  $\Delta t$  зависит от закона изменения внешнего воздействия  $\{P(t)\}$ .

Рассмотрим алгоритм метода Ньюмарка, который используется в большинстве современных вычислительных комплексов. Метод основан на предположении о линейном законе изменения ускорения  $w''(t)$  на интервале  $[t_i, t_i + \Delta t]$  (рис. 3.59). Функции перемещения  $w(t)$  и скорости  $w'(t)$  произвольной узловой точки, совершающей колебания, представляются в виде отрезков степенных рядов

$$w(t_i + \Delta t) = w_i + \Delta t w'_i + \frac{\Delta t^2}{2} w''_i + a_1 \Delta t^3 w'''_i, \quad (3.33)$$

$$w'(t_i + \Delta t) = w'_i + \Delta t w''_i + a_2 \Delta t^2 w'''_i,$$

где  $a_1, a_2$  – числовые параметры, определяющие остаточные члены степенных разложений функций  $w(t)$  и  $w'(t)$  на интервале  $[t_i, t_i + \Delta t]$ .

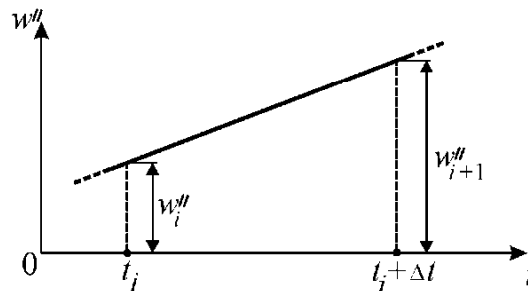


Рис. 3.59

Заменяя  $w'''$  приближенным разностным отношением  $(w''_{i+1} - w''_i) / \Delta t$ , преобразуем выражения (3.33) к виду

$$w_{i+1} = w_i + \Delta t w'_i + \frac{\Delta t^2}{2} w''_i + a_1 \Delta t^2 (w''_{i+1} - w''_i), \quad (3.34)$$

$$w'_{i+1} = w'_i + \Delta t w''_i + a_2 \Delta t (w''_{i+1} - w''_i).$$

Найдем из первого равенства (3.33) величину  $w''_{i+1}$ :

$$w''_{i+1} = \frac{1}{a_1 \Delta t^2} (w_{i+1} - w_i) - \frac{1}{a_1 \Delta t} w'_i + \left(1 - \frac{1}{2a_1}\right) w''_i. \quad (3.35)$$

После подстановки (3.35) во второе равенство (3.34), получим

$$w'_{i+1} = \frac{a_2}{a_1 \Delta t} (w_{i+1} - w_i) + \left(1 - \frac{a_2}{a_1}\right) w'_i + \frac{\Delta t}{2} \left(2 - \frac{a_2}{a_1}\right) w''_i. \quad (3.36)$$

Выражения (3.35) и (3.36) являются рекуррентными соотношениями метода Ньюмарка. Для вычисления векторов-столбцов перемещений  $\{W\}_{i+1}$ , скоростей  $\{W'\}_{i+1}$  и ускорений  $\{W''\}_{i+1}$  в момент  $t_i + \Delta t = t_{i+1}$  (см. рис. 3.35) уравнение движения записываем в виде

$$[M]\{W''\}_{i+1} + [C]\{W'\}_{i+1} + [K]\{W\}_{i+1} = \{P(t)\}_{i+1}.$$

После подстановки в него выражений (3.35) и (3.36) и преобразования к компактной форме, получим матричное уравнение вида

$$[A]\{W\}_{i+1} = \{F\}_{i+1}, \quad (3.37)$$

где  $[A] = [K] + \frac{a_2}{a_1 \Delta t} [C] + \frac{1}{a_1 \Delta t^2} [M]$ ;

$$\begin{aligned} \{F\}_{i+1} = & \{P(t)\}_{i+1} + [M] \left[ \frac{1}{a_1 \Delta t^2} \{W\}_i + \frac{1}{a_1 \Delta t} \{W'\}_i + \right. \\ & + \left. \left( \frac{1}{2a_1} - 1 \right) \{W''\}_i \right] + [C] \left[ \frac{a_2}{a_1 \Delta t} \{W\}_i + \left( \frac{a_2}{a_1} - 1 \right) \{W'\}_i + \right. \\ & \left. + \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{a_2}{a_1} - 2 \right) \{W''\}_i \right]. \end{aligned}$$

В начале алгоритма Ньюмарка, исходя из заданного шага интегрирования  $\Delta t$ , формируется матрица  $[A]$ , после чего она приводится к треугольному виду и до завершения вычислительного процесса не изменяется. Правая часть уравнения (3.37) пересчитывается на каждом шаге интегрирования.

Векторы-столбцы узловых ускорений и скоростей вычисляем по формулам:

$$\{W''\}_{i+1} = \frac{1}{a_1 \Delta t^2} (\{W\}_{i+1} - \{W\}_i) - \frac{1}{a \Delta t} \{W'\}_i - \left( \frac{1}{2a_1} - 1 \right) \{W''\}_i;$$

$$\{W'\}_{i+1} = \{W'\}_i + [(1 - a_2) \{W''\}_i + a_2 \{W''\}_{i+1}] \Delta t.$$

Для обеспечения устойчивости алгоритма прямого интегрирования параметры  $a_1$  и  $a_2$  должны удовлетворять следующим условиям:  $a_2 \geq 0,5$  и  $a_1 \geq 0,25(a_2 + 0,5)2$ . В работе [5] приведены рекомендации по назначению величин  $a_1$  и  $a_2$ . Так, если требуется приближенно учесть внутреннее демпфирование, то следует принять  $a_1 = 0,28$  и  $a_2 = 0,55$ . Без учета искусственного рассеивания энергии максимальная точность метода Ньюмарка достигается при  $a_1 = 0,25$  и  $a_2 = 0,5$ .

Шаг интегрирования  $\Delta t$  вычисляем по формуле

$$\Delta t = 2\pi / k \omega_1,$$

где  $k$  – целое положительное число ( $k = 10, 20, 30, \dots$ );  $\omega_p$  – угловая частота  $p$ -го тона колебаний. Учитывая, что наибольший практический интерес представляют первые (низшие) моды, обычно ограничиваются  $p \leq 3$ . Точность численной процедуры прямого интегрирования обеспечивается соответствующим назначением величины шага  $\Delta t$ . При уменьшении шага интегрирования точность повышается, однако увеличивается время, затрачиваемое на вычисления. В качестве критерия сходимости обычно принимается стабилизация получаемых максимальных значений амплитуд в исследуемых точках модели при двукратном уменьшении шага интегрирования.

Заметим, что для запуска алгоритма метода Ньюмарка требуется задать в момент времени  $t=0$  векторы-столбцы  $\{W\}_0$ ,  $\{W'\}_0$ ,  $\{W''\}_0$  (начальные условия). Для упрощения в расчетах принимают:

$$\{W\}_0 = 0; \quad \{W'\}_0 = 0; \quad \{W''\}_0 = 0.$$

Схема прямого интегрирования, основанная на методе Ньюмарка, является “безусловно устойчивой” и “неявной”. Термин “безусловно устойчивая” схема означает, что независимо от величины шага  $\Delta t$  метод Ньюмарка сходится. Термин “неявная” схема указывает на то, что компоненты вектора-столбца перемещений являются функциями предыдущих (известных) и текущих (неизвестных) векторов

перемещений, скоростей и ускорений.

### 3.12. Примеры расчетов на вынужденные колебания

**Пример 1.** Требуется определить амплитудные значения прогиба  $w$  в центре двухшарнирной балки (рис. 3.60) при различных законах изменения внешнего динамического воздействия  $P(t)$  (рис. 3.61). Считаем, что балка выполнена из стального прокатного двутавра № 30. Общую массу балки приводим к центру пролета.

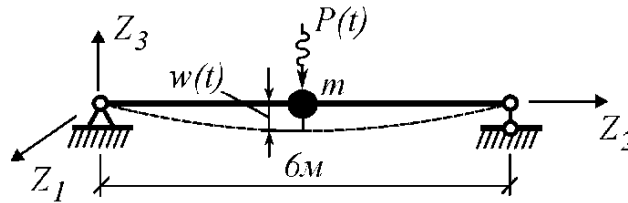


Рис. 3.60

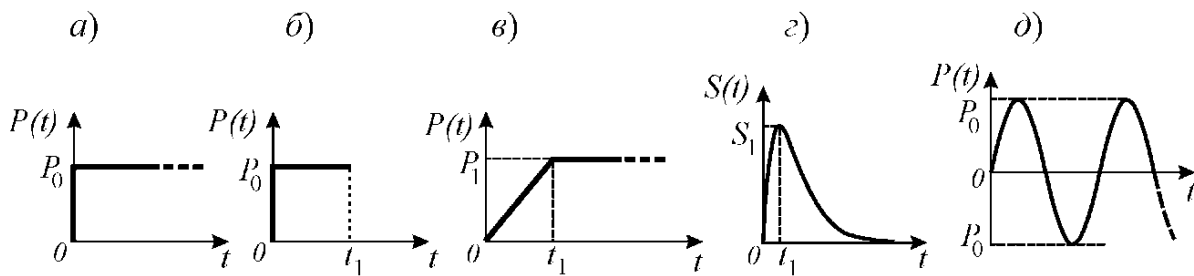


Рис. 3.61

Балку разбиваем с равномерным шагом на 24 элемента. Предварительно выполнив модальный анализ, устанавливаем, что угловая частота первого тона составляет  $\omega_1 = 116,2 \text{ с}^{-1}$ .

На рис. 3.62 приведены графики  $w(t)$ , полученные для варианта внезапного приложения нагрузки  $P_0 = 10 \text{ кН}$  (рис. 3.61, а) при значениях шага  $\Delta t$ , равных  $T/10$  (рис. 3.62, а) и  $T/20$  (рис. 3.62, б). Значение периода первого тона численно равно  $T = 2\pi / \omega_1 = 0,05407 \text{ с}$ . Установлено, что с двукратным уменьшением величины  $\Delta t$  значение максимального прогиба не изменяется. При этом улучшается только вид графика на пиках. Для данного вида нагружения коэффициент динамичности принимает значение  $\mu = 2$ .

а)

б)

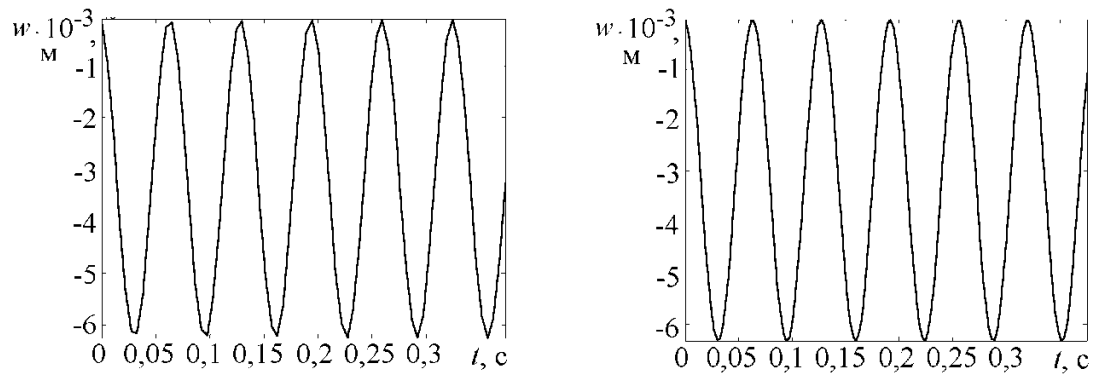


Рис. 3.62

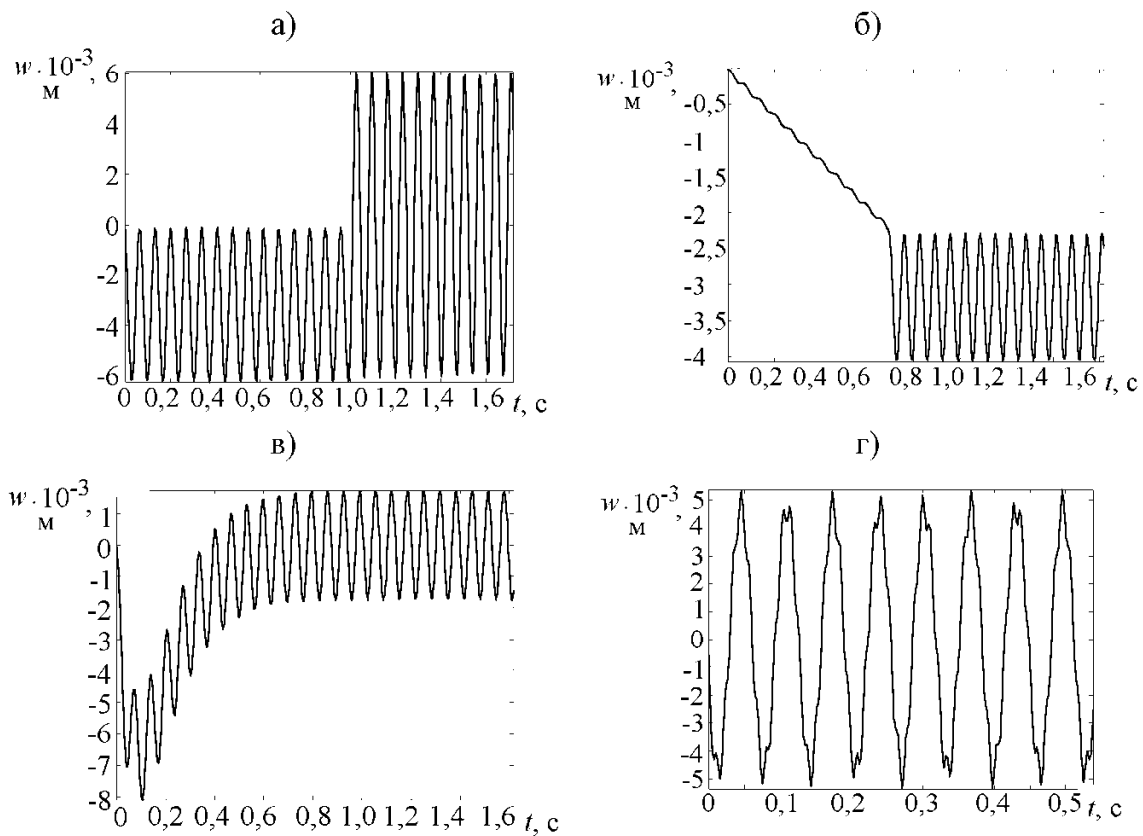


Рис. 3.63

На рис. 3.63, а представлен график  $w(t)$  для варианта нагружения балки, внезапно приложенной нагрузкой  $P_0 = 10 \text{ кН}$ , действующей в течение времени  $t_1 = 1 \text{ с}$  (рис. 3.61, б).

На рис. 3.63, б показано, как меняется прогиб балки  $w(t)$  при линейном нарастании нагрузки от 0 при  $t = 0$  до  $P_1 = 10 \text{ кН}$  при

$t = t_1 = 0,7$  с (рис. 3.61, в).

Практическое значение имеет импульсный закон нагружения (рис. 3.61, з), описываемый выражением вида

$$P(t) = P_0 S(t),$$

где функция формы импульса  $S(t) = Ate^{-Bt}$ ,  $B = \frac{1}{t_1}$ ,  $A = \frac{S_1 e}{t_1}$ . Параметры импульса:  $t_1 = 0,1$ ;  $S_1 = 2,0$ . График  $w(t)$ , полученный при импульсном воздействии на балку, показан на рис. 3.63, в.

Решение задачи при гармоническом возбуждении колебаний по закону (рис. 3.61, д) имеет вид

$$P(t) = P_0 \sin \Theta t,$$

где  $\Theta$  – угловая частота внешнего воздействия, представлено на рис. 3.63, г. Вычисления выполнялись при  $\Theta = 546$  с<sup>-1</sup>. Шаг интегрирования  $\Delta t$  принимался равным  $T/20$ . В данном случае на пиках графика прослеживается эффект биения, обусловленный наложением свободных и вынужденных колебаний.

Выполним анализ вынужденных колебаний для двухшарнирной балки с распределенной массой  $q_m$  (рис. 3.64) при гармоническом возбуждении колебаний ( $P_0 = 10$  кН,  $\Theta = 546$  с<sup>-1</sup>). Значение  $\Delta t$  принимаем равным  $T/20$ . Частота первого тона свободных колебаний  $\omega_1 = 170,9$  с<sup>-1</sup> (табл. 3.1).

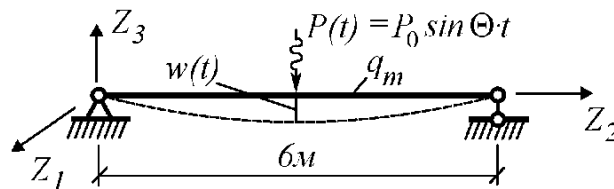


Рис. 3.64

На рис. 3.65, а и 3.65, б приведены графики  $w(t)$ , полученные по стандартной схеме Ньюмарка ( $a_1 = 0,25$  и  $a_2 = 0,5$ ) и с учетом искусственного демпфирования ( $a_1 = 0,28$  и  $a_2 = 0,55$ ).

Как видно из рис. 3.65, б, время переходного процесса составляет около 1,5 с. При этом следует отметить, что значения прогибов на этапе  $t < 1,5$  с почти в три раза превышают прогибы установившихся (стационарных) колебаний. Безусловно, это существенное обстоя-

тельство необходимо учитывать в практических расчетах.

В приложении 9 приведена программа на языке APDL для расчета вынужденных колебаний рассматриваемой балки с использованием комплекса ANSYS10.

На рис. 3.65, в и 3.65, г приведены графики резонансных ( $\Theta = \omega_1$ ) колебаний балки  $w(t)$ , полученные соответственно без учета и с учетом демпфирования. В первом случае амплитудное значение перемещения в центре балки при  $t=2,8$  с достигает 0,4 м. Для сравнения при  $\Theta = 546 \text{ с}^{-1}$  амплитуда перемещения в центре балки составляет  $2,9 \cdot 10^3$  м.

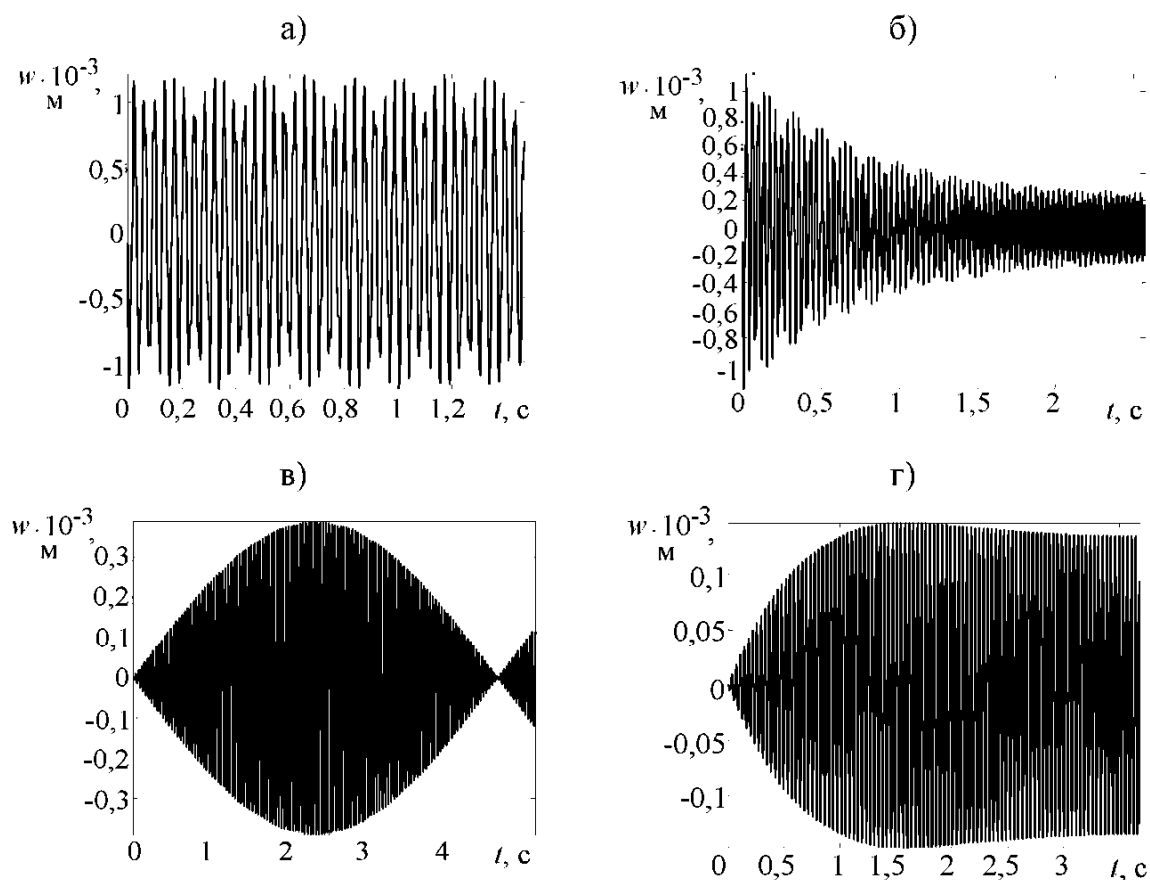


Рис. 3.65.

Введение искусственного демпфирования позволяет получить физически правдоподобную картину резонансных колебаний, характеризующую начальным ростом перемещений до некоторой величины и последующей стабилизацией процесса.

**Пример 2.** Для плоской рамы (рис. 3.66) требуется построить



графики колебаний вдоль осей  $Z_2$  и  $Z_3$  в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , приняв  $\Theta = 0,8\omega_1$ ,  $P_0 = 4$  кН,  $q_0 = 2$  кН/м. Рама выполнена из двутавра № 14 (ригель двойной профиль). Стенка двутавра на стойках и ригеле ориентирована таким образом, чтобы жесткость конструкции в плоскости  $Z_2, Z_3$  была максимальной.

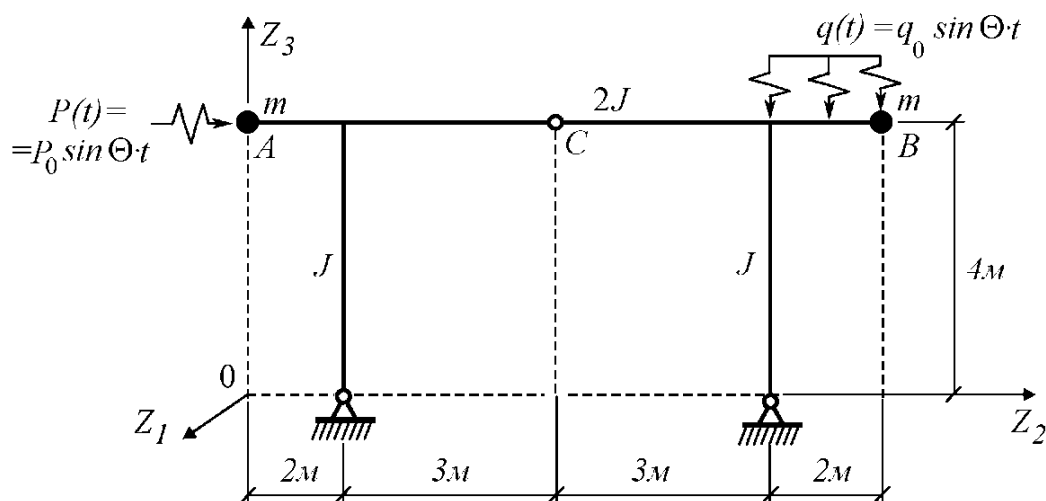


Рис. 3.66

Таблица 3.3

| № тона $i$ | Значение угловой частоты $\omega_i$ , $\text{с}^{-1}$ |               |
|------------|---|---------------|
|            | МКЭ   | Метод сил [7] |
| 1          | 11,0  | 11,29         |
| 2          | 20,17   | 23,92         |

Раму считаем невесомой. Значения сосредоточенных в точках  $A$  и  $B$  масс равны  $m = 300$  кг. Рама разбивалась на 36 конечных элементов с равномерным шагом 0,5 м.

Результаты модального анализа для первого и второго тонов приведены в табл. 3.3 и на рис. 3.67. Собственные частоты, полученные с помощью МКЭ, сравнивались с данными работы [7]. Приведенная на рис. 3.67 форма колебаний второго тона в шарнире имеет излом, что отличает ее от собственной формы, априори принятой в работе [7] в виде лекальной кривой.

На основании частоты первого тона назначаем шаг интегрирования  $\Delta t = T/20$ , где соответствующий период свободных колебаний  $T = 2\pi/\omega_1$ . Затухание свободных колебаний не учитываем.

Графики колебаний в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$  в направлении осей  $Z_2$  и  $Z_3$  представлены соответственно на рис. 3.68,  $a$ ,  $b$ ,  $в$ .

Сравнивая кривые горизонтальных динамических перемещений  $w_{Z_2}(t)$  в исследуемых точках, устанавливаем, что они полностью совпадают.

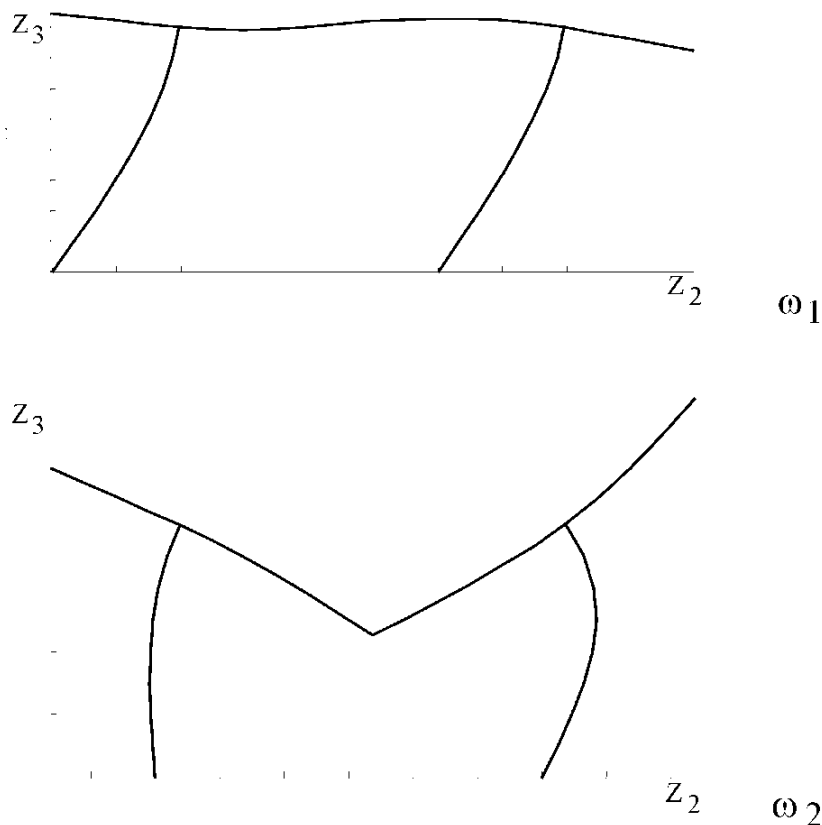


Рис. 3.67

Максимальная амплитуда колебаний в вертикальном направлении  $w_{Z_3}(t)$  имеет место в точке  $B$  (рис. 3.68,  $b$ ). В шарнире  $C$  динамические перемещения  $w_{Z_3}(t)$  минимальны (рис. 3.68,  $в$ ).

Картины статических перемещений  $w_{Z_2}$  и  $w_{Z_3}$  для рассматриваемой рамы представлены соответственно на рис. 3.69,  $a$  и 3.69,  $b$ .

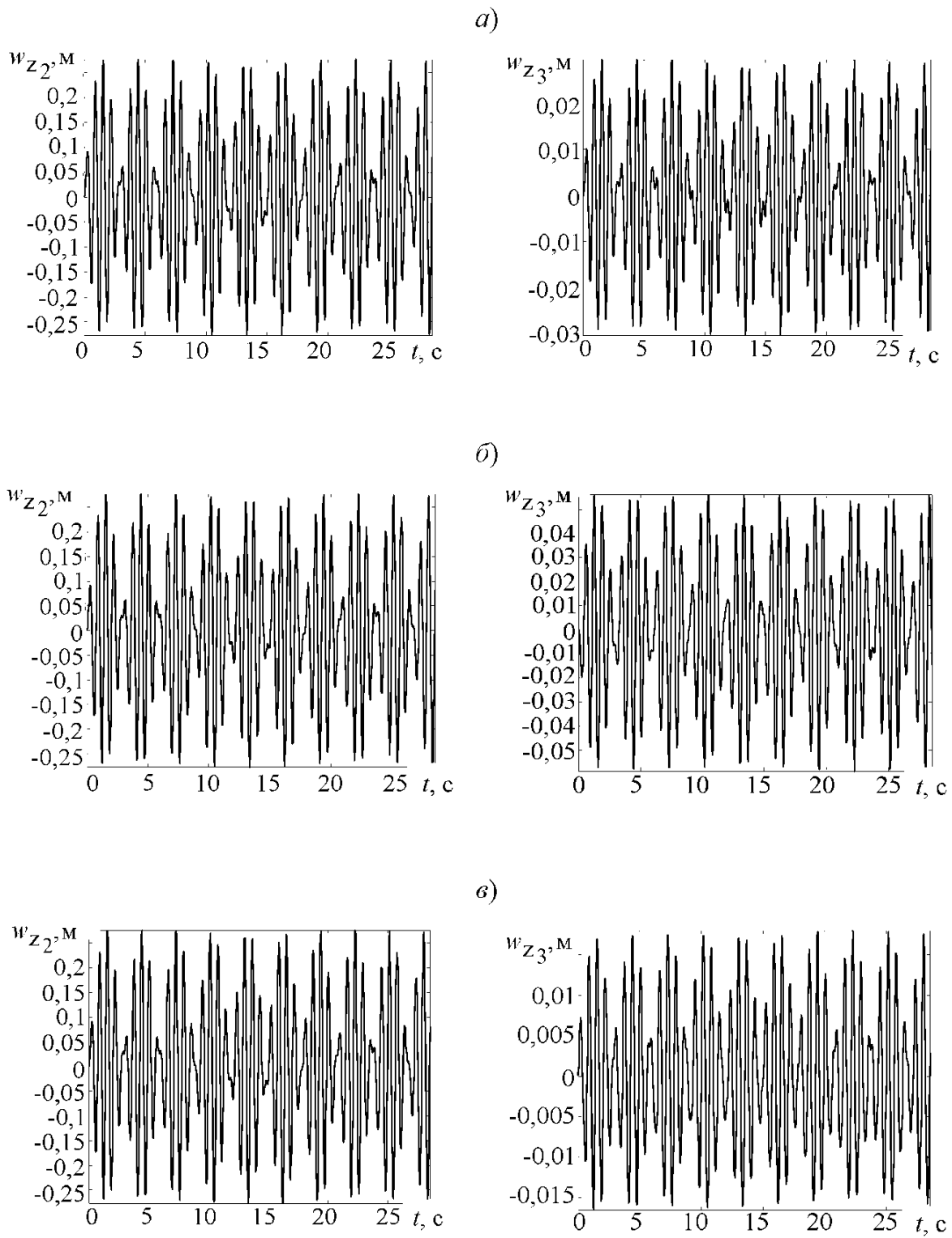


Рис. 3.68

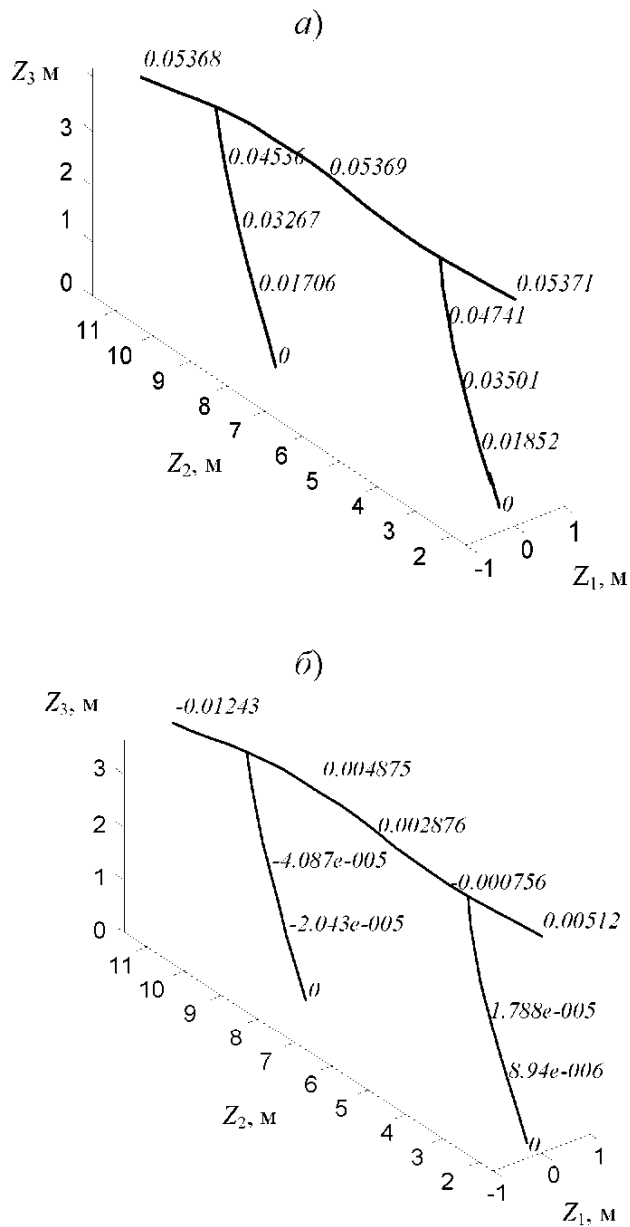


Рис. 3.69

Коэффициент динамичности  $\mu$  определим как отношение доминирующего горизонтального динамического перемещения ( $w_{Z_2 \text{ дин}} = 0,25$  м) к соответствующему горизонтальному статическому перемещению ( $w_{Z_2 \text{ ст}} = 0,054$  м):  $\mu = 0,25/0,054 = 4,6$ .

### 3.13. Численное моделирование сейсмического возбуждения колебаний

При кинематическом возбуждении колебаний уравнение движения для ансамбля конечных элементов с распределенными и сосредоточенными массами представим в виде

$$[M]\{W''\} + [C]\{W'\} + [K]\{W\} = -diag[\bar{M}]\{\bar{W}''\}.$$

Здесь обозначено:  $\{\bar{W}''\}$  – вектор-столбец ускорений, заданных в опорных узлах модели;  $diag[\bar{M}]$  – диагональная матрица сосредоточенных в основании конструкции масс, эквивалентных общей массе конструкции. Зависимость  $W'' \sim t$ , описывающую закон кинематического возбуждения колебаний, называют акселерограммой. В качестве модельной (синтезированной) акселерограммы примем циклическую гармоническую функцию с переменным периодом вида [1]:

$$\bar{W}''(t) = Ate^{-Bt} \sin \Theta t, \quad (3.38)$$

где  $A$ ,  $B$  – константы, вычисляемые в зависимости от параметров импульса:  $B = 1/t_1$ ,  $A = (S_1 e)/t_1$ ;  $\Theta$  – угловая частота кинематического возмущения. На рис. 3.70 приведен график модельной акселерограммы для параметров:  $t_1 = 0,1$  с;  $S_1 = 4$  м/с<sup>2</sup>;  $\Theta = 60$  с<sup>-1</sup>. Величина  $S_1$  определяет максимальное значение ускорения. Следует учитывать, что в отличие от вибрационного возмущения колебаний время воздействия сейсмической нагрузки на сооружение не продолжительно (от 2 до 5 с).

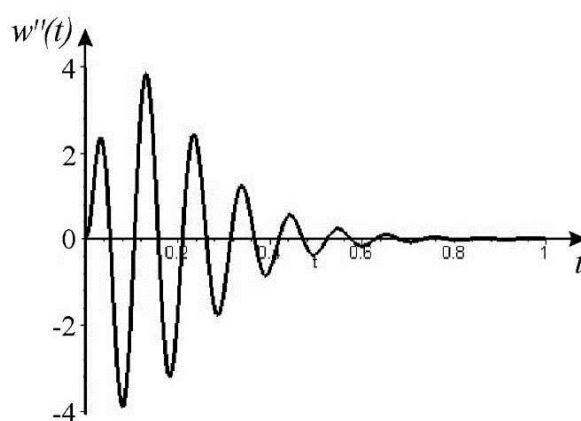


Рис. 3.70

Рассмотрим основные физико-механические особенности сейс-

мического воздействия. На практике мощность землетрясения оценивается по количеству выделившейся энергии, измеряемой в магнитудах по 12 бальной шкале Рихтера. Оценку несущей способности сооружения выполняют на основании экспериментальных геофизических данных об ускорениях на поверхности грунта (акселерограмм).

С математической точки зрения каждая акселерограмма является реализацией случайного процесса. Поэтому в строгой постановке расчет на сейсмическое воздействие должен выполняться с использованием стохастической (вероятностной), а не детерминированной механико-математической модели. Однако такой подход в виду его сложности не получил широкого распространения. Существенно уточнить динамический расчет позволяет использование пространственно-временной схемы дискретизации исследуемого объекта и численного решения уравнения движения. При этом считают, что каркасы зданий и сооружений высотой до 25 м испытывают только горизонтальную сейсмическую нагрузку. Для объектов высотой свыше 25 м учитывается также вертикальная составляющая сейсмической волны. Причем сейсмическое воздействие может иметь произвольное направление по отношению к расположению здания. В этой связи расчетчику необходимо оценить наиболее опасные сценарии поведения проектируемого сооружения при виртуальном землетрясении.

В отечественной практике проектирования учитывают только землетрясения интенсивностью 7, 8 и 9 баллов, что примерно соответствует амплитудам ускорений 1, 2 и 4 м/с<sup>2</sup>. При этом считается, что капитальное строительство в зонах с возможным землетрясением в 9 баллов не допустимо.

Важной характеристикой, позволяющей оценить влияние сейсмического воздействия на сооружение, является величина смещения грунта  $u_0$ . В качестве расчетной зависимости, устанавливающей связь между величиной  $u_0$  и интенсивностью землетрясения  $I$ , можно использовать эмпирическое выражение вида

$$u_0 = 10^{-4,6+0,78I},$$

где величины  $u_0$  и  $I$  измеряются соответственно в миллиметрах и

баллах. На рис. 3.71 приведен график  $u_0 \sim I$  для Ставропольского края, где возможно землетрясение в 7 баллов.

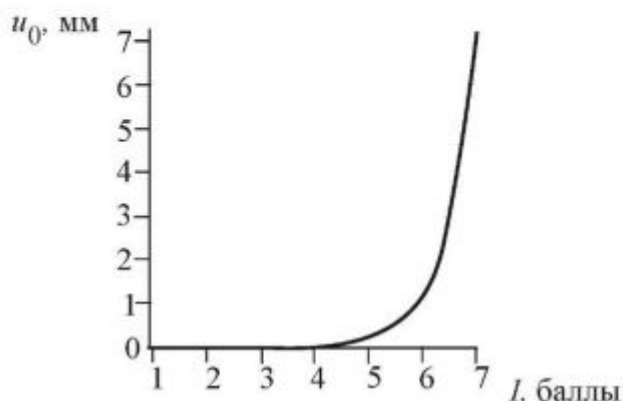


Рис. 3.71

Бальность района строительства устанавливается на основании карт общего сейсмического районирования территории Российской Федерации, утвержденных Российской академией наук [9]. Параллельно Госстроем России введен список конкретных населенных пунктов с указанием вероятности на их территории землетрясений повышенной бальности.

Рассмотрим особенности конечно-элементного моделирования поведения пространственной стержневой системы при кинематическом способе возбуждения колебаний на конкретном числовом примере.

**Пример.** Требуется исследовать поведение пятиэтажной пространственной рамы при кинематическом возбуждении колебаний, имитирующих землетрясение в 9 баллов. Расчетная схема рамы приведена на рис. 3.72. Полагаем, что все опорные точки рамы движутся синхронно по одинаковому закону. Стержни рамы сечением  $0,4 \times 0,4$  м, выполнены из монолитного железобетона ( $E = 29 \cdot 10^3$  МПа,  $q_m = 384$  кг/м). Конечно-элементную сборку рассматриваемой схемы осуществляем по фрагментарному способу. Для этого раму предварительно представим в виде конгломерата, состоящего из 25 фрагментов  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{25}$  (рис. 3.73).

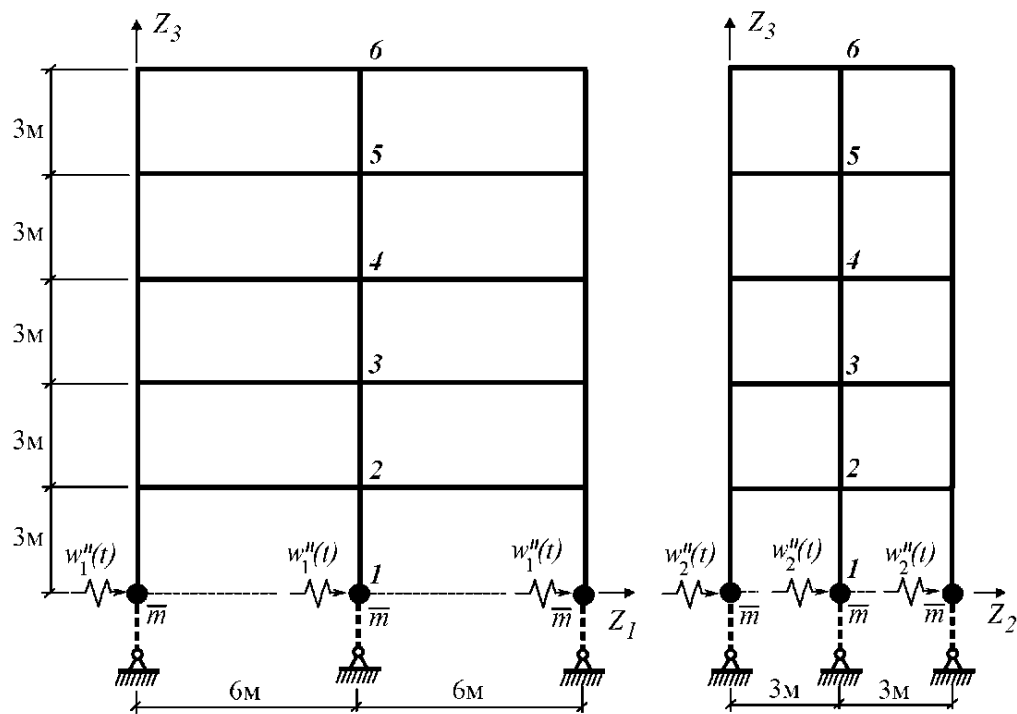


Рис. 3.72

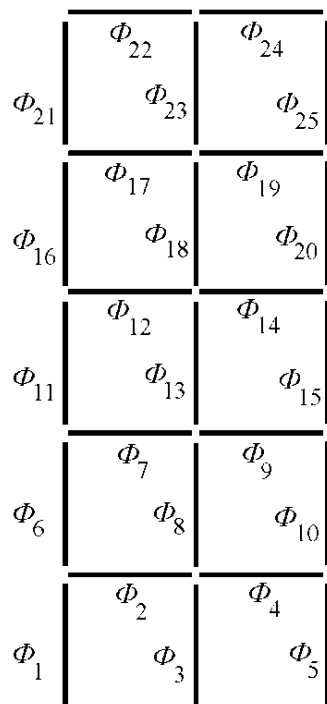


Рис. 3.73

Используем два типа повторяющихся фрагментов (рис. 3.74), из



которых в определенной последовательности собирается рама. Целесообразность данной процедуры объясняется удобством представления первичной топологической информации для фрагментов, имеющих независимую нумерацию узлов и локальную систему координат.

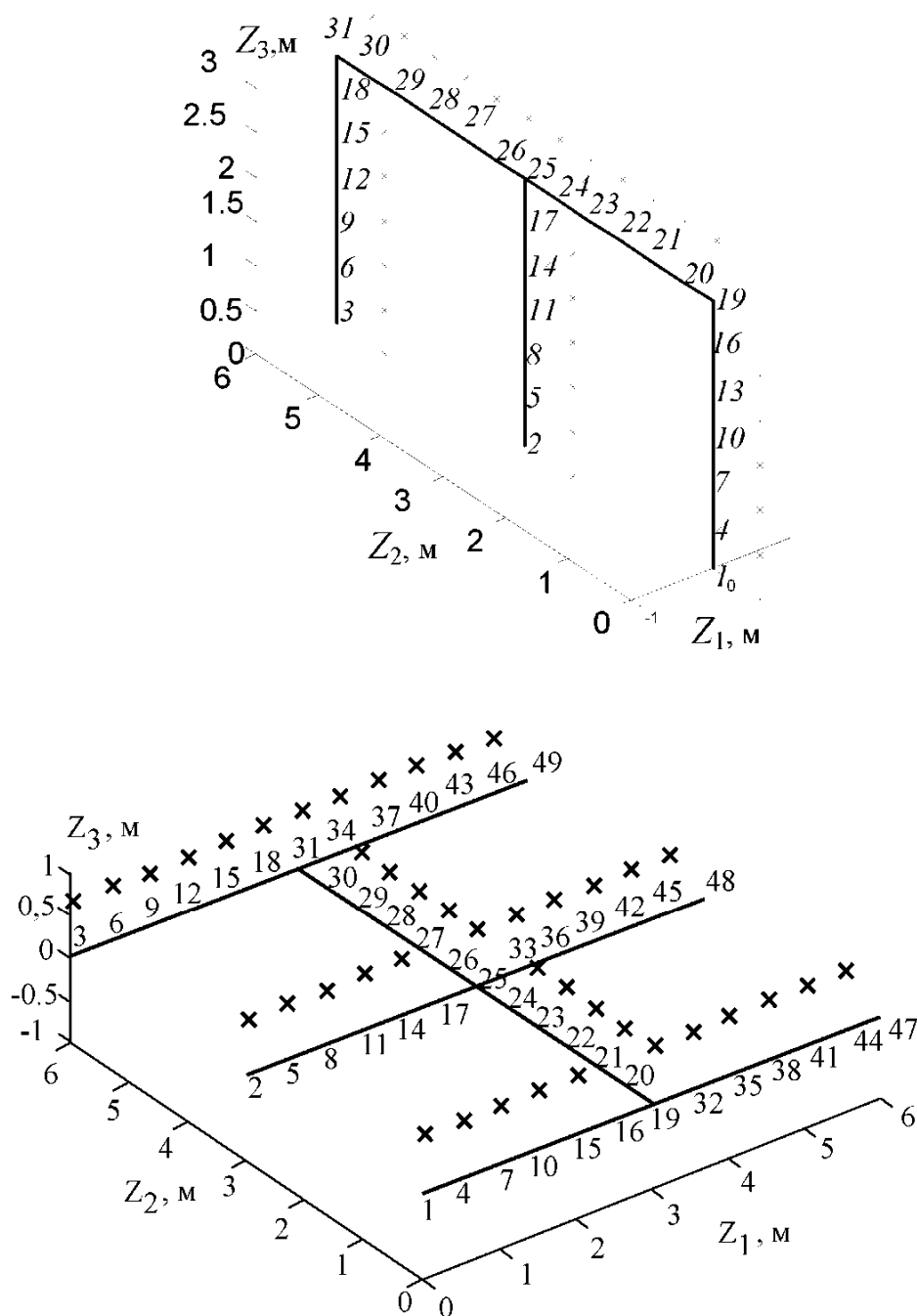


Рис. 3.74

Сшивку фрагментов выполняем в следующей последо-

вательности: 1 – 2; 2 – 3; 2 – 4; 4 – 5; 1 – 6; 6 – 7; 2 – 8; 7 – 8; 7 – 9; 4 – 10; 9 – 10; 6 – 11; 11 – 12; 12 – 13; 7 – 13; 12 – 14; 9 – 15; 14 – 15; 11 – 16; 16 – 17; 17 – 18; 12 – 18; 17 – 9; 14 – 20; 19 – 20; 16 – 21; 21 – 22; 22 – 23; 17 – 23; 22 – 24; 19 – 25; 24 – 25. Здесь цифры соответствуют номерам фрагментов. В итоге общее число стыков фрагментов составило 32. В процессе сшивки фрагментов по точкам с одинаковыми координатами формируется глобальная нумерация узлов модели.

Каркасная модель пятиэтажной рамы, полученная в результате фрагментарной сборки, приведена на рис. 3.75.

На первом этапе выполним модальный анализ для рамы, нижние стойки которой имеют жесткие связи с основанием. Расчет выполняем для 12 собственных пар. Выборочные результаты модального анализа представлены на рис. 3.76. Видно, что два первых тона очень похожи и обуславливают колебания рамы в плоскости наименьшей жесткости параллельной координатной плоскости  $Z_1 O Z_3$ . Далее наблюдаются крутильные (моды три и шесть), вертикальные (моды девять и десять) и комбинированные (мода двенадцать) формы колебаний рамы.

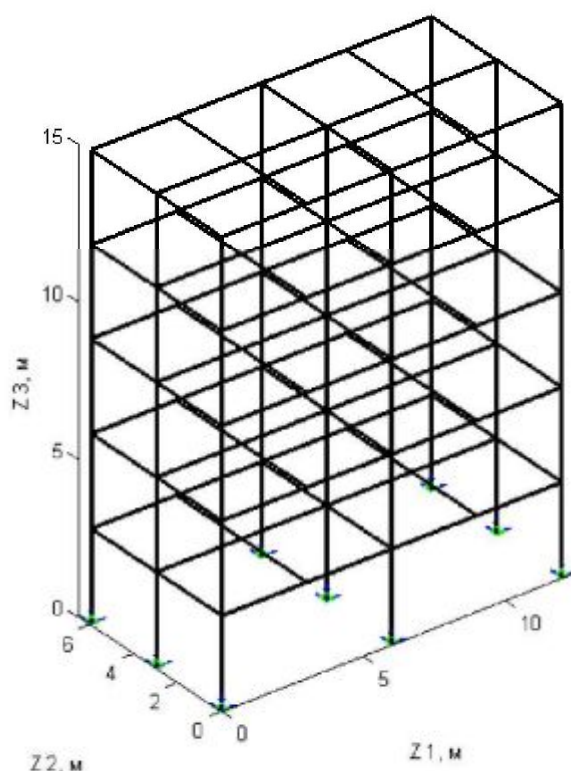
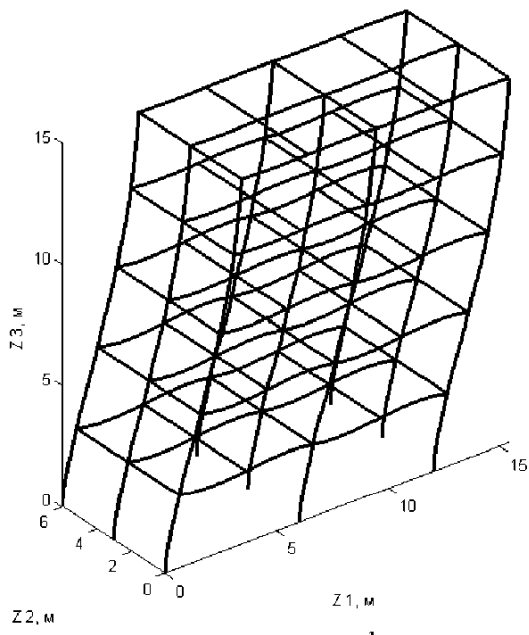
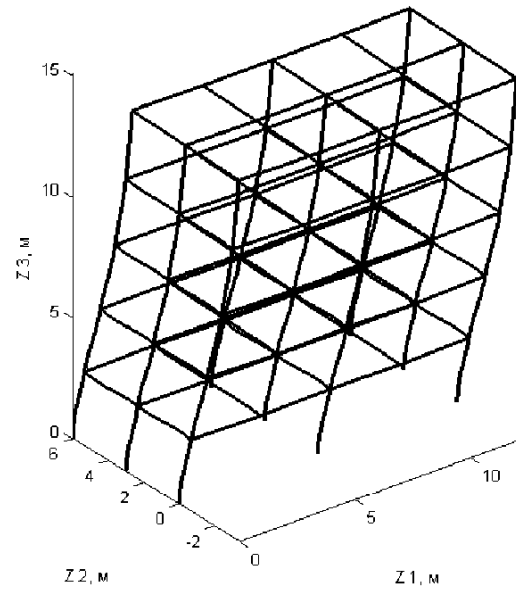


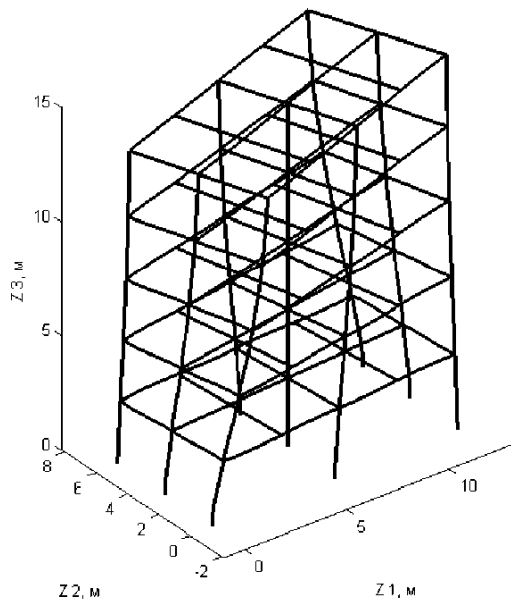
Рис. 3.75



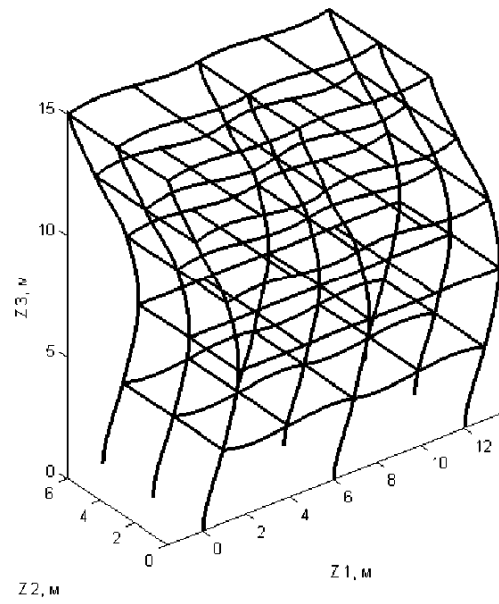
$$\omega_1 = 13,44 \text{ c}^{-1}$$



$$\omega_2 = 16,23 \text{ c}^{-1}$$

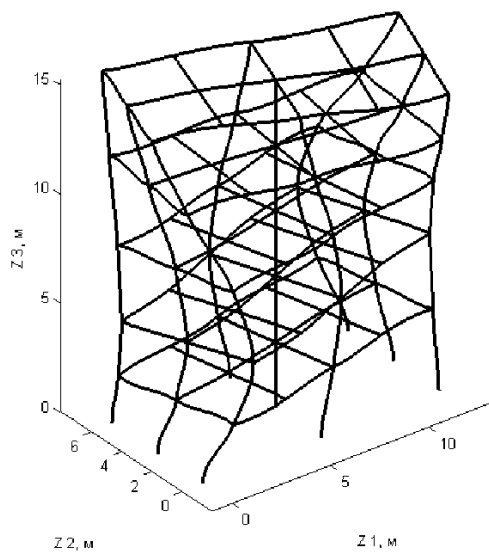


$$\omega_3 = 19,18 \text{ c}^{-1}$$

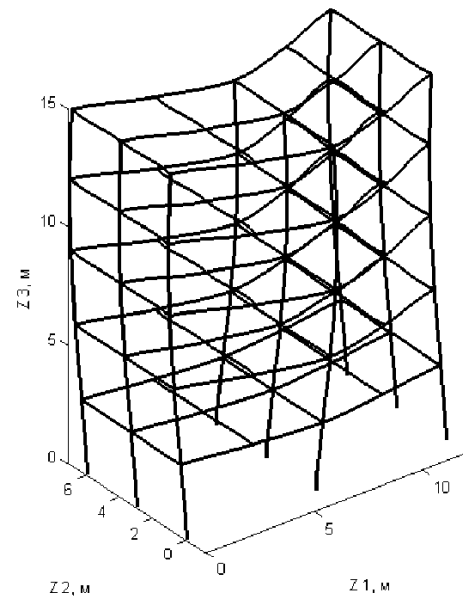


$$\omega_4 = 43,09 \text{ c}^{-1}$$

Рис. 3.76 (см. также с. 169)

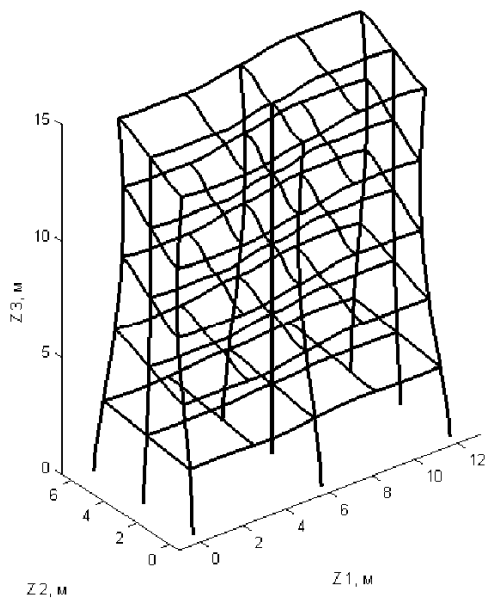


$$\omega_6 = 58,73 \text{ c}^{-1}$$

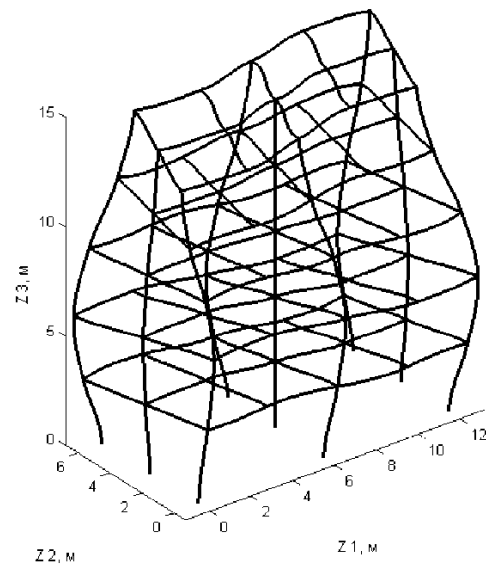


$$\omega_9 = 92,03 \text{ c}^{-1}$$

Рис. 3.76 (см. также с. 169)



$$\omega_{10} = 93,27 \text{ c}^{-1}$$



$$\omega_{12} = 105,2 \text{ c}^{-1}$$

Рис. 3.76. Продолжение

На втором этапе исследуем динамический отклик рассматриваемой пространственной стержневой системы на кинематическое

возмущение, моделируемое функцией (3.38) с параметрами:  $t_1=0,1$  с;  $S_1=4$  м/с<sup>2</sup>;  $\Theta=60$  с<sup>-1</sup>. Для учета особенности приложения динамической нагрузки расчетную схему рамы скорректируем следующим образом. В нижней части рамы вводим невесомые фиктивные стержни длиной 0,5 м с уменьшенным на порядок модулем упругости. Эти стержни, показанные штриховыми линиями, связываем с неподвижным основанием шарнирными связями (см. рис. 3.71). Таким образом, стержневая система фиксируется от смещений как жесткое целое. В точках фактического опирания рамы на основание ( $Z_3=0$ ) располагаем сосредоточенные массы  $\bar{m}=124\cdot 10^3$  кг, в сумме равные массе всей конструкции ( $9\times \bar{m}=1116\cdot 10^3$  кг). Динамическую нагрузку прикладываем, задавая ускорения сосредоточенных масс  $\bar{m}$  сначала в положительном направлении оси  $Z_1 - w_1''(t)$ , а затем в направлении оси  $Z_2 - w_2''(t)$  (см. рис. 3.72). Раздельное приложение горизонтальной нагрузки позволяет оценить продольную и поперечную динамическую жесткость рамы. Шаг интегрирования по временной координате назначаем исходя из периода колебания девятого тона:  $\Delta t=T_9/20$ , где  $T_9=0,06827$  с.

Графики относительных динамических перемещений  $w(t)$  рамы в точках 2, 3, 4, 5, 6, расположенных на оси рамы (см. рис. 3.72), приведены на рис. 3.77. Здесь слева представлены графики колебаний вдоль оси  $Z_1$ , справа – графики колебаний вдоль оси  $Z_2$ . Перемещения  $w(t)$  в точках 2, 3, 4, 5, 6 являются относительными величинами, т. к. для каждого момента времени  $t$  вычислялись как разность действительных смещений данных узлов и перемещений первой точки. Таким образом, исключалось совместное смещение рамы и основания.

Из приведенных графиков  $w(t)$  видно, что наибольшие амплитудные перемещения (около 0,3 м) наблюдаются при кинематическом воздействии вдоль оси  $Z_1$  в точке 4. Также эта точка получает наибольшее амплитудное смещение (около 0,2 м) при действии внешнего возмущения вдоль оси  $Z_2$ . Следует отметить, что точка 4 располо-

жена на уровне пола четвертого этажа пятиэтажной рамы.

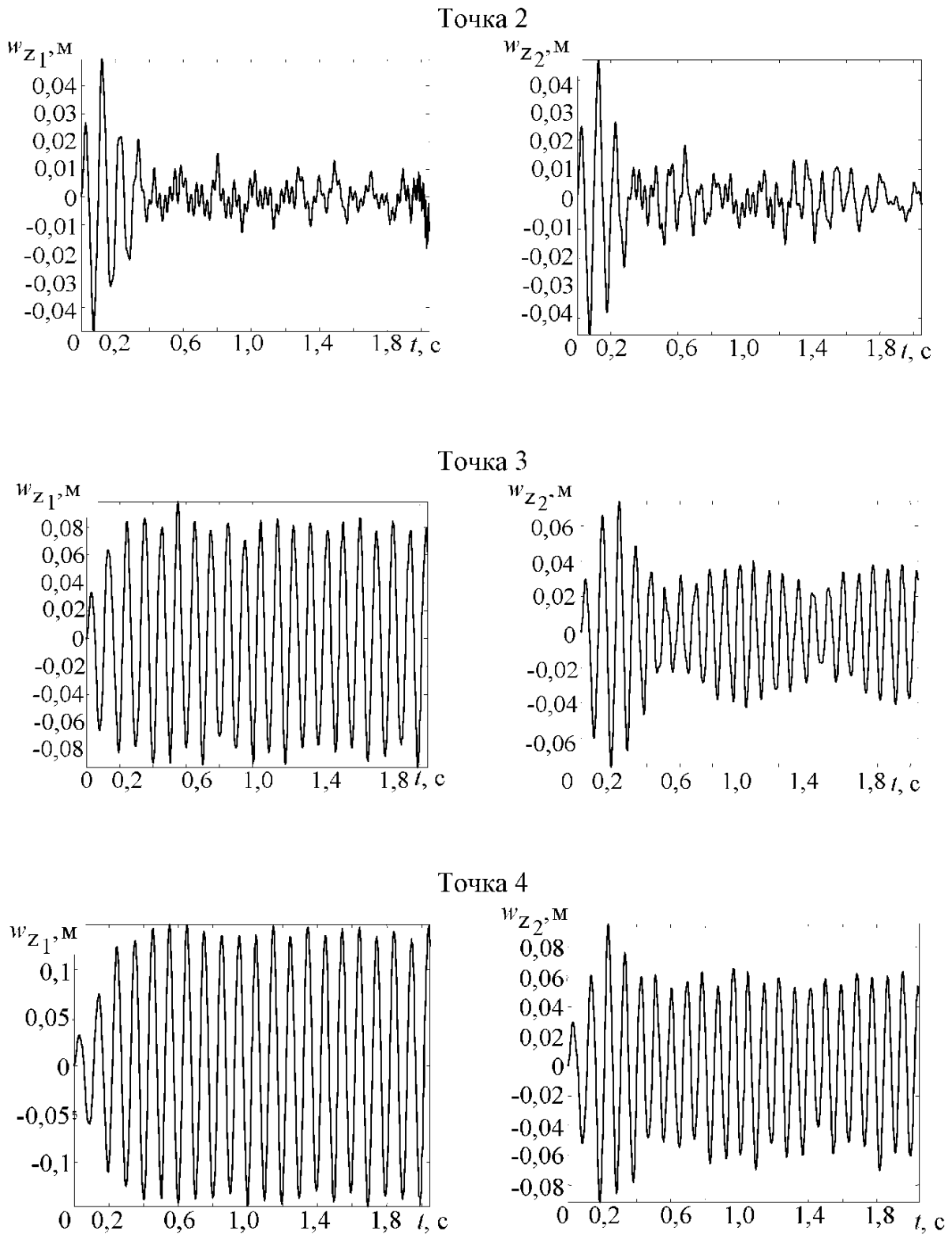
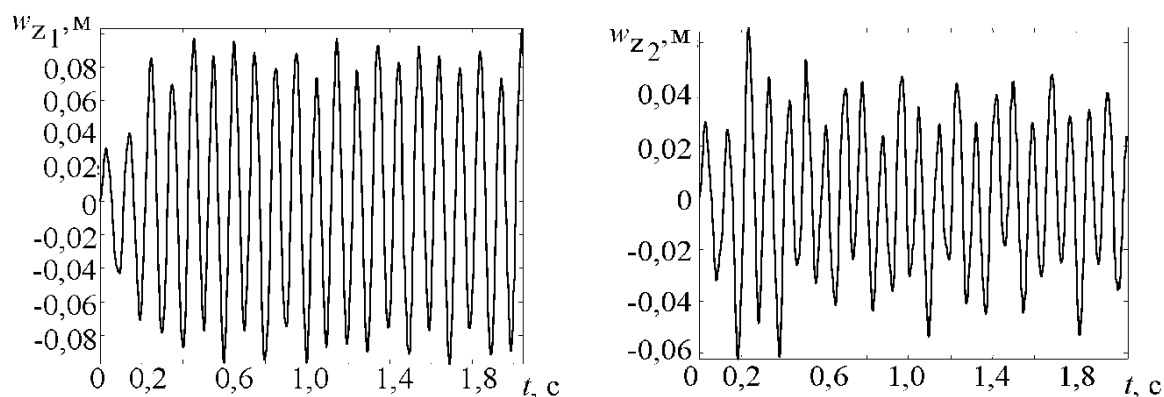


Рис. 3.77 (см. также с. 172)

Точка 5



Точка 6

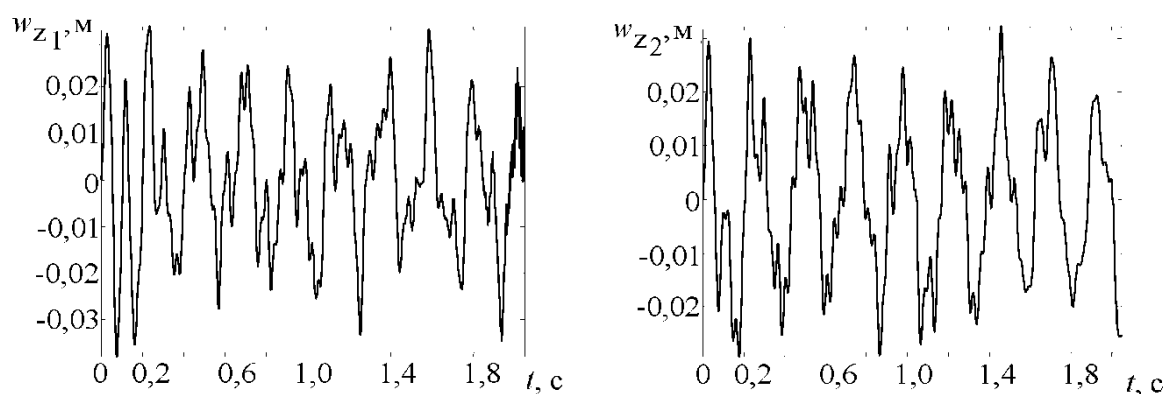


Рис. 3.77. Продолжение

Колебания точки 2 рамы в направлениях  $Z_1$  и  $Z_2$  практически идентичны и имеют выраженный затухающий характер.

В точке 6, соответствующей верхней отметке, амплитудные значения перемещений  $w(t)$  наименьшие (около 0,07 м), т. е. вопреки ожиданиям рама не раскачивается по схеме консоли, а работает на изгиб в соответствии с четвертым тоном собственных колебаний (см. рис. 3.76).

В качестве количественной оценки динамического воздействия на стержневую систему на каждом временном шаге вычисляем норму вектора узловых перемещений:

$$\|W(t)\| = \sum_{i=1}^{n_g} |w_i(t)|,$$

где  $n_g$  – общее число степеней свободы;  $w_i - i$ -е узловое перемещение. После завершения процесса прямого интегрирования определяем величину  $\|W\|_{max}$ , а также соответствующий номер шага и момент времени  $\hat{t}$ .

Далее вычислительный процесс повторяется для временного интервала  $[0, \hat{t}]$ . При этом полученный вектор узловых перемещений  $\{W\}|_{t=\hat{t}}$  используется для визуализации формы максимального отклонения рамы от исходного состояния, а также с помощью него можно вычислить текущие значения внутренних усилий в стержнях рамы. Картины деформации исследуемой рамы при кинематическом воздействии вдоль оси  $Z_1$  (496 шаг) и вдоль оси  $Z_2$  (85 шаг) представлены на рис. 3.78, а, б. Здесь для компонент узловых перемещений  $w_i$  использован масштабный коэффициент 10:1.

Интересно отметить, что при возбуждении колебаний в направлении оси  $Z_1$  кроме горизонтальных перемещений в узлах средних и правых стоек рамы появляются вертикальные перемещения (рис. 3.78, а). При кинематическом воздействии на раму вдоль оси  $Z_2$  наблюдаются вертикальные перемещения на левых стойках (рис. 3.78, б).

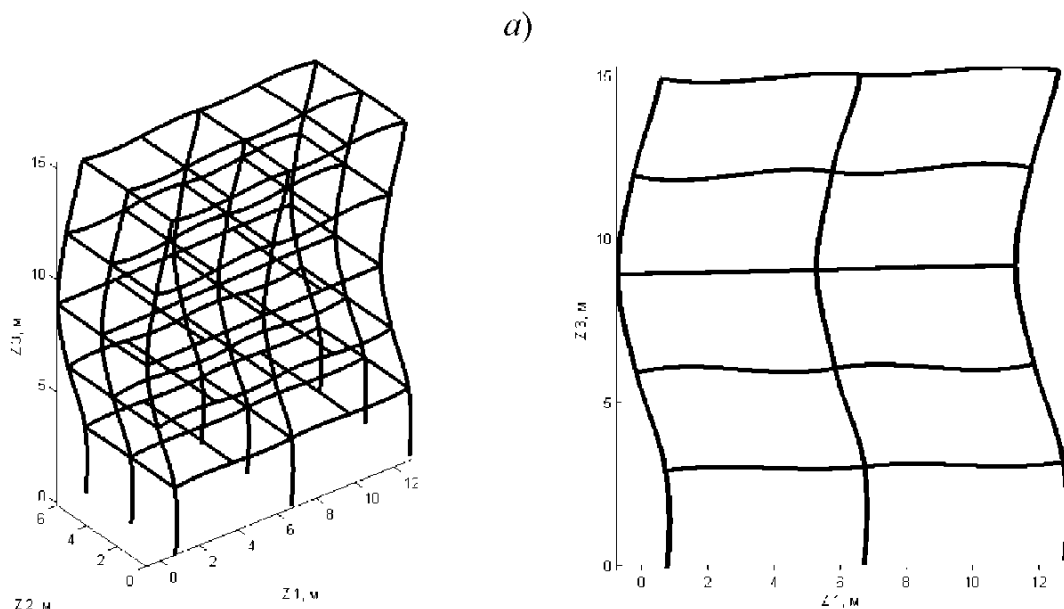


Рис. 3.78 (см. также с. 174)



б)

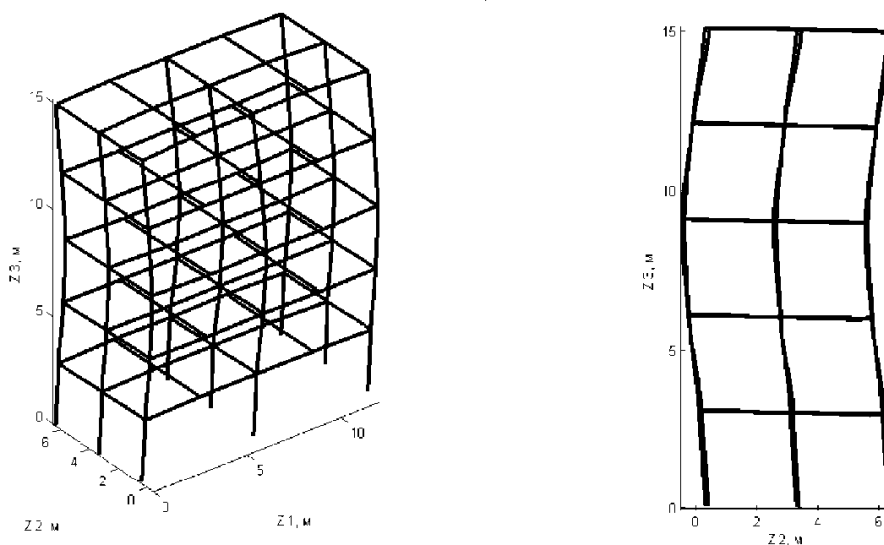


Рис. 3.78 Продолжение

Обнаружить опрокидывающий эффект позволило введение фиктивных стержней, имитирующих связь несущего каркаса рамы с основанием.

Естественно, что при полученных амплитудных значениях горизонтальных перемещений следует ожидать серьезных повреждений несущих элементов каркаса, выполненных из монолитного железобетона. Вместе с тем не следует забывать, что в рассматриваемом примере имитировалось землетрясение в 9 баллов.

## Заключение

Требования, предъявляемые к результатам прочностного расчета строительных объектов повышенной сложности, обуславливают необходимость повышения числа неизвестных до 1 млн. и выше. По сути, современные программные комплексы, базирующиеся на конечно-элементном анализе, являются основными потребителями вычислительных ресурсов сетевых многопроцессорных систем. Вместе с тем, несмотря на высокий уровень автоматизации проектировочных расчетов, на долю конструктора-расчетчика отводится самая важная часть работы, связанная с выбором геометрических и физических параметров расчетной схемы, а также критериев оценки промежуточных и конечных результатов решения задачи. В этой связи встает вопрос о сертификации специалистов, выполняющих расчеты ответственных объектов, т. к. любая самая дорогая и верифицированная программа может дать неверный результат при ошибке расчетчика на этапе выбора расчетной схемы, конструирования граничных условий, интерпретации данных моделирования. Досадно, что в учебном плане мало времени отводится изучению математических методов строительной механики и практическому освоению основ алгоритмизации и программирования метода конечных элементов. Знакомство студентов с современным программным обеспечением чаще происходит на уровне перечисления названий и некоторых вычислительных возможностей коммерческих комплексов.

Стержневые идеализации реальных конструкций находят самое широкое распространение в расчетной практике. Поэтому основное внимание в учебном пособии уделено классическим и численным методам расчета стержневых систем. К сожалению, из-за ограничений по объему читаемого курса вопросы, связанные с расчетами пластин и оболочек на устойчивость и динамический отклик, не нашли своего отражения в настоящем пособии. Хотя известно, что построение расчетных схем на базе конгломератов, образованных из пластинчатых, оболочечных и стержневых конечных элементов, существенно расширяет возможности моделирования в области строительства.

Не охваченными остались физически и конструктивно нелинейные задачи статики стержневых систем, а также расчеты на устойчивость с учетом ползучести.

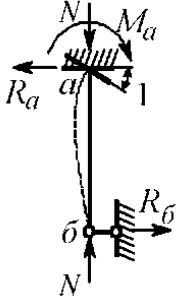
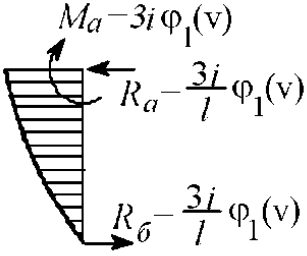
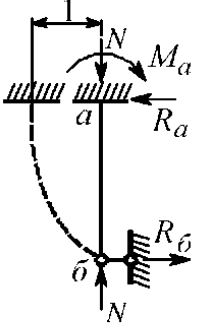
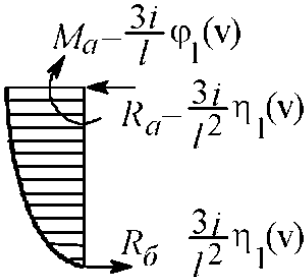
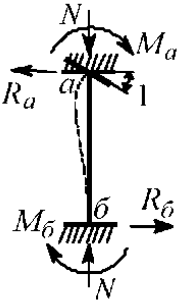
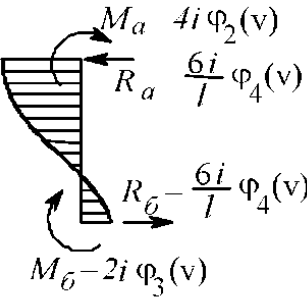
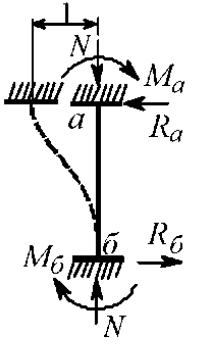
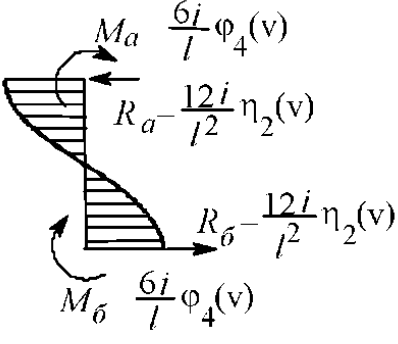
## Библиографический список

1. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лашеников Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений. – М.: Стройиздат, 1984. – 416с.
2. Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А. Основы строительной механики стержневых систем.– М.: Изд. АСВ, 1996. – 541с.
3. Клейн Г.К., Рекач В.Г., Розенблат Г.И. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики.–М.: Высш. шк., 1972.–320с.
4. Воронцов Г.В., Резниченко А.И. Расчет плоских рам на прочность, устойчивость, свободные и вынужденные колебания: учеб. пособие/ НПИ – Новочеркасск, 1993. – 72с
5. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982 – 448с.
6. Сеницын С.Б. Строительная механика в методе конечных элементов стержневых систем. – М.: Изд. АСВ, 2002. – 320с.
7. Даниелов Э.Р. Устойчивость и колебания плоских рам: учеб. пособие. – М.: Изд. АСВ, 2004.– 160с.
8. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. – М.: Высш. шк., 1980. – 408с.
9. СНиП II-7-81\*. Строительство в сейсмических районах. – М.: Стройиздат, 1995. – 52с.
10. СНиП 11-23-81. Нормы проектирования. Стальные конструкции.– М.: Стройиздат, 1988. – 93с.

# Приложения

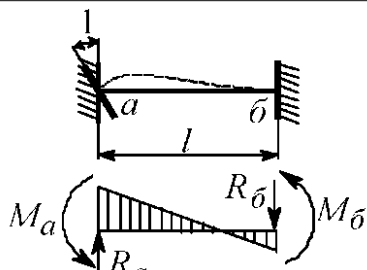
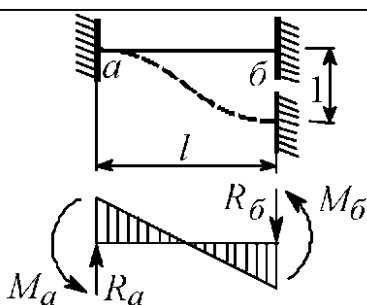
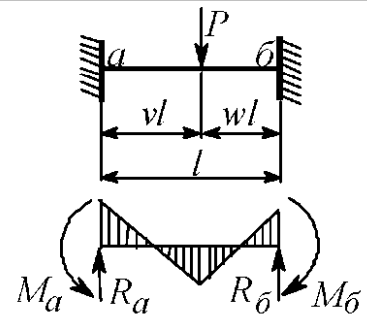
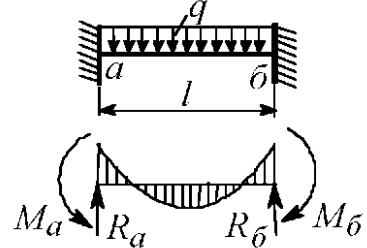
## Приложение 1

**Таблица значений реакций  
для сжато-изогнутых стержней**

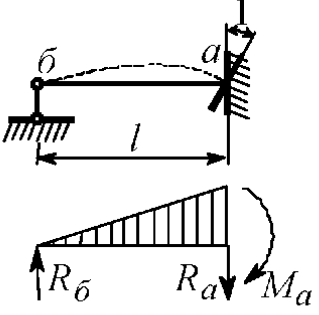
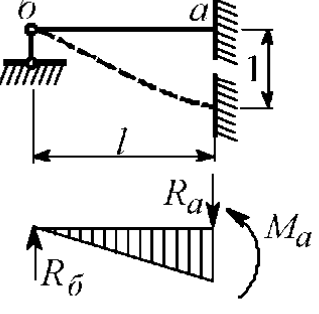
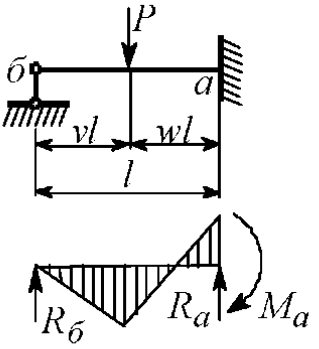
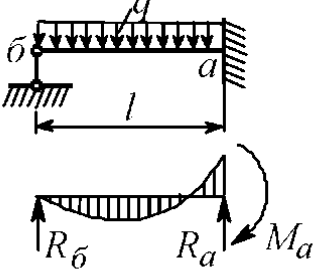
| Схема   | Эпюры моментов и реакции   |
|---|--|
|    |    |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

## Приложение 2

**Таблицы реакций для балок, используемые при расчете рам методом перемещений**

| Схема балки, эпюры моментов и реакции   | Формулы реакций  |
|---|--|
|    | $M_a = 4i; \quad M_b = 2i;$ $R_a = R_b = \frac{6i}{l}$                               |
|   | $M_a = M_b = \frac{6i}{l};$ $R_a = R_b = \frac{12i}{l^2}$                            |
|  | $M_a = P v w^2 l;$ $M_b = P v^2 w l;$ $R_a = w^2 (1 + 2v) P;$ $R_b = v^2 (1 + 2w) P$ |
|  | $M_a = \frac{q l^2}{12}; \quad M_b = \frac{q l^2}{12};$ $R_a = R_b = \frac{q l}{2}$  |

Продолжение прил. 2

| Схема балки, эпюры моментов и реакции   | Формулы реакций  |
|---|--|
|    | $M_a = 3i;$ $R_a = R_{\bar{b}} = \frac{3i}{l}$   |
|   | $M_a = \frac{3i}{l};$ $R_a = R_{\bar{b}} = \frac{3i}{l^2}$   |
|  | $M_a = \frac{Pvl}{2}(1 - v^2);$ $R_a = \frac{Pv}{2}(3 - v^2);$ $R_{\bar{b}} = \frac{Pw^2}{2}(3 - w)$ |
|  | $M_a = -\frac{ql^2}{8};$ $R_a = \frac{5}{8}ql; \quad R_{\bar{b}} = \frac{3}{8}ql$                    |

Варианты заданий для самостоятельной работы\*

Расчет плоской рамы на устойчивость

**Задание.** Для плоской статически неопределимой рамы (рис. ПЗ.1) с выбранными по шифру (три последние цифры в номере зачетной книжки) из табл. ПЗ.1 размерами и нагрузкой требуется определить значения критических сил, используя метод перемещений.

Таблица ПЗ.1

| Первая цифра шифра | $l_1$ , м | $h_1$ , м | Вторая цифра шифра | $\alpha = \frac{P_1}{P_2}$ | $l_2$ , м | Третья цифра шифра (№ схемы) | $h_2$ , м | $\frac{J_1}{J_2}$ |
|--------------------|-----------|-----------|--------------------|----------------------------|-----------|------------------------------|-----------|-------------------|
| 1                  | 4         | 4         | 1                  | 1,2                        | 4         | 1                            | 2         | 0,9               |
| 2                  | 5         | 10        | 2                  | 1,3                        | 5         | 2                            | 0         | 0,8               |
| 3                  | 6         | 9         | 3                  | 1,4                        | 6         | 3                            | 0         | 0,7               |
| 4                  | 7         | 8         | 4                  | 1,5                        | 7         | 4                            | 0         | 0,6               |
| 5                  | 8         | 7         | 5                  | 1,6                        | 8         | 5                            | 0         | 0,5               |
| 6                  | 9         | 6         | 6                  | 1,7                        | 9         | 6                            | 0         | 1,2               |
| 7                  | 10        | 5         | 7                  | 1,8                        | 10        | 7                            | 0         | 1,4               |
| 8                  | 11        | 3         | 8                  | 1,9                        | 11        | 8                            | 4         | 1,5               |
| 9                  | 12        | 11        | 9                  | 2,0                        | 12        | 9                            | 5         | 1,6               |
| 0                  | 13        | 12        | 0                  | 2,5                        | 13        | 0                            | 6         | 1,8               |

\*Митропольский М.Н. Строительная механика. Методические указания и контрольные задания. – М.: Высш. шк., 1982. – 61с.

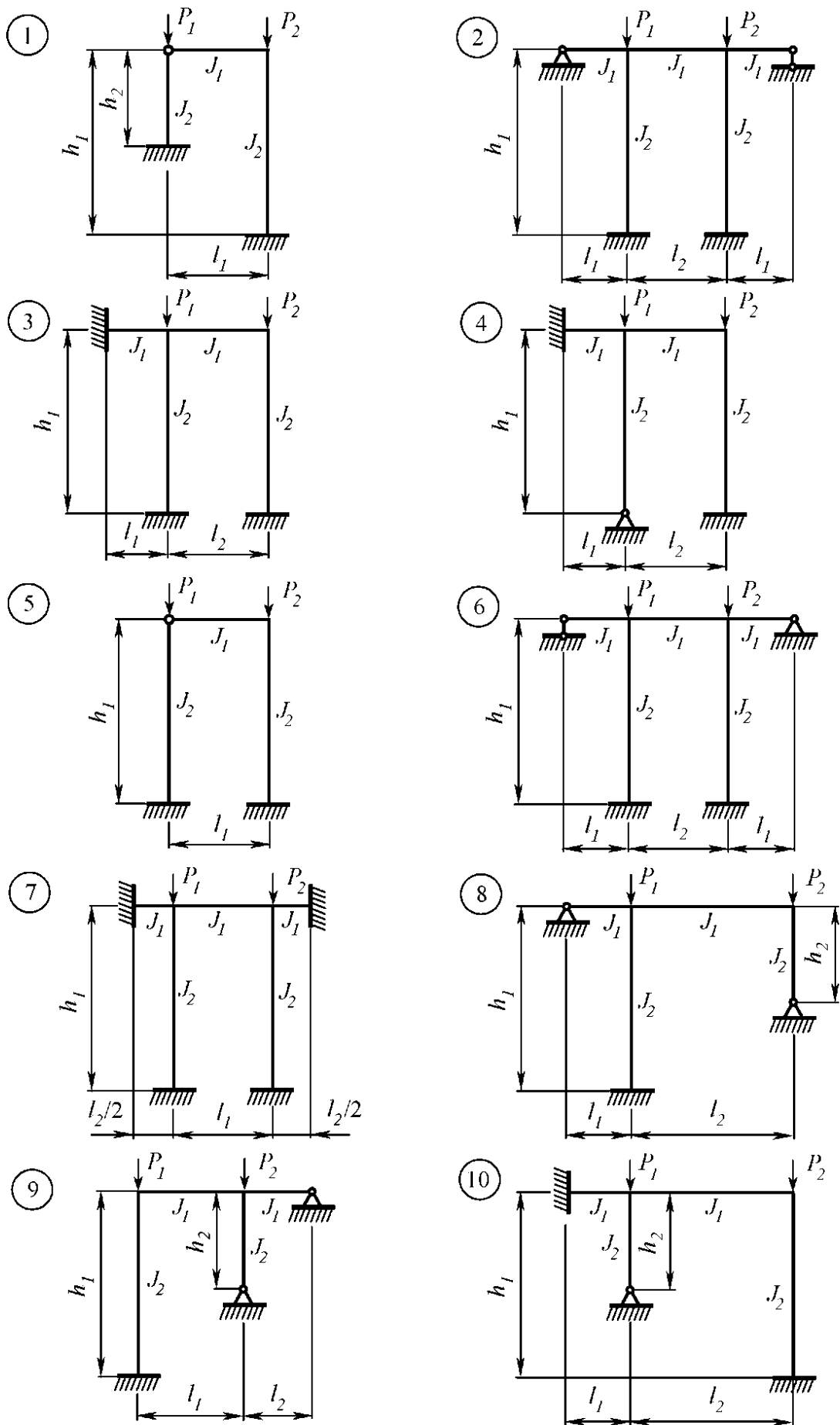


Рис. П3.1



## Методические указания

Так как заданные сосредоточенные силы  $P_1$  и  $P_2$  действуют вдоль стоек, то грузовых эпюр в основной системе не будет, и свободные члены канонических уравнений метода перемещений обратятся в нуль.

Построение единичных эпюр для стоек следует выполнять с использованием специальной таблицы реакций для сжато-изогнутых стержней (приложение 1), а для ригелей – по обычным таблицам метода перемещений (приложение 2).

По заданию силы  $P_1$  и  $P_2$  связаны между собой соотношением  $\alpha = P_1 / P_2$ , поэтому параметры продольной нагрузки для сжатых стоек  $\nu_1$  и  $\nu_2$  также окажутся связанными зависимостью:

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{h_1}{h_2} \sqrt{\alpha \frac{E J_2}{E J_1}}.$$

Формируем матрицу коэффициентов канонической системы метода перемещений:

$$[R(\nu)] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix},$$

где коэффициенты  $r_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$  включают специальные функции  $\varphi_1(\nu)$ ,  $\varphi_2(\nu)$ ,  $\varphi_3(\nu)$ ,  $\varphi_4(\nu)$ ,  $\eta_1(\nu)$ ,  $\eta_2(\nu)$  от параметра  $\nu$ .

Для нахождения  $P_{кр}$  составляем уравнение устойчивости:

$$\det[R(\nu)] = \det \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = r_{11} \cdot r_{22} - r_{12}^2 = 0. \quad (\text{ПЗ.1})$$

“Вручную” уравнение (ПЗ.1) решается методом “хорд” в следующей последовательности (рис. ПЗ.2): а) способом “пристрелки” задаются значениями  $\nu_0$  и  $\nu_1$  таким образом, чтобы величины  $\det[R(\nu_0)]$  и  $\det[R(\nu_1)]$  имели разные знаки; б) по итерационной формуле

$$\nu_{i+1} = \nu_0 - \frac{\det[R(\nu_0)]}{\det[R(\nu_i)] - \det[R(\nu_0)]} (\nu_i - \nu_0), \quad i = 1, 2, \dots, n_{\max},$$

вычисляется величина  $\nu_{i+1}$  ( $n_{\max}$  – формально назначаемое максимальное число итераций); в) начиная со второй итерации ( $i = 2$ ) выполняется оценка сходимости итерационного процесса по формуле

$$\det[R(\mathbf{v}_{i+1})] \leq \varepsilon, \quad (\text{ПЗ.2})$$

здесь  $\varepsilon = 0,001$  – положительная малая величина. При выполнении условия (ПЗ.2) вычисления прекращаются и принимается  $\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_{\text{кр}}$ . Следует иметь в виду, что уравнение  $\det[R(\mathbf{v})] = 0$  имеет несколько корней. Поэтому необходимо проверять, чтобы на отрезке  $[\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1]$  находился только один наименьший корень.

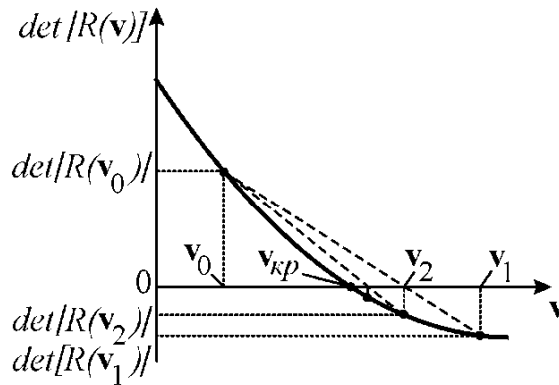


Рис. ПЗ.2

В завершении задания по формулам:

$$P_{1 \text{ кр}} = \frac{v_1^2 E J_1}{h_1^2}, \quad P_{1 \text{ кр}} = \frac{v_2^2 E J_2}{h_2^2}$$

определяются значения критических сил в сжатых стойках рамы.

### Динамический расчет плоской рамы

**Задание.** Для плоской статически определимой рамы (рис. ПЗ.3) с выбранными по шифру (три последние цифры в номере зачетной книжки) из табл. ПЗ.2 размерами и нагрузкой требуется:

- 1) определить значения частот свободных вертикальных и горизонтальных колебаний (собственный вес системы не учитывается);
- 2) определить динамическое воздействие вертикальной вибрационной силы  $P \sin \Theta t$ :
  - а) принять частоту вертикальной возмущающей силы  $\Theta$ , равной половине первой (минимальной) частоты собственных колебаний  $\omega_1$ ;
  - б) построить эпюру изгибающих моментов с учетом динамического действия силы  $P$ .

Таблица ПЗ.2

| Первая цифра шифра | $l$ , м | $Q$ , кН | Вторая цифра шифра | $P$ , кН | Третья цифра шифра (№ схемы) | $EJ$ , кН·м <sup>2</sup> |
|--------------------|---------|----------|--------------------|----------|------------------------------|--------------------------|
| 1                  | 2,0     | 10       | 1                  | 1,0      | 1                            | 20000                    |
| 2                  | 2,5     | 20       | 2                  | 2,0      | 2                            | 25000                    |
| 3                  | 3,0     | 22       | 3                  | 2,5      | 3                            | 22500                    |
| 4                  | 2,2     | 18       | 4                  | 1,5      | 4                            | 22000                    |
| 5                  | 2,4     | 25       | 5                  | 1,2      | 5                            | 23000                    |
| 6                  | 2,8     | 24       | 6                  | 3,0      | 6                            | 21000                    |
| 7                  | 2,1     | 21       | 7                  | 1,8      | 7                            | 24000                    |
| 8                  | 2,3     | 23       | 8                  | 1,6      | 8                            | 23500                    |
| 9                  | 1,8     | 17       | 9                  | 2,2      | 9                            | 24500                    |
| 0                  | 2,6     | 16       | 0                  | 2,6      | 0                            | 21500                    |

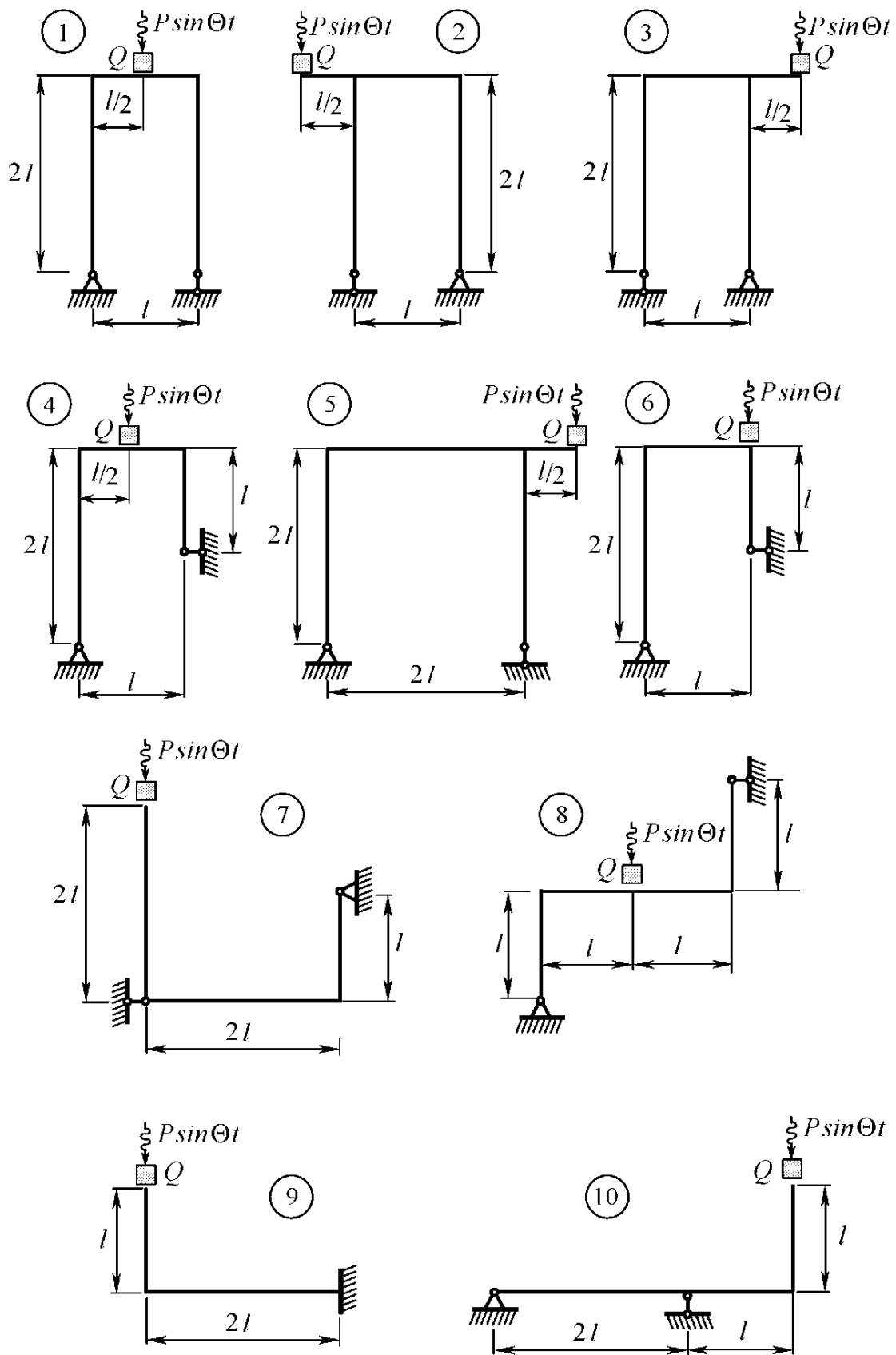


Рис. П3.3

**Краткие сведения из матричной алгебры**

Матрица общего вида – это прямоугольный массив чисел, называемых элементами, представленный в виде таблицы

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Положение элемента  $a_{ij}$  в матрице  $[A]$  определяется номером строки  $i$  и номером столбца  $j$ . Размерность или порядок матрицы определяется произведением числа строк  $m$  на число столбцов  $n$ . Две матрицы  $[A]$  и  $[B]$  одинакового порядка ( $m \times n$ ) равны, если  $a_{ij} = b_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . В матричной форме равенство матриц записывается в виде  $[A] = [B]$ .

Матрица  $[A]$  называется квадратной, если число строк равно числу столбцов  $m = n$ . Элементы  $a_{ii}, i = 1, 2, \dots, n$  образуют главную диагональ матрицы  $[A]$ . С квадратной матрицей  $[A]$  связан определитель  $(n \times n)$

делитель  $n$ -го порядка

$$\det[A] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определители 2-го и 3-го порядков соответственно вычисляются по формулам:

$$\det_{(2 \times 2)} [A] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21},$$

$$\det [A]_{(3 \times 3)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + \\ + a_{21} a_{32} a_{13} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{21} a_{12} a_{33} - a_{32} a_{23} a_{11}.$$

Определители более высоких порядков вычисляются путем приведения исходной матрицы  $[A]_{(n \times n)}$  к треугольному виду:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Процедура приведения матрицы к треугольному виду называется триангуляцией. После триангуляции определитель матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали:

$$\det [A]_{(n \times n)} = a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn}.$$

При программной реализации перемножения диагональных элементов матрицы большой размерности существует опасность переполнения разрядной сетки. Для исключения вероятности переполнения определитель следует вычислять с удвоенной точностью в виде

$$\det [A]_{(n \times n)} = m \cdot 10^S,$$

где  $m = \prod_{i=1}^n \operatorname{sgn}(a_{ii})$  – мантисса определителя;  $S = \sum_{i=1}^n \lg |a_{ii}|$  – значение порядка определителя.

Квадратная матрица, для которой  $\det[A] = 0$ , называется вырожденной (особенной).

Матричная операция последовательной замены строк столбцами называется транспонированием и обозначается верхним символом  $[...]^T$ . Пример транспонирования прямоугольной матрицы  $[B]$ :

$$[B] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4,7 & -12 & 8 \end{bmatrix}, \quad [B]^T = \begin{bmatrix} 2 & 4,7 \\ -1 & -12 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что при транспонировании несимметричной квадратной матрицы диагональные элементы сохраняют свои ячейки, а транспонирование симметричной матрицы не имеет смысла.

Квадратная матрица  $[A]$  называется диагональной, если

$$\begin{cases} a_{ij} \neq 0, & \text{при } i = j, \\ a_{ij} = 0, & \text{при } i \neq j, \\ i, j = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

Компактная форма записи диагональной матрицы имеет вид

$$[A] = \text{diag}[a_{11} \ a_{22} \ a_{33} \ \dots \ a_{nn}].$$

Квадратная диагональная матрица называется единичной, если  $a_{ij} = 1, i, j = 1, 2, \dots, n$ . Единичная матрица обычно обозначается  $[I]$ .

Матрица, у которой симметрично расположенные относительно главной диагонали элементы равны, называется симметричной. Пример симметричной матрицы:

$$[C] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 7 & 1,5 \\ 0 & 1,5 & 4,8 \end{bmatrix}.$$

### *Основные операции матричной алгебры*

#### 1. Сложение (вычитание) матриц

$$[C] = [A] \pm [B],$$

где  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ .

Операция сложения (вычитания) матриц коммутативна, т. е.

$$[A] \pm [B] = [B] \pm [A],$$

$$[A] \pm ([B] \pm [C]) = ([A] \pm [B]) \pm [C].$$

#### 2. Умножение матрицы на скаляр

$$[C] = u[A],$$

где  $u$  – вещественное число;  $c_{ij} = u a_{ij}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ .

3. Результатом произведения матрицы  $[A]$  размерностью  $(m \times r)$  справа на матрицу  $[B]$  размерностью  $(r \times n)$  является матрица  $[C]$  размерностью  $(m \times n)$ . В матричной форме это выглядит так:

$$[C] = [A] [B] .$$

$(m \times n) \quad (m \times r)(r \times n)$

В символьном виде произведение матриц вычисляется по формуле

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^r a_{ik} b_{kj}, \quad i=1,2,\dots, m, \quad j=1,2,\dots, n.$$

Отметим, что данное произведение матриц имеет смысл, когда число столбцов матрицы  $[A]$  равно числу строк матрицы  $[B]$ .

### *Правила произведения матриц*

Произведение матриц не коммутативно

$$[A][B] \neq [B][A].$$

Исключение составляет произведение матрицы  $[A]$  на единичную матрицу  $[I]$ :

$$[A][I] = [I][A].$$

Произведение матриц ассоциативно:

$$\begin{aligned} ([A][B])[C] &= [A]([B][C]), \\ [A]([B]+[C]) &= [A][B]+[A][C], \\ ([A]+[B])[C] &= [A][C]+[B][C]. \end{aligned}$$

Определитель произведения нескольких матриц равен произведению определителей этих матриц.

Транспонирование произведения матриц подчиняется правилу

$$([A][B])^T = [B]^T [A]^T .$$

Транспонирование суммы матриц выполняется по формуле

$$([A]+[B])^T = [A]^T + [B]^T .$$

Дважды транспонированная матрица совпадает с исходной матрицей  $([A]^T)^T = [A]$ .

Определитель матрицы не меняется при транспонировании.

### *Обратная матрица и ее свойства*

Всякая неособенная матрица  $[A]$  имеет обратную матрицу,

$(n \times n)$

обозначаемую  $[A]^{-1}$ , такую что  $[A][A]^{-1} = [I]$  и  $[A]^{-1}[A] = [I]$ . Матрица называется сингулярной или особенной, если для нее не существует обратной матрицы.



Один из алгоритмов обращения (инверсии) матрицы  $[A]_{(n \times n)}$  базируется на решении системы уравнений методом Гаусса:

$$[A]\{X\}_j = \{I\}_j, j=1, 2, \dots, n.$$

Здесь  $\{X\}_j$  – векторы-столбцы, образующие обратную матрицу

$$[A]^{-1} = [\{X\}_1 \{X\}_2 \dots \{X\}_j \dots \{X\}_n];$$

$\{I\}_j$  – единичные векторы-столбцы, имеющие следующую структуру:

$$\{I\}_1 = \{1 \mid 0 \mid \dots \mid n\}^T, \{I\}_2 = \{0 \mid 1 \mid \dots \mid n\}^T \text{ и т. д.}$$

Обратная матрица для произведения  $[A][B]$  вычисляется по формуле

$$([A][B])^{-1} = [B]^{-1}[A]^{-1}.$$

#### *Признаки ортогональности и положительной определенности симметричных матриц*

Матрица  $[A]$  называется ортогональной, если она удовлетворяет одному из следующих условий:

$$[A][A]^T = [I]; \quad [A]^T [A] = [I]; \quad [A]^T = [A]^{-1}.$$

Матрица  $[A]$  называется положительно определенной, если для некоторого ненулевого вектора  $\{X\}$  размерности  $n$  выполняется условие

$$\{X\}^T [A] \{X\} > 0.$$

Требование положительной определенности матрицы  $[A]$  является определяющим при решении системы линейных алгебраических уравнений  $[A]\{X\} = \{b\}$ .

#### *Число обусловленности матрицы*

Число обусловленности  $cond(A)$  квадратной неособенной матрицы  $[A]$  используется для определения чувствительности системы линейных алгебраических уравнений  $[A]\{X\} = \{b\}$  к возмущениям

(малым отклонениям) вектора правой части  $\{b\}$ . Чем больше число обусловленности, тем более неустойчив процесс нахождения решения системы (вектора  $\{X\}$ ). Величина  $cond(A)$  определяется как отношение максимального собственного значения  $\lambda_{max}$  матрицы  $[A]$  к ее минимальному собственному значению  $\lambda_{min}$ .

### Нормирование векторов и матриц

Для измерения векторов и матриц с целью их сравнения вводятся разные нормы.

Для вектора  $\{X\} = \{x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n\}^T$ :

$\|X\|_2 = \sqrt{\{X\}^T \{X\}} = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$  – евклидова (квадратичная) норма;

$\|X\|_m = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$  –  $m$ -норма;

$\|X\|_l = \sum_{i=1}^n |x_i|$  –  $l$ -норма.

Для квадратной матрицы  $[A]$  :  
( $n \times n$ )

$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$  – первая норма (максимум суммы модулей элементов в столбце);

$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}}$  – вторая (спектральная) норма;

$\|A\|_e = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$  – евклидова (квадратичная) норма.

Примеры оформления файлов исходных данных в формате языка Фортран 90

В качестве демонстрационного примера статического расчета рассмотрим раму с шарниром, показанную на рис. 1. В правой части рис. П5.1 цифрами отмечены узлы (■) и номера балочных конечных элементов (обведены кружочками). Геометрию рамы задаем в глобальных декартовых координатах  $Z_1, Z_2, Z_3$ . В левой части рис. П5.1 для  $k$ -го элемента показана локальная нумерация узлов  $i$  и  $i+1$ , лежащих на локальной оси  $x_1$ , и расположение 3-ей точки на локальной оси  $x_3$ . Локальную ось  $x_2$  ориентируем таким образом, чтобы глядя с острия оси  $x_3$ , видеть поворот оси  $x_1$  к оси  $x_2$  против часовой стрелки. Точка 3 предназначена для ориентации сечения элемента в глобальных осях. При этом необходимо следить, чтобы плоскость наибольшей изгибной жесткости элемента совпадала с плоскостью  $x_1, i, x_3$ . Считаем, что рама выполнена из стального проката двутаврового поперечного сечения № 14 (ригель двойной профиль):  $J_x = 572 \text{ см}^4$ ;  $J_y = 41,9 \text{ см}^4$ ;  $F = 17,4 \text{ см}^2$ . Параметр нагрузки  $P = 10 \text{ кН}$ .

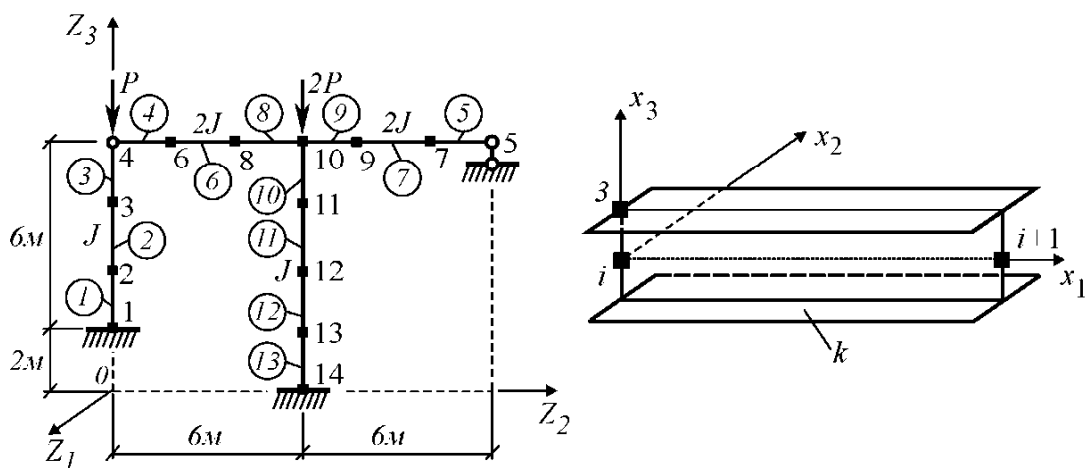


Рис. П5.1

Для конечно-элементного расчета необходимо задать информацию о геометрии узлов расчетной модели и топологическую информацию, т. е. данные о связи нумерации конечных элементов и их узлов. В разработанном программном обеспечении для ввода исходной информации использован алгоритм повторения в терминах прираще-

ний. Это позволяет в ручном режиме работать с внешним (ограниченным) протоколом данных, которые затем автоматически трансформируются во внутреннее (расширенное) представление информации об ансамбле элементов с помощью умножителя блока повторов. Ниже приведены примеры протоколов исходных данных. Строки, начинающиеся с символа “!”, являются комментариями.

### Задание геометрии, топологии и связей

*!Файл исходных данных DATE1\_fr\_STAND.f90*

*!Тема: "Плоская рама с шарниром №1"*

*!Исходные данные подготовил:*

!-----

*!Общее число фрагментов*

&NFRAG

nfr=1/

!-----

*!Параметры фрагмента №1*

*!Число узлов*

&NUZL

nr=14/

*!Число элементов*

&NKE

ne=13/

!-----

*!Параметры фрагмента №1*

*!Ввод признаков контрольной печати массивов LM(ne,8), X(nr,3)*

*!(ifpr...=1 - печать в файл TEST1.f90; ifpr...=0 - нет печати)*

&IFWR

ifprlm=0, ifprx=0/

!-----

*!Ввод признаков контрольной печати массива X3(nst,3)*

*!(ifpr...=1 - печать в файл TEST1.f90)*

&IFWR3

ifprx3=0/

!-----

*!Координаты узлов. Массив X(NR,3)*

*!Расшифровка элементов строки (11 позиций):*

*!1) признак (0 – ввод данных, 1 – конец ввода);*

*!2) номер узла;*

*!3)-5) координаты узла Z1,Z2,Z3;*

*!6)-8) блок повторов (начальный номер узла, конечный номер узла, число повторов);*

!9)-11) приращения координат узлов dZ1,dZ2,dZ3

0,1,0.0,0.0,2.0,3\*0,3\*0./

0,2,3\*0.,1,1,3,0.,0.,2.0/

0,5,0.,12.0,8.0,3\*0,3\*0./

0,6,0.,2.0,8.0,3\*0,3\*0./

0,7,0.,10.0,8.0,3\*0,3\*0./

0,8,0.,4.0,8.0,3\*0,3\*0./

0,9,0.,8.0,8.0,3\*0,3\*0./

0,10,0.,6.0,8.0,3\*0,3\*0./

0,11,3\*0.,10,10,4,0.,0.,-2.0/

1,0,3\*0.,3\*0,3\*0./

!-----

!Стержневые КЭ. Координаты 3-ей точки. Массив X3(NST,3)

!Расшифровка элементов строки (11 позиций):

!1) признак (0 – ввод данных, 1 – конец ввода);

!2) номер элемента;

!3)-5) координаты 3-ей точки Z1,Z2,Z3;

!6)-8) блок повторов (начальный номер элемента, конечный номер элемента, число повторов);

!9)-11) приращения координат 3-ей точки dZ1,dZ2,dZ3

0,1,0.,.70,2.0,3\*0,3\*0./

0,2,3\*0.,1,1,2,0.,0.,2.0/

0,4,0.,0.,8.70,3\*0,3\*0./

0,5,0.,12.0,8.70,3\*0,3\*0./

0,6,0.,2.0,8.70,3\*0,3\*0./

0,7,0.,10.0,8.70,3\*0,3\*0./

0,8,0.,4.0,8.70,3\*0,3\*0./

0,9,0.,8.0,8.70,3\*0,3\*0./

0,10,0.,6.70,8.0,3\*0,3\*0./

0,11,3\*0.,10,10,3,0.,0.,-2.0/

1,0,3\*0.,3\*0,3\*0./

!-----

!Ввод признака KOOR, по которому осуществляется преобразование координат узлов рассматриваемого фрагмента

!Значение коог соответствует локальной системе координат:

!коог = 0 - преобразования координат не требуется;

!коог = 1 - локальные декартовы координаты;

!коог = 2 - цилиндрические координаты;

!коог = 3 - сферические координаты

&AKOOR

коог=0/

!-----

!Ввод массива PER(12) данных для преобразования координат:

! Углы направляющих косинусов( $z_i-Z_i$ ), град      Значения смещений осей, мм

```

!          (9-ть значений)                                (3-и значения)
z1-Z1 z1-Z2 z1-Z3 z2-Z1 z2-Z2 z2-Z3 z3-Z1 z3-Z2 z3-Z3 z1-Z1 z2-Z2 z3-Z3
0.0, 90.0, 90.0, 90.0, 0.0, 90.0, 90.0, 90.0, 0., 0., 0., 0./
!-----
!Топологическая информация о конечно-элементной модели. Массив LM(NE,8)
!Расшифровка элементов строки (8 позиций):
!1) признак (0 – ввод данных, 1 – конец ввода); 2) номер элемента;
!3)-4) глобальные номера узлов элемента; 5)-8) блок повторов (начальный
!номер элемента, конечный номер элемента, приращение номера,
число повторов)
0,1,1,2,4*0/
0,2,2*0,1,1,1,2/
0,4,4,6,4*0/
0,5,5,7,4*0/
0,6,6,8,4*0/
0,7,7,9,4*0/
0,8,8,10,4*0/
0,9,9,10,4*0/
0,10,10,11,4*0/
0,11,2*0,10,10,1,3/
1,0,2*0,4*0/
!-----
!Ввод признака ifpr:
!ifpr=0 - модель состоит только из одного фрагмента;
!ifpr=1 - "сшивка" фрагментов
&IFPRIZ
ifpr=0/
!-----
!          Геометрический способ задания граничных условий
!Ввод числа поверхностей, на узлы которых наложены связи
&NFICA
nfic=4/
!-----
!Ввод массивов ZFIC(nfic,4) и MFIC(nfic,6) одной строкой
!Информация, содержащаяся в i- й строке: ZFIC(i,1)=0 - декартовы координаты;
!ZFIC(i,1)=1 - цилиндрические координаты
!ZFIC(i,j), j=2,3,4 - координаты узлов, на которые наложены связи,
!При ZFIC(nfic,1)=0 -> ZFIC(i,2) - Z1; ZFIC(i,3) - Z2; ZFIC(i,4) - Z3.
!При ZFIC(nfic,1)=1 -> ZFIC(i,2) - R; ZFIC(i,3) - Q; ZFIC(i,4) - Z3.
!Если Z(i,j) - e направление не рассматривается, то Z(i,j)=10.0e+23.
!MFIC(i,6) - массив признаков закрепления: 0 - нет связи; 1 - связь
!          (MFIC(i,1) - Z1; MFIC(i,2) - Z2; MFIC(i,3) - Z3;
!          MFIC(i,4) - поворот относительно оси Z1;
!          MFIC(i,5) - поворот относительно оси Z2;

```

! MFIC(i,6) - поворот относительно оси Z3)

!-----  
0,0.,0.,2.0,1,1,1,1,1/  
0,0.,6.0,0.0,1,1,1,1,1/  
0,0.,12.0,8.0,1,0,1,0,1,1/  
0,0.,2\*10.0e+23,1,0,0,0,1,1/  
!-----

### **Задание геометрии подобластей для идентификации механических характеристик конечных элементов**

!Файл исходных данных DATE2\_FRAG\_ST.f90

!Тема: "Плоская рама с шарниром №1"

!Исходные данные подготовил: \_\_\_\_\_

!-----  
!Ввод числа NCST обособленных фрагментов, для идентификации механических

!свойств стержневых КЭ

&NCA\_ST

ncst=2/  
!-----

! Ввод массива идентификации типа материала MITST(ncst) для обособленных  
!фрагментов

! (mitst(i) соответствует типу материала i-го фрагмента)

1,2/  
!-----

!Ввод массива координат ZFRST(ncst,8,3) обособленных фрагментов

!-----  
0.,0.,0.,  
0.25,0.,0.,  
0.,12.0,0.,  
0.25,12.0,0.,  
0.,0.,7.70,  
0.25,0.,7.70,  
0.,12.0,7.70,  
0.25,12.0,7.70,  
0.,0.,7.70,  
0.25,0.,7.70,  
0.,12.0,7.70,  
0.25,12.0,7.70,  
0.,0.,8.0,  
0.25,0.,8.0,  
0.,12.0,8.0,  
!-----

0.25,12.0,8.0/  
!-----

### **Задание информации о неопорных шарнирных соединениях**

*!Файл исходных данных STERG\_SHARN.f90*

*!Тема: "Плоская рама с шарниром №1"*

*!Исходные данные подготовил: \_\_\_\_\_*  
!-----

*!n\_sterg - число стержневых КЭ, имеющих неопорные шарниры  
&SHARN\_ST*

*n\_sterg=2/  
!-----*

*!Ввод информации о шарнирных соединениях стержневых КЭ*

*!Массив I\_sterg(n\_sterg,5):*

*!n\_sterg - число стержневых КЭ, имеющих шарнирные соединения*

*!I\_sterg(i,1) - номер i-го стержневого КЭ*

*!I\_sterg(i,j)=0 - нет шарнира*

*!(i-й стержневого КЭ; j- код точки и локальной оси стержневого КЭ)*

*!I\_sterg(i,j)=1 - есть шарнир*

*!(i-й стержн. КЭ; j- код точки и локальной оси стержневого КЭ)*

*!I\_sterg(i,2) - начало стержневого i-го КЭ; локальная ось X2*

*!I\_sterg(i,3) - начало стержневого i-го КЭ; локальная ось X3*

*!I\_sterg(i,4) - конец стержневого i-го КЭ; локальная ось X2*

*!I\_sterg(i,5) - конец стержневого i-го КЭ; локальная ось X3*

*3,0,0,1,0,*

*4,1,0,0,0,  
!-----*

### **Ввод механических характеристик конечных элементов**

*!Файл исходных данных DATE2\_TIP\_ST.f90*

*!Тема: "Плоская рама с шарниром №1"*

*!Исходные данные подготовил: \_\_\_\_\_*  
!-----

*!Количество типов (ltipst) материала стержневых КЭ (при ltipst=0 элементы  
данного типа*

*!отсутствуют)*

*&TIP\_ST*

*ltipst=2/  
!-----*

*!Файл исходных данных DATE2\_ST.f90*

*!Тема: "Плоская рама с шарниром №1"*

*!Исходные данные подготовил: \_\_\_\_\_*  
!-----



```

! Механические характеристики стержневых КЭ. Массив EST(ltipst,7):
!ltipst (первая колонка) – номер материала;
!j2 – момент инерции сечения стержня относительно местной оси X2, см^4;
!j3 – момент инерции сечения стержня относительно местной оси X3, см^4;
!f – площадь поперечного сечения стержня, см^2;
!e – модуль упругости I-го рода, Н/м^2;
!g – модуль упругости II-го рода, Н/м^2;
!m1 – погонная масса, кг/м;
!alfa – коэффициент температурного расширения, град^-1
!-----
!ltipst I j2 I j3 I f I e I g I m1 I alfa I
!-----
1, 572.0d00, 41.90d00, 17.40d00, 2.0d11, 7.8d10, 13.7d00, 11.5d-06,
2, 1144.0d00, 83.80d00, 34.80d00, 2.0d11, 7.8d10, 27.4d00, 11.5d-06/
!-----

```

### Задание узловой нагрузки

```

!Файл исходных данных NAGR_FOS_MOM.f90. Узловая нагрузка - силы и(или)
моменты
!Тема: "Плюсовая рама с шарниром №1"
!Исходные данные подготовил: _____
!-----
!Число узлов (nsp), к которым приложена сосредоточенная нагрузка
&NUPA
nsp=2/
!-----
!Параметры узловой нагрузки(сила/момент)
!Расшифровка 13 позиций:
!1) признак (0 – ввод данных, 1 – конец ввода);
!2) номер строки документа (при наличии повторов необходимо соблюдать
!нумерацию строк);
!3) номер нагруженного узла;
!4)-6) проекции вектора сосредоточенной силы на оси Z1,Z2,Z3;
!7)-9) компоненты результирующего момента относительно осей Z1,Z2,Z3;
!10)-13) блок повторов (начальный номер строки, конечный номер строки,
!приращения номера строки, число повторов)
0,1,4,0.,0.,-10.0d03,0.,0.,0.,4*0/
0,2,10,0.,0.,-20.0d03,0.,0.,0.,4*0/
1,2*0,6*0.,4*0/
!-----

```

Если на раму действует равномерно распределенная нагрузка  $q$ , то используем методику приведения ее к узловым силам и моментам. Ниже приведена распечатка файла NAGR\_FOS\_MOM.f90 для расчетной схемы и конечно-элементной модели рамы, показанных на рис. П5.2.

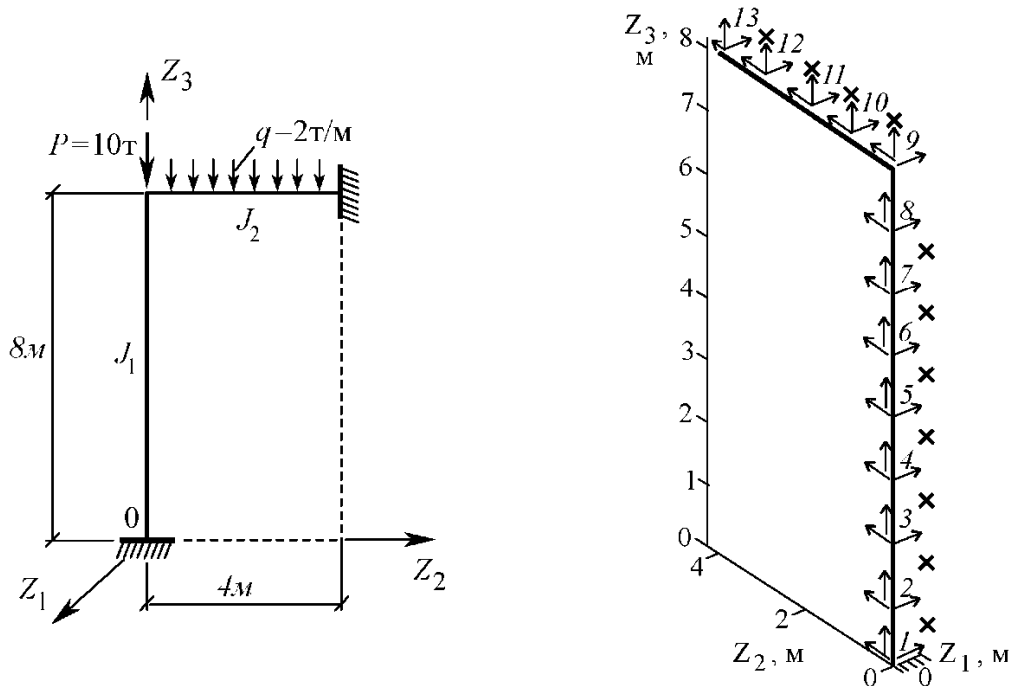


Рис. П5.2

!Файл исходных данных NAGR\_FOS\_MOM.f90. Узловая нагрузка - силы и(или) моменты

!Тема: "Плоская рама с распределенной нагрузкой на ригеле"

!Исходные данные подготовил:

!-----

!Число узлов (nsp), к которым приложена сосредоточенная нагрузка  
&NUPA

nsp=4/

!-----

!Расшифровка 13 позиций:

!1) признак (0 – ввод данных, 1 – конец ввода);

!2) номер строки документа (при наличии повторов необходимо соблюдать нумерацию строк);

!3) номер нагруженного узла;

!4)-6) проекции вектора сосредоточенной силы на оси  $Z_1, Z_2, Z_3$ ;

!7)-9) компоненты результирующего момента относительно осей  $Z_1, Z_2, Z_3$ ;

!10)-13) блок повторов (начальный номер строки, конечный номер строки,

!приращения номера строки, число повторов)

0,1,9,0.,0.,-11.0d04,-1666.7d00,0.,0.,4\*0/

0,2,10,0.,0.,-2.0d04,0.,0.,0.,4\*0/

0,3,11,0.,0.,-2.0d04,0.,0.,0.,4\*0/

0,4,12,0.,0.,-2.0d04,0.,0.,0.,4\*0/

1,2\*0,6\*0.,4\*0/

!-----

Отметим, что в промежуточных узлах ригеля (10, 11, 12) сосредоточенные моменты равны нулю, т. к. на стыках элементов значения приведенных моментов равны по величине и противоположны по направлению, см. рис. П5.2. В угловом узле 9 сосредоточенный момент равен

$$M = \frac{ql_e^2}{12} = \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 1^2}{12} = 1666,7 \text{ Н}\cdot\text{м},$$

где  $l_e$  – длина конечного элемента ( $l = 1$  м).

Величина сосредоточенной силы, приведенной к узлам 9, 10, 11, 12, составляет:

$$P = \frac{ql_e}{2} = \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 1}{2} = 1 \cdot 10^4 \text{ Н}.$$

В узле 9 вертикальная сила равна сумме сил:

$$100 \text{ кН} + 10 \text{ кН} = 110 \text{ кН}.$$

### Ввод номеров исследуемых узлов

!Файл исходных данных DATE3\_UZL.f90. Номера узлов, в которых требуется знать перемещения

!Тема: "Плоская рама с шарниром №1"

!Исходные данные подготовил: \_\_\_\_\_

!-----

!Число узлов (nu), в которых требуется знать перемещения

&NUA

nu=5/

!-----

! Массив MUZ(nu,2)

!№ узла; № координаты, вдоль которой требуется знать перемещение в узле

4,3,

4,2,

10,3,

10,2,

5,2/

!-----

## Ввод данных для визуализации результатов расчетов в среде Matlab

!Файл исходных данных DATE6\_VIZUAL\_BEAM.f90

!Тема: "Плоская рама с шарниром №1"

!Исходные данные подготовил: \_\_\_\_\_

!

!Ввод номера узловой реакции в локальных осях X1, X2, X3:

!nreak=1 соответствует r1 (сила, действующая вдоль оси x1)

!nreak=2 соответствует r2 (сила, действующая вдоль оси x2)

!nreak=3 соответствует r3 (сила, действующая вдоль оси x3)

!nreak=4 соответствует m1 (момент, вызывающий поворот сечения относительно x1)

!nreak=5 соответствует m2 (момент, вызывающий поворот сечения относительно x2)

!nreak=6 соответствует m3 (момент, вызывающий поворот сечения относительно x3)

&REAK

nreak=5/

!

!Номер компоненты перемещения nu в глобальных осях Z1, Z2, Z3:

!nu=1 соответствует перемещению вдоль оси Z1

!nu=2 соответствует перемещению вдоль оси Z2

!nu=3 соответствует перемещению вдоль оси Z3

&NUA

nu=3/

!

!Число обособленных фрагментов nc

&NCA

nc=1/

!

!Ввод массива координат ZFR(nc,8,3) обособленных фрагментов

!

0.,0.,0.,

0.25,0.,0.,

0.,12.0,0.,

0.25,12.0,0.,

0.,0.,8.0,

0.25,0.,8.0,

0.,12.0,8.0,

0.25,12.0,8.0/

!

**Файлы DATE3\_EVAL\_EVEC.f90, DATE4\_VIZUAL\_FORMA.f90  
для выполнения модального анализа**

!Файл исходных данных DATE3\_EVAL\_EVEC.f90

!Тема: "Плоская рама с шарниром №1"

!Исходные данные подготовил: \_\_\_\_\_

!-----

!Количество требуемых для анализа собственных пар

&ANROOT

nroot=6/

!Максимальное число итераций

&AMAXITER

maxiter=50/

!-----

!Файл исходных данных DATE4\_VIZUAL\_FORMA.f90

!Тема: "Плоская рама с шарниром №1"

!Исходные данные подготовил: студент С-Ш-8 Иванов И.И.

!-----

!Номер собственной пары, используемой для визуализации

&INROOT

i\_nroot=9/

!Коэффициент усиления для визуализации форм свободных колебаний

&ZOOMER

zoom=300/

!Число обособленных фрагментов nc

&NCA

nc=1/

!-----

!Ввод массива координат ZFR(nc,8,3) обособленных фрагментов

!-----

0.,0.,0.,

0.25,0.,0.,

0.,12.0,0.,

0.25,12.0,0.,

0.,0.,8.0,

0.25,0.,8.0,

0.,12.0,8.0,

0.25,12.0,8.0/

!-----

## Ввод параметров продольной сжимающей нагрузки

*!Файл исходных данных DATE2\_N.f90. Узловая нагрузка*

*!Тема: "Плоская рама с шарниром №1"*

*!Исходные данные подготовил: \_\_\_\_\_*

!

*!Число сжатых стержневых элементов (nen)*

*&NENA*

*nen=7/*

!

*!Расшифровка 8 позиций:*

*!1) признак (0 – ввод данных, 1 – конец ввода); 2) номер строки документа (при наличии повторов*

*!необходимо соблюдать нумерацию строк); 3) номер сжатого элемента; 4) продольная нагрузка;*

*!5)-8) блок повторов (начальный номер строки, конечный*

*!номер строки, приращения номера строки, число повторов)*

*0,1,1,1.0d00,4\*0/*

*0,2,0,0.,1,1,1,2/*

*0,4,6,2.0d00,4\*0/*

*0,5,0,0.,4,4,1,3/*

*1,2\*0,0.,4\*0/*

!

## Файлы DATE3\_DYNAMICS.f90, NODE\_FOS.f90 для динамического расчета

***!Файл исходных данных DATE3\_DYNAMICS.f90***

*!Файл исходных данных DATE2\_N.f90. Узловая нагрузка*

*!Тема: "Плоская рама с шарниром №1"*

*!Исходные данные подготовил: \_\_\_\_\_*

!

*!smin - расчетная круговая частота, с<sup>-1</sup>*

*&EVAL*

*smin=0.1007d02/*

!

*!beta - коэффициент, уточняющий решение dt=per/beta*

*&STEP*

*beta=20/*

!

*!ns - общее число шагов интегрирования*

*&SN*

*ns=1000/*

!

```

!Ввод признака закона динамического нагружения:
!ifd=1 - внезапно приложенная нагрузка, действующая в
! течение времени  $0 \leq t \leq teta$ 
!ifd=2 - линейно возрастающая нагрузка от 0 до P в
! течение времени teta. При  $t \geq teta$  нагрузка постоянна
!ifd=3 - косинусоидальный закон нагружения  $P(t)=P0*\cos(w*t)$ ,
!  $M(t)=M0*\cos(w*t)$ 
!ifd=4 - синусоидальный закон нагружения  $P(t)=P0*\sin(w*t)$ ,
!  $M(t)=M0*\sin(w*t)$ 
!ifd=5 - нагрузка в виде импульса  $S(t)=A*t*\exp(-B*t)$ ,
! где  $A=(s1*\exp(1))/t1$ ,  $B=1/t1$ 
!ifd=6 - акселерограмма  $S(t)=A*t*\exp(-B*t)*\sin(Q*t)$ ,
! где  $A=(s1*\exp(1))/t1$ ,  $B=1/t1$ , Q - частота внешнего воздействия
&PD

```

```

ifd=1/

```

```

!-----
!ifd=1
!teta - время действия внезапно приложенной нагрузки, с
&PAR1

```

```

teta=1/

```

```

!-----
!ifd=2
!beta, teta - параметры линейно возрастающей нагрузки от 0 до P.
! При  $t \geq teta$  нагрузка постоянна
&PAR2

```

```

beta=-10000.0, teta=0.7/

```

```

!-----
!ifd=3,4
!omega - угловая частота возбуждающей нагрузки,  $c^{-1}$ 
&PAR3

```

```

omega=8.80/

```

```

!-----
!ifd=5
!t1, s1 - параметры импульса  $S(t)=A*t*\exp(-B*t)$ ,
! где  $A=(s1*\exp(1))/t1$ ,  $B=1/t1$ 
&PAR4

```

```

t1=0.10, s1=2.0/

```

```

!-----
!ifd=6
!t1, s1 - параметры акселерограммы  $S(t)=A*t*\exp(-B*t)*\sin(Q*t)$ ,
! где  $A=(s1*\exp(1))/t1$ ,  $B=1/t1$ , Q - частота внешнего воздействия
&PAR5

```

```

t1=0.10, s1=2.0, g1=20.0/
!-----

```

**!Файл исходных данных NODE\_FOS.f90**

*!Файл исходных данных DATE2\_N.f90. Узловая нагрузка*

*!Тема: "Плоская рама с шарниром №1"*

*!Исходные данные подготовил: \_\_\_\_\_*

!

!Ввод числа узлов (nrd\_p), к которым приложена динамическая нагрузка

!в виде сосредоточенных сил

&NAGR\_FOS

nrd\_p=2/

!

!Ввод номеров узлов, к которым приложены динамические

!сосредоточенные силы и номера соответствующих глобальных осей

!Z1, Z2, Z3, вдоль которых эти силы действуют (массив MNRD\_P)

!Массив MNRD\_P(nrd\_p,2) вводится построчно:

!mnrд\_p(i,1) - номер i-го узла;

!mnrд\_p(i,2) - номер соответствующей глобальной оси 1 - Z1, 2 - Z2, 3 - Z3

4,3,

10,3/

!

**!Файл исходных данных NODE\_FOS.f90**

*!Файл исходных данных DATE2\_N.f90. Узловая нагрузка*

*!Тема: "Плоская рама с шарниром №1"*

*!Исходные данные подготовил: \_\_\_\_\_*

!

!nre - число узлов, в которых требуется исследовать амплитуды колебаний

&UDIN

nre=6/

!

!Ввод номеров узлов, для которых требуется вычислить амплитуды

!колебаний и номеров соответствующих глобальных осей Z1, Z2, Z3,

!вдоль которых эти колебания происходят (массив MNRE)

!Массив MNRE(nre,2) вводится построчно:

!MNRE(i,1) - номеру i-го узла;

!MNRE(i,2) - номеру соответствующей глобальной оси

4,3,

10,3/

!



**Программа ANSYS на языке APDL для  
расчета устойчивости плоской рамы**

| Команда на языке APDL   | Описание команды   | Путь выполнения команды в интерактивном режиме работы  |
|---|--|--|
| /FILENAME,plane frame   | Задание имени задачи   | Utility Menu > File > Change Jobname [plane frame]   |
| /title,plane frame  | Задание заголовка  | Utility Menu > File > Change Title [plane frame]   |
| /PREP7  | Вход в препроцессор  | ANSYS Main Menu > Preprocessor   |
| ET,1,BEAM3  | Выбор 2D стержневого КЭ BEAM3 (два перемещения и угол поворота в узле)   | Element Type > Add/Edit/Delete > Add... > Beam [2D elastic 3] > OK   |
| KEYOPT,1,6,0<br>KEYOPT,1,9,9<br>KEYOPT,1,10,0                                     | Задание свойств КЭ BEAM3   | Options > K9 = [9 intermed pts] > Close  |
| R,1,17.4e-04,572e-08,0.14,0,0,0,  | Задание геометрических характеристик поперечного сечения 1: площади (AREA), момента инерции (IZZ), высоты сечения (HEIGHT) | Real Constants > Add/Edit/Delete > [NON DEFINED] > Add... > [Type 1 BEAM3] > OK > Real Constant Set No. [1] > [AREA,IZZ,HEIGHT] > OK |
| R,2,2*17.4e-04,2*572e-08,0.14,0,0,0,  | Задание геометрических характеристик поперечного сечения 2   | [Type 1 BEAM3] > OK > Real Constant Set No. [2] > [AREA,IZZ,HEIGHT] > Close  |
| MPTEMP,1,0<br>MPDATA,EX,1,,2e11<br>MPDATA,PRXY,1,,0.24                            | Задание механических констант материала: модуля упругости EX; коэффициента Пуассона PRXY                                   | Material Props > Material Models [Structural], [Liner], [Elastic], [Isotropic] > [EX,PRXY] > OK > [X]                                |
| K,1,0,2,0,<br>K,2,0,8,0,<br>K,3,6,0,0,<br>K,4,6,8,0,<br>K,5,0,8,0,<br>K,6,12,8,0, | Задаем координаты ключевых точек 1, 2, ..., 6 модели (в метрах) рамы (в месте шарнира задаем две точки 2 и 5)              | Modeling > Creat > Keypoints > In Active CS [NPT] = [X,Y,Z]  |
| LSTR, 1, 2<br>LSTR, 3, 4<br>LSTR, 5, 4<br>LSTR, 4, 6                              | Задаем линии L1, L2, L3, L4, соединяя точки 1 и 2, 3 и 4, 5 и 4, 4 и 6   | Modeling > Creat > Lines > Lines > Straight Line [1,2] > Apply, [3,4] > Apply, [5,4] > Apply [4,6] > OK                              |
| /PNUM,KP,1<br>/PNUM,LINE,1  | Нумерация ключевых точек и линий модели на экране монитора   | Utility Menu > PlotCtrls > Numbering [KP], [LINE] = [On] > OK  |

|   |  |  |
|---|--|--|
| /L/PLOT   | Вывод на экран модели с номерами точек и линий (рис. П6.1) | Utility Menu > Plot > Lines                            |
| FLST,5,2,4,ORDE,2<br>FITEM,5,1<br>FITEM,5,-2<br>CM,_Y,LINE<br>LSEL,, , ,P51X<br>CM,_Y1,LINE<br>CMSEL,S,_Y | Выделение линий L1 и L2                                    | Meshing > Mesh Attributes > Picked Lines [1,2] > Apply |
| CMSEL,S,_Y1<br>LATT,1,1,1, , , ,<br>CMSEL,S,_Y<br>CMDELE,_Y<br>CMDELE,_Y1                                 | Задание спецификации сечения 1 для линий L1, L2            | [REAL] = [1] > OK                                      |
| FLST,5,2,4,ORDE,2<br>FITEM,5,3<br>FITEM,5,-4<br>CM,_Y,LINE<br>LSEL,, , ,P51X<br>CM,_Y1,LINE<br>CMSEL,S,_Y | Выделение линий L3 и L4                                    | Meshing > Mesh Attributes > Picked Lines [3,4] > Apply |
| CMSEL,S,_Y1<br>LATT,1,2,1, , , ,<br>CMSEL,S,_Y<br>CMDELE,_Y<br>CMDELE,_Y1                                 | Задание спецификации сечения 2 для линий L3, L4            | [REAL] = [2] > OK                                      |

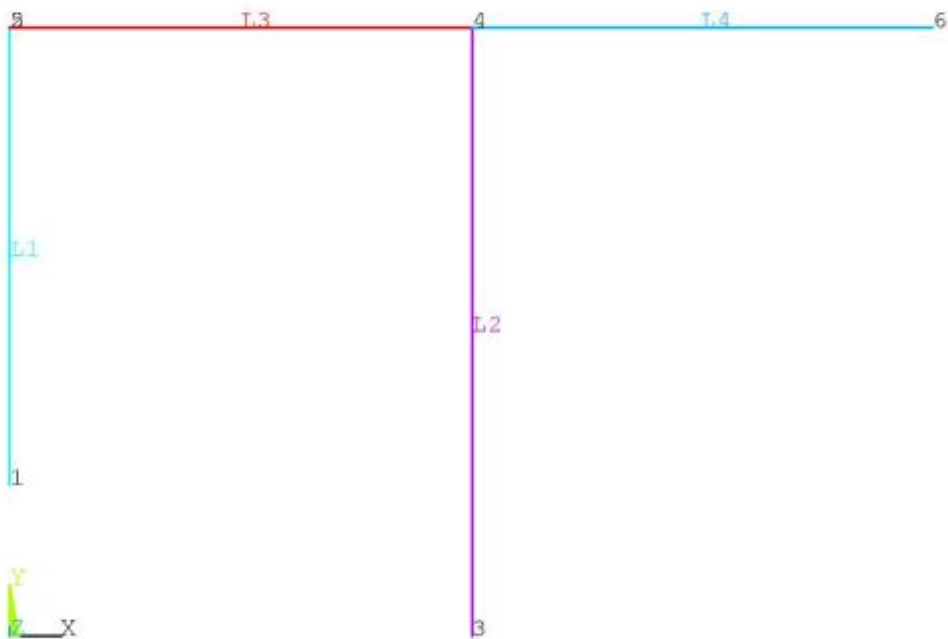


Рис. П6.1

|  |   |   |
|--|---|---|
| <pre> FLST,5,4,4,ORDE,2 FITEM,5,1 FITEM,5,-4 CM,_Y,LINE LSEL,, , ,P51X CM,_Y1,LINE CMSEL,,_Y LESIZE,_Y1,2, , , , , ,1 </pre> | <p>“Ручное” разбиение линий L1, L2, L3, L4 на конечные элементы с шагом 2 м</p> | <p>Meshing &gt; Size Cntrls &gt; Manual Size &gt; Lines &gt; Picked Lines &gt; [1,2,3,4] &gt; Apply &gt; [SIZE]=[2] &gt; OK</p> |
| <pre> FLST,2,4,4,ORDE,2 FITEM,2,1 FITEM,2,-4 LMESH,P51X </pre>   | <p>Генерация сетки с равномерным шагом разбивки</p>                             | <p>Meshing &gt; Mesh Tool &gt; [Element Attributes]=[Lines] &gt; [Mesh] &gt; [Mesh Lines] &gt; [1,2,3,4] &gt; OK</p>            |
| <pre> /PNUM,NODE,1 </pre>  | <p>Нумерация узлов КЭ на экране монитора</p>                                    | <p>Utility Men &gt; PlotCrls &gt; Numbering [NODE]=[On] &gt; OK</p>   |
| <pre> /REPLOT </pre>   | <p>Вывод на экран модели с номерами узлов КЭ (рис. П6.2)</p>                    | <p>Utility Men &gt; Plot &gt; Replot</p>  |

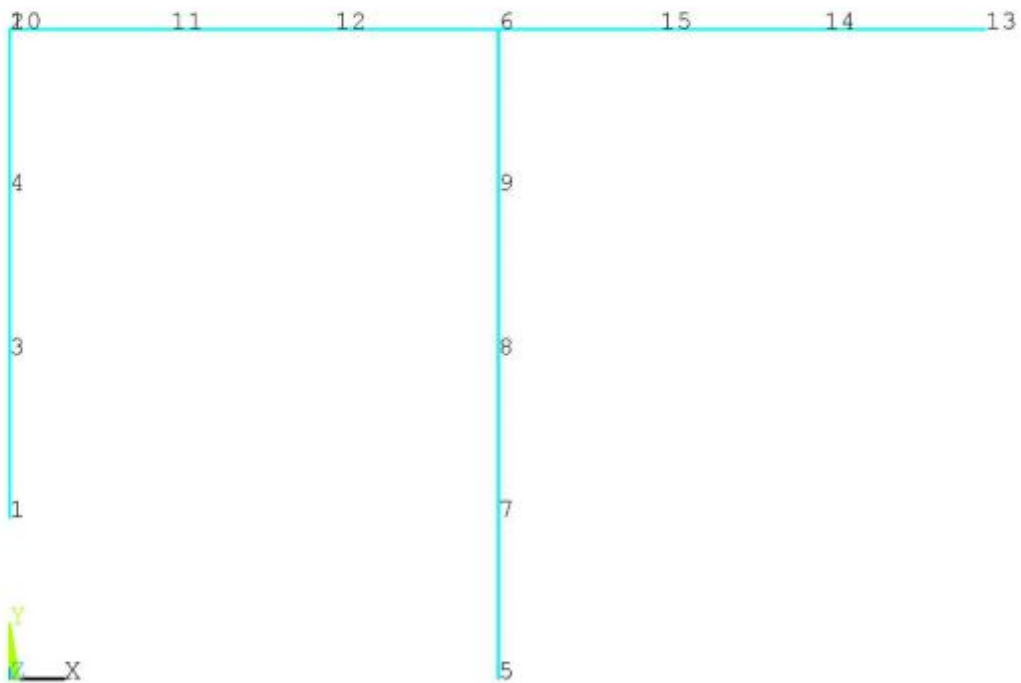


Рис. П6.2

|                                   |   |  |
|-----------------------------------|---|--|
| <pre> ESEL,S,REAL,,1 EPLOT </pre> | <p>Селектирование КЭ по признаку номера сечения 1 (рис. П6.3)</p> | <p>Utility Menu &gt; Select &gt; Entities &gt; [Elements] &gt; [By Attributes] &gt; [Real set num] = [1] &gt; [From full] &gt; [Apply] &gt; [Plot]</p> |
|-----------------------------------|---|--|

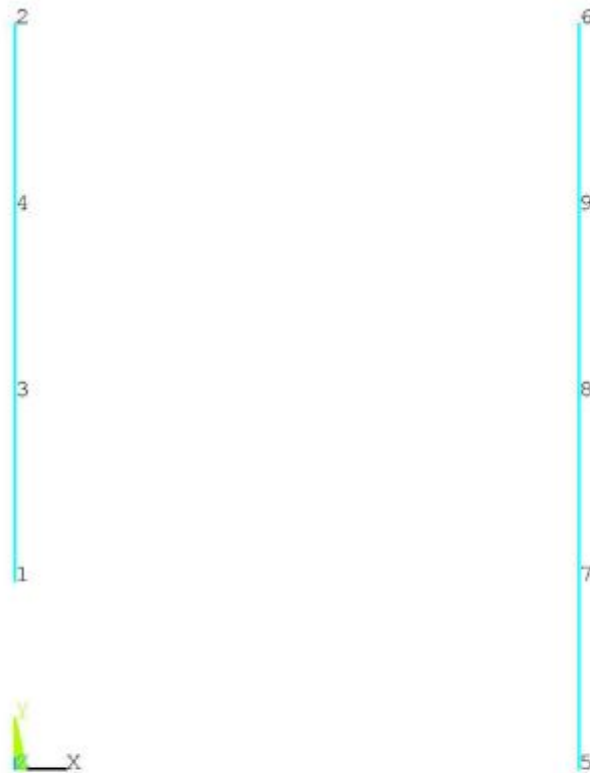


Рис. П6.3

|                         |  |   |
|-------------------------|--|---|
| ESEL,S,REAL,,2<br>EPLOT | Селектирование КЭ по признаку номера сечения 2 (рис. П6.4) | [Real set num] = [2] > [From full] > [Apply] > [Plot] |
|-------------------------|--|---|



Рис. П6.4

|  |   |  |
|--|---|--|
| ESEL,A,REAL,,1<br>EPLOT  | Селектирование КЭ по признаку номера сечения 1  | [Real set num] = [1] > [Also Select] > [Apply] > [Plot] > OK   |
| * Путем селектирования устанавливаем, что шарнирному соединению стойки (линия L1) с ригелем (линия L3) соответствуют конкурирующие (совпадающие) узлы 2 и 10 |   |  |
| FLST,4,2,1,ORDE,2<br>FITEM,4,2<br>FITEM,4,10<br>CP,1,UX,P51X<br>FLST,4,2,1,ORDE,2<br>FITEM,4,2<br>FITEM,4,10<br>CP,2,UY,P51X                                 | Связываем степени свободы UX и UY в совпадающих узлах 2 и 10 для задания неопорного шарнирного соединения | Coupling/Cegn > Couple DOFs > [Define Coupled DOFs] = [2,10] > OK > [CP]=1, [Lab]=UX > Apply > [Define Coupled DOFs] = [2,10] > OK > [CP]=2, [Lab]=UY > OK |

| Задаем граничные условия   |  |   |
|--|--|---|
| FLST,2,2,3,ORDE,2<br>FITEM,2,1<br>FITEM,2,3<br>/GO<br>DK,P51X,,,0,ALL,,,,, | Жесткая заделка в ключевых точках 1 и 3    | Loads > Define Loads > Apply > Structural > Displacement > On Keypoints > [Apply U, ROT on KPs] = [1,3] > OK > [All DOF] > Apply                |
| FLST,2,1,3,ORDE,1<br>FITEM,2,6<br>/GO<br>DK,P51X,,,0,UY,,,,,               | Шарнирно-подвижное опирание в точке 6      | [Apply U, ROT on KPs] = [6] > OK > [UY] > OK  |
| Задание единичной нагрузки в узлах конечно-элементной модели               |  |   |
| F,10,FY,-1   | Сила FY=-1 приложена в узле 10 (рис. П6.5) | Loads > Define Loads > Apply > Structural > Force/Moment On Nodes > [Apply U, ROT on Nodes] = [10] > OK > [Lab] = [UY] > [VALUE] = [-1] > Apply |
| F,6,FY,-2  | Сила FY=-2 приложена в узле 6 (рис. П6.5)  | [Apply U, ROT on Nodes] = [6] > OK > [Lab] = [UY] > [VALUE] = [-2] > OK   |

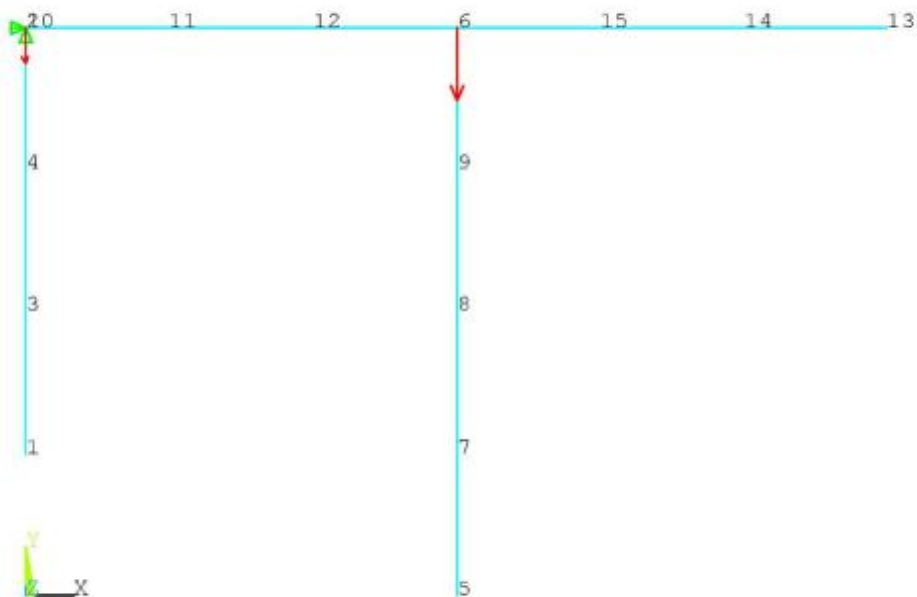


Рис. П6.5

| Часть I. Статический расчет рамы с целью определения продольных сил в КЭ |                 |                            |
|--|-----------------|----------------------------|
| /SOLU  | Вход в решатель | ANSYS Main Menu > Solution |

|   |   |   |
|---|---|---|
| ANTYPE,0  | Линейный статический расчет   | Analysis Type > New Analysis > Static > OK  |
| PSTRES,1  | Вычисление преднапряжений в раме  | Sol'n Controls > [Basic] > [Analysis Options] > [Calculate prestress effects] (Вкл.)  |
| SOLVE   | Решение системы линейных алгебраических уравнений   | Solve > Current LS  |
| FINISH  | Конец расчета   | Close   |
| <b>Часть II. Расчет устойчивости рамы в линейной постановке</b> |   |   |
| /SOLU   | Вход в решатель   | ANSYS Main Menu > Solution  |
| ANTYPE,1  | Расчет устойчивости   | Analysis Type > New Analysis > [Eigen Buckling] (Выбрать) > OK  |
| BUCOPT,SUBSP,4,0,0  | Определить первые четыре формы потери устойчивости  | Solution > Analysis Type > Analysis Options > Subspace (включено по умолчанию) > [Eigenvalue Buckling Options] > [NMODE] = [4] OK |
| SUBOPT,4,0,0,0,0,ALL  | Параметры метода итерации векторных подпространств  | [Subspace Eigenvalue Buckling] > [SUBSIZ] = [4] > OK  |
| SOLVE   | Решение обобщенной задачи о собственных значениях методом итераций векторных подпространств | Solve > Current LS  |
| FINISH  | Конец расчета   | Close   |
| <b>Просмотр результатов расчета</b>                             |   |   |
| /POST1  | Вход в постпроцессор  | ANSYS Main Menu > General Postproc  |
| SET,FIRST   | Чтение результатов для первой формы потери устойчивости рамы                                | Read Results > First Set  |
| PLDISP,2  | Вывод на экран монитора картины первой формы потери устойчивости рамы (рис. П6.6)           | Plot Results > Deformed Shape > [Plot Deformed Shape] > [Def+undef edge] (Вкл.) > OK  |
| SET,NEXT  | Чтение результатов для второй формы потери устойчивости рамы                                | Read Results > Next Set   |
| PLDISP,2  | Вывод на экран монитора картины второй формы потери устойчивости рамы (рис. П6.7)           | Plot Results > Deformed Shape > [Plot Deformed Shape] > [Def+undef edge] (Вкл.) > OK  |

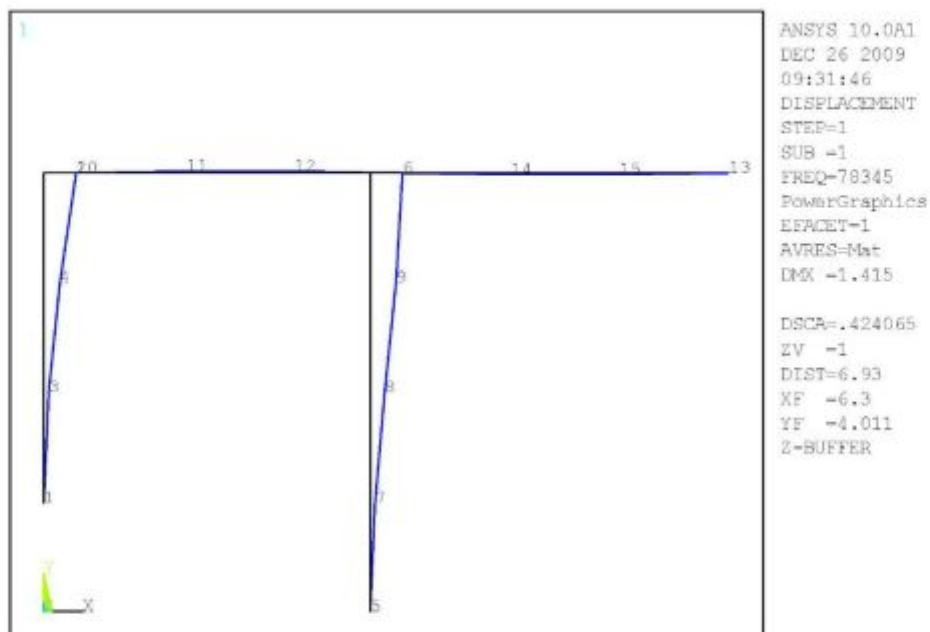


Рис. П6.6

\* Значение критической силы  $FREQ=78345$  Н

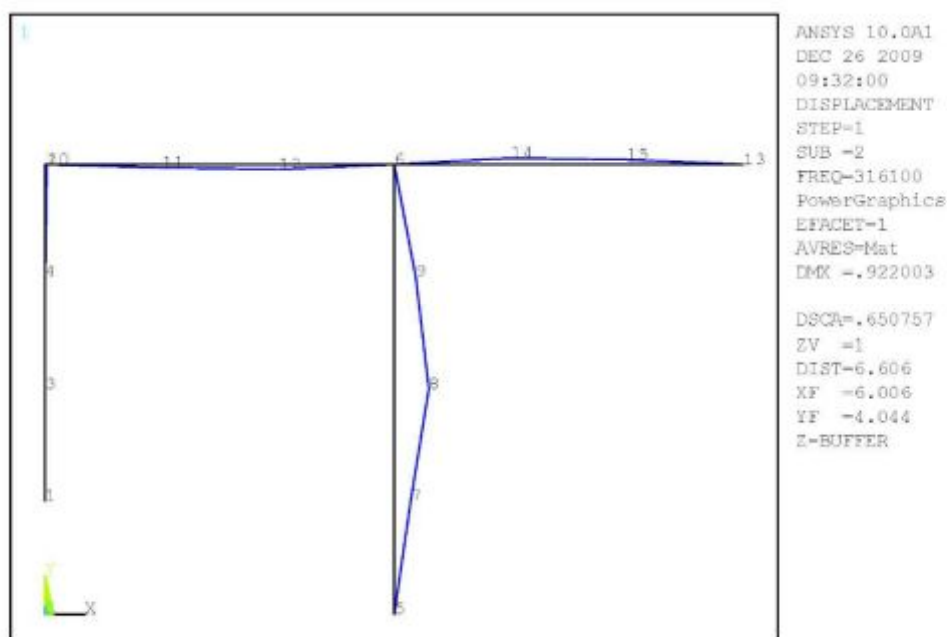


Рис. П6.7

\* Значение критической силы  $FREQ=316100$  Н

\* Вывод остальных двух форм аналогичен приведенным двум формам

Программа ANSYS на языке APDL для деформационного расчета Г-образной рамы

| Команда на языке APDL   | Описание команды  | Путь выполнения команды в интерактивном режиме работы   |
|---|---|---|
| /FILNAME,<br>Plane_frame_deform   | Задание имени задачи  | Utility Menu > File > Change Jobname Plane_frame_deform]  |
| /TITLE, Plane_frame_deform  | Задание заголовка   | Utility Menu > File > Change Title [Plane_frame_deform]   |
| /PREP7  | Вход в препроцессор   | ANSYS Main Menu > Preprocessor  |
| *SET,s_st,1.0<br>*SET,s_rg,0.5<br>*SET,N_STEP,10<br>*SET,p0,100000<br>*SET,q0,20000 | Ввод исходных параметров: s_st – шаг сетки на стойке (1,0 м); s_rg – шаг сетки на ригеле (0,5 м); p0 – амплитудное значение сосредоточенной силы (100000 Н); q0 – амплитудное значение распределенной нагрузки (2000 Н/м) | Utility Menu > Parameters > Scalar Parameters > [s_st=1.0] > Accept > [s_rg=0.5] > Accept > [p0=100000] > Accept > [q0=20000] > Close |
| ET,1,BEAM3  | Выбор 2D стержневого КЭ BEAM3 (два перемещения и угол поворота в узле)  | Element Type > Add/Edit/Delete > Add... > Beam [2D elastic 3] > OK  |
| KEYOPT,1,6,0<br>KEYOPT,1,9,9<br>KEYOPT,1,10,0                                       | Задание свойств КЭ BEAM3  | Options > K9 [9 intermed pts] > Close   |
| R,1,17.4e-04,572e-08,0.14,0,0,0,  | Задание геометрических характеристик поперечного сечения 1: площади (AREA), момента инерции (IZZ), высоты сечения (HEIGHT)  | Real Constants > Add/Edit/Delete > [NON DEFINED] > Add... > [Type 1 BEAM3] > OK > Real Constant Set No. [1] > [AREA,IZZ,HEIGHT] > OK  |
| R,2,23.4e-04,1290e-08,0.18,0,0,0,   | Задание геометрических характеристик поперечного сечения 2  | [Type 1 BEAM3] > OK > Real Constant Set No. [2] > [AREA,IZZ,HEIGHT] > Close   |
| MPTEMP,1,0<br>MPDATA,EX,1,,2e11<br>MPDATA,PRXY,1,,0.24                              | Задание механических констант материала: модуля упругости EX; коэффициента Пуассона PRXY  | Material Props > Material Models [Structural], [Liner], [Elastic], [Isotropic] > [EX,PRXY] > OK > [x]                                 |
| K,1,0,0,0,<br>K,2,0,8,0,<br>K,3,4,8,0,  | Задаем координаты ключевых точек 1, 2, 3 модели   | Modeling > Creat > Keypoints > In Active CS [NPT], [X,Y,Z]  |
| LSTR, 1, 2<br>LSTR, 2, 3  | Задаем линии L1, L2, соединяя точки 1 и 2, 2 и 3  | Modeling > Creat > Lines > Lines > Straight Line [1,2] > Apply, [2,3] > OK  |



|   |  |   |
|---|--|---|
| /PNUM,KP,1<br>/PNUM,LINE,1  | Нумерация ключевых точек и линий модели на экране монитора | Utility Menu > PlotCtrls > Numbering [KP], [LINE] = [On] > OK |
| /L PLOT   | Вывод на экран модели с номерами точек и линий (рис. П7.1) | Utility Menu > Plot > Lines                                   |
| CM,_Y,LINE<br>LSEL, , , , 1<br>CM,_Y1,LINE<br>CMSEL,S,_Y                  | Выделение линий L1   | Meshing > Mesh Attributes > Picked Lines [1] > Apply          |
| CMSEL,S,_Y1<br>LATT,1,1,1, , , ,<br>CMSEL,S,_Y<br>CMDELE,_Y<br>CMDELE,_Y1 | Задание спецификации сечения 1 для линий L1                | [REAL] = [1] > OK   |
| CM,_Y,LINE<br>LSEL, , , , 2<br>CM,_Y1,LINE<br>CMSEL,S,_Y                  | Выделение линий L2   | Meshing > Mesh Attributes > Picked Lines [2] > Apply          |
| CMSEL,S,_Y1<br>LATT,1,2,1, , , ,<br>CMSEL,S,_Y<br>CMDELE,_Y<br>CMDELE,_Y1 | Задание спецификации сечения 2 для линий L2                | [REAL] = [2] > OK   |



Рис. П7.1

|   |   |  |
|---|---|--|
| <pre> FLST,5,1,4,ORDE,1 FITEM,5,1 CM,_Y,LINE LSEL,,,P51X CM,_Y1,LINE CMSEL,,_Y LESIZE,_Y1,s_st,,,,,1 </pre> | <p>“Ручное” разбиение линии L1 на конечные элементы с шагом 1,0 м</p> | <p>Meshing &gt; Size Cntrl &gt; Manual Size &gt; Lines &gt; Picked Lines &gt; [1] &gt; Apply &gt; [SIZE]=[1.0] &gt; OK</p> |
| <pre> FLST,5,1,4,ORDE,1 FITEM,5,2 CM,_Y,LINE LSEL,,,P51X CM,_Y1,LINE CMSEL,,_Y LESIZE,_Y1,s_rg,,,,,1 </pre> | <p>“Ручное” разбиение линии L2 на конечные элементы с шагом 0,5 м</p> | <p>Meshing &gt; Size Cntrl &gt; Manual Size &gt; Lines &gt; Picked Lines &gt; [2] &gt; Apply &gt; [SIZE]=[0.5] &gt; OK</p> |
| <pre> FLST,2,2,4,ORDE,2 FITEM,2,1 FITEM,2,-2 LMESH,P51X </pre>  | <p>Генерация сетки с неравномерным шагом</p>                          | <p>Meshing &gt; Mesh Tool &gt; [Element Attributes]=[Lines] &gt; [Mesh] &gt; [Mesh Lines] &gt; [1,2] &gt; OK</p>           |
| <pre> /PNUM,NODE,1 </pre>   | <p>Нумерация узлов КЭ на экране монитора</p>                          | <p>Utility Men &gt; PlotCtrls &gt; Numbering [NODE]=[On] &gt; OK</p>   |
| <pre> /REPLOT </pre>  | <p>Вывод на экран модели с номерами узлов КЭ (рис. П7.2)</p>          | <p>Utility Men &gt; Plot &gt; Replot</p>   |

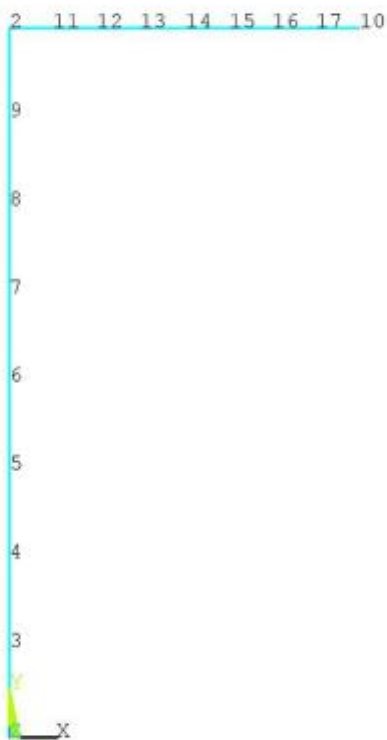


Рис. П7.2

| Задаем граничные условия   |  |  |
|--|--|--|
| FLST,2,2,3,ORDE,2<br>FITEM,2,1<br>FITEM,2,3<br>/GO<br>DK,P51X,,,0,ALL,,,,,                                       | Жесткая заделка в ключевых точках 1 и 3  | Loads > Define Loads > Apply > Structural > Displacement > On Keypoints > [Apply U, ROT on KPs] = [1,3] > OK > [All DOF] > Apply     |
| /SOLU  | Вход в процессор решения   | ANSYS Main Menu > Solution   |
| ANTYPE,0   | Линейный статический расчет  | Analysis Type > New Analysis > Static > OK   |
| NLGEOM,1   | Учет больших перемещений   | Sol'n Controls > [Solution Controls] > [Basic] > [Analysis Option]=[Large Displacement Static] > OK                                  |
| OUTPR,ALL,ALL,   | Вывод результатов расчета на каждом временном шаге                                     | Load Step Opts > Output Ctrl's > Solu Printout > [OUTPR] = [All items], [FREQ] = [Every substep] > OK                                |
| NROPT,FULL, ,<br>LUMPM,0<br>EQSLV, , ,0,<br>PRECISION,0<br>MSAVE,0<br>PIVCHECK,1<br>SSTIF<br>PSTRES<br>TOFFST,0, | Включение полной процедуры метода Ньютона-Рафсона                                      | Abridged Menu: Analysis Options > [Static or Steady-State Analysis] > [NLGEOM]=[On], [NROPT]=[Full N-R] > OK                         |
| *DO,I_STEP,1,N_STEP<br>TIME,I_STEP<br>p_step=p0*(I_STEP/N_STEP)**0.5<br>q_step=q0*(I_STEP/N_STEP)**0.5           | Цикл по шагам нагружения   | Задается только из командной строки  |
| FLST,2,1,3,ORDE,1<br>FITEM,2,2<br>/GO<br>F,P51X,FY,-p_step   | Силу FY – -p_step прикладываем к точке 2   | Define Loads > Apply > Structural > Force/Moment > On Keypoints > [2] > OK > [Apply F/M on KPs] > [Lab]=[FY], [VALUE]= -p_step > OK  |
| LSEL,S,LINE,,2,2<br>ESLL,S<br>SFBEAM,ALL,1,PRES, q_step,<br>q_step ,,,,,   | Распределенную нагрузку q = q_step прикладываем к элементам, расположенным на линии L2 | Define Loads > Apply > Structural > Pressure > On Beams > [9,10,11,12,13,14,15,16] > OK > [Apply PRES on Bems] > [VALI]= q_step > OK |
| ALLSEL,ALL   | Выделяем все   | Utility Menu > Select > Everything   |
| SOLVE  | Решение системы нелинейных уравнений методом Ньютона-Рафсона                           | Solve > Current LS   |
| *ENDDO   | Конец цикла I_STEP   | Командная строка   |
| FINISH   | Завершение работы процессора SOLU  | Close  |

| Просмотр результатов расчета         |  |                                    |
|--------------------------------------|--|------------------------------------|
| /POST1                               | Вход в постпроцессор                           | ANSYS Main Menu > General Postproc |
| Построение эпюры изгибающих моментов |  |                                    |
| ETABLE,MI,SMISC,6                    | Таблица значений MMOMZ в узле i. Присвоено MI  | Командная строка                   |
| ETABLE,MJ,SMISC,66                   | Таблица значений MMOMZ в узле j. Присвоено MJ  | Командная строка                   |
| PLLS,MI,MJ                           | Графический вывод эпюры (рис. П7.3)            | Командная строка                   |
| Построение эпюры поперечных сил      |  |                                    |
| ETABLE,QI,SMISC,2                    | Таблица значений MFOR Y в узле i. Присвоено QI | Командная строка                   |
| ETABLE,QJ,SMISC,62                   | Таблица значений MFOR Y в узле j. Присвоено QJ | Командная строка                   |
| PLLS,QI,QJ                           | Графический вывод эпюры (рис. П7.4)            | Командная строка                   |
| Построение эпюры продольных сил      |  |                                    |
| ETABLE,NI,SMISC,1                    | Таблица значений MFOR Y в узле i. Присвоено NI | Командная строка                   |
| ETABLE,NJ,SMISC,61                   | Таблица значений MFOR Y в узле j. Присвоено NJ | Командная строка                   |
| PLLS,NI,NJ                           | Графический вывод эпюры (рис. П7.5)            | Командная строка                   |

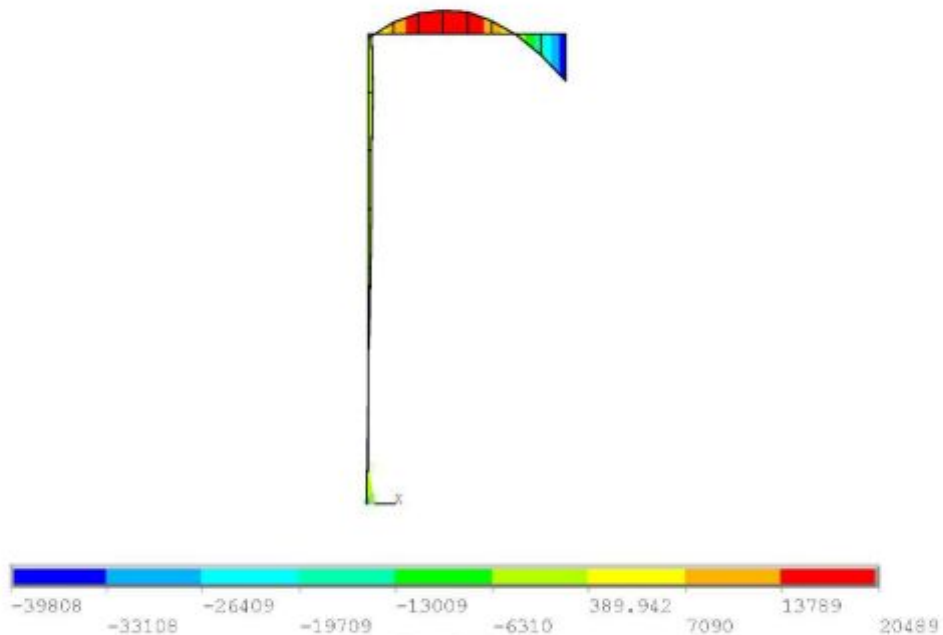


Рис. П.7.3

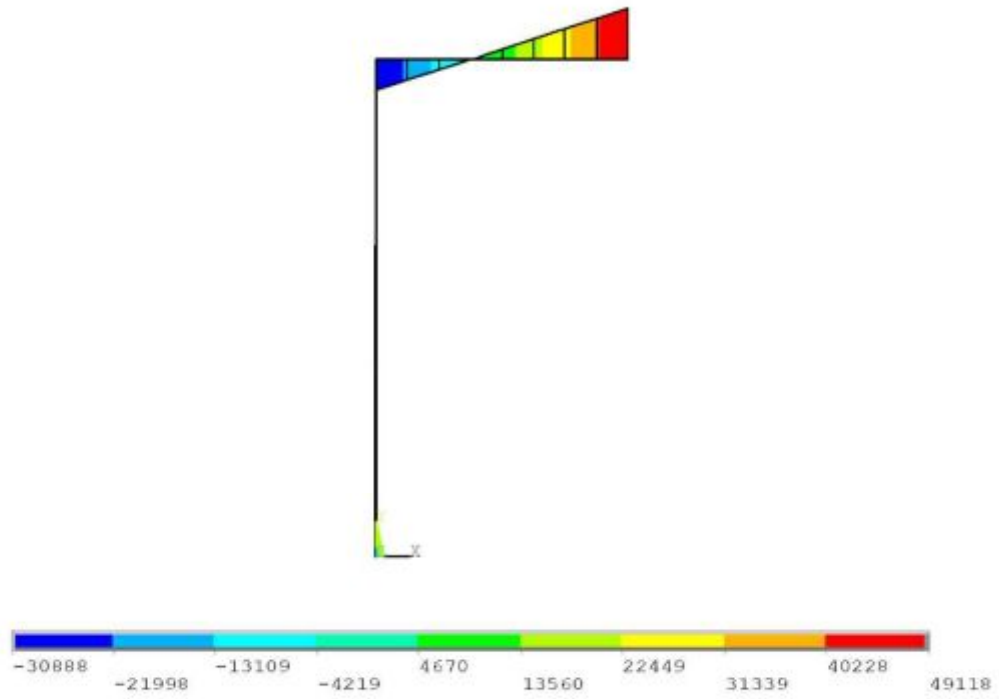


Рис. П.7.4

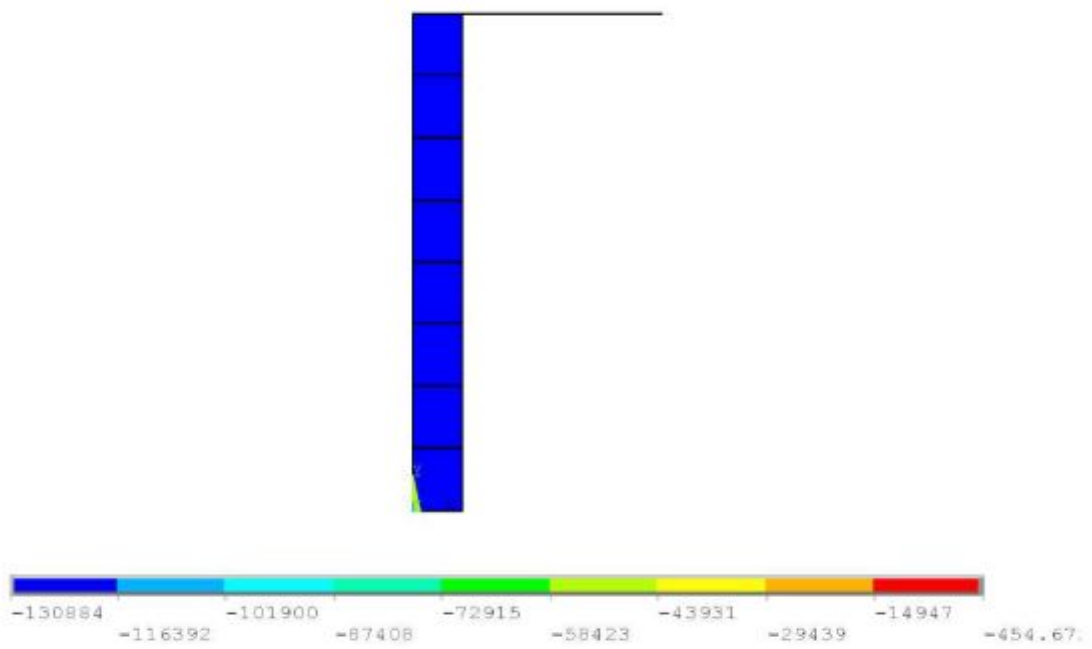


Рис. П.7.5

**Программа на языке Фортран  
для определения собственных значений**

```

-----
! Решение обобщенной проблемы собственных значений
!      [r]*{y}=ra*[m]*{y}
! модифицированным векторным методом обратных итераций
! Обозначения:
! n    - порядок системы уравнений
! kmax - максимальное число итераций
! ra   - начальный сдвиг собственного значения
! r(n,n) - матрица реакций
! m(n)  - диагональная матрица масс (одномерный массив)
! ra   - собственное значение
! y(n)  - собственный вектор
-----
program Reley_method
!ms$real:8 ! Расчеты выполняются с удвоенной точностью
integer (4),parameter::ncresults=250
character(ncresults)::ru_doswin
integer(4),parameter::n=4, kmax=100
integer(4)::i,k
integer(4)::lr(n),mr(n)
real r(n,n),m(n),t(n,n)
real xa(n),ya(n),yb(n),det,ra,rb,eps,ej,priz
open(unit=4,file='Exit_Reley_method.f90')
!Ввод матрицы реакций r(n,n) по столбцам
data r/0.011719,  0.0,  -0.046875,  0.0,  &
      0.0,      3.0,   3.0,      0.0,  &
      -0.046875, 3.0,  4.1875,   0.50, &
      0.0,      0.0,   0.50,   1.0/, &
m/1.0190d03,1.0190d03,0.0,0.0/, & ! ввод диагональной матрицы масс
m(n)
xa/n*1.0d00/, & ! ввод начального вектора xa(n)
ra/0.0/, & ! начальный сдвиг
eps/1.0d-08/ & ! малое число из условия окончания
итераций
ej/2.0d07/ ! изгибная жесткость
r=ej*r ! умножение матрицы на скаляр
! Контрольная печать исходных данных
write(4,*) 'r(n,n)'

```

```

write(4,4444) ((r(i,j),j=1,n),i=1,n)
write(4,*) 'm(n)'
write(4,4444) (m(i),i=1,n)
4444 format(1x,4d10.4)
write(4,'(///)')
write(4,*) 'ra=',ra
write(4,'(///)')
ya=xa*m      ! вычисление вектора ya
do k=1,kmax ! цикл по итерациям
write(*,*) 'k=',k
write(4,*) 'k=',k
t=r
do i=1,n
t(i,i)=t(i,i)-ra*m(i)
end do ! i
call dminv(t,n,det,lr,mr) ! обращение матрицы [t]
call pmum(t,ya,xa,n,n,1) ! вычисление вектора xa=[t]*ya
yb=m*xa ! вычисление вектора yb
!
rb=(dot_product(xa,ya)/dot_product(xa,yb))+ra ! соотношение Релея
write(4,*) 'rb=',rb
!
if(k>1) then
priz=dabs(rb-ra)/rb ! из условия окончания итераций
write(4,*) 'priz=',priz
if(priz<=eps) exit ! выход из цикла do k=1,kmax
!
if(k>=kmax) then
print*,trim(ru_doswin(
'Превышено максимальное число итераций', .false.)) &
stop
end if ! k>kmax
end if ! k>1
!
ya=yb/dsqrt(dot_product(xa,yb))
write(4,*) 'ya'
write(4,'(4d12.6)') ya
ra=rb
end do ! k
!
!Печать результатов
write(4,'(///)')
write(4,'(19hРезультаты расчетов)')
write(4,1100) k

```

```

1100 format(1x,16hЧисло итераций ,i4)
      write(4,1122) rb
1122 format(1x,/20hСобственное значение,3x,d12.6)
      write(4,'(/18hСобственный вектор)')
      write(4,1133) (ya(i),i=1,n)
1133 format(1x,5d12.6)
      !
      print*,trim(ru_doswin(
      'Программа Reley_method завершена',.false.)) &
      !
      end program Reley_method

```

```

!-----
! Обращение квадратной матрицы [a(n,n)]
! Результат записывается на месте исходной матрицы [a]
! d - детерминант матрицы [a]
! l(n),m(n) - рабочие целочисленные массивы
!-----

subroutine dminv(a,n,d,l,m)
real(8) a(1),d,hold,biga
integer(4):: l(1),m(1)
!
integer (4),parameter::ncresults=250
character(ncresults)::ru_doswin
!
d=1.0d00
nk=-n
do k=1,n
nk=nk+n
l(k)=k
m(k)=k
kk=nk+k
biga=a(kk)
do j=k,n
iz=n*(j-1)
do i=k,n
ij=iz+i
if(dabs(biga)-dabs(a(ij))<0.0) then
biga=a(ij)
l(k)=i
m(k)=j
end if ! dabs(biga)-dabs(a(ij))

```



```

end do ! i
end do ! j
j=l(k)
if((j-k)>0) then
ki=k-n
do i=1,n
ki=ki+n
hold=-a(ki)
ji=ki-k+j
a(ki)=a(ji)
a(ji)=hold
end do ! i
end if ! (j-k)
i=m(k)
if((i-k)>0) then
jp=n*(i-1)
do j=1,n
jk=nk+j
ji=jp+j
hold=-a(jk)
a(jk)=a(ji)
a(ji)=hold
end do ! j
end if ! (i-k)
if(biga==0.0) then
print*,trim(ru_doswin('Ошибка в процедуре dminv (нулевой диагональный
элемент)' &
, false.))
d=0.0
return
end if ! biga
do i=1,n
if((i-k)/=0) then
ik=nk+i
a(ik)=a(ik)/(-biga)
end if ! (i-k)
end do ! i
do i=1,n
ik=nk+i
hold=a(ik)
ij=i-n
do j=1,n
ij=ij+n
if((i-k)/=0 .and. (j-k)/=0) then

```

```

kj=ij-i+k
a(ij)=hold*a(kj)+a(ij)
end if ! (i-k)/=0 .and. (j-k)/=0
end do ! j
end do ! i
kj=k-n
do j=1,n
kj=kj+n
if((j-k)/=0) then
a(kj)=a(kj)/biga
end if ! (j-k)
end do ! j
d=d*biga
a(kk)=1.0d00/biga
end do ! k
k=n
do while (k/=1)
k=k-1
i=l(k)
if((i-k)>0) then
jq=n*(k-1)
jr=n*(i-1)
do j=1,n
jk=jq+j
hold=a(jk)
ji=jr+j
a(jk)=-a(ji)
a(ji)=hold
end do ! j
end if ! (i-k)
j=m(k)
if((j-k)>0) then
ki=k-n
do i=1,n
ki=ki+n
hold=a(ki)
ji=ki-k+j
a(ki)=-a(ji)
a(ji)=hold
end do ! i
end if ! (j-k)
end do ! (k/=1)
return
end

```

```

!-----
!Перемножение двух матриц
! C(M,L)=A(M,N)*B(N,L)
!-----
!
subroutine pmum(a,b,c,m,n,l)
real(8):: a(1),b(1),c(1),d
!Цикл по строкам матрицы C
do i=1,m
  im=i-m
  jn=-n
  ij=im
!Цикл по столбцам матрицы C
  do j=1,l
    ij=ij+m
    jn=jn+n
    ik=im
    d=0.0
!Процедура перемножения элементов A и B
    do k=1,n
      ik=ik+m
      kj=jn+k
      d=d+a(ik)*b(kj)
    end do ! k
    c(ij)=d
  end do ! j
end do ! i
return
end

```

```

!-----
! Функция вывода сообщений на русском языке в DOS окно
!-----
function ru_doswin(string,dos_win)
integer(4),parameter::ncresults=250
character(ncresults)::ru_doswin
character(*),intent(in)::string

```

```

logical(4),intent(in)::dos_win
integer(2)::i,dos_win_code,dif
ru_doswin=string
do i=1,len_trim(ru_doswin)
dos_win_code=iachar(ru_doswin(i:i))
dif=0
if(dos_win)then
select case(dos_win_code)
case(128:175)
dif=64
case(224:239)
dif=16
end select
else
select case(dos_win_code)
case(192:239)
dif=-64
case(240:255)
dif=-16
end select
end if
if(dif/=0)ru_doswin(i:i)=char(dos_win_code+dif)
end do
end function ru_doswin
!-----

```

**Программа ANSYS на языке APDL для  
расчета двухшарнирной балки на вынужденные колебания**

| Команда на языке APDL   | Описание команды   | Путь выполнения команды в интерактивном режиме работы   |
|---|--|---|
| /FILNAME, Plane_beam_dinam  | Задание имени задачи   | Utility Menu > File > Change Jobname [Plane_beam_dinam]   |
| /TITLE, Plane_beam_dinam  | Задание заголовка  | Utility Menu > File > Change Title [Plane_beam_dinam]   |
| /PREP7  | Вход в препроцессор  | ANSYS Main Menu > Preprocessor  |
| <b>Часть I. Модальный анализ</b>  |  |   |
| n_fe=12   | Число конечных элементов, на которое разбивается балка   | Utility Menu > Parameters > Scalar Parameters > [n_fe=12] > Close   |
| ET,1,BEAM3  | Выбор 2D стержневого КЭ BEAM3 (два перемещения и угол поворота в узле)   | Element Type > Add/Edit/Delete > Add... > Beam [2D elastic 3] > OK  |
| KEYOPT,1,9,9  | Задание свойств КЭ BEAM3   | Options > K9 [9 intermed pts] > Close   |
| R,1,46.5e-04,7080e-08,0.3, , , ,  | Задание геометрических характеристик поперечного сечения 1: площади (AREA), момента инерции (IZZ), высоты сечения (HEIGHT) | Real Constants > Add/Edit/Delete > [NON DEFIND] > Add... > [Type 1 BEAM3] > OK > Real Constant Set No. [1] > [AREA,IZZ,HEIGHT] > OK |
| MPTEMP,1,0<br>MPDATA,EX,1,,2e11<br>MPDATA,PRXY,1,,0.24<br>MPDATA,DENS,1,,7800 | Задание механических констант материала: модуля упругости EX; коэффициента Пуассона PRXY; плотности DENS                   | Material Props > Material Models [Structural], [Liner], [Elastic], [Isotropic] > [EX,PRXY, DENS] > OK > [x]                         |
| K,1,0,0,0,<br>K,2,6,0,0,  | Задаем координаты ключевых точек 1, 2 модели   | Modeling > Creat > Keypoints > In Active CS [NPT], [X,Y,Z]  |
| LSTR, 1, 2  | Задаем линию L1, соединяя точки 1 и 2  | Modeling > Creat > Lines > Lines > Straight Line [1,2] > Apply, [2,3] > OK  |
| CM,_Y,LINE<br>LSEL, , , , 1<br>CM,_Y1,LINE<br>CMSEL,S,_Y                      | Выделение линий L1   | Meshing > Mesh Attributes > Picked Lines [1] > Apply  |
| CMSEL,S,_Y1<br>LATT,1,1,1, , , ,<br>CMSEL,S,_Y<br>CMDELE,_Y<br>CMDELE,_Y1     | Задание спецификации сечения 1 для линий L1  | REAL] = [1] > OK  |

|  |  |  |
|--|--|--|
| FLST,5,1,4,ORDE,1<br>FITEM,5,1<br>CM,_Y,LINE<br>LSEL,,,P51X<br>CM,_Y1,LINE<br>CMSEL,,_Y<br>LESIZE,_Y1,,,n_fe,,,,,1 | “Ручное” разбиение линии L1 на n_fe конечных элементов | Meshing > Size Cntrls > Manual Size > Lines > Picked Lines > [1] > Apply > [NDIV]=[1.0] > OK |
| LMESH, 1   | Генерация сетки  | Meshing > Mesh Tool > [Element Attributes]=[Lines] > [Mesh] > [Mesh Lines] > [1] > OK        |
| /PNUM,NODE,1   | Нумерация узлов КЭ на экране монитора                  | Utility Men > PlotCtrls > Numbering [NODE]=[On] > OK   |
| /REPLOT  | Вывод на экран модели с номерами узлов КЭ (рис. П8.1)  | Utility Men > Plot > Replot  |



Рис. П8.1

|   |                                       |  |
|---|---------------------------------------|--|
| FLST,2,1,3,ORDE,1<br>FITEM,2,1<br>/GO<br>DK,P51X,,,,,0,UX,UY,,,,,<br>FLST,2,1,3,ORDE,1<br>FITEM,2,2<br>/GO<br>DK,P51X,,,,,0,UY,,,,,<br>FINISH | Задаем граничные условия (рис. П8.2)  | Loads > Define Loads > Apply > Structural > Displacement > On Keypoints > [Apply U, ROT on KPs] = [1] > OK > [UX,UY] > Apply; [Apply U, ROT on KPs] = [2] > OK > [UY] > OK |
| FINISH  | Завершение работы препроцессора PREP7 | Командная строка   |



Рис. П.8.2

|   |   |   |
|---|---|---|
| /SOLU   | Вход в процессор решения                            | ANSYS Main Menu > Solution  |
| ANTYPE,2                                      | Модальный анализ                                    | Analysis Type > New Analysis > Modal > OK   |
| MODOPT,SUBSP,4<br>EQSLV,FRONT<br>MXPAND,4,,,0 | Выбор метода решения и количества собственных форм. | Analysis Options > [Modal Analysis] > [MODOPT] = [Subspace], [4], [MXPAND], [NMODE] = [4] > OK > OK |
| SOLVE   | Решение задачи на собственные значения              | Solve > Current LS  |
| FINISH  | Завершение работы процессора SOLU                   | Close   |

| Просмотр результатов расчета |  |   |
|------------------------------|--|---|
| /POST1                       | Вход в постпроцессор   | ANSYS Main Menu > General Postproc  |
| *GET,FREQ_1,MODE,1,FREQ_1    | Присвоить значение частоты основного тона переменной FREQ_1                | Командная строка  |
| SET,FIRST<br>PLDISP,2        | Вывод на экран монитора первой формы свободных колебаний балки (рис. П8.3) | Read Reslts > First Set; Plot Results > Deformed Shape > [PLDISP] = [Def+undef edge] > OK |



Рис. П8.3

\* Значение частоты основного (первого) тона FREQ=27,206 Гц

|                      |  |  |
|----------------------|--|--|
| SET,NEXT<br>PLDISP,2 | Вывод на экран монитора второй формы свободных колебаний балки (рис. П8.4) | Read Reslts > Next Set; Plot Results > Deformed Shape > [PLDISP] = [Def+undef edge] > OK |
|----------------------|--|--|



Рис. П8.4

\* Значение частоты второго тона FREQ=108,159 Гц

|                      |   |  |
|----------------------|---|--|
| SET,NEXT<br>PLDISP,2 | Вывод на экран монитора третьей формы свободных колебаний балки (рис. П8.5) | Read Reslts > Next Set; Plot Results > Deformed Shape > [PLDISP] = [Def+undef edge] > OK |
|----------------------|---|--|



Рис. П8.5

|  |  |                  |
|--|--|------------------|
| * Значение частоты третьего тона FREQ=211,14 Гц (продольные колебания) |  |                  |
| FINISH   | Завершение работы постпроцессора POST1 | Командная строка |

| Часть II. Расчет балки на вынужденные колебания  |  |  |
|--|--|--|
| /PREP7   | Вход в препроцессор  | ANSYS Main Menu > Preprocessor   |
| Pi=4*ATAN(1)<br>w=2*Pi*FREQ_1<br>Q=3.2*w<br>F0=10000<br>N=400<br>n_FY=NODE(3,0,0)                              | Ввод исходных параметров:<br>w – частота основного тона (с <sup>-1</sup> ); Q – частота внешнего возбуждения (с <sup>-1</sup> ); F0 – амплитудное значение силы (Н); N – число шагов нагружения; n_FY – номер узла, к которому прикладывается сила | Командная строка   |
| FINISH   | Завершение работы препроцессора PREP7  | Командная строка   |
| /SOLU  | Вход в процессор решения   | ANSYS Main Menu > Solution   |
| ANTYPE,4<br>TPNOPT,FULL  | Нестационарное нагружение. Полный анализ   | New Analysis > [Transient] > OK > [TRNOPT] = [FULL]  |
| TIMINT,1<br>TINTP, ,0.25250625,0.505, , , ,  | Решение методом Ньюмарка. Параметры численного интегрирования  | [Unabridgen Menu]; Load Step Opts > Time/Frequenc > Time Integration > Newmark Parameters > [TIMINT] (Вкл.) > [TINTP] > [ALPHA] = [0.25250625]; [DELTA] = [0.505] > OK |
| OUTPR,BASIC,ALL,   | Контроль результатов на каждом шаге  | Load Step Opts > Output Ctrl > Solu Printout > [OUTPR] = [Every substep] > OK  |
| OUTRES,ALL,ALL,  | Вывод результатов на каждом шаге   | Load Step Opts > Output Ctrl > Db/Results File > [OUTRES] = [Every substep] > OK   |
| KBC,0  | Нагружение плавное   | Sol'n Controls > [Transient]; [Full Transient Options]; [Ramped loading] (Вкл.)  |
| IC,ALL,ALL,0,0,  | Задание начальных условий ко всем узлам (ALL), на все степени свободы (ALL) - начальные перемещения 0 начальная скорость 0   | Define Loads > Apply > Initial Condit'n > Define > [IC]; [Lab] = [All DOF]; [VALUE] = 0; [VALUE2] = 0 > OK   |
| *DO,I_STEP,1,N,1 AUTOTS,0<br>TIME,I_STEP/20<br>FOST=F0*SIN(Q*(I_STEP/20))<br>F,n_FY,FY,FOST<br>SOLVE<br>*ENDDO | Цикл по шагам нагружения   | Задается только из командной строки  |
| FINISH   | Конец расчета  | Close  |



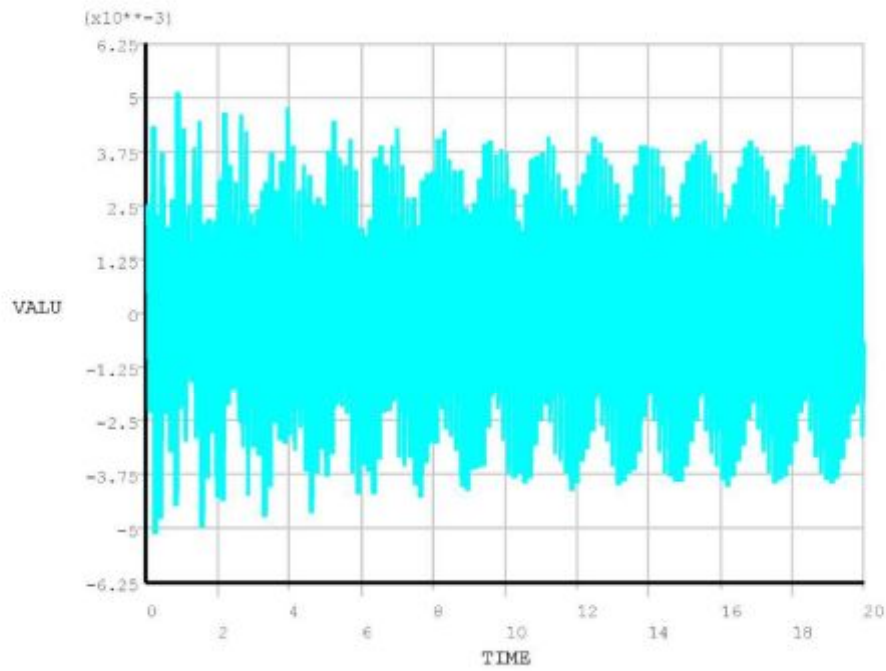


Рис. П8.6

| /POST26   | Вход в постпроцессор<br>POST26   | ANSYS Main Menu > Time<br>Hist Postpro  |
|---|--|---|
| <pre>FILE,'file','rst','!' /UI,COLL,1 NUMVAR,200 SOLU,191,NCMIT STORE,MERGE FILLDATA,191,,,,1,1 REALVAR,191,191 NSOL,2,8,U,Y,UY_2 STORE,MERGE XVAR,1 PLVAR,2,</pre> | <p>Вывод на экран монитора графика колебаний точки балки, расположенной посередине пролета (рис. П8.6)</p> | <p>[Time History Variables - file.rst]; [Add Data] . [Y - Component of displacement] &gt; OK &gt; [Node for Data] = [8] &gt; OK &gt; [Graph Data]</p> |