

**ОПД.Р.03 СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА**  
**СПЕЦИАЛЬНЫЙ КУРС**  
**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**  
Учебное пособие

В учебном пособии изложен новый метод расчета статически определимых и статически неопределимых стержневых и пластинчатых систем на статические и динамические нагрузки, а также на устойчивость. Приведено большое количество характерных типовых задач и примеров с краткими указаниями к их решению. Значительное место уделено математической постановке задач и их решению с помощью персональных компьютеров.

Для студентов, аспирантов и преподавателей высших технических учебных заведений, специалистов в области механики деформируемого твердого тела и строительной механики.

## **РАЗДЕЛ I. СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ**

В данном разделе рассматриваются вопросы теории метода граничных элементов (МГЭ) и его практического применения для решения задач статики, динамики и устойчивости стержневых систем. Основное внимание уделено изложению алгоритма метода, математическим моделям расчетных схем и реализации разрешающих соотношений на персональных компьютерах.

### **ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МГЭ В ЗАДАЧАХ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ**

Стержень, как основной элемент стержневой системы, является одномерным континуумом. В этой связи процессы воздействия на него (механические, тепловые, электрические) в большинстве случаев описываются сравнительно простыми дифференциальными уравнениями, для которых можно получить аналитическое решение. Теория решений дифференциальных уравнений позволяет учесть особенности геометрии и нагрузки стержня. Особенности в виде сосредоточенных сил, разрывов нагрузки и геометрии 1-го рода можно описать с помощью обобщенных функций. Представим основные свойства обобщенных функций.

### 1.1. ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

Из обобщенных функций в механике получили распространение единичная функция Хевисайда  $H(x - x_0)$  и дельта – функция Дирака  $\delta(x - x_0)$ . Формально эти функции могут быть представлены следующим образом (рис. 1.1)

$$H(x - x_0) = \begin{cases} 1, & x \geq x_0; \\ 0, & x < x_0; \end{cases} \quad \delta(x - x_0) = \begin{cases} \infty, & x = x_0; \\ 0, & x \neq x_0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Между обобщенными функциями существует простая связь вида

$$\frac{dH(x - x_0)}{dx} = \delta(x - x_0), \quad \int_{-\infty}^x \delta(x - x_0) dx = H(x - x_0). \quad (1.2)$$

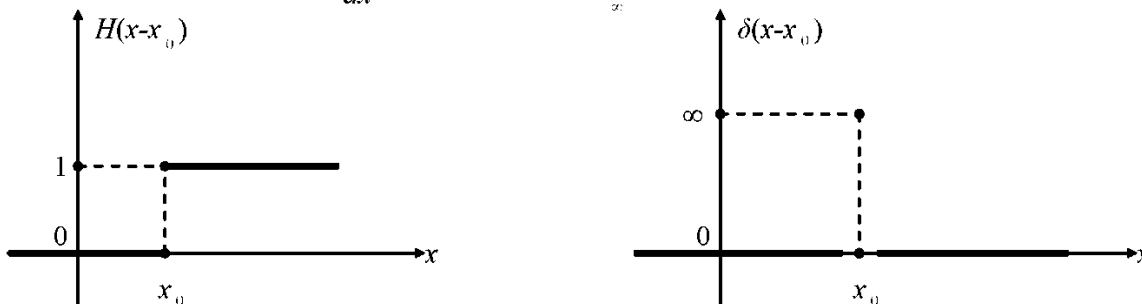


Рис. 1.1

Отметим еще раз свойств дельта – функции:

1. Фильтрующее свойство

$$\int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} f(x_0), & x_0 \in (a, b); \\ 0, & x_0 \notin (a, b). \end{cases} \quad (1.3)$$

2. Свойство четности

$$\delta(x - x_0) = \delta(x_0 - x).$$

3. Интеграл

$$\int_a^b \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} 1, & x_0 \in (a, b); \\ 0, & x_0 \notin (a, b). \end{cases} \quad (1.4)$$

если за  $(a, b)$  взять всю числовую ось, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = 1; \quad (1.5)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta[a(x - x_0)] dx = \frac{f(x_0)}{|a|}, \quad a = \text{const} \neq 0.$$

В теории обобщенных функций доказывается, что дельта – функция бесконечно дифференцируема, а  $n$ -я производная определяется выражением

$$\int_a^b f(x) \delta^{(n)}(x - x_0) dx = \begin{cases} (-1)^n f^{(n)}(x_0), & x_0 \in (a, b), \\ 0 & , x_0 \in \bar{(a, b)}. \end{cases} \quad (1.6)$$

Анализ выражений (1.2), (1.6) показывает, что с механической точки зрения дельта – функция Дирака (и ее производные) может трактоваться как обобщенная мера, равная нулю. В этом случае любая постоянная величина (сила, момент, бимомент и т.п.), умноженная на дельта – функцию Дирака и ее производные, равна нулю

$$F\delta(x - x_0) = M\delta'(x - x_0) = B_0\delta''(x - x_0) = 0. \quad (1.7)$$

Однако, если к символам  $\delta(x - x_0)$ ,  $\delta'(x - x_0)$ , ... применять операции интегрирования, то могут наступать моменты, когда нуль «исчезает». Тогда может быть использовано понятие сплайн – функции. Так называются обычно кусочно-полиномиальные функции, обладающие определенной гладкостью. Здесь под сплайн – функцией понимается функция, составленная из кусков различных функций, имеющих производные до  $(n - 1)$  порядка включительно. Если взять определенный интеграл от единичной функции Хевисайда, то получим линейный сплайн

$$S_1 = \int_{-\infty}^x H(x - x_0) dx = \int_{x_0}^x dx = \begin{cases} (x - x_0), & x \geq x_0; \\ 0 & , x < x_0; \end{cases}$$

или

$$S_1 = (x - x_0)_+ = \begin{cases} (x - x_0), & x \geq x_0; \\ 0 & , x < x_0; \end{cases}$$

где символ «+» указывает на сплайн – функцию. Интегрируя линейный сплайн еще раз, получим сплайн 2-й степени и т.д.

$$S_2 = \int_{-\infty}^x (x - x_0)_- dx = \int_{x_0}^x (x - x_0) dx = \begin{cases} (x - x_0)^2 / 2, & x \geq x_0; \\ 0 & , x < x_0. \end{cases}$$

Аналогично определяются сплайны от тригонометрических, гиперболических и других функций

$$\cos(x - x_0)_+ = \begin{cases} \cos(x - x_0), & x \geq x_0; \\ 0 & , x < x_0; \end{cases} \quad sh(x - x_0)_+ = \begin{cases} sh(x - x_0), & x \geq x_0; \\ 0 & , x < x_0. \end{cases}$$

Сплайны, единичная функция Хевисайда и дельта – функция Дирака образуют логически завершенную цепочку взаимной связи

$$S'_1 = H(x - x_0), \quad H'(x - x_0) = \delta(x - x_0), \quad [\delta(x - x_0)]' = \delta'(x - x_0),$$

$$\int \delta'(x - x_0) dx = \delta(x - x_0), \quad \int \delta(x - x_0) dx = H(x - x_0), \quad \int H(x - x_0) dx = (x - x_0).$$

и

$$[\cos(x - x_0)_+] = -\sin(x - x_0)_-; \quad [sh(x - x_0)_-] = ch(x - x_0)_+.$$

Отметим, что операция дифференцирования понижает размерность линейных сплайнов и обобщенных функций, т.е. единичная функция Хевисайда является безразмерной функцией, дельта – функция Дирака имеет отрицательную размерность по отношению к размерности аргумента. Если  $[x] = [M]$ , то  $[\delta(x - x_0)] = [M^{-1}]$  и т.д.

Благодаря указанным свойствам обобщенные функции  $H(x - x_0)$  и  $\delta(x - x_0)$  оказались очень удобными для аналитического описания сосредоточенных и кусочно распределенных нагрузок, действующих на стержень, пластину и оболочку. При этом интенсивность нагрузки может быть представлена непрерывной и дифференцируемой функцией во всей области, занимаемой объектом.

Операции интегрирования выражений с обобщенными функциями выполняются по своим правилам. Рассмотрим примеры:

1. На стержень действует сосредоточенная поперечная сила  $F$  в точке  $x = a$ . Интенсивность нагрузки

$$q_y(x) = F \delta(x - a).$$

Интеграл

$$\int_0^x \frac{(x - \xi)^3}{6} q_y(\xi) d\xi = \int_0^x \frac{(x - \xi)^3}{6} F \delta(\xi - a) d\xi = \frac{F(x - a)^3}{6}_+.$$

Здесь использовано фильтрующее свойство (1.3). Знак сплайна «+» необходим, т.к. при  $x < a$  интеграл равен нулю по свойству (1.3).

2. На стержень действует сосредоточенный изгибающий момент  $M$  в точке  $x = a$ . Тогда

$$q_y(x) = M \delta'(x - a)$$

и

$$\int_0^x \frac{(x - \xi)^3}{6} q_y(\xi) d\xi = \int_0^x \frac{(x - \xi)^3}{6} M \delta'(\xi - a) d\xi = (-1) \left[ \frac{1}{6} M (x - \xi)^3 \right]_{\xi=a}^x = \frac{M(x - a)^2}{2}_+.$$

Интегрирование выполнено по правилу (1.6). При  $x < a$  интеграл равен нулю, поэтому необходим символ сплайна «+».

3. На стержень действует распределенная нагрузка от точки  $x = a$ , до точки  $x = b$ . В этом случае

$$q_y(x) = q[H(x-a) - H(x-b)],$$

$$\int_0^x \frac{1}{6}(x-\xi)^3 q_y(\xi) d\xi = \int_0^x \frac{1}{6}(x-\xi)^3 q[H(\xi-a) - H(\xi-b)] d\xi =$$

$$= -\frac{q}{24}(x-\xi)^4 \Big|_a^x + \frac{q}{24}(x-\xi)^4 \Big|_b^x = \frac{q[(x-a)_-^4 - (x-b)_-^4]}{24}$$

Знаки сплайнов означают, что при  $x < a$  и  $x < b$  интегралы равны нулю.

Более полная информация о свойствах и применении обобщенных функций содержится в работах [1, 4, 22, 33, 42].

## 1.2. ИНТЕНСИВНОСТЬ ВНЕШНЕЙ НАГРУЗКИ

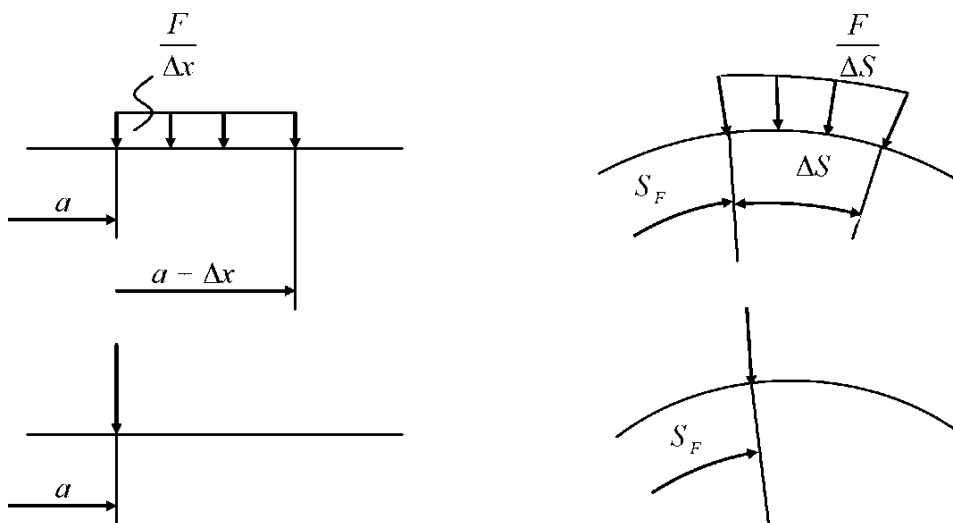
Интенсивность внешней нагрузки будем рассматривать как совокупность сосредоточенных сил, приложенных на некоторой длине  $\Delta x$  стержня (рис. 1.2).

Тогда для прямолинейного стержня интенсивность нагрузки при действии сосредоточенной нагрузки, приложенной в точке  $a$ , предстанет следующим образом

$$q_y(x) = \frac{F}{\Delta x} [H(x-a) - H(x-a-\Delta x)],$$

для кругового стержня

$$q_n(x) = \frac{F}{\Delta S} [H(S-S_F) - H(S-S_F-\Delta S)].$$



**Рис. 1.2**

Учитывая, что  $\Delta S = R\Delta\alpha$ , где  $\alpha$  - угловая координата,  $R$  – радиус кривизны и выполняя предельный переход, будем иметь

$$q_y(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F}{\Delta x} [H(x-a) - H(x-a-\Delta x)] = F\delta(x-a), \quad (1.8)$$

$$q_n(\alpha) = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{F}{R\Delta\alpha} [H(S-S_R) - H(S-S_R-\Delta S)] = \frac{F}{R}\delta(\alpha-\alpha_R). \quad (1.9)$$

Аналогично вводя сосредоточенный момент, с помощью предельного перехода получим

для прямолинейного стержня

$$q_y(x) = M\delta'(x-a), \quad (1.10)$$

для кругового стержня

$$q_n(\alpha) = \frac{M}{R^2}\delta'(\alpha-\alpha_M). \quad (1.11)$$

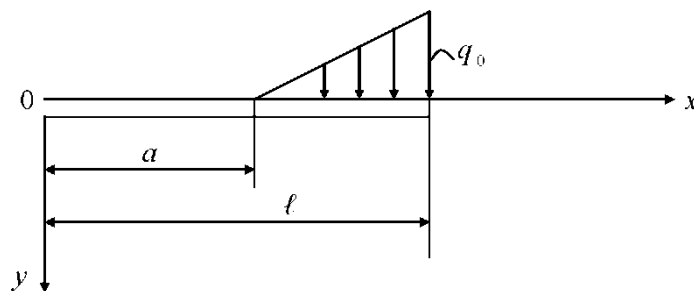
Равномерно распределенная нагрузка вводится с помощью единичной функции Хевисайда

$$q(x) = q[H(x-a) - H(x-b)], \quad (1.12)$$

$$q(\alpha) = q[H(\alpha-\alpha_H) - H(\alpha-\alpha_K)], \quad (1.13)$$

где  $a, \alpha_H, b, \alpha_K$  – координаты начала и конца распределенной нагрузки. Не вызывает трудностей и запись нагрузки более сложного вида (рис. 1.3)

$$q_y(x) = \frac{q_0}{\ell-a}(x-a).$$



**Рис. 1.3**

Простую нагрузку на прямолинейный стержень можно представить следующими выражениями (рис. 1.4):

$$F \quad q$$

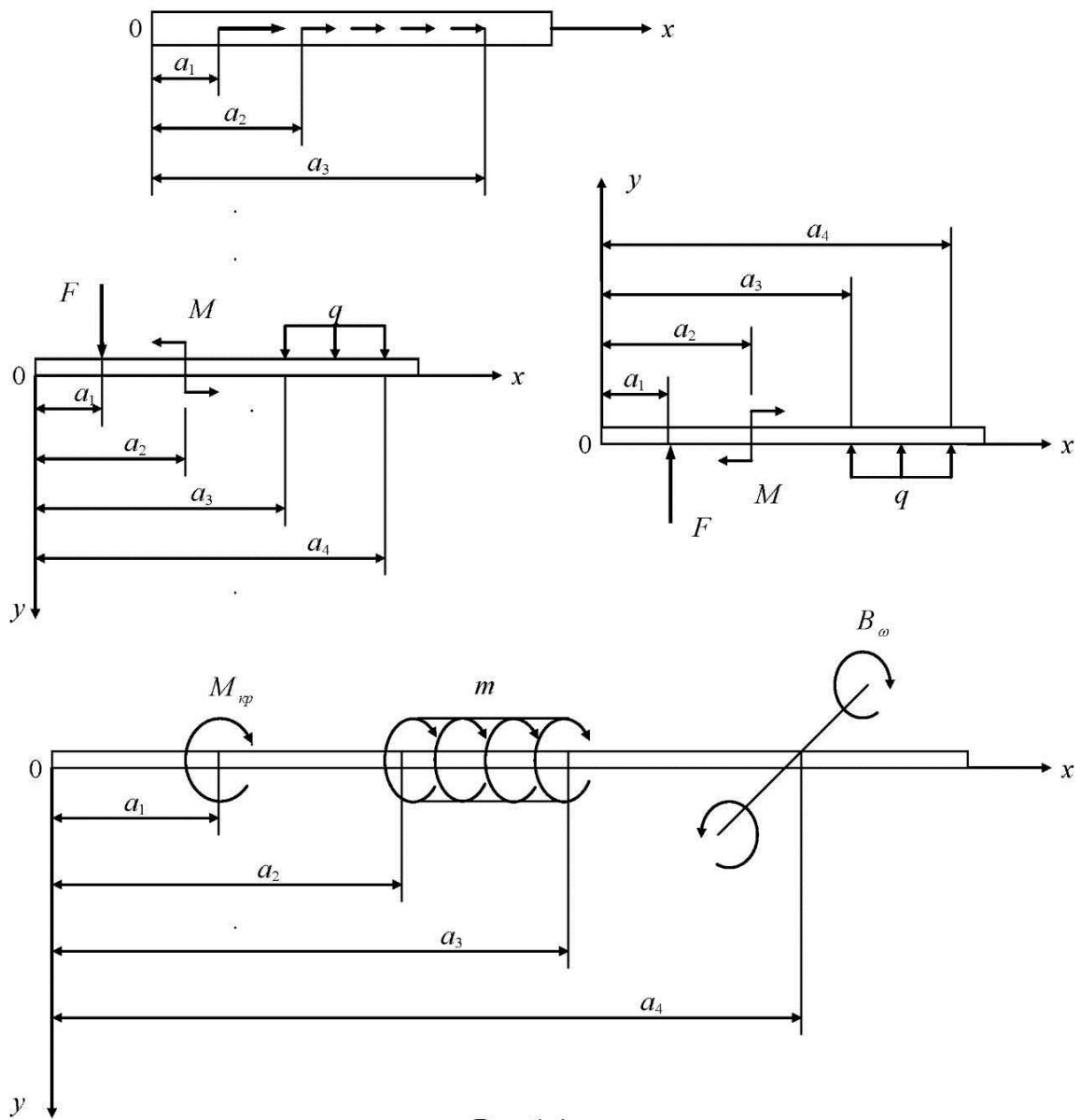


Рис. 1.4.

при растяжении - сжатии

$$q_x(x) = F\delta(x-a_1) + q[H(x-a_2) - H(x-a_3)]; \quad (1.14)$$

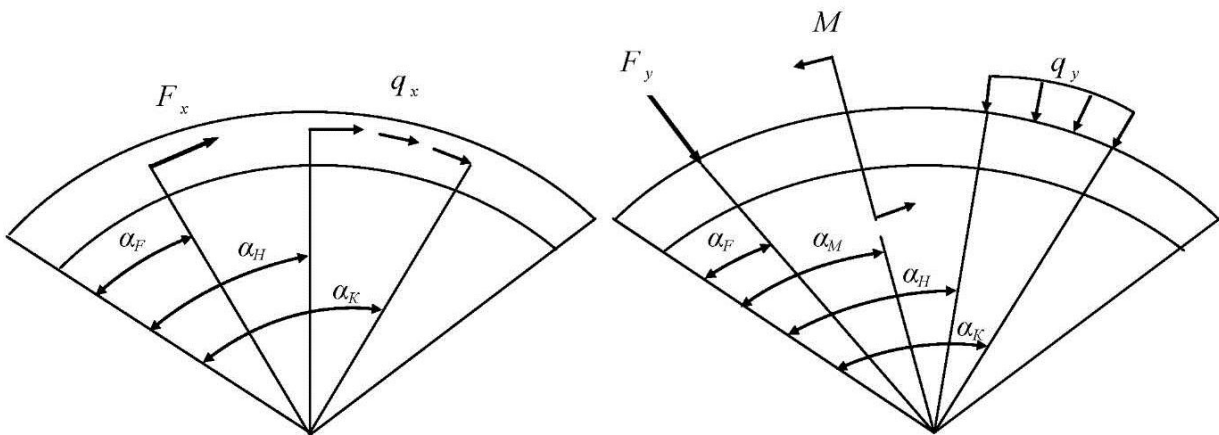




Рис. 1.5.

при сдвиге

$$q_y(x) = F\delta(x-a_1) + q[H(x-a_3) - H(x-a_4)]; \quad (1.15)$$

при кручении, включая и тонкостенные стержни

$$m(x) = M_\varphi\delta(x-a_1) + m[H(x-a_2) - H(x-a_3)] + B_\phi\delta'(x-a_4); \quad (1.16)$$

при изгибе

$$q_x(x) = F\delta(x-a_1) + M\delta'(x-a_2) + q[H(x-a_3) - H(x-a_4)]. \quad (1.17)$$

Для кругового стержня касательная и нормальная нагрузки запишутся в виде (рис. 1.5)

$$q_t(\alpha) = \frac{F_x}{R}\delta(\alpha-\alpha_F) + q_x[H(\alpha-\alpha_H) - H(\alpha-\alpha_K)]; \quad (1.18)$$

$$q_n(\alpha) = \frac{F_y}{R}\delta(\alpha-\alpha_F) + \frac{M}{R^2}\delta'(\alpha-\alpha_M) + q_y[H(\alpha-\alpha_H) - H(\alpha-\alpha_K)]. \quad (1.19)$$

Отметим, что выражения (1.14) – (1.19) получены путем положения множества сосредоточенных и распределенных включений на пространство обобщенных функций, т.е. правые части представляют собой элементы с вложенными пространствами.

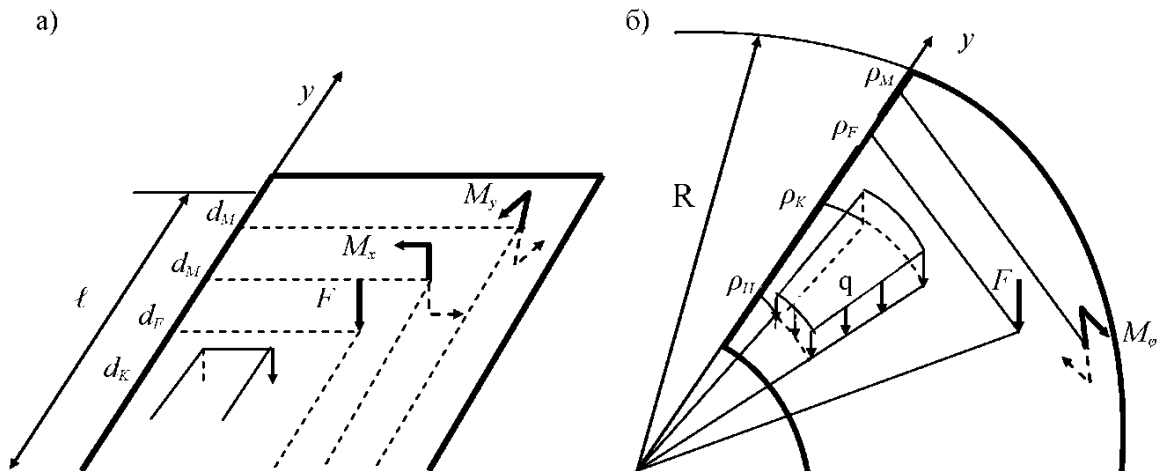
Аналогично записываются аналитические выражения для простой нагрузки на прямоугольную и круглую пластины (рис. 1.6)

$$q(x, y) = q[H(x-c_H)H(y-d_H) - H(x-c_K)H(y-d_K)] + F\delta(x-c_F)\delta(y-d_F) + M_x\delta'(x-c_M)\delta(y-d_M) + M_y\delta(x-c_M)\delta'(y-d_M); \quad (1.20)$$

$$q(\rho, \varphi) = q[H(\rho-\rho_H)H(\varphi-\varphi_H) - H(\rho-\rho_K)H(\varphi-\varphi_K)] + \frac{F}{\rho_F}\delta(\rho-\rho_F)\delta(\varphi-\varphi_F) + \frac{M_\rho}{\rho_M}\delta'(\rho-\rho_M)\delta(\varphi-\varphi_M) + \frac{M_\varphi}{\rho_\varphi^2}\delta(\rho-\rho_M)\delta'(\varphi-\varphi_M), \quad (1.21)$$

где  $c_H, \dots, \varphi_M$  – координаты соответствующих величин. В выражениях (1.20), (1.21) обобщенные функции двух переменных представлены в виде произведений одномерных функций [7,8], что позволяет распространить одномерный вариант МГЭ на пластины и оболочки.

Нагрузка, представленная на рис. 1.4 – 1.6, считается положительной.



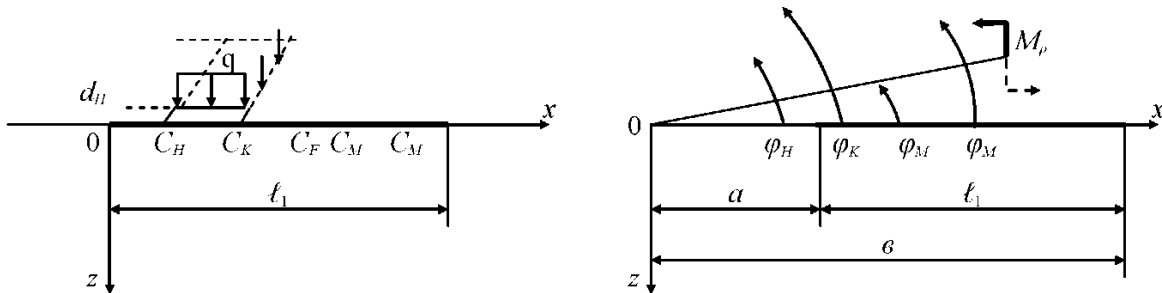


Рис. 1.6.

### 1.3. МЕТОД СВЕДЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ К РАСЧЕТНЫМ СООТНОШЕНИЯМ

Значительное число задач механики упругого стержня сводится к решению линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$\alpha_0 y^{(n)}(x) + \alpha_1 y^{(n-1)}(x) + \dots + \alpha_n y(x) = q(x), \quad (1.22)$$

удовлетворяющего заданным начальным условиям

$$y(0) = y_0; \quad y'(0) = y'_0; \quad \dots; \quad y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}. \quad (1.23)$$

Как известно, такая задача определения частного решения уравнения (1.22), удовлетворяющего начальным условиям (1.23), называется задачей Коши.

Процесс решения задачи Коши включает две операции с некоторыми последовательными действиями.

1. Составление общего решения уравнения (1.22)

$$y(x) = \sum_{k=1}^n C_k y_k(x) + y_*(x), \quad (1.24)$$

где  $y_k(x)$ ,  $k = \overline{1, n}$  – фундаментальная система решений однородного уравнения, соответствующего (1.22);  $C_k$ ;  $k = \overline{1, n}$  – константы интегрирования;  $y_*(x)$  – частное решение неоднородного уравнения (1.22), зависящее от вида правой части  $q(x)$ .

Наиболее удобной формой представления  $y_*(x)$  для различных приложений считается выражение [33, 93]

$$y_*(x) = \int_0^x G(x, \xi) q(\xi) d\xi, \quad (1.25)$$

где  $G(x, \xi)$  – функция Грина для краевых задач (функция влияния Коши), переменная  $x \in [0, \ell]$ ,  $\ell$  – длина стержня.

Такая запись для  $y_*(x)$  позволяет находить частные решения неоднородного уравнения (1.22) непосредственно через заданную нагрузку (для механических задач), а постоянные интегрирования будут иметь механический смысл начальных параметров. При этом система фундаментальных функций  $y_k(x), k = \overline{1, n}$  будет являться ортонормированной системой в точке  $x = 0$ , т.е. наиболее эффективной системой фундаментальных функций среди других систем [93].

Алгоритм построения функции Грина не зависит от краевых условий стержня и включает следующие операции:

1.1. Определение констант интегрирования  $C_k$  из линейной системы уравнений при  $x = \xi$

$$\begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{cccc} y_1(\xi) & y_2(\xi) & \dots & y_n(\xi) \\ y_1'(\xi) & y_2'(\xi) & \dots & y_n'(\xi) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(\xi) & y_2^{(n-1)}(\xi) & \dots & y_n^{(n-1)}(\xi) \end{array} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1/a_0 \\ \hline \end{array} \quad (1.26)$$

Определитель этой системы является определением Вронского, который не равен нулю на  $(0, \ell)$ . Поэтому система уравнений (1.26) имеет единственное решение и постоянные  $C_1, \dots, C_n$  будут являться функциями второй независимой переменной  $\xi$

$$C_1 = C_1(\xi), \quad C_2 = C_2(\xi), \quad \dots; \quad C_n = C_n(\xi); \quad (1.27)$$

1.2. Формирование частного решения

$$Y(x, \xi) = C_1(\xi)y_1(x) + C_2(\xi)y_2(x) + \dots + C_n(\xi)y_n(x); \quad (1.28)$$

1.3. Построение функции Грина

$$G(x, \xi) = Y(x, \xi)H(x - \xi). \quad (1.29)$$

Отметим некоторые свойства функции Грина:

I.  $G(x, \xi) \equiv 0$  при  $x < \xi$ ;

II.  $G(x, \xi)$ , как функция от  $x$  при фиксированном  $\xi$  в  $(0, \ell)$ , за исключением точки  $x = \xi$ , удовлетворяет однородному уравнению, соответствующему (1.22);

III.  $G(x, \xi)$  и ее производные по  $x$  до  $n$ -го порядка включительно непрерывны для  $x \in (0, \ell)$ , за исключением точки  $x = \xi$ , в которой производные по  $x$  непрерывны лишь до  $(n-2)$  порядка, а  $(n-1)$  производная имеет разрыв 1-го рода со скачком

$$\left. \frac{\partial^{(n-1)} G(x, \xi)}{\partial x^{(n-1)}} \right|_{x=\xi+0} - \left. \frac{\partial^{(n-1)} G(x, \xi)}{\partial x^{(n-1)}} \right|_{x=\xi-0} = \frac{1}{a_0};$$

IV. При  $x = \xi$

$$G(\xi, \xi) = G'(\xi, \xi) = \dots = G^{(n-2)}(\xi, \xi) = 0; \quad G^{(n-1)}(\xi, \xi) = \frac{1}{a_0};$$

V.  $G(x, \xi)$  для уравнений с постоянными коэффициентами зависит только от разности двух переменных  $(x - \xi)$ .

В дальнейшем в выражении (1.29) будем опускать единичную функцию Хевисайда  $H(x - \xi)$ , имея в виду, что в функции Грина  $G(x, \xi)$  всегда выполняется неравенство  $x > \xi$ .

Таким образом, общее решение неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (1.22) можно представить в виде

$$y(x) = \sum_{k=1}^n C_k y_k(x) + \int_0^x G(x, \xi) q(\xi) d\xi.$$

2. Определение констант интегрирования  $C_1, \dots, C_n$  из заданных начальных условий. При  $x = 0$  требуется решить систему линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} y_1(0) & y_2(0) & \dots & y_n(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) & \dots & y_n'(0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(0) & y_2^{(n-1)}(0) & \dots & y_n^{(n-1)}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \\ \vdots \\ y_0^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad (1.30)$$

которая единственным образом определяет постоянные интегрирования. При ортонормированной системе функциональных функций будем иметь

$$C_1 = y_0; \quad C_2 = y_0'; \quad \dots; \quad C_n = y_0^{(n-1)}.$$

Таким образом, для формирования решения задачи Коши требуется составить и аналитически решить две системы линейных уравнений (1.26) и (1.30). Для большинства задач механики стержней, пластин и оболочек такие решения известны, отдельные задачи решены авторами в работах [51 – 68], однако многие задачи еще ждут своего решения.

Далее решение задачи Коши необходимо дополнить уравнениями, описывающими остальные параметры воздействия на стержень, что выполняется простым дифференцированием выражения (1.24). Применительно к упругому стержню решение задачи Коши и дополнительные уравнения удобно записать в матричной форме

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \\ \vdots \\ y_0^{(n-1)} \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} G(x, \xi) \\ G_x(x, \xi) \\ \vdots \\ G_x^{(n-1)}(x, \xi) \end{pmatrix} q(\xi) d\xi \quad (1.31)$$

или компактно

$$Y(x) = A(x) X(o) + B(x), \quad (1.32)$$

где  $Y(x)$  – матрица-столбец параметров напряженно - деформированного состояния стержня в точке  $x$  (вектор состояния стержня в точке  $x$ );  $A(x)$  – квадратная матрица фундаментальных ортонормированных функций дифференциального уравнения (1.22);  $X(o)$  – матрица-столбец начальных параметров (вектор начальных параметров);  $B(x)$  – матрица-столбец элементов от заданной нагрузки (вектор нагрузки). При формировании вектора нагрузки учтены свойство функции Грина по пункту IV и правило дифференцирования интеграла [70]

$$\frac{d^{(\kappa-1)}}{dx^{(\kappa-1)}} \left[ \int_0^x G(x, \xi) q(\xi) d\xi \right] = \frac{d^{(\kappa-2)}}{dx^{(\kappa-2)}} [G(x, x) q(x)] + \int_0^x \frac{d^{(\kappa-1)}}{dx^{(\kappa-1)}} [G(x, \xi) q(\xi)] d\xi, \quad (1.33)$$

$$\kappa = 2, 3, \dots, n.$$

Отметим, что форма записи решения задачи Коши (1.31) совпадает с формой представления интегральных уравнений типа Вольтерра 2-го рода [7, 10, 48]. Функция Грина и ее производные по  $x$  являются вырожденными, зависящими от разности аргументов ядрами. При граничном значении переменной  $x = \ell$  алгебраические уравнения (1.31) переходят в гранично-элементные соотношения.

Для обратных задач механики упругих стержней функции  $y(x)$ ,  $G(x, \xi)$  будут известны, а нагрузка  $q(\xi)$  будет являться искомой функцией под знаком интеграла. Для прямых задач неизвестными будут функция  $y(x)$  и отдельные начальные параметры, а функция Грина  $G(x, \xi)$ , фундаментальные функции и нагрузка  $q(\xi)$  будут известны.

Решение обратных задач для расчетных соотношений (1.31) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений [48], матрица коэффициентов которой будет плохо обусловленной. Ниже будет показано, что гранично-элементные соотношения обратных задач механики стержней позволяют весьма эффективно решать и прямые задачи. Их решение также сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений, но с хорошо обусловленной матрицей коэффициентов.

Приведенный алгоритм сведения задачи Коши к алгебраическим уравнениям далее применяется для решения задач статики, динамики и устойчивости различных упругих систем.

#### **1.4. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ И ПРАВИЛА ЗНАКОВ ДЛЯ ГРАНИЧНЫХ ПАРАМЕТРОВ СТЕРЖНЕЙ**

При механических воздействиях стержень в общем случае будет испытывать 4 вида деформирования: растяжение-сжатие, сдвиг, кручение и изгиб. В граничных точках стержня  $x = 0$  и  $x = \ell$  при деформировании возникают следующие кинематические и статические граничные параметры:

а) растяжение-сжатие

$U(0), U(\ell)$  - перемещение граничных точек по нормали к поперечному сечению;

$N(0), N(\ell)$  - нормальные силы;

б) сдвиг

$V_c(0), V_c(\ell)$  - поперечные перемещения граничных точек;

$Q(0), Q(\ell)$  - поперечные силы;

в) кручение, включая и тонкостенные стержни

$\theta(0), \theta(\ell)$  - углы закручивания граничных точек;

$\theta'(0), \theta'(\ell)$  - производные углов закручивания;

$M_{кр}(0), M_{кр}(\ell)$  - крутящие моменты;

$B_\omega(0), B_\omega(\ell)$  - бимоменты;

$M_\omega(0), M_\omega(\ell)$  - изгибно-крутящие моменты;

$L(0), L(\ell)$  - внешние крутящие моменты относительно центра изгиба;

г) изгиб

$V(0), V(\ell)$  - поперечные перемещения граничных точек;

$\varphi(0), \varphi(\ell)$  - углы поворота сечений в граничных точках;

$Q(0), Q(\ell)$  - поперечные силы;

$M(0), M(\ell)$  - изгибающие моменты.

Для построения соотношений между граничными параметрами принимается левовинтовая система координат (рис. 1.7), как наиболее часто применяемая другими авторами. Можно применить и правовинтовую систему, но с соответствующими изменениями в правилах знаков.

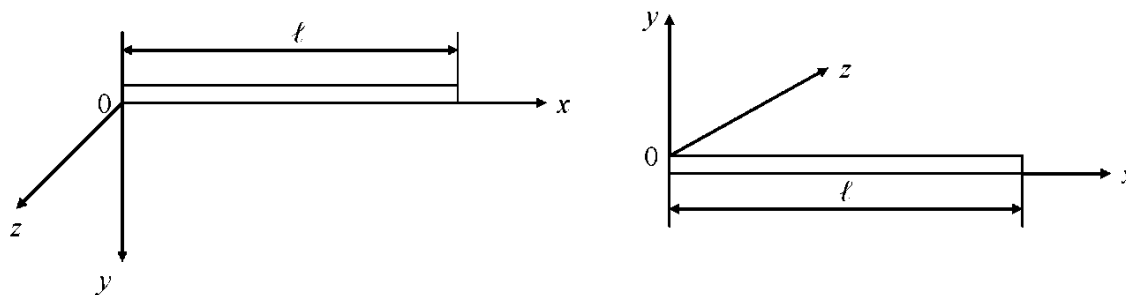
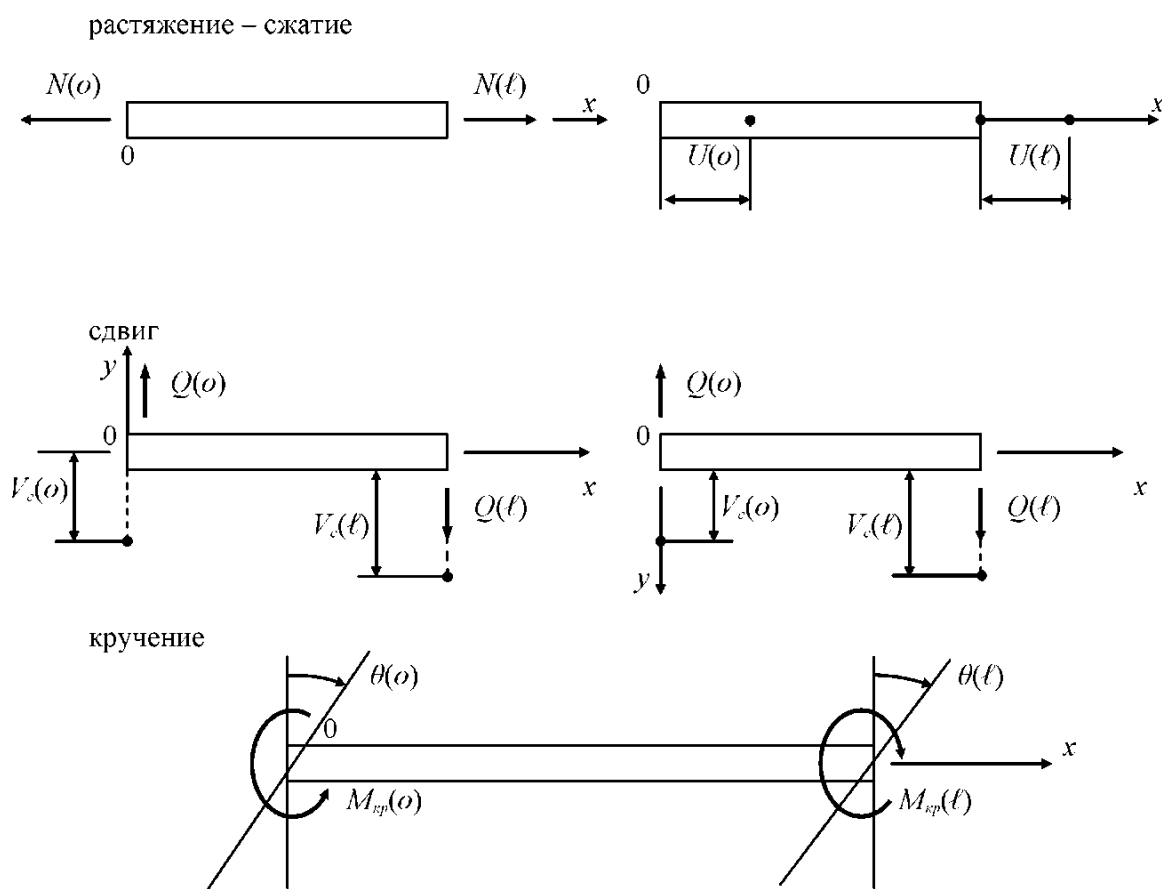


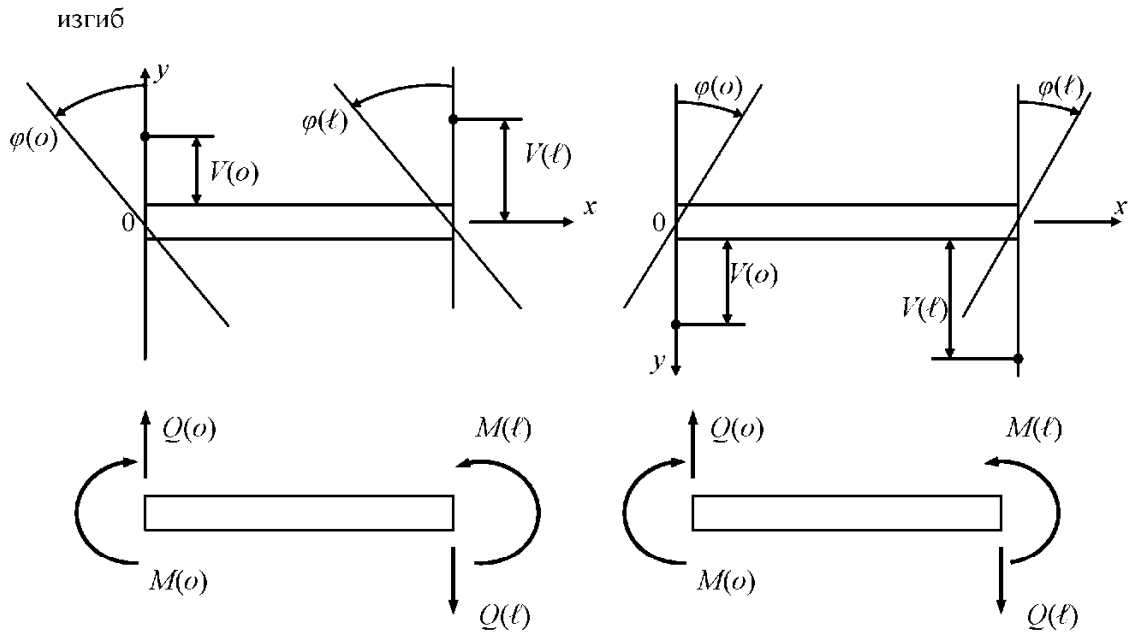
Рис. 1.7.

Граничные параметры напряженно-деформированного состояния стержня имеют положительные и отрицательные направления, зависящие от выбранной локальной системы координат. В принятой системе координат положительные линейные перемещения граничных точек будем считать совпадающими с направлениями осей  $ox$ ,  $oy$ ,  $oz$ . Углы поворота сечений в граничных точках будем считать положительными, если они направлены по часовой стрелке со стороны положительного направления координатных осей.

Принятые положительные направления статических и кинематических граничных параметров представлены на рис. 1.8.

Рассмотрим соотношения между кинематическими и статическими граничными параметрами, возникающие при объединении стержней в линейную систему. При равновесии всей системы будут находиться в равновесии и узлы. При этом статические граничные параметры будут удовлетворять уравнениям равновесия узлов. При деформировании стержневой системы узлы получают определенные линейные и угловые перемещения, и кинематические граничные параметры будут связаны в этих узлах уравнениями совместности перемещений. Как следует из уравнения (1.31) нагрузка на стержень выделяется в отдельную матрицу и не связывается с граничными статическими параметрами. Поэтому уравнения равновесия узлов не должны содержать внешнюю нагрузку. Соответственно,





**Рис. 1.8**

уравнения равновесия, содержащие реакции внешних связей, могут рассматриваться только в случае, когда известны направление и величина внешних реакций. Для кинематических параметров уравнения совместности перемещений узлов не должны включать линейные и угловые перемещения стержней как абсолютно твердых тел. В такой постановке уравнения равновесия и совместности перемещений узлов стержневой системы выступают только как уравнения связи между граничными параметрами соседних стержней. Это позволяет изображать статические граничные параметры в узле либо в положительном, либо в отрицательном направлениях (необходимо выбрать что-то одно), а перемещения узлов изображать визуалью на деформированной схеме линейной системы лишь качественно. В этой связи для конкретной конструкции узла необходимо составить уравнения статики и совместности перемещений только один раз. В любой стержневой системе, содержащей такой узел, эти уравнения сохраняют свой вид, что весьма существенно облегчает построение соотношений между граничными параметрами.

Рассмотрим примеры составления уравнений связи между граничными параметрами соседних стержней. Для жесткого узла из двух стержней (рис.9) случай а) позволяет правильно установить соотношения между статическими граничными параметрами,

$$\sum x = 0 \rightarrow -Q^{0\ 1}(\ell) + N^{1\ 2}(0) = 0 \rightarrow Q^{1\ 2}(\ell) = N^{1\ 2}(0); \quad (1.34)$$

$$\sum y = 0 \rightarrow -N^{0\ 1}(\ell) - Q^{1\ 2}(0) = 0 \rightarrow N^{0\ 1}(\ell) = -Q^{1\ 2}(0); \quad (1.35)$$

$$\sum m(1) = 0 \rightarrow M^{0\ 1}(\ell) - M^{1\ 2}(0) = 0 \rightarrow M^{0\ 1}(\ell) = M^{1\ 2}(0); \quad (1.36)$$



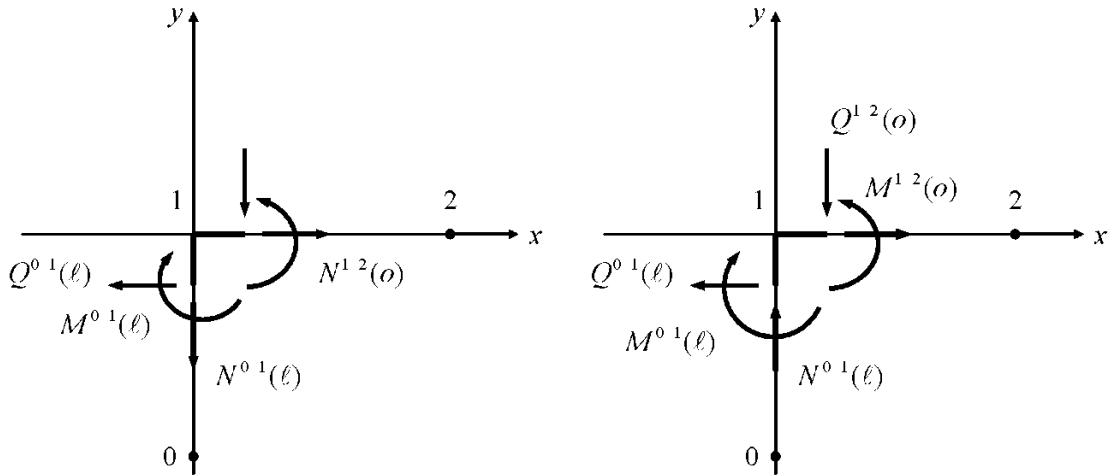


Рис. 1.9

а случай б) приведет к ошибке для соотношения (1.36) (неправильно изображена сила  $N^{0\ 1}(l)$ ), хотя равновесие узла 1 в направлении оси  $ou$  выполняется. Для жесткого узла из трех стержней (рис. 1.10) соотношения (1.34) – (1.36) примут вид

$$\sum x=0 \rightarrow -N^{0\ 1}(l) + N^{1\ 2}(o) - Q^{3\ 1}(l)\cos\alpha + N^{3\ 1}(l)\sin\alpha = 0;$$

$$\sum y=0 \rightarrow Q^{0\ 1}(l) - Q^{1\ 2}(o) - Q^{3\ 1}(l)\sin\alpha - N^{3\ 1}(l)\cos\alpha = 0;$$

$$\sum m(1) = 0 \rightarrow M^{0\ 1}(l) - M^{1\ 2}(o) - M^{3\ 1}(l) = 0.$$

Аналогично составляются уравнения равновесия узла, где сходятся большее число стержней.

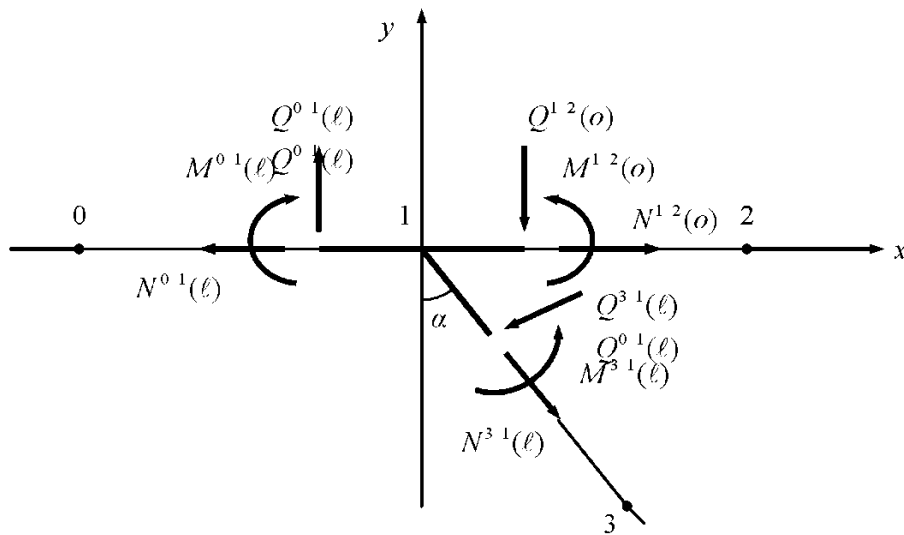


Рис. 1.10

Несколько сложнее установить связь между кинематическими параметрами. Здесь необходимо изображать качественную картину деформированного состояния упругой системы, что требует определенных навыков и достаточно глубоких представлений о поведении элементов конструкций при действии внешних нагрузок. Рассмотрим шарнирный узел с двумя стержнями (рис. 1.11). Пусть стержни испытывают растяжение-сжатие

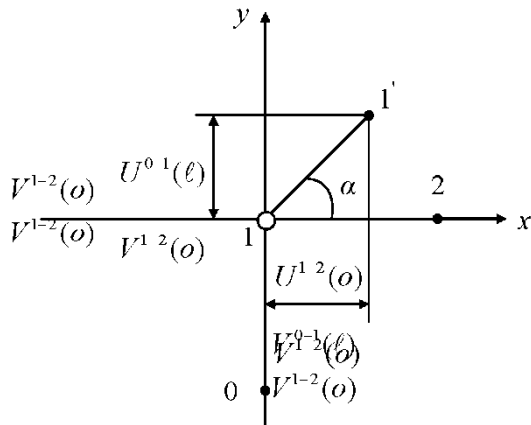


Рис. 1.11

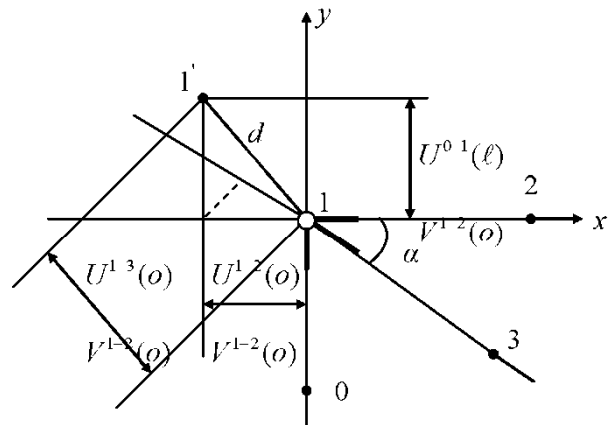


Рис. 1.12

Положение шарнира 1 после деформирования стержневой системы определяется тем, что граничные точки стержней 0 – 1 и 1 – 2 перемещаются по направлению своих осей и поворачиваются на некоторый угол. Это равносильно тому, что граничная точка стержня имеет два взаимно перпендикулярных перемещения (плоский случай). Поэтому, если шарнир 1 переместился в первый или третий квадранты, то

$$U^{0-1}(l) = U^{1-2}(o) \operatorname{tg} \alpha,$$

т.е. знаки граничных параметров одинаковы. Если шарнир 1 окажется во втором или четвертом квадрантах, то знаки параметров разные и

$$U^{0-1}(l) = -U^{1-2}(o) \operatorname{tg} \alpha.$$

Если стержни испытывают изгиб, то для положения шарнира в 1 и 3 квадрантах можно написать

$$V^{0-1}(l) = -V^{1-2}(o) \operatorname{ctg} \alpha.$$

**Для положения шарнира во 2 и 4 квадрантах знак минус опускается**

$$V^{0-1}(l) = V^{1-2}(o) \operatorname{ctg} \alpha.$$

Рассмотренные примеры приводят к выводу о том, что необходимо учитывать знаки граничных параметров. В шарнирном узле для углов поворота граничных точек в общем случае выполняется соотношение

$$\varphi^{0-1}(\ell) \neq \varphi^{1-2}(o).$$

В частном случае может быть и равенство. В жестком узле для одинаково ориентированных локальных систем координат (ось  $ou$  направлена у всех стержней “вниз” или “вверх”) имеем равенство углов поворота

$$\varphi^{0-1}(\ell) = \varphi^{1-2}(o),$$

для систем координат разной ориентации

$$\varphi^{0-1}(\ell) = -\varphi^{1-2}(o).$$

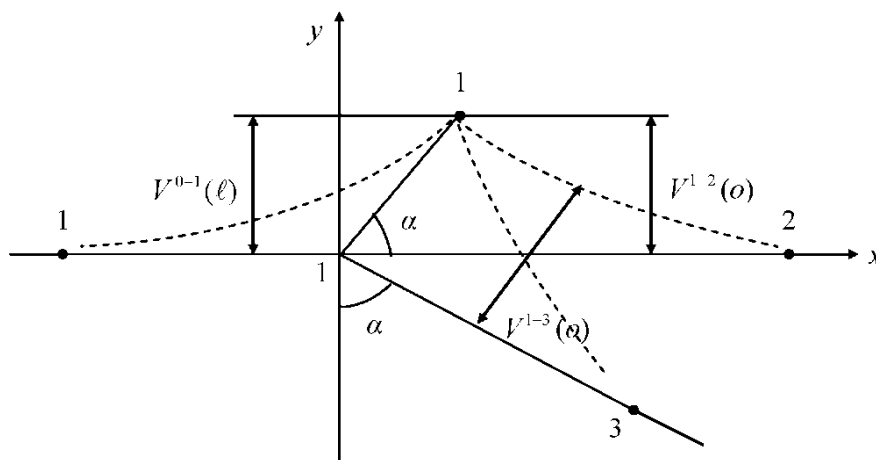
Рассмотрим деформированное состояние шарнирного узла с тремя стержнями (рис. 1.12), испытывающими растяжение-сжатие, где  $d$  – абсолютное перемещение узла 1. Из рис. 1.12 следует, что

$$d = \sqrt{[U^{1-2}(o)]^2 + [U^{0-1}(\ell)]^2},$$

т.е. абсолютное перемещение шарнирного узла определяется перемещениями только взаимно перпендикулярных стержней. Пусть узел 1 переместится во второй (или четвертый) квадрант. Проецируя перемещения  $U^{0-1}(\ell)$  и  $U^{1-2}(o)$  на перемещение  $U^{1-3}(o)$ , получим

$$-U^{1-3}(o) = U^{0-1}(\ell) \sin \alpha - U^{1-2}(o) \cos \alpha.$$

Если узел окажется в первом (или третьем) квадранте, то получится такое же состояние. Таким образом, соотношения между кинематическими параметрами зависят лишь от геометрических особенностей узлов и не зависят от степени деформированности стержневой системы. Для жесткого узла с тремя стержнями, испытывающими изгиб, кинематические соотношения можно получить из деформированного состояния (рис. 1.13)



$$V^{0\ 1}(\ell) = V^{1\ 2}(o) = V^{1\ 3}(o) \sin \alpha; \quad \varphi^{0\ 1}(\ell) = \varphi^{1\ 2}(o) = \varphi^{1\ 3}(o).$$

Для узлов с большим числом стержней соотношения между кинематическими граничными параметрами устанавливаются аналогично.

Примеры составления соотношений между граничными параметрами показывают, что необходимо заранее определить для каждого стержня конструкции его начало и конец, т.е. составить ориентированный граф упругой системы. Ориентированный граф стержневой системы будем представлять в виде определенного набора пронумерованных узлов с указанием начала и конца каждого стержня. В таком виде ориентированный граф не отличается от расчетной схемы стержневой системы и содержит номера узлов с выбранными для каждого стержня началом и концом. Чтобы дополнительно не изображать ориентированные графы, каждая упругая система в дальнейшем имеет номера узлов и стрелки, указывающие на начало и конец стержней. При этом удобно обозначать и граничные параметры, присвоив им номера соответствующих стержней.

### 1.5. МЕТОД РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Если несколько стержней соединены в единую конструкцию, то для системы стержней можно составить матричное уравнение типа (1.32). Матрица  $\mathbf{A}$  преобразуется к квазидиагональному виду, а векторы  $\mathbf{Y}$  и  $\mathbf{X}$  будут содержать параметры деформированного состояния всех стержней в текущей и начальной точках

$$\mathbf{A} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \mathbf{A}_1(x) & & & & \\ \hline & \ddots & & & \\ \hline & & \mathbf{A}_i(x) & & \\ \hline & & & \ddots & \\ \hline & & & & \mathbf{A}_m(x) \\ \hline \end{array}; \quad \mathbf{Y} = \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{Y}_1(x) \\ \hline \dots \\ \hline \mathbf{Y}_i(x) \\ \hline \dots \\ \hline \mathbf{Y}_m(x) \\ \hline \end{array}; \quad \mathbf{X} = \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{X}_1(o) \\ \hline \dots \\ \hline \mathbf{X}_i(o) \\ \hline \dots \\ \hline \mathbf{X}_m(o) \\ \hline \end{array}, \quad (1.37)$$

где  $m$  – число стержней в системе.

Диагональные блоки матрицы  $\mathbf{A}$  представляют собой одинаковые или разные квадратные матрицы ортонормированных фундаментальных функций, описывающих состояния стержней. Вектор нагрузки  $\mathbf{B}$  строится аналогично векторам  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{X}$  и включает внешнюю нагрузку всех стержней по выражению (1.25).

Такая схема формирования матричного интегрального уравнения требует дискретизации стержневой системы в узлах. Связано это с тем, что узлы являются точками разрыва кинематических и статических параметров стержней, а уравнение (1.32) справедливо в точках непрерывности параметров напряженно-деформированного состояния. Однако, при необходимости, узлами стержневой системы могут быть и точки, где сохраняется непрерывность параметров. Порядок чередования параметров стержней в матрицах (1.37) произвольный, т.е. в цепочке могут располагаться параметры стержней, находящихся в разных местах конструкции. Поэтому любую стержневую систему можно описать интегральным уравнением типа (1.32), выступающим уже в роли математической модели деформирования линейной системы. Порядок такого уравнения определяется числом стержней, на которые разбивается система, и порядком дифференциальных уравнений, принятых для описания состояния стержней.

Отметим, что формирование матриц (1.37) при текущем значении переменной  $x$  нецелесообразно. Достаточно иметь одно уравнение типа (1.32) и в процессе расчета менять в нем начальные параметры и нагрузку для каждого стержня. Но для определения неизвестных начальных параметров необходимо составить уравнение типа (1.32) с матрицами (1.37) при граничном значении переменной  $x = \ell$  каждого стержня, т.е. сформировать уравнение краевой задачи. В этом случае можно выполнить преобразования матриц уравнения (1.32) по схеме

$$\mathbf{Y}(\ell) = \mathbf{A}(\ell)\mathbf{X}(0) + \mathbf{B}(\ell) \rightarrow \mathbf{A}(\ell)\mathbf{X}(0) - \mathbf{Y}(\ell) = -\mathbf{B}(\ell) \rightarrow \mathbf{A}^*(\ell)\mathbf{X}^*(0, \ell) = -\mathbf{B}(\ell), \quad (1.38)$$

где векторы  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{X}$  содержат параметры стержней в граничных точках  $x = \ell$  и  $x = 0$ . Вектор  $\mathbf{B}$  состоит из грузовых элементов всех стержней при  $x = \ell$ . Матрица  $\mathbf{A}$  содержит граничные значения ортонормированных фундаментальных функций при  $x = \ell$  и имеет квазидиагональную структуру.

Как видно, сущность схемы преобразований матриц (1.38) заключается в переносе конечных параметров вектора  $\mathbf{Y}$  на место нулевых параметров вектора  $\mathbf{X}$ . При этом, вектор  $\mathbf{Y}$  становится нулевым и исключается из рассмотрения. Матрица  $\mathbf{A}^*$  обнуляется в отдельных столбцах и в нее вводятся элементы, компенсирующие перенос параметров. Вектор  $\mathbf{X}^*$  содержит уже неизвестные начальные и конечные граничные параметры всех стержней системы, как это имеет место в методе граничных элементов [7, 14, 15, 40].

Таким образом, решение прямых задач механики линейных систем с помощью одномерных граничных интегральных уравнений сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных начальных и конечных параметров стержней.

Процесс переноса конечных параметров вектора  $\mathbf{Y}$  на вектор  $\mathbf{X}$  основан на следующем. Векторы  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$  любой линейной системы при граничном значении переменной  $x = \ell$  будут содержать 3 группы граничных параметров. Первая группа – это нулевые граничные параметры, что определяется заданными условиями опирания (краевыми условиями). Вторая группа – это

зависимые параметры, связь между которыми выражается уравнениями равновесия и совместности перемещений узлов линейной системы. Третья группа граничных параметров векторов  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$  никак не связаны между собой. Эти параметры условно могут быть названы независимыми. Перенос параметров из  $\mathbf{Y}$  в  $\mathbf{X}$  должен компенсироваться соответствующими ненулевыми элементами матрицы  $\mathbf{A}$ , иначе нарушится исходное уравнение (1.32) при  $x = \ell$ . Очевидно, что независимые параметры  $\mathbf{Y}$  должны быть перенесены на место нулевых параметров вектора  $\mathbf{X}$ , а зависимые параметры переносятся в соответствии с уравнениями их связи. Перед операцией переноса параметров необходимо освободить поля матрицы  $\mathbf{A}$  от элементов, связанных с нулевыми параметрами вектора  $\mathbf{X}$ . Выполняется это путем обнуления столбцов матрицы  $\mathbf{A}$ , номера которых равны номерам строк нулевых параметров вектора  $\mathbf{X}$ . Далее в матрицу  $\mathbf{A}$  вводятся ненулевые компенсирующие элементы и преобразования по схеме (1.38) завершены. Правило для определения величины и положения компенсирующих элементов при переносе параметров включает 3 случая.

1 случай. При переносе независимого параметра вектора  $\mathbf{Y}$  в вектор  $\mathbf{X}$  компенсирующий элемент матрицы  $\mathbf{A}$  равен коэффициенту при переносимом параметре со своим знаком по схеме

$$\begin{array}{cccc}
 & i & j & k & \ell \\
 i & & \ell & -\ell^2/2 & -\ell^3/6 \\
 j & & 1 & -\ell & -\ell^2/2 \\
 k & -a & & 1 & \ell \\
 \ell & & & & 1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 X_{i1}=0; Y_{k1} \\
 X_{j1} \\
 X_{k1} \\
 X_{\ell 1}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 i \\
 j \\
 k \\
 \ell
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 X_{i1}=0 \\
 X_{j1}=0 \\
 aY_{k1} \\
 X_{\ell 1}=0
 \end{array}
 \quad (1.39)$$

т.е. компенсирующий элемент матрицы  $\mathbf{A}$  равен  $(-a)$  и должен появиться на месте  $(k, i)$ , где  $k$  – номер строки матрицы  $\mathbf{Y}$ , где находился параметр;  $i$  – номер строки матрицы  $\mathbf{X}$ , куда переносится параметр. Другими словами, первый индекс компенсирующего элемента указывает на старый адрес переносимого параметра, а второй индекс указывает новый адрес в матрице  $\mathbf{X}$ .

2 случай. Перенос зависимых параметров представляет собой повторение операций 1-го случая с той лишь разницей, что в матрице  $\mathbf{X}$  не появляются новые параметры, а в матрице  $\mathbf{A}$  соответствующие строки могут содержать несколько компенсирующих элементов

$$\begin{array}{cccc}
 & i & j & k & \ell \\
 i & -a & a & & \\
 j & & & & \\
 k & & & & 
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 X_{i1}=0; Y_{\ell 1} \\
 X_{j1} \\
 X_{k1}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 i \\
 j \\
 k
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 Y_{i1}=aY_{\ell 1}-aX_{j1} \\
 Y_{j1}=0 \\
 Y_{k1}=0
 \end{array}
 \quad (1.40)$$

$$\ell \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -1 & & & \\ \hline \end{array} \quad X_{i1} \quad \ell \begin{array}{|c|} \hline Y_{i1} \\ \hline \end{array}$$

3 случай. Для сложных стержневых систем в одном узле могут находиться несколько начальных точек стержней. В этом случае возникают уравнения связи между начальными параметрами и требуется переносить параметры в пределах матрицы  $X$ . Компенсирующие элементы получают сдвиг в соответствии со схемой

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 & i & j & k & \ell \\
 i & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & \ell & -\ell^2/2 & -\ell^3/6 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline X_{i1} \\ \hline \end{array} \\
 j & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & 1 & -\ell & -\ell^2/2 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline X_{j1} \\ \hline \end{array} \\
 k & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & 1 & \ell \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline X_{k1} = aX_{i1} \\ \hline \end{array} \\
 \ell & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline X_{\ell 1} \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad ;
 \end{array}
 \quad (1.41)$$
  

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 & i & j & k & \ell \\
 i & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1-a\ell^2/2 & \ell & & -\ell^3/6 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline X_{i1} \\ \hline \end{array} \\
 j & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -a\ell & 1 & & -\ell^2/2 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline X_{j1} \\ \hline \end{array} \\
 k & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a & & & \ell \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \\
 \ell & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline X_{\ell 1} \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

Видно, что элементы матрицы  $A$  сдвигаются на место столбца, номер которого равен номеру строки нового положения параметра. Компенсирующие элементы равны произведению коэффициента при переносимом параметре на элементы матрицы  $A$ . При этом, резко возрастает число компенсирующих элементов. Поэтому необходимо, по возможности, избегать переносов параметров внутри матрицы  $X$ . Достигается это формированием ориентированного графа линейной системы так, чтобы в узлах не сходились две и более начальных точек. Недостатком МГЭ является то, что для систем с большим числом стержней добиться этого невозможно и оптимальным будет такой ориентированный граф, при котором в каждом узле будут сходиться минимальное число начальных точек.

Определив все компенсирующие элементы матрицы  $A$ , можно свести граничное интегральное уравнение (1.38) к системе линейных алгебраических уравнений, решением которой определяются неизвестные начальные и конечные параметры всех стержней. Напряженно-деформированное состояние во внутренней точке стержня определяется вычислением по матричному уравнению (1.32).

Для реализации МГЭ на ЭВМ необходимо сформировать линейную систему алгебраических уравнений (1.38). Данная система имеет свои ярко выраженные особенности, которые существенно отличаются от параметров подобных систем методов сил, перемещений, МКЭ и других методов. В рассматриваемом варианте МГЭ матрица коэффициентов  $\mathbf{A}^*$  будет являться весьма разреженной матрицей общего вида. Решение подобной системы уравнений может быть осуществлено с помощью метода исключения Гаусса. Одной из особенностей матрицы  $\mathbf{A}^*$  является наличие нулевых ведущих элементов. Поэтому перед применением метода Гаусса необходимо переставить строки матриц  $\mathbf{A}^*$ ,  $\mathbf{B}$  в новом порядке, исключая нулевые ведущие элементы. Поскольку матрица  $\mathbf{A}^*$  сильно разрежена, то в новом порядке строк нельзя переставлять отдельные строки, т.е. МГЭ накладывает ограничения на алгоритм метода Гаусса с выбором ведущих элементов. Отметим, что сильная разреженность матрицы  $\mathbf{A}^*$  является положительным фактором, который существенно улучшает устойчивость численных операций и обеспечивает точность результатов [30, 74, 97]. В данном учебном пособии для решения систем уравнений (1.38) применяется простой алгоритм метода Гаусса. Для уменьшения арифметических ошибок при округлении в процессе решения уравнений желательно применять ЭВМ с большой разрядной сеткой и двойную точность.

Наиболее сложной операцией в алгоритме МГЭ является формирование матрицы  $\mathbf{A}^*$ , включающее следующие этапы:

1 шаг. Формируется квазидиагональная матрица  $\mathbf{A}$  (1.37). Нулевая матрица  $\mathbf{A}$  заполняется блоками  $\mathbf{A}_i$  граничных значений ортонормированных фундаментальных функций, что легко осуществить операторами цикла;

2 шаг. Обнуляются столбцы матрицы  $\mathbf{A}$ , номера которых равны номерам нулевых строк матрицы  $\mathbf{X}$ . Нулевые начальные параметры стержней являются исходными данными и номера нулевых строк матрицы  $\mathbf{X}$  определяются в процессе ее формирования. Обнуленную в отдельных столбцах матрицу обозначим  $\mathbf{A}_0$ ;

3 шаг. Определяются компенсирующие элементы, связанные с переносом конечных параметров из  $\mathbf{Y}$  в  $\mathbf{X}$ . Все компенсирующие элементы получают из анализа матриц  $\mathbf{Y}$  и  $\mathbf{X}$  и могут быть введены в матрицу  $\mathbf{A}_0$  как исходные данные. Однако, для наглядности алгоритма МГЭ, компенсирующие элементы в ряде примеров сведены во вспомогательную матрицу  $\mathbf{C}$ ;

4 шаг. Матрица  $\mathbf{A}^*$  получается суммированием

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A}_0 + \mathbf{C}. \quad (1.42)$$

Матрица  $\mathbf{C}$  характеризует топологию линейной системы и является инвариантной по отношению к видам расчета. Она составляется для определенного ориентированного графа только один раз и далее может использоваться при формировании матрицы  $\mathbf{A}^*$  в задачах статики, динамики и устойчивости.



Матрица нагрузки  $\mathbf{B}$  в уравнении МГЭ (1.38) содержит элементы с вложенными силовыми пространствами на основе теории обобщенных функций и сплайнов. Нагрузка на каждый стержень задается, а функция Грина всегда может быть определена. В матрице  $\mathbf{B}$  после интегрирования остаются члены с обобщенными функциями и сплайнами. Единичная функция Хевисайда и сплайны легко программируются на любом алгоритмическом языке, а дельта-функция Дирака и ее производные должны представляться нулями. Вектор нагрузки  $\mathbf{B}$  в алгоритме МГЭ не требует сведения нагрузки к эквивалентной узловой, как это делается в МКЭ, так что исключаются промежуточные операции. Координаты нагрузки в векторе  $\mathbf{B}$  можно сделать переменными величинами. В этом случае расчет линейных систем можно проводить на статическую подвижную нагрузку или с помощью ЭВМ строить линии влияния.

При выполнении преобразований по схеме (1.38) возникают два вопроса:

1. Всегда ли возможна схема преобразований (1.38) или, другими словами, всегда ли число нулевых начальных параметров матрицы  $\mathbf{X}$  линейной системы будет равно числу независимых конечных параметров матрицы  $\mathbf{Y}$ ?

2. Всегда ли имеет место вариант перестановки строк матрицы  $\mathbf{A}^*$ , исключающий нулевые ведущие элементы?

При положительном ответе на эти вопросы можно утверждать, что нет препятствий для выполнения преобразований (1.38). Ответы на эти вопросы можно сформулировать в виде двух теорем.

Теорема 1. Для любой линейной системы с заданными краевыми условиями число нулевых начальных параметров матрицы  $\mathbf{X}$  всегда равно (для систем с линейно неподвижными узлами) или больше (для систем с линейно подвижными узлами) числа независимых конечных параметров матрицы  $\mathbf{Y}$ .

Теорема 2. Для любой линейной системы с заданными краевыми условиями получается матрица  $\mathbf{A}^*$  с ненулевыми строками и столбцами, т.е. всегда существует вариант перестановки строк матрицы  $\mathbf{A}^*$ , исключающий нулевые ведущие элементы.

Доказательства этих теорем осуществляется методом математической индукции [65]. Таким образом, схема преобразований матриц (1.38) всегда может быть выполнена, что подтверждается и многочисленными частными примерами расчета упругих стержневых, пластинчатых и оболочечных систем, приведенными в данном учебнике.

## ГЛАВА II. СТАТИКА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

В данной главе представлены решение задач Коши деформирования стержней в форме (1.32). Фундаментальные функции и правые части строились по методике § 1.3.

## 2.1. РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ, СДВИГ, КРУЧЕНИЕ И ИЗГИБ

В общем случае стержни упругих систем испытывают растяжение-сжатие, сдвиг, кручение и изгиб. Точные дифференциальные уравнения этих видов сопротивлений являются нелинейными и построить их аналитические решения весьма затруднительно. Для преодоления математических трудностей нелинейные дифференциальные уравнения линеаризуют и используют их решения в расчетной практике. Погрешность приближенных решений при  $l/h > 10$  не превышает 3% [100], что вполне удовлетворяет требованиям к точности инженерных расчетов. В этой связи представим известные решения приближенных дифференциальных уравнений всех видов сопротивлений.

Задача Коши растяжения-сжатия стержня постоянной жесткости имеет вид [19]

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2} = -\frac{q_x(x)}{EA}; \quad U(0); \quad N(0) = EAU'(0). \quad (2.1)$$

Решение этой задачи представляется выражением (см. § 1.3)

$$EAU(x) = EAU(0) + N(0) \cdot x - \int_0^x (x - \xi) q_x(\xi) d\xi. \quad (2.2)$$

Дифференцируя это уравнение по  $x$ , получим нормальную силу

$$N(x) = EAU(0) \cdot 0 + N(0) \cdot 1 - \int_0^x q_x(\xi) d\xi. \quad (2.3)$$

Объединяя выражения (2.2), (2.3) в матрицы, получим уравнение типа (1.32)

$$\begin{bmatrix} EAU(x) \\ N(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EAU(0) \\ N(0) \end{bmatrix} - \int_0^x \begin{bmatrix} (x - \xi) q_x(\xi) \\ q_x(\xi) \end{bmatrix} d\xi. \quad (2.4)$$

Элементы матрицы нагрузки  $\mathbf{B}$  после подстановки  $q_x(x)$  из (1.14) и интегрирования примут вид

$$\begin{aligned} B_{11} &= F(x - a_1)_1 + q \left[ \frac{(x - a_2)_1^2}{2} - \frac{(x - a_3)_1^2}{2} \right]; \\ B_{21} &= F \cdot H(x - a_1) + q [(x - a_2)_1 - (x - a_3)_1]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Сопоставление уравнения (2.4) с разрешающим уравнением растяжения-сжатия по МКЭ [71] показывает, что матрица коэффициентов уравнения МГЭ имеет 3 ненулевых элемента, а в МКЭ – 4.

Аналогично строятся интегральные уравнения сдвига, кручения стержня сплошного сечения и изгиба. Дифференциальные уравнения и начальные параметры этих видов сопротивлений имеют вид

$$V_c''(x) = -\frac{q_y(x)\kappa_1}{GA}; \quad \frac{GA}{\kappa_1}V_c(o); \quad Q(o); \quad (2.6)$$

$$\theta''(x) = -\frac{m(x)}{GI_x}; \quad GI_x\theta(o); \quad M_{sp}(o); \quad (2.7)$$

$$V''''(x) = \frac{q_y(x)}{EI}; \quad EIV(o); \quad EI\phi(o); \quad M(o); \quad Q(o). \quad (2.8)$$

Решения задач Коши (2.6) – (2.8) в матричной форме запишутся следующим образом

сдвиг

$$\begin{array}{|c|} \hline \frac{GA}{\kappa_1}V_c(x) \\ \hline Q(x) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & x \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \frac{GA}{\kappa_1}V_c(o) \\ \hline Q(o) \\ \hline \end{array} - \int_0^x \begin{array}{|c|} \hline (x-\xi)q_y(\xi) \\ \hline q_y(\xi) \\ \hline \end{array} d\xi, \quad (2.9)$$

кручение стержня сплошного сечения

$$\begin{array}{|c|} \hline GI_x\theta(x) \\ \hline M_{sp}(x) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & x \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline GI_x\theta(o) \\ \hline M_{sp}(o) \\ \hline \end{array} - \int_0^x \begin{array}{|c|} \hline (x-\xi)m(\xi) \\ \hline m(\xi) \\ \hline \end{array} d\xi, \quad (2.10)$$

изгиб

$$\begin{array}{|c|} \hline EIV(x) \\ \hline EI\phi(x) \\ \hline M(x) \\ \hline Q(x) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & x & -A_{13} & -A_{14} \\ \hline & 1 & -x & -A_{13} \\ \hline & & 1 & x \\ \hline & & & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline EIV(o) \\ \hline EI\phi(o) \\ \hline M(o) \\ \hline Q(o) \\ \hline \end{array} + \int_0^x \begin{array}{|c|} \hline (x-\xi)^3 q_y(\xi)/6 \\ \hline (x-\xi)^3 q_y(\xi)/2 \\ \hline -(x-\xi)q_y(\xi) \\ \hline -q_y(\xi) \\ \hline \end{array} d\xi, \quad (2.11)$$

где  $A_{13} = x^2/2$ ;  $A_{14} = x^3/6$ . Если ось  $ou$  стержня направлена вверх, то знаки «-» в матрицах **A**, **B** сдвига и изгиба опускаются. Элементы матрицы нагрузки **B** уравнения (2.9) для  $q_y(x)$  по (1.15) не будут отличаться от выражений (2.5). Для уравнения (2.10) элементы вектора **B** после подстановки  $m(x)$  по (1.16) и интегрирования предстанут следующим образом

$$\begin{aligned} B_{11} &= M_{ip}(x-a_1)_- + m \left[ \frac{(x-a_2)_-^2}{2} - \frac{(x-a_3)_+^2}{2} \right]; \\ B_{21} &= M_{ip} \cdot H(x-a_1) + m \left[ (x-a_2)_- - (x-a_3)_+ \right]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Элементы матрицы **B** уравнения изгиба (2.11) для  $q_y(x)$  по (1.17) примут вид

$$\begin{aligned} B_{11} &= F(x-a_1)_-^3 / 6 + M(x-a_2)_+^2 / 2 + q \left[ (x-a_3)_+^4 - (x-a_4)_+^4 \right] / 24; \\ B_{21} &= F(x-a_1)_-^2 / 2 + M(x-a_2)_+ + q \left[ (x-a_3)_+^3 - (x-a_4)_+^3 \right] / 6; \\ B_{31} &= -F(x-a_1)_- - M \cdot H(x-a_2) - q \left[ (x-a_3)_+^2 - (x-a_4)_+^2 \right] / 2; \\ B_{41} &= -F \cdot H(x-a_1) - q \left[ (x-a_3)_+ - (x-a_4)_+ \right]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Отметим, что матрица коэффициентов уравнения (2.11) имеет 10 ненулевых элементов, а матрица коэффициентов уравнения изгиба МКЭ – 16 [71]. Исходя из представленного можно утверждать, что одномерный вариант МГЭ открывает класс задач механики стержневых систем с более эффективными показателями исходных матриц по сравнению с МКЭ.

## 2.2. КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

Рассмотрим процедуру построения соотношений МГЭ для кручения тонкостенных стержней открытого профиля. Уравнение стесненного кручения тонкостенного стержня получено проф. В.З. Власовым [24].

$$\theta^{IV}(x) - \kappa^2 \theta(x) = m(x) / EI_\omega, \quad (2.14)$$

где  $\kappa$  – изгибно-крутильная характеристика поперечного сечения стержня, определяемая выражением

$$\kappa^2 = GI_\kappa / EI_\omega; \quad (2.15)$$

$EI_\omega$  – секториальная жесткость сечения. В качестве кинематических параметров выступают угол закручивания  $\theta(x)$  и производная угла закручивания  $\theta'(x)$ . Статическими параметрами являются бимомент  $B_\omega(x)$  и изгибно-крутящий момент  $M_\omega(x)$ . Особенность стесненного кручения тонкостенного стержня состоит в том, что кинематический параметр  $\theta'(x)$  имеет механический смысл крутящего момента (статической величины), а статические параметры  $B_\omega(x)$  и  $M_\omega(x)$  не определяются из уравнений статики. Согласно теории статического кручения тонкостенного стержня открытого профиля имеют место соотношения

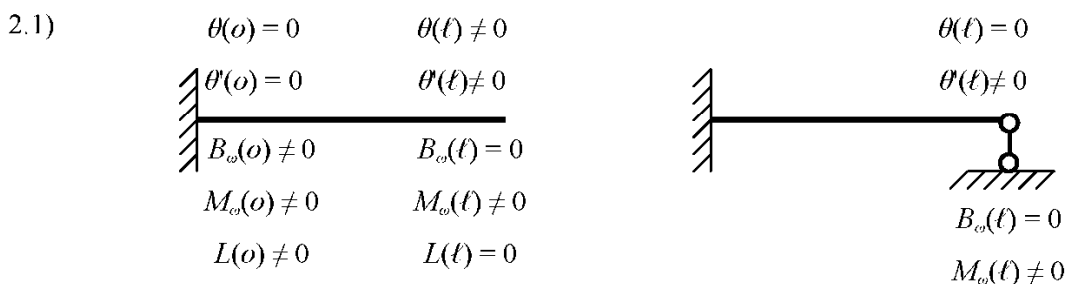
$$\begin{aligned} B_\omega(x) &= -EI_\omega \theta''(x); \quad M_\omega(x) = -EI_\omega \theta'''(x); \\ L(x) &= M_\omega(x) + M_{ip}(x) = -EI_\omega \theta'''(x) + GI_\kappa \theta'(x), \end{aligned} \quad (2.16)$$

где  $L(x)$  – крутящий момент внешних сил относительно центра изгиба.

Уравнение (2.14) по форме записи совпадает с дифференциальным уравнением продольно-поперечного изгиба прямолинейного стержня, когда продольная сила растягивающая. Поэтому существует аналогия между параметрами стесненного кручения и продольно-поперечного изгиба

$$\theta(x) \sim V(x), \theta'(x) \sim \varphi(x), B_\omega(x) \sim M(x), M_\omega(x) \sim Q(x). \quad (2.17)$$

Эта аналогия позволяет упростить анализ краевых условий для параметров кручения. Если какой-либо параметр продольно-поперечного изгиба для упругой системы не равен нулю (равен нулю), то его аналог при стесненном кручении также не равен нулю (равен нулю) (рис.



**Рис. 2.1**

Решение задачи Коши стесненного кручения тонкостенного стержня представит в виде

$$GI_\kappa \theta(x) = GI_\kappa \theta(o) + GI_\kappa \theta'(o) \cdot x + [-B_\omega(o)](ch\kappa x - 1) + [-M_\omega(o)] \frac{sh\kappa x - \kappa x}{\kappa} + \int_0^x \frac{sh\kappa(x-\xi) - \kappa(x-\xi)}{\kappa} m(\xi) d\xi. \quad (2.18)$$

Данное выражение является другой формой известного решения В.З. Власова. Дифференцируя уравнение (2.18) и используя соотношения (2.15), (2.16), можно получить другие параметры кручения. В матричной форме соотношения МГЭ стесненного кручения будут иметь вид

$$\begin{bmatrix} GI_\kappa \theta(x) \\ GI_\kappa \theta'(x) \\ B_\omega(x) \\ M_\omega(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & -A_{13} & -A_{14} \\ & 1 & -A_{23} & -A_{13} \\ & & A_{33} & A_{34} \\ & & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} GI_\kappa \theta(o) \\ GI_\kappa \theta'(o) \\ B_\omega(o) \\ M_\omega(o) \end{bmatrix} + \int_0^x \begin{bmatrix} A_{14}(x-\xi) \\ A_{13}(x-\xi) \\ -A_{34}(x-\xi) \\ -A_{33}(x-\xi) \end{bmatrix} m(\xi) d\xi, \quad (2.19)$$

где элементы матрицы фундаментальных ортонормированных функций и матрицы нагрузки для  $m(x)$  по (1.16) запишутся следующим образом

$$A_{13} = ch\kappa x - 1; \quad A_{14} = \frac{sh\kappa x - \kappa x}{\kappa}; \quad A_{23} = \kappa sh\kappa x; \quad A_{33} = ch\kappa x; \quad A_{34} = \frac{sh\kappa x}{\kappa};$$

$$\begin{aligned}
B_{11} &= M_{sp} \left[ \frac{sh\kappa(x-a_1)_- - \kappa(x-a_1)_-}{\kappa} \right] + m \left\{ \left[ \frac{ch\kappa(x-a_2)_- - H(x-a_2)_-}{\kappa^2} - \frac{(x-a_2)_-^2}{2} \right] - \right. \\
&\quad \left. - \left[ \frac{ch\kappa(x-a_3)_- - H(x-a_3)_-}{\kappa^2} - \frac{(x-a_3)_-^2}{2} \right] \right\} + B_\omega [ch\kappa(x-a_4)_- - H(x-a_4)_-]; \\
B_{21} &= M_{sp} [ch\kappa(x-a_1)_- - H(x-a_1)_-] + m \left\{ \left[ \frac{sh\kappa(x-a_2)_-}{\kappa} - (x-a_2)_- \right] - \right. \\
&\quad \left. - \left[ \frac{sh\kappa(x-a_3)_-}{\kappa} - (x-a_3)_- \right] \right\} + B_\omega \cdot \kappa sh\kappa(x-a_4)_-; \\
B_{31} &= -M_{sp} \frac{sh\kappa(x-a_1)_-}{\kappa} - m \cdot \left[ \frac{ch\kappa(x-a_2)_- - H(x-a_2)_-}{\kappa^2} - \frac{ch\kappa(x-a_3)_- - H(x-a_3)_-}{\kappa^2} \right] - \\
&\quad - B_\omega \cdot ch\kappa(x-a_4)_-; \\
B_{41} &= -M_{sp} \cdot ch\kappa(x-a_1)_- - m \frac{sh\kappa(x-a_2)_- - sh\kappa(x-a_3)_-}{\kappa} - B \cdot \kappa sh\kappa(x-a_4)_-.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

### 2.3. СООТНОШЕНИЯ МГЭ ПРОСТРАНСТВЕННОГО СЛУЧАЯ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО СТЕРЖНЯ

При малых перемещениях и упругих деформациях будет справедлив принцип независимости действия сил (принцип суперпозиции). Этот принцип позволяет легко получить соотношения МГЭ для общего (пространственного) случая деформирования стержня. Для этого необходимо объединить уравнения (2.4), (2.9), (2.10), (2.11) и (2.19) путем квазидиагонализации матрицы фундаментальных функций. Общее уравнение МГЭ представлено ниже, где  $\mathbf{A}_n$ ,  $\mathbf{A}_{кр}$ ,  $\mathbf{A}_p$ ,  $\mathbf{A}_c$  – матрицы фундаментальных функций изгиба, кручения, растяжения и сдвига;  $G_y(x, \xi)$ ,  $G_{sp}(x, \xi)$ ,  $G_p(x, \xi)$ ,  $G_c(x, \xi)$  – функция Грина этих видов деформирования. Уравнение (2.22) имеет 16-й порядок, а число ненулевых элементов матрицы  $\mathbf{A}$  равно 32. Аналогичное уравнение МКЭ имеет 16-й порядок [71], но содержит 48 ненулевых элементов матрицы жесткости, т.е. разреженность матрицы коэффициентов МГЭ выше, чем у матрицы жесткости МКЭ примерно на 33,0%. Порядок уравнения (2.22) можно уменьшить, если совместить перемещения и силы от изгиба и сдвига. В этом случае объединенное уравнение изгиба и сдвига примет вид

$$\begin{aligned}
V_{II}(x) &= V_{II}(0) \cdot 1 + \varphi(0) \cdot x + \frac{M(0)}{EI} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{Q(0)}{EI} \left( \frac{x^3}{6} - \kappa_* x \right) + \\
&\quad + \int_0^x \left[ \frac{(x-\xi)^3}{6EI} - \kappa_* (x-\xi) \right] q(\xi) d\xi,
\end{aligned} \tag{2.21}$$

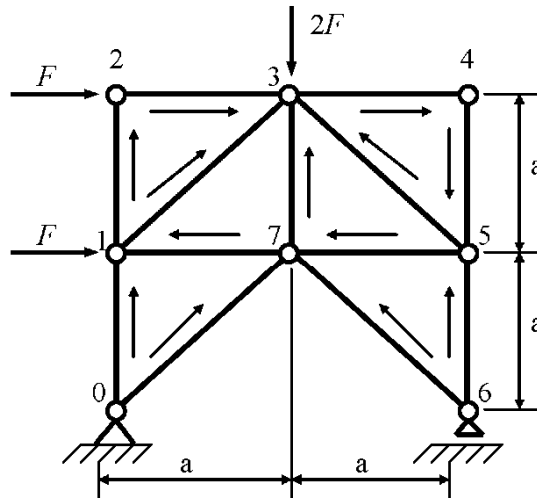
где  $V_{II}(x) = V(x) + V_c(x)$  – полный прогиб;  $\kappa_* = \kappa_1 EI / GA$ .



сами узлы представляют собой шарниры. Для расчета таких конструкций достаточно применить уравнение (2.4).

### 2.4.1. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ ФЕРМЫ

Пример 1 [79, с. 217]. Определить усилия в стержнях фермы (рис. 2.2).



**Рис. 2.2**

Из уравнения (2.4) следует, что нормальная сила не зависит от перемещения  $U(o)$  и  $N(x)$  можно считать независимой от перемещений. Если необходимо определить только усилия, то уравнения для перемещений в соотношениях (2.4) можно опустить. В этом случае порядок матричного уравнения схемы (1.38) сокращается в 2 раза, а матрица  $A^*$  становится единичной. Матрица  $Y$  будет содержать уравнения равновесия узлов и независимые конечные параметры, т.е. известный метод расчета ферм – метод вырезания узлов является частным случаем МГЭ, когда не используются уравнения для продольных перемещений. Алгоритм МГЭ представим набором отдельных пунктов.

1. Выполняем кинематический анализ и определяем число степеней свободы по формуле

$$W = 2y - C - C_0 = 2 \cdot 8 - 13 - 3 = 16 - 16 = 0,$$

где  $y = 8$  – число узлов фермы;  $C = 13$  – число стержней фермы;  $C_0 = 3$  – число опорных связей. Поскольку  $W = 0$ , то ферма геометрически неизменяема и статически определима.

2. Разбиваем ферму на 13 стержней и нумеруем узлы. Обозначаем стрелками начало и конец каждого стержня (рис. 2.2).

3. Формируем матричное уравнение схемы (1.32). Уравнения равновесия узлов записываем в матрицу  $Y$



1	$N^{0\ 1}(o)$
2	$N^{1\ 2}(o)$
3	$N^{2-3}(o) = 0; N^{5-3}(\ell)$
4	$N^{3-4}(o)$
5	$N^{4-5}(o) = 0; N^{1-3}(\ell)$
6	$N^{5-7}(o) = -\frac{\sqrt{2}}{2} N^{5-3}(o); N^{6-7}(\ell)$
7	$N^{6-7}(o) = 0; N^{4-5}(\ell)$
8	$N^{7\ 1}(o)$
9	$N^{7-3}(o)$
10	$N^{1-3}(o)$
11	$N^{5-3}(o)$
12	$N^{6-5}(o)$
13	$N^{0\ 7}(o)$

1	$N^{0\ 1}(\ell) = N^{1\ 2}(o) + \frac{\sqrt{2}}{2} N^{1\ 3}(o)$
2	$N^{1-2}(\ell) = 0$
3	$N^{2-3}(\ell) = \frac{\sqrt{2}}{2} N^{5-3}(o) - \frac{\sqrt{2}}{2} N^{1-3}(\ell) + N^{3-4}(o)$
4	$N^{3-4}(\ell) = 0$
5	$N^{4-5}(\ell)$
6	$N^{5-7}(\ell) = N^{7\ 1}(o) + N^{7-3}(o) - \sqrt{2} N^{6-7}(\ell)$
7	$N^{6-7}(\ell)$
8	$N^{7-1}(\ell) = -\frac{\sqrt{2}}{2} N^{1-3}(o)$
9	$N^{7-3}(\ell) = -\frac{\sqrt{2}}{2} N^{1-3}(\ell) - \frac{\sqrt{2}}{2} N^{5-3}(\ell)$
10	$N^{1-3}(\ell)$
11	$N^{5-3}(\ell)$
12	$N^{6-5}(\ell) = N^{4-5}(\ell) + \frac{\sqrt{2}}{2} N^{5-3}(o)$
13	$N^{0\ 7}(\ell) = \sqrt{2} N^{7-3}(o) - N^{6-7}(\ell)$

1	
2	
3	1
4	
5	
6	
7	
8	-1
9	-2
10	
11	
12	
13	

Обнуляем 3, 5, 6 и 7 столбцы матрицы **A**, т.к. нулевыми оказались усилия в соответствующих строках матрицы **X** (силу  $N^{5-7}(o)$  переносим в 11-ю строку с компенсирующим элементом  $A(6,11) = -\sqrt{2}/2$ ). В 3, 5, 6 и 7 строки вектора **X\*** переносим независимые параметры  $N^{5-7}(\ell)$ ,  $N^{1-3}(\ell)$ ,  $N^{6-7}(\ell)$ ,  $N^{4-5}(\ell)$ , не входящие в уравнения равновесия узлов. Топологическая матрица **C** фермы и разрешающая система уравнений МГЭ представлены ниже.

4. Переставляя строки, как показано цифрами справа, методом Гаусса получаем усилия, совпадающие с результатами работы [79]

$$N^{0\ 1}(o) = -1,5F; \quad N^{1\ 2}(o) = 0; \quad N^{5\ 3}(\ell) = -3,535F; \quad N^{3\ 4}(o) = 0; \quad N^{1\ 3}(\ell) = -2,121F;$$

$$N^{6-7}(\ell) = 0; \quad N^{4-5}(\ell) = 0; \quad N^{7-1}(o) = 0,5F; \quad N^{7-3}(o) = 2F; \quad N^{1-3}(o) = -2,121F;$$

$$N^{5\ 3}(o) = -3,535F; \quad N^{6\ 5}(o) = -2,5F; \quad N^{0\ 7}(o) = 2,828F.$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1		-1								$-\frac{\sqrt{2}}{2}$			
2													

3			$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$								
4													
5								-1					
6						$\sqrt{2}$		-1	-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		
C = 7						-1							
8											$\frac{\sqrt{2}}{2}$		
9			$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$								
10					-1								
11			-1										
12								-1				$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	
13						1			$-\sqrt{2}$				

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13		
1	1	-1								$-\frac{\sqrt{2}}{2}$				$N^{0\ 1}(o)$	1
2		1												$N^{1\ 2}(o)$	1
3			$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$									$N^{5\ 3}(\ell)$	3
4				1										$N^{3\ 4}(o)$	4
5							-1							$N^{1\ 3}(\ell)$	7
6						$\sqrt{2}$		-1	-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$			$N^{6\ 7}(\ell)$	8
7						-1								$N^{4\ 5}(\ell)$	6
8							1			$\frac{\sqrt{2}}{2}$				$N^{7\ 1}(o)$	-1
9			$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$				1					$N^{7\ 3}(o)$	-2
10					-1					1				$N^{1\ 3}(o)$	5
11			-1								1			$N^{5\ 3}(o)$	11
12							-1				$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1		$N^{6\ 5}(o)$	12
13						1			$-\sqrt{2}$				1	$N^{0\ 7}(o)$	13

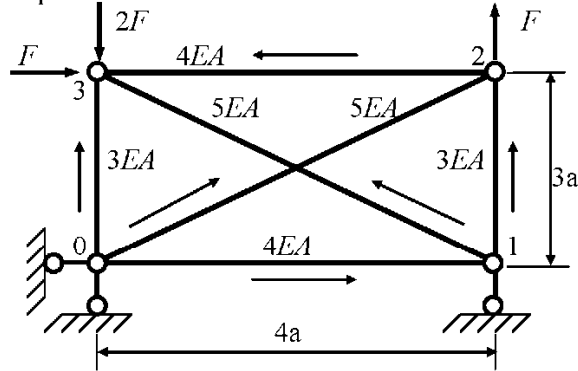
Если сравнивать с методикой расчета работы [79], то очевидна более простая логика МГЭ.

### 2.4.2. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ ФЕРМЫ

**Пример 2** [29, с. 331]. Определить усилия в стержнях и абсолютные перемещения узлов статически неопределимой фермы (рис. 2.3).

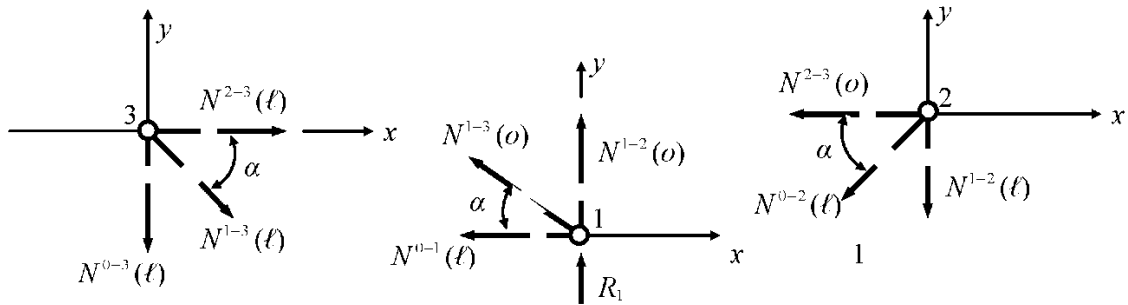
Кинематический анализ  $W = 2y - C - C_0 = 2 \cdot 4 - 6 - 3 = 8 - 9 = -1 < 0$ , т.е. ферма геометрически неизменяема и статически неопределима.

Разбиваем ферму на 6 стержней и нумеруем узлы. Стрелки на рис. 2.3 показывают начало и конец каждого стержня.



**Рис. 2.3**

3. Составляем уравнения равновесия узлов фермы в соответствии с рис. 2.4. Уравнения равновесия, содержащие реакции внешних связей не рассматриваем



**Рис. 2.4**

Узел 1

$$\sum x = 0; N^{0-1}(l) + N^{1-3}(o) \cos \alpha = 0 \rightarrow N^{0-1}(l) = -0,8N^{1-3}(o).$$

Узел 2

$$\sum x = 0; N^{0-2}(l) \cos \alpha + N^{2-3}(o) = 0 \rightarrow N^{0-2}(l) = -1,25N^{2-3}(o);$$

$$\sum y = 0; N^{1-2}(l) + N^{0-2}(l) \sin \alpha = 0 \rightarrow N^{1-2}(l) = -0,6N^{0-2}(l) = 0,75N^{2-3}(o).$$

Узел 3

$$\sum x = 0; N^{2-3}(l) + N^{1-3}(l) \cos \alpha = 0 \rightarrow N^{2-3}(l) = -0,8N^{1-3}(l).$$

$$\sum y = 0; N^{0-3}(l) + N^{1-3}(l) \sin \alpha = 0 \rightarrow N^{0-3}(l) = -0,6N^{1-3}(l) = 0,75N^{2-3}(l).$$

Уравнения совместности перемещений узлов 1, 2, 3 составляем исходя из деформированного состояния фермы по рис. 2.5, которое выбрано как отвечающее заданной нагрузке.

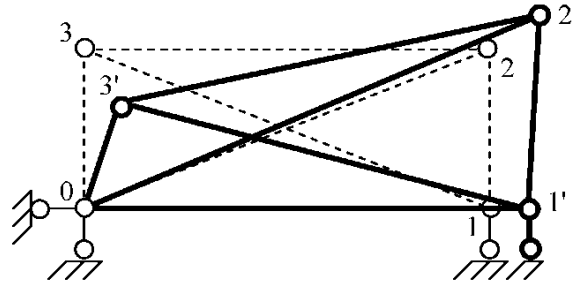


Рис. 2.5

Положения узлов фермы после деформирования изобразим отдельными схемами (рис.2.6)

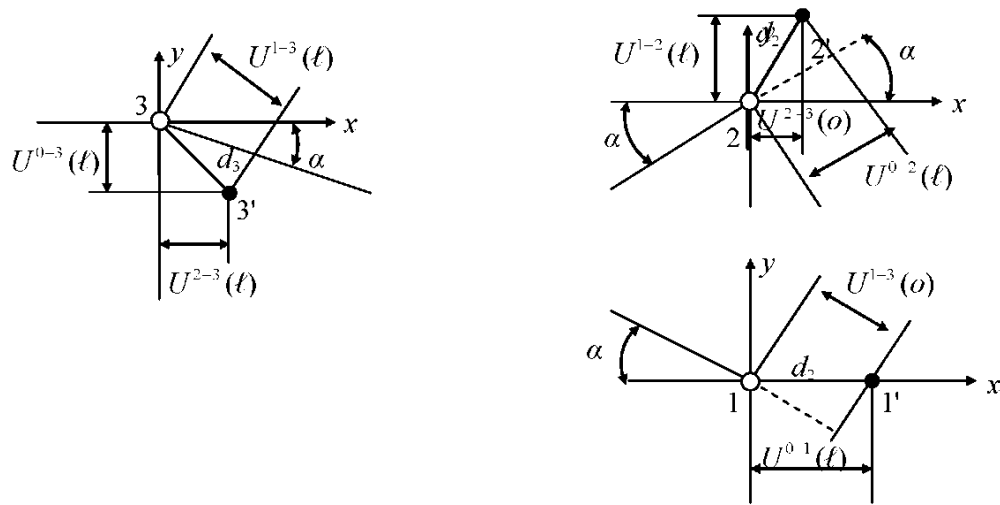


Рис. 2.6

Узел 1

$$U^{1-3}(o) = -U^{0-1}(l) \cos \alpha \rightarrow U^{0-1}(l) = -1,25U^{1-3}(o).$$

Узел 2

$$U^{1-2}(l) \sin \alpha - U^{2-3}(o) \cos \alpha = U^{0-2}(l) \rightarrow U^{0-2}(l) = 0,6U^{1-2}(l) - 0,8U^{2-3}(o).$$

Узел 3

$$U^{0-3}(l) \sin \alpha + U^{2-3}(l) \cos \alpha = U^{1-3}(l) \rightarrow U^{1-3}(l) = 0,6U^{0-3}(l) + 0,8U^{2-3}(l).$$

Горизонтальную силу  $F$  включаем в нагрузку стержня 2-3, вертикальную силу  $F$  – в нагрузку стержня 1-2 и  $2F$  – в нагрузку стержня 0-3. Принимая  $F = a-1$ , формируем матрицы МГЭ.

$$\mathbf{X}_* = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{matrix} 4EAU^{0-1}(o) = 0,3EAU^{1-2}(l) \\ N^{0-1}(o) \\ 5EAU^{0-2}(o) = 0,3EAU^{0-3}(l) \end{matrix}; \quad \mathbf{Y} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{matrix} 4EAU^{0-1}(l) = -5EAU^{1-3}(o) \\ N^{0-1}(l) = -0,8N^{1-3}(o) \\ 5EAU^{0-2}(l) = 3EAU^{1-2}(l) - 4EAU^{2-3}(o) \end{matrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}.$$

4	$N^{0\ 2}(o)$
5	$3EAU^{0\ 3}(o) = 0; 4EAU^{2\ 3}(\ell)$
6	$N^{0\ 3}(o)$
7	$3EAU^{1\ 2}(o) = 0; N^{1\ 3}(\ell)$
8	$N^{1\ 2}(o)$
9	$5EAU^{1\ 3}(o)$
10	$N^{1\ 3}(o)$
11	$4EAU^{2\ 3}(o)$
12	$N^{2\ 3}(o)$

4	$N^{0\ 2}(\ell) = -1,25N^{2\ 3}(o)$
5	$3EAU^{0\ 3}(\ell)$
6	$N^{0\ 3}(\ell) = -0,6N^{1\ 3}(\ell)$
7	$3EAU^{1\ 2}(\ell)$
8	$N^{1\ 2}(\ell) = 0,75N^{2\ 3}(o)$
9	$5EAU^{1\ 3}(\ell) = 3EAU^{0\ 3}(\ell) + 4EAU^{2\ 3}(\ell)$
10	$N^{1\ 3}(\ell)$
11	$4EAU^{2\ 3}(\ell)$
12	$N^{2\ 3}(\ell) = -0,8N^{1\ 3}(\ell)$

4	
5	
6	-2
7	
8	1
9	
10	
11	
12	-1

В матрицу  $X^*$  переносим независимые параметры 5, 7, 10 и 11 строк вектора  $Y$ , остальные параметры переносим по уравнениям их связи. Топологическая матрица  $C$  и разрешающая система уравнений МГЭ данной фермы принимают вид

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1									1			
2										0,8		
3	-1										1	
4												1,25
5			-1									
6							0,6					
7	-1											
8												-3/4
9			-1		-1							
10							-1					
11					-1							
12								0,8				

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1		4							1			
2		1								0,8		
3	-1			5							1	
4				1								1,25
5			-1			3						

$3EAU^{1\ 2}(\ell)$	9
$N^{0\ 1}(o)$	2
$3EAU^{0\ 3}(\ell)$	4
$N^{0\ 2}(o)$	12
$4EAU^{2\ 3}(\ell)$	3

6					1	0,6						$N^{0-3}(o)$	-2	6
7	-1						3					$N^{1-3}(\ell)$		1
8							1					$N^{1-2}(o)$	1	8
9			-1		-1			1	5			$5EAU^{1-3}(o)$		5
10						-1			1			$N^{1-3}(o)$		10
11					-1					1	4	$4EAU^{2-3}(o)$		11
12							0,8					$N^{2-3}(o)$	-1	7

Переставив строки матриц  $\mathbf{A}^*$  и  $\mathbf{B}$ , как показано цифрами справа, методом Гаусса определяем значения граничных параметров, которые совпадают с результатами смешанного метода [29]

$$N^{0-1} = 0,620F; \quad N^{1-2} = 0,715F; \quad N^{2-3} = -0,380F; \quad N^{0-3} = -1,535F;$$

$$N^{1-3} = -0,775F; \quad N^{0-2} = 0,475F; \quad d_1 = 0,620 \frac{Fa}{EA}; \quad d_2 = 0,717 \frac{Fa}{EA}; \quad d_3 = 1,596 \frac{Fa}{EA}.$$

Сравнение МГЭ с алгоритмом смешанного метода показывает, что логика формирования разрешающей системы уравнений МГЭ более простая и требует составления одной матрицы коэффициентов  $\mathbf{A}^*$ , а в смешанном методе матрица коэффициентов формируется из двух матриц. Отметим также, что заполненность матрицы  $\mathbf{A}^*$  МГЭ для данного примера равна 19,4%, в смешанном методе – 21,5%. После прямого хода метода Гаусса заполненность матрицы МГЭ уменьшается (18%), а заполненность матрицы смешанного метода увеличивается (22,3%). Учитывая, что по МГЭ определяются начальные параметры, а по смешанному методу – узловые усилия и перемещения, можно считать, что трудоемкость расчета фермы по МГЭ будет меньше, чем по смешанному методу.

Для расчета пространственных ферм также можно использовать интегральные уравнения (2.4), но уравнения равновесия и совместности перемещений узлов нужно составлять для пространственного случая работы элементов фермы.

### 2.4.3. КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛОК И РАМ

К числу простых видов сопротивлений, имеющих важное практическое значение, относится кручение. Рассмотрим примеры расчета тонкостенных неразрезных балок и рам только на один вид сопротивления – стесненное кручение.

**Пример 3** [16, с. 313]. Определить напряженно-деформированное состояние неразрезной тонкостенной балки открытого профиля при следующих данных: сечение балки по всей длине – двутавр № 60<sup>а</sup>,  $\kappa = 0,7427$  1/м (рис. 2.7). Для формирования разрешающего уравнения используем интегральные уравнения (2.19) и выражения (2.20).

1. Разбиваем балку на 3 стержня и нумеруем узлы. Стрелками указаны начало и конец каждого элемента.

2. Составляем матричное уравнение типа (1.32). Условные уравнения равновесия и совместности перемещений узлов 1, 2 в соответствии с аналогией (2.17) приведены в матрице  $\mathbf{Y}$ . Уравнения для изгибно-крутящих моментов  $M_\omega(x)$  не используются, т.к. уравнения равновесия их аналогов  $Q(x)$  содержат неизвестные реакции связей 1 и 2. Матрицы  $\mathbf{X}^*$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{B}$  примут вид

$$\mathbf{X}^* = \begin{matrix} 1 & GI_\kappa \theta^{0-1}(o) = 0; M_\omega^{0-1}(\ell) \\ 2 & GI_\kappa \theta^{0-1}(o) = 0; M_\omega^{1-2}(\ell) \\ 3 & B_\omega^{0-1}(o) \\ 4 & M_\omega^{0-1}(o) \\ 5 & GI_\kappa \theta^{1-2}(o) = 0; GI_\kappa \theta^{2-3}(\ell) \\ 6 & GI_\kappa \theta^{1-2}(o) \\ 7 & B_\omega^{1-2}(o) \\ 8 & M_\omega^{1-2}(o) \\ 9 & GI_\kappa \theta^{2-3}(o) = 0; GI_\kappa \theta^{2-3}(\ell) \\ 10 & GI_\kappa \theta^{2-3}(o) \\ 11 & B_\omega^{2-3}(o) \\ 12 & M_\omega^{2-3}(o) \end{matrix}; \quad \mathbf{Y} = \begin{matrix} 1 & GI_\kappa \theta^{0-1}(\ell) = 0 \\ 2 & GI_\kappa \theta^{0-1}(\ell) = GI_\kappa \theta^{1-2}(o) \\ 3 & B_\omega^{0-1}(\ell) = B_\omega^{1-2}(o) \\ 4 & M_\omega^{0-1}(\ell) \\ 5 & GI_\kappa \theta^{1-2}(\ell) = 0 \\ 6 & GI_\kappa \theta^{1-2}(\ell) = GI_\kappa \theta^{2-3}(o) \\ 7 & B_\omega^{1-2}(\ell) = B_\omega^{2-3}(o) \\ 8 & M_\omega^{1-2}(\ell) \\ 9 & GI_\kappa \theta^{2-3}(\ell) \\ 10 & GI_\kappa \theta^{2-3}(\ell) \\ 11 & B_\omega^{2-3}(\ell) = 0 \\ 12 & I^{2-3}(\ell) = 0 \rightarrow M_\omega^{2-3}(\ell) = -GI_\kappa \theta^{2-3}(\ell) \end{matrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{matrix} 1 & -311,1324 \\ 2 & -248,1873 \\ 3 & 343,1324 \\ 4 & 256,1873 \\ 5 & -10,1646 \\ 6 & -11,8239 \\ 7 & 19,7646 \\ 8 & 15,0239 \\ 9 & \\ 10 & \\ 11 & 1,0 \\ 12 & \end{matrix}$$

где элементы вектора нагрузки  $\mathbf{B}$  определены по формулам (2.20) при  $m = -1,00 \text{ кН}$ ;

$M_{\text{вп}} = -3,20 \text{ кНм}$ ,  $B_\omega = -1,00 \text{ кНм}^2$ ;  $\ell^{0-1} = 8 \text{ м}$ ,  $\ell^{1-2} = 6 \text{ м}$ ,  $\ell^{2-3} = 2 \text{ м}$ ;  $a_1 = 3 \text{ м}$ ,  $a_2 = 0 \text{ м}$ ,  $a_3 = 8 \text{ м}$ ,  $a_4 = (2-0) \text{ м}$ .

В матрице  $\mathbf{X}^*$  нулевыми оказались 1, 2, 5 и 9 строки. Соответственно обнуляем 1, 2, 5 и 9 столбцы матрицы  $\mathbf{A}$ . Топологическая матрица  $\mathbf{C}$  и разрешающее уравнение МГЭ для балки примут вид

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \end{matrix}$$

$$C =$$

2													
3													
4													
5													
6													
7													
8													
9													
10													
11													
12													

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12				
1			-A <sub>13</sub>	-A <sub>14</sub>										$M_{\omega}^{0-1}(\ell)$	$-B_{11}^{0-1}$	3
2			-A <sub>23</sub>	-A <sub>13</sub>		-1								$M_{\omega}^{1-2}(\ell)$	$-B_{21}^{0-1}$	6
3			A <sub>33</sub>	A <sub>34</sub>			-1							$B_{\omega}^{0-1}(o)$	$B_{31}^{0-1}$	4
4	-1		A <sub>23</sub>	A <sub>33</sub>										$M_{\omega}^{0-1}(o)$	$B_{41}^{0-1}$	1
5						6	-A <sub>13</sub>	-A <sub>14</sub>						$GI_{\kappa}\theta^{2-3}(\ell)$	$-B_{11}^{1-2}$	7
6						1	-A <sub>23</sub>	-A <sub>13</sub>		-1				$GI_{\kappa}\theta^{1-2}(o)$	$-B_{21}^{1-2}$	10
7							A <sub>33</sub>	A <sub>34</sub>				-1		$B_{\omega}^{1-2}(o)$	$B_{31}^{1-2}$	8
8		-1					A <sub>23</sub>	A <sub>33</sub>						$M_{\omega}^{1-2}(o)$	$B_{41}^{1-2}$	2
9						-1				2	-A <sub>13</sub>	-A <sub>14</sub>		$GI_{\kappa}\theta^{2-3}(\ell)$		5
10										-1	1	-A <sub>23</sub>	-A <sub>13</sub>	$GI_{\kappa}\theta^{2-3}(o)$		9
11												A <sub>33</sub>	A <sub>34</sub>	$B_{\omega}^{2-3}(o)$	$B_{31}^{2-3}$	11
12										1		A <sub>23</sub>	A <sub>33</sub>	$M_{\omega}^{2-3}(o)$		12

3. Переставляя строки матриц  $A^*$ ,  $B$  в новом порядке, как показано цифрами справа, методом Гаусса получаем значения граничных параметров

$$M_{\omega}^{0-1}(\ell) = 3,4004 \text{ кНм}, \quad M_{\omega}^{1-2}(\ell) = 0,9276 \text{ кНм}, \quad B_{\omega}^{0-1}(o) = 3,7593 \text{ кНм}^2;$$

$$M_{\omega}^{0-1}(o) = -4,1205 \text{ кНм}, \quad GI_{\kappa}\theta^{2-3}(\ell) = -0,1454 \text{ кНм}^2; \quad GI_{\kappa}\theta^{1-2}(\ell) = 0,4789 \text{ кНм};$$

$$B_{\omega}^{0-1}(o) = 2,7948 \text{ кНм}^2; \quad M_{\omega}^{1-2}(o) = -2,4023 \text{ кНм}, \quad GI_{\kappa}\theta^{2-3}(\ell) = -0,5199 \text{ кНм};$$

$$GI_{\kappa}\theta^{2-3}(o) = 0,3490 \text{ кНм}, \quad B_{\omega}^{2-3}(o) = 0,8548 \text{ кНм}^2; \quad M_{\omega}^{2-3}(o) = -0,3490 \text{ кНм}.$$

Значения бимоментов совпадают с результатами работы [16], полученными методом трех бимоментов (методом сил). Решение данной и других краевых задач может быть выполнено по программе на алгоритмическом языке Fortran, приведенной в Приложении №1. Для



упрощения программ матрицы **A\***, **B** вводятся с помощью операторов присваивания. Сами программы преследуют учебные цели и могут совершенствоваться по разным направлениям.

4. Для определения напряженно-деформированного состояния балки используем уравнение (2.19), куда подставляем найденные значения начальных параметров:

стержень 0-1

$GI_{\kappa}\theta^{0-1}(x)$		1	x	-A <sub>13</sub>	-A <sub>14</sub>	0,0	+(-1,0)	$(2ch\kappa x - 2 - \kappa^2 x^2)/2\kappa^2$
$GI_{\kappa}\theta'^{0-1}(x)$	=		1	-A <sub>23</sub>	-A <sub>13</sub>	0,0		$(sh\kappa x - \kappa x)/\kappa$
$B_{\omega}^{0-1}(x)$				A <sub>33</sub>	A <sub>34</sub>	3,7593		$-(ch\kappa x - 1)/\kappa^2$
$M_{\omega}^{0-1}(x)$				A <sub>23</sub>	A <sub>33</sub>	-4,1205		$-sh\kappa x/\kappa$

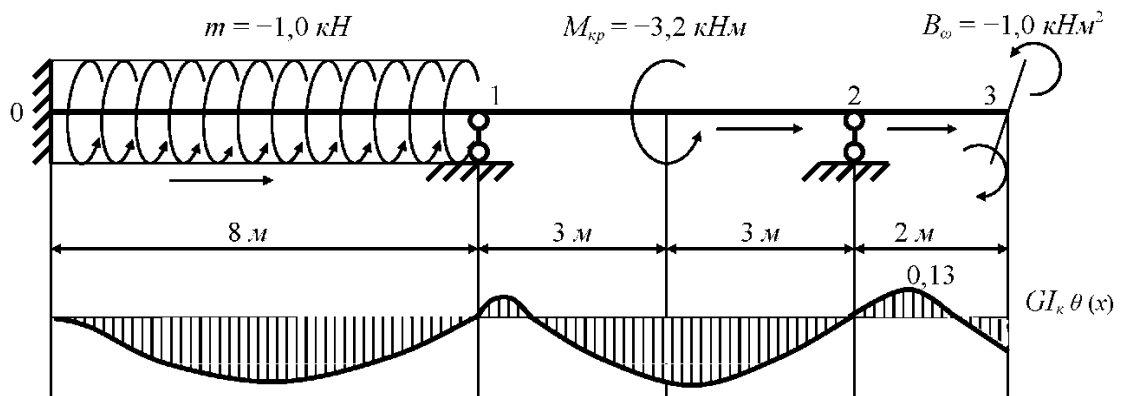
стержень 1-2

$GI_{\kappa}\theta^{1-2}(x)$		1	x	-A <sub>13</sub>	-A <sub>14</sub>	0,0	+(-3,2)	$[sh\kappa(x-3)_+ - \kappa(x-3)_-]/\kappa$
$GI_{\kappa}\theta'^{1-2}(x)$	=		1	-A <sub>23</sub>	-A <sub>13</sub>	0,4789		$ch\kappa(x-3)_+ - H(x-3)$
$B_{\omega}^{1-2}(x)$				A <sub>33</sub>	A <sub>34</sub>	2,7948		$-sh\kappa(x-3)_+/\kappa$
$M_{\omega}^{1-2}(x)$				A <sub>23</sub>	A <sub>33</sub>	-2,4023		$-ch\kappa(x-3)_+$

стержень 2-3

$GI_{\kappa}\theta^{2-3}(x)$		1	x	-A <sub>13</sub>	-A <sub>14</sub>	0,0	+(-1,0)	$ch\kappa(x-2)_- - H(x-2)$
$GI_{\kappa}\theta'^{2-3}(x)$	=		1	-A <sub>23</sub>	-A <sub>13</sub>	0,3490		$\kappa sh\kappa(x-2)_-$
$B_{\omega}^{2-3}(x)$				A <sub>33</sub>	A <sub>34</sub>	0,8548		$-ch\kappa(x-2)_-$
$M_{\omega}^{2-3}(x)$				A <sub>23</sub>	A <sub>33</sub>	-0,3490		$-\kappa sh\kappa(x-2)_-$

Результаты вычислений параметров балки по этим уравнениям сведены в таблицу 1.



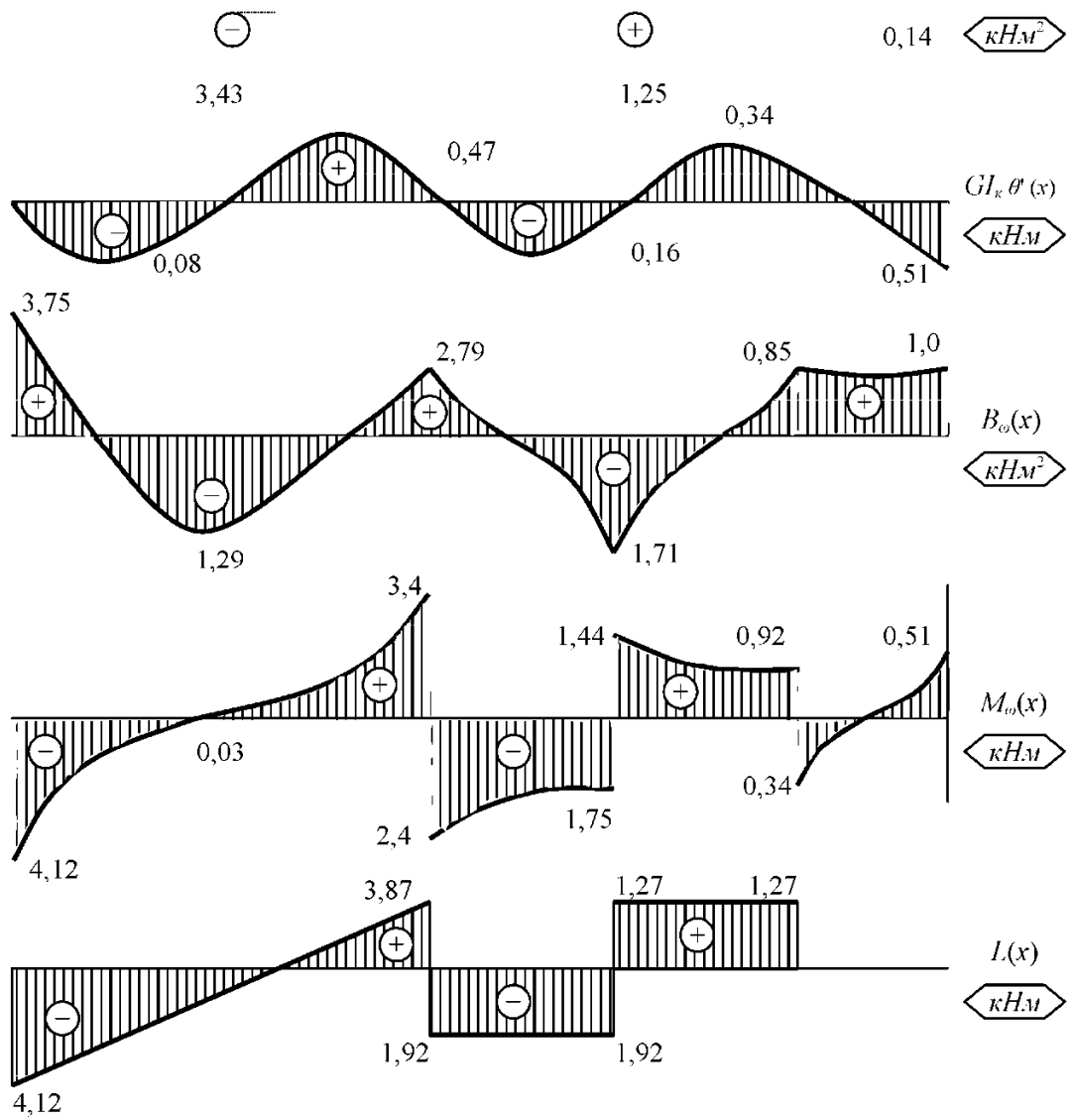


Рис. 2.7

Таблица 1

Глобальная координата $x, м$	Локальная координата $x, м$	Значения параметров				
		Угол закручивания $GI_k \theta(x), кНм^2$	Производная $GI_k \theta'(x), кНм$	Бимомент $B_\omega(x), кНм^2$	Изгибно-крутящий момент $M_\omega(x), кНм$	Крутящий момент внешних сил $L(x), кНм$
0,0	0,0	0,0	0,0	3,7593	-4,1205	-4,1205
2,0	2,0	-1,9810	-1,2251	-0,5007	-0,8953	-2,1204

4,0	4,0	-3,4305	-0,0837	-1,2924	-0,0368	-0,1205
6,0	6,0	-2,2556	1,1550	-0,7084	0,7244	1,8794
8,0-0	8,0-0	0,0	0,4789	2,7948	3,4004	3,8794
8,0+0	0,0	0,0	0,4789	2,7948	-2,4023	-1,9233
9,5	1,5	-1,1309	-0,6908	0,3201	-1,2325	-1,9233
11,0-0	3,0-0	-1,2589	-0,1662	-1,7161	-1,7570	-1,9233
11,0+0	3,0+0	-1,2589	-0,1662	-1,7161	1,4429	1,2766
12,5	4,5	-0,8049	0,5742	-0,2552	0,7024	1,2766
14,0-0	6,0-0	0,0	0,3490	0,8548	0,9276	1,2766
14,0+0	0,0	0,0	0,3490	0,8548	-0,3490	0,0
15,0	1,0	0,1351	-0,0663	0,7196	0,0663	0,0
16,0-0	2,0-0	-0,1454	-0,5199	1,0000	0,5199	0,0

Эпюры напряженно-деформированного состояния изображены на рис 2.7.

Выше отмечалось, что порядок системы уравнений МГЭ (1.38) определяется числом стержней и не зависит от условий опирания. Подтверждением этому является следующий пример.

**Пример 4** [37, с. 88]. Определить напряженно-деформированное состояние неразрезной балки с жестким защемлением граничных сечений (рис. 2.8), у которой сечение – прокатный швеллер №33<sup>б</sup>,  $k = 1,404$  1/м. У данной балки изменится топологическая матрица  $C$ , а порядок системы уравнений останется равным 12. Выполняя соответствующие процедуры, будем иметь

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1												
2						-1						
3							-1					
4	-1											
5												
6										-1		
7											-1	
8		-1										

9												
10												
11					-1							
12										-1		

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		
1			-A <sub>13</sub>	-A <sub>14</sub>									$M_{\omega}^{0-1}(\ell)$	1,0276 4
2			-A <sub>23</sub>	-A <sub>13</sub>		-1							$M_{\omega}^{1-2}(\ell)$	2,3291 6
3			A <sub>33</sub>	A <sub>34</sub>			-1						$B_{\omega}^{0-1}(o)$	-4,3911 3
4	-1		A <sub>23</sub>	A <sub>33</sub>									$M_{\omega}^{0-1}(o)$	-6,9567 1
5						4	-A <sub>13</sub>	-A <sub>14</sub>					$B_{\omega}^{2-3}(\ell)$	36,7162 8
6						1	-A <sub>23</sub>	-A <sub>13</sub>		-1			$GI_x \theta'^{1-2}(o)$	56,3146 7
7							A <sub>33</sub>	A <sub>34</sub>			-1		$B_{\omega}^{1-2}(o)$	-81,8375 11
8		-1					A <sub>23</sub>	A <sub>33</sub>					$M_{\omega}^{1-2}(o)$	-115,7391 2
9										2	-A <sub>13</sub>	-A <sub>14</sub>	$M_{\omega}^{2-3}(\ell)$	1,0276 12
10										1	-A <sub>23</sub>	-A <sub>13</sub>	$GI_x \theta'^{2-3}(o)$	2,3291 10
11					-1						A <sub>33</sub>	A <sub>34</sub>	$B_{\omega}^{2-3}(o)$	-4,3911 5
12									-1		A <sub>23</sub>	A <sub>33</sub>	$M_{\omega}^{2-3}(o)$	-6,9567 9

Переставляя строки матриц **A\***, **B**, как показано цифрами справа, методом Гаусса определяем граничные параметры:

$$\begin{aligned}
 M_{\omega}^{0-1}(\ell) &= 0,9558 \text{ кНм}, \quad M_{\omega}^{1-2}(\ell) = 1,0082 \text{ кНм}, \quad B_{\omega}^{0-1}(o) = 0,0908 \text{ кНм}^2; \\
 M_{\omega}^{0-1}(o) &= -0,4359 \text{ кНм}, \quad B_{\omega}^{2-3}(\ell) = 0,0908 \text{ кНм}^2; \quad GI_x \theta'^{1-2}(o) = -0,1917 \text{ кНм}; \\
 B_{\omega}^{1-2}(o) &= 0,4189 \text{ кНм}^2; \quad M_{\omega}^{1-2}(o) = -1,0082 \text{ кНм}, \quad M_{\omega}^{2-3}(\ell) = 0,4359 \text{ кНм}; \\
 GI_x \theta'^{2-3}(o) &= 0,1917 \text{ кНм}, \quad B_{\omega}^{2-3}(o) = 0,4189 \text{ кНм}^2; \quad M_{\omega}^{2-3}(o) = -0,9558 \text{ кНм}.
 \end{aligned}$$

Значения бимоментов отличаются на 10% от результатов работы [37], полученных методом узловых депланаций (методом перемещений). Результаты расчета напряженно-деформированного состояния стержней во внутренних точках сведены в таблицу 2.

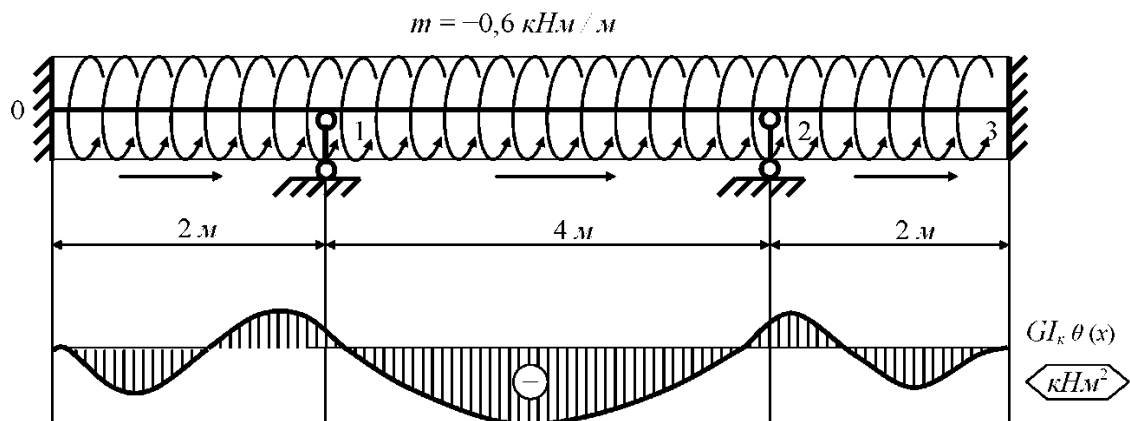
Таблица 2

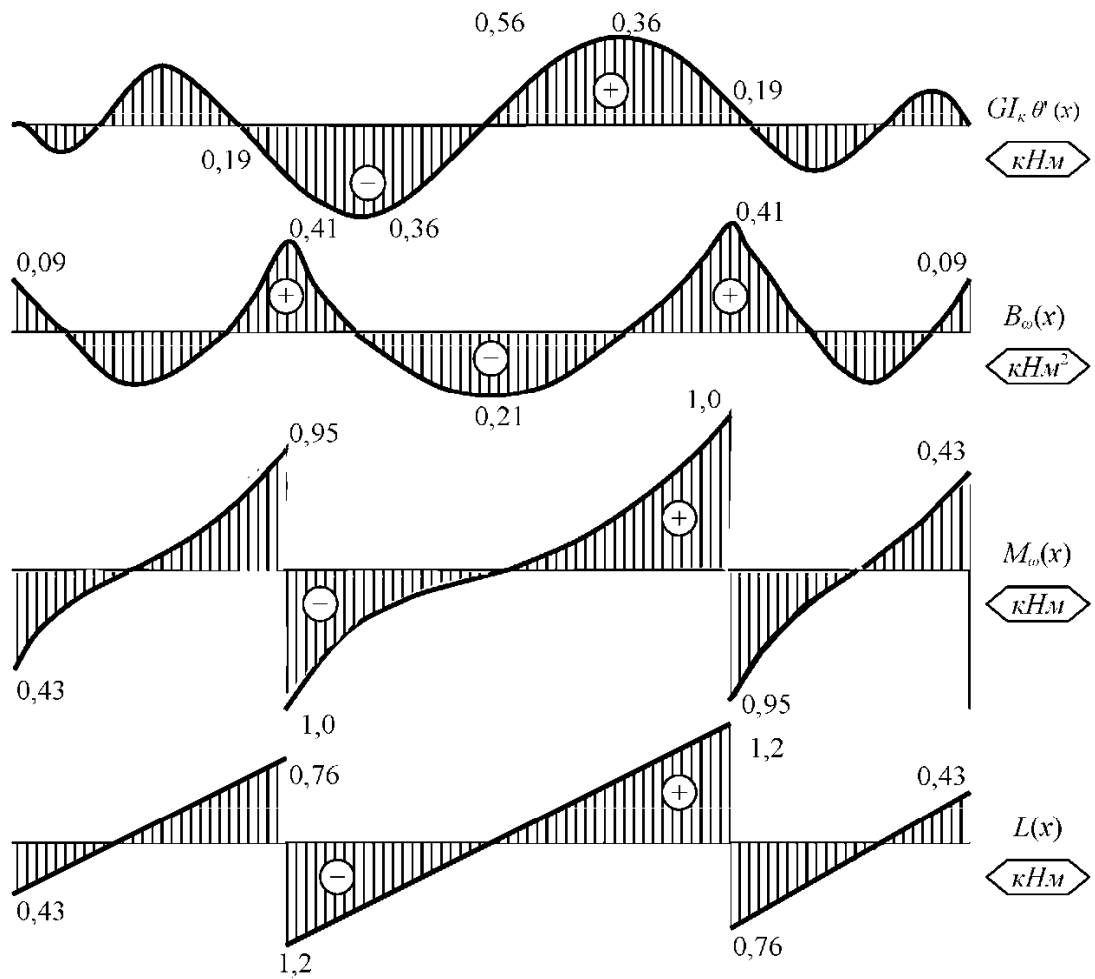
		Значения параметров
--	--	---------------------

Глобальная координата $x, м$	Локальная координата $x, м$	Угол закручивания $GI_k\theta(x),$ $кНм^2$	Производная $GI_k\theta'(x),$ $кНм$	Бимомент $B_\omega(x),$ $кНм^2$	Изгибно-крутящий момент $M_\omega(x),$ $кНм$	Крутящий момент внешних сил $L(x),$ $кНм$
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0908	-0,4359	-0,4359
0,5	0,5	-0,0080	-0,0103	-0,0440	-0,1255	
1,0	1,0	0,0001	0,0436	-0,0452	0,1204	
1,5	1,5	0,0254	0,0358	0,0865	0,4282	
2,0	2,0	0,0	-0,1917	0,4189	0,9558 -1,0082	0,7640 -1,2000
3,0	1,0	-0,3643	-0,3664	-0,1166	-0,2335	
4,0	2,0	-0,5635	0,0	-0,2174	0,0	
6,0	4,0	0,0	0,1917	0,4189	1,0082 -0,9558	1,2000 -0,7640
6,5	0,5	0,0254	-0,0358	0,0865	-0,4282	
7,0	1,0	0,0001	-0,0436	-0,0452	-0,1204	
7,5	1,5	-0,0080	0,0103	-0,0440	0,12	
8,0	2,0	0,0	0,0	0,0908	0,4359	0,4359

Эпюры состояния неразрезной балки представлены на рис. 2.8.

Из эпюры  $L(x)$  следует, что сумма опорных крутящих моментов точно равна равнодействующему крутящему моменту внешней нагрузки, т.е. решение по МГЭ данной балки является точным.





**Рис. 2.8**

Рассмотрим пример расчета на кручение тонкостенной рамы.

Пример 5 [37, с. 78]. Определить напряженно-деформированное состояние Г-образной рамы (рис. 2.9) при  $\kappa^{-1} 1/m$ . Рама нагружена распределенным

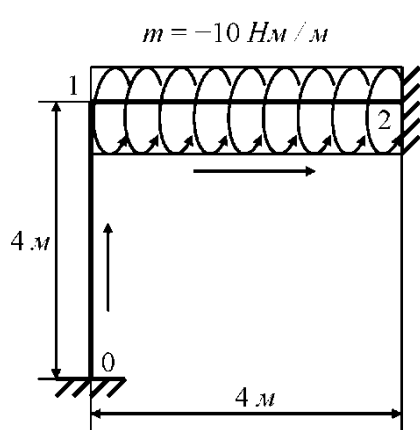


Рис. 2.9

крутящим моментом,  $m = -10 \text{ Hm/m}$ , который вызывает угол закручивания в узле 1. Вследствие этого возникает кроме кручения еще и деформация изгиба, которой пренебрегаем. В этом случае расчетом получатся завышенные параметры кручения по сравнению с их действительными значениями.

1. Разбиваем раму на 2 стержня, нумеруем узлы, стрелками обозначаем начало и конец каждого элемента.

2. Формируем матрицы уравнения (1.38).

$$\mathbf{X}_* = \begin{matrix} 1 & GI_K \theta^{0-1}(o) = 0; M_\omega^{0-1}(\ell) \\ 2 & GI_K \theta^{0-1}(\ell) = 0; B_\omega^{1-2}(\ell) \\ 3 & B_\omega^{0-1}(o) \\ 4 & M_\omega^{0-1}(o) \\ 5 & GI_K \theta^{1-2}(o) = 0; M_\omega^{1-2}(\ell) \\ 6 & GI_K \theta^{1-2}(\ell) \\ 7 & B_\omega^{1-2}(o) \\ 8 & M_\omega^{1-2}(o) \end{matrix} ; \quad \mathbf{Y} = \begin{matrix} 1 & GI_K \theta^{0-1}(\ell) = 0 \\ 2 & GI_K \theta^{0-1}(\ell) = GI_K \theta^{1-2}(o) \\ 3 & B_\omega^{0-1}(\ell) = B_\omega^{1-2}(o) \\ 4 & M_\omega^{0-1}(\ell) \\ 5 & GI_K \theta^{1-2}(\ell) = 0 \\ 6 & GI_K \theta^{1-2}(\ell) = 0 \\ 7 & B_\omega^{1-2}(\ell) \\ 8 & M_\omega^{1-2}(\ell) \end{matrix} ; \quad \mathbf{B} = \begin{matrix} 1 & \\ 2 & \\ 3 & \\ 4 & \\ 5 & -183,082 \\ 6 & -232,899 \\ 7 & 263,082 \\ 8 & 272,899 \end{matrix} ;$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & & & -A_{13} & -A_{14} & & & & M_\omega^{0-1}(\ell) & 4 \\ 2 & & & -A_{23} & -A_{13} & & -1 & & B_\omega^{1-2}(\ell) & 6 \\ 3 & & & A_{33} & A_{34} & & & -1 & B_\omega^{0-1}(o) & 3 \\ 4 & -1 & & A_{23} & A_{33} & & & & M_\omega^{0-1}(o) & 1 \\ 5 & & & & & & 4 & -A_{13} & -A_{14} & M_\omega^{1-2}(\ell) & 7 \\ 6 & & & & & & 1 & -A_{23} & -A_{13} & GI_K \theta^{1-2}(o) & 8 \\ 7 & & & & & & & A_{33} & A_{34} & B_\omega^{1-2}(o) & 2 \\ 8 & & & & & & & -1 & A_{23} & A_{33} & M_\omega^{1-2}(o) & 5 \end{matrix} = \begin{matrix} 4 \\ 6 \\ 3 \\ 1 \\ 7 \\ 8 \\ 2 \\ 5 \end{matrix}$$

3. Переставив строки матриц, как показано цифрами справа, методом Гаусса получаем значения граничных параметров:

$$M_{\omega}^{0-1}(\ell) = 5,401 \text{ НМ}; \quad B_{\omega}^{1-2}(\ell) = 12,273 \text{ НМ}^2; \quad B_{\omega}^{0-1}(0) = -1,528 \text{ НМ}^2;$$

$$M_{\omega}^{0-1}(0) = 1,725 \text{ НМ}; \quad M_{\omega}^{1-2}(\ell) = 21,725 \text{ НМ}; \quad GI_x \theta'^{1-2}(0) = -3,708 \text{ кНМ};$$

$$B_{\omega}^{1-2}(0) = 5,373 \text{ НМ}^2; \quad M_{\omega}^{1-2}(0) = -14,567 \text{ НМ}.$$

Значения бимоментов совпадают с результатами работы [37], полученными методом сил.

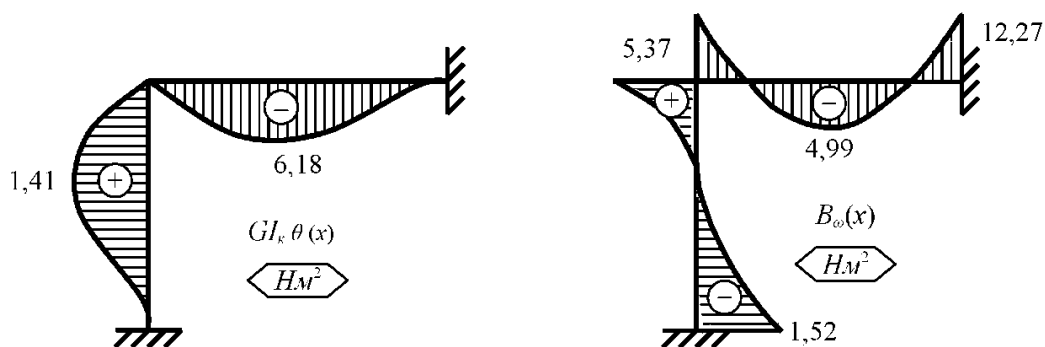
3. Напряженно-деформированное состояние элементов рамы определяем по уравнению (2.19), задавая различные значения аргумента  $x$ .

Результаты вычислений сводим в таблицу 3.

Таблица 3

Стержень	Локальная координата $x, м$	Значения параметров				
		Угол закручивания $GI_x \theta(x), НМ^2$	Производная $GI_x \theta'(x), НМ$	Бимомент $B_{\omega}(x), НМ^2$	Изгибно-крутящий момент $M_{\omega}(x), НМ$	Крутящий момент внешних сил $L(x), НМ$
0 – 1	0,0	0,0	0,0	-1,5283	1,7250	1,7251
	1,0	0,5278	0,8592	-0,3310	0,8659	1,7251
	2,0	1,4151	0,7780	0,5068	0,9471	1,7251
	3,0	1,7519	-0,3319	1,8950	2,0570	1,7251
	4,0	0,0	-3,7076	5,3731	5,4011	1,7251
1 – 2	0,0	0,0	-3,7076	5,3731	-14,5673	-18,2749
	1,0	-4,5043	-3,8630	-3,3975	-4,4120	-8,2750
	2,0	-6,1800	0,7738	-4,9967	0,9513	1,7251
	3,0	-3,2900	4,3773	-1,1616	7,3478	11,7251
	4,0	0,0	0,0	12,2734	21,7251	21,7251

Эпюры состояния рамы представлены на рис. 2.10.





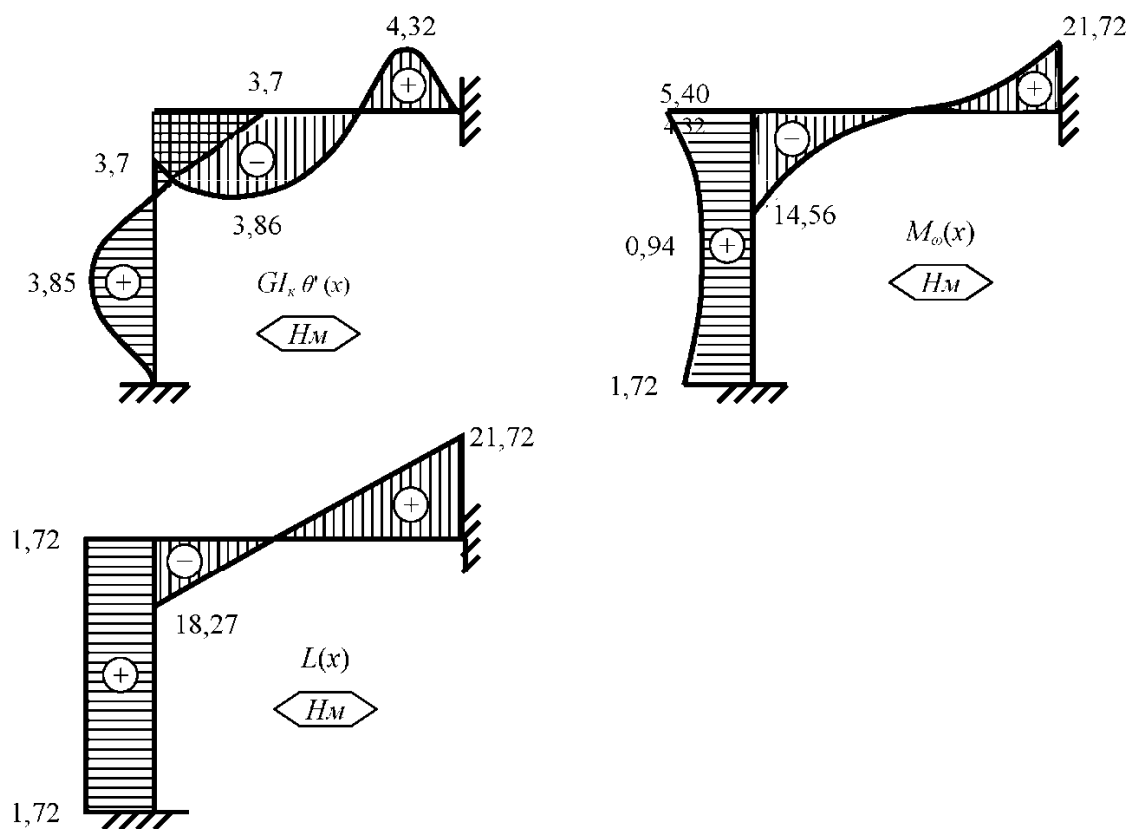


Рис. 2.10

Приведенные примеры характерны использованием гиперболических функций для описания перемещений и усилий в упругих системах. Как видно, МГЭ позволяет получать точные решения задач статики при минимально возможной дискретизации расчетной схемы. Отметим, что если фундаментальные функции отличны от полиномов, то МКЭ не дает точных решений задач [44]. Повышение точности расчетов по МКЭ достигается либо дроблением сетки КЭ (этот путь приводит к увеличению порядка разрешающей системы уравнений), либо применением точных матриц жесткости, что не всегда возможно.

Добавим также, что между МГЭ и МКЭ существует непосредственная связь. Из уравнения МГЭ (2.22) следует все элементы матрицы жесткости пространственного случая деформирования стержня при единичных линейных и угловых перемещениях граничных точек. Таким же образом можно формировать матрицу жесткости не только стержней, но и пластин, и оболочек.

#### 2.4.4. НЕРАЗРЕЗНЫЕ БАЛКИ И ПЛОСКИЕ РАМЫ

Перейдем к сложному сопротивлению и рассмотрим расчет плоских стержневых систем на действие изгиба. В этом случае необходимо применять уравнение (2.11).

**Пример 6** [87, с. 175]. Определить напряженно-деформированное состояние неразрезной балки постоянного сечения (рис. 2.11).

1. Разбиваем балку на 4 стержня, нумеруем узлы, стрелками указываем начало и конец каждого стержня.

2. Формируем матричное уравнение типа (1.32). Уравнения равновесия и совместности перемещений узлов 1, 2, 3 представлены в матрице **Y**. Уравнения равновесия для поперечных сил  $Q(x)$  не используются, т.к. они содержат неизвестные реакции опор 1, 2, 3. Элементы вектора нагрузки **B** определены по формулам (2.13). В матрице **X\*** нулевыми оказались 1, 2, 5, 9, 13 строки. Соответственно обнуляем 1, 2, 5, 9, и 13 столбцы матрицы **A**. Выполнив перенос независимых и зависимых параметров из матрицы **Y**, получаем топологическую матрицу **C** и разрешающее уравнение МГЭ, которые представлены ниже.

3. Переставив строки матриц **A\***, **B** в новом порядке, как показано цифрами справа, методом Гаусса определяем граничные параметры неразрезной балки по программе на языке Pascal (см. Приложение №1).

$$\mathbf{X}_* = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \end{array} \begin{array}{c} EIV^{0-1}(o) = 0; Q^{0-1}(\ell) \\ EI\varphi^{0-1}(o) = 0; Q^{1-2}(\ell) \\ M^{0-1}(o) \\ Q^{0-1}(o) \\ EIV^{1-2}(o) = 0; Q^{2-3}(\ell) \\ EI\varphi^{1-2}(o) \\ M^{1-2}(o) \\ Q^{1-2}(o) \\ EIV^{2-3}(o) = 0; EIV^{3-4}(\ell) \\ EI\varphi^{2-3}(o) \\ M^{2-3}(o) \\ Q^{2-3}(o) \\ EIV^{3-4}(o) = 0; EI\varphi^{3-4}(\ell) \\ EI\varphi^{3-4}(o) \\ M^{3-4}(o) \\ Q^{3-4}(o) \end{array}; \quad \mathbf{Y} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \end{array} \begin{array}{c} EIV^{0-1}(\ell) = 0 \\ EI\varphi^{0-1}(\ell) = EI\varphi^{1-2}(o) \\ M^{0-1}(\ell) = M^{1-2}(o) \\ Q^{0-1}(\ell) \\ EIV^{1-2}(\ell) = 0 \\ EI\varphi^{1-2}(\ell) = EI\varphi^{2-3}(o) \\ M^{1-2}(\ell) = M^{2-3}(o) \\ Q^{1-2}(\ell) \\ EIV^{2-3}(\ell) = 0 \\ EI\varphi^{2-3}(\ell) = EI\varphi^{3-4}(o) \\ M^{2-3}(\ell) = M^{3-4}(o) \\ Q^{2-3}(\ell) \\ EIV^{3-4}(\ell) \\ EI\varphi^{3-4}(\ell) \\ M^{3-4}(\ell) = 0 \\ Q^{3-4}(\ell) = 0 \end{array}; \quad \mathbf{B} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \end{array} \begin{array}{c} 256/6 \\ 32,0 \\ -16,0 \\ -4,0 \\ 18,0 \\ 18,0 \\ -12,0 \\ -4,0 \\ 108,0 \\ 72,0 \\ -36,0 \\ -12,0 \\ 4/3 \\ 8/3 \\ -4,0 \\ -4,0 \end{array};$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1																
2						-1										
3							-1									
4	-1															
5																
6										-1						
7											-1					
8		-1														
9																
10													-1			
11														-1		
12						-1										
13										-1						
14													-1			
15																
16																

$$Q^{0\ 1}(\ell) = -1,8125 \text{ кН}; \quad Q^{1\ 2}(\ell) = -2,3333 \text{ кН};$$

$$M^{0\ 1}(o) = -4,5000; \quad Q^{0\ 1}(o) = 2,1875 \text{ кН};$$

$$Q^{2\ 3}(\ell) = -5,8333 \text{ кН}; \quad EI\varphi^{1\ 2}(\ell) = -2,0000 \text{ кНм}^2;$$

$$M^{1\ 2}(o) = -3,0000 \text{ кНм}; \quad Q^{1\ 2}(o) = 1,6667 \text{ кН};$$

$$EIV^{3\ 4}(\ell) = -6,0000 \text{ кНм}^3; \quad EI\varphi^{2\ 3}(o) = 4,0000 \text{ кНм}^2;$$

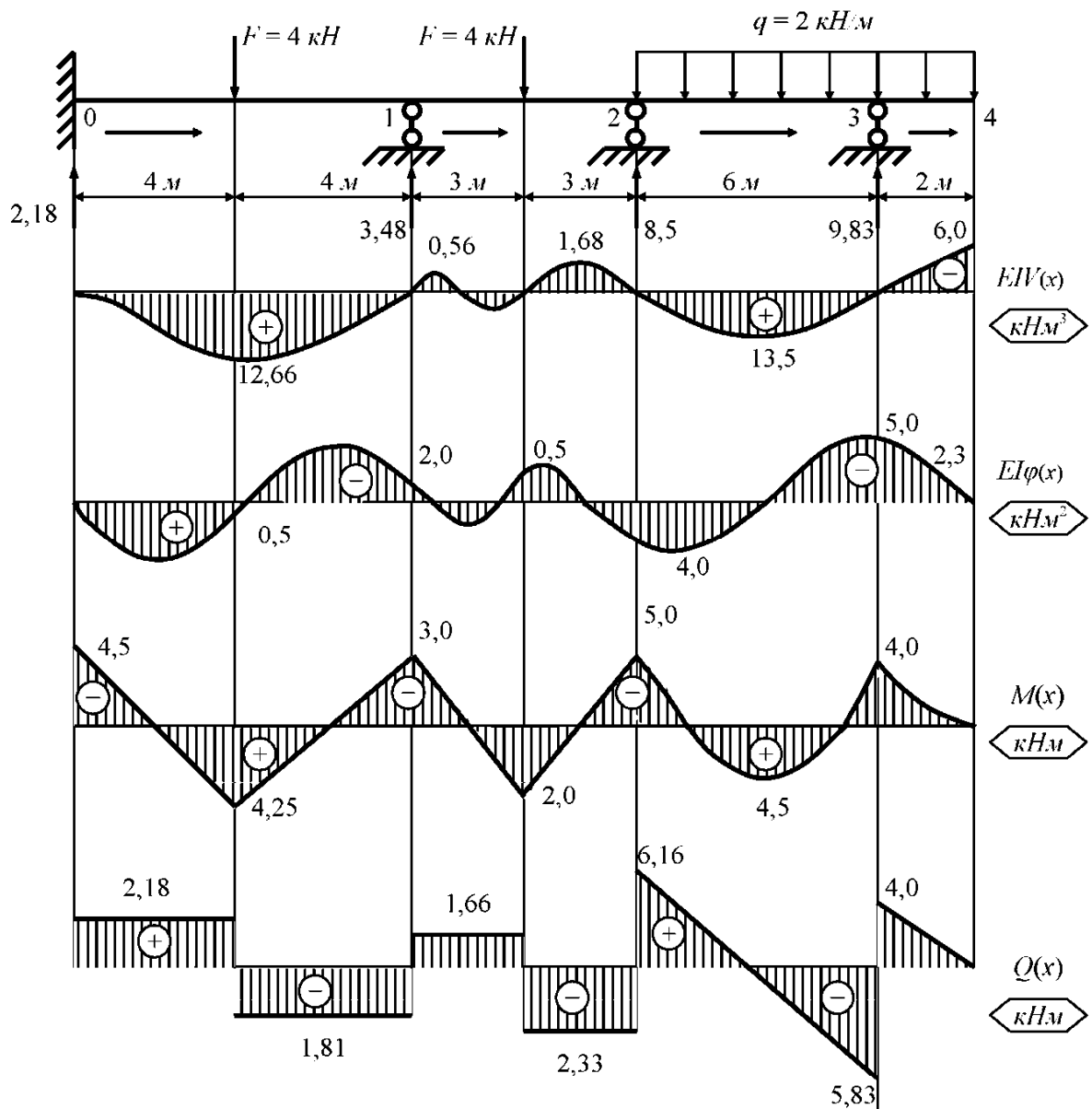
$$M^{2\ 3}(o) = -5,0000 \text{ кНм}; \quad Q^{2\ 3}(o) = 6,1667 \text{ кН};$$

$$EI\varphi^{3\ 4}(\ell) = -2,3333 \text{ кНм}^2; \quad EI\varphi^{3\ 4}(o) = -5,0000 \text{ кНм}^2;$$

$$M^{3\ 4}(o) = -4,0000 \text{ кНм}; \quad Q^{3\ 4}(o) = 4,0000 \text{ кН}.$$

Значения параметров совпадают с результатами работы [87], полученными методами сил и перемещений. В расчетах этих величин не учитывалась деформация сдвига, поэтому их значения практически равны действительным значениям параметров балки. Определяя состояние конструкции во внутренних точках по уравнению (2.11), строим эпюры, представленные на рис. 2.11.





**Рис. 2.11**

Пример 7 [29, с. 249]. Построить эпюры  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  симметричной рамы, являющейся несущей конструкцией двухэтажного фабрично-заводского корпуса, от несимметричной нагрузки верхнего ригеля. Жесткости разных элементов рамы различны (рис. 2.12). Элементы рамы испытывают изгиб, растяжение-сжатие и сдвиг. Последними двумя сопротивлениями пренебрегаем и для расчета используем только уравнение (2.11). В этом случае значения параметров изгиба будут завышенными по сравнению с их действительными значениями.

1. Разбиваем раму на 6 стержней, нумеруем узлы, стрелками обозначаем начало и конец каждого элемента. Для данной рамы можно составить граф расчетной схемы, при котором в каждом узле сходятся не более одной начальной точки.

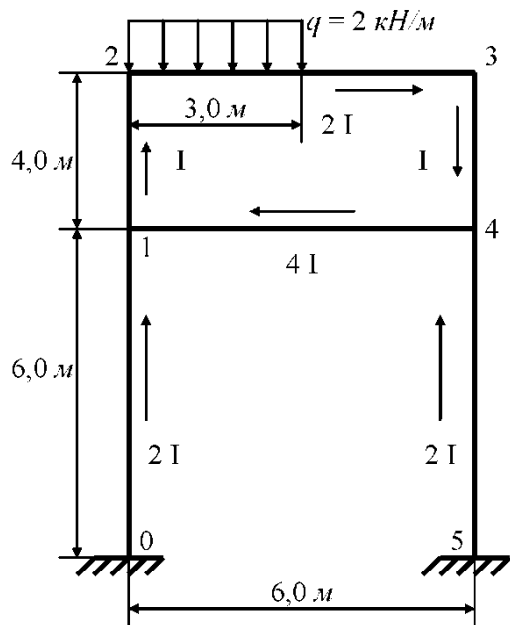


Рис. 2.12

2. Формируем матричное уравнение МГЭ. Оно будет содержать 24 уравнения. Поскольку используются соотношения только изгиба, то стержни предполагаются нерастяжимыми и несжимаемыми. В соответствии с этими допущениями изображаем деформированное состояние рамы (рис. 2.13).

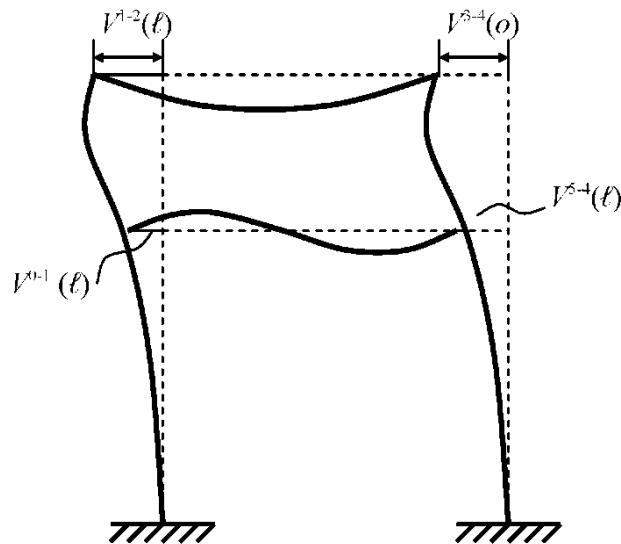


Рис. 2.13

Данный пример характеризуется тем, что в матрице  $X^*$  число нулевых строк меньше числа независимых параметров матрицы  $Y$ . Для выполнения схемы преобразований (1.32) в этом случае необходимо привлекать глобальные уравнения равновесия отдельных ригелей 2-3 ( $Q^{1-2}(l) = -Q^{3-4}(o)$ ), 4-1 ( $Q^{5-4}(l) = Q^{1-2}(o) + Q^{3-4}(l) - Q^{0-1}(l)$ ) и соотношения для перемещений в масштабе всей рамы ( $V^{1-2}(l) = -V^{3-4}(o)$ ;  $V^{5-4}(l) = -V^{1-2}(o)$ ;  $V^{5-4}(l) = V^{1-2}(o)$ ). Если уравнение изгиба (2.11) дополнить уравнением растяжения-сжатия (2.4), то для схемы преобразований (1.32) уравнений равновесия и совместности перемещений только узлов рамы будет достаточно. Окончательное уравнение краевой задачи рамы представлено ниже.

1	$2EIV^{0-1}(o) = 0; Q^{0-1}(\ell)$
2	$2EI\varphi^{0-1}(o) = 0; Q^{2-3}(\ell)$
3	$M^{0-1}(o)$
4	$Q^{0-1}(o)$
5	$EIV^{1-2}(o)$
6	$EI\varphi^{1-2}(o)$
7	$M^{1-2}(o)$
8	$Q^{1-2}(o)$
9	$2EIV^{2-3}(o) = 0; Q^{3-4}(\ell)$
10	$2EI\varphi^{2-3}(o)$
11	$M^{2-3}(o)$
12	$Q^{2-3}(o)$
13	$EIV^{3-4}(o)$
14	$EI\varphi^{3-4}(o)$
15	$M^{3-4}(o)$
16	$Q^{3-4}(o)$
17	$EIV^{4-1}(o) = 0; M^{4-1}(\ell)$
18	$4EI\varphi^{4-1}(o)$
19	$M^{4-1}(o)$
20	$Q^{4-1}(o)$
21	$2EIV^{5-4}(o) = 0; Q^{4-1}(\ell)$
22	$2EI\varphi^{5-4}(o) = 0; M^{5-4}(\ell)$
23	$M^{5-4}(o)$
24	$Q^{5-4}(o)$

 $\mathbf{X}_* =$ 

1	$2EIV^{0-1}(\ell) = 2EIV^{1-2}(o)$
2	$2EI\varphi^{0-1}(\ell) = 2EI\varphi^{1-2}(o)$
3	$M^{0-1}(\ell) = M^{1-2}(o) - M^{4-1}(\ell)$
4	$Q^{0-1}(\ell)$
5	$EIV^{1-2}(\ell) = -EIV^{3-4}(o)$
6	$EI\varphi^{1-2}(\ell) = EI\varphi^{2-3}(o)$
7	$M^{1-2}(\ell) = M^{2-3}(o)$
8	$Q^{1-2}(\ell) = -Q^{3-4}(o)$
9	$2EIV^{2-3}(\ell) = 0$
10	$2EI\varphi^{2-3}(\ell) = 2EI\varphi^{3-4}(o)$
11	$M^{2-3}(\ell) = M^{3-4}(o)$
12	$Q^{2-3}(\ell)$
13	$EIV^{3-4}(\ell) = -EIV^{1-2}(o)$
14	$EI\varphi^{3-4}(\ell) = EI\varphi^{4-1}(o)$
15	$M^{3-4}(\ell) = M^{4-1}(o) - M^{5-4}(\ell)$
16	$Q^{3-4}(\ell)$
17	$4EIV^{4-1}(\ell) = 0$
18	$4EI\varphi^{4-1}(\ell) = 4EI\varphi^{1-2}(o)$
19	$M^{4-1}(\ell)$
20	$Q^{4-1}(\ell)$
21	$2EIV^{5-4}(\ell) = 2EIV^{1-2}(o)$
22	$2EI\varphi^{5-4}(\ell) = 2EI\varphi^{4-1}(o)$
23	$M^{5-4}(\ell)$
24	$Q^{5-4}(\ell) = Q^{1-2}(o) + Q^{3-4}(\ell) - Q^{0-1}(\ell)$

 $\mathbf{Y} =$ 

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	101,25
10	63,0
11	-27,0
12	-6,0
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	
21	
22	
23	
24	

 $\mathbf{B} =$

3. Методом исключения Гаусса после перестановки строк определяем граничные параметры:

$$Q^{0-1}(\ell) = 0,0853 \text{ кН}; \quad Q^{2-3}(\ell) = -1,4604 \text{ кН}; \quad M^{0-1}(o) = -0,1798 \text{ кНм}, \quad Q^{0-1}(o) = 0,0853 \text{ кН};$$

$$EIV^{1-2}(o) = 0,0823 \text{ кНм}^2; \quad EI\varphi^{1-2}(o) = -0,2285 \text{ кНм}^2; \quad M^{1-2}(o) = 0,5636 \text{ кНм}, \quad Q^{1-2}(o) = -0,6078 \text{ кН};$$





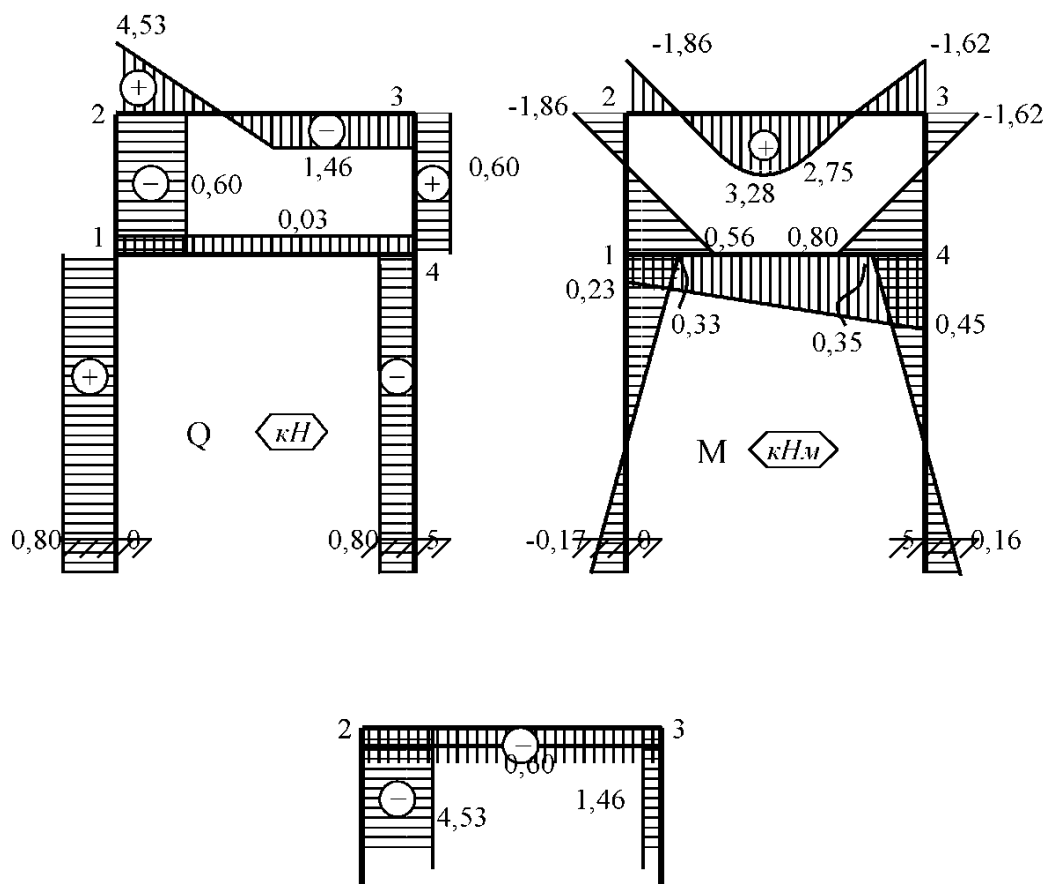
$$EI\varphi^{3-4}(o) = -1,1433 \text{ кНм}^2; EI\varphi^{3-4}(l) = -1,3737 \text{ кНм}^2; M^{3-4}(o) = -1,6299 \text{ кНм}; Q^{3-4}(o) = 0,6078 \text{ кН};$$

$$M^{4-1}(l) = 0,2315 \text{ кНм}; 4EI\varphi^{4-1}(o) = 1,1335 \text{ кНм}^2; M^{4-1}(l) = 0,4510 \text{ кНм}; Q^{4-1}(o) = -0,0366 \text{ кН};$$

$$Q^{4-1}(l) = -0,0366 \text{ кН}; M^{5-4}(l) = -0,3504 \text{ кНм}; M^{5-4}(o) = 0,1615 \text{ кНм}; Q^{5-4} = -0,0853 \text{ кН}.$$

Значения изгибающих моментов совпадают с результатами работы [29], полученными методом сил. Непосредственно по значениям граничных параметров рамы могут быть построены эпюры изгибающих моментов  $M$  и поперечных сил  $Q$ , а эпюру нормальных сил  $N$  можно построить, определяя нормальные силы из уравнений равновесия узлов. Соответствующие эпюры представлены на рис. 2.14.

Решение данного примера показывает, что использование только уравнений изгиба (2.11) создает определенные неудобства при определении нормальных сил и составлении уравнений равновесия узлов. Поэтому при расчете плоских стержневых систем предпочтительней пользоваться уравнением (2.11), дополненное уравнением нормальных сил из (2.4). Учет нормальных сил увеличивает порядок матричного уравнения (2.11) на единицу, но упрощает дальнейший расчет. В этом усматривается выигрыш данного подхода, т.к. число арифметических операций не является критерием при оценке метода [29, 79], более существенным является упрощение логики.



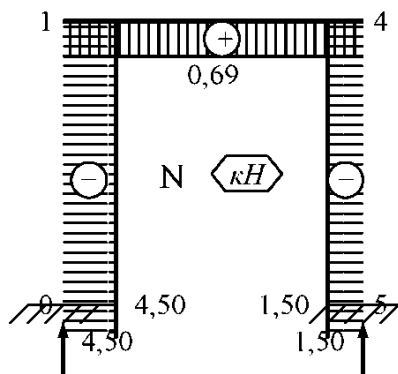


Рис. 2.14

В качестве примера рассмотрим расчет рамы с наклонным стержнем и применим уравнение изгиба (2.11) с добавлением нормальных сил.

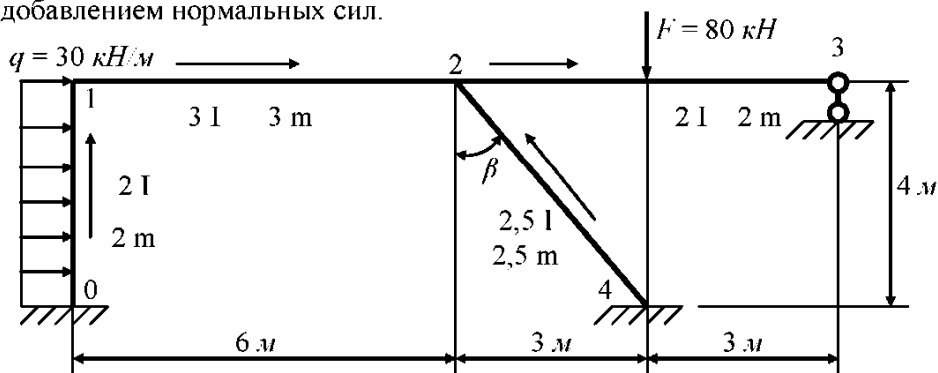
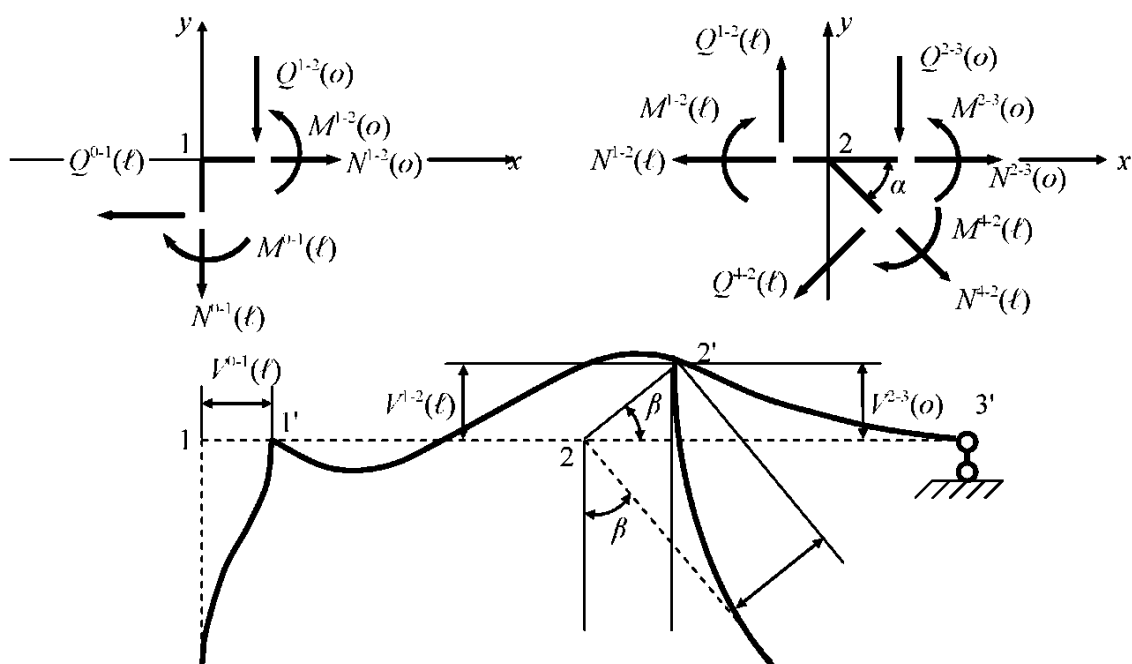


Рис. 2.15

Пример 8. Построить эпюры  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  рамы с наклонным стержнем (рис. 2.15).

1. Разбиваем раму на 4 стержня и нумеруем узлы. Стрелами показываем начало и конец каждого стержня. Используем в качестве примера иную ориентацию локальных систем координат всех стержней, когда ось  $ou$  направлена «вверх» (рис. 1.4). Соответственно меняется положительное направление внешней нагрузки. Равновесие узлов 1, 2 и деформированное состояние рамы (продольными перемещениями стержней пренебрегаем) показаны на рис. 2.16.



2. Формируем матрицы разрешающего уравнения МГЭ (1.38). Элементы вектора **B** вычислялись по формулам (2.13).

$X_s =$	1	$2EIV^{0-1}(o) = 0; 2EI\varphi^{2-3}(\ell)$	$Y =$	1	$2EI[V^{0-1}(\ell) = -V^{2-3}(o) \cdot ctg\beta]$	$B =$	1	-320
	2	$2EI\varphi^{0-1}(o) = 0; Q^{2-3}(\ell)$		2	$2EI\varphi^{0-1}(\ell) = 2EI\varphi^{1-2}(o)$		2	-320
	3	$M^{0-1}(o)$		3	$M^{0-1}(\ell) = M^{1-2}(o)$		3	-240
	4	$Q^{0-1}(o)$		4	$Q^{0-1}(\ell) = N^{1-2}(o)$		4	-120
	5	$N^{0-1}(o)$		5	$N^{0-1}(\ell) = -Q^{1-2}(o)$		5	
	6	$3EIV^{1-2}(o) = 0; M^{4-2}(\ell)$		6	$3EI[V^{1-2}(\ell) = V^{2-3}(o)]$		6	
	7	$3EI\varphi^{1-2}(o)$		7	$3EI\varphi^{1-2}(\ell) = 3EI\varphi^{2-3}(o)$		7	
	8	$M^{1-2}(o)$		8	$M^{1-2}(\ell) = M^{2-3}(o) - M^{4-2}(\ell)$		8	
	9	$Q^{1-2}(o)$		9	$Q^{1-2}(\ell) = Q^{2-3}(o) + Q^{4-2}(\ell) \cdot 0,6 + N^{4-2}(\ell) \cdot 0,8$		9	
	10	$N^{1-2}(o)$		10	$N^{1-2}(\ell) = N^{2-3}(o) - Q^{4-2}(\ell) \cdot 0,8 + N^{4-2}(\ell) \cdot 0,6$		10	
	11	$2EIV^{2-3}(o)$		11	$2EIV^{2-3}(\ell) = 0$		11	-360
	12	$2EI\varphi^{2-3}(o)$		12	$2EI\varphi^{2-3}(\ell)$		12	-360
	13	$M^{2-3}(o)$		13	$M^{2-3}(\ell) = 0$		13	-240
	14	$Q^{2-3}(o)$		14	$Q^{2-3}(\ell)$		14	-80
	15	$N^{2-3}(o)$		15	$N^{2-3}(\ell) = 0$		15	
	16	$2,5EIV^{4-2}(o) = 0; Q^{4-2}(\ell)$		16	$2,5EI[V^{4-2}(\ell) = -V^{2-3}(o) / \sin\beta]$		16	
	17	$2,5EI\varphi^{4-2}(o) = 0; N^{4-2}(\ell)$		17	$2,5EI\varphi^{4-2}(\ell) = 2,5EI\varphi^{2-3}(o)$		17	
	18	$M^{4-2}(o)$		18	$M^{4-2}(\ell)$		18	
	19	$Q^{4-2}(o)$		19	$Q^{4-2}(\ell)$		19	
	20	$N^{4-2}(o)$		20	$N^{4-2}(\ell)$		20	
	3	320		14			16	
	4	320		17			19	
	8	240		11	360		20	
	10	120		1	360			
	5			13	240			
	7			2	80			
	9			15				
	6			18				
	14			12				
	17			19				
	11	360		16				
	1	360		20				
	13	240						
	2	80						
	15							
	18							
	12							
	19							
	16							
	20							

=



Видно, что число нулевых строк матрицы  $\mathbf{X}$  равно числу независимых конечных параметров матрицы  $\mathbf{Y}$ . Выполняя перенос параметров в матрицу  $\mathbf{X}^*$ , получаем разрешающее уравнение МГЭ данной рамы.

Переставляя строки матриц  $\mathbf{A}^*$ ,  $\mathbf{B}$  в новом порядке, как показано цифрами справа (один из возможных вариантов), методом Гаусса определяем граничные параметры рамы, которые представлены в таблице 4. Поскольку в расчете не учитывались продольные перемещения стержней, то моментное напряженное состояние (изгибающие моменты) является завышенным. Результаты расчета по МГЭ совпадают с результатами расчета по МКЭ.

#### 2.4.5. УЧЕТ ПРОДОЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ СТЕРЖНЕЙ

Учет продольных перемещений позволяет составить более точную модель деформирования упругой системы и в ряде случаев существенно уточнить результаты расчетов. Последовательность учета продольных перемещений рассмотрим на примере расчета рамы по рис. 2.15.

Пример 9. Равновесие узлов 1 и 2 рамы не изменится по сравнению с рис. 2.16, а деформированное состояние будет включать и продольные перемещения (рис. 2.17). Для определенности примем, что  $EA - 120EI$ . Уравнения равновесия и совместности перемещений узлов 1, 2 представлены в матрице  $\mathbf{Y}$ . Структура этих уравнений обосновывается деформированным состоянием по рис. 2.17, 2.18 и рис. 2.16.

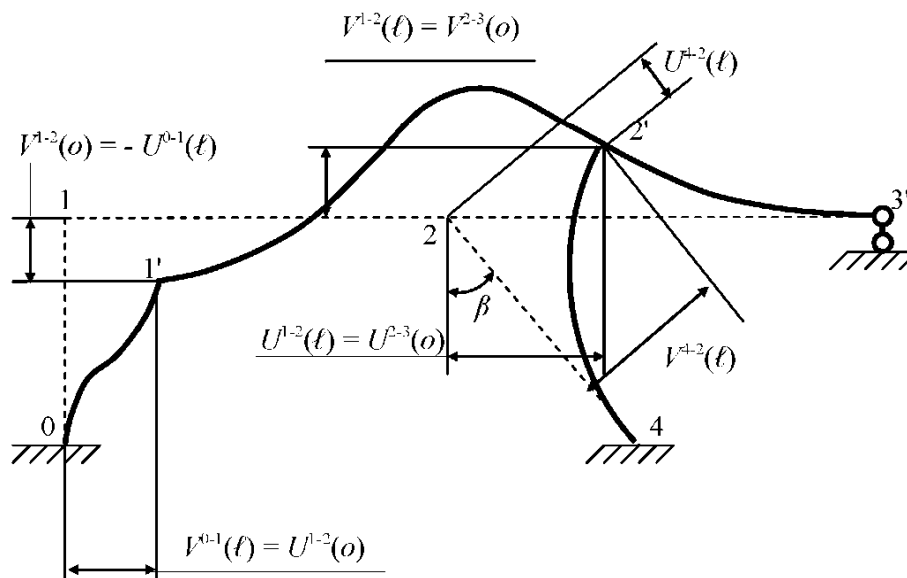


Рис. 2.17

$\mathbf{X}_* =$	1	$2EIV^{0-1}(o) = 0; 2EI\varphi^{2-3}(\ell)$	$;$	$\mathbf{Y} =$	1	$2EIV^{0-1}(\ell) = 2EIU^{1-2}(o)$
	2	$2EI\varphi^{0-1}(o) = 0; Q^{2-3}(\ell)$			2	$2EI\varphi^{0-1}(\ell) = 2EI\varphi^{1-2}(o)$
	3	$M^{0-1}(o)$			3	$M^{0-1}(\ell) = M^{1-2}(o)$
	4	$Q^{0-1}(o)$			4	$Q^{0-1}(\ell) = N^{1-2}(o)$
	5	$EAU^{0-1}(o) = 0; 240EIU^{2-3}(\ell)$			5	$240EIU^{0-1}(\ell) = -240EIV^{1-2}(o)$
	6	$N^{0-1}(o)$			6	$N^{0-1}(\ell) = -Q^{1-2}(o)$
	7	$3EIV^{1-2}(o)$			7	$3EIV^{1-2}(\ell) = 3EIV^{2-3}(o)$
	8	$3EI\varphi^{1-2}(o)$			8	$3EI\varphi^{1-2}(\ell) = 3EI\varphi^{2-3}(o)$
	9	$M^{1-2}(o)$			9	$M^{1-2}(\ell) = M^{2-3}(o) - M^{4-2}(\ell)$
	10	$Q^{1-2}(o)$			10	$Q^{1-2}(\ell) = Q^{2-3}(o) + 0,6Q^{4-2}(\ell) + 0,8N^{4-2}(\ell)$
	11	$EAU^{1-2}(o) = 360EIU^{1-2}(o)$			11	$360EIU^{1-2}(\ell) = 360EIU^{2-3}(o)$
	12	$N^{1-2}(o)$			12	$N^{1-2}(\ell) = N^{2-3}(o) - 0,8Q^{4-2}(\ell) + 0,6N^{4-2}(\ell)$
	13	$2EIV^{2-3}(o)$			13	$2EIV^{2-3}(\ell) = 0$
	14	$2EI\varphi^{2-3}(o)$			14	$2EI\varphi^{2-3}(\ell)$
	15	$M^{2-3}(o)$			15	$M^{2-3}(\ell) = 0$
	16	$Q^{2-3}(o)$			16	$Q^{2-3}(\ell)$
	17	$EAU^{2-3}(o) = 240EIU^{2-3}(o)$			17	$EAU^{2-3}(\ell) = 240EIU^{2-3}(\ell)$
	18	$N^{2-3}(o)$			18	$N^{2-3}(\ell) = 0$
	19	$2,5EIV^{4-2}(o) = 0; M^{4-2}(\ell)$			19	$2,5EIV^{4-2}(\ell) = 2,5EI[-0,6V^{2-3}(o) + 0,8U^{2-3}(o)]$
	20	$2,5EI\varphi^{4-2}(o) = 0; Q^{4-2}(\ell)$			20	$2,5EI\varphi^{4-2}(\ell) = 2,5EI\varphi^{2-3}(o)$
	21	$M^{4-2}(o)$			21	$M^{4-2}(\ell)$
	22	$Q^{4-2}(o)$			22	$Q^{4-2}(\ell)$
	23	$EAU^{4-2}(o) = 0; N^{4-2}(\ell)$			23	$300EIU^{4-2}(\ell) = 300EI[-0,8V^{2-3}(o) - 0,6U^{2-3}(o)]$
	24	$N^{4-2}(o)$			24	$N^{4-2}(\ell)$

Разрешающее уравнение МГЭ этого примера представлено ниже. Переставляя строки в новом порядке, методом Гаусса определяем граничные параметры, которые сведены в таблицу 4. Из таблицы следует, что учет продольных перемещений уменьшает изгибающие моменты, т.е. потенциал внешней нагрузки перераспределяется от изгибной деформации к деформации

растяжения-сжатия. По результатам расчета на рис. 2.19 представлены эпюры  $M$ ,  $Q$ ,  $N$ , в скобках указаны значения без учета продольных перемещений.

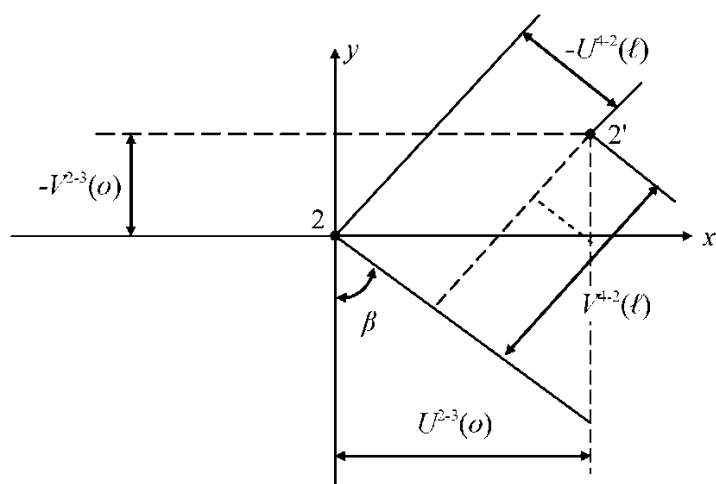
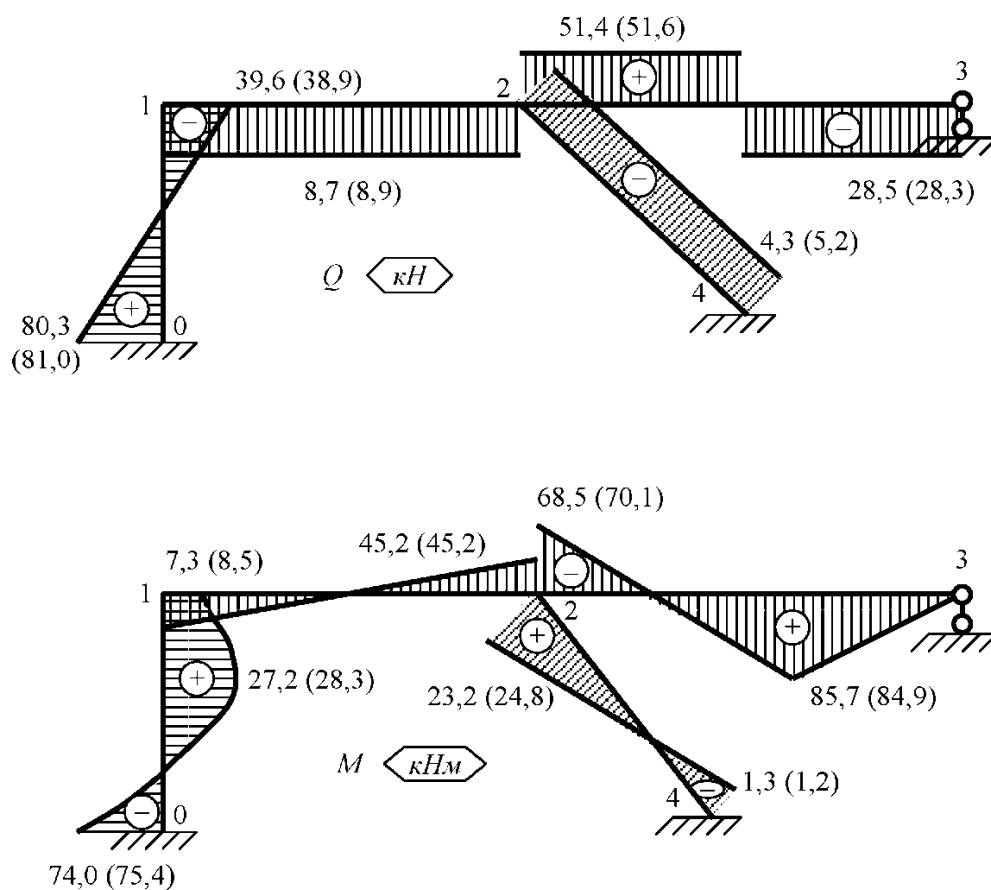


Рис. 2.18



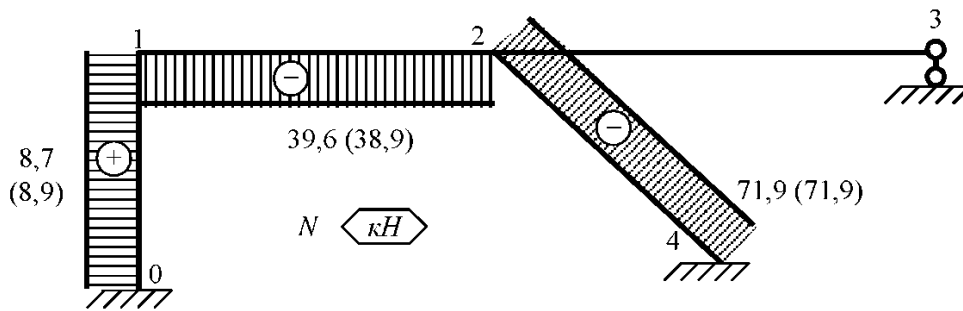


Рис. 2.19

### 2.4.6. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ РАМЫ

Элементы пространственных рам испытывают изгиб, кручение, сдвиг и растяжение-сжатие. Последними двумя видами сопротивления обычно пренебрегают, поэтому уравнение МГЭ одного стержня для пространственного случая будет содержать 6 или 8 уравнений. Рассмотрим простейший пример, т.к. при большом числе стержней матрицы не помещаются на формате страницы.

Пример 10 [96, с. 225]. Построить эпюры изгибающих и крутящих моментов пространственной рамы (рис. 2.20).

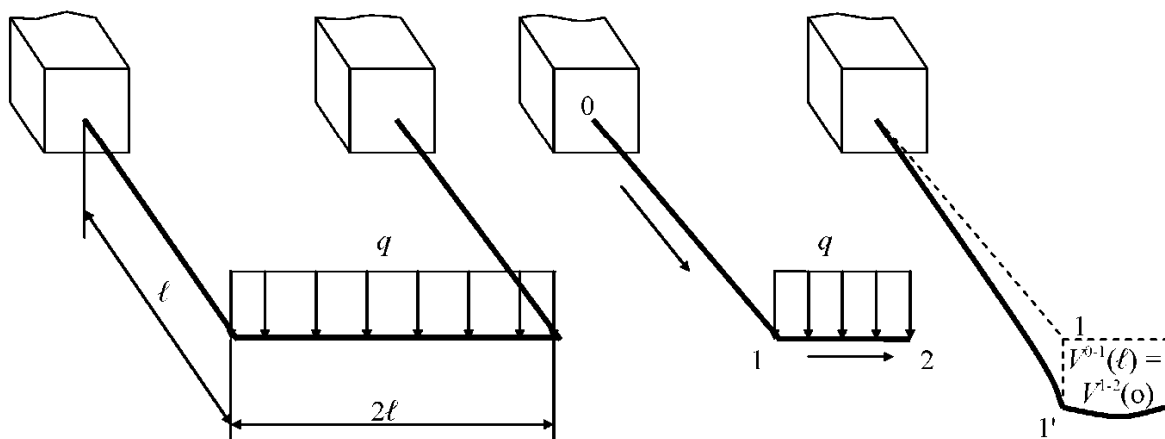


Рис. 2.20

11 8 3 4 6 10 7 14 9 16 17 12 13 1 15 2 5 18 21 22 19 20 24 23





Таблица 4

№ п/п	Параметры стержней рамы по рис. 2.15	Расчет без учета продольных перемещений стержней	Расчет с учетом продольных перемещений стержней
1	$2EI\varphi^{2-3}(\ell)$ , кНм <sup>2</sup>	102,4167	105,2160
2	$Q^{2-3}(\ell)$ , кН	-28,3125	-28,5793
3	$M^{0-1}(o)$ , кНм	-75,4792	-74,0602
4	$Q^{0-1}(o)$ , кН	81,0156	80,3519
5	$240EIU^{2-3}(\ell)$ , кНм <sup>3</sup>	-	6488,0108
6	$N^{0-1}(o)$ , кН	8,9792	8,7646
7	$3EIV^{1-2}(o)$ , кНм <sup>3</sup>	0,0	-0,4382
8	$3EI\varphi^{1-2}(o)$ , кНм <sup>2</sup>	39,3125	39,8615
9	$M^{1-2}(o)$ , кНм	8,5833	7,3474
10	$Q^{1-2}(o)$ , кН	-8,9792	-8,7646
11	$360EIU^{1-2}(o)$ , кНм <sup>3</sup>	-	9971,0901
12	$N^{1-2}(o)$ , кН	-38,9844	-39,6481
13	$2EIV^{2-3}(o)$ , кНм <sup>3</sup>	44,7500	37,5576
14	$2EI\varphi^{2-3}(o)$ , кНм <sup>2</sup>	-47,2083	-49,2108
15	$M^{2-3}(o)$ , кНм	-70,1250	-68,5244
16	$Q^{2-3}(o)$ , кН	51,6875	51,4207
17	$240EIU^{2-3}(o)$ , кНм <sup>3</sup>	-	6488,8011
18	$N^{2-3}(o)$ , кН	0,0	0,0
19	$M^{4-2}(\ell)$ , кНм	24,8333	23,2845
20	$Q^{4-2}(\ell)$ , кН	-5,2125	-4,3927
21	$M^{4-2}(o)$ , кНм	-1,2292	-1,3209
22	$Q^{4-2}(o)$ , кН	-5,2125	-4,3927
23	$N^{4-2}(\ell)$ , кН	-71,9240	-71,9371
24	$N^{4-2}(o)$ , кН	-71,9240	-71,9371

1. Рама может быть разбита на 3 стержня. Но, учитывая симметрию нагрузки и расчетной схемы, представим раму двумя стержнями.

2. Формируем матрицы МГЭ. Уравнения равновесия и совместности перемещений параметров изгиба и кручения для узла 1 представлены в матрице  $\mathbf{Y}$  (ось  $ou$  стержней направлена «вверх»).

$$\mathbf{X}_* = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} \begin{matrix} EIV^{0-1}(o) = 0; EIV^{1-2}(\ell) \\ EI\varphi^{0-1}(o) = 0; M^{1-2}(\ell) \\ M^{0-1}(o) \\ Q^{0-1}(o) \\ GI_K\theta^{0-1}(o) = 0; GI_K\theta^{1-2}(\ell) \\ M_{sp}^{0-1}(o) \\ EIV^{1-2}(o) \\ EI\varphi^{1-2}(o) \\ M^{1-2}(o) \\ Q^{1-2}(o) \\ GI_K\theta^{1-2}(o) \\ M_{sp}^{1-2}(o) \end{matrix} ; \mathbf{Y} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} \begin{matrix} EIV^{0-1}(\ell) = EIV^{1-2}(o) \\ EIV^{0-1}(\ell) = EI\theta^{1-2}(o) \\ M^{0-1}(\ell) = M_{sp}^{1-2}(o) \\ Q^{0-1}(\ell) = Q^{1-2}(o) \\ GI_K\theta^{0-1}(\ell) = -GI_K\varphi^{1-2}(o) \\ M_{sp}^{0-1}(\ell) = -M^{1-2}(o) \\ EIV^{1-2}(\ell) \\ EI\varphi^{1-2}(\ell) = 0 \\ M^{1-2}(\ell) \\ Q^{0-1}(\ell) = 0 \\ GI_K\theta^{1-2}(\ell) \\ M_{sp}^{1-2}(\ell) = 0 \end{matrix} ; \mathbf{B} = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ -1/24 \\ -1/6 \\ -1/2 \\ -1 \\ \\ \\ \end{matrix} .$$

Для исключения буквенных символов принимаем, что  $q = \ell = 1$ . Топологическая матрица  $\mathbf{C}$  и система уравнений МГЭ для рамы примут вид

$$\mathbf{C} = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & & & & & & & -1 & & & & & \\ 2 & & & & & & & & & & & -1,3 & \\ 3 & & & & & & & & & & & & -1 \\ 4 & & & & & & & & & & -1 & & \\ 5 & & & & & & & & 1/1,3 & & & & \\ 6 & & & & & & & & & 1 & & & \\ 7 & -1 & & & & & & & & & & & \\ 8 & & & & & & & & & & & & \\ 9 & & -1 & & & & & & & & & & \\ 10 & & & & & & & & & & & & \\ 11 & & & & & -1 & & & & & & & \\ 12 & & & & & & & & & & & & \end{matrix} ;$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12			
1			1/2	1/6			-1						$EIV^{1-2}(\ell)$		7
2			1	1/2								-1,3	$M^{1-2}(\ell)$		11
3			1	1									$M^{0-1}(o)$		3
4				1						-1			$Q^{0-1}(o)$		4
5						1		1/1,3					$GI_{\kappa}\theta^{1-2}(\ell)$		8
6						1			1				$M_{\kappa p}^{0-1}(o)$		6
7	-1						1	1	1/2	1/6			$EIV^{1-2}(o)$	1/24	1
8								1	1	1/2			$EI\varphi^{1-2}(o)$	1/6	9
9		-1							1	1			$M^{1-2}(o)$	1/2	2
10										1			$Q^{1-2}(o)$	1	10
11					-1						1	1	$GI_{\kappa}\theta^{1-2}(o)$		5
12												1	$M_{\kappa p}^{1-2}(o)$		12

3. Переставляя строки, как показано цифрами справа, и применяя метод Гаусса, получим значения граничных параметров

$$EIV^{1-2}(\ell) = -0,4692ql^4; \quad M^{1-2}(\ell) = 0,3550ql^2; \quad M^{0-1}(o) = -ql^2; \quad Q^{0-1}(o) = ql;$$

$$GI_{\kappa}\theta^{1-2}(\ell) = -0,3846ql^3; \quad M_{\kappa p}^{0-1}(o) = 0,1449ql^2; \quad EIV^{1-2}(o) = -0,3333ql^4;$$

$$EI\varphi^{1-2}(o) = -0,1884ql^3; \quad M^{1-2}(o) = -0,1449ql^2; \quad Q^{1-2}(o) = ql; \quad GI_{\kappa}\theta^{1-2}(o) = -0,3846ql^3;$$

$M_{\kappa p}^{1-2}(o) = 0,0$ . Значение момента  $M^{1-2}(\ell)$  совпадает с результатом работы [96], полученным методом сил. Эпюры  $M$ ,  $Q$ ,  $M_{\kappa p}$  показаны на рис. 2.21.

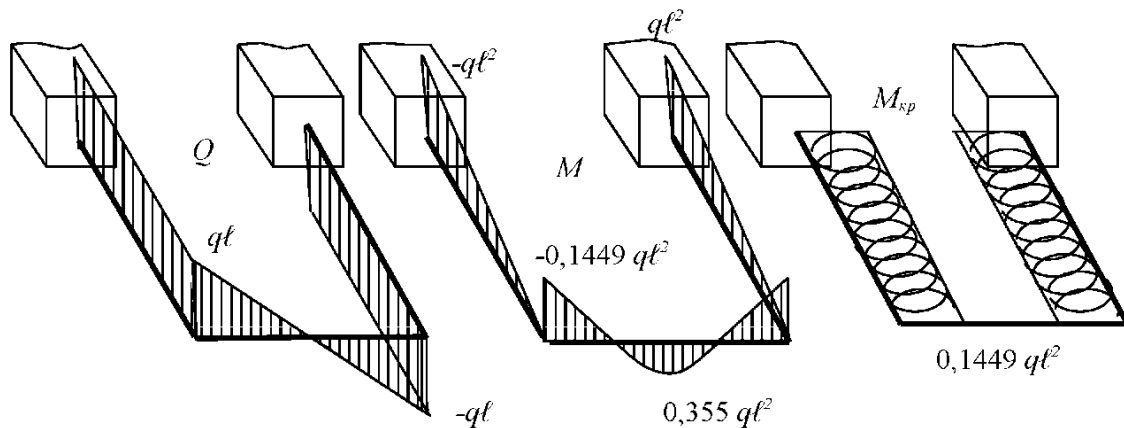


Рис. 2.21

## 2.5. СТАТИКА АРОЧНЫХ СИСТЕМ

В современной технике и строительстве широко используются стержневые системы, содержащие криволинейные стержни в виде дуги окружности, параболы, кубической параболы и т.д. В справочной литературе приводятся решения различных задач плоского деформирования кругового стержня с учетом только деформации изгиба [72]. В 1938 г. проф. Н.К. Снитко получил решение задачи плоского деформирования кругового стержня с учетом деформаций изгиба и растяжения только для частного случая нагрузки  $q_y(\alpha) = q = const$  (рис. 2.22) [84].

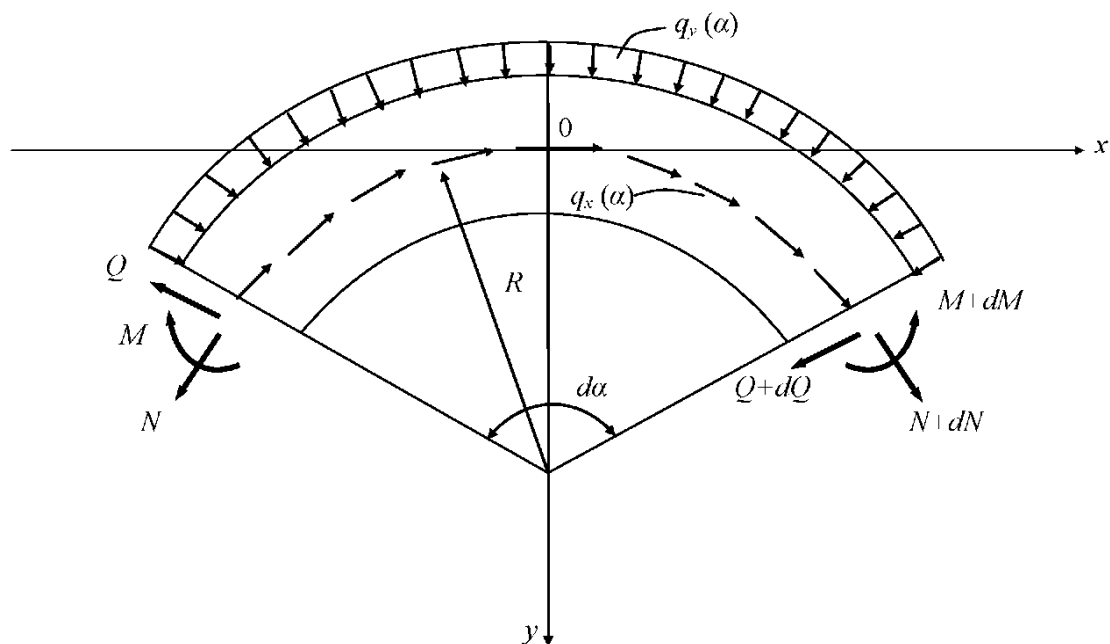


Рис. 2.22

Отсутствие достаточно полного аналитического решения задачи плоского деформирования кругового стержня способствовало тому, что в ряде работ [2, 44, 71] рекомендуется заменять криволинейные стержни набором прямолинейных стержней. Такая модель достаточно хорошо отражает поведение криволинейных стержней только при большом числе заменяющих стержней. В работе [29] показано, что погрешность полигональной аппроксимации кругового стержня не превышает 1,0%, если прямолинейный стержень стягивает дугу криволинейного стержня примерно в 5 градусов. Таким образом, кольцо может быть представлено правильным многоугольником из 72 стержней, а арка в  $90^\circ$  – 18 стержнями. Далее расчет стержневой системы может быть выполнен МКЭ, методом сил и другими методами.

Существенно снизить трудоемкость расчета, упростить алгоритм, повысить достоверность результатов можно при наличии фундаментальных решений плоского деформирования кругового стержня.

### 2.5.1. ВЫВОД СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПЛОСКОГО КРУГОВОГО СТЕРЖНЯ

Для построения соотношений МГИУ кругового стержня принимаем левовинтовую систему координат с направлением оси  $ou$  «вниз». На рис.2.22 показаны положительные направления нагрузки и статических параметров. Положительные направления кинематических параметров принимаем такими же, как и для прямолинейных стержней, т.е. линейные перемещения в направлении осей  $ox$ ,  $oy$  считаются положительными. Угловые перемещения положительны, если они направлены по часовой стрелке со стороны оси  $oz$ . Равновесие элемента  $ds$  (рис. 2.22) приводит к следующим уравнениям

$$\sum x = 0 \rightarrow \frac{dN}{d\alpha} = Q - q_x(\alpha)R ; \quad (2.23)$$

$$\sum y = 0 \rightarrow \frac{dQ}{d\alpha} = -N - q_y(\alpha)R ; \quad (2.24)$$

$$\sum m(o) = 0 \rightarrow \frac{dM}{d\alpha} = QR . \quad (2.25)$$

Здесь  $\alpha$  – угловая координата. Принцип двойственности статических и геометрических уравнений позволяет получить выражения для деформаций оси кругового стержня [76]

$$\varepsilon = \frac{1}{R} [U'(\alpha) - V(\alpha)]; \quad x = \left\{ \frac{1}{R} [U'(\alpha) + V''(\alpha)] - \gamma'(\alpha) \right\} \frac{1}{R}, \quad (2.26)$$

где  $\varepsilon$  – деформация растяжения-сжатия;  $x$  – кривизна после деформирования;  $U(\alpha), V(\alpha)$  – перемещения точки оси в направлении касательной и нормами (продольное и поперечное перемещения);  $\gamma(\alpha)$  – деформация сдвига. Для кругового стержня выполняется также геометрическое соотношение

$$\varphi(\alpha) = -\gamma(\alpha) + \frac{1}{R} [U(\alpha) + V'(\alpha)], \quad (2.27)$$

где  $\varphi(\alpha)$  – угол поворота сечения. Физические уравнения связи между напряжениями и деформациями кругового стержня аналогичны прямолинейному стержню

$$\varepsilon = N / EA ; \quad x = -M / EI ; \quad \gamma = \kappa_1 Q / GA . \quad (2.28)$$

Набор уравнений (2.23) – (2.28) свидетельствует о принятии модели жесткого кругового стержня с допущениями [72]:

1. Применимости гипотезы плоских нормалей;
2. Недеформируемости поперечного сечения при нагружении;
3. Малости кривизны ( $R/h > 5$ ) и деформаций.

Учесть деформацию сдвига весьма затруднительно. Поэтому в дальнейших выкладках принимаем  $\gamma(\alpha) = 0$ , что, как будет показано ниже, несущественно влияет на точность результатов. Выражая нормальную и поперечную силы через перемещения с помощью (2.25), (2.26), (2.28) и подставляя их в (2.23), (2.24), получим связанную систему дифференциальных уравнений плоского деформирования кругового стержня в перемещениях

$$\begin{cases} V^{IV}(\alpha) + \frac{EAR^2}{EI}V(\alpha) + U'''(\alpha) - \frac{EAR^2}{EI}U'(\alpha) = \frac{R^4}{EI}q_y(\alpha); \\ \left(1 + \frac{EAR^2}{EI}\right)U''(\alpha) + V'''(\alpha) - \frac{EAR^2}{EI}V'(\alpha) = -\frac{R^4}{EI}q_x(\alpha), \end{cases} \quad (2.29)$$

где первое уравнение соответствует изгибу, а второе – растяжению кругового стержня. Из анализа системы уравнений (2.29) следует два любопытных вывода.

1. Если пренебречь деформациями сдвига и растяжения, то согласно (2.26)  $U'(\alpha) = V(\alpha)$  и система (2.29) распадается на 2 независимых уравнения, решения которых в форме метода начальных параметров приведены в справочнике [72, том 1].

2. Если  $q_x(\alpha) = 0$ , то система уравнений (2.29) может быть сведена к одному уравнению. Первым это обнаружил и получил решение для частного случая проф. Н.К. Снитко.

## 2.5.2. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ КРУГОВОГО СТЕРЖНЯ

В связи с вышеизложенным получим аналитическое решение системы уравнений (2.29) с построением функций Грина для перемещений  $U(\alpha), V(\alpha)$ . Для решения данной задачи воспользуемся аппаратом интегральных преобразований Лапласа, где оригиналами выступают перемещения  $U(\alpha), V(\alpha)$ . Согласно теореме о дифференцировании оригинала [32] будем иметь

$$\begin{aligned} V(\alpha) &\xrightarrow{\cdot} V(\rho), \quad V'(\alpha) \xrightarrow{\cdot} pV(\rho) - V(o), \quad V''(\alpha) \xrightarrow{\cdot} p^2V(\rho) - pV'(o) - V''(o), \\ V^{IV}(\alpha) &\xrightarrow{\cdot} p^4V(\rho) - p^3V(o) - p^2V'(o) - pV''(o) - V^{IV}(o), \quad U(\alpha) \xrightarrow{\cdot} U(\rho); \\ U'(\alpha) &\xrightarrow{\cdot} pU(\rho) - U(o); \quad U''(\alpha) \xrightarrow{\cdot} p^2U(\rho) - pU(o) - U'(o); \\ U'''(\alpha) &\xrightarrow{\cdot} p^3U(\rho) - p^2U(o) - pU'(o) - U''(o), \quad q_x(\alpha) \xrightarrow{\cdot} q_x(\rho), \quad q_y(\alpha) \xrightarrow{\cdot} q_y(\rho), \end{aligned} \quad (2.30)$$

где  $V(\rho), U(\rho)$  – неизвестные изображения оригиналов  $U(\alpha), V(\alpha)$ ;  $p$  – переменная интегрального преобразования Лапласа. Начальные значения перемещений и их производных связаны с начальными параметрами кругового стержня зависимостями согласно (2.26) – (2.29)

$$\begin{aligned}
N(o) &= \frac{EA}{R} [U'(o) - V(o)]; & M(o) &= -\frac{EI}{R^2} [U'(o) + V''(o)]; \\
Q(o) &= -\frac{EI}{R^3} [U''(o) + V'''(o)]; & \varphi(o) &= \frac{1}{R} [U(o) + V'(o)];
\end{aligned} \tag{2.31}$$

$$U''(o) = -\frac{R^4}{EI + EAR^2} q_x(o) - \frac{EI}{EI + EAR^2} V'''(o) + \frac{EAR^2}{EI + EAR^2} V'(o).$$

Подставляя соотношения (2.30) в систему (2.29) и решая ее алгебраически, получаем неизвестные изображения

$$\begin{aligned}
V(\rho) &= \left[ \frac{1}{p} - \frac{1 + EAR^2}{p(p^2 + 1)^2} \right] V(o) + \frac{p^4 + 2p^2}{p^2(p^2 + 1)^2} V'(o) + \frac{1}{p(p^2 + 1)} V''(o) + \frac{1}{(p^2 + 1)^2} V'''(o) + 0 \cdot U(o) + \\
&+ \frac{1 + EAR^2}{p(p^2 + 1)^2} U'(o) + \frac{R^2}{EA} \left( 1 + \frac{EAR^2}{EI} \right) \frac{1}{(p^2 + 1)^2} q_y(\rho) + \frac{R^2}{EA} \cdot \frac{p^2 - EAR^2}{p(p^2 + 1)^2} q_x(\rho) - \frac{R^2}{EA} \cdot \frac{1}{(p^2 + 1)^2} q_x(o); \\
U(\rho) &= \frac{p^2 - EAR^2}{p(p^2 + 1)^2} V(o) + \left[ \frac{1 + EAR^2}{p(p^2 + 1)^2} + \frac{EAR^2}{EI + EAR^2} \cdot \frac{p}{(p^2 + 1)^2} \right] V'(o) + \frac{1}{p^2(p^2 + 1)} V''(o) - \\
&- \frac{EI}{EI + EAR^2} \cdot \frac{p^2 - EAR^2}{p(p^2 + 1)^2} V'''(o) + \frac{1}{p} U(o) + \left[ \frac{1 + EAR^2}{p(p^2 + 1)^2} + \frac{1}{p^2 + 1} \right] U'(o) - \frac{R^2}{EA} \cdot \frac{p^4 + EAR^2}{p^2(p^2 + 1)^2} q_x(\rho) - \\
&- \frac{R^2}{EA} \cdot \frac{p^2 - EAR^2}{p(p^2 + 1)^2} q_y(\rho) + \frac{R^2}{EA} \cdot \frac{EI}{EI + EAR^2} \cdot \frac{p^2 - EAR^2}{p(p^2 + 1)^2} q_x(o).
\end{aligned}$$

Полученные изображения представляют собой алгебраические суммы правильных дробно-рациональных функций, для обращения которых можно применить вторую теорему разложения. Переход от изображений к оригиналам в соответствии с этой теоремой проведем с помощью соотношений

$$\begin{aligned}
\frac{p^4 + EAR^2}{p^2(p^2 + 1)^2} &\xrightarrow{\bullet} \frac{\alpha \cos \alpha + \sin \alpha}{2} + \frac{EAR^2}{EI} \left( \alpha + \frac{1}{2} \alpha \cos \alpha - \frac{3}{2} \sin \alpha \right); \\
\frac{p^2 - EAR^2}{p(p^2 + 1)^2} &\xrightarrow{\bullet} \frac{1}{2} \alpha \sin \alpha - \frac{EAR^2}{EI} \left( 1 - \frac{1}{2} \alpha \sin \alpha - \cos \alpha \right); \\
\frac{p^2 - EAR^2}{p^2(p^2 + 1)^2} &\xrightarrow{\bullet} -\frac{1}{2} \alpha \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{EAR^2}{EI} \left( \alpha + \frac{1}{2} \alpha \cos \alpha - \frac{3}{2} \sin \alpha \right);
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{1}{p(p^2+1)^2} &\overset{\cdot}{\rightarrow} 1 - \frac{1}{2}\alpha \sin \alpha - \cos \alpha; \quad \frac{p}{(p^2+1)^2} \overset{\cdot}{\rightarrow} \frac{1}{2}\alpha \sin \alpha; \quad \frac{1}{p^2} \overset{\cdot}{\rightarrow} \alpha; \\ \frac{1}{p^2(p^2+1)} &\overset{\cdot}{\rightarrow} \alpha - \sin \alpha; \quad \frac{1}{p} \overset{\cdot}{\rightarrow} 1; \quad \frac{1}{p^2+1} \overset{\cdot}{\rightarrow} \sin \alpha; \quad \frac{1}{p(p^2+1)} \overset{\cdot}{\rightarrow} 1 - \cos \alpha; \\ \frac{1}{(p^2+1)^2} &\overset{\cdot}{\rightarrow} -\frac{1}{2}\alpha \cos \alpha + \frac{1}{2}\sin \alpha; \quad \frac{1}{p^2(p^2+1)^2} \overset{\cdot}{\rightarrow} \alpha + \frac{1}{2}\alpha \cos \alpha - \frac{3}{2}\sin \alpha; \\ \frac{p}{p^2+1} &\overset{\cdot}{\rightarrow} \cos \alpha; \quad \frac{p^2+2}{(p^2+1)^2} \overset{\cdot}{\rightarrow} \frac{3}{2}\sin \alpha - \frac{1}{2}\alpha \cos \alpha. \end{aligned}$$

Обращение членов, содержащих изображения нагрузок, выполняется по теореме умножения: при свертывании оригиналов их изображения перемножаются. Поэтому произведения изображений будут иметь оригиналы в виде сверток соответствующих функций

$$\begin{aligned} \frac{R^2}{EA} \left(1 + \frac{EAR^2}{EI}\right) \frac{1}{(p^2+1)^2} q_y(\rho) &\overset{\cdot}{\rightarrow} \frac{R^2}{EA} \left(1 + \frac{EAR^2}{EI}\right) \int_0^\alpha \frac{\sin(\alpha-\xi) - (\alpha-\xi)\cos(\alpha-\xi)}{2} q_y(\xi) d\xi; \\ \frac{R^2}{EA} \cdot \frac{p^2 - \frac{EAR^2}{EI}}{p(p^2+1)^2} q_x(\rho) &\overset{\cdot}{\rightarrow} \frac{R^2}{EA} \int_0^\alpha \left\{ \left(1 + \frac{EAR^2}{EI}\right) \frac{(\alpha-\xi)\sin(\alpha-\xi)}{2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{EAR^2}{EI} [H(\alpha-\xi) - \cos(\alpha-\xi)] \right\} q_x(\xi) d\xi; \\ \frac{R^2}{EA} \cdot \frac{p^2 + \frac{EAR^2}{EI}}{p^2(p^2+1)^2} q_x(\rho) &\overset{\cdot}{\rightarrow} \frac{R^2}{EA} \int_0^\alpha \left\{ \frac{(\alpha-\xi)\cos(\alpha-\xi) + \sin(\alpha-\xi)}{2} + \frac{EAR^2}{EI} [(\alpha-\xi) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(\alpha-\xi)\cos(\alpha-\xi) - \frac{3}{2}\sin(\alpha-\xi)] \right\} q_x(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

После обращения изображений выражения для перемещений запишутся следующим образом

$$\begin{aligned} V(a) &= \left[ \frac{1}{2}\alpha \sin \alpha + \cos \alpha - \frac{EAR^2}{EI} \left(1 - \frac{1}{2}\alpha \sin \alpha - \cos \alpha\right) \right] V(o) + \left( \frac{3}{2}\sin \alpha - \frac{1}{2}\alpha \cos \alpha \right) V'(o) + \\ &+ (1 - \cos \alpha) V''(o) + \left( \frac{1}{2}\sin \alpha - \frac{1}{2}\alpha \cos \alpha \right) V'''(o) + 0 \cdot U(o) + \left( 1 + \frac{EAR^2}{EI} \right) \left( 1 - \frac{1}{2}\alpha \sin \alpha - \cos \alpha \right) U'(o) + \\ &+ \frac{R^2}{EA} \int_0^\alpha \left\{ \left( 1 + \frac{EAR^2}{EI} \right) \frac{\sin(\alpha-\xi) - (\alpha-\xi)\cos(\alpha-\xi)}{2} q_y(\xi) + \left[ \left( 1 + \frac{EAR^2}{EI} \right) \frac{(\alpha-\xi)\sin(\alpha-\xi)}{2} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{EAR^2}{EI} (H(\alpha-\xi) - \cos(\alpha-\xi)) \right] q_x(\xi) \right\} d\xi - \frac{R^2}{EA} \cdot \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{2} q_x(c); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U(\alpha) = & \left( \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{2} - \frac{EAR^2}{EI} \cdot \frac{2\alpha + \alpha \cos \alpha - 3 \sin \alpha}{2} \right) V(o) + \left[ \left( 1 + \frac{EAR^2}{EI + EAR^2} \right) \times \right. \\
& \times \left( 1 - \frac{1}{2} \alpha \sin \alpha - \cos \alpha \right) + \frac{EAR^2}{EI + EAR^2} \cdot \frac{\alpha \sin \alpha}{2} \left. \right] V'(o) + (\alpha - \sin \alpha) V''(o) + \frac{EI}{EI + EAR^2} \left[ \frac{EAR^2}{EI} (1 - \cos \alpha) - \right. \\
& - \left. \left( 1 + \frac{EAR^2}{EI} \right) \frac{\alpha \sin \alpha}{2} \right] V'''(o) + 1 \cdot U(o) + \left[ \left( 1 + \frac{EAR^2}{EI} \right) \left( \alpha + \frac{1}{2} \alpha \cos \alpha - \frac{3}{2} \sin \alpha \right) + \sin \alpha \right] U'(o) - \\
& - \frac{R^2}{EA} \int_0^\alpha \left[ \left( 1 + \frac{EAR^2}{EI} \right) \frac{(\alpha - \xi) \sin(\alpha - \xi)}{2} - \frac{EAR^2}{EI} [H(\alpha - \xi) - \cos(\alpha - \xi)] \right] q_x(\xi) + \\
& + \left[ \frac{(\alpha - \xi) \cos(\alpha - \xi) + \sin(\alpha - \xi)}{2} + \frac{EAR^2}{EI} \left[ (\alpha - \xi) + \frac{1}{2} (\alpha - \xi) \cos(\alpha - \xi) - \frac{3}{2} \sin(\alpha - \xi) \right] \right] \times \\
& \times q_x(\xi) \Big] d\xi + \frac{R^2}{EA} \cdot \frac{EI}{EI + EAR^2} \cdot \left[ \frac{1}{2} \alpha \sin \alpha - \frac{EAR^2}{EI} \left( 1 - \frac{1}{2} \alpha \sin \alpha - \cos \alpha \right) \right] q_x(o).
\end{aligned}$$

Статические и кинематические параметры напряженно-деформированного состояния кругового стержня удобно представить через начальные параметры. Для этого выразим перемещения  $V(\alpha)$ ,  $U(\alpha)$  через начальные параметры в соответствии с выражениями (2.31). Затем перемещения и их производные подставим в зависимости (2.25), (2.27), (2.28). Матричное уравнение МГЭ для кругового стержня примет вид

$EIV(\alpha)$	=	$A_{11}$	$A_{12}$	$-A_{13}$	$-A_{14}$	$A_{15}$	$A_{16}$	$EIV(o)$	+ \int_0^\alpha	$B_{11}$	d\xi, \quad (2.32)	
$EI\phi(\alpha)$			$A_{22}$	$-A_{23}$	$-A_{13}$		$A_{26}$	$EI\phi(o)$		$B_{21}$		
$M(\alpha)$				$A_{22}$	$A_{12}$		$-A_{36}$	$M(o)$		$-B_{31}$		
$Q(\alpha)$					$A_{11}$		$-A_{46}$	$Q(o)$		$-B_{41}$		
$EAU(\alpha)$			$A_{51}$	$A_{52}$	$-A_{53}$	$-A_{54}$	$A_{11}$	$A_{56}$		$EAU(o)$		$-B_{51}$
$N(\alpha)$					$-A_{64}$		$A_{11}$	$N(o)$		$-B_{61}$		

где фундаментальные ортонормированные функции и грузовые элементы представляются выражениями

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \cos \alpha; \quad A_{12} = R \sin \alpha; \quad A_{13} = R^2(1 - \cos \alpha); \quad A_{15} = -\frac{EI}{EA} \sin \alpha; \\
A_{14} &= \left( R^3 + \frac{EIR}{EA} \right) \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{2}; \quad A_{22} = 1; \quad A_{23} = R \cdot \alpha; \quad A_{46} = \sin \alpha; \\
A_{16} &= R^3 \left( 1 - \frac{1}{2} \alpha \sin \alpha - \cos \alpha \right) - \frac{EIR}{EA} \cdot \frac{1}{2} \alpha \sin \alpha; \quad A_{26} = R^2(\alpha - \sin \alpha); \quad A_{36} = R(1 - \cos \alpha); \\
A_{51} &= \frac{EA}{EI} \sin \alpha; \quad A_{52} = \frac{EAR}{EI} (1 - \cos \alpha); \quad A_{53} = \frac{EAR^2}{EI} (\alpha - \sin \alpha);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{54} &= \frac{EAR^3}{EI} \left( 1 - \cos \alpha - \frac{1}{2} \alpha \sin \alpha \right) - R \frac{1}{2} \alpha \sin \alpha; \quad A_{64} = -\sin \alpha; \\
A_{56} &= R \frac{\sin \alpha + \alpha \cos \alpha}{2} + \frac{EAR^3}{EI} \left( \alpha + \frac{1}{2} \alpha \cos \alpha - \frac{3}{2} \sin \alpha \right); \\
B_{11} &= \left( R^4 - \frac{EIR^2}{EA} \right) \frac{\sin(\alpha - \xi) - (\alpha - \xi) \cos(\alpha - \xi)}{2} q_y(\xi) + \left\{ \left( R^4 + \frac{EIR^2}{EA} \right) \frac{(\alpha - \xi) \sin(\alpha - \xi)}{2} - \right. \\
&\quad \left. - R^4 \left[ H(\alpha - \xi) - \cos(\alpha - \xi) \right] \right\} q_x(\xi); \\
B_{21} &= R^3 [H(\alpha - \xi) - \cos(\alpha - \xi)] q_y(\xi) - R^3 [(\alpha - \xi) - \sin(\alpha - \xi)] q_x(\xi); \\
B_{31} &= R^2 \sin(\alpha - \xi) q_y(\xi) + R^2 [\cos(\alpha - \xi) - H(\alpha - \xi)] q_x(\xi); \\
B_{41} &= R \cos(\alpha - \xi) q_y(\xi) - R \sin(\alpha - \xi) q_x(\xi); \quad B_{61} = R \sin(\alpha - \xi) q_y(\xi) + R \cos(\alpha - \xi) q_x(\xi); \\
B_{51} &= \left\{ \left( 1 + \frac{EAR^2}{EI} \right) R^2 \frac{(\alpha - \xi) \sin(\alpha - \xi)}{2} - \frac{EAR^4}{EI} [H(\alpha - \xi) - \cos(\alpha - \xi)] \right\} q_y(\xi) + \\
&\quad + \left\{ R^2 \frac{(\alpha - \xi) \cos(\alpha - \xi) + \sin(\alpha - \xi)}{2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{EAR^4}{EI} \left[ (\alpha - \xi) + \frac{1}{2} (\alpha - \xi) \cos(\alpha - \xi) - \frac{3}{2} \sin(\alpha - \xi) \right] \right\} q_x(\xi);
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Подчеркнутые члены учитывают деформацию растяжения. Выражения (2.34) являются функциями Грина для перемещений  $V(\alpha)$ ,  $U(\alpha)$ . Алгоритм их построения для системы дифференцированных уравнений отличается от алгоритма § 1.3 и сводится к отысканию свертки двух функций.

$$\begin{aligned}
G_{yy}(\alpha, \xi) &= \left( R^4 + \frac{EIR^2}{EA} \right) \frac{\sin(\alpha - \xi) - (\alpha - \xi) \cos(\alpha - \xi)}{2}; \\
G_{xx}(\alpha, \xi) &= \left( R^4 + \frac{EIR^2}{EA} \right) \frac{(\alpha - \xi) \sin(\alpha - \xi)}{2} - R^4 [H(\alpha - \xi) - \cos(\alpha - \xi)]; \\
G_{xy}(\alpha, \xi) &= \left( R^2 + \frac{EAR^4}{EI} \right) \frac{(\alpha - \xi) \sin(\alpha - \xi)}{2} - \frac{EAR^4}{EI} [H(\alpha - \xi) - \cos(\alpha - \xi)]; \\
G_{xx}(\alpha, \xi) &= R^2 \frac{(\alpha - \xi) \cos(\alpha - \xi) + \sin(\alpha - \xi)}{2} + \frac{EAR^4}{EI} \left[ (\alpha - \xi) + \frac{1}{2} (\alpha - \xi) \cos(\alpha - \xi) - \frac{3}{2} \sin(\alpha - \xi) \right].
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Подчеркнутые члены выражений (2.33) начинают оказывать существенное влияние при значительной пологости кругового стержня ( $f/\ell > 1/3$ ). Элементы вектора нагрузки после подстановки  $q_x(\alpha)$ ,  $q_y(\alpha)$  по (1.18), (1.19) и интегрирования принимают вид

$$\begin{aligned}
B_{11} = & \left( R^4 + \frac{EIR^2}{EA} \right) \left\{ \frac{F_x}{R} \cdot \frac{\sin(\alpha - \alpha_F)_- (\alpha - \alpha_F)_- \cdot \cos(\alpha - \alpha_F)_-}{2} + \frac{M (\alpha - \alpha_M)_- \cdot \sin(\alpha - \alpha_M)_-}{R^2} + \right. \\
& + q_y \left[ H(\alpha - \alpha_H)_- - \cos(\alpha - \alpha_H)_- - \frac{1}{2} (\alpha - \alpha_H)_- \cdot \sin(\alpha - \alpha_H)_- - H(\alpha - \alpha_K)_- + \cos(\alpha - \alpha_K)_- + \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2} (\alpha - \alpha_K)_- \sin(\alpha - \alpha_K)_- \right] \right\} + \left( R^4 + \frac{EIR^2}{EA} \right) \left[ \frac{F_x}{R} \frac{(\alpha - \alpha_F)_+ \sin(\alpha - \alpha_F)_+}{2} + \frac{q_x}{2} \left\{ \sin(\alpha - \alpha_H)_+ - \right. \right. \\
& \left. \left. - (\alpha - \alpha_H)_+ \cdot \cos(\alpha - \alpha_H)_+ - \sin(\alpha - \alpha_K)_+ + (\alpha - \alpha_K)_+ \cdot \cos(\alpha - \alpha_K)_+ \right\} \right] - R^4 \left\{ \frac{F_x}{R} \times \right. \\
& \left. \times \left[ H(\alpha - \alpha_F)_- - \cos(\alpha - \alpha_F)_- \right] + q_x \left[ (\alpha - \alpha_H)_- - \sin(\alpha - \alpha_H)_- - (\alpha - \alpha_K)_- + \sin(\alpha - \alpha_K)_- \right] \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{21} = & F_y R^2 [H(\alpha - \alpha_F)_- - \cos(\alpha - \alpha_F)_-] + MR \sin(\alpha - \alpha_M)_- + q_y R^3 [(\alpha - \alpha_H)_- - \sin(\alpha - \alpha_H)_- - \\
& - (\alpha - \alpha_K)_- + \sin(\alpha - \alpha_K)_-] - F_x R^2 [(\alpha - \alpha_F)_- - \sin(\alpha - \alpha_F)_-] - q_x R^3 \left[ \frac{(\alpha - \alpha_H)_-^2}{2} + \right. \\
& \left. + \cos(\alpha - \alpha_H)_- - \frac{(\alpha - \alpha_K)_-^2}{2} - \cos(\alpha - \alpha_K)_- \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{31} = & F_y R \sin(\alpha - \alpha_F)_- + M \cos(\alpha - \alpha_M)_- + q_y R^2 [H(\alpha - \alpha_H)_- - \cos(\alpha - \alpha_H)_- - \\
& - H(\alpha - \alpha_K)_- + \cos(\alpha - \alpha_K)_-] - F_x R [H(\alpha - \alpha_F)_- - \cos(\alpha - \alpha_F)_-] - q_x R^2 \times \\
& \times [(\alpha - \alpha_H)_- - \sin(\alpha - \alpha_H)_- - (\alpha - \alpha_K)_- + \sin(\alpha - \alpha_K)_-]; \tag{2.35}
\end{aligned}$$

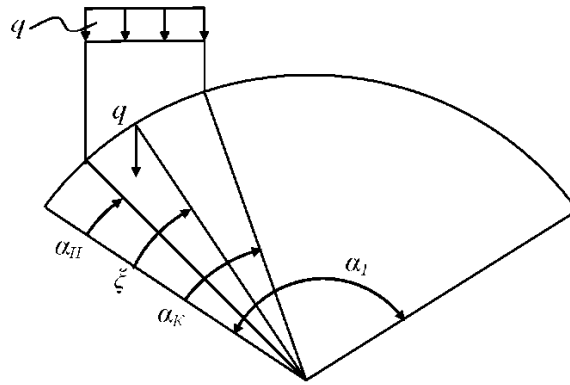
$$\begin{aligned}
B_{41} = & F_x \cos(\alpha - \alpha_F)_- + \frac{M}{R} [-\sin(\alpha - \alpha_M)_-] + q_y R [\sin(\alpha - \alpha_H)_- - \sin(\alpha - \alpha_K)_-] - \\
& - F_x \sin(\alpha - \alpha_F)_- - q_x R [H(\alpha - \alpha_H)_- - \cos(\alpha - \alpha_H)_- - H(\alpha - \alpha_K)_- + \cos(\alpha - \alpha_K)_-];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{51} = & F_y \left\{ \left( 1 + \frac{EAR^2}{EI} \right) R \frac{(\alpha - \alpha_F)_- \cdot \sin(\alpha - \alpha_F)_-}{2} - \frac{EAR^3}{EI} \left[ H(\alpha - \alpha_F)_- - \cos(\alpha - \alpha_F)_- \right] \right\} + \\
& + M \left[ \left( 1 + \frac{EAR^2}{EI} \right) \frac{\sin(\alpha - \alpha_M)_+ + (\alpha - \alpha_M)_+ \cdot \cos(\alpha - \alpha_M)_-}{2} - \frac{EAR^2}{EI} \sin(\alpha - \alpha_M)_- \right] + \\
& + q_y \left\{ \left( 1 + \frac{EAR^2}{EI} \right) R^2 \frac{\sin(\alpha - \alpha_H)_+ - (\alpha - \alpha_H)_- \cdot \cos(\alpha - \alpha_H)_+ - \sin(\alpha - \alpha_K)_- +}{2} \right. \\
& \left. + \frac{(\alpha - \alpha_K)_- \cdot \cos(\alpha - \alpha_K)_-}{2} - \frac{EAR^4}{EI} \left[ (\alpha - \alpha_H)_- - \sin(\alpha - \alpha_H)_+ - (\alpha - \alpha_K)_+ + \right. \right. \\
& \left. \left. + \sin(\alpha - \alpha_K)_- \right] \right\} + F_x \left\{ R \frac{(\alpha - \alpha_F)_- \cdot \cos(\alpha - \alpha_F)_- + \sin(\alpha - \alpha_F)_-}{2} + \frac{EAR^3}{EI} \left[ (\alpha - \alpha_F)_- + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2} (\alpha - \alpha_F)_- \cdot \cos(\alpha - \alpha_F)_- - \frac{3}{2} \sin(\alpha - \alpha_F)_- \right] \right\} + q_x \left\{ \frac{R^2}{2} \left[ (\alpha - \alpha_H)_- \cdot \sin(\alpha - \alpha_H)_- - \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(\alpha - \alpha_k)_- \cdot \sin(\alpha - \alpha_k)_- \Big] + \frac{EAR^4}{EI} \left[ \frac{(\alpha - \alpha_{II})^2}{2} + 2 \cos(\alpha - \alpha_{II}) \cdot -2H(\alpha - \alpha_{II}) + \frac{1}{2}(\alpha - \alpha_{II}) \times \right. \\
& \left. \times \sin(\alpha - \alpha_{II})_+ - \frac{(\alpha - \alpha_k)_+^2}{2} - 2 \cos(\alpha - \alpha_k)_+ + 2H(\alpha - \alpha_k) - \frac{1}{2}(\alpha - \alpha_k)_+ \cdot \sin(\alpha - \alpha_k)_+ \right] \Big\}; \\
B_{\delta 1} = & F'_y \sin(\alpha - \alpha_r)_- + \frac{M}{R} \cos(\alpha - \alpha_M)_- + q_y R [H(\alpha - \alpha_{II}) - \cos(\alpha - \alpha_{II})_+ - H(\alpha - \alpha_k)_+ + \\
& + \cos(\alpha - \alpha_k)_-] + F'_x \cos(\alpha - \alpha_r)_+ + q_x R [\sin(\alpha - \alpha_{II})_+ - \sin(\alpha - \alpha_k)_-].
\end{aligned}$$

В арочных системах распределенная нагрузка часто имеет вид, показанный на рис. 2.23. Тогда

$$q_y(\xi) = q \cos\left(\frac{\alpha_1}{2} - \xi\right); \quad q_x(\xi) = -q \sin\left(\frac{\alpha_1}{2} - \xi\right). \quad (2.36)$$



**Рис. 2.23**

Если подставить выражения (2.36) в (2.33) и проинтегрировать, то элементы вектора нагрузки **B** уравнения (2.32) запишутся следующим образом.

$$\begin{aligned}
B_{11} = & q \left( R^4 + \frac{EIR^2}{EA} \right) \left[ \frac{1}{4} \sin\left(\alpha - \frac{\alpha_1}{2}\right) (\alpha - \alpha_{II}) + \frac{1}{8} \cos\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha\right) - \frac{1}{8} \cos\left(\frac{\alpha_1}{2} + \alpha - 2\alpha_{II}\right) - \right. \\
& \left. - \frac{1}{4} (\alpha - \alpha_{II})^2 \cos\left(\alpha - \frac{\alpha_1}{2}\right) \right]_{\odot} + R^4 q \left[ \frac{3}{4} \cos\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha_{II}\right) - \frac{1}{2} (\alpha - \alpha_N) \sin\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha\right) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{4} \cos\left(\alpha + \frac{\alpha_1}{2} - 2\alpha_{II}\right) \right]_{\ominus} - q \left( R^4 + \frac{EIR^2}{EA} \right) \left[ \frac{1}{4} \sin\left(\alpha - \frac{\alpha_1}{2}\right) (\alpha - \alpha_k) + \frac{1}{8} \cos\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha\right) - \right. \\
& \left. - \frac{1}{8} \cos\left(\frac{\alpha_1}{2} + \alpha - 2\alpha_k\right) - \frac{1}{4} (\alpha - \alpha_k)^2 \cos\left(\alpha - \frac{\alpha_1}{2}\right) \right]_{\odot} - R^4 q \left[ \frac{3}{4} \cos\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha_k\right) - \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} (\alpha - \alpha_k) \sin\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha\right) + \frac{1}{4} \cos\left(\alpha + \frac{\alpha_1}{2} - 2\alpha_k\right) \right]_{\ominus};
\end{aligned}$$

$$B_{21} = R^3 q \left\{ \left[ -2 \sin\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha\right) + 2 \sin\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha_{II}\right) - (\alpha - \alpha_{II}) \left[ \cos\left(\alpha - \frac{\alpha_1}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha_{II}\right) \right] \right]_{\odot} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \left\{ -2 \sin\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha\right) + 2 \sin\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha_k\right) - (\alpha - \alpha_k) \cdot \left[ \cos\left(\alpha - \frac{\alpha_1}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha_k\right) \right] \right\}_{\oplus} \Bigg] ; \\
B_{31} = & R^2 q \left\{ \left[ \sin\left(\alpha - \frac{\alpha_1}{2}\right)(\alpha - \alpha_H) + \cos\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha_H\right) \right]_{\oplus} - \left[ \sin\left(\alpha - \frac{\alpha_1}{2}\right)(\alpha - \alpha_k) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \cos\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha_k\right) \right]_{\ominus} \right\} ; \\
B_{41} = & Rq \cos\left(\alpha - \frac{\alpha_1}{2}\right) \left[ (\alpha - \alpha_H)_{\oplus} - (\alpha - \alpha_k)_{\ominus} \right] ; \tag{2.37} \\
B_{51} = & \frac{EAR^4}{EI} q \left[ \frac{17}{8} \sin\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha\right) - 2 \sin\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha_H\right) + \frac{5}{4}(\alpha - \alpha_H) \cos\left(\alpha - \frac{\alpha_1}{2}\right) + (\alpha - \alpha_H) \times \right. \\
& \left. \times \cos\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha_H\right) - \frac{1}{4}(\alpha - \alpha_H)^2 \sin\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha\right) - \frac{1}{8} \sin\left(\alpha + \frac{\alpha_1}{2} - 2\alpha_H\right) \right]_{\oplus} + R^2 q \left[ -\frac{1}{4}(\alpha - \alpha_H)^2 \times \right. \\
& \left. \times \sin\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha\right) - \frac{1}{4}(\alpha - \alpha_H) \cos\left(\alpha - \frac{\alpha_1}{2}\right) - \frac{1}{8} \sin\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha\right) + \frac{1}{8} \sin\left(\alpha + \frac{\alpha_1}{2} - \alpha_H\right) \right]_{\ominus} - \frac{EAR^4}{EI} \times \\
& \times q \left[ \frac{17}{8} \sin\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha\right) - 2 \sin\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha_k\right) + \frac{5}{4}(\alpha - \alpha_k) \cos\left(\alpha - \frac{\alpha_1}{2}\right) + (\alpha - \alpha_k) \cos\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha_k\right) - \right. \\
& \left. - \frac{1}{4}(\alpha - \alpha_k)^2 \sin\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha\right) - \frac{1}{8} \sin\left(\alpha + \frac{\alpha_1}{2} - 2\alpha_k\right) \right]_{\oplus} - qR^2 \left[ -\frac{1}{4}(\alpha - \alpha_k)^2 \sin\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha\right) - \right. \\
& \left. - \frac{1}{4}(\alpha - \alpha_k) \cos\left(\alpha - \frac{\alpha_1}{2}\right) - \frac{1}{8} \sin\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha\right) + \frac{1}{8} \sin\left(\alpha + \frac{\alpha_1}{2} - 2\alpha_k\right) \right]_{\ominus} ; \\
B_{61} = & qR \sin\left(\alpha - \frac{\alpha_1}{2}\right) \left[ (\alpha - \alpha_H)_{\ominus} - (\alpha - \alpha_k)_{\oplus} \right] ,
\end{aligned}$$

где символ  $\oplus$  обозначает, что соответствующее выражение в скобках является сплайн-функцией аргументов  $(\alpha - \alpha_H)$ ,  $(\alpha - \alpha_k)$ . Таким образом, уравнение (2.32) с правыми частями (2.35), (2.37) будет являться аналитическим решением системы дифференциальных уравнений (2.29) для кругового стержня, а принятые допущения при его построении соответствуют точности третьего приближения по классификации проф. А.П. Филина [98].

### 2.5.3. РАСЧЕТ ПЛОСКИХ КОМБИНИРОВАННЫХ АРОЧНЫХ СИСТЕМ

Достоверность результатов применения уравнения МГЭ (2.32) можно оценить при вычислении граничных параметров кругового стержня.

Пример 11 [72, т. 1, с. 297]. Построить эпюры М, Q, N кругового стержня (рис. 2.24) с радиусом оси R=30 м. Стержень не имеет промежуточных связей, поэтому сразу можно запи-

сать систему уравнений для определения граничных параметров, где элементы матриц  $\mathbf{A}^*$ ,  $\mathbf{B}$  вычисляются по формулам (2.33), (2.35) при  $\alpha = 2\pi/3$ ,  $\alpha_r = \pi/2$ ,  $l^i = 1$ .

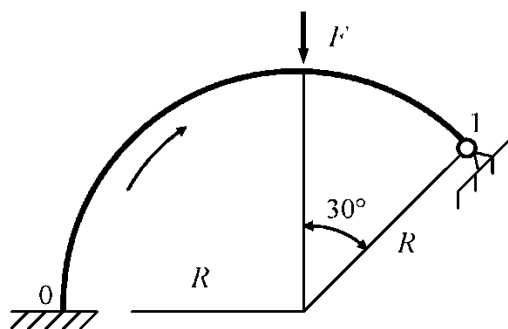


Рис. 2.24

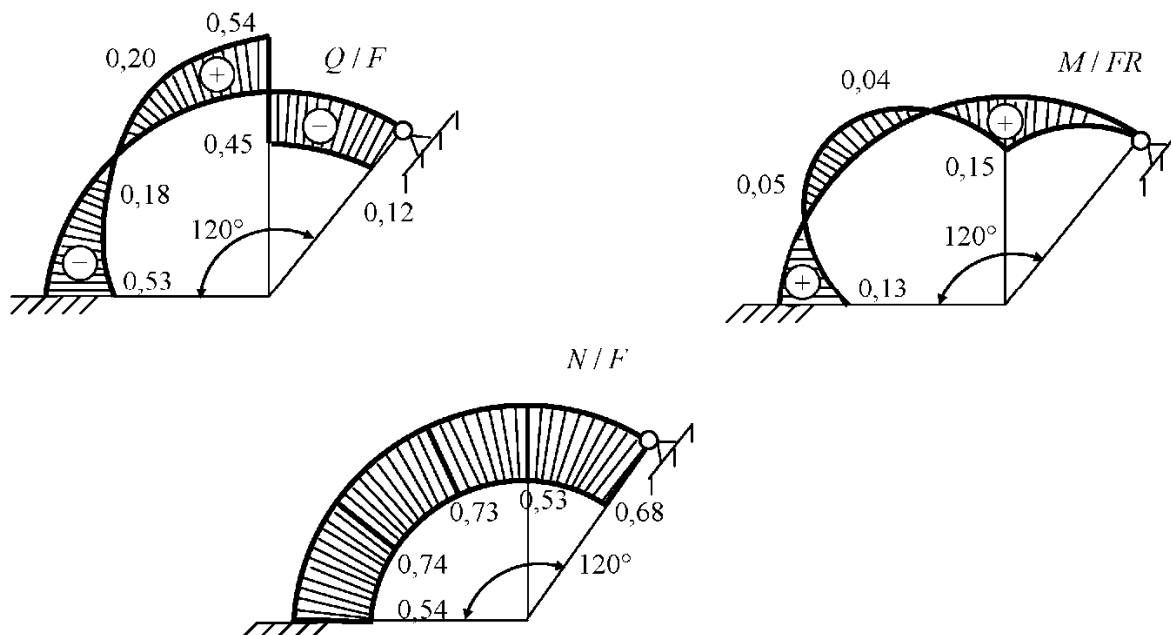
Переставляя строки матриц  $\mathbf{A}^*$ ,  $\mathbf{B}$  в новом порядке, как показано цифрами справа, методом Гаусса определяем граничные параметры с учетом и без учета деформации растяжения. Последние сведены в таблицу 5. Там же приведены результаты расчета по методу сил, где коэффициенты канонических уравнений вычислялись с учетом деформаций изгиба, сдвига и растяжения.

	1	2	3	4	5	6				
1			$-A_{13}$	$-A_{14}$		$A_{16}$	$EIV^{0-1}(o) = 0; EI\varphi^{0-1}(\ell)$	$EIV^{0-1}(\ell) = 0$	3	$-B_{11}$
2	-1		$-A_{23}$	$-A_{13}$		$A_{26}$	$EI\varphi^{0-1}(o) = 0; Q^{0-1}(\ell)$	$EI\varphi^{0-1}(\ell)$	1	$-B_{21}$
3			$A_{22}$	$A_{12}$		$-A_{36}$	$M^{0-1}(o)$	$M^{0-1}(\ell) = 0$	4	$B_{31}$
4		-1		$A_{11}$		$-A_{46}$	$Q^{0-1}(o)$	$Q^{0-1}(\ell)$	2	$B_{41}$
5			$-A_{53}$	$-A_{54}$		$A_{56}$	$EAU^{0-1}(o) = 0; N^{0-1}(\ell)$	$EIU^{0-1}(\ell) = 0$	6	$B_{51}$
6				$-A_{64}$	-1	$A_{11}$	$N^{0-1}(o)$	$N^{0-1}(\ell)$	5	$B_{61}$

Таблица 5

Граничные параметры	Метод сил [81]	МГЭ с учетом деформации растяжения	МГЭ без учета деформации растяжения
$EI\varphi^{0-1}(\ell)$	-	-0,030772 $FR^2$	-0,030582 $FR^2$
$Q^{0-1}(\ell)$	-0,125192 F	-0,125018 F	-0,124306 F
$M^{0-1}(o)$	0,137860 FR	0,137981 FR	0,138437 FR
$Q^{0-1}(o)$	-0,531752 F	-0,531995 F	-0,532971 F
$N^{0-1}(\ell)$	-0,686294 F	-0,686474 F	-0,687190 F
$N^{0-1}(o)$	-0,548434 F	-0,548494 F	-0,548753 F

Анализ данных таблицы 5 показывает, что результаты МГЭ с учетом деформации растяжения совпадают с 3 значащими цифрами точного решения, а точность результатов МГЭ без учета деформации растяжения тоже достаточно высока, хотя совпадают только 2 значащие цифры, т.е. влияние деформаций сдвига и растяжения при заданных геометрических соотношениях жесткого стержня невелико. Эпюры  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  представлены на рис. 2.25.



**Рис. 2.25**

Данный пример показывает, что уравнение МГЭ (2.32) может быть использовано как эталонное решение задачи плоского деформирования жесткого кругового стержня. Практическое применение оно может найти и в расчетах стержневых систем, имеющих криволинейные стержни. Особенности расчета таких систем будут заключаться в составлении уравнений равновесия и совместности перемещений узлов, где сходятся криволинейные и прямолинейные стержни. Уравнения связи граничных параметров будут иметь более сложный вид, чем такие же уравнения прямолинейных стержней.

**Пример 12** [77, с. 109]. Определить граничные параметры стержневой системы с криволинейными ригелями, очерченными по дуге окружности, и закруженной равномерно распределенной нагрузкой 40 кН/м (рис. 2.26).

1. Разбиваем раму на 3 прямолинейных и 2 криволинейных стержня и нумеруем узлы. Стрелки показывают начало и конец каждого стержня. Для ригелей радиусы кривизны и значения центральных углов будут равны

$$R_1 = 15\text{ м}; \quad \alpha_1 = 73,739796^\circ; \quad R_2 = 12,1666\text{ м}; \quad \alpha_2 = 82,2242^\circ.$$



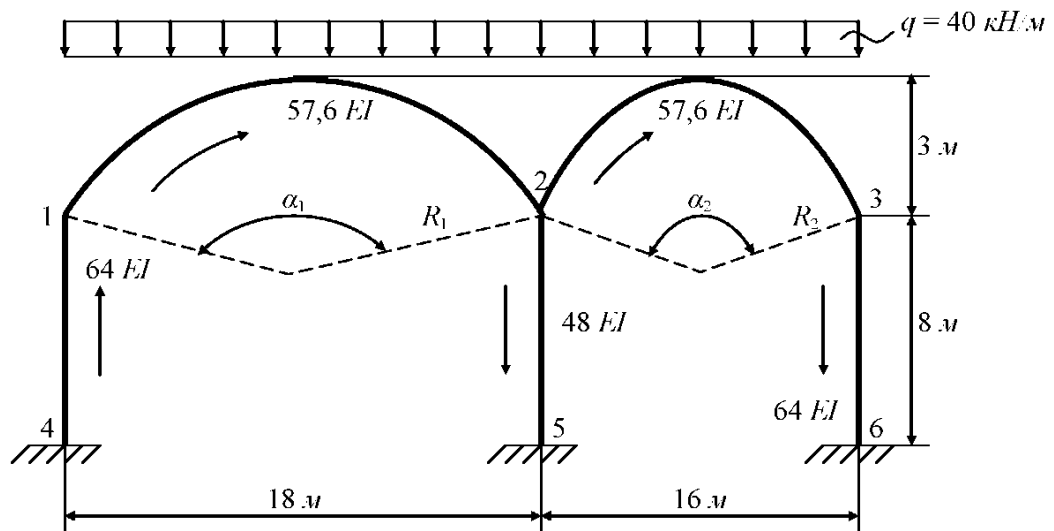


Рис. 2.26

2. Формируем уравнение МГЭ по схеме (1.38). Уравнения равновесия и совместности перемещений узлов 1 и 2 показаны в матрицах  $\mathbf{X}^*$ ,  $\mathbf{Y}$ . Уравнения равновесия и совместности перемещений узлов 1, 2, 3 составлялись с учетом направления оси  $ou$  «вниз» для всех стержней и схемы деформирования рамы по рис. 2. 27. Для криволинейных стержней использовалось уравнение (2.32), для прямолинейных – уравнение изгиба (2.11) с нормальными силами. При вычислении элементов вектора нагрузки использовались выражения (2.37) при  $\alpha_n = 0^\circ$ ;  $\alpha_k = \alpha_1, \alpha_2$ . Ненулевые элементы вектора  $\mathbf{V}$  рамы будут равны

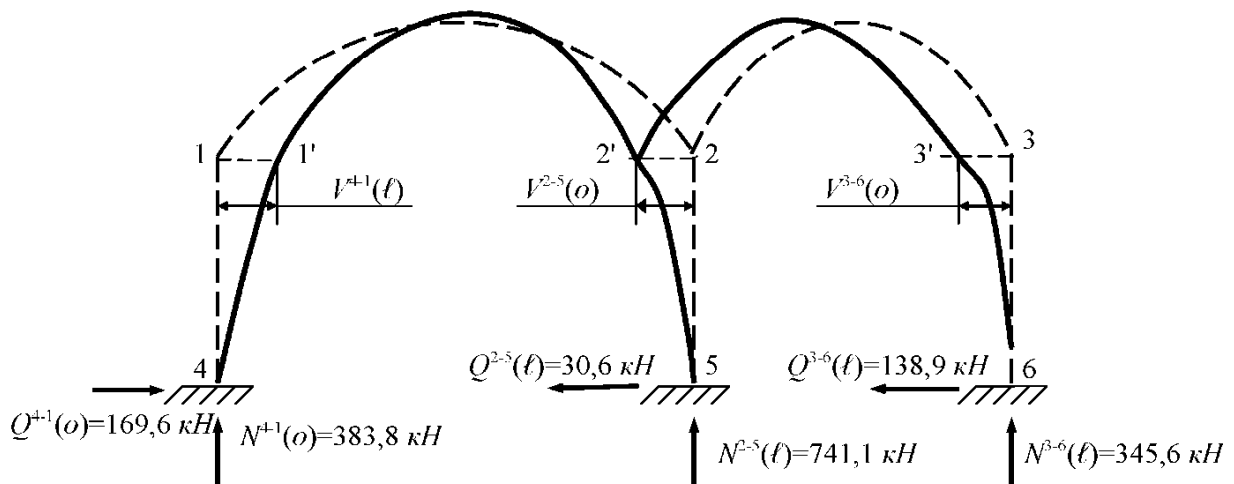


Рис. 2.27

$$B_{11}^{1-2} = 210353,361 \text{ кНМ}^3; \quad B_{21}^{1-2} = 46007,5183 \text{ кНМ}^2; \quad B_{31}^{1-2} = 6949,812 \text{ кНМ};$$

$$B_{41}^{1-2} = 617,761 \text{ кН}; \quad B_{51}^{1-2} = -652989,031 \text{ кНМ}; \quad B_{61}^{1-2} = 463,320 \text{ кН};$$

$$B_{11}^{2-3} = 137550,528 \text{ кНМ}^3; \quad B_{21}^{2-3} = 33692,015 \text{ кНМ}^2; \quad B_{31}^{2-3} = 5587,255 \text{ кНМ};$$

$$B_{41}^{2-3} = 526,196 \text{ кН}; \quad B_{51}^{2-3} = -476627,493 \text{ кНМ}; \quad B_{61}^{2-3} = 459,226 \text{ кН}.$$

В матрице  $X^*$  нулевыми оказались 1, 2, 10, 12, 13 и 16 строки. Соответственно обнуляются в матрице  $A$  столбцы с такими же номерами. Система уравнений МГЭ будет содержать 27 уравнений. Из-за больших размеров матриц ниже представлены только их схемы. Топологическая матрица имеет вид

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	
1						*																						
2							*																					
3								*																				
4									*		*																	
5									*		*																	
6						*												*										
7																			*									
8													*							*								
9														*		*				*	*							
10						*												*										
11														*		*				*	*							
12																		*	*				*					
13																			*					*				
14																									*			
15																										*	*	
16																		*	*				*					
17																										*	*	
18																												
19																												
20	*																											
21		*																										
22										*																		
23																												
24																												
25												*																
26													*															
27																*												

1	$64EIV^{4-1}(o)=0; M^{2-5}(\ell)$
2	$64EI\varphi^{4-1}(o)=0; Q^{2-5}(\ell)$
3	$M^{4-1}(o)$
4	$Q^{4-1}(o)$
5	$N^{4-1}(o)$
6	$57,6EIV^{1-2}(o)$
7	$57,6EI\varphi^{1-2}(o)$
8	$M^{1-2}(o)$
9	$Q^{1-2}(o)$
10	$EA\left[U^{1-2}(o)=V^{1-2}(o)\cdot Ctg\frac{\alpha_1}{2}\right]; N^{2-5}(\ell)$
11	$N^{1-2}(o)$
12	$57,6EI\left[V^{2-3}(o)=-V^{2-5}(o)\cdot\sin\frac{\alpha_2}{2}\right]; M^{3-6}(\ell)$
13	$57,6EI\left[\varphi^{2-3}(o)=\varphi^{2-5}(o)\right]; Q^{3-6}(\ell)$
$X_* =$ 14	$M^{2-3}(o)$
15	$Q^{2-3}(o)$
16	$EA\left[U^{2-3}(o)=-V^{2-5}(o)\cdot\cos\frac{\alpha_2}{2}\right]; N^{3-6}(\ell)$
17	$M^{2-3}(o)$
18	$48EIV^{2-5}(o)$
19	$48EI\varphi^{2-5}(o)$
20	$M^{2-5}(o)$
21	$Q^{2-5}(o)$
22	$N^{2-5}(o)$
23	$64EIV^{3-6}(o)$
24	$64EI\varphi^{3-6}(o)$
25	$M^{3-6}(o)$
26	$Q^{3-6}(o)$
27	$N^{3-6}(o)$

1	$64EIV^{+1}(\ell) = 64EIV^{1-2}(o) / \sin \frac{\alpha_1}{2}$
2	$64EI\varphi^{+1}(\ell) = 64EI\varphi^{1-2}(o)$
3	$M^{+1}(\ell) = M^{1-2}(o)$
4	$Q^{+1}(\ell) = N^{1-2}(o) \cdot \cos \frac{\alpha_1}{2} + Q^{1-2}(o) \cdot \sin \frac{\alpha_1}{2}$
5	$N^{+1}(\ell) = N^{1-2}(o) \cdot \sin \frac{\alpha_1}{2} - Q^{1-2}(o) \cdot \cos \frac{\alpha_1}{2}$
6	$57,6EIV^{1-2}(\ell) = 57,6EIV^{2-5}(o) \cdot \sin \frac{\alpha_1}{2}$
7	$57,6EI\varphi^{1-2}(\ell) = 57,6EI\varphi^{2-5}(o)$
8	$M^{1-2}(\ell) = M^{2-5}(o) + M^{2-3}(o)$
9	$Q^{1-2}(\ell) = Q^{2-5}(o) \cdot \sin \frac{\alpha_1}{2} + N^{2-5}(o) \cdot \cos \frac{\alpha_1}{2} - N^{2-3}(o) \cdot \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + Q^{2-3}(o) \cdot \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$
10	$EAU^{1-2}(\ell) = -12 \cdot 57,6EIV^{2-5}(o) \cdot \cos \frac{\alpha_1}{2}$
11	$N^{1-2}(\ell) = -Q^{2-5}(o) \cdot \cos \frac{\alpha_1}{2} + N^{2-5}(o) \cdot \sin \frac{\alpha_1}{2} + N^{2-3}(o) \cdot \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + Q^{2-3}(o) \cdot \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$
12	$57,6EIV^{2-3}(\ell) = 57,6EIV^{3-6}(o) \cdot \sin \frac{\alpha_2}{2}$
13	$57,6EI\varphi^{2-3}(o) = 57,6EI\varphi^{3-6}(o)$
Y = 14	$M^{2-3}(\ell) = M^{3-6}(o)$
15	$Q^{2-3}(\ell) = Q^{3-6}(o) \cdot \sin \frac{\alpha_2}{2} + N^{3-6}(o) \cdot \cos \frac{\alpha_2}{2}$
16	$EAU^{2-3}(\ell) = -12 \cdot 57,6EIV^{3-6}(o) \cdot \cos \frac{\alpha_2}{2}$
17	$N^{2-3}(\ell) = -Q^{3-6}(o) \cdot \cos \frac{\alpha_2}{2} + N^{3-6}(o) \cdot \sin \frac{\alpha_2}{2}$
18	$48EIV^{2-5}(\ell) = 0$
19	$48EI\varphi^{2-5}(\ell) = 0$
20	$M^{2-5}(\ell)$
21	$Q^{2-5}(\ell)$
22	$N^{2-5}(\ell)$
23	$64EIV^{3-6}(\ell) = 0$
24	$64EI\varphi^{3-6}(\ell) = 0$
25	$M^{3-6}(\ell)$
26	$Q^{3-6}(\ell)$
27	$N^{3-6}(\ell)$

Компенсующие элементы матрицы **C** будут равны

$$A(1,6) = -\frac{64}{57,6 \sin \frac{\alpha_1}{2}} = -1,851851; \quad A(2,7) = -\frac{64}{57,6}; \quad A(3,8) = -1; \quad A(4,9) = -0,6;$$

$$A(4,11) = -0,8; \quad A(5,9) = 0,8; \quad A(5,11) = -0,6; \quad A(6,6) = 12 A_{1,5}^{1,2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha_1}{2} = -1,28;$$

$$A(6,18) = -\frac{57,6}{48 \sin \frac{\alpha_1}{2}} = -0,72; \quad A(7,19) = -57,6/48; \quad A(8,14) = -1; \quad A(8,20) = -1;$$

$$A(9,15) = -\cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = -0,208219; \quad A(9,17) = \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = 0,978082; \quad A(9,21) = -0,6;$$

$$A(9,22) = -0,8; \quad A(10,6) = 12 A_{11}^{1,2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha_1}{2} = 4,48; \quad A(10,18) = \frac{12 \cdot 57,6}{48} \cos \frac{\alpha_1}{2} = 11,52;$$

$$A(11,15) = -\sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = -0,978082; \quad A(11,17) = -\cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = -0,208219; \quad A(11,21) = 0,8;$$

$$A(11,22) = -0,6; \quad A(12,18) = -\frac{57,6}{48} A_{11}^{2,3} \cdot \sin \frac{\alpha_2}{2} - \frac{12 \cdot 57,6}{48} A_{1,5}^{2,3} \cdot \cos \frac{\alpha_2}{2} = -0,789041;$$

$$A(12,19) = \frac{57,6}{48} A_{12}^{2,3} = 14,465753; \quad A(12,23) = -\frac{57,6}{64} \sin \frac{\alpha_2}{2} = -0,591780; \quad A(13,24) = -\frac{57,6}{48};$$

$$A(13,19) = \frac{57,6}{48} A_{22}^{2,3} = 1,2; \quad A(14,25) = -1; \quad A(15,26) = -\sin \frac{\alpha_2}{2} = -0,657534;$$

$$A(15,27) = -\cos \frac{\alpha_2}{2} = -0,753424; \quad A(16,23) = \frac{12 \cdot 57,6}{64} \cos \frac{\alpha_2}{2} = 8,136986;$$

$$A(16,18) = -\frac{57,6}{48} A_{s1}^{2,3} \cdot \sin \frac{\alpha_2}{2} - \frac{12 \cdot 57,6}{48} A_{11}^{2,3} \cdot \cos \frac{\alpha_2}{2} = -10,849315;$$

$$A(17,26) = \cos \frac{\alpha_2}{2} = 0,753424; \quad A(20,1) = -1; \quad A(17,27) = -\sin \frac{\alpha_2}{2} = -0,657534;$$

$$A(21,2) = -1; \quad A(22,10) = -1; \quad A(25,12) = -1; \quad A(26,13) = -1; \quad A(27,16) = -1.$$

Граничные значения фундаментальных функций криволинейных стержней вычислялись по формулам (2.33). Система уравнений МГЭ для рамы представлена ниже.

3. Переставляя строки матриц **A\***, **B**, как показано цифрами справа, методом Гаусса получаем значения граничных параметров. Последние сведены в таблицу 6. Там же представлены результаты по методу перемещений [77]. В данном примере не учитывались продольные перемещения прямолинейных стержней. Поэтому значения параметров изгиба стержней (соответственно и нормальных сил), по МГЭ будут больше их действительных значений. Следствием этого является неравенство равнодействующей внешней нагрузки  $q \cdot 34 = 1360$  кН сумме нормальных сил прямолинейных стержней  $N^{+1}(o) + N^{2-5}(\ell) + N^{3-6}(\ell) = 1470,5$  кН, а равенство нулю поперечных реакций выполняется (рис. 2.27). Заметная разница в результатах разных методов



Таблица 6

№ п/п	Граничные параметры	МГИУ	Метод С.А. Роицкого [86]	% расхождений
1	$M^{2-5}(\ell)$ , кНМ	-110,1858	-98,6	10,5
2	$Q^{2-5}(\ell)$ , кН	-30,6751	—	—
3	$M^{+1}(o)$ , кНМ	-642,3197	-618,1	3,77
4	$Q^{+1}(o)$ , кН	169,6154	—	—
5	$N^{+1}(o)$ , кН	383,8163	—	—
6	$57,6 EIV^{1-2}(o)$ , кНМ <sup>3</sup>	3283,4072	—	—
7	$57,6 EI\varphi^{1-2}(o)$ , кНМ <sup>2</sup>	-260,2222	—	—
8	$M^{1-2}(o)$ , кНМ	714,6036	665,9	6,82
9	$Q^{1-2}(o)$ , кН	-205,2838	—	—
10	$N^{2-5}(\ell)$ , кН	741,1364	—	—
11	$N^{1-2}(o)$ , кН	365,9821	—	—
12	$M^{3-6}(\ell)$ , кНМ	-547,7885	-524,7	4,21
13	$Q^{3-6}(\ell)$ , кН	-138,9402	—	—
14	$M^{2-3}(o)$ , кНМ	620,5054	549,2	11,5
15	$Q^{2-3}(o)$ , кН	-174,4137	—	—
16	$N^{3-6}(\ell)$ , кН	345,6552	—	—
17	$N^{2-3}(o)$ , кН	336,6272	—	—
18	$48 EIV^{2-3}(o)$ , кНМ <sup>3</sup>	908,3314	—	—
19	$48 EI\varphi^{2-3}(o)$ , кНМ <sup>2</sup>	100,1191	—	—
20	$M^{2-5}(o)$ , кНМ	135,2156	136,9	1,25
21	$Q^{2-5}(o)$ , кН	-30,6751	—	—
22	$N^{2-5}(o)$ , кН	741,1364	—	—
23	$64 EIV^{3-6}(o)$ , кНМ <sup>3</sup>	5672,9969	—	—
24	$48 EI\varphi^{3-6}(o)$ , кНМ <sup>2</sup>	63,7806	—	—
25	$M^{3-6}(o)$ , кНМ	563,7337	524,7	6,92
26	$Q^{3-6}(o)$ , кН	-138,9402	—	—
27	$N^{3-6}(o)$ , кН	345,6552	—	—

В заключение данного параграфа отметим, что многочисленные задачи расчета колец и кольцевых систем, приведенных в справочнике [72, т. 1, с. 321, с. 365], могут быть решены с помощью уравнения МГЭ (2.32) в более точной постановке, дополнительно учитывая деформацию растяжения-сжатия оси кольца.

### ГЛАВА III. ДИНАМИКА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

В данной главе рассматриваются свободные и вынужденные установившиеся гармонические колебания стержневых систем. Как и в статике, точные дифференциальные уравнения гармонических колебаний стержней являются нелинейными. Упрощая задачи динамики, нелинейные уравнения линеаризуют. Точность решений линейных уравнений удовлетворяют требованиям инженерных расчетов при  $\ell/h > 10$ , поэтому они используются в инженерной практике. Линейные дифференциальные уравнения содержат частные производные по координате  $x$  и времени  $t$ . Методом Фурье разделения переменных уравнения с частными производными сво-

дятся к уравнениям с обычными производными, описывающими перемещения стержня в амплитудном состоянии. Принцип Д'Аламбера, используемый при выводе дифференциальных уравнений, позволяет рассматривать задачи динамики как задачи статики. Поэтому ниже применены предложенные правила знаков для амплитудных значений граничных параметров и нагрузки в § 1.2, § 1.4.

В большинстве случаев динамика стержневых систем включает две основные задачи:

1. Определение спектра частот и соответствующих им форм собственных колебаний.
2. Определение напряженно-деформированного состояния элементов конструкций от внешней динамической нагрузки.

Рассмотрим алгоритм решения этих задач по МГЭ. Следует отметить, что проблема определения частот собственных колебаний упругих систем продолжает оставаться актуальной задачей. Связано это с недостатками существующих методов. Так, методы сил и перемещений позволяют определять точный спектр частот собственных колебаний (в рамках допущений, принятых при выводе дифференциальных уравнений колебаний), но частотные уравнения этих методов содержат точки разрывов 2-го рода [88]. Возможно также появление фиктивных и пропуск действительных частот вследствие замены заданной расчетной схемы на основную схему [6]. В МКЭ частоты определяются из векового уравнения [44], где спектр частот во-первых ограничен, во-вторых неточен из-за замены системы с бесконечным числом степеней свободы на систему с конечным числом степеней свободы. Аналогичные недостатки имеются и у других методов.

Ниже будет показано, что МГЭ позволяет отбросить недостатки существующих методов и одновременно аккумулировать их достоинства, т.е. решать задачи динамики на качественно более высоком уровне. В частности, получать точный спектр частот в рамках принятых допущений, в частотном уравнении отсутствуют точки разрывов 2-го рода, исключается появление фиктивных и пропуск действительных частот и т.п.

### **3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТ И ФОРМ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ**

При собственных колебаниях стержневой системы все ее элементы совершают движение. При этом граничные параметры стержневых элементов будут отличны от нуля. Это положение позволяет установить вид частотного уравнения МГЭ. Согласно схеме преобразования граничных интегральных уравнений (1.38) все неизвестные статические и кинематические граничные параметры стержневой системы связаны уравнением

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}^* = -\mathbf{B},$$



где  $\mathbf{A}^*$  - квадратная матрица граничных значений фундаментальных ортонормированных функций с компенсирующими элементами, описывающими топологию системы. При собственных колебаниях вектор нагрузки  $\mathbf{V} = 0$  и последнее уравнение принимает вид

$$\mathbf{A}^* \mathbf{X}^* = 0. \quad (3.1)$$

Однородная система линейных алгебраических уравнений имеет нетривиальное решение  $\mathbf{X}^* \neq 0$  только в том случае, если определитель матрицы коэффициентов равен нулю, т.е.

$$|\mathbf{A}^*| = 0. \quad (3.2)$$

Уравнение (3.2) является трансцендентным частотным уравнением МГЭ, корни которого теоретически дают полный спектр частот собственных колебаний линейной системы. В отличие от существующих методов определитель (3.2) содержит лишь систему фундаментальных функций, что позволяет существенно упростить поиск частот собственных колебаний. Интервал, содержащий корень уравнения (3.2), фиксируется при изменении знака определителя или при его стремлении к нулю.

После определения корней уравнения (3.2) можно найти формы и относительные амплитуды собственных колебаний. Для этого необходимо частоту собственных колебаний подставить в аргументы фундаментальных функций матрицы  $\mathbf{A}^*$  и решить уравнение (3.1) при единичном значении одного или двух параметров вектора  $\mathbf{X}^*$ .

Поиск частот собственных колебаний связан с приведением матрицы  $\mathbf{A}^*$  к верхнетреугольному виду и дальнейшему анализу знаков диагональных элементов или величины определителя (3.2). При росте частот собственных колебаний растут и абсолютные величины диагональных элементов верхнетреугольной матрицы. Поэтому верхняя граница спектра частот по МГЭ зависит от возможностей ЭВМ. Для определения частот можно использовать метод исключения Гаусса, где достаточно выполнять только прямой ход. Представим фундаментальные решения линейных дифференциальных уравнений простых видов колебаний.

### **3.2. ПРОДОЛЬНЫЕ, КРУТИЛЬНЫЕ И ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО СТЕРЖНЯ**

Дифференциальное уравнение продольных колебаний стержня постоянной жесткости имеет вид [88]

$$EA \frac{\partial^2 U_s(x,t)}{\partial x^2} - m \frac{\partial^2 U_s(x,t)}{\partial t^2} = -q_x(x,t), \quad (3.3)$$

где  $U_s(x,t)$  - динамическое продольное перемещение сечения стержня;  $m$  - погонная масса стержня;  $q_x(x,t)$  - динамическая продольная нагрузка; второе слагаемое - сила инерции мате-

риальной точки оси стержня. Уравнение (3.3) не учитывает сил инерции, возникающих вследствие поперечных деформаций. Согласно методу разделения Фурье решение уравнения (3.3) и нагрузку представим в виде произведения двух функций (гармонические установившиеся колебания допускают такое представление)

$$U_*(x, t) = U(x)T(t), q_x(x, t) = q_x(x)T(t), \quad (3.4)$$

где  $U(x), q_x(x)$  - амплитудные значения перемещения и нагрузки, зависящие только от  $x$ ;  $T(t)$  - неизвестная функция от времени  $t$ . Функция  $T(t)$  обычно приводится к виду [88]

$$T(t) = C \sin(\omega t + t_0), \quad (3.5)$$

где  $C$  - постоянная, определяемая из начальных условий  $U_*(x, 0)$  и  $\dot{U}_*(x, 0)$ ;  $\omega$  - круговая частота;  $t_0$  - начальная фаза. Подставляя (3.4), (3.5) в (3.3) и сокращая на  $C \sin(\omega t + t_0)$ , получим обыкновенное дифференциальное уравнение продольных колебаний в амплитудном состоянии

$$EAU''(x) + m\omega^2 U(x) = -q_x(x). \quad (3.6)$$

Решение уравнения (3.6) представим с помощью функции Грина. Характеристическое уравнение имеет 2 мнимых корня

$$t_1 = i\sqrt{\frac{\omega^2 m}{EA}}; \quad t_2 = -i\sqrt{\frac{\omega^2 m}{EA}}.$$

В соответствии с этим общее решение однородного уравнения имеет вид

$$U_{\text{одн}}(x) = C_1 \cos \lambda_p x + C_2 \sin \lambda_p x; \quad \lambda_p = \sqrt{\frac{\omega^2 m}{EA}}.$$

Далее, применяя алгоритм построения функции Грина § 1.3, получаем решение задачи Коши в матричной форме

$$\begin{bmatrix} EAU(x) \\ N(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \lambda_p x & \sin \lambda_p x / \lambda_p \\ -\lambda_p \sin \lambda_p x & \cos \lambda_p x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EAU(0) \\ N(0) \end{bmatrix} - \int_0^x \begin{bmatrix} \sin \lambda_p (x - \xi) / \lambda_p \\ \cos \lambda_p (x - \xi) \end{bmatrix} q_x(\xi) d\xi. \quad (3.7)$$

Элементы вектора нагрузки  $\mathbf{B}$ , после подстановки  $q_x(x)$  по (1.14) и интегрирования, принимают вид

$$\begin{aligned} B_{11} &= F \frac{\sin \lambda_p (x - a_1)}{\lambda_p} + q \left[ \frac{-\cos \lambda_p (x - a_2)_1 + H(x - a_2) + \cos \lambda_p (x - a_3)_1 - H(x - a_3)}{\lambda_p^2} \right]; \\ B_{21} &= F \cos \lambda_p (x - a_1) + q \frac{\sin \lambda_p (x - a_2)_1 - \sin \lambda_p (x - a_3)_+}{\lambda_p}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Приближенное дифференциальное уравнение поперечных колебаний стержня постоянной жесткости и начальные параметры после разделения переменных имеют вид [88]

$$\begin{aligned} EIV^{IV}(x) - m\omega^2 V(x) &= q_y(x), \quad V(o), \quad V'(o) = \varphi(o), \\ EIV''(x) &= -M(o), \quad EIV'''(o) = -Q(o). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Решение данной задачи Коши в матричной форме запишется так

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} EIV(x) \\ EI\varphi(x) \\ M(x) \\ Q(x) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & -A_{13} & -A_{14} \\ \lambda^4 A_{14} & A_{11} & -A_{12} & -A_{13} \\ -\lambda^4 A_{13} & -\lambda^4 A_{14} & A_{11} & A_{12} \\ -\lambda^4 A_{12} & -\lambda^4 A_{13} & -\lambda^4 A_{14} & A_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EIV(o) \\ EI\varphi(o) \\ M(o) \\ Q(o) \end{bmatrix} + \int_0^x \begin{bmatrix} A_{14}(x-\xi) \\ A_{13}(x-\xi) \\ -A_{12}(x-\xi) \\ -A_{11}(x-\xi) \end{bmatrix} q_y(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где фундаментальные ортонормированные функции (функции акад. А.Н. Крылова) и элементы вектора нагрузки после интегрирования принимают вид

$$\begin{aligned} \lambda &= \sqrt[4]{\frac{\omega^2 m}{EI}}; \quad A_{11} = (ch\lambda x + \cos \lambda x)/2; \quad A_{12} = (sh\lambda x + \sin \lambda x)/2\lambda; \\ A_{13} &= (ch\lambda x - \cos \lambda x)/2\lambda^2; \quad A_{14} = (sh\lambda x - \sin \lambda x)/2\lambda^3; \\ B_{11} &= \frac{F}{2\lambda^3} [sh\lambda(x-a_1)_+ - \sin \lambda(x-a_1)_-] + \frac{M}{2\lambda^2} [ch\lambda(x-a_2)_+ - \cos \lambda(x-a_2)_-] + \\ &+ q \left[ \frac{ch\lambda(x-a_3)_+ + \cos \lambda(x-a_3)_- - 2H(x-a_3) - ch\lambda(x-a_4)_+ - \cos \lambda(x-a_4)_- + 2H(x-a_4)}{2\lambda^4} \right]; \\ B_{21} &= \frac{F}{2\lambda^2} [ch\lambda(x-a_1)_+ - \cos \lambda(x-a_1)_+] + \frac{M}{2\lambda} [sh\lambda(x-a_2)_+ + \sin \lambda(x-a_2)_+] + \\ &+ q \frac{sh\lambda(x-a_3)_+ - \sin \lambda(x-a_3)_- - sh\lambda(x-a_4)_+ + \sin \lambda(x-a_4)_-}{2\lambda^3}; \\ B_{31} &= \frac{F}{2\lambda} [sh\lambda(x-a_1)_+ + \sin \lambda(x-a_1)_+] + \frac{M}{2} [ch\lambda(x-a_2)_+ + \cos \lambda(x-a_2)_+] + \\ &+ q \frac{ch\lambda(x-a_3)_+ - \cos \lambda(x-a_3)_+ - ch\lambda(x-a_4)_+ + \cos \lambda(x-a_4)_-}{2\lambda^2}; \\ B_{41} &= \frac{F}{2} [ch\lambda(x-a_1)_- + \cos \lambda(x-a_1)_-] + \frac{M\lambda}{2} [sh\lambda(x-a_2)_+ - \sin \lambda(x-a_2)_+] + \\ &+ q \frac{sh\lambda(x-a_3)_+ + \sin \lambda(x-a_3)_+ - sh\lambda(x-a_4)_+ - \sin \lambda(x-a_4)_-}{2\lambda}; \end{aligned} \quad (3.11)$$

Дифференциальное уравнение крутильных колебаний призматического стержня (в амплитудном состоянии) имеет вид [50]

$$\theta''(x) + \omega^2 \frac{\rho}{G} \theta(x) = -\frac{m(x)}{GI_\kappa}. \quad (3.12)$$

Данное уравнение по символьной записи не отличается от уравнения продольных колебаний (3.6). Поэтому решение уравнения (3.12) будет совпадать по форме с решением уравнения (3.6), т.е.

$$\boxed{GI_\kappa \theta(x)} = \boxed{\cos \lambda_\kappa x} \quad \boxed{\sin \lambda_\kappa x / \lambda_\kappa} \quad \boxed{GI_\kappa \theta(o)} - \int_0^x \boxed{\sin \lambda_\kappa (x-\xi) / \lambda_\kappa}$$

$$M_{кр}(x) = \begin{bmatrix} -\lambda_k \sin \lambda_k x & \cos \lambda_k x \end{bmatrix} M_{кр}(0) \begin{bmatrix} \cos \lambda_k (x - \xi) \end{bmatrix} m(\xi) d\xi, \quad (3.13)$$

где  $\rho$  - плотность материала стержня;  $\lambda_k = \sqrt{\omega \rho / G}$ ,  $m^{-1}$ .

### 3.3. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ГОРМОНИЧЕСКОГО ДИНАМИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

В общем случае прямолинейный стержень может испытывать продольные, поперечные (в двух плоскостях) и крутильные колебания. Учитывая, что перемещения малы и справедлив закон упругости Гука, будет выполняться принцип суперпозиции (принцип независимости действия сил). В соответствии с этим можно объединить в одно матричное уравнение решения задач Коши для продольных, поперечных и крутильных колебаний по аналогии со статикой. Практически это означает, что в уравнении (2.22) нужно поменять фундаментальные функции матриц **A** и **B**. Тогда будем иметь решение задачи Коши уравнений динамики стержня сплошного сечения

$$\begin{cases} EI_z V_y^{IV}(x) - m\omega^2 V_y(x) = q_y(x); \\ EI_y V_z^{IV}(x) - m\omega^2 V_z(x) = q_z(x); \\ GI_k \theta''(x) + \rho I_k \omega^2 \theta(x) = -m(x); \\ EAU''(x) + m\omega^2 U(x) = -q_x(x). \end{cases}$$

В частных случаях общее уравнение МГЭ (2.22) упрощается путем отбрасывания соответствующих блоков и отдельных уравнений. В качестве примера рассмотрим вывод частотных уравнений МГЭ для поперечных колебаний отдельных стержней.

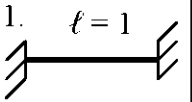
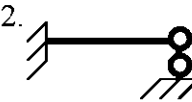
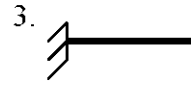
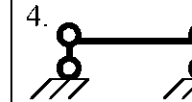
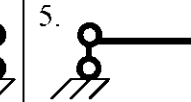
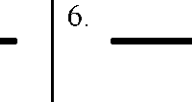
Случай жесткого защемления обоих концов стержня. При граничном значении  $x = \ell$  уравнение (3.10) преобразуем к виду (3.1)

	1	2	3	4			
1			-A <sub>13</sub>	-A <sub>14</sub>	EIV <sup>0-1</sup> (0) = 0; M <sup>0-1</sup> (ℓ)	EIV <sup>0-1</sup> (ℓ) = 0	
2			-A <sub>12</sub>	-A <sub>13</sub>	EIφ <sup>0-1</sup> (0) = 0; Q <sup>0-1</sup> (ℓ)	EIφ <sup>0-1</sup> (ℓ) = 0	
3	-1		A <sub>11</sub>	A <sub>12</sub>	M <sup>0-1</sup> (0)	M <sup>0-1</sup> (ℓ)	
4		-1	λ <sup>4</sup> A <sub>14</sub>	A <sub>11</sub>	Q <sup>0-1</sup> (0)	Q <sup>0-1</sup> (ℓ)	= 0.

Из этого уравнения при  $m = EI = \ell = 1$  следует, что частотное уравнение примет вид  $|A^*(\ell, \omega)| = A_{13}^2 - A_{12}A_{14} = 0 \rightarrow \cos \lambda \cdot ch \lambda = 1$ .

Аналогично можно получить частотные уравнения для других краевых условий опирания стержня. Некоторые из них приведены в таблице 7.

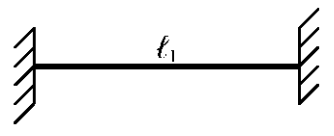
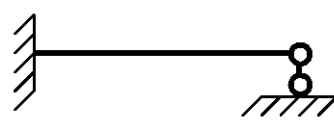
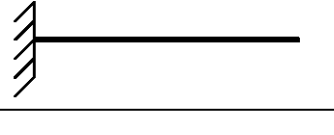
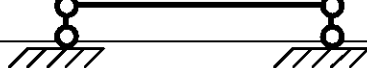
Таблица 7

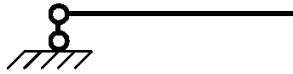

1.  $\ell = 1$	2. 	3. 	4. 	5. 	6. 
$\cos \lambda \cdot ch \lambda = 1$	$\sin \lambda \cdot ch \lambda = \cos \lambda \cdot sh \lambda$	$\cos \lambda \cdot ch \lambda = -1$	$\sin \lambda \cdot = 0$	$\sin \lambda \cdot ch \lambda = \cos \lambda \cdot sh \lambda$	$\cos \lambda \cdot ch \lambda = 1$
$\lambda_1 = 4,730$	$\lambda_1 = 3,927$	$\lambda_1 = 1,875$	$\lambda_1 = \pi$	$\lambda_1 = 0$	$\lambda_1 = 0$
$\lambda_2 = 7,859$	$\lambda_2 = 7,069$	$\lambda_2 = 4,694$	$\lambda_2 = 2\pi$	$\lambda_2 = 3,927$	$\lambda_2 = 4,730$
$\lambda_3 = 10,996$	$\lambda_3 = 10,210$	$\lambda_3 = 7,855$	$\lambda_3 = 3\pi$	$\lambda_3 = 7,069$	$\lambda_3 = 7,853$
$\lambda_4 = 14,137$	$\lambda_4 = 13,352$	$\lambda_4 = 10,996$	$\lambda_4 = 4\pi$	$\lambda_4 = 10,210$	$\lambda_4 = 10,996$

Из таблицы 7 следует, что частные уравнения МГЭ не содержат точек разрыва 2-го рода и позволяют получать в рамках принятых допущений точные спектры частот собственных колебаний.

В теории деформирования стержней, пластин и оболочек важную роль играют формы собственных поперечных колебаний прямолинейных стержней. Выражения для собственных форм следуют из уравнения МГЭ (3.10) после определения начальных параметров. Для некоторых случаев краевых условий функции собственных колебаний в безразмерной форме представлены в таблице 8.

Таблица 8

Схема балки	Форма собственных колебаний
	$X(x) = \sin(\lambda x / \ell_1) - sh(\lambda x / \ell_1) - \alpha_* [\cos(\lambda x / \ell_1) - ch(\lambda x / \ell_1)]$ $\alpha_* = \frac{\sin \lambda - sh \lambda}{\cos \lambda - ch \lambda}$ ; $\lambda$ по табл. 7
	$X(x) = \sin(\lambda x / \ell_1) - sh(\lambda x / \ell_1) - \alpha_* [\cos(\lambda x / \ell_1) - ch(\lambda x / \ell_1)]$ $\alpha_* = \frac{\sin \lambda + sh \lambda}{\cos \lambda + ch \lambda}$
	$X(x) = \sin(\lambda x / \ell_1) - sh(\lambda x / \ell_1) - \alpha_* [\cos(\lambda x / \ell_1) - ch(\lambda x / \ell_1)]$ $\alpha_* = \frac{\sin \lambda + sh \lambda}{\cos \lambda + ch \lambda}$
	

	$X(x) = \sin(\lambda x / \ell_1)$
	$X(x) = \sin(\lambda x / \ell_1) + \alpha_* sh(\lambda x / \ell_1),$ $\alpha_* = \frac{\sin \lambda}{sh \lambda}$
	$X(x) = \sin(\lambda x / \ell_1) + sh(\lambda x / \ell_1) - \alpha_* [\cos(\lambda x / \ell_1) + ch(\lambda x / \ell_1)],$ $\alpha_* = \frac{\sin \lambda - sh \lambda}{\cos \lambda - ch \lambda}$

### 3.4. Выделение симметричных и кососимметричных форм колебаний

Если стержневая система имеет симметричную структуру геометрического порядка, то собственные колебания могут быть представлены симметричной и кососимметричной формами. МГЭ позволяет выделить такие формы без изменения алгоритма расчета. Учет симметричной и кососимметричной форм колебаний основан на свойствах стержневых систем, имеющих оси (плоскости) симметрии. При симметричных колебаниях в сечениях стержневой системы, приведенных через оси симметрии, равны нулю кососимметричные статические и кинематические параметры

$$\varphi(\ell_{сим}) = 0; \quad Q(\ell_{сим}) = 0; \quad M_{кр}(\ell_{сим}) = 0. \quad (3.13)$$

При кососимметричных колебаниях равны нулю симметричные факторы

$$V(\ell_{сим}) = 0; \quad M(\ell_{сим}) = 0; \quad N(\ell_{сим}) = 0. \quad (3.14)$$

Эти равенства следуют из учета симметрии стержневых систем в задачах статики [96]. Если в методе начальных параметров затруднительно использовать свойство симметрии конструкции [43], то в МГЭ выделение симметричных и кососимметричных форм колебаний будет заключаться лишь в выполнении условий (3.13) или (3.14). При этом пройдет сокращение порядка матричного уравнения (1.38) вследствие уменьшения числа стержней в расчетной схеме.

### 3.5. УЧЕТ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ МАСС

В МГЭ учет сосредоточенных масс выполняется путем приведения их к эквивалентной распределенной массе, которая суммируется с погонной массой стержня. Данную процедуру естественно выполнять на основе равенства кинетических энергий.

Представим главную форму колебаний стержня в виде произведений двух функций

$$V_*(x, t) = V(x) \cdot f(t).$$

Скорость движения определится выражением

$$\dot{V}_*(x, t) = V(x) \cdot \dot{f}(t).$$

Кинетическая энергия стержня с сосредоточенными массами запишется в виде

$$K_{\text{д1}} = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} m V^2(x) \left[ \dot{f}(t) \right]^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i \cdot V^2(a_i) \left[ \dot{f}(t) \right]^2,$$

где  $M_i$  –  $i$ -ая сосредоточенная масса. Соответственно кинетическая энергия заменяющего стержня с распределенной массой предстанет так

$$K_{\text{д2}} = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} m_* V^2(x) \left[ \dot{f}(t) \right]^2 dx.$$

Из равенства  $K_{\text{д1}} = K_{\text{д2}}$  следует, что

$$m_* = \frac{m \int_0^{\ell} V^2(x) dx + \sum_{i=1}^n M_i V^2(a_i)}{\int_0^{\ell} V^2(x) dx} = m + \frac{\sum_{i=1}^n M_i V^2(a_i)}{\int_0^{\ell} V^2(x) dx}. \quad (3.15)$$

Если надлежащим образом выбрать вид задаваемой кривой  $V(x)$  упругой линии стержня при колебаниях, то можно приближенно учесть выражением (3.15) сосредоточенные массы. Так, если  $V(x) = \sin(\pi x / \ell)$  – шарнирное опирание граничных точек, то сосредоточенная масса  $M$ , расположенная в середине пролета, будет приведена к распределенной с коэффициентом

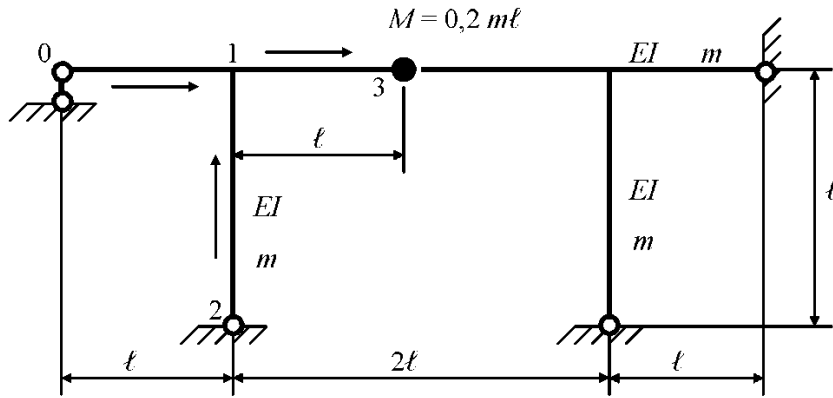
$$m_* = m + \frac{M \sin^2(\pi / 2)}{\int_0^{\ell} \sin^2(\pi x / \ell) dx} = m + 2M / \ell.$$

Этот результат мало зависит от  $V(x)$ .

### 3.6. Стержневые системы с подвижными и неподвижными узлами

Стержневые системы, у которых узлы имеют только угловые перемещения, относят к несвободным конструкциям. Их динамический расчет упрощается тем, что отпадает необходимость учета сил и моментов инерции линейно подвижных стержней, а найденные частоты собственных колебаний близки к действительным частотам. Рассмотрим примеры решения задач динамики плоских стержневых систем.

**Пример 13** [88, с. 205]. Определить частоты собственных симметричных колебаний рамы с неподвижными узлами и сосредоточенной массой (рис. 3.1).



**Рис. 3.1**

1. Конструкция симметрична. Рассмотрим только левую часть рамы. Нумеруем узлы, а стрелками показываем начало и конец каждого элемента. Если учитывать продольные и поперечные перемещения стержней, то согласно уравнению (3.10) форма колебаний стержня 1–3 предстанет выражением

$$EIV(x) = A_{11}(x) \cdot EIV(o) + A_{12}(x) \cdot EI\varphi(o) - A_{13}(x)M(o) - A_{14}(x)Q(o) + Mg[sh\lambda(x-\ell)_- - \sin\lambda(x-\ell)_+]/2\lambda^3,$$

где  $g$  – ускорение свободного падения, а все начальные параметры отличны от нуля. Видно, что относительно точный учет сосредоточенной массы по формуле (3.15) предстанет весьма громоздким выражением. Для существенного упрощения процедуры учета сосредоточенной массы примем, что форма колебаний имеет вид

$$V(x) = \sin(\pi x / 2\ell).$$

Тогда по (3.15) получим, что

$$m_{1-3} = m + \frac{2}{2\ell} 0,2m\ell = 1,2m.$$

2. Формируем матрицу  $A^*$ . В плоскости симметрии рамы будут равны нулю косо-симметричные параметры (при симметричных колебаниях)

$$\varphi^{1-3}(\ell) = 0; \quad Q^{1-3}(\ell) = 0.$$

Матрицы  $X^*$ ,  $Y$  с учетом уравнений равновесия и совместности перемещений узла 1 предстанут в виде

1	$EIV^{0-1}(o) = 0; \quad EIV^{1-3}(\ell)$
2	$EI\varphi^{1-3}(o)$
3	$M^{0-1}(o) = 0; \quad M^{1-3}(\ell)$
4	$Q^{1-3}(o)$

1	$EIV^{0-1}(\ell) = 0$
2	$EI\varphi^{0-1}(\ell) = EI\varphi^{1-3}(o)$
3	$M^{0-1}(\ell) = M^{1-3}(o) - M^{2-1}(\ell)$
4	$Q^{0-1}(\ell) = Q^{1-3}(o) + N^{2-1}(\ell)$



5	$N^{0-1}(o)=0; N^{1-3}(\ell)$
6	$EIV^{1-3}(o)=0; M^{2-1}(\ell)$
7	$EI\varphi^{1-3}(o)$
8	$M^{1-3}(o)$
9	$Q^{1-3}(o)$
10	$N^{1-3}(o)$
11	$EIV^{2-1}(o)=0; Q^{2-1}(\ell)$
12	$EI\varphi^{2-1}(o)$
13	$M^{2-1}(o)=0; N^{2-1}(\ell)$
14	$Q^{2-1}(o)$
15	$N^{2-1}(o)$

;

5	$N^{0-1}(\ell)=N^{1-3}(o)-Q^{2-1}(\ell)$
6	$EIV^{1-3}(\ell)$
7	$EI\varphi^{1-3}(\ell)=0$
8	$M^{1-3}(\ell)$
9	$Q^{1-3}(\ell)=0$
10	$N^{1-3}(\ell)$
11	$EIV^{2-1}(\ell)=0$
12	$EI\varphi^{2-1}(\ell)=EI\varphi^{1-3}(o)$
13	$M^{2-1}(\ell)$
14	$Q^{2-1}(\ell)$
15	$N^{2-1}(\ell)$

Топологическая матрица **C**, связанная с переносом конечных параметров, примет вид

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1															
2							-1								
3						1		-1							
4									-1				-1		
5										-1	1				
6	-1														
7															
8			-1												
9															
10					-1										
11															
12							-1								
13						-1									
14											-1				
15													-1		

Подчеркнем, что эта матрица не зависит от содержания задачи и будет неизменной и в задачах статики при симметричной нагрузке, и в задачах устойчивости при симметричной форме потери устойчивости. В матрице **A** обнулیم 1, 3, 5, 6, 11 и 13 столбцы и накладываем компенсирующие элементы матрицы **C**. Используем блоки фундаментальных функций поперечных колебаний уравнения (3.10) с добавлением динамических нормальных сил. В данном примере не учитываем продольных перемещений стержней и считаем, что  $EA \rightarrow \infty$ , поэтому фундаментальная функция для нормальных сил  $\cos \lambda_p \ell \rightarrow 1$ . Матрица **A\*** запишется следующим образом

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1		$A_{12}$		$-A_{14}$											
															2

2		$A_{11}$		$-A_{13}$			$-1$								4
3		$-\lambda^4 A_{14}$		$A_{12}$		$1$	$-1$								6
4		$-\lambda^4 A_{13}$		$A_{11}$				$-1$					$-1$		13
5									$-1$	$1$					10
6	$-1$						$A_{12}$	$-A_{13}$	$-A_{14}$						1
7							$A_{11}$	$-A_{12}$	$-A_{13}$						9
$A_* = 8$			$-1$				$-\lambda^4 A_{14}$	$A_{11}$	$A_{12}$						3
9							$-\lambda^4 A_{13}$	$\lambda^4 A_{14}$	$A_{11}$						8
10				$-1$						$1$					5
11											$A_{12}$		$-A_{14}$		12
12							$-1$				$A_{11}$		$-A_{13}$		7
13						$-1$					$-\lambda^4 A_{14}$		$A_{12}$		14
14										$-1$	$-\lambda^4 A_{13}$		$A_{11}$		11
15												$-1$		$1$	15

3. Переставив строки, как показано цифрами справа, прямым ходом метода исключения Гаусса приводим матрицу  $A_*$  к верхнетреугольному виду. Далее определитель матрицы  $A_*$  вычисляется как произведение диагональных элементов. Чтобы зафиксировать изменение знака определителя необходимо, очевидно, повторять этот алгоритм в пределах определенного интервала изменения частоты  $\omega$ . Четких правил по выбору начального значения частоты и шага ее изменения не существует. Здесь необходимо руководствоваться интуитивными представлениями. Ориентиром могут служить частоты собственных колебаний отдельных стержней (см. таблицу № 7) и в качестве начальных значений выбирать (1/100 – 1/1000) минимальной частоты составляющих элементов стержневой системы. В качестве грубого шага изменения частоты можно рекомендовать (1/100 – 1/1000) длины интервала, на котором определяется частота. Далее, если интервал, содержащий корень уравнения (3.2), найден, интервал и корень уточняются путем уменьшения шага изменения частоты. Процесс поиска спектра частот собственных колебаний можно полностью автоматизировать, но в учебном процессе для наглядности целесообразно осуществлять поиск частот визуально, если выводить значения частот и определителя матрицы  $A_*$  в отдельный файл, а затем просматривать его. Данный метод последовательного перебора реализован в программе на языке Fortran, которая представлена в Приложении №1.

На рис. 3.2 показан график изменения определителя  $D = f(\lambda)$  для данной рамы. Вычисление определителя проводилось по приведенной программе с шагом  $\Delta\lambda = 0,01\lambda$ . Видно,

что частотное уравнение МГЭ не имеет точек разрыва 2-го рода, однако существует возможность пропуска частоты, когда график касается оси абсцисс. В этом случае нужно анализировать монотонность изменения определителя  $D(\lambda)$ . При  $EI = m = \ell = 1$  по МГЭ получаются следующие корни

$$\lambda_1 = 2,0; \quad \lambda_2 = 3,55; \quad \lambda_3 = 4,95; \dots$$

По методу перемещений корни соответственно равны [88]

$$\lambda_1 = 2,0; \quad \lambda_2 = 3,39; \quad \lambda_3 = 4,33; \dots$$

Частоты собственных колебаний рамы с сосредоточенной массой по МГЭ

$$\omega_1 = 4,0\sqrt{EI/m\ell^4}; \quad \omega_2 = 12,6\sqrt{EI/m\ell^4}; \quad \omega_3 = 24,5\sqrt{EI/m\ell^4}.$$

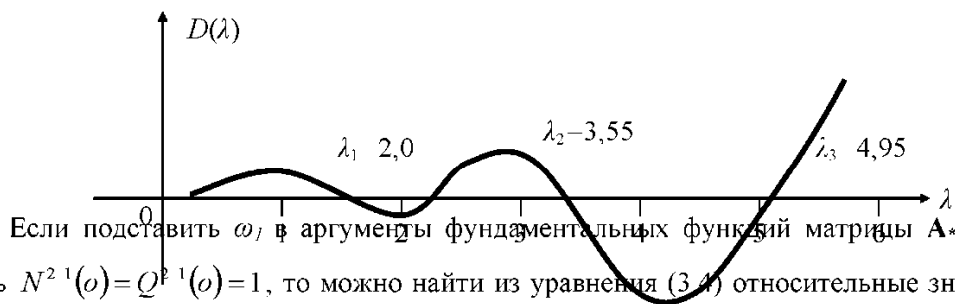
По методу перемещений

$$\omega_1 = 4,0\sqrt{EI/m\ell^4}; \quad \omega_2 = 11,5\sqrt{EI/m\ell^4}; \quad \omega_3 = 18,75\sqrt{EI/m\ell^4}.$$

Погрешности определения частот по МГЭ составляют

$$\Delta_1 = 0,0\%; \quad \Delta_2 = 9,56\%; \quad \Delta_3 = 30,67\%,$$

т.е. результаты МГЭ менее достоверны, чем результаты по методу перемещений. Объясняется это приближенным учетом сосредоточенной массы, и приведенная масса оказалась заниженной. Действительные частоты будут меньше частот, определенных методом перемещений, поскольку необходимо учитывать продольные перемещения, сдвиг и инерцию вращения элементов рамы.



Если подставить  $\omega_i$  в аргументы фундаментальных функций матрицы  $A^*$  и условно принять  $N^{2-1}(\rho) = Q^{1-1}(\rho) = 1$ , то можно найти из уравнения (3.4) относительные значения граничных параметров стержней рамы при собственных колебаниях. В данном примере

**Рис. 3.2**

по методу перемещений

$$\varphi^{1-2}(\rho) \cdot \ell / V^{1-3}(\ell) = 0,71 \text{ для } \omega_1 \text{ и } -4,42 \text{ для } \omega_2,$$

по методу перемещений

$$\varphi^{1-2}(\rho) \cdot \ell / V^{1-3}(\ell) = 0,67 \text{ для } \omega_1 \text{ и } -4,85 \text{ для } \omega_2,$$

т.е. формы колебаний, как и частоты двух методов, близки между собой.

Рассмотрим пример динамического расчета неразрезной балки, расчетная схема которой широко используется в машиностроении и строительстве. К этой схеме приводятся различные валы, оси, балки, роторы турбин, оси гребных винтов, карданные валы и т.д.

**Пример 14.** Определить частоты собственных колебаний и напряженно-деформированное состояние неразрезной балки при заданной динамической нагрузке (рис. 3.3).

1. Нумеруем узлы и обозначаем стрелками начало и конец всех элементов.
2. Формируем матрицы  $\mathbf{X}^*$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{B}$ . Используем уравнение (3.10).

$\mathbf{X}^* =$	1	$2EIV^{0-1}(o) = 0; Q^{0-1}(\ell)$	;	$\mathbf{Y} =$	1	$2EIV^{0-1}(\ell) = 0$	;	$\mathbf{B} =$	1	821,3042
	2	$2EI\varphi^{0-1}(o) = 0; Q^{1-2}(\ell)$			2	$2EI\varphi^{0-1}(\ell) = 2EI\varphi^{1-2}(o)$			2	487,5471
	3	$M^{0-1}(o)$			3	$M^{0-1}(\ell) = M^{1-2}(o)$			3	-252,855
	4	$Q^{0-1}(o)$			4	$Q^{0-1}(\ell)$			4	-151,3181
	5	$EIV^{1-2}(o) = 0; 2EI\varphi^{2-3}(\ell)$			5	$EIV^{1-2}(\ell) = 0$			5	156,0478
	6	$EI\varphi^{1-2}(o)$			6	$EI\varphi^{1-2}(\ell) = EI\varphi^{2-3}(o)$			6	44,2882
	7	$M^{1-2}(o)$			7	$M^{1-2}(\ell) = M^{2-3}(o)$			7	-49,4261
	8	$Q^{1-2}(o)$			8	$Q^{1-2}(\ell)$			8	-53,6240
	9	$2EIV^{2-3}(o) = 0; Q^{2-3}(\ell)$			9	$2EIV^{2-3}(\ell) = 0$			9	589,7127
	10	$2EI\varphi^{2-3}(o)$			10	$2EI\varphi^{2-3}(\ell)$			10	225,6390
	11	$M^{2-3}(o)$			11	$M^{2-3}(\ell) = 0$			11	-185,6959
	12	$Q^{2-3}(o)$			12	$Q^{2-3}(\ell)$			12	-149,4157

Элементы матрицы  $\mathbf{B}$  вычисляем по выражениям (3.11) при частоте вынужденных колебаний  $\theta = 0,30779\sqrt{EI/m}^1/c$ . Коэффициенты фундаментальных функций при  $EI = m = 1$  будут равны

$$\lambda^{0-1} = \lambda^{1-2} = \lambda^{2-3} = \sqrt{\omega}.$$

Топологическая матрица  $\mathbf{C}$  балки примет вид

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbf{C} =$	1											
	2					-2						
	3						-1					
	4	-1										
	5											
	6									-0,5		
	7										-1	
	8		-1									

9												
10					-1							
11												
12										-1		

Уравнение МГЭ данной балки запишется следующим образом

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12			
1			$-A_{13}$	$-A_{14}$										$Q^{0-1}(\ell)$	-821,304 3
2			$-A_{12}$	$-A_{13}$		-2								$Q^{1-2}(\ell)$	-487,547 4
3			$A_{11}$	$A_{12}$			-1							$M^{0-1}(o)$	252,855 7
4	-1		$\lambda^4 A_{14}$	$A_{11}$										$Q^{0-1}(o)$	151,318 1
5						$A_{12}$	$-A_{13}$	$-A_{14}$						$2EI\varphi^{2-3}(\ell)$	-156,047 6
6						$A_{11}$	$-A_{12}$	$-A_{13}$		-0,5				$EI\varphi^{1-2}(o)$	-44,288 8
7						$-\lambda^4 A_{14}$	$A_{11}$	$A_{12}$				-1		$M^{1-2}(o)$	49,426 11
8		-1				$-\lambda^4 A_{13}$	$\lambda^4 A_{14}$	$A_{11}$						$Q^{1-2}(o)$	53,624 2
9											$A_{12}$	$-A_{13}$	$-A_{14}$	$Q^{2-3}(\ell)$	-589,712 10
10						-1					$A_{11}$	$-A_{12}$	$-A_{13}$	$2EI\varphi^{2-3}(o)$	-225,639 5
11											$-\lambda^4 A_{14}$	$A_{11}$	$A_{12}$	$M^{2-3}(o)$	185,695 12
12										-1	$-\lambda^4 A_{13}$	$\lambda^4 A_{14}$	$A_{11}$	$Q^{2-3}(o)$	149,415 9

Для поиска частот собственных колебаний балки используем программу на языке Pascal в Приложении 1.

Переставляя строки матрицы  $A^*$  в новом порядке, как показано цифрами справа, исследуем поведение ее определителя. Частоты собственных колебаний балки следующие

$$\omega_1 = 0,31885\sqrt{EI/m}; \quad \omega_2 = 0,47985\sqrt{EI/m}; \quad \omega_3 = 0,99225\sqrt{EI/m};$$

$$\omega_4 = 1,56045\sqrt{EI/m}; \quad \omega_5 = 2,53035\sqrt{EI/m}; \quad \dots$$

По МКЭ из векового частотного уравнения определены две частоты

$$\omega_1 = 0,44504\sqrt{EI/m}; \quad \omega_2 = 0,73265\sqrt{EI/m}.$$

Близкими оказались только первые частоты. Известно, что по МКЭ можно определить только приближенный спектр частот, т.к. в этом методе упругая система с бесконечным числом степеней свободы заменяется системой с конечным числом степеней свободы. В этом и других примерах показано, что МКЭ удовлетворительно точно определяет только первую частоту и

повышение точности расчета достигается дроблением сетки конечных элементов с соответствующим повышением порядка системы разрешающих уравнений [44]. Действительные частоты меньше частот, определенных по МГЭ, но точность спектра достаточно высока. Ниже, в главе устойчивость, будет показано, что, например, первая частота по МГЭ для систем с неподвижными узлами имеет погрешность не более 2,0 %.

Таблица 9

Параметры балки	Динамический расчет					Статический расчет
	Резонансный режим		Нерезонансный режим			
	МГЭ	МКЭ	$\theta = 0,7\omega_1^{МГЭ}$	$\theta = 0,5\omega_1^{МГЭ}$	$\theta = 0,2\omega_1^{МГЭ}$	
$Q^{0-1}(\ell), кН$	-68,4296	-41,01	-35,8313	-32,9361	-31,2194	-30,9434
$Q^{1-2}(\ell), кН$	-126,0667	2,99	-36,1800	-31,5182	-29,2050	-28,8583
$M^{0-1}(o), кНм$	-285,1143	-101,3	-66,9161	-53,8560	-47,1286	-46,1132
$Q^{0-1}(o), кН$	184,3333	9,54	54,0433	45,9524	41,7043	41,0566
$2EI\varphi^{2-3}(\ell), кНм^2$	-1936,4851	-	-255,7103	-172,8050	-134,2930	-128,7924
$EI\varphi^{1-2}(o), кНм^2$	-224,3246	-	-30,9326	-20,7536	-15,8769	-15,1698
$M^{1-2}(o), кНм$	141,0263	13,73	-6,6604	-12,8956	-15,4413	-15,7736
$Q^{1-2}(o), кН$	-203,2924	73,34	-2,6204	6,5925	10,5962	11,1415
$Q^{2-3}(\ell), кН$	-589,1107	-139,7	-70,6153	-45,0437	-33,1626	-31,4654
$2EI\varphi^{2-3}(o), кНм^2$	1366,9078	-	167,7506	108,7580	81,4697	77,5849
$M^{2-3}(o), кНм$	-541,0018	-146,35	-85,6714	-63,2032	-52,7127	-51,2075
$Q^{2-3}(o), кН$	736,2549	187,20	96,5091	65,1283	50,6045	48,5346

4. Выполняем расчет неразрезной балки на вынужденную динамическую нагрузку с частотой  $\theta = 0,7\omega_1^{МКЭ} = 0,7 \cdot 0,44504\sqrt{EI/m} = 0,30779\sqrt{EI/m}^1/c$ . Из-за погрешностей в определении спектра частот получился практически резонансный режим, когда амплитуды неограниченно растут. В этом случае объективно может наступить неустойчивость решения системы уравнений  $A^* X^* = -B$ , т.к. определитель  $|A^*| \rightarrow 0$  и параметры напряженно-деформированного состояния получаются недостоверными. Результаты расчета параметров в резонансном режиме и для других значений частоты вынужденных колебаний представлены в таблице 9. Использовалась программа на языке Pascal примера № 6, матрицы  $A^*$ ,  $B$  вводились с помощью операторов присваивания.

Данные таблицы 9 подтверждают достоверность результатов МГЭ по нерезонансным режимам. Чем дальше отстоит частота вынужденных колебаний  $\theta$  от первой частоты собственных колебаний  $\omega_1$ , тем ближе значения динамических параметров балки к параметрам статического расчета. Далее, по уравнению (3.10) и начальным параметрам таблицы 9, для  $\theta = 0,2\omega_1^{МГЭ}$  вычисляем параметры состояния балки во внутренних точках. Результаты вычислений сведены в таблицу 10, по данным которой построены эпюры  $V(x)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $M(x)$ ,  $Q(x)$  (рис. 3.3).

Таблица 10

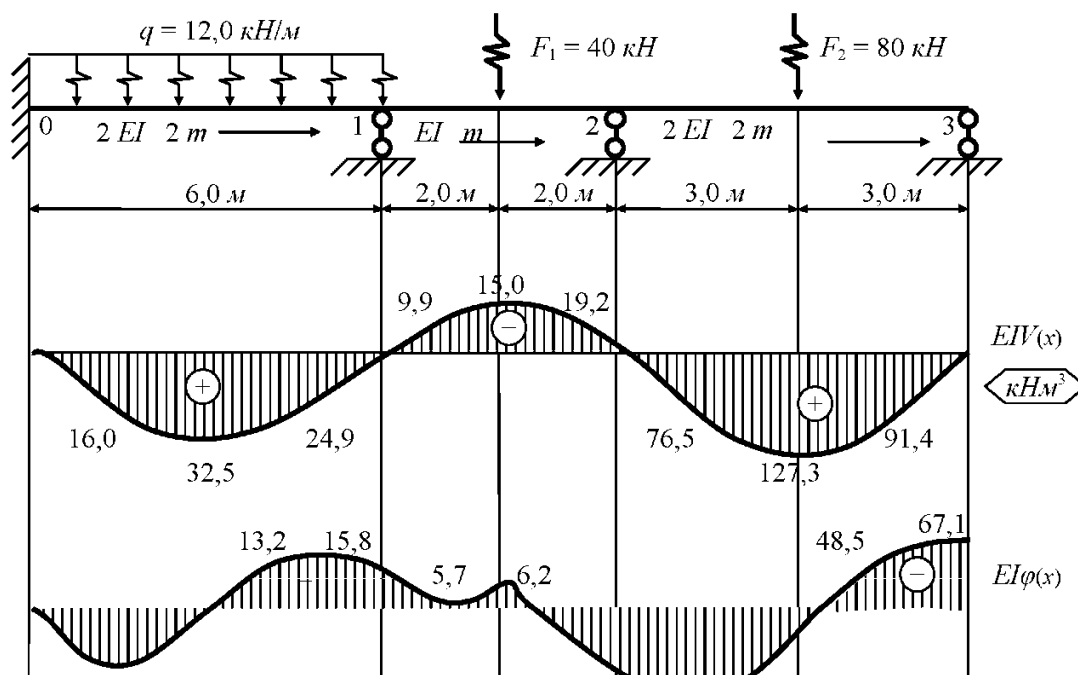
Глобальная координата $x, м$	Локальная координата $x, м$	Статические и кинематические параметры			
		Прогиб $EIV(x), кНм^3$	Угол поворота $EI\phi(x), кНм^2$	Изгибающий момент $M(x), кНм$	Поперечная сила $Q(x), кН$
0,0	0,0	0,0	0,0	-47,1286	41,7043
1,5	1,5	16,0474	15,2676	1,8974	23,6292
3,0	3,0	32,5189	3,9770	23,6314	5,3152
4,5	4,5	24,9906	-13,2867	17,8093	-13,0625
6,0	6,0	0,0	-15,8769	-15,4413	-31,2194
7,0	1,0	-9,9227	-5,7359	-4,8366	10,6198
8,0	2,0	-15,0122	-6,2168	5,8068	10,6704
9,0	3,0	-19,2469	2,6299	-23,4881	-29,2570
10,0	4,0	0,0	40,7349	-52,7127	-29,2050
11,5	1,5	76,5325	51,8444	22,9755	50,1546
13,0	3,0	127,3474	6,6158	97,3025	49,3454
14,5	4,5	91,4097	-48,5491	49,4453	-32,5766
16,0	6,0	0,0	-67,1465	0,0	-33,1626

Покажем применение алгоритма МГЭ для расчета рамы с неподвижными узлами на вынужденную динамическую нагрузку.

Пример 15 [44, с. 134]. Построить эпюры  $M, Q, N$  рамы (рис. 3.4), нагруженной возмущающей силой с частотой

$$\theta = 0,39268\sqrt{EI/m} \approx 0,7\omega_{\min}^1/c.$$

1. Разбиваем раму на 3 стержня, нумеруем узлы и обозначаем начало и конец номерного элемента.



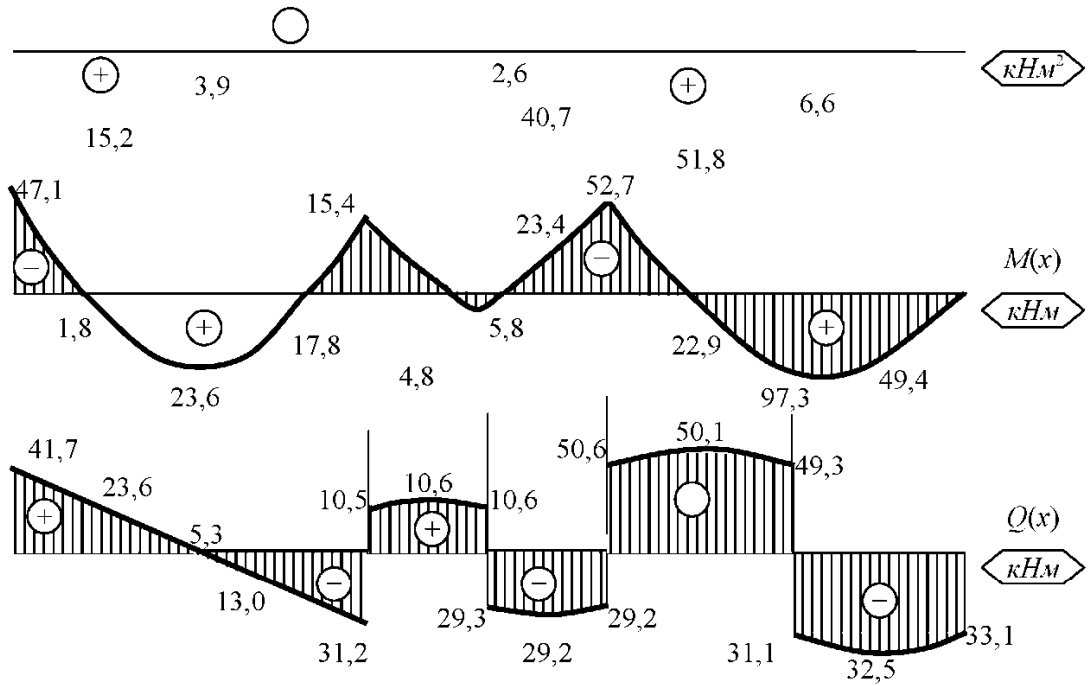


Рис. 3.3

2. Формируем уравнение МГЭ. Уравнения равновесия и совместности перемещений узла 1 представлены в матрице  $Y$ . Граничные точки рамы жестко защемлены. Это приводит к нарушению баланса между независимыми параметрами матрицы  $Y$  и нулевыми параметрами матрицы  $X$ . Для восстановления баланса, применяем для стержня 0-1 блок уравнений продольных и поперечных колебаний.

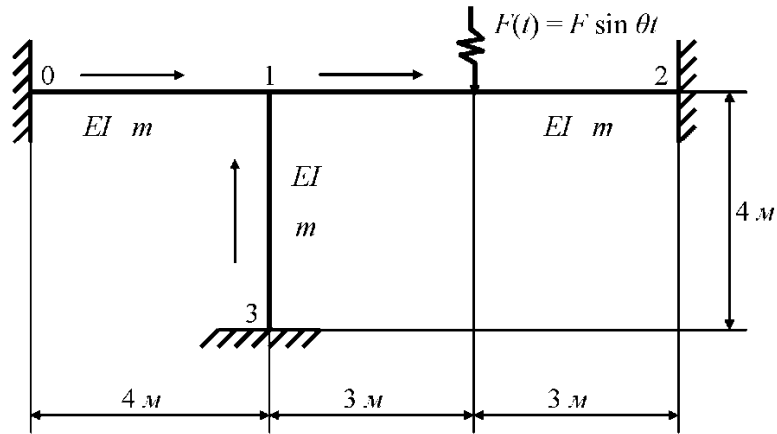


Рис. 3.4

Элементы матриц  $A_*$ ,  $B$  вычисляем по формулам (3.11)

$\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \begin{cases} EIV^{0-1}(0) = 0; M^{1-2}(\ell) \\ EI\varphi^{0-1}(0) = 0; Q^{1-2}(\ell) \end{cases}$	$\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \begin{cases} EIV^{0-1}(\ell) = 0 \\ EI\varphi^{0-1}(\ell) = EI\varphi^{1-2}(0) \end{cases}$	$\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \begin{cases} \\ \end{cases}$
---	--	---



	3	$M^{0-1}(o)$		3	$M^{0-1}(\ell) = M^{1-2}(o) - M^{3-1}(\ell)$		3			
	4	$Q^{0-1}(o)$		4	$Q^{0-1}(\ell) = Q^{1-2}(o) + N^{3-1}(\ell)$		4			
	5	$EAU^{0-1}(o) = 0; N^{1-2}(\ell)$		5	$EAU^{0-1}(\ell) = 0$		5			
	6	$N^{0-1}(o)$		6	$N^{0-1}(\ell) = N^{1-2}(o) - Q^{3-1}(\ell)$		6			
	7	$EIV^{1-2}(o) = 0; M^{3-1}(\ell)$		7	$EIV^{1-2}(\ell) = 0$		7	4,567F		
<b>X*</b> =	8	$EI\phi^{1-2}$	;	<b>Y</b> =	8	$EI\phi^{1-2}(\ell) = 0$	;	<b>B</b> =	8	4,656F
	9	$M^{1-2}(o)$		9	$M^{1-2}(\ell)$		9	-3,313F		
	10	$Q^{1-2}(o)$		10	$Q^{1-2}(\ell)$		10	-1,524F		
	11	$N^{1-2}(o)$		11	$N^{1-2}(\ell)$		11			
	12	$EIV^{3-1}(o) = 0; Q^{3-1}(\ell)$		12	$EIV^{3-1}(\ell) = 0$		12			
	13	$EI\phi^{3-1}(o) = 0; N^{3-1}(\ell)$		13	$EI\phi^{3-1}(\ell) = EI\phi^{1-2}(o)$		13			
	14	$M^{3-1}(o)$		14	$M^{3-1}(\ell)$		14			
	15	$Q^{3-1}(o)$		15	$Q^{3-1}(\ell)$		15			
	16	$N^{3-1}(o)$		16	$N^{3-1}(\ell)$		16			



3. Переставив строки матриц  $\mathbf{A}^*$ ,  $\mathbf{B}$  в порядке, показанном цифрами справа, методом Гаусса получаем значения граничных параметров (таблица 11).

Таблица 11

Величины	МГЭ	МКЭ	Погрешность, %
$M^{1-2}(\ell)$	-1,8112F	-1,782F	1,68
$Q^{1-2}(\ell)$	-1,251F	-1,228F	1,84
$M^{0-1}(o)$	0,385F	0,372F	3,44
$Q^{0-1}(o)$	-0,306F	-0,295F	3,72
$N^{1-2}(\ell)$	-0,159F	-	-
$N^{0-1}(o)$	0,0	-	-
$M^{3-1}(\ell)$	-0,600F	-0,591F	1,53
$EI\varphi^{1-2}(o)$	-0,668F	-0,653F	2,25
$M^{1-2}(o)$	-1,200F	-1,182F	1,53
$Q^{1-2}(o)$	1,111F	1,089F	2,01
$N^{1-2}(o)$	-0,159F	-	-
$Q^{3-1}(\ell)$	-0,159F	-0,160F	0,84
$N^{3-1}(\ell)$	-1,270F	-	-
$M^{3-1}(o)$	0,385F	0,372F	3,44
$Q^{3-1}(o)$	-0,306F	-0,295F	3,72
$N^{3-1}(o)$	-1,270F	-	-

Данные таблицы 11 показывают, что результаты МКЭ и МГЭ по расчету несвободной рамы на вынужденные колебания практически совпадают. Эпюры  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  рамы показаны на рис. 3.5.

Стержневые системы, у которых узлы имеют угловые и линейные перемещения, называются свободными. Динамический расчет таких конструкций требует учета сил инерции вращательного и поступательного движений отдельных стержней. Существующие методики несовершенны и позволяют учесть такие силы инерции в первом приближении. В МКЭ силы инерции свободных стержней представляются в виде сосредоточенных масс, смещаемых вместе с центром тяжести связанных с ними стержнем. Далее эти массы прикладываются к узлам конструкции и учитываются в матрице эквивалентных масс.

В МГЭ сосредоточенные массы могут быть учтены формулой (3.15), т.е. сосредоточенные массы приводятся к эквивалентной распределенной массе и их учет приводит к увеличению распределенных масс связанных с ними несвободных стержней. Отсюда следует, что точный учет сил инерции подвижных стержней является достаточно сложной проблемой. В первом приближении можно рекомендовать следующий порядок учета сил инерции.

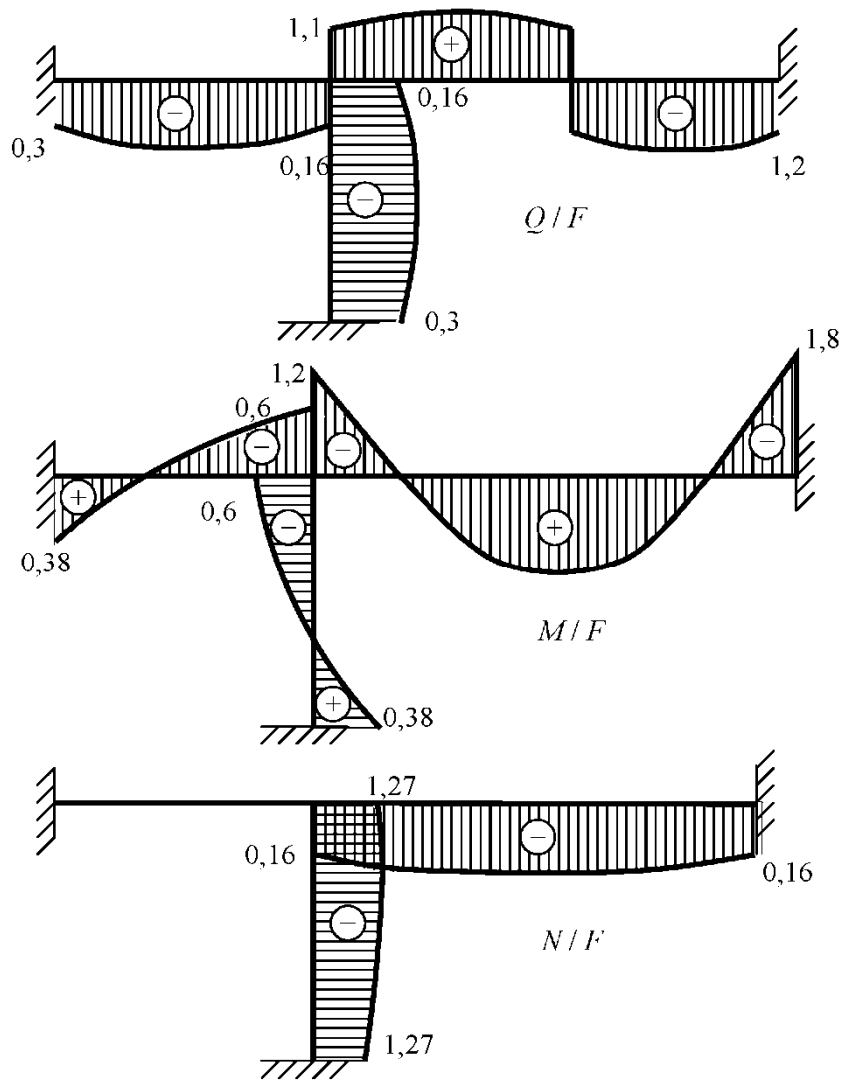


Рис. 3.5

### 3.6.1. УЧЕТ СИЛ ИНЕРЦИИ ПОДВИЖНЫХ СТЕРЖНЕЙ

Если свободный и несвободный стержни соединены под углом  $90^\circ$  (рис. 3.6), то очевиден переход к схеме с), где  $m_*^{0,1}$  определяется по формуле (3.15).

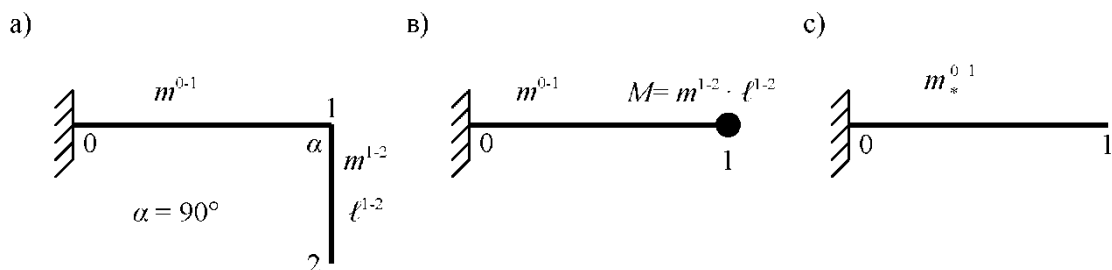


Рис. 3.6

Если угол  $\alpha$  не равен  $90^\circ$  (рис. 3.7), то в узле 1 от силы инерции  $F$  возникает еще и момент. Систему сил  $F$  и  $M$  заменяем одной сосредоточенной силой  $F_*$ .

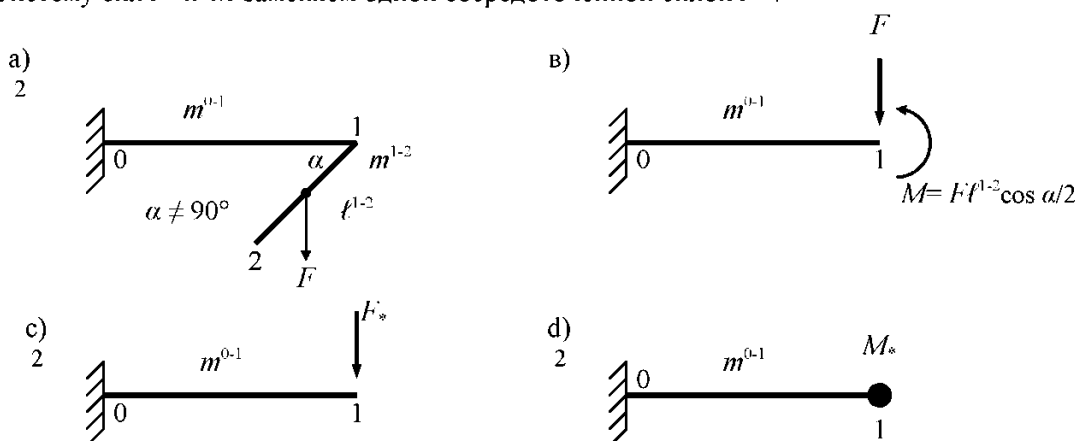


Рис. 3.7

Эту замену логично сделать на основе равенства потенциальных энергий схем в) и с) (рис.3.7). Потенциальная энергия стержня по рис. 3.7, в) будет равна

$$U_a = \int_0^l M^2(x) dx / EI = \int_0^l (-Fx + M)^2 dx / EI = F^2 \ell^2 (4 - 6 \cos \alpha + 3 \cos^2 \alpha) / 12EI .$$

Потенциальная энергия стержня по рис. 3.7, с)

$$U_c = \int_0^l M^2(x) dx / EI = \int_0^l (-F_*x)^2 dx / EI = F_*^2 \ell^2 / 3EI .$$

Из условия  $U_a = U_c$  следует, что

$$F_* = F \sqrt{1 + \cos \alpha (3 \cos \alpha / 4 - 1,5)} . \quad (3.16)$$

Данную силу можно представить как сосредоточенную массу, равную

$$M_* = F_* / g = m^{1-2} \cdot \ell^{1-2} \cdot \sqrt{1 + \cos \alpha (3 \cos \alpha / 4 - 1,5)} . \quad (3.17)$$

Этим выражением система по рис. 3.7, а) сводится к системе по рис. 3.7, d). По формуле (3.15) производится учет сосредоточенной массы  $M_*$ . Если узел 1 – шарнир, то в выражении (3.17) нужно принять  $\alpha = 90^\circ$ . Для пространственного случая выражение для эквивалентной сосредоточенной массы принимает вид

$$M_* = m^{1-2} \cdot \ell^{1-2} \cdot \sqrt{1 + \cos \alpha (3 \cos \alpha / 4 - 1,5) + 3EI \cdot \sin^2 \alpha / 4GI_K} . \quad (3.18)$$

Данным подходом не учитывается момент инерции вращательного движения свободного стержня и приближенно задается форма кривой в формуле (3.15). Поэтому достоверность результатов МГЭ при динамическом расчете свободных стержневых систем должна оцениваться при сравнении с результатами других методов. Здесь погрешность может достигать 10% и больше. Рассмотрим примеры динамического расчета свободных стержневых систем.

Пример 16 [44, с. 131]. Определить частоты собственных колебаний свободной рамы (рис. 3.8).

1. Разбиваем раму на 4 стержня, нумеруем узлы и определяем начало и конец каждого стержня.

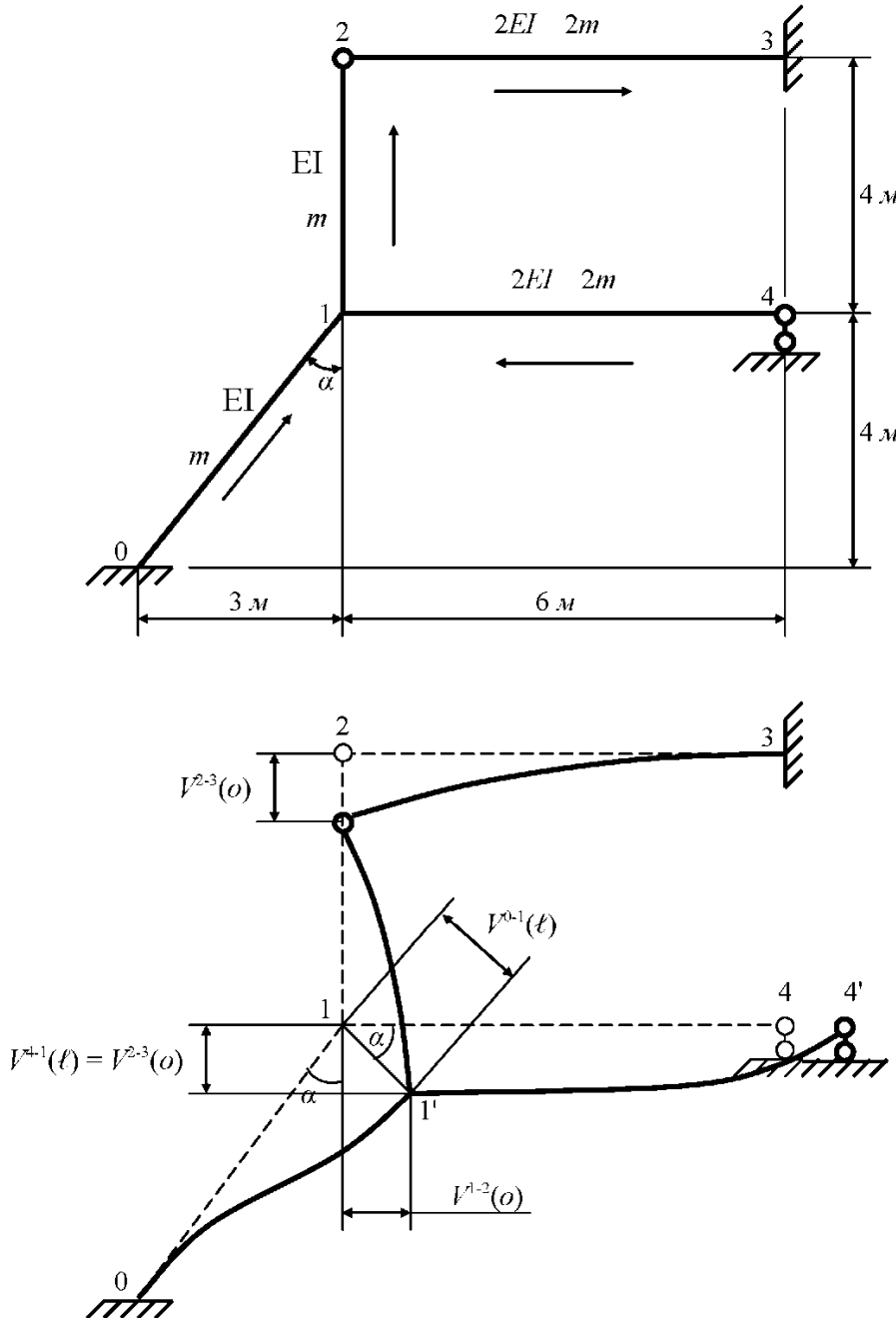


Рис. 3.8

2. Формируем матрицу  $A^*$ . Ось  $ou$  каждого стержня направляем «вниз». Уравнения равновесия и совместности перемещений узлов 1 и 2 представлены в матрицах  $X^*$ ,  $Y$  в соответ-

ствии с деформированным состоянием рамы на рис. 3.8. Используем блоки уравнения (3.10) с добавлением нормальных сил. В матрице  $\mathbf{A}$  нужно обнулить 1, 2, 11, 13, 16, 18 и 20 столбцы. В раме плоскопараллельное движение совершают стержни 1-2 и 4-1. Для учета сил инерции их линейного движения определяем по формуле (3.17) добавочную сосредоточенную массу стержня 0-1

	1	$EIV^{0-1}(o) = 0; M^{0-1}(\ell)$		1	$EIV^{0-1}(\ell) = 1,25EIV^{1-2}(o)$	
	2	$EI\phi^{0-1}(o) = 0; Q^{0-1}(\ell)$		2	$EI\phi^{0-1}(\ell) = EI\phi^{1-2}(o)$	
	3	$M^{0-1}(o)$		3	$M^{0-1}(\ell)$	
	4	$Q^{0-1}(o)$		4	$Q^{0-1}(\ell)$	
	5	$N^{0-1}(o)$		5	$N^{0-1}(\ell)$	
	6	$EIV^{1-2}(o)$		6	$EIV^{1-2}(\ell) = 0$	
	7	$EI\phi^{1-2}(o)$		7	$EI\phi^{1-2}(\ell)$	
	8	$M^{1-2}(o)$		8	$M^{1-2}(\ell) = 0$	
	9	$Q^{1-2}(o)$		9	$Q^{1-2}(\ell) = N^{2-3}(o)$	
$\mathbf{X}_* =$	10	$N^{1-2}(o)$	;	$\mathbf{Y} =$	10	$N^{1-2}(\ell) = -Q^{2-3}(o)$
	11	$2EIV^{2-3}(o) = 1,5EIV^{1-2}(o); N^{0-1}(\ell)$		11	$2EIV^{2-3}(\ell) = 0$	
	12	$2EI\phi^{2-3}(o)$		12	$2EI\phi^{2-3}(\ell) = 0$	
	13	$M^{2-3}(o) = 0; EI\phi^{1-2}(\ell)$		13	$M^{2-3}(\ell)$	
	14	$Q^{2-3}(o)$		14	$Q^{2-3}(\ell)$	
	15	$N^{2-3}(o)$		15	$N^{2-3}(\ell)$	
	16	$2EIV^{4-1}(o) = 0; M^{2-3}(\ell)$		16	$2EIV^{4-1}(\ell) = -1,5EIV^{1-2}(o)$	
	17	$2EI\phi^{4-1}(o)$		17	$2EI\phi^{4-1}(\ell) = 2EI\phi^{1-2}(o)$	
	18	$M^{4-1}(o) = 0; Q^{2-3}(\ell)$		18	$M^{4-1}(\ell) = M^{1-2}(o) - M^{0-1}(\ell)$	
	19	$Q^{4-1}(o)$		19	$Q^{4-1}(\ell) = N^{1-2}(o) - 0,8N^{0-1}(\ell) + 0,6Q^{0-1}(\ell)$	
	20	$N^{4-1}(o) = 0; N^{2-3}(\ell)$		20	$N^{4-1}(\ell) = -Q^{1-2}(o) + 0,6N^{0-1}(\ell) + 0,8Q^{0-1}(\ell)$	

3    7    4    2    5    6    13    8    15    10    14    12    16    18    20    17    19    1    11    9

1																				
2			$-A_{13}$	$-A_{14}$		$-1,25$														
3			$-A_{12}$	$-A_{13}$			$-1$													
4	$-1$		$A_{11}$	$A_{12}$																
5			$\lambda^4 A_{14}$	$A_{11}$																
6					$1$						$-1$									
7						$A_{11}$	$A_{12}$	$-A_{13}$	$-A_{14}$											
8						$\lambda^4 A_{14}$	$A_{11}$	$-A_{12}$	$-A_{13}$			$-1$								
9						$-\lambda^4 A_{13}$	$-\lambda^4 A_{14}$	$A_{11}$	$A_{12}$											
10						$-\lambda^4 A_{12}$	$-\lambda^4 A_{13}$	$-\lambda^4 A_{14}$	$A_{11}$											
11									$1$			$1$								
12						$1,5A_{11}$					$A_{12}$									
13						$1,5\lambda^4 A_{14}$					$A_{11}$									
14						$-1,5\lambda^4 A_{13}$					$-\lambda^4 A_{14}$									
15						$-1,5\lambda^4 A_{12}$					$-\lambda^4 A_{13}$									
16																				
17						$1,5$														
18	$1$						$-2$													
19																				
20																				

$A^* =$



$$M_*^{0-1} = M_*^{1-2} + M_*^{4-1} = m \cdot 4 \cdot \sqrt{1 + \cos(180^\circ - \alpha)} (3 \cos(180^\circ - \alpha) / 4 - 1,5) + \\ + 2m \cdot 6 \cdot \sqrt{1 + \cos(90^\circ + \alpha)} (3 \cos(90^\circ + \alpha) / 4 - 1,5) = 24,2254m$$

Принимая форму упругой линии стержня 0-1 в виде  $V(x) = \sin(\pi x / 10,0)$ , по формуле (3.15) получим  $m_*^{0-1} = m^{0-1} + 2M_*^{0-1} / \ell^{0-1} = 10,6902m$ . Коэффициенты фундаментальных функций матрицы  $\mathbf{A}_*$  будут равны

$$\lambda^{0-1} = \sqrt[4]{\omega^2 m_*^{0-1} / EI} = 1,8082 \sqrt[4]{\omega^2 m / EI}; \quad \lambda^{1-2} = \lambda^{2-3} = \lambda^{4-1} = \sqrt[4]{\omega^2 m / EI}.$$

3. Переставив строки матрицы  $\mathbf{A}_*$  (один из возможных вариантов перестановки показан на матрице  $\mathbf{A}_*$  справа) и задавая значения  $\omega$  (при  $m = EI = 1$ ), методом Гаусса вычисляем ее определитель по программе примера №14. Фиксируя изменение его знака, получаем частоты собственных колебаний рамы

$$\omega_1 = 0,08 \sqrt{EI / m}; \quad \omega_2 = 0,25 \sqrt{EI / m}; \quad \omega_3 = 0,394 \sqrt{EI / m}; \quad \dots$$

Две собственные частоты определены по МКЭ [44]

$$\omega_1 = 0,096 \sqrt{EI / m}; \quad \omega_2 = 0,543 \sqrt{EI / m}.$$

Видно, что первые частоты отличаются на 20% и значительное расхождение имеет место по вторым частотам.

Отметим, что алгоритм МГЭ не имеет в задачах динамики недостатков, свойственных МКЭ. Проблема точного спектра частот в МГЭ сводится лишь к точному учету сил инерции линейно подвижных элементов.

Рассмотрим пример динамического расчета свободной рамы.

Пример 17. Построить эпюры  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  свободной рамы (рис. 2.15) при вынужденных колебаниях с частотой  $\theta = 0,09169 \sqrt{EI / m}^{-1} / c$ .

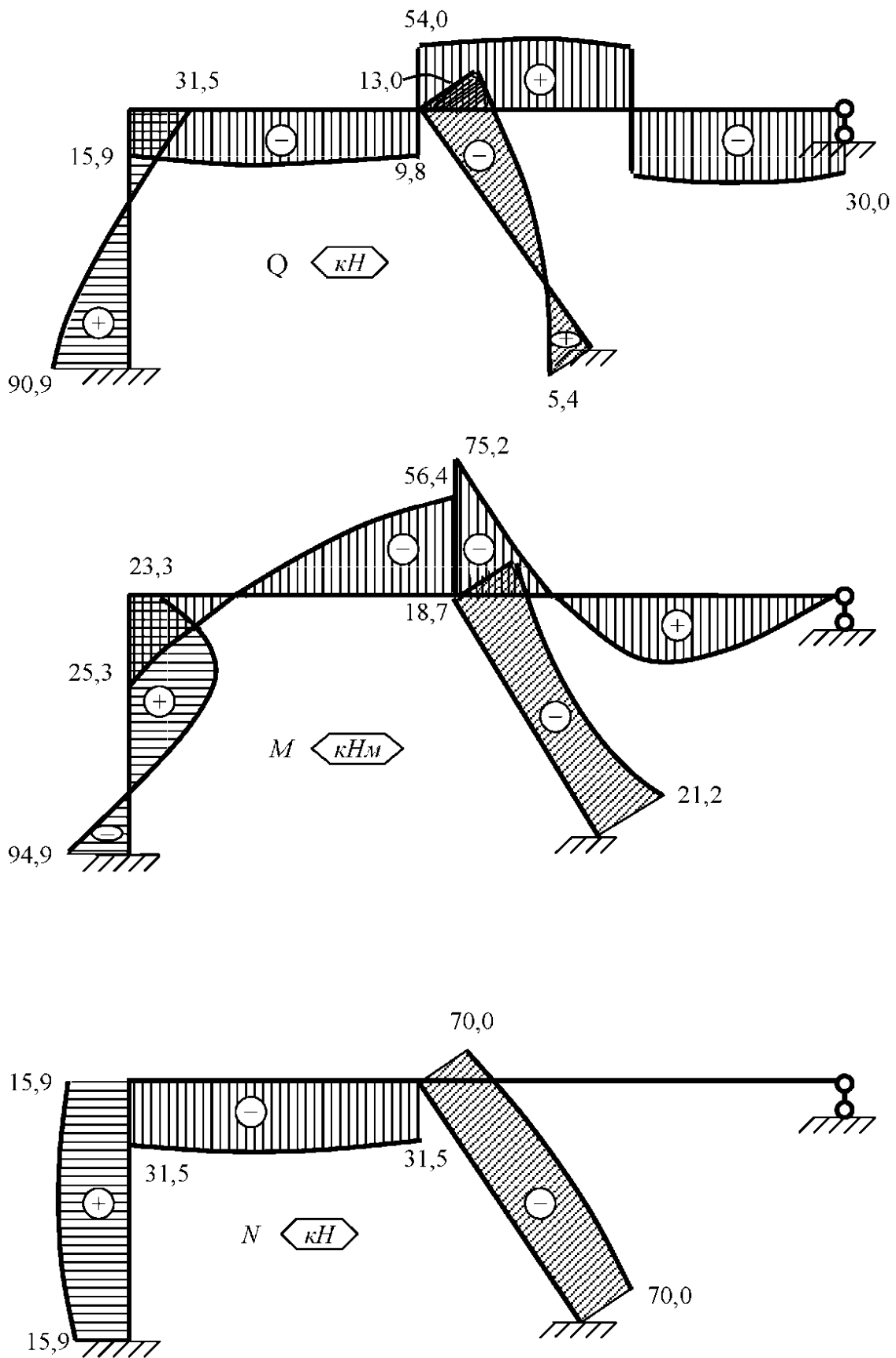
Амплитудное значение нагрузки примем равным статическим значениям. Формирование матриц статического расчета данной рамы выполнено в примере 8. Для формирования матриц динамического расчета достаточно только заменить фундаментальные функции матриц  $\mathbf{A}_*$ ,  $\mathbf{B}$ . Топологическая матрица  $\mathbf{C}$  остается неизменной. Масса стержня 4-2 по формулам (3.15), (3.17) будет равна  $m_*^{4-2} = 16,026m$ , а параметр  $\lambda$   $\lambda^{4-2} = \sqrt[4]{\theta^2 m_*^{4-2} / 2,5EI} = 0,4818m^{-1}$ ;  $(\lambda \ell)^{4-2} = 2,409$ . Элементы матриц  $\mathbf{A}_*$ ,  $\mathbf{B}$  вычисляем по формулам (3.11). Далее методом Гаусса по программе примера 6 определяем граничные параметры (после перестановки строк матриц  $\mathbf{A}_*$ ,  $\mathbf{B}$ ). В таблице 12 приведены результаты по МГЭ (с учетом и без учета сил инерции свободных стержней) и по МКЭ (с учетом сил инерции).

Таблица 12

Граничные параметры	МГЭ без учета сил инерции	МГЭ с учетом сил инерции	МКЭ с учетом сил инерции
$2EI\varphi^{2-3}(\ell), кНМ^2$	108,551	99,416	-
$Q^{2-3}(\ell), кН$	-30,742	-30,034	-30,360
$M^{0-1}(o), кНМ$	-79,715	-94,951	-93,971
$Q^{0-1}(o), кН$	83,699	90,928	90,556
$N^{0-1}(o), кН$	11,883	15,973	-
$M^{4-2}(\ell), кНМ$	-26,753	-18,736	-15,175
$3EI\varphi^{1-2}(o), кНМ^2$	42,287	36,500	38,117
$M^{1-2}(o), кНМ$	12,495	25,328	25,100
$Q^{1-2}(o), кН$	-11,883	-15,973	-16,246
$N^{1-2}(o), кН$	-38,106	-31,598	-
$2EIV^{2-3}(o), кНМ^3$	50,153	84,133	81,298
$2EI\varphi^{2-3}(o), кНМ^2$	-51,315	-51,491	-54,322
$M^{2-3}(o), кНМ$	-73,380	-75,215	-73,593
$Q^{2-3}(o), кН$	54,406	54,014	53,867
$N^{2-3}(o), кН$	0,0	0,0	-
$Q^{4-2}(\ell), кН$	-6,292	-13,019	2,028
$N^{4-2}(\ell), кН$	-71,900	-70,022	-
$M^{4-2}(o), кНМ$	0,379	-21,273	-13,916
$Q^{4-2}(o), кН$	-5,214	5,408	0,338
$N^{4-2}(o), кН$	-71,900	-70,022	-

Анализ данных таблицы 12 показывает, что результаты МГЭ и МКЭ хорошо согласуются между собой, кроме стержня 4-2. Отметим, что результаты МГЭ по стержню 4-2 являются более достоверными, если сравнивать с результатами статического расчета в таблице 4. Эпюры  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  показаны на рис. 3.9. Из эпюр следует, что наличие значительной сосредоточенной массы у стержня 4-2 приводит к определенному искажению картины напряженного состояния и по МГЭ.





**Рис. 3.9**  
**ГЛАВА IV. УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ**

Расчет на устойчивость стержневых систем сводится к определению критических сил, превышение которых вызывает переход системы из одного равновесного состояния в другое. Такой переход весьма часто приводит к разрушению конструкции или другим формам аварий, поэтому крайне нежелателен и для практики важно знание определенного спектра критических сил и соответствующих им форм потери устойчивости.

Анализ устойчивости стержневой системы может быть проведен на основе качественного подхода, разработанного проф. Р.Р. Матевосяном [45]. В соответствии с этим подходом составляется определитель устойчивости метода перемещений. При произвольном значении сжимающей нагрузки на стержни определитель устойчивости сводят к верхнетреугольному виду, диагональные элементы которого образуют ряд устойчивости. По ряду устойчивости и судят о степени неустойчивости и количестве «пройденных» критических сил. Предварительно вычисляются эйлеровые критические силы отдельных стержней основной системы метода перемещений, которые всегда больше или равны первой критической силе заданной системы.

Такой подход характеризуется минимумом арифметических операций и сложностью логики, включающей операции умножения, транспонирования и обращения матриц. Кроме того, определитель устойчивости метода перемещений имеет, как и в динамике, точки разрыва 2-го рода, что затрудняет поиск спектра критических сил.

Большое распространение для решения задач устойчивости стержневых систем получил МКЭ [44]. В МКЭ рассматривается вековое уравнение, из которого определяются критические силы.

Число критических сил по МКЭ равно степени кинематической неопределимости стержневой системы, а при формировании векового уравнения используются операции сложения, умножения и транспонирование матриц.

Таким образом, решение задач устойчивости стержневых систем имеет тот же алгоритм и те же недостатки существующих методов, что и в задачах динамики. МГЭ позволяет освободить решение задач устойчивости от указанных недостатков. Построение соотношений устойчивости МГЭ проведем при «мертвых» нагрузках. Введем допущения:

1. Стержни системы считаются нерастяжимыми и несжимаемыми.
2. Расстояния между узлами системы после потери устойчивости не изменяются.
3. Деформация сдвига не учитывается.

#### **4.1. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНОГО ИЗГИБА СТЕРЖНЯ**

Основным слагаемым математических моделей задач устойчивости стержневых систем является решение задачи Коши продольно-поперечного изгиба стержня. Связано это с тем, что потеря устойчивости наступает при появлении изгибных состояний у элементов стержневых систем. Задача Коши продольно-поперечного изгиба прямолинейного стержня в линейной постановке формулируется следующим образом [88]

$$\begin{aligned} V^{IV}(x) + n^2 V''(x) &= q_y(x)/EI; & V(o); & V'(o) = \varphi(o); \\ V''(o) &= -M(o)/EI; & V'''(o) &= -Q(o)/EI, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где коэффициент  $n$  определяется по формуле

$$n = \sqrt{F/EI},$$

$F$  – продольная сжимающая сила. Решение задачи Коши (4.1) по алгоритму §1.3 можно представить в матричной форме

$$\begin{array}{|c|} \hline EIV(x) \\ \hline EI\varphi(x) \\ \hline M(x) \\ \hline \bar{Q}(x) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & x & -A_{13} & -A_{14} \\ \hline & 1 & -A_{23} & -A_{13} \\ \hline & & A_{33} & A_{23} \\ \hline & & A_{43} & A_{33} \\ \hline \end{array} + \int_0^x \begin{array}{|c|} \hline A_{14}(x-\xi) \\ \hline A_{13}(x-\xi) \\ \hline -A_{23}(x-\xi) \\ \hline -A_{44}(x-\xi) \\ \hline \end{array} q_y(\xi) d\xi, \quad (4.2)$$

где фундаментальные ортонормированные функции имеют вид

$$A_{13} = (1 - \cos nx)/n^2; \quad A_{14} = (nx - \sin nx)/n^3; \quad A_{23} = \sin nx/n; \quad A_{33} = \cos nx; \quad A_{43} = -n \sin nx. \quad (4.3)$$

Здесь  $\bar{Q}(x)$  – поперечная сила, перпендикулярная к искривленной оси стержня. Когда ось  $ou$  стержня направлена «вверх», то в уравнении (4.2) знаки минус опускаются. Если решать задачу Коши (4.1) со сдвиговой силой  $Q(x)$ , перпендикулярной первоначальной прямолинейной оси стержня, то в уравнении (4.2) изменятся отдельные фундаментальные функции [45, 88]

$$\begin{array}{|c|} \hline EIV(x) \\ \hline EI\varphi(x) \\ \hline M(x) \\ \hline Q(x) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & A_{12} & -A_{13} & -A_{14} \\ \hline & A_{22} & -A_{12} & -A_{13} \\ \hline & -A_{32} & A_{22} & A_{12} \\ \hline & & & 1 \\ \hline \end{array}, \quad (4.4)$$

где

$$A_{12} = \sin nx/n; \quad A_{13} = (1 - \cos nx)/n^2; \quad A_{14} = (nx - \sin nx)/n^3; \quad A_{22} = \cos nx; \quad A_{32} = -n \sin nx; \quad (4.5)$$

$Q(x)$  – поперечная сила, перпендикулярная первоначальной прямолинейной оси стержня. Уравнение (4.4) позволяет упрощать статические краевые условия по сравнению с уравнением (4.2).

Решение задачи Коши продольно-поперечного изгиба (4.4) широко используется в методе перемещений и методе начальных параметров для составления трансцендентных уравнений устойчивости [45, 88, 96]. Однако, оно может быть применено для решения задач устойчивости плоских и пространственных стержневых систем в рамках принципиально другого алгоритма – МГЭ. Для упругой системы можно составить уравнение устойчивости МГЭ типа (1.32). Стержни, не нагруженные сжимающей силой  $F$ , должны иметь в уравнении (1.32) блок фундаментальных функций статического изгиба (2.11), а сжатые стержни – блок фундаментальных функций продольно-поперечного изгиба (4.4) с добавлением нормальных сил (для плоских задач устойчивости).

#### **4.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СПЕКТРА КРИТИЧЕСКИХ СИЛ И ФОРМ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ СТАТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ**

Для расчета упругой системы на устойчивость необходимо сформировать граничное интегральное уравнение и преобразовать его по схеме (1.38). Потеря устойчивости системы характеризуется возникновением продольно-поперечного и поперечного изгибов стержней. В этом случае значения начальных и конечных параметров матрицы  $X_*$  отличны от нуля. Тогда, для выполнения условия  $X_* \neq 0$  из уравнения (3.1) следует, что

$$|A_*(F)| = 0. \quad (4.6)$$

Данное трансцендентное уравнение является уравнением устойчивости упругой системы по МГЭ. Корни уравнения устойчивости определяют спектр критических сил, число которых (теоретически) бесконечно. Чтобы не пропустить первой критической силы, нужно начинать анализ поведения определителя (4.6) с достаточно малых значений сжимающих сил  $F$ . Рекомендуется начальное значение  $F$  выбирать из интервала  $(1/100 - 1/1000)F_{\min}$ , где  $F_{\min}$  – минимальная критическая сила стержней основной системы метода перемещений. Шаг изменения сжимающей силы рекомендуется выбирать равным  $(1/100 - 1/1000)$  интервала, на котором выполняется поиск критических сил. Изменение знака определителя (4.6) или равенство его нулю свидетельствует о «прохождении» критической силы. Таким образом, методика определения критических сил не отличается от методики определения частот собственных колебаний упругих систем. Здесь можно использовать программы на языках Fortran и Pascal примеров №13, №14 с соответствующим изменением обозначений переменных. В рамках принятых допущений МГЭ позволяет определять точный спектр собственных значений (частот или критических сил). Однако, линеаризация дифференциальных уравнений и краевых условий, неучет деформаций растяжения-сжатия и сдвига, приближенный учет других факторов не позволяют приблизить найденный «точный» спектр собственных значений к действительному спектру. В задачах ди-

намики действительные частоты меньше найденных частот, т.к. реальная упругая система обладает большей податливостью, чем упрощенная расчетная схема. Погрешность меньше у систем с неподвижными узлами и больше у систем с линейно-подвижными узлами. Противоположная картина имеет место в задачах устойчивости. Погрешность меньше у систем с линейно-подвижными узлами и больше у систем с неподвижными узлами.

Для каждой критической силы можно определить и формы потери устойчивости стержневой системы из уравнения (3.1), если принять  $N(o) = Q(o) = 1$ . Ниже представлены примеры решения задач устойчивости различных упругих систем по алгоритму МГЭ. Поскольку используются уравнения (2.11), (4.4), относящиеся к статическому деформированию, то вся процедура решения задач устойчивости относится к статическому методу.

#### 4.3 УСТОЙЧИВОСТЬ СВОБОДНЫХ СТЕРЖНЕЙ И СТЕРЖНЕЙ НА ЖЕСТКИХ И УПРУГИХ ОПОРАХ

Пример 18 [88, с. 248]. Определить первую критическую силу стержня с кусочно-постоянной жесткостью (рис. 4.1).

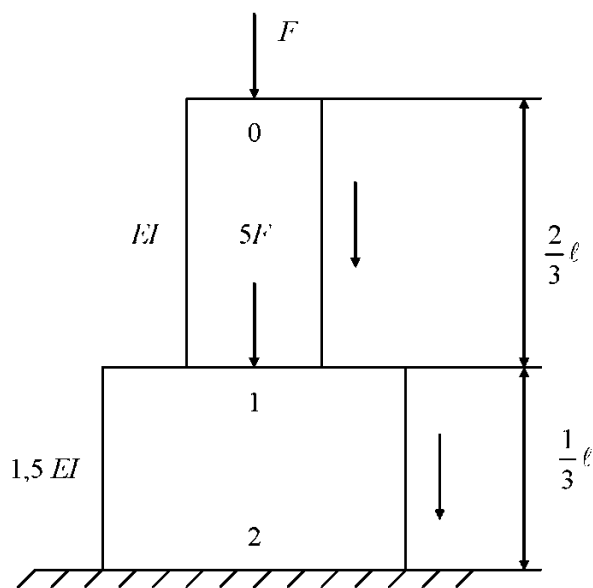


Рис. 4.1

Анализ устойчивости многопролетных стержней упрощается по сравнению с плоскими стержневыми системами. Уравнение устойчивости многопролетных стержней не содержит нормальных сил, а линейные перемещения граничных точек стержней равны либо нулю (для жестких опор), либо отношению  $R_i/C_i$  (для упругих опор), где  $C_i$  – жесткость упругой опоры;  $R_i$



– реакция опоры. Случай свободных стержней (без промежуточных опор) также может быть учтен в МГЭ. Решение примера по рис. 4.1 представлен алгоритмом.

1. Разбиваем стержень на 2 стержня, нумеруем узлы и обозначаем начало и конец каждого элемента.

2. Формируем матрицу устойчивости  $\mathbf{A}^*$ . Уравнения равновесия и совместности перемещений узла 1 приведены в матрице  $\mathbf{Y}$ . Согласно матрице  $\mathbf{X}^*$  нужно обнулить 3 и 4 столбцы матрицы  $\mathbf{A}^*$ . После переноса конечных параметров из матрицы  $\mathbf{Y}$  в матрицу  $\mathbf{X}^*$  топологическая матрица  $\mathbf{C}$  примет следующий вид. Сложив матрицы  $\mathbf{A}_0$  и  $\mathbf{C}$ , получим матрицу устойчивости данного стержня.

$$\mathbf{X}^* = \begin{matrix} 1 & EIV^{0-1}(o) \\ 2 & EI\phi^{0-1}(o) \\ 3 & M^{0-1}(o)=0; M^{1-2}(\ell) \\ 4 & Q^{0-1}(o)=0; Q^{1-2}(\ell) \\ 5 & 1,5EIV^{1-2}(o) \\ 6 & 1,5EI\phi^{1-2}(o) \\ 7 & M^{1-2}(o) \\ 8 & Q^{1-2}(o) \end{matrix} ; \quad \mathbf{Y} = \begin{matrix} 1 & EIV^{0-1}(\ell) = EIV^{1-2}(o) \\ 2 & EI\phi^{0-1}(\ell) = EI\phi^{1-2}(o) \\ 3 & M^{0-1}(\ell) = M^{1-2}(o) \\ 4 & Q^{0-1}(\ell) = Q^{1-2}(o) \\ 5 & 1,5EIV^{1-2}(\ell) = 0 \\ 6 & 1,5EI\phi^{1-2}(\ell) = 0 \\ 7 & M^{1-2}(\ell) \\ 8 & Q^{1-2}(\ell) \end{matrix} ;$$

$$\mathbf{C} = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & & & & & -2/3 & & & \\ 2 & & & & & & -2/3 & & \\ 3 & & & & & & & -1 & \\ 4 & & & & & & & & -1 \\ 5 & & & & & & & & \\ 6 & & & & & & & & \\ 7 & & & -1 & & & & & \\ 8 & & & & -1 & & & & \end{matrix} ;$$


---


$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix}$$

1	1	$A_{12}$			$-2/3$				1
2		$A_{22}$				$-2/3$			2
3		$-A_{32}$					$-1$		7
$A^* = 4$								$-1$	8
5					1	$A_{12}$	$-A_{13}$	$-A_{14}$	5
6						$A_{22}$	$-A_{12}$	$-A_{13}$	6
7			$-1$			$-A_{32}$	$A_{22}$	$A_{12}$	3
8			$-1$					1	4

Фундаментальные функции определяются выражениями (4.5), где коэффициенты для стержней 0-1 и 1-2 будут равны

$$n^{0-1} = \sqrt{F/EI}; \quad n^{1-2} = \sqrt{6F/1,5EI} = 2,0\sqrt{F/EI}.$$

3. Переставляя строки матрицы  $A^*$  в новом порядке, как показано цифрами справа, методом Гаусса по программе примера 14 вычисляем ее определитель (при  $\ell = EI = 1$ ). Фиксируя изменение его знака, находим, что  $F_1^* = 2,4674EI / \ell^2$ . Это значение совпадает с критической силой, полученной методом начальных параметров [88].

Пример 19 [77, с. 226]. Определить 2 критические силы многопролетного стержня на жестких опорах (рис. 4.2).

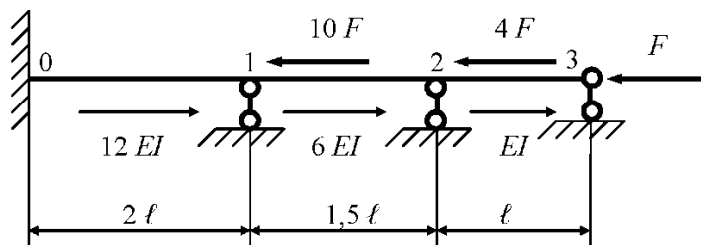


Рис. 4.2

1. Разбиваем многопролетный стержень на 3 стержня, нумеруем узлы и стрелками обозначаем начало и конец каждого элемента.

2. Формируем матрицу устойчивости  $A^*$ . Уравнения равновесия и совместности перемещений узлов 1 и 2 содержатся в матрице  $Y$ . Из матрицы  $X^*$  следует, что в матрице  $A$  нужно обнулить 1, 2, 5 и 9 столбцы. Коэффициенты фундаментальных функций будут равны

$$n^{0-1} = \sqrt{15F/12EI} = 1,1180\sqrt{F/EI}; \quad n^{1-2} = \sqrt{5F/6EI} = 0,9129\sqrt{F/EI}; \quad n^{2-3} = \sqrt{F/EI}.$$

1	$12EIV^{0-1}(o)=0; Q^{0-1}(\ell)$
2	$12EI\varphi^{0-1}(o)=0; Q^{1-2}(\ell)$
3	$M^{0-1}(o)$
4	$Q^{0-1}(o)$
5	$6EIV^{1-2}(o)=0; EI\varphi^{2-3}(\ell)$
6	$6EI\varphi^{1-2}(o)$
7	$M^{1-2}(o)$
8	$Q^{1-2}(o)$
9	$EIV^{2-3}(o)=0; Q^{2-3}(\ell)$
10	$EI\varphi^{2-3}(o)$
11	$M^{2-3}(o)$
12	$Q^{2-3}(o)$

;

1	$12EIV^{0-1}(\ell)=0$
2	$12EI\varphi^{0-1}(\ell)=12EI\varphi^{1-2}(o)$
3	$M^{0-1}(\ell)=M^{1-2}(o)$
4	$Q^{0-1}(\ell)$
5	$6EIV^{1-2}(\ell)=0$
6	$6EI\varphi^{1-2}(\ell)=6EI\varphi^{2-3}(o)$
7	$M^{1-2}(\ell)=M^{2-3}(o)$
8	$Q^{1-2}(\ell)$
9	$EIV^{2-3}(\ell)=0$
10	$EI\varphi^{2-3}(\ell)$
11	$M^{2-3}(\ell)=0$
12	$Q^{2-3}(\ell)$

;

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1												
2						-2						
3							-1					
4	-1											
5												
6										-6		
7											-1	
8		-1										
9												
10						-1						
11												
12										-1		

Матрица  $A^*$  стержня примет вид

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----

1			$-A_{13}$	$-A_{14}$								3	
2			$-A_{12}$	$-A_{13}$		$-2$						6	
3			$A_{22}$	$A_{12}$			$-1$					4	
4	$-1$			$1$								1	
5						$A_{12}$	$-A_{13}$	$-A_{14}$				7	
6						$A_{22}$	$-A_{12}$	$-A_{13}$		$-6$		10	
7						$-A_{32}$	$A_{22}$	$A_{12}$			$-1$	8	
8		$-1$						$1$				2	
9										$A_{12}$	$-A_{13}$	$-A_{14}$	12
10					$-1$					$A_{22}$	$-A_{12}$	$-A_{13}$	5
11										$-A_{32}$	$A_{22}$	$A_{12}$	11
12									$-1$			$1$	9

3. Поменяв местами строки, как показано цифрами справа, методом Гаусса определяем 2 критические силы:  $F_1 = 4,45EI / \ell^2$ ;  $F_2 = 9,55EI / \ell^2$ . Данные критические силы практически равны действительным критическим силам, поскольку не учитывалась только деформация сдвига, а наложенные связи не препятствуют появлению изгибных форм. Расхождение с  $F_1 = 6,35EI / \ell^2$ , полученной методом С.А. Рогоицкого, составляет 30%.

**Пример 20** [77, с. 271]. Найти 3 критических силы неразрезного стержня на упругих опорах (рис. 4.3). Этот пример отличается от предыдущего наличием упругих опор 1 и 2, где жесткости равны  $C_1 = 8EI / \ell^3$ ;  $C_2 = 4EI / \ell^3$ .

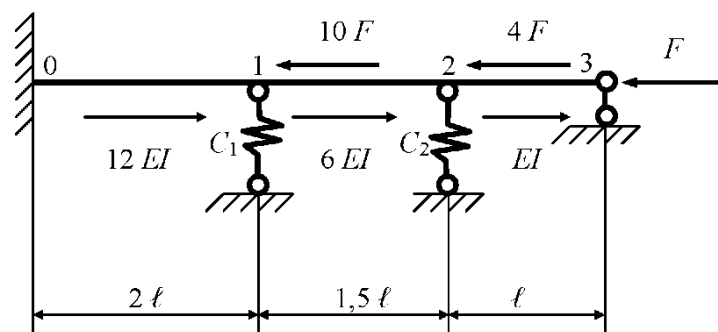


Рис. 4.3

Уравнения совместности перемещений узлов 1 и 2 запишутся следующим образом:

**Узел 1**

$$V^{0-1}(\ell) = V^{1-2}(o) = \frac{R_1}{C_1} = \frac{R_1 \ell^3}{8EI};$$

**Узел 2**

$$V^{1-2}(\ell) = V^{2-3}(o) = \frac{R_2}{C_2} = \frac{R_2 \ell^3}{4EI};$$

где  $R_1, R_2$  – неизвестные реакции опор 1 и 2. Очевидно, что

$$R_1 = Q^{0-1}(\ell) - Q^{1-2}(o), \quad R_2 = Q^{1-2}(\ell) - Q^{2-3}(o).$$

Тогда

$$V^{0-1}(\ell) = V^{1-2}(o) = \frac{Q^{0-1}(\ell) - Q^{1-2}(o)}{8EI} \ell^3; \quad V^{1-2}(\ell) = V^{2-3}(o) = \frac{Q^{1-2}(\ell) - Q^{2-3}(o)}{4EI} \ell^3.$$

Обнуленная в отдельных столбцах матрица  $\mathbf{A}_0$  будет совпадать с аналогичной матрицей примера 19. Матрицы  $\mathbf{X}^*$ ,  $\mathbf{Y}$  и  $\mathbf{C}$  примут вид

1	$12EIV^{0-1}(o) = 0; \quad Q^{0-1}(\ell)$		1	$12EIV^{0-1}(\ell) = \frac{3}{2} \ell^3 [Q^{0-1}(\ell) - Q^{1-2}(o)]$	
2	$12EI\varphi^{0-1}(o) = 0; \quad Q^{1-2}(\ell)$		2	$12EI\varphi^{0-1}(\ell) = 12EI\varphi^{1-2}(o)$	
3	$M^{0-1}(o)$		3	$M^{0-1}(\ell) = M^{1-2}(o)$	
4	$Q^{0-1}(o)$		4	$Q^{0-1}(\ell)$	
5	$6EIV^{1-2}(o) = \frac{3}{4} \ell^3 [Q^{0-1}(\ell) - Q^{1-2}(o)]; \quad EI\varphi^{2-3}(\ell)$		5	$6EIV^{1-2}(\ell) = \frac{3}{2} \ell^3 [Q^{1-2}(\ell) - Q^{2-3}(o)]$	
6	$6EI\varphi^{1-2}(o)$		6	$6EI\varphi^{1-2}(\ell) = 6EI\varphi^{2-3}(o)$	
$\mathbf{X}^* = 7$	$M^{1-2}(o)$	;	$\mathbf{Y} = 7$	$M^{1-2}(\ell) = M^{2-3}(o)$	;
8	$Q^{1-2}(o)$		8	$Q^{1-2}(\ell)$	
9	$EIV^{2-3}(o) = \frac{1}{4} \ell^3 [Q^{1-2}(\ell) - Q^{2-3}(o)]; \quad Q^{2-3}(\ell)$		9	$EIV^{2-3}(\ell) = 0$	
10	$EI\varphi^{2-3}(o)$		10	$EI\varphi^{2-3}(\ell)$	
11	$M^{2-3}(o)$		11	$M^{2-3}(\ell) = 0$	
12	$Q^{2-3}(o)$		12	$Q^{2-3}(\ell)$	

1   2   3   4   5   6   7   8   9   10   11   12

1	$-\frac{3\ell^3}{2}$						$\frac{3\ell^3}{2}$					
2					-2							
3						-1						
4	-1											
5	$\frac{3\ell^3}{4}$	$-\frac{3\ell^3}{2}$					$-\frac{3\ell^3}{4}$				$\frac{3\ell^3}{2}$	
6									-6			
7										-1		
8		-1										
9		$\frac{\ell^3}{4}$									$-\frac{\ell^3}{4}$	
10					-1							
11												
12											-1	

Складывая эту матрицу с обнуленной матрицей  $A_0$ , получаем матрицу устойчивости неразрезного стержня на упругих опорах  $(\ell - EI - I)$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1	-3/2		$-A_{13}$	$-A_{14}$				3/2					3
2			$-A_{12}$	$-A_{13}$		-2							6
3			$A_{22}$	$A_{12}$			-1						4
4	-1			1									1
5	3/4	-3/2				$A_{12}$	$-A_{13}$	$-\frac{3}{4}A_{14}$				3/2	7
6						$A_{22}$	$-A_{12}$	$-A_{13}$		-6			10
7						$-A_{32}$	$A_{22}$	$A_{12}$			-1		8
8		-1						1					2
9		1/4								$A_{12}$	$-A_{13}$	$-\frac{1}{4}A_{14}$	12
10					-1					$A_{22}$	$-A_{12}$	$-A_{13}$	5
11										$-A_{32}$	$A_{22}$	$A_{12}$	11
12									-1			1	9

Переставив строки матрицы  $A^*$  и применив метод Гаусса, находим  $F_1 = 1,95EI / \ell^2$ ;  $F_2 = 4,65EI / \ell^2$ ;  $F_3 = 9,85EI / \ell^2$ . Первая критическая сила по методу С.А. Рогоцкого  $F_1 = 2,98EI / \ell^2$  отличается на 34,6%.

#### 4.4. УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ С ПОДВИЖНЫМИ

## И НЕПОДВИЖНЫМИ УЗЛАМИ

У свободных стержневых систем нет связей, препятствующих появлению изгибных форм при потере устойчивости. Поэтому особых трудностей при решении задач устойчивости статическим методом у таких систем не наблюдается. Рассмотрим соответствующий пример.

Пример 2.1 [11, с. 516]. Определить 3 первые критические силы свободной рамы (рис.4.4).

1. Разбиваем раму на 4 стержня, нумеруем узлы и обозначаем начало и конец каждого стержня.

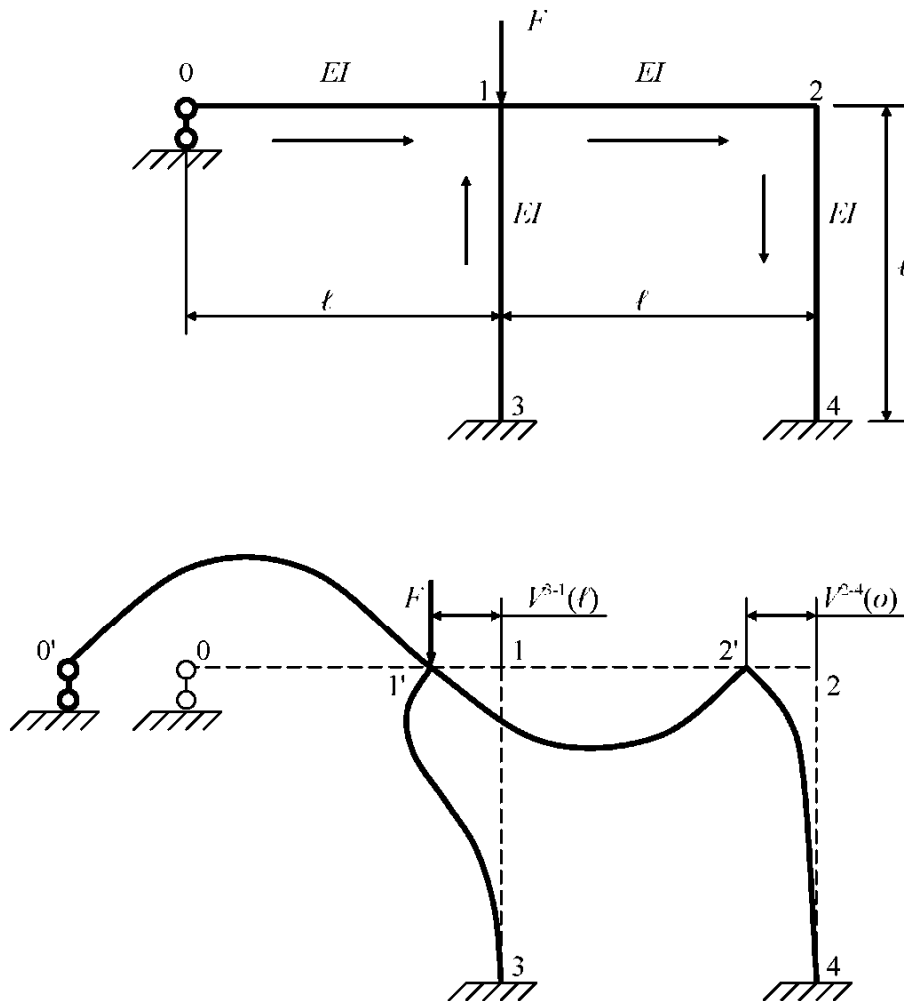


Рис. 4.4

2. Формируем матрицу устойчивости  $\mathbf{A}^*$ . Матрицы фундаментальных функций для стержней 0-1, 1-2, 2-4 заимствуем из уравнения изгиба (2.11), а для стержня 3-1 – из уравнения (4.4) с добавлением нормальных сил.

Уравнения равновесия узлов 1 и 2 составляем для недеформированного состояния рамы, а уравнения совместности перемещений в соответствии с деформированным состоянием по рис. 4.4.

$\mathbf{X}^* =$	1	$EIV^{0-1}(o) = 0; M^{2-4}(\ell)$	;	$\mathbf{Y} =$	1	$EIV^{0-1}(\ell) = 0$	;
	2	$EI\varphi^{0-1}(o)$			2	$EI\varphi^{0-1}(\ell) = EI\varphi^{1-2}(o)$	
	3	$M^{0-1}(o) = 0; Q^{2-4}(\ell)$			3	$M^{0-1}(\ell) = M^{1-2}(o) - M^{3-1}(\ell)$	
	4	$Q^{0-1}(o)$			4	$Q^{0-1}(\ell) = Q^{1-2}(o) + N^{3-1}(\ell)$	
	5	$N^{0-1}(o) = 0; N^{2-4}(\ell)$			5	$N^{0-1}(\ell) = N^{1-2}(o) - Q^{3-1}(\ell)$	
	6	$EIV^{1-2}(o) = 0; M^{3-1}(\ell)$			6	$EIV^{1-2}(\ell) = 0$	
	7	$EI\varphi^{1-2}(o)$			7	$EI\varphi^{1-2}(\ell) = EI\varphi^{2-4}(o)$	
	8	$M^{1-2}(o)$			8	$M^{1-2}(\ell) = M^{2-4}(o)$	
	9	$Q^{1-2}(o)$			9	$Q^{1-2}(\ell) = N^{2-4}(o)$	
	10	$N^{1-2}(o)$			10	$N^{1-2}(\ell) = -Q^{2-4}(o)$	
	11	$EIV^{2-4}(o)$			11	$EIV^{2-4}(\ell) = 0$	
	12	$EI\varphi^{2-4}(o)$			12	$EI\varphi^{2-4}(\ell) = 0$	
	13	$M^{2-4}(o)$			13	$M^{2-4}(\ell)$	
	14	$Q^{2-4}(o)$			14	$Q^{2-4}(\ell)$	
	15	$N^{2-4}(o)$			15	$N^{2-4}(\ell)$	
	16	$EIV^{3-1}(o) = 0; Q^{3-1}(\ell)$			16	$EIV^{3-1}(\ell) = -EIV^{2-4}(o)$	
	17	$EI\varphi^{3-1}(o) = 0; N^{3-1}(\ell)$			17	$EI\varphi^{3-1}(\ell) = EI\varphi^{1-2}(o)$	
	18	$M^{3-1}(o)$			18	$M^{3-1}(\ell)$	
	19	$Q^{3-1}(o)$			19	$Q^{3-1}(\ell)$	
	20	$N^{3-1}(o)$			20	$N^{3-1}(\ell)$	





ров в матрице  $Y$ , так что можно выполнить цепочку преобразований по схеме (1.38). Суммируя топологическую матрицу  $C$  с обнуленной матрицей  $A_0$ , получим матрицу устойчивости рассматриваемой рамы.

3. В матрице  $A^*$  нужно переставить строки для исключения нулевых ведущих элементов. Один из возможных вариантов перестановки строк показан на матрице  $A^*$  цифрами справа. Задавая значения  $F$  с определенным шагом, с помощью персонального компьютера получаем график зависимости определителя  $|A^*(F)|$  (рис. 4.5). Как и в задачах динамики, уравнение устойчивости не имеет точек разрыва 2-го рода. Фиксируя изменение знака определителя, получим критические силы  $F_1 = 15,1EI/\ell^2$ ;  $F_2 = 30,9EI/\ell^2$ ;  $F_3 = 73,9EI/\ell^2$  и т.д. Эти значения практически равны действительным критическим силам, что подтверждается результатами других методов. Метод перемещений дает значение  $F_1 = 15,1EI/\ell^2$  [11]. Критические силы по МКЭ с точной матрицей жесткости равны,  $F_1 = 15,14EI/\ell^2$ ;  $F_2 = 59,32EI/\ell^2$ , когда используется кубический полином -  $F_1 = 15,41EI/\ell^2$  [44].

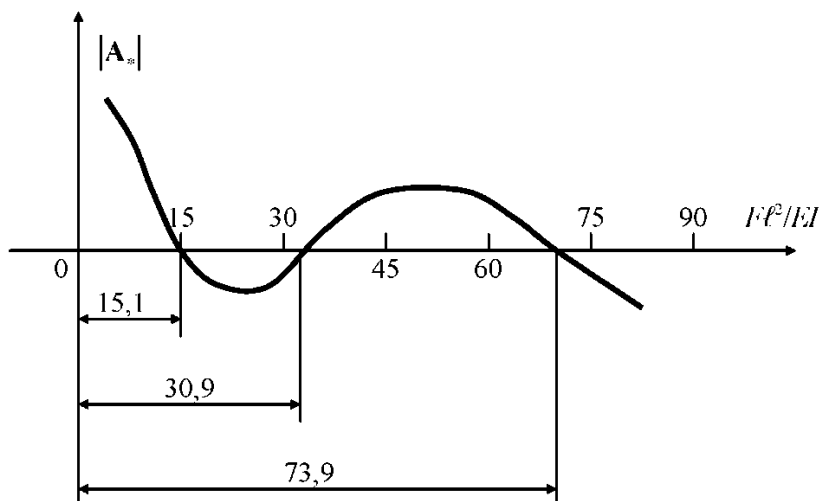


Рис. 4.5

У несвободных стержневых систем опорные связи препятствуют появлению изгибных форм и для точного определения критических сил необходимо учитывать деформацию растяжения-сжатия в условиях продольно-поперечного и статического изгибов. Данная проблема сводится к аналитическому решению соответствующих нелинейных дифференциальных уравнений, что, в свою очередь, имеет трудности математического порядка. Поэтому обычно при определении критических сил несвободных систем продольными перемещениями (деформациями растяжения-сжатия) пренебрегают. Полученные при этом критические силы точными методами (методы сил, перемещений, начальных параметров, МГЭ) будут заниженными по отношению к действительному спектру. В этом состоят трудности расчета статическим методом не-

свободных систем на устойчивость. Однако подобные расчеты выполняются, т.к. критические силы будут иметь определенный запас устойчивости. Рассмотрим примеры определения критических сил несвободных рам.

Пример 22 [88, с. 289]. Определить первые критические силы симметричной рамы при симметричной и кососимметричной формах потери устойчивости (рис.4.6).

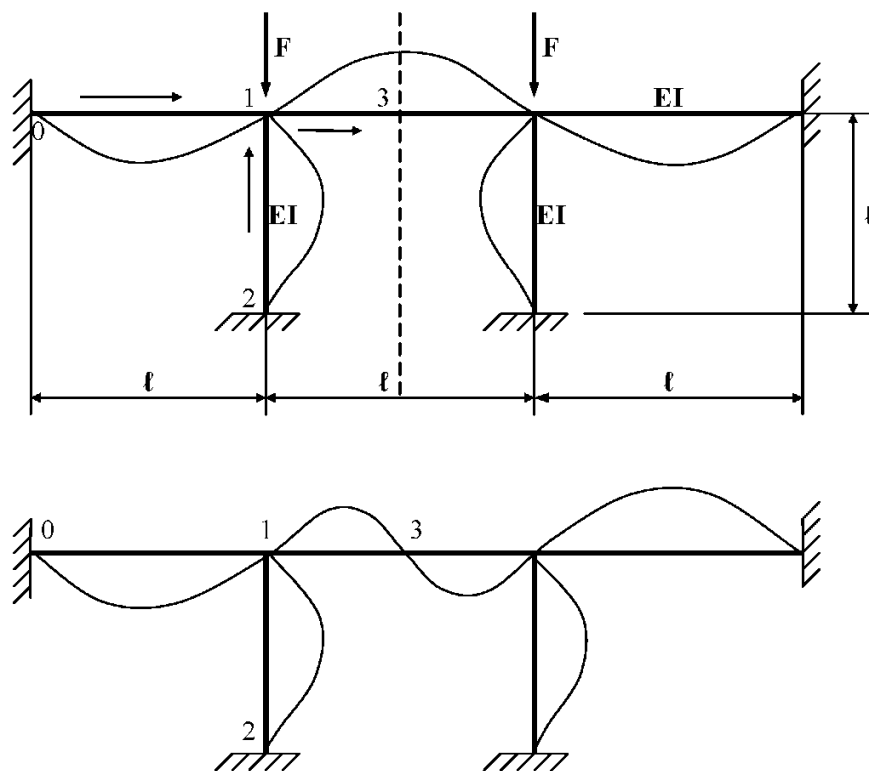


Рис. 4.6

В данном случае можно использовать свойство симметрии рамы и рассмотреть только ее левую половину. В расчетной схеме вместо 5 останется 3 стержня. В плоскости симметрии рамы при симметричной форме потери устойчивости будут равны нулю кососимметричные статические и кинематические параметры

$$\varphi^{1\ 3}(\ell/2) = 0; \quad Q^{1\ 3}(\ell/2) = 0.$$

При кососимметричной форме потери устойчивости будут равны нулю симметричные параметры

$$V^{1\ 3}(\ell/2) = 0; \quad M^{1\ 3}(\ell/2) = 0; \quad N^{1\ 3}(\ell/2) = 0.$$

В соответствии с алгоритмом МГЭ

1. Разбиваем левую половину рамы на 3 стержня, нумеруем узлы и обозначаем стрелками начало и конец каждого элемента.

2. Формируем матрицу устойчивости  $\mathbf{A}^*$ . Матрицы фундаментальных функций для стержней 0-1, 1-3 заимствуем из уравнения статического изгиба (2.11) с добавлением нормальных сил, а для стержня 2-1 – из уравнения продольно-поперечного изгиба (4.4). Для стержня 0-1 добавляем еще уравнение продольных перемещений, что позволит выполнить схему преобразований (1.38). Матрицы  $\mathbf{X}^*$ ,  $\mathbf{Y}$ , в которых представлены заданные краевые условия опирания рамы и уравнения связи между граничными параметрами в узле 1, представлены ниже. Из матрицы  $\mathbf{X}^*$  следует, что в матрице  $\mathbf{A}$  нужно обнулить 1, 2, 5, 7, 12 и 13 столбцы. Сложив обнуленную матрицу  $\mathbf{A}_0$  с топологической матрицей  $\mathbf{C}$ , получим матрицу устойчивости  $\mathbf{A}^*$ .

3. Переставив строки матрицы  $\mathbf{A}^*$ , как показано цифрами справа, методом Гаусса находим, что  $F_1 = 30,603EI / \ell^2$ . Этот результат совпадает с  $F_1 = 30,6EI / \ell^2$ , полученной методом перемещений [88].

1	$EIV^{0-1}(o) = 0; EIV^{1-3}(\ell)$
2	$EI\varphi^{0-1}(o) = 0; M^{1-3}(\ell)$
3	$M^{0-1}(o)$
4	$Q^{0-1}(o)$
5	$EIU^{0-1}(o) = 0; N^{1-3}(\ell)$
6	$N^{0-1}(o)$
7	$EIV^{1-3}(o) = 0; M^{2-1}(\ell)$
8	$EI\varphi^{1-3}(o)$
9	$M^{1-3}(o)$
10	$Q^{1-3}(o)$
11	$N^{1-3}(o)$
12	$EIV^{2-1}(o) = 0; Q^{2-1}(\ell)$
13	$EI\varphi^{2-1}(o) = 0; N^{2-1}(\ell)$
14	$M^{2-1}(o)$
15	$Q^{2-1}(o)$
16	$N^{2-1}(o)$

 $\mathbf{X}^* =$ 

1	$EIV^{0-1}(\ell) = 0$
2	$EI\varphi^{0-1}(\ell) = EI\varphi^{1-3}(o)$
3	$M^{0-1}(\ell) = M^{1-3}(o) - M^{2-1}(\ell)$
4	$Q^{0-1}(\ell) = Q^{1-3}(o) + N^{2-1}(\ell)$
5	$EIU^{0-1}(\ell) = 0$
6	$N^{0-1}(\ell) = N^{1-3}(o) - Q^{2-1}(\ell)$
7	$EIV^{1-3}(\ell)$
8	$EI\varphi^{1-3}(\ell) = 0$
9	$M^{1-3}(\ell)$
10	$Q^{1-3}(\ell) = 0$
11	$N^{1-3}(\ell)$
12	$EIV^{2-1}(\ell) = 0$
13	$EI\varphi^{2-1}(\ell) = EI\varphi^{1-3}(o)$
14	$M^{2-1}(\ell)$
15	$Q^{2-1}(\ell)$
16	$N^{2-1}(\ell)$

 $;$   $\mathbf{Y} =$ 

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16		
1			$-1/2$	$-1/6$														3

2			-1	-1/2				-1									4
3			1	1			1		-1								9
4				1						-1				-1			13
5					1												6
6					1							-1	1				11
7	-1						1/2	-1/8	-1/48								1
$A_* = 8$							1	-1/2	-1/8								8
9		-1						1	1/2								2
10									1								10
11					-1					1							5
12														-A <sub>13</sub>	-A <sub>14</sub>		14
13								-1						-A <sub>12</sub>	-A <sub>13</sub>		15
14						-1								A <sub>22</sub>	A <sub>12</sub>		7
15												-1			1		12
16													-1			1	16

При кососимметричной форме потери устойчивости изменятся краевые условия стерж-

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
1			-1/2	-1/6												3
2			-1	-1/2			-1									4
3			1	1		1		-1								6
4				1					-1				-1			12
5					1					-1	1					5
6							1/2	-1/8	-1/48							9
7	-1						1	-1/2	-1/8							1
$A_* = 8$								1	1/2							8
9		-1							1							2
10										1						10
11														-A <sub>13</sub>	-A <sub>14</sub>	13
12								-1						-A <sub>12</sub>	-A <sub>13</sub>	7
13						-1								A <sub>22</sub>	A <sub>12</sub>	14
14												-1			1	11
15													-1			15

ня 1-3, а число нулевых граничных параметров увеличится на единицу. Тогда можно не добавлять уравнение для продольных перемещений стержня 0-1. Матрица  $A^*$  кососимметричной формы потери устойчивости изменится.

Переставив строки, как показано цифрами справа, методом Гаусса определяем первую критическую силу  $F_1 = 33,1807EI / \ell^2$ , что совпадает с  $F_1 = 33,18EI / \ell^2$ , найденной методом перемещений [88].

#### 4.5. ДИНАМИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ

##### ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ

Все нагрузки на упругие системы условно можно разделить на консервативные и неконсервативные. К консервативным нагрузкам относятся так называемые «мертвые» силы, когда их линия действия перемещается вместе с конструкцией только параллельно первоначальному направлению. Примеры расчета на устойчивость систем при «мертвых» силах по алгоритму МГЭ представлены выше и проблемы их учета во многом решены. Этого нельзя сказать о неконсервативных силах. Системы с неконсервативными силами широко используются в жизни современного общества. К таким системам можно отнести системы с внутренними источниками энергии, т.е. ракеты, самолеты, космические орбитальные станции, буровые вышки и платформы, автомобили, корабли, подводные лодки, турбины, двигатели внутреннего сгорания, металлорежущие станки, различные краны, приборы и т.д.

Если консервативные задачи устойчивости могут быть решены статическим методом, то неконсервативные задачи решаются только динамическим методом [69]. Основным элементом динамического метода является решение задачи Коши для поперечных колебаний стержня с учетом продольной силы. В отличие от статического метода, критическая сила в динамическом методе определяется в точке, где становятся равными (сливаются) две соседние частоты собственных колебаний. С этой целью в программу расчета вводится начальное значение сжимающей силы и фиксируются частоты (минимум две) собственных колебаний. Далее значение сжимающей силы увеличивается и отслеживается изменение частот. Процесс продолжается до тех пор, пока с определенной точностью две соседние частоты станут равными. Значение сжимающей силы при этом будет критическим.

Необходимость применения динамического метода существенно усложняет решение неконсервативных задач устойчивости. Здесь требуется весьма эффективный метод определения частот собственных колебаний. Среди других методов в этом отношении выделяется МГЭ. Он позволяет получать точный спектр частот (устраняет недостаток МКЭ), а в трансцендентном частотном уравнении отсутствуют точки разрыва 2-го рода (устраняет недостаток метода

перемещений). Дополнительными положительными факторами являются простая логика формирования динамической матрицы устойчивости, отсутствие операций умножения, обращения и сложения матриц, хорошая устойчивость численных операций при вычислении определителя и т.п.

В этой связи покажем, что алгоритм МГЭ идеально подходит для решения подобного типа задач с любой структурой упругой системы. Моделью объекта может быть произвольный набор стержней, каждый из которых может иметь бесконечное число степеней свободы, могут быть учтены сдвиг, инерция вращения, внутреннее и внешнее трение, произвольные законы изменения массы, жесткости, продольных сил и другие факторы. Неконсервативность действующих нагрузок в МГЭ учитывается соответствующей формулировкой граничных условий упругой системы (формированием топологической матрицы  $C$ ). Далее анализу подвергаются изменения частот собственных колебаний. Рассмотрим особенности учета следящих сил.

#### 4.5.1. МЕТОДИКА УЧЕТА СЛЕДЯЩИХ СИЛ

Граничные условия для различных вариантов поведения сжимающих сил являются нелинейными и линеаризуются с учетом малости соответствующих перемещений, т.е. справедливости равенств  $\sin \psi = \operatorname{tg} \psi = \psi$ , где  $\psi$  - угол между  $F$  и нормалью к оси стержня (рис. 4.7). Выделим практически важные случаи поведения нагрузки.

1. Сила  $F$  следит за углом поворота сечения (задача М. Бекка) [69] (рис. 4.7, а).

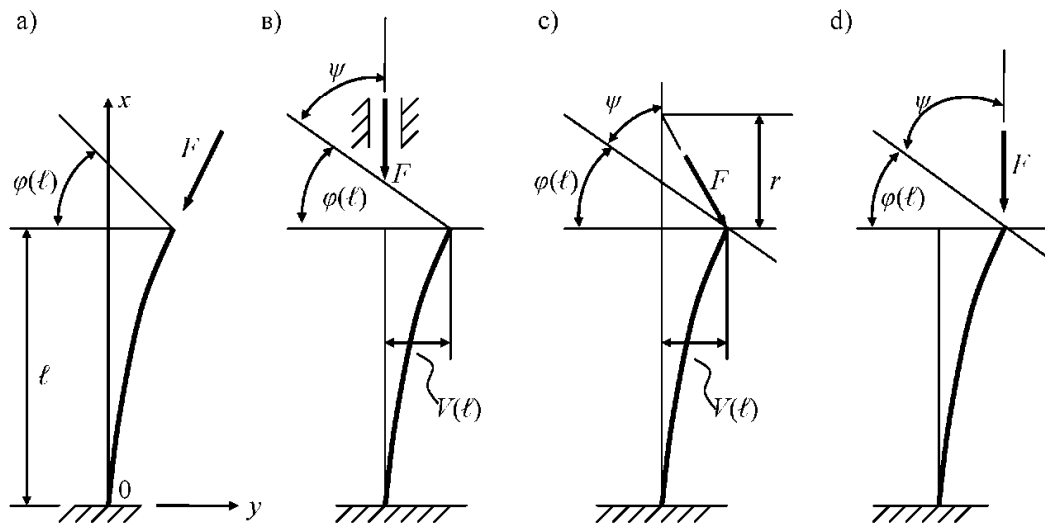


Рис. 4.7

Такая сила создается реактивным потоком жидкости или газа и относится к неконсервативным силам. Граничные условия весьма просты

$$\psi = \pi/2; \quad EIV(\ell) \neq 0; \quad EI\varphi(\ell) \neq 0; \quad M(\ell) = 0; \quad Q(\ell) = F \cos \varphi = 0. \quad (4.7)$$

2. Сила  $F$  имеет фиксированную линию действия (задача проф. В.И. Реута) [78] (рис. 4.7, в). Такая сила возникает при действии домкрата, в поршневых двигателях, в различных механизмах с направляющими устройствами. Это другой пример неконсервативной силы. В граничном сечении стержня возникают изгибающий момент и поперечная сила

$$\begin{aligned} \psi = \pi/2 - \varphi(\ell); \quad EIV(\ell) \neq 0; \quad EI\varphi(\ell) \neq 0; \quad M(\ell) = F \cdot V(\ell); \\ Q(\ell) = F \cdot \cos \psi = F \sin \varphi(\ell) = F \cdot \varphi(\ell). \end{aligned} \quad (4.8)$$

3. Сила  $F$  имеет линию действия, проходящую через фиксированную точку (рис. 4.7, с). Такое поведение нагрузки может быть вызвано применением тросов и оттяжек. Сила относится к консервативным. Она налагает на упругую систему в деформированном состоянии связь в виде собственной горизонтальной проекции (вертикальная проекция учитывается как параметр  $F$  дифференциального уравнения). Система при этом может стать несвободной. Здесь

$$\begin{aligned} \psi = \pi/2 - [V(\ell)/r + \varphi(\ell)]; \quad EIV(\ell) \neq 0; \quad EI\varphi(\ell) \neq 0; \quad M(\ell) = 0; \\ Q(\ell) = F \cos \psi = F[V(\ell)/r + \varphi(\ell)]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

4. «Мертвая» сила (рис. 4.7, д). Являясь консервативной, она ограничивает подвижность упругой системы. Краевые условия предстанут в виде

$$\begin{aligned} \psi = \pi/2 - \varphi(\ell); \quad EIV(\ell) \neq 0; \quad EI\varphi(\ell) \neq 0; \quad M(\ell) = 0; \\ Q(\ell) = F \cos \varphi = F \sin \varphi(\ell) = F \cdot \varphi(\ell). \end{aligned} \quad (4.10)$$

При анализе устойчивости упругих систем необходимо использовать вышеуказанные граничные условия в уравнениях равновесия и совместности перемещений граничных точек (узлов) конструкции. Особо отметим тот факт, что каждый вариант поведения сжимающих сил будет иметь свой набор ненулевых компенсирующих элементов в матрице  $C$  (свой вариант топологической матрицы). В этом состоит отличие аналитической идентификации сжимающих сил в МГЭ от МКЭ и других методов.

Отметим также, что для сил по рис. 4.7, с, д основными формами потери устойчивости являются изгибные формы. Для следящей силы по рис. 4.7, а стержень теряет устойчивость в форме флаттера, когда амплитуды колебаний неограниченно растут. Если не предпринять мер по ликвидации флаттера, то конструкция достаточно быстро разрушается. Потеря устойчивости в форме дивергенции (монотонный уход системы от положения равновесия) характерна для схемы по рис. 4.7, в.

Поскольку основой математической модели динамического метода являются фундаментальные функции, то рассмотрим построение решений для ряда важных случаев поперечных колебаний стержней.



#### 4.5.2. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ С УЧЕТОМ ПРОДОЛЬНОЙ СИЛЫ

При составлении соответствующего дифференциального уравнения учитываются силы инерции распределенной массы и добавка изгибающего момента от продольной силы. Применяв метод Фурье разделения переменных, дифференциальное уравнение поперечных колебаний призматического стержня с учетом продольной сжимающей силы в амплитудном состоянии примет вид

$$EIV''''(x) + FV''(x) - \omega^2 mV(x) = q_y(x);$$

$$EIV(o), EIV'(o) = EI\varphi(o), EIV''(o) = -M(o), EIV'''(o) = -Q(o). \quad (4.11)$$

Здесь не учитывается продольная сила в статических параметрах, что для жестких стержней мало сказывается на точности решений задач устойчивости.

По алгоритму §1.3 уравнение типа (1.32) данного случая запишется следующим образом

$$\begin{array}{|c|} \hline EIV(x) \\ \hline EI\varphi(x) \\ \hline M(x) \\ \hline Q(x) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline A_{11} & A_{12} & -A_{13} & -A_{14} & \\ \hline A_{21} & A_{11} & -A_{23} & -A_{13} & \\ \hline -A_{31} & -A_{21} & A_{33} & A_{23} & \\ \hline -A_{41} & -A_{31} & A_{43} & A_{33} & \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline EIV(o) \\ \hline EI\varphi(o) \\ \hline M(o) \\ \hline Q(o) \\ \hline \end{array} + \int_0^x \begin{array}{|c|} \hline A_{14}(x-\xi) \\ \hline A_{13}(x-\xi) \\ \hline -A_{23}(x-\xi) \\ \hline -A_{33}(x-\xi) \\ \hline \end{array} q_y(\xi) d\xi, \quad (4.12)$$

где фундаментальные ортонормированные функции имеют вид

$$A_{11} = \frac{\beta^2 \operatorname{ch} \alpha x + \alpha^2 \cos \beta x}{\alpha^2 + \beta^2}; \quad A_{12} = \frac{\beta^3 \operatorname{sh} \alpha x + \alpha^3 \sin \beta x}{\alpha^3 \beta + \alpha \beta^3}; \quad A_{13} = \frac{\operatorname{ch} \alpha x - \cos \beta x}{\alpha^2 + \beta^2};$$

$$A_{14} = \frac{\beta \operatorname{sh} \alpha x - \alpha \sin \beta x}{\alpha^3 \beta + \alpha \beta^3}; \quad A_{21} = \alpha^2 \beta^2 A_{14}; \quad A_{23} = \frac{\alpha \operatorname{sh} \alpha x + \beta \sin \beta x}{\alpha^2 + \beta^2}; \quad (4.13)$$

$$A_{31} = \alpha^2 \beta^2 A_{13}; \quad A_{33} = \frac{\alpha^2 \operatorname{ch} \alpha x + \beta^2 \cos \beta x}{\alpha^2 + \beta^2}; \quad A_{41} = \alpha^2 \beta^2 A_{23};$$

$$A_{43} = \frac{\alpha^3 \operatorname{sh} \alpha x - \beta^3 \sin \beta x}{\alpha^2 + \beta^2}; \quad \alpha = \sqrt{-\frac{F}{2EI} + \sqrt{\left(\frac{F}{2EI}\right)^2 + \frac{\omega^2 m}{EI}}};$$

$$\beta = \sqrt{\frac{F}{2EI} + \sqrt{\left(\frac{F}{2EI}\right)^2 + \frac{\omega^2 m}{EI}}}.$$

Выражения (4.13) при  $F = 0$  переходят в функции А.Н. Крылова (3.11).

Динамические модели упругих систем формируются исходя из заданных расчетных схем. Пространственные модели должны включать блоки уравнений изгиба, кручения, растя-

жения и сдвига, т.е. необходимо формировать уравнение типа (2.22). Плоские модели устойчивости упрощаются из-за отсутствия кручения. В расчетной практике часто пренебрегают сдвигом, инерцией вращения и продольными перемещениями, что идет в запас устойчивости [88]. В этой связи ниже формируются и анализируются наиболее простые динамические модели устойчивости упругих систем на основе уравнений изгиба (3.10) и (4.12) с добавлением нормальных сил. Учет следящих сил выполняется топологической матрицей  $C$ .

#### 4.5.3. СТЕРЖЕНЬ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

В инженерной практике встречаются случаи, когда упругая стержневая система контактирует с упругим основанием. Расчет такой системы должен быть дополнен схемой стержня на упругом основании. Наиболее простой и широко применяемой расчетной схемой является модель Е. Винклера – схема с одним коэффициентом постели. Простота этой модели нивелируется недостаточной точностью получаемых результатов. Поэтому позже были разработаны более совершенные и точные модели. Здесь отметим модели на основе упругого полупространства [28, 83] (решения получаются весьма громоздкими, а сама методика сводится к набору таблиц, что создает неудобства при ее применении) и модели с двумя коэффициентами постели (проф. П.Л. Пастернак, проф. В.З. Власов, проф. М.М. Филоненко-Бородич [76]). Модель с двумя коэффициентами постели позволяет построить аналитическое решение задачи Коши, учесть деформацию сдвига основания, его неоднородность и много других факторов. В этой связи получим уравнение типа (1.32) для модели с двумя коэффициентами постели. Используя принцип независимости действия сил, и дополняя уравнение динамики стержня в амплитудном состоянии на упругом основании слагаемым от продольной силы  $F_x V''(x)$ , будем иметь

$$V^{IV}(x) + [F_x / EI - E_0 r_{11} / 2(1 + \mu_0)EI] V''(x) + [E_0 S_{11} / (1 - \mu_0^2)EI - m\omega^2 / EI] V(x) = q_y(x) / EI \quad (4.14)$$

Это уравнение имеет кинематические и статические параметры [23]

$$\begin{aligned} V(x); \quad V'(x) = \varphi(x); \quad EIV''(x) = -M(x); \\ EI[V'''(x) - 2tV'(x) / EI] = -Q_*(x), \end{aligned} \quad (4.15)$$

где  $Q_*(x)$  – обобщенная поперечная сила. Наличие или равенство нулю начальных и конечных параметров определяется из краевых условий:

а) шарнирное опирание

$$V(o) = V(\ell) = 0; \quad M(o) = M(\ell) = 0; \quad \varphi(o) \neq 0; \quad \varphi(\ell) \neq 0; \quad Q_*(o) \neq 0; \quad Q_*(\ell) \neq 0; \quad (4.16)$$

в) жесткое защемление

$$V(o)=V(\ell)=0; \quad \varphi(o)=\varphi(\ell)=0; \quad M(o) \neq 0; \quad M(\ell) \neq 0; \quad Q_*(o) \neq 0; \quad Q_*(\ell) \neq 0; \quad (4.17)$$

с) свободное опирание граничных точек (должны быть учтены условия совместной работы стержня и основания, т.е.  $Q(o) = -EIV'''(o) = 0; \quad Q(\ell) = -EIV'''(\ell) = 0$ )

$$\begin{aligned} V(o) \neq 0; \quad V'(\ell) \neq 0; \quad \varphi(o) \neq 0; \quad \varphi(\ell) \neq 0; \quad M(o) = 0; \quad M(\ell) = 0; \\ Q_*(o) = 2IV'(o) \neq 0; \quad Q_*(\ell) = 2IV'(\ell) \neq 0; \end{aligned} \quad (4.18)$$

если не учитывать совместную работу стержня и основания в граничных точках, то

$$\begin{aligned} V(o) \neq 0; \quad V(\ell) \neq 0; \quad \varphi(o) \neq 0; \quad \varphi(\ell) \neq 0; \quad M(o) = 0; \quad M(\ell) = 0; \\ Q_*(o) = 0; \quad Q_*(\ell) = 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

В уравнении (4.14) и условиях (4.15) – (4.19) постоянные величины определяются формулами

$$E_0 = E_{тр} / (1 - \mu_{тр}^2); \quad \mu_0 = \mu_{тр} / (1 - \mu_{тр}); \quad r_{11} = \int_0^H \psi^2(y) \omega dy; \quad (4.20)$$

$$S_{11} = \int_0^H [\psi'(y)]^2 \omega dy; \quad t = E_0 r_{11} / 4(1 + \mu_0); \quad m = m_1 + m_0 = vgh / g + v_0 r_{11} / g,$$

где  $E_{тр}$ ,  $\mu_{тр}$  - модуль упругости и коэффициент Пуассона основания;  $h$ ,  $v$  - высота и ширина сечения стержня;  $H$  - глубина (мощность) основания;  $\gamma$  - коэффициент, характеризующий скорость затухания осадок основания (рекомендуется  $\gamma = 1,5 - 1,0$  [23]);  $m_1$ ,  $m_0$  - распределение массы стержня и основания;  $v$ ,  $v_0$  - удельные веса стержня и основания;  $g = 9,8$  м/сек<sup>2</sup>;  $\psi(y)$  - безразмерная функция поперечного распределения осадки основания, которая может быть принята линейной или экспоненциальной

$$\psi(y) = (H - y) / H; \quad \psi(y) = sh\gamma(H - y) / sh\gamma H. \quad (4.21)$$

Если обозначить

$$2r^2 = Fx / EI - E_0 r_{11} / 2(1 + \mu_0) EI; \quad S^4 = E_0 S_{11} / (1 - \mu_0^2) EI - m\omega^2 / EI,$$

то задача Коши модели с двумя коэффициентами постели предстанет в виде

$$\begin{aligned} V^{IV}(x) + 2r^2 V''(x) + S^4 V(x) = q_y(x) / EI; \quad V(o); \quad \varphi(o) = V'(o); \\ M(o) = -EIV''(o); \quad Q_*(o) = -EI[V'''(o) - 2IV'(o) / EI]. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Характеристическое уравнение для дифференциального уравнения (4.22) является биквадратным

$$\kappa^4 + 2r^2 \kappa^2 + S^4 = 0,$$

корни которого

$$\kappa_{1,2} = \pm \sqrt{-r^2 + \sqrt{r^4 - S^4}}; \quad \kappa_{3,4} = \pm \sqrt{-r^2 - \sqrt{r^4 - S^4}}. \quad (4.23)$$

Решение задачи Коши (4.22) можно записать в матричной форме по алгоритму §1.3

$EIV(x)$	$A_{11}$	$A_{12}$	$-A_{13}$	$-A_{14}$
$EI\varphi(x)$	$A_{21}$	$A_{22}$	$-A_{23}$	$-A_{13}$
$M(x)$	$-A_{31}$	$-A_{32}$	$A_{33}$	$A_{23}$
$Q^*(x)$	$-A_{41}$	$-A_{42}$	$A_{43}$	$A_{44}$

$$= \int_0^x \begin{matrix} A_{14}(x-\xi) \\ A_{13}(x-\xi) \\ -A_{23}(x-\xi) \\ -A_{44}(x-\xi) \end{matrix} q_1(\xi) d\xi. \quad (4.24)$$

Представим основные случаи фундаментальных функций и грузовых элементов, определяемые видом корней (4.23).

1 случай.  $S^4 > 0$ ;  $|S| > |r|$ ;  $r^2 \neq 0$ . Корни (4.23) станут комплексными

$$\kappa_{1-4} = \pm\alpha \pm i\beta; \quad \alpha = \sqrt{(S^2 - r^2)/2}; \quad \beta = \sqrt{(S^2 + r^2)/2}.$$

$$\Phi_1 = sh\alpha x \cdot \cos \beta x; \quad \Phi_2 = ch\alpha x \cdot \cos \beta x; \quad \Phi_3 = ch\alpha x \cdot \sin \beta x; \quad \Phi_4 = sh\alpha x \cdot \sin \beta x;$$

$$A_{11} = \Phi_2 + r^2 \Phi_4 / 2\alpha\beta; \quad A_{12} = [\beta(S^2 - 2r^2 - 2t/EI)\Phi_1 + \alpha(S^2 + 2r^2 + 2t/EI)\Phi_3] / 2\alpha\beta S^2;$$

$$A_{13} = \Phi_4 / 2\alpha\beta; \quad A_{14} = (-\beta\Phi_1 + \alpha\Phi_3) / 2\alpha\beta S^2; \quad A_{21} = (\beta S^2 \Phi_1 - \alpha S^2 \Phi_3) / 2\alpha\beta;$$

$$A_{22} = \Phi_2 + (r^2 + 2t/EI)\Phi_4 / 2\alpha\beta; \quad A_{23} = (\beta\Phi_1 + \alpha\Phi_3) / 2\alpha\beta; \quad A_{31} = -S^4 \Phi_4 / 2\alpha\beta;$$

$$A_{32} = [\beta(S^2 + 2t/EI)\Phi_1 + \alpha(-S^2 + 2t/EI)\Phi_3] / 2\alpha\beta; \quad A_{33} = \Phi_2 - r^2 \Phi_4 / 2\alpha\beta;$$

$$A_{41} = -S^2(S^2 + 2t/EI)\Phi_1 / 2\alpha + S^2(-S^2 + 2t/EI)\Phi_3 / 2\beta;$$

$$A_{42} = -[S^4 + 4r^2 t/EI + (2t/EI)^2] \Phi_4 / 2\alpha\beta; \quad A_{44} = \Phi_2 - (r^2 + 2t/EI)\Phi_4 / 2\alpha\beta;$$

$$A_{43} = [\beta(S^2 - 2r^2 - 2t/EI)\Phi_1 - \alpha(S^2 + 2r^2 + 2t/EI)\Phi_3] / 2\alpha\beta; \quad (4.25)$$

$$B_{11} = F[-\beta\Phi_1(x-a_1)_+ + \alpha\Phi_3(x-a_1)_-] / 2\alpha\beta S^2 + M\Phi_4(x-a_2)_- / 2\alpha\beta + \\ + q\{2\alpha\beta[\Phi_2(x-a_3)_- - H(x-a_3)] - r^2\Phi_4(x-a_3)_- - 2\alpha\beta[\Phi_2(x-a_4)_- - H(x-a_4)] + \\ + r^2\Phi_4(x-a_4)_-\} / 2\alpha\beta S^4;$$

$$B_{21} = F\Phi_4(x-a_1)_+ / 2\alpha\beta + M[\beta\Phi_1(x-a_2)_+ + \alpha\Phi_3(x-a_2)_-] / 2\alpha\beta + \\ + q[-\beta\Phi_1(x-a_3)_+ + \alpha\Phi_3(x-a_3)_- + \beta\Phi_1(x-a_4)_+ - \alpha\Phi_3(x-a_4)_-] / 2\alpha\beta S^2;$$

$$B_{31} = F[\beta\Phi_1(x-a_1)_- + \alpha\Phi_3(x-a_1)_+] / 2\alpha\beta + M[\Phi_2(x-a_2)_- - r^2\Phi_4(x-a_2)_-] / 2\alpha\beta + \\ + q[\Phi_4(x-a_3)_+ - \Phi_4(x-a_4)_+] / 2\alpha\beta;$$

$$B_{41} = F[\Phi_2(x-a_1)_- - (r^2 + 2t/EI)\Phi_4(x-a_1)_-] / 2\alpha\beta + M[\beta(S^2 - 2r^2 - 2t/EI)\Phi_1(x-a_2)_- - \\ - \alpha(S^2 + 2r^2 + 2t/EI)\Phi_3(x-a_2)_-] / 2\alpha\beta + q[\beta(S^2 + 2t/EI)\Phi_1(x-a_3)_- + \alpha(S^2 - 2t/EI) \times \\ \times \Phi_3(x-a_3)_- - \beta(S^2 + 2t/EI)\Phi_1(x-a_4)_- - \alpha(S^2 - 2t/EI)\Phi_3(x-a_4)_-] / 2\alpha\beta S^2.$$

2 случай.  $S^4 < 0$ ;  $r^2 \neq 0$ . Корни (4.23) действительные и мнимые

$$\kappa_{1,2} = \pm\alpha; \quad \kappa_{3,4} = \pm i\beta; \quad \alpha = \sqrt{-r^2 + \sqrt{r^4 - S^4}}; \quad \beta = \sqrt{r^2 + \sqrt{r^4 - S^4}};$$

$$A_{11} = (\beta^2 ch\alpha x + \alpha^2 \cos \beta x) / (\alpha^2 + \beta^2); \quad A_{12} = \frac{\beta(\beta^2 + 2t/EI)sh\alpha x + \alpha(\alpha^2 - 2t/EI)\sin \beta x}{\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)};$$

$$\begin{aligned}
A_{13} &= \frac{ch\alpha x - \cos \beta x}{\alpha^2 + \beta^2}; & A_{14} &= \frac{\beta sh\alpha x - \alpha \sin \beta x}{\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)}; & A_{21} &= \frac{\alpha\beta^2 sh\alpha x - \alpha^2 \beta \sin \beta x}{\alpha^2 + \beta^2}; \\
A_{22} &= \frac{(\beta^2 + 2t/EI)ch\alpha x + (\alpha^2 - 2t/EI)\cos \beta x}{\alpha^2 + \beta^2}; & A_{23} &= \frac{\alpha sh\alpha x + \beta \sin \beta x}{\alpha^2 + \beta^2}; \\
A_{31} &= \frac{(\alpha\beta)^2(ch\alpha x - \cos \beta x)}{\alpha^2 + \beta^2}; & A_{32} &= \frac{\alpha(\beta^2 + 2t/EI)sh\alpha x - \beta(\alpha^2 - 2t/EI)\sin \beta x}{\alpha^2 + \beta^2}; \\
A_{33} &= \frac{\alpha^2 ch\alpha x + \beta^2 \cos \beta x}{\alpha^2 + \beta^2}; & A_{41} &= \frac{\alpha\beta^2(\alpha^2 - 2t/EI)sh\alpha x + \alpha^2 \beta(\beta^2 + 2t/EI)\sin \beta x}{\alpha^2 + \beta^2}; \\
A_{42} &= \frac{(\alpha^2 - 2t/EI)(\beta^2 + 2t/EI)(ch\alpha x - \cos \beta x)}{\alpha^2 + \beta^2}; \\
A_{43} &= \frac{\alpha(\alpha^2 - 2t/EI)sh\alpha x - \beta(\beta^2 + 2t/EI)\sin \beta x}{\alpha^2 + \beta^2}; \\
A_{44} &= \frac{(\alpha^2 - 2t/EI)ch\alpha x + (\beta^2 + 2t/EI)\cos \beta x}{\alpha^2 + \beta^2}; \tag{4.26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{11} &= F[\beta sh\alpha(x-a_1)_- - \alpha \sin \beta(x-a_1)_-] / [\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)] + M[ch\alpha(x-a_2)_- - \\
&\quad - \cos \beta(x-a_2)_-] / (\alpha^2 + \beta^2) + q[\beta^2 ch\alpha(x-a_3)_- + \alpha^2 \sin \beta(x-a_3)_- - \beta^2 ch\alpha(x-a_4)_- - \\
&\quad - \alpha^2 \sin \beta(x-a_4)_-] / [(\alpha\beta)^2(\alpha^2 + \beta^2)];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{21} &= F[ch\alpha(x-a_1)_+ - \cos \beta(x-a_1)_+] / (\alpha^2 + \beta^2) + M[\alpha sh\alpha(x-a_2)_+ + \\
&\quad + \beta \sin \beta(x-a_2)_+] / (\alpha^2 + \beta^2) + q[\beta sh\alpha(x-a_3)_+ - \alpha \sin \beta(x-a_3)_+ - \beta sh\alpha(x-a_4)_+ + \\
&\quad + \alpha \sin \beta(x-a_4)_+] / [\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{31} &= F[\alpha sh\alpha(x-a_1)_+ + \beta \sin \beta(x-a_1)_+] / (\alpha^2 + \beta^2) + M[\alpha^2 ch\alpha(x-a_2)_+ + \beta^2 \sin \beta(x-a_2)_+] / \\
&\quad / (\alpha^2 + \beta^2) + q[ch\alpha(x-a_3)_+ - \cos \beta(x-a_3)_+ - ch\alpha(x-a_4)_+ + \cos \beta(x-a_4)_+] / (\alpha^2 + \beta^2);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{41} &= F[(\alpha^2 - 2t/EI)ch\alpha(x-a_1)_- + (\beta^2 + 2t/EI)\cos \beta(x-a_1)_-] / (\alpha^2 + \beta^2) + \\
&\quad + M[\alpha(\alpha^2 - 2t/EI)sh\alpha(x-a_2)_- - \beta(\beta^2 + 2t/EI)\sin \beta(x-a_2)_-] / (\alpha^2 + \beta^2) + \\
&\quad + q[\beta(\alpha^2 - 2t/EI)sh\alpha(x-a_3)_+ + \alpha(\beta^2 + 2t/EI)\sin \beta(x-a_3)_+ - \\
&\quad - \beta(\alpha^2 - 2t/EI)sh\alpha(x-a_4)_- - \alpha(\beta^2 + 2t/EI)\sin \beta(x-a_4)_-] / [\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)].
\end{aligned}$$

3 случай.  $S^4 > 0$ ;  $|S| < |r|$ ;  $r^2 < 0$ . Корни (4.23) действительные и разные

$$\kappa_{1,2} = \pm\alpha; \quad \kappa_{3,4} = \pm\beta; \quad \alpha = \sqrt{-r^2 + \sqrt{r^4 - S^4}}; \quad \beta = \sqrt{-r^2 - \sqrt{r^4 - S^4}};$$

$$A_{11} = \frac{-\beta^2 ch\alpha x + \alpha^2 ch\beta x}{\alpha^2 - \beta^2}; \quad A_{12} = \frac{-\beta(\beta^2 - 2t/EI)sh\alpha x + \alpha(\alpha^2 - 2t/EI)sh\beta x}{\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2)};$$

$$A_{13} = \frac{ch\alpha x - ch\beta x}{\alpha^2 - \beta^2}; \quad A_{14} = \frac{\beta sh\alpha x - \alpha sh\beta x}{\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2)}; \quad A_{21} = \frac{-\alpha\beta^2 sh\alpha x + \alpha^2 \beta sh\beta x}{\alpha^2 - \beta^2};$$

$$A_{22} = \frac{-(\beta^2 - 2t/EI)ch\alpha x + (\alpha^2 - 2t/EI)ch\beta x}{\alpha^2 - \beta^2}; \quad A_{23} = \frac{\alpha sh\alpha x - \beta sh\beta x}{\alpha^2 - \beta^2};$$

$$\begin{aligned}
A_{31} &= \frac{\alpha^2 \beta^2 (-ch\alpha x + ch\beta x)}{\alpha^2 - \beta^2}; & A_{32} &= \frac{-\alpha(\beta^2 - 2t/EI)sh\alpha x + \beta(\alpha^2 - 2t/EI)sh\beta x}{\alpha^2 - \beta^2}; \\
A_{33} &= \frac{\alpha^2 ch\alpha x - \beta^2 ch\beta x}{\alpha^2 - \beta^2}; & A_{41} &= \frac{-\alpha\beta^2(\alpha^2 - 2t/EI)sh\alpha x + \alpha^2\beta(\beta^2 - 2t/EI)sh\beta x}{\alpha^2 - \beta^2}; \\
A_{42} &= \frac{(\alpha^2 - 2t/EI)(\beta^2 - 2t/EI)(-ch\alpha x + ch\beta x)}{\alpha^2 - \beta^2}; \\
A_{43} &= \frac{\alpha(\alpha^2 - 2t/EI)sh\alpha x - \beta(\beta^2 - 2t/EI)sh\beta x}{\alpha^2 - \beta^2}; \\
A_{44} &= \frac{(\alpha^2 - 2t/EI)ch\alpha x - (\beta^2 - 2t/EI)ch\beta x}{\alpha^2 - \beta^2}; \\
B_{11} &= \frac{F[\beta sh\alpha(x-a_1)_+ - \alpha sh\beta(x-a_1)_+]}{\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2)} + M \frac{ch\alpha(x-a_2)_- - ch\beta(x-a_2)_-}{\alpha^2 - \beta^2} + \\
&+ q \frac{\beta^2 ch\alpha(x-a_3)_+ - \alpha^2 sh\beta(x-a_3)_- - \beta^2 ch\alpha(x-a_4)_+ + \alpha^2 sh\beta(x-a_4)_+}{\alpha^2 \beta^2 (\alpha^2 - \beta^2)}; \\
B_{21} &= F \frac{ch\alpha(x-a_1)_- - ch\beta(x-a_1)_+}{\alpha^2 - \beta^2} + M \frac{\alpha sh(x-a_2)_- - \beta sh\beta(x-a_2)_-}{\alpha^2 - \beta^2} + \\
&+ q \frac{\beta sh\alpha(x-a_3)_+ - \alpha sh\beta(x-a_3)_+ - \beta sh\alpha(x-a_4)_+ + \alpha sh\beta(x-a_4)_+}{\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2)}; \\
B_{31} &= F \frac{\alpha sh\alpha(x-a_1)_- - \beta sh\beta(x-a_1)_-}{\alpha^2 - \beta^2} + M \frac{\alpha^2 ch\alpha(x-a_2)_- - \beta^2 ch\beta(x-a_2)_-}{\alpha^2 - \beta^2} + \\
&+ q \frac{ch\alpha(x-a_3)_+ - ch\beta(x-a_3)_- - ch\alpha(x-a_4)_- + ch\beta(x-a_4)_+}{\alpha^2 - \beta^2}; \\
B_{41} &= F \frac{(\alpha^2 - 2t/EI)ch\alpha(x-a_1)_- - (\beta^2 - 2t/EI)ch\beta(x-a_1)_-}{\alpha^2 - \beta^2} + \\
&+ M \frac{\alpha(\alpha^2 - 2t/EI)sh\alpha(x-a_2)_- - \beta(\beta^2 - 2t/EI)sh\beta(x-a_2)_-}{\alpha^2 - \beta^2} + \\
&+ q \frac{\beta(\alpha^2 - 2t/EI)sh\alpha(x-a_3)_- - \alpha(\beta^2 - 2t/EI)sh\beta(x-a_3)_+ -}{\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2)} \\
&\quad - \frac{\beta(\alpha^2 - 2t/EI)sh\alpha(x-a_4)_+ + \alpha(\beta^2 - 2t/EI)sh\beta(x-a_4)_+}{\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2)}.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

4случай.  $S^4 > 0$ ;  $|S| < |r|$ ;  $r^2 > 0$ . Корни (4.23) мнимые

$$\begin{aligned}
\kappa_{1,2} &= \pm i\alpha; & \kappa_{3,4} &= \pm i\beta; & \alpha &= \sqrt{r^2 - \sqrt{r^4 - S^4}}; & \beta &= \sqrt{r^2 + \sqrt{r^4 - S^4}}; \\
A_{11} &= \frac{-\beta^2 \cos \alpha x + \alpha^2 \cos \beta x}{\alpha^2 - \beta^2}; & A_{12} &= \frac{-\beta(\beta^2 + 2t/EI)\sin \alpha x + \alpha(\alpha^2 + 2t/EI)\sin \beta x}{\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2)}; \\
A_{13} &= \frac{-\cos \alpha x + \cos \beta x}{\alpha^2 - \beta^2}; & A_{14} &= \frac{-\beta \sin \alpha x + \alpha \sin \beta x}{\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2)}; & A_{21} &= \frac{\alpha\beta^2 \sin \alpha x - \alpha^2 \beta \sin \beta x}{\alpha^2 - \beta^2};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{22} &= \frac{-(\beta^2 + 2l/EI)\cos \alpha x + (\alpha^2 + 2l/EI)\cos \beta x}{\alpha^2 - \beta^2}; & A_{23} &= \frac{\alpha \sin \alpha x - \beta \sin \beta x}{\alpha^2 - \beta^2}; \\
A_{31} &= \frac{\alpha^2 \beta^2 (\cos \alpha x - \cos \beta x)}{\alpha^2 - \beta^2}; & A_{32} &= \frac{\alpha(\beta^2 + 2l/EI)\sin \alpha x - \beta(\alpha^2 + 2l/EI)\sin \beta x}{\alpha^2 - \beta^2}; \\
A_{33} &= \frac{\alpha^2 \cos \alpha x - \beta^2 \cos \beta x}{\alpha^2 - \beta^2}; & A_{41} &= \frac{-\alpha \beta^2 (\alpha^2 + 2l/EI)\sin \alpha x + \alpha^2 \beta (\beta^2 + 2l/EI)\sin \beta x}{\alpha^2 - \beta^2}; \\
& & A_{42} &= \frac{(\alpha^2 + 2l/EI)(\beta^2 + 2l/EI)(\cos \alpha x - \cos \beta x)}{\alpha^2 - \beta^2}; \\
& & A_{43} &= \frac{-\alpha(\alpha^2 + 2l/EI)\sin \alpha x + \beta(\beta^2 + 2l/EI)\sin \beta x}{\alpha^2 - \beta^2}; \\
A_{44} &= \frac{(\alpha^2 + 2l/EI)\cos \alpha x - (\beta^2 + 2l/EI)\cos \beta x}{\alpha^2 - \beta^2}; & & (4.28) \\
B_{11} &= F \frac{-\beta \sin \alpha(x-a_1)_+ + \alpha \sin \beta(x-a_1)_+}{\alpha \beta (\alpha^2 - \beta^2)} + M \frac{-\cos \alpha(x-a_2)_+ + \cos \beta(x-a_2)_+}{\alpha^2 - \beta^2} + \\
& + q \frac{\beta^2 \cos \alpha(x-a_3)_+ - \alpha^2 \cos \beta(x-a_3)_+ - \beta^2 \cos \alpha(x-a_4)_+ + \alpha^2 \cos \beta(x-a_4)_+}{\alpha^2 \beta^2 (\alpha^2 - \beta^2)}; \\
B_{21} &= F \frac{-\cos \alpha(x-a_1)_+ + \cos \beta(x-a_1)_+}{\alpha^2 - \beta^2} + M \frac{\alpha \sin \alpha(x-a_2)_+ - \beta \sin \beta(x-a_2)_+}{\alpha^2 - \beta^2} + \\
& + q \frac{-\beta \sin \alpha(x-a_3)_+ + \alpha \sin \beta(x-a_3)_+ + \beta \sin \alpha(x-a_4)_+ - \alpha \sin \beta(x-a_4)_+}{\alpha \beta (\alpha^2 - \beta^2)}; \\
B_{31} &= F \frac{\alpha \sin \alpha(x-a_1)_- - \beta \sin \beta(x-a_1)_-}{\alpha^2 - \beta^2} + M \frac{\alpha^2 \cos \alpha(x-a_2)_- - \beta^2 \cos \beta(x-a_2)_-}{\alpha^2 - \beta^2} + \\
& + q \frac{-\cos \alpha(x-a_3)_- + \cos \beta(x-a_3)_- + \cos \alpha(x-a_4)_- - \cos \beta(x-a_4)_-}{\alpha^2 - \beta^2}; \\
B_{41} &= F \frac{(\alpha^2 + 2l/EI)\cos \alpha(x-a_1)_+ - (\beta^2 + 2l/EI)\cos \beta(x-a_1)_-}{\alpha^2 - \beta^2} + \\
& + M \frac{-\alpha(\alpha^2 + 2l/EI)\sin \alpha(x-a_2)_+ + \beta(\beta^2 + 2l/EI)\sin \beta(x-a_2)_+}{\alpha^2 - \beta^2} + \\
& + q \frac{\beta(\alpha^2 + 2l/EI)\sin \alpha(x-a_3)_+ - \alpha(\beta^2 + 2l/EI)\sin \beta(x-a_3)_- -}{\alpha \beta (\alpha^2 - \beta^2)} - \\
& - \frac{\beta(\alpha^2 + 2l/EI)\sin \alpha(x-a_4)_+ + \alpha(\beta^2 + 2l/EI)\sin \beta(x-a_4)_+}{\alpha \beta (\alpha^2 - \beta^2)}.
\end{aligned}$$

Второстепенные случаи фундаментальных функций ( $S = 0, r = 0, |S| = |r|$  и т.п.) имеют место только для отдельных точек интервалов изменения  $F_x, \omega$  и могут быть построены аналогично. Уравнение (4.24) позволяет решать весьма большой круг задач статики, динамики и устойчивости стержневых систем, связанных с упругим основанием. Высокую точность результатов и эффективность алгоритма МГЭ проиллюстрируем на тестовом примере.

**Пример 23** [83, с. 437]. Построить эпюры  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  длинной железобетонной рамы с замкнутым контуром (рис. 4.8), лежащей на упругом основании при следующих данных: коэффициент Пуассона упругого основания  $\mu_0 = 0,3$ ; коэффициент Пуассона материала рамы  $\mu = 0,167$ ; модули упругости основания и материала рамы  $E_0 = 32 \cdot 10^3$  кПа,  $E = 2,1 \cdot 10^7$  кПа; ширина и высота стержней рамы  $b = 1$  м;  $h = 0,3$  м; значения коэффициента  $\gamma$  примем равными 1,5; 1,0; 0,5 м<sup>-1</sup>; жесткость при изгибе стержней рамы  $EI = E_0 b h^3 / 12(1 - \mu^2)$ , мощность основания примем для случая упругой полуплоскости  $H \rightarrow \infty$ ; коэффициенты  $r_{11} = b/2\gamma$ ;  $S_{11} = b\gamma/2$  при  $H \rightarrow \infty$ . При заданных значениях исходных данных получаем

$$r^2 = \frac{F\chi}{2EI} - \frac{E_0 r_{11}}{4(1 + \mu_0)EI} = 0 - \frac{32 \cdot 10^3 \cdot 1/3}{4 \cdot (1 + 0,3) \cdot 48605,56} = -0,0422 \text{ 1/м}^2;$$

$$S^2 = \sqrt{\frac{E_0 S_{11}}{(1 - \mu_0^2)EI} - \frac{m\omega^2}{EI}} = \sqrt{\frac{32 \cdot 10^3 \cdot 0,75}{(1 - 0,3^2) \cdot 48605,56} - 0} = 0,7366 \text{ 1/м}^2.$$

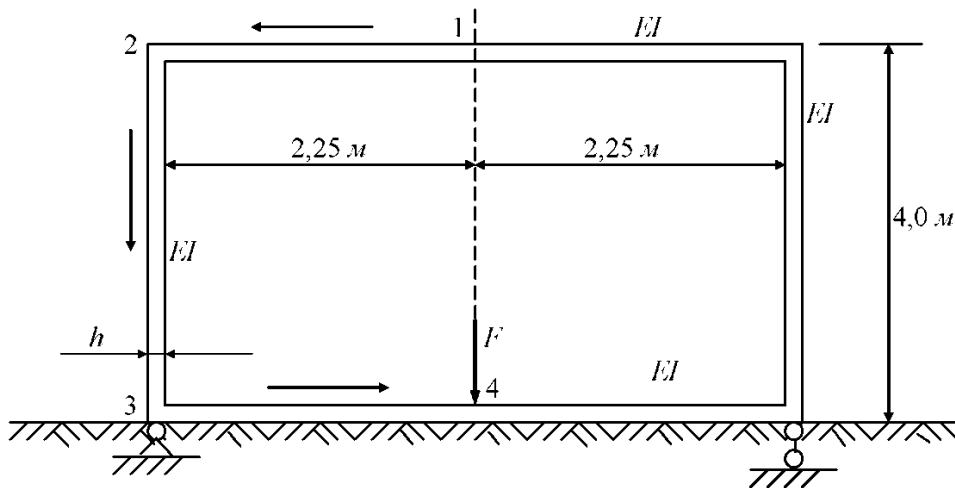


Рис. 4.8

Решается задача статики, поэтому  $F_x = \omega = 0$ . Получился случай  $|S| > |r|$ , т.е. 1 случай фундаментальных функций (4.25). Раму можно разбить на 4 стержня, но вследствие симметрии нагрузки и конструкции, рассмотрим только левую половину из 3 стержней. Стрелками обозначаем начало и конец каждого элемента. Уравнения равновесия, совместности перемещений узлов 2, 3 и крайевые условия представлены в матрицах  $\mathbf{X}_*$ ,  $\mathbf{Y}$ . Элементы вектора  $\mathbf{V}$  вычисляем по формулам (4.25) при  $l^*/2$ ;  $a_j = 2,25 - 0$  м;  $l = 2,25$  м.



1	$EIV^{1-2}(o)$
2	$EI\varphi^{1-2}(o)=0; N^{2-3}(\ell)$
3	$M^{1-2}(o)$
4	$Q^{1-2}(o)=0; EIV^{3-4}(\ell)$
5	$N^{1-2}(o)$
6	$EIV^{2-3}(o)=0; M^{3-4}(\ell)$
7	$EI\varphi^{2-3}(o)$
8	$M^{2-3}(o)$
9	$Q^{2-3}(o)$
10	$N^{2-3}(o)$
11	$EIV^{3-4}(o)=0; N^{3-4}(\ell)$
12	$EI\varphi^{3-4}(o)$
13	$M^{3-4}(o)$
14	$Q_*^{3-4}(o)$
15	$N^{3-4}(o)$

;

1	$EIV^{1-2}(\ell)=0$
2	$EI\varphi^{1-2}(\ell)=EI\varphi^{2-3}(o)$
3	$M^{1-2}(\ell)=M^{2-3}(o)$
4	$Q^{1-2}(\ell)=-N^{2-3}(o)$
5	$N^{1-2}(\ell)=Q^{2-3}(o)$
6	$EIV^{2-3}(\ell)=0$
7	$EI\varphi^{2-3}(\ell)=EI\varphi^{3-4}(o)$
8	$M^{2-3}(\ell)=M^{3-4}(o)$
9	$Q^{2-3}(\ell)=-N^{3-4}(o)$
10	$N^{2-3}(\ell)$
11	$EIV^{3-4}(\ell)$
12	$EI\varphi^{3-4}(\ell)=0$
13	$M^{3-4}(\ell)$
14	$Q_*^{3-4}(\ell)=0$
15	$N^{3-4}(\ell)$

;

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	$-F/2$
15	

Матричное уравнение МГЭ для рамы примет вид

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1		-2,5												
2			-2,2					-1							
3			1					-1							
4										1					
5					1				-1						
6							4	-8	-10,6						
7							1	-4	-8			-1			
8								1	4				-1		
9									1						1
10		-1								1					
11				-1								$A_{12}$	$-A_{13}$	$-A_{14}$	
12												$A_{22}$	$-A_{23}$	$-A_{13}$	
13						-1						$-A_{32}$	$A_{33}$	$A_{23}$	
14												$-A_{42}$	$A_{43}$	$A_{44}$	
15											-1				1

$EIV^{1-2}(o)$		1
$N^{2-3}(\ell)$		3
$M^{1-2}(o)$		8
$EIV^{3-4}(\ell)$		10
$N^{1-2}(o)$		5
$M^{3-4}(\ell)$		7
$EI\varphi^{2-3}(o)$		12
$M^{2-3}(o)$	=	9
$Q^{2-3}(o)$		15
$N^{2-3}(o)$		2
$N^{3-4}(\ell)$		4
$EI\varphi^{3-4}(o)$		13
$M^{3-4}(o)$		6
$Q_*^{3-4}(o)$		-0,5
$N^{3-4}(o)$		11

Переставляя строки матриц  $\mathbf{A}_*$ ,  $\mathbf{B}$  в новом порядке для исключения нулевых ведущих элементов, решаем эту систему методом Гаусса (по программе примера 6). В таблице 13 представлены результаты расчетов для различных коэффициентов  $\gamma$  и при отсутствии основания.

Таблица 13

Граничные параметры	Рама без упругого основания	Рама на упругом основании			Результаты метода перемещений [83]
		$\gamma = 1,5$	$\gamma = 1,0$	$\gamma = 0,5$	
$EIV^{1-2}(o)/F'$	0,172	0,074	0,089	0,104	-
$N^{2-3}(\ell)/F'$	0,0	0,0	0,0	0,0	-
$M^{1-2}(o)/F'$	0,068	0,029	0,035	0,041	0,038
$EIV^{3-4}(\ell)/F'$	0,972	0,461	0,536	0,610	-
$N^{1-2}(o)/F'$	-0,108	-0,047	-0,056	-0,066	-
$M^{3-4}(\ell)/F'$	0,759	0,454	0,498	0,537	0,5
$EI\varphi^{2-3}(o)/F'$	-0,153	-0,066	-0,079	-0,093	-
$M^{2-3}(o)/F'$	0,068	0,029	0,035	0,041	0,038
$Q^{2-3}(o)/F'$	-0,108	-0,047	-0,056	-0,066	-
$N^{2-3}(o)/F'$	0,0	0,0	0,0	0,0	-
$N^{3-4}(\ell)/F'$	0,108	0,047	0,056	0,066	-
$EI\varphi^{3-4}(o)/F'$	0,442	0,191	0,229	0,267	0,245
$M^{3-4}(o)/F'$	-0,366	-0,158	-0,189	-0,221	-0,203
$Q_*^{3-4}(o)/F'$	0,5	0,182	0,251	0,357	0,209
$N^{3-4}(o)/F'$	0,108	0,047	0,056	0,066	-

Данные таблицы 13 свидетельствуют о хорошем соответствии результатов МГЭ (при  $\gamma = 1,0$ ) и метода перемещений [83]. Эпюры  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  представлены на рис. 4.9. Выполним тестирование уравнения (4.24) на задачах динамики и устойчивости отдельных стержней. Трансцендентные уравнения строились по алгоритму МГЭ. Например, для стержня с жестко защемленными граничными сечениями, схема (1.38) приводит к следующему уравнению для собственных значений

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
 1 & & & -A_{13} & -A_{14} \\
 2 & & & -A_{23} & -A_{13} \\
 3 & -1 & & A_{33} & A_{23} \\
 4 & & -1 & A_{43} & A_{44}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 EIV(o)=0; \quad M(\ell) \\
 EI\varphi(o)=0; \quad Q(\ell) \\
 M(o) \\
 Q(o)
 \end{array}
 -
 \begin{array}{c}
 EIV(\ell)=0 \\
 EI\varphi(\ell)=0 \\
 M(\ell) \\
 Q(\ell)
 \end{array}
 = 0 \quad ;
 \end{array}$$

$$|A_*(F_s, \omega)| = A_{13}^2 - A_{14} \cdot A_{23} = 0 .$$

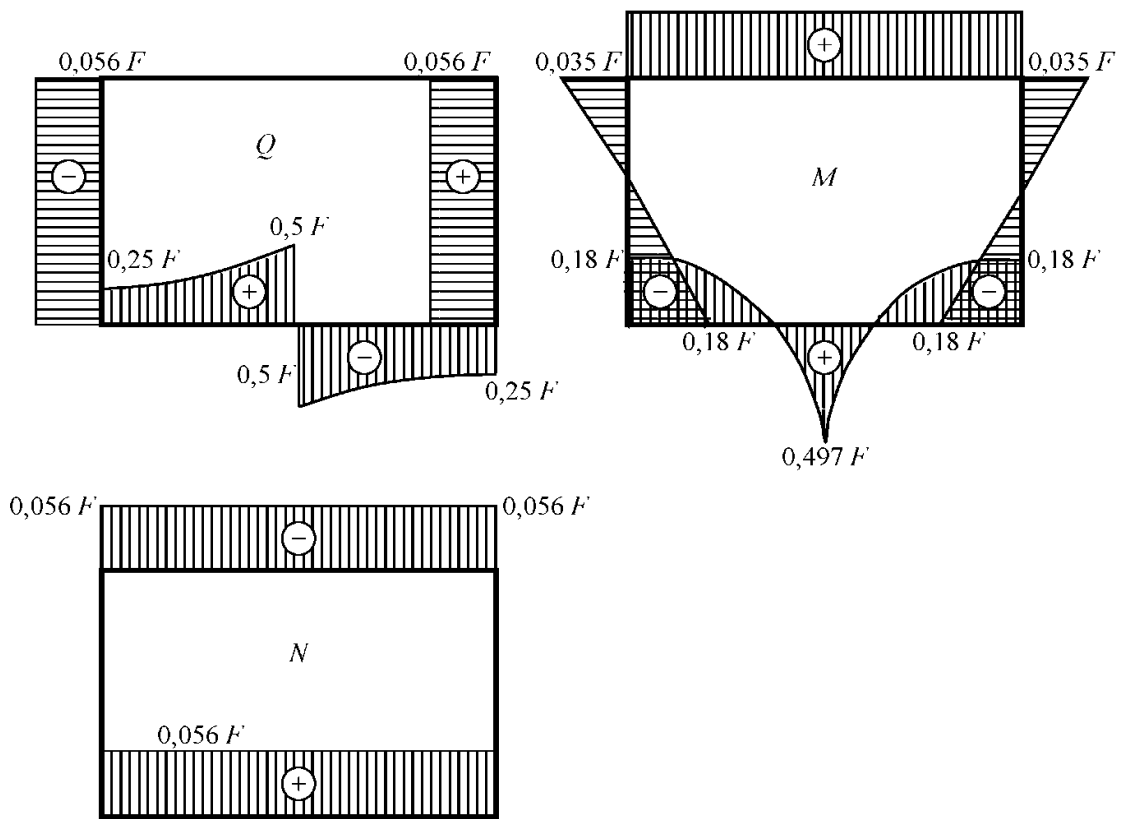


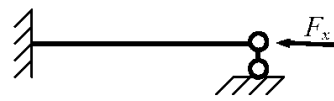

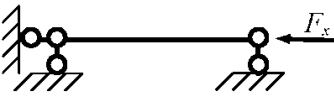
Рис. 4.9

Уравнение собственных значений для стержня, имеющего свободный конец, формировалось с учетом граничных условий

$$M(\ell) = 0; \quad Q_s(\ell) = (F_x + 2t)\varphi(\ell).$$

Таблица 14

Схема опирания стержня на упругом основании	Уравнение для определения собственных значений $A_*(F_x, \omega) = 0$	Частоты собственных колебаний $\omega \ell^2 \sqrt{m/EI}$ , $F_x = 0$		Критические силы потерь устойчивости $F_1 \ell^2 / EI$ , $\omega = 0$	
		При отсутствии упругого основания	При наличии упруг. основания	При отсутствии упруг. основания	При наличии упруг. основания
	$A_{13}^2 - A_{14} \cdot A_{23} = 0$	22,37 61,76 120,91 ...	15,855 43,645 85,525 ...	39,478	39,675

	$A_{13}A_{23} - A_{14}A_{33} = 0$	15,42 49,97 104,24 ...	10,955 35,375 73,756 ..	20,142	20,395
	$A_{33} \cdot A_{44} - A_{23} \cdot A_{43} +$ $+ [(F_x + 2t) / EI] \times$ $\times (-A_{23}^2 + A_{13}A_{33}) = 0$	3,52 22,03 61,70 ...	2,6465 15,6575 43,685 ...	2,467	2,785
	$A_{12}A_{23} - A_{14}A_{32} = 0$	9,87 39,48 88,83 ...	7,0585 27,965 62,855 ...	9,87	10,095

Частоты собственных колебаний и критические силы отдельных стержней представлены в таблице 14. Данные таблицы 14 подтверждают представления о существенном влиянии упругого основания на частоты собственных колебаний и критические силы. При единичных исходных данных ( $v = h = H = EI = E_0 = \ell = t = m_0 = 1; \mu = 0,3; \mu_0 = 0,3$ ) спектр частот собственных колебаний смещен влево, а критические силы — вправо относительно спектров стержня без упругого основания.

#### 4.5.4. МОДЕЛЬ С.П. ТИМОШЕНКО

Уравнения (3.10), (4.12) не учитывают деформации сдвига и инерции вращения при колебаниях. Поэтому они достаточно хорошо описывают поперечные колебания стержня с большим отношением длины к высоте сечения ( $\ell/h > 10$ ) и при малых частотах. Однако, для рамных систем фундаментов тяжелого оборудования и подобных конструкций, когда  $\ell_{nk}/nh < 6$ , где  $n$  – номер тона колебаний;  $h$  – характерный размер поперечного сечения;  $\ell_{nk}$  – длина полу-волны упругой линии стержня, уже необходимо учитывать сдвиг и инерцию вращения [39,43]. Проблема построения более точных решений поперечных колебаний стержня весьма актуальна и в теории устойчивости в связи с применением динамического метода. Дифференциальное уравнение поперечных колебаний прямолинейного стержня с учетом деформаций сдвига и инерции вращения вывел выдающийся русский ученый проф. С.П. Тимошенко [91]. Его модель ныне утвердилась как наиболее точная и широко применяется в различных задачах механики конструкций. Для применения модели С.П. Тимошенко в задачах устойчивости необходимо до-

полнить ее продольной силой  $F'_x$ . С этой целью рассмотрим стержень, сжатый следящей силой  $F'_1$  и силой  $F'_2$ , имеющей фиксированную линию действия (рис. 4.10).

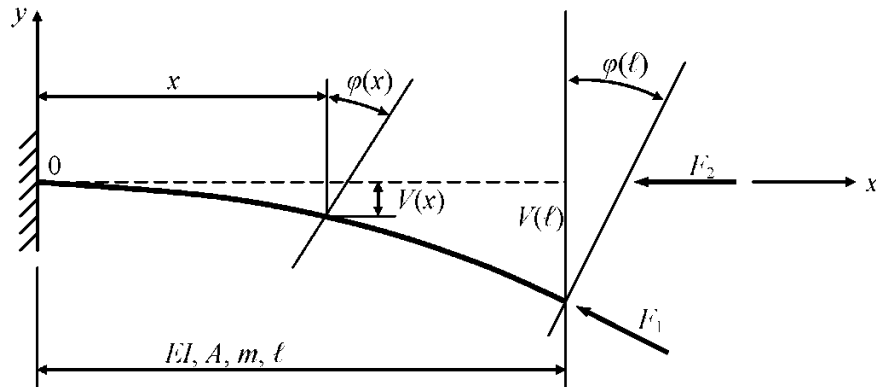


Рис. 4.10

Из геометрических соотношений деформированного состояния стержня следует выражение для изгибающего момента

$$M_*(x, t) = EI \frac{\partial \psi_*(x, t)}{\partial x} + F'_x \cdot y(x, t) - F'_1 \cdot y(\ell, t), \quad (4.29)$$

где  $\psi_*(x, t)$  - угол наклона сечения стержня без учета сдвига;  $F'_x = F'_1 + F'_2$  - продольная сила в текущем сечении;  $y(x, t)$ ,  $y(\ell, t)$  - соответственно прогиб текущей и граничной точек. Здесь не учитывается первая производная прогиба в кривизне стержня и считается, что вследствие малых перемещений  $\cos(\partial y / \partial x) = 1$ ;  $\sin(\partial y / \partial x) = \partial y / \partial x$ . Для силы  $F'_2$  выражение (4.29) является точным, для  $F'_1$  - приближенным. Полный угол поворота сечения равен сумме [91]

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = \psi_*(x, t) + \tau_*(x, t), \quad (4.30)$$

где  $\tau_*(x, t)$  - угол поперечного сдвига. Поперечная сила в рассмотренном случае предстанет выражением

$$Q_*(x, t) = -\kappa AG \tau_*(x, t) - F'_x \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} + F'_1 \frac{\partial y(\ell, t)}{\partial x}, \quad (4.31)$$

где  $AG$  - жесткость сечения при сдвиге;  $\kappa$  - коэффициент, учитывающий влияние формы сечения на деформацию сдвига. Принципиально не изменятся уравнения (4.29), (4.31) в случае, если стержень будет сжиматься «мертвой» силой по рис. 4.7, *d*. Далее модель деформированного состояния (4.29) - (4.31) приводится к задаче Коши. Исходными при этом являются уравнения равновесия элементарной части стержня при собственных колебаниях:

сумма моментов

$$-Q_* dx + \frac{\partial M_*}{\partial x} dx - \rho l \frac{\partial^2 \psi_*}{\partial t^2} dx = 0; \quad (4.32)$$

сумма проекций на вертикальную ось

$$-\frac{\partial Q_*}{\partial x} dx - m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx + q_*(x, t) dx = 0, \quad (4.33)$$

где  $\rho = m/A$  - плотность материала стержня;  $A$  - площадь сечения;  $I$  - осевой момент инерции сечения;  $m$  - равномерно распределенная масса;  $q_*(x, t)$  - поперечная динамическая нагрузка.

Если исключить функцию  $\psi_*(x, t)$  из уравнений (4.32), (4.33), то уравнение С.П. Тимошенко с учетом действия продольной силы  $F_x$  примет вид

$$\begin{aligned} EI \left( 1 + \frac{F_x}{\kappa AG} \right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \left[ \frac{EI}{\kappa G} \rho + \rho l \left( 1 + \frac{F_x}{\kappa AG} \right) \right] \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \\ + F_x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\rho^2 l}{\kappa G} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = q_* + \frac{\rho l}{\kappa AG} \frac{\partial^2 q_*}{\partial t^2} - \frac{EI}{\kappa AG} \frac{\partial^2 q_*}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Ограничимся случаем гармонических колебаний, для которых можно разделить линейную и временную координаты в соответствии с методом Фурье, т.е.

$$y(x, t) = V(x) \sin(\omega t + \psi_0); \quad q_*(x, t) = q(x) \sin(\omega t + \psi_0); \quad \psi_*(x, t) = \psi(x) \sin(\omega t + \psi_0), \quad (4.35)$$

где  $V(x)$ ,  $q(x)$ ,  $\psi(x)$  - амплитуды прогиба, нагрузки и угла наклона;  $\omega$  - частота собственных колебаний;  $\psi_0$  - начальная фаза. Подставляя (4.35) в (4.29) – (4.31), (4.34), получим дифференциальное уравнение и соответствующие кинематические и статические параметры в амплитудном состоянии

$$\begin{aligned} V^{IV}(x) + 2r^2 V''(x) + S^4 V(x) = q_y(x) / EI; \quad V(x), \quad \phi(x) = V'(x); \\ \frac{M(x)}{EI} = a_1 V''(x) + a_2 V(x) + a_3 q(x) - a_4 V(\ell); \\ \frac{Q(x)}{EI} = e_1 V'''(x) + e_2 V'(x) + e_3 q'(x) - e_4 \phi(x), \end{aligned} \quad (4.36)$$

где  $\phi(x)$ ,  $M(x)$ ,  $Q(x)$  - амплитудные полный угол поворота, изгибающий момент и поперечная сила, коэффициенты и правая часть принимают вид

$$\begin{aligned} 2r^2 = \frac{I \omega^2 m (E + \kappa G) + (\rho l \omega^2 + \kappa AG) F_x}{EI (\kappa AG + F_x)}; \quad S^4 = \frac{\omega^2 m (\rho l \omega^2 - \kappa AG)}{EI (\kappa AG + F_x)}; \\ q_y(x) = \frac{\kappa AG - \rho l \omega^2}{\kappa AG + F_x} q(x) - \frac{EI}{\kappa AG + F_x} q''(x); \\ a_1 = 1 + \frac{F_x}{\kappa AG}; \quad a_2 = \frac{m \omega^2}{\kappa AG} + \frac{F_x}{EI}; \quad a_3 = \frac{1}{\kappa AG}; \quad a_4 = \frac{F_1}{EI}; \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{\kappa AG + F_x}{\kappa AG - \rho I \omega^2}; & \epsilon_2 &= \frac{I(E m + \kappa AG \rho) \omega^2 + (\kappa AG + \rho I \omega^2) F_x}{EI(\kappa AG - \rho I \omega^2)}; \\ \epsilon_3 &= \frac{1}{\kappa AG - \rho I \omega^2}; & \epsilon_4 &= \frac{I_1 \rho I \omega^2}{EI(\kappa AG - \rho I \omega^2)}. \end{aligned}$$

Сосредоточенные массы стержня могут быть учтены по формуле (3.15). Решение уравнения (4.36) после нормирования фундаментальных функций удобно представить в матричной форме

$$\begin{array}{|c|} \hline EIV(x) \\ \hline EI\varphi(x) \\ \hline M(x) \\ \hline Q(x) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A_{11} & A_{12} & -A_{13} & -A_{14} \\ \hline A_{21} & A_{22} & -A_{23} & -A_{24} \\ \hline -A_{31} & -A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ \hline -A_{41} & -A_{42} & A_{43} & A_{44} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline EIV(o) \\ \hline EI\varphi(o) \\ \hline M(o) \\ \hline Q(o) \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline B_{11} \\ \hline B_{21} \\ \hline -B_{31} \\ \hline -B_{41} \\ \hline \end{array}, \quad (4.38)$$

где знак « $\rightarrow$ » соответствует направлению оси  $ou$  «вниз». Вид фундаментальных ортонормированных функций зависит от корней характеристического уравнения. Представим 4 основных случая фундаментальных функций.

1 случай.  $(r^4 - S^4) < 0$ . Корни по формуле (4.23) комплексные

$$\kappa_{1-4} = \pm \alpha \pm i\beta, \quad \alpha = \sqrt{(S^2 - r^2)/2}, \quad \beta = \sqrt{(S^2 + r^2)/2};$$

$$\Phi_1 = ch\alpha x \cdot \sin \beta x, \quad \Phi_2 = ch\alpha x \cdot \cos \beta x, \quad \Phi_3 = sh\alpha x \cdot \cos \beta x, \quad \Phi_4 = sh\alpha x \cdot \sin \beta x;$$

$$A_{11} = \Phi_2 - \frac{a_2 - a_1 r^2}{2\alpha\beta a_1} \Phi_4, \quad A_{12} = \frac{\beta [a_2 - \epsilon_1 (\beta^2 - 3\alpha^2)] \Phi_3 - \alpha [a_2 + \epsilon_1 (\alpha^2 - 3\beta^2)] \Phi_1}{2\alpha\beta S^2 \epsilon_1},$$

$$A_{13} = \frac{\Phi_4}{2\alpha\beta a_1}, \quad A_{14} = \frac{\alpha\Phi_1 - \beta\Phi_3}{2\alpha\beta S^2 \epsilon_1}, \quad A_{21} = \frac{\beta(a_1 S^2 - a_2) \Phi_3 - \alpha(a_1 S^2 + a_2) \Phi_1}{2\alpha\beta a_1},$$

$$A_{22} = \Phi_2 - \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1 r^2}{2\alpha\beta a_1} \Phi_4, \quad A_{23} = \frac{\alpha\Phi_1 + \beta\Phi_3}{2\alpha\beta a_1}, \quad A_{24} = \frac{\Phi_4}{2\alpha\beta \epsilon_1};$$

$$A_{31} = -\frac{(a_2 - a_1 r^2) + (2\alpha\beta a_1)^2}{2\alpha\beta a_1} \Phi_4, \quad A_{33} = \Phi_2 + \frac{a_2 - a_1 r^2}{2\alpha\beta a_1} \Phi_4;$$

$$\begin{aligned} A_{32} &= \frac{[\epsilon_2 - \epsilon_1 (\beta^2 - 3\alpha^2)] (a_2 - a_1 r^2) - 2\alpha^2 a_1 [\epsilon_2 + \epsilon_1 (\alpha^2 - 3\beta^2)]}{2\alpha S^2 \epsilon_1} \Phi_3 - \\ &\quad - \frac{[\epsilon_2 + \epsilon_1 (\alpha^2 - 3\beta^2)] (a_2 - a_1 r^2) + 2\beta^2 a_1 [\epsilon_2 - \epsilon_1 (\beta^2 - 3\alpha^2)]}{2\beta S^2 \epsilon_1} \Phi_1; \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$A_{34} = \frac{[\alpha(a_2 - a_1 r^2) + 2\alpha\beta^2 a_1] \Phi_1 - [\beta(a_2 - a_1 r^2) - 2\alpha^2 \beta a_1] \Phi_3}{2\alpha\beta S^2 \epsilon_1};$$

$$A_{41} = \frac{2\alpha^2 a_1 [\epsilon_2 + \epsilon_1 (\alpha^2 - 3\beta^2)] - (a_2 - a_1 r^2) [\epsilon_2 - \epsilon_1 (\beta^2 - 3\alpha^2)]}{2\alpha a_1} \Phi_3 -$$

$$- \frac{2\beta^2 a_1 [\epsilon_2 - \epsilon_1 (\beta^2 - 3\alpha^2)] + (a_2 - a_1 r^2) [\epsilon_2 + \epsilon_1 (\alpha^2 - 3\beta^2)]}{2\beta a_1} \Phi_1;$$

$$A_{42} = - \frac{\alpha^2 [\epsilon_2 + \epsilon_1 (\alpha^2 - 3\beta^2)]^2 + \beta^2 [\epsilon_2 - \epsilon_1 (\beta^2 - 3\alpha^2)]^2}{2\alpha\beta S^2 \epsilon_1} \Phi_4;$$

$$A_{43} = \frac{\alpha [\epsilon_2 + \epsilon_1 (\alpha^2 - 3\beta^2)] \Phi_1 + \beta [\epsilon_2 - \epsilon_1 (\beta^2 - 3\alpha^2)] \Phi_3}{2\alpha\beta a_1}; \quad A_{44} = \Phi_2 + \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1 r^2}{2\alpha\beta a_1} \Phi_4.$$

2 случай.  $(r^4 - S^4) > 0; S^4 < 0$ . Корни (4.23) действительные и мнимые

$$\kappa_{1,2} = \pm\alpha; \quad \kappa_{3,4} = \pm i\beta; \quad \alpha = \sqrt{-r^2 + \sqrt{r^4 - S^4}}; \quad \beta = \sqrt{r^2 + \sqrt{r^4 - S^4}};$$

$$A_{11} = \frac{-(a_2 - a_1 \beta^2) \operatorname{ch} \alpha x + (a_2 + a_1 \alpha^2) \cos \beta x}{a_1 (\alpha^2 + \beta^2)}; \quad A_{12} = \frac{-\beta (\epsilon_2 - \epsilon_1 \beta^2) \operatorname{sh} \alpha x + \alpha (\epsilon_2 + \epsilon_1 \alpha^2) \sin \beta x}{\alpha \beta (\alpha^2 + \beta^2) \kappa_1};$$

$$A_{13} = \frac{\operatorname{ch} \alpha x - \cos \beta x}{a_1 (\alpha^2 + \beta^2)}; \quad A_{14} = \frac{\beta \operatorname{sh} \alpha x - \alpha \sin \beta x}{\alpha \beta (\alpha^2 + \beta^2) \kappa_1}; \quad A_{23} = \frac{\alpha \operatorname{sh} \alpha x + \beta \sin \beta x}{(\alpha^2 + \beta^2) \kappa_1};$$

$$A_{21} = \frac{-(a_2 - a_1 \beta^2) \alpha \operatorname{sh} \alpha x - \beta (a_2 + a_1 \alpha^2) \sin \beta x}{(\alpha^2 + \beta^2) \kappa_1}; \quad A_{22} = \frac{-(\epsilon_2 - \epsilon_1 \beta^2) \operatorname{ch} \alpha x + (\epsilon_2 + \epsilon_1 \alpha^2) \cos \beta x}{(\alpha^2 + \beta^2) \kappa_1};$$

$$A_{24} = \frac{\operatorname{ch} \alpha x - \cos \beta x}{(\alpha^2 + \beta^2) \kappa_1}; \quad A_{31} = \frac{(a_2 + a_1 \alpha^2) (a_2 - a_1 \beta^2) (-\operatorname{ch} \alpha x + \cos \beta x)}{a_1 (\alpha^2 + \beta^2)};$$

$$A_{32} = \frac{-\beta (a_2 + a_1 \alpha^2) (\epsilon_2 - \epsilon_1 \beta^2) \operatorname{sh} \alpha x + \alpha (a_2 - a_1 \beta^2) (\epsilon_2 + \epsilon_1 \alpha^2) \sin \beta x}{\alpha \beta (\alpha^2 + \beta^2) \kappa_1}; \quad (4.40)$$

$$A_{33} = \frac{(a_2 + a_1 \alpha^2) \operatorname{ch} \alpha x - (a_2 - a_1 \beta^2) \cos \beta x}{(\alpha^2 + \beta^2) \kappa_1}; \quad A_{34} = \frac{\beta (a_2 + a_1 \alpha^2) \operatorname{sh} \alpha x - \alpha (a_2 - a_1 \beta^2) \sin \beta x}{\alpha \beta (\alpha^2 + \beta^2) \kappa_1};$$

$$A_{41} = \frac{-\alpha (a_2 - a_1 \beta^2) (\epsilon_2 + \epsilon_1 \alpha^2) \operatorname{sh} \alpha x - \beta (a_2 + a_1 \alpha^2) (\epsilon_2 - \epsilon_1 \beta^2) \sin \beta x}{(\alpha^2 + \beta^2) \kappa_1};$$

$$A_{42} = \frac{(\epsilon_2 + \epsilon_1 \alpha^2) (\epsilon_2 - \epsilon_1 \beta^2) (-\operatorname{ch} \alpha x + \cos \beta x)}{(\alpha^2 + \beta^2) \kappa_1}; \quad A_{43} = \frac{\alpha (\epsilon_2 + \epsilon_1 \alpha^2) \operatorname{sh} \alpha x + \beta (\epsilon_2 - \epsilon_1 \beta^2) \sin \beta x}{(\alpha^2 + \beta^2) \kappa_1};$$

$$A_{44} = \frac{(\epsilon_2 + \epsilon_1 \alpha^2) \operatorname{ch} \alpha x - (\epsilon_2 - \epsilon_1 \beta^2) \cos \beta x}{(\alpha^2 + \beta^2) \kappa_1}.$$

3 случай.  $(r^4 - S^4) > 0; S^4 > 0; r^2 < 0$ . Случай растягивающей силы ( $-I_x$ ). Корни (4.23)

действительные

$$\kappa_{1,2} = \pm\alpha; \quad \kappa_{3,4} = \pm\beta; \quad \alpha = \sqrt{-r^2 + \sqrt{r^4 - S^4}}; \quad \beta = \sqrt{-r^2 - \sqrt{r^4 - S^4}};$$

$$A_{11} = \frac{(a_2 + a_1 \beta^2) \operatorname{ch} \alpha x - (a_2 + a_1 \alpha^2) \operatorname{ch} \beta x}{(\beta^2 - \alpha^2) \kappa_1}; \quad A_{12} = \frac{\beta (\epsilon_2 + \epsilon_1 \beta^2) \operatorname{sh} \alpha x - \alpha (\epsilon_2 + \epsilon_1 \alpha^2) \operatorname{sh} \beta x}{\alpha \beta (\beta^2 - \alpha^2) \kappa_1};$$



$$\begin{aligned}
A_{13} &= \frac{-ch\alpha x + ch\beta x}{(\beta^2 - \alpha^2)a_1}; & A_{14} &= \frac{-\beta sh\alpha x + \alpha sh\beta x}{\alpha\beta(\beta^2 - \alpha^2)b_1}; \\
A_{21} &= \frac{\alpha(a_2 + a_1\beta^2)sh\alpha x - \beta(a_2 + a_1\alpha^2)sh\beta x}{(\beta^2 - \alpha^2)a_1}; & A_{22} &= \frac{(e_2 + e_1\beta^2)ch\alpha x - (e_2 + e_1\alpha^2)ch\beta x}{(\beta^2 - \alpha^2)b_1}; \\
A_{23} &= \frac{-\alpha sh\alpha x + \beta sh\beta x}{(\beta^2 - \alpha^2)a_1}; & A_{24} &= \frac{-ch\alpha x + ch\beta x}{(\beta^2 - \alpha^2)a_1}; & A_{31} &= \frac{(a_2 + a_1\alpha^2)(a_2 + a_1\beta^2)(ch\alpha x - ch\beta x)}{(\beta^2 - \alpha^2)a_1}; \\
A_{32} &= \frac{\beta(a_2 + a_1\alpha^2)(e_2 + e_1\beta^2)sh\alpha x - \alpha(a_2 + a_1\beta^2)(e_2 + e_1\alpha^2)sh\beta x}{\alpha\beta(\beta^2 - \alpha^2)b_1}; & & & & (4.41) \\
A_{33} &= \frac{-(a_2 + a_1\alpha^2)ch\alpha x + (a_2 + a_1\beta^2)ch\beta x}{(\beta^2 - \alpha^2)a_1}; & A_{34} &= \frac{-\beta(a_2 + a_1\alpha^2)sh\alpha x + \alpha(a_2 + a_1\beta^2)sh\beta x}{\alpha\beta(\beta^2 - \alpha^2)b_1}; \\
A_{41} &= \frac{\alpha(a_2 + a_1\beta^2)(e_2 + e_1\alpha^2)sh\alpha x - \beta(a_2 + a_1\alpha^2)(e_2 + e_1\beta^2)sh\beta x}{(\beta^2 - \alpha^2)a_1}; \\
A_{42} &= \frac{(e_2 + e_1\alpha^2)(e_2 + e_1\beta^2)(ch\alpha x - ch\beta x)}{(\beta^2 - \alpha^2)b_1}; & A_{43} &= \frac{-\alpha(e_2 + e_1\alpha^2)sh\alpha x + \beta(e_2 + e_1\beta^2)sh\beta x}{(\beta^2 - \alpha^2)a_1}; \\
A_{44} &= \frac{-(e_2 + e_1\alpha^2)ch\alpha x + (e_2 + e_1\beta^2)ch\beta x}{(\beta^2 - \alpha^2)b_1}.
\end{aligned}$$

4 случай.  $(r^4 - S^4) > 0; S^4 > 0; r^2 > 0$  Корни (4.23) мнимые

$$\begin{aligned}
\kappa_{1-2} &= \pm i\alpha, & \kappa_{3-4} &= \pm i\beta, & \alpha &= \sqrt{r^2 - \sqrt{r^4 - S^4}}, & \beta &= \sqrt{r^2 + \sqrt{r^4 - S^4}}; \\
A_{11} &= \frac{(a_2 - a_1\beta^2)\cos\alpha x - (a_2 - a_1\alpha^2)\cos\beta x}{(\alpha^2 - \beta^2)a_1}; & A_{12} &= \frac{\beta(e_2 - e_1\beta^2)\sin\alpha x - \alpha(e_2 - e_1\alpha^2)\sin\beta x}{\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2)b_1}; \\
A_{13} &= \frac{-\cos\alpha x + \cos\beta x}{(\alpha^2 - \beta^2)a_1}; & A_{14} &= \frac{-\beta\sin\alpha x + \alpha\sin\beta x}{\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2)b_1}; \\
A_{21} &= \frac{-\alpha(a_2 - a_1\beta^2)\sin\alpha x + \beta(a_2 - a_1\alpha^2)\sin\beta x}{(\alpha^2 - \beta^2)a_1}; & A_{22} &= \frac{(e_2 - e_1\beta^2)\cos\alpha x - (e_2 - e_1\alpha^2)\cos\beta x}{(\alpha^2 - \beta^2)b_1}; \\
A_{23} &= \frac{\alpha\sin\alpha x - \beta\sin\beta x}{(\alpha^2 - \beta^2)b_1}; & A_{24} &= \frac{-\cos\alpha x + \cos\beta x}{(\alpha^2 - \beta^2)a_1}; \\
A_{31} &= \frac{(a_2 - a_1\alpha^2)(a_2 - a_1\beta^2)(\cos\alpha x - \cos\beta x)}{(\alpha^2 - \beta^2)a_1}; & A_{33} &= \frac{-(a_2 - a_1\alpha^2)\cos\alpha x + (a_2 - a_1\beta^2)\cos\beta x}{(\alpha^2 - \beta^2)a_1}; \\
A_{32} &= \frac{\beta(a_2 - a_1\alpha^2)(e_2 - e_1\beta^2)\sin\alpha x - \alpha(a_2 - a_1\beta^2)(e_2 - e_1\alpha^2)\sin\beta x}{\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2)b_1}; & & & & (4.42) \\
A_{34} &= \frac{-\beta(a_2 - a_1\alpha^2)\sin\alpha x + \alpha(a_2 - a_1\beta^2)\sin\beta x}{\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2)b_1}; \\
A_{41} &= \frac{-\alpha(a_2 - a_1\beta^2)(e_2 - e_1\alpha^2)\sin\alpha x + \beta(a_2 - a_1\alpha^2)(e_2 - e_1\beta^2)\sin\beta x}{(\alpha^2 - \beta^2)a_1};
\end{aligned}$$

$$A_{42} = \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1 \alpha^2)(\epsilon_2 - \epsilon_1 \beta^2)(\cos \alpha x - \cos \beta x)}{(\alpha^2 - \beta^2)\epsilon_1}, \quad A_{43} = \frac{\alpha(\epsilon_2 - \epsilon_1 \alpha^2)\sin \alpha x - \beta(\epsilon_2 - \epsilon_1 \beta^2)\sin \beta x}{(\alpha^2 - \beta^2)\epsilon_1},$$

$$A_{44} = \frac{-(\epsilon_2 - \epsilon_1 \alpha^2)\cos \alpha x + (\epsilon_2 - \epsilon_1 \beta^2)\cos \beta x}{(\alpha^2 - \beta^2)\epsilon_1}.$$

Слагаемые, зависящие от внешней нагрузки и граничных параметров стержня, примут вид

$$B_{11} = \int_0^x A_{14}(x-\xi)q_y(\xi)d\xi - a_3 q(o)A_{13}(x) + a_4 V(\ell)A_{13}(x) - \epsilon_3 q'(o)A_{14}(x) + \epsilon_4 \varphi(\ell)A_{14}(x),$$

$$B_{21} = \int_0^x A_{24}(x-\xi)q_y(\xi)d\xi - a_3 q(o)A_{23}(x) + a_4 V(\ell)A_{23}(x) - \epsilon_3 q'(o)A_{24}(x) + \epsilon_4 \varphi(\ell)A_{24}(x),$$

$$B_{31} = \int_0^x A_{34}(x-\xi)q_y(\xi)d\xi - a_3 [q(o)A_{33}(x) - q(x)] + a_4 V(\ell)[A_{33}(x) - 1] - \epsilon_3 q'(o)A_{34}(x) + \epsilon_4 \varphi(\ell)A_{34}(x) \quad (4.43)$$

$$B_{41} = \int_0^x A_{44}(x-\xi)q_y(\xi)d\xi - a_3 q(o)A_{43}(x) + a_4 V(\ell)A_{43}(x) - \epsilon_3 [q'(o)A_{44}(x) - q'(x)] + \epsilon_4 \varphi(\ell)[A_{44}(x) - 1].$$

Интегрирование выражений (4.43) для любой поперечной нагрузки не вызывает трудностей. Другие случаи фундаментальных функций ( $\Gamma^2 = 0$ ;  $S^4 = 0$ ;  $\Gamma^4 = S^4$  и т.д.) имеют второстепенное значение и здесь не приводятся. Тестирование решения задачи Коши (4.38) выполним на задачах о собственных колебаниях. В этом случае  $F'_x = 0$ ;  $q_y(x) = 0$ . Частотные уравнения отдельных стержней можно получить при формировании краевой задачи. Например, при жестком заземлении граничных точек, будем иметь

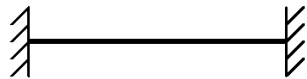
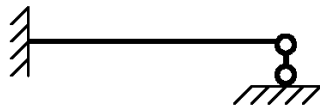

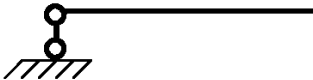
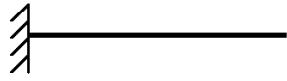
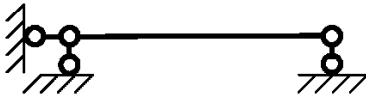
	1	2	3	4			
1			-A <sub>13</sub>	-A <sub>14</sub>	EIV(o) = 0; M(ℓ)		EIV(ℓ) = 0
2			-A <sub>23</sub>	-A <sub>24</sub>	EIϕ(o) = 0; Q(ℓ)		EIϕ(ℓ) = 0
3	-1		A <sub>33</sub>	A <sub>34</sub>	M(o)		M(ℓ)
4		-1	A <sub>43</sub>	A <sub>44</sub>	Q(o)		Q(ℓ)
					-		= 0 →

$$|A_*(\omega)| = A_{13} \cdot A_{24} - A_{14} \cdot A_{23} = 0.$$

Аналогично можно получить частотные уравнения для любых условий опирания. Наиболее просто частоты определяются методом последовательного перебора, когда задаются начальное значение и шаг для  $\omega$ . Результаты вычисления определителя выводятся в отдельный файл. Его просмотр позволяет выявить изменение знака определителя и грубое значение соб-

ственной частоты. Далее она может быть уточнена при последующих прогонах программы с измененными начальным значением и шагом  $\omega$ . Пример такой программы на языке Fortran представлен в приложении №1. В таблице 15 дано сравнение частот по приближенному решению акад. А.Н. Крылова и решению уравнения С.П. Тимошенко. Частоты определялись при следующих исходных данных: коэффициент Пуассона  $\mu = 0,3$ ;  $E = 2,1 \cdot 10^{11}$  Па;  $G = E/2(1+\mu) = 0,8077 \cdot 10^{11}$  Па;  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>;  $\ell = 1,0$  м;  $A = b \times h = 0,1 \times 0,1 = 0,01$  м<sup>2</sup>;  $I = h^3/12 = 8,3333 \cdot 10^{-6}$  м<sup>4</sup>;

Таблица 15

Безразмерные частоты собственных колебаний отдельных стержней, $\omega_* = \omega \ell^2 \sqrt{m/EI}$ .						
Номер тона колебаний	 $D_1 = A_{13} \cdot A_{24} - A_{14} \cdot A_{23} = 0$			 $D_2 = A_{13} \cdot A_{34} - A_{14} \cdot A_{33} = 0$		
	 			 		
	приближенные	уточненные	погрешность %	приближенные	уточненные	погрешность %
1	22,3736	21,9260	2,04	15,4184	15,1260	1,93
2	61,6714	57,4781	7,30	49,9652	46,7429	6,89
3	120,9030	105,3970	14,71	104,2480	91,2600	14,23
4	199,8596	161,4254	23,81	178,2700	144,5587	23,32
5	298,5557	222,6361	34,10	272,0311	203,5004	33,68
6	416,9909	287,0476	45,27	385,5317	265,9581	44,96
7	555,1652	353,4163	57,09	518,7714	330,5740	56,93
8	713,0787	420,9801	69,39	671,7503	396,4820	69,43
9	890,7286	489,3061	82,04	844,4094	463,1590	82,32
10	1088,1239	558,2521	94,92	1036,8888	530,3037	95,53
Номер тона колебаний	 $D_3 = A_{33} \cdot A_{44} - A_{34} \cdot A_{43} = 0$			 $D_4 = A_{12} \cdot A_{34} - A_{14} \cdot A_{32} = 0$		
	приближенные	уточненные	погрешность %	приближенные	уточненные	погрешность %
1	3,5161	3,5143	0,34	9,8699	9,7081	1,67
2	22,0348	21,3926	3,00	39,4786	37,0953	6,42
3	61,8633	56,8754	8,77	88,8265	78,1553	13,65
4	120,9023	103,9317	16,33	157,9138	128,6654	22,73
5	199,8596	158,8897	25,79	246,7403	185,3173	33,14
6	298,5557	218,8186	36,44	355,3060	245,8317	44,53
7	416,9909	281,7821	47,98	483,6108	308,7225	56,65
8	555,1656	346,5089	60,22	631,6547	373,0370	69,33
9	713,0787	412,1571	73,01	799,4384	438,1725	82,45
10	890,7310	478,1448	86,29	986,9472	503,7375	95,92

$m = \rho A = 78,0 \text{ кг/м}$ ;  $\kappa = 5/6$ . Абсолютные значения частот приводились к безразмерной форме  $\omega_* = \omega \ell^2 \sqrt{m/EI}$ .

Из таблицы 15 следует, что погрешность приближенного решения быстро нарастает и у 10-й частоты при отношении  $\ell/h = 10$  достигает почти 100%. О точности частот уравнения (4.38) можно судить по тому факту, что первые 5 частот таблицы 15 при шарнирном опирании совпадают с 5-ю частотами работы [99].

#### 4.5.5. УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ ОТ СЛЕДЯЩИХ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИЛ

Рассмотрим особенности алгоритма решения задач устойчивости упругих систем при действии следящих консервативных сил. К таким задачам может быть применен статический метод, что упрощает методику их решения.

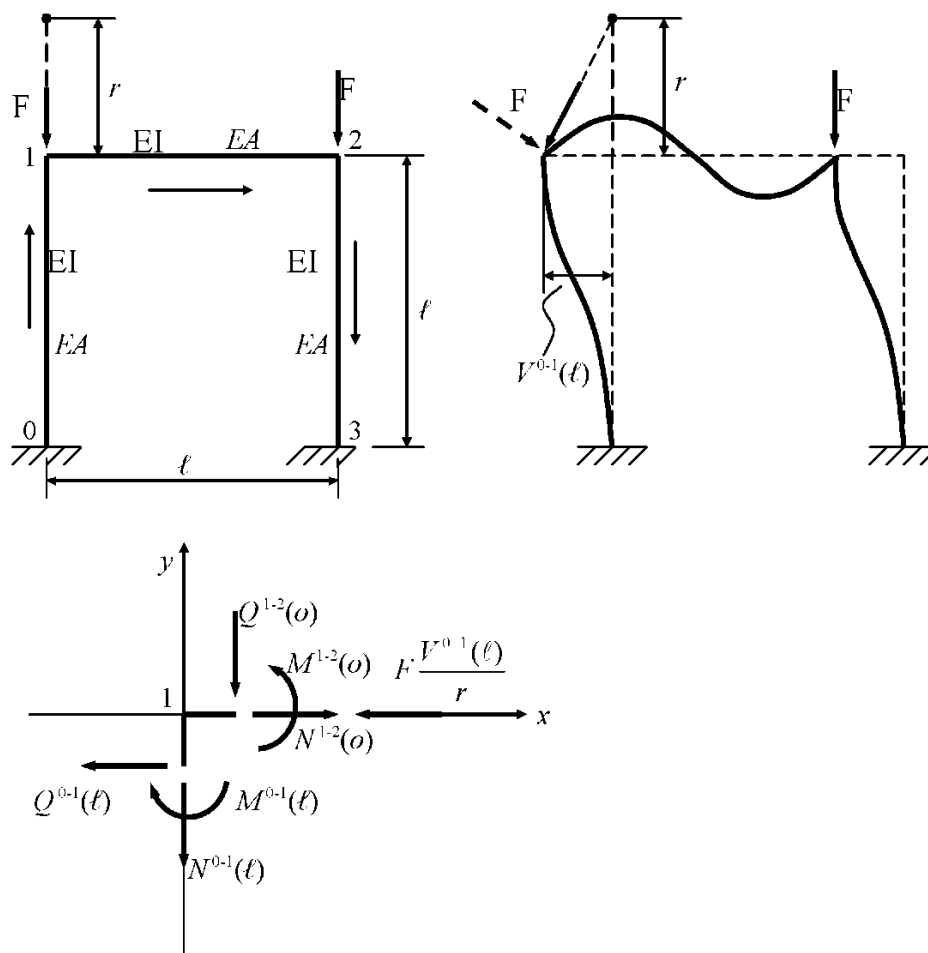


Рис.

**Пример 24** . Пусть в раме (рис. 4.11) стержень 0-1 испытывает воздействие следящей силы с линией действия, проходящей через фиксированную точку, стержень 2-3 нагружен «мертвой» силой, а стержень 1-2 будет испытывать изгиб после потери устойчивости.

При бифуркации стержневой системы возникает горизонтальная проекция следящей силы и уравнение равновесия узла 1 будет включать эту проекцию (рис. 4.11)  $Q^{0-1}(\ell) = N^{0-1}(\ell) \pm F V^{0-1}(\ell) / r$ , где знак минус, когда проекция уменьшает устойчивость системы (направлена в сторону смещения рамы), и знак плюс, когда она направлена в противоположную сторону.

Формируем матрицы  $X_*$ ,  $Y$

$X_* =$	1	$EIV^{0-1}(o) = 0; M^{2-3}(\ell)$	;	$Y =$	1	$EIV^{0-1}(\ell) = EIU^{1-2}(o)$
	2	$EI\varphi^{0-1}(o) = 0; Q^{2-3}(\ell)$			2	$EI\varphi^{0-1}(\ell) = EI\varphi^{1-2}(o)$
	3	$M^{0-1}(o)$			3	$M^{0-1}(\ell) = M^{1-2}(o)$
	4	$Q^{0-1}(o)$			4	$Q^{0-1}(\ell) = N^{1-2}(o) \pm FV^{0-1}(\ell)/r = N^{1-2}(o) \pm FU^{1-2}(o)/r$
	5	$N^{0-1}(o)$			5	$N^{0-1}(\ell) = -Q^{1-2}(o)$
	6	$EIV^{1-2}(o) = 0; N^{2-3}(\ell)$			6	$EIV^{1-2}(\ell) = 0$
	7	$EI\varphi^{1-2}(o)$			7	$EI\varphi^{1-2}(\ell) = EI\varphi^{2-3}(o)$
	8	$M^{1-2}(o)$			8	$M^{1-2}(\ell) = M^{2-3}(o)$
	9	$Q^{1-2}(o)$			9	$Q^{1-2}(\ell) = N^{2-3}(o)$
	10	$EAU^{1-2}(o) = 12EIU^{1-2}(o)$			10	$EAU^{1-2}(\ell) = EAV^{2-3}(o) = 12EIV^{2-3}(o)$
	11	$N^{1-2}(o)$			11	$N^{1-2}(\ell) = -Q^{2-3}(o)$
	12	$EIV^{2-3}(o)$			12	$EIV^{2-3}(\ell) = 0$
	13	$EI\varphi^{2-3}(o)$			13	$EI\varphi^{2-3}(\ell) = 0$
	14	$M^{2-3}(o)$			14	$M^{2-3}(\ell)$
	15	$Q^{2-3}(o)$			15	$Q^{2-3}(\ell)$
	16	$N^{2-3}(o)$			16	$N^{2-3}(\ell)$

Для стержней 0-1 и 2-3 использованы блоки продольно-поперечного изгиба (4.4), для стержня 1-2 – изгиба и растяжения. Матрица  $A_*$  рамы примет вид

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16		
1			$-A_{13}$	$-A_{14}$						$-1/2$							3	
2			$-A_{12}$	$-A_{13}$			$-1$										7	
3			$A_{21}$	$A_{12}$				$-1$									8	
4				1						A	$-1$						4	
5					1				1								5	
6							1	$-1/2$	$-1/6$								9	
7							1	$-1$	$-1/2$				$-1$				13	
8								1	1					$-1$			14	
9									1							$-1$	16	
10										1	1	$-12$					10	
11											1					1	11	
12												1	$A_{12}$	$-A_{13}$	$-A_{14}$		12	
13													$A_{21}$	$-A_{12}$	$-A_{13}$		15	
14	$-1$												$-A_{31}$	$A_{21}$	$A_{12}$		1	
15		$-1$													1		2	
16						$-1$											1	6

Учет следящей силы осуществляется компенсирующим элементом  $A(4,10) = A = \mp F^2 / 12EIr$ . При вычислении определителя  $|A_*|$  принято  $EA/EI = 12$ ;  $El = \ell = r = 1$ . Фиксируя изменение его знака, получаем значения критических сил. Первые 4 значения их следующие:

а) следящая сила уменьшает устойчивость системы

$$F_1 = 2,425EI / \ell^2; \quad F_2 = 24,825EI / \ell^2; \quad F_3 = 30,475EI / \ell^2; \quad F_4 = 51,775EI / \ell^2;$$

в) следящая сила увеличивает устойчивость системы

$$F_1 = 25,6EI / \ell^2; \quad F_2 = 30,6EI / \ell^2; \quad F_3 = 64,6EI / \ell^2; \quad F_4 = 70,2EI / \ell^2;$$

с) кососимметричная потеря устойчивости (две силы  $F$  «мертвые»)

$$F_1 = 5,05EI / \ell^2; \quad F_2 = 14,95EI / \ell^2; \quad F_3 = 29,75EI / \ell^2; \quad F_4 = 49,45EI / \ell^2.$$

Из этих результатов следует, что сжимающая сила с линией действия, проходящей через фиксированную точку, весьма опасна. Она может существенно уменьшить первую критическую силу конструкции. Данный вывод относится и к различным грузоподъемным машинам и устройствам, где используется схема силы по рис. 4.7, с. Добавим, что, в отличие от всех рассмотренных выше задач устойчивости, учет следящей силы  $F$  приводит к формированию матрицы  $A_*$  с переменной топологией (элемент  $A$ ).

#### 4.5.6. УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ ОТ НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИЛ

Рассмотрим динамические модели устойчивости упругих систем. Решение задачи Коши поперечных колебаний прямолинейного стержня с учетом продольной силы  $F_x$  представлено уравнением (4.12).

Классическим примером является консольный стержень с равномерно распределенной массой  $m$  и следящей силой на конце (рис. 4.7, а) – задача М. Бекка [69]. Частотное уравнение МГЭ этой задачи примет вид

	1	2	3	4			
1	-1		-A <sub>13</sub>	-A <sub>14</sub>	$EIV(o) = 0$	←	$EIV(\ell)$
2		-1	-A <sub>23</sub>	-A <sub>13</sub>	$EIV\phi(o) = 0$	←	$EIV\phi(\ell)$
3			A <sub>33</sub>	A <sub>23</sub>	$M(o)$	-	$M(o) = 0$
4			A <sub>43</sub>	A <sub>33</sub>	$Q(o)$	= 0 →	$Q(o) = 0$

$$|A_*(F_x, \omega)| = A_{33}^2 - A_{23} \cdot A_{43} = 0. \quad (4.44)$$

Уравнение (4.44) после небольших преобразований совпадает с частотным уравнением М. Бекка [69, с. 122]. Это свидетельствует о том, что М. Бекк при решении своей задачи произвольно использовал общий алгоритм МГЭ для отдельного стержня. Очевидно, что корни уравнения (4.44) и частотного уравнения М. Бекка одинаковы и 2 соседние частоты сольются в одной и той же точке. М. Бекк определил только первую критическую силу  $F_1^* = 20,05EI / \ell^2$ , которая позже подтверждена экспериментально [47]. Если рассмотреть с помощью уравнения (4.44) изменение большего числа частот собственных колебаний консольного стержня, то получается весьма интересная картина. Графики  $\omega_i = f(F)$  для первых 6 частот показаны на рис. 4.12.

Первая форма равновесия (прямолинейная) устойчива до  $F_1^* = 20,05EI / \ell^2$ . При  $F_1^*$  прямолинейная форма теряет устойчивость, и малые возмущения приводят к флаттеру. Если ничего не предпринимать, то стержень быстро разрушится. При дальнейшем увеличении сжимающей силы первая форма равновесия переходит во вторую форму (криволинейную), которая устойчива до  $F_2^* = 127,811EI / \ell^2$ . Затем равновесие стержня переходит в третью форму, устойчивую до  $F_3^* = 317,91EI / \ell^2$  и т.д., как это имеет место при бифуркации с «мертвыми» силами. Такое поведение консольного стержня позволяет рекомендовать метод борьбы с флаттером. Флаттер прекратится, если перевести стержень во вторую (криволинейную) форму равновесия.

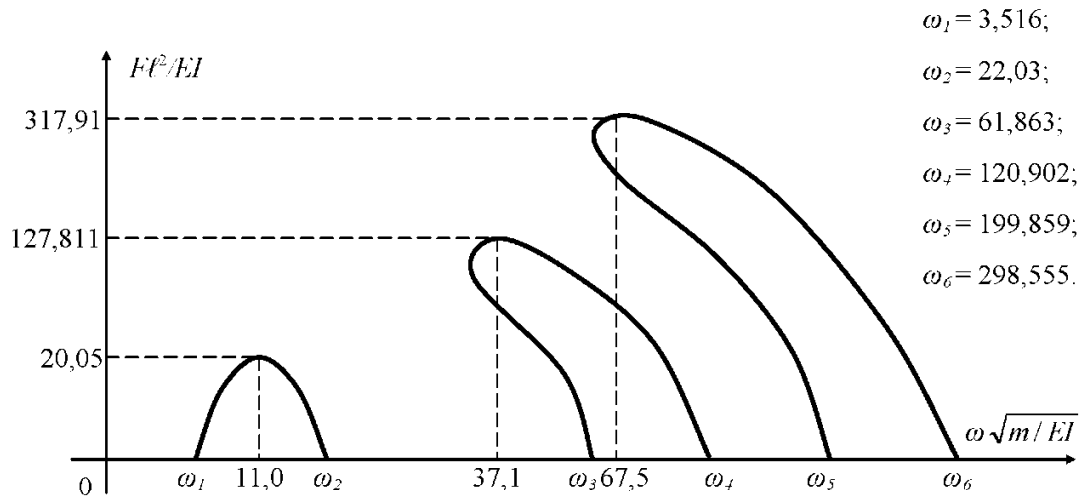


Рис. 4.12

Графики изменения частот  $\omega$  от сжимающих сил  $F_x$  позволяют наглядно проследить поведение конструкции. Если частоты стремятся слиться в одной точке, то система теряет устойчивость в форме флаттера или дивергенции, а сама задача устойчивости будет относиться к неконсервативным задачам. Если частоты монотонно стремятся к нулю, то система будет терять устойчивость по Эйлеру (появятся изгибные формы), а значения  $F$  при которых  $\omega = 0$  будут критическими.

Представим решения более сложных неконсервативных задач устойчивости различных упругих систем.

**Пример 25.** Определить критические силы консольного стержня с кусочно-постоянной жесткостью, нагруженного следящей силой (рис. 4.13).

Данная схема может служить моделью буровой вышки, когда произошла авария и поток жидкости или газа вырвался из-под контроля. Матрицы  $\mathbf{X}^*$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{A}^*$  показаны ниже. С помощью компьютера установлено, что поведение частот стержня аналогично поведению частот по рис. 4.12. При этом

$$F_1 = 4,55EI / \ell^2 \text{ при } \omega_1 = \omega_2 = 1,75\sqrt{EI/m};$$

$$F_2 = 22,95EI / \ell^2 \text{ при } \omega_3 = \omega_4 = 4,5\sqrt{EI/m}.$$

При «мертвой» силе  $F_1 = 0,7085EI / \ell^2$ ;  $F_2 = 4,545EI / \ell^2$ , т.е. неконсервативные критические силы примерно в 6 раз больше эйлеровых критических сил.



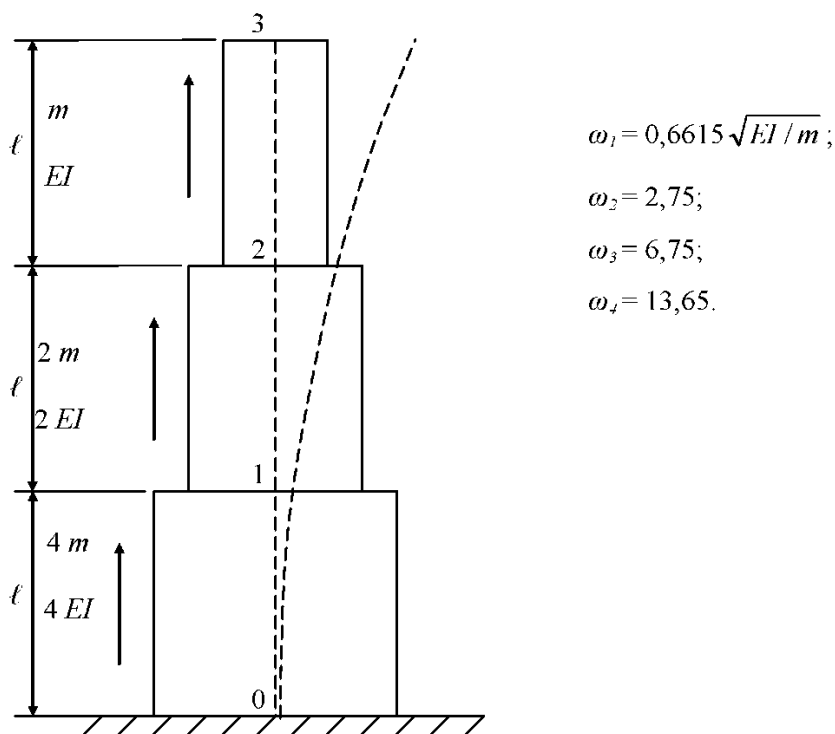


Рис. 4.13

	1	$4EIV^{0-1}(o)=0, EIV^{2-3}(\ell)$		1	$4EIV^{0-1}(\ell)=4EIV^{1-2}(o)$		
	2	$4EI\varphi^{0-1}(o)=0, EI\varphi^{2-3}(\ell)$		2	$4EI\varphi^{0-1}(\ell)=4EI\varphi^{1-2}(o)$		
	3	$M^{0-1}(o)$		3	$M^{0-1}(\ell)=M^{1-2}(o)$		
	4	$Q^{0-1}(o)$		4	$Q^{0-1}(\ell)=Q^{1-2}(o)$		
	5	$2EIV^{1-2}(o)$		5	$2EIV^{1-2}(\ell)=2EIV^{2-3}(o)$		
$X_*$	6	$2EI\varphi^{1-2}(o)$	;	$Y$	6	$2EI\varphi^{1-2}(\ell)=2EI\varphi^{2-3}(o)$	;
	7	$M^{1-2}(o)$		7	$M^{1-2}(\ell)=M^{2-3}(o)$		
	8	$Q^{1-2}(o)$		8	$Q^{1-2}(\ell)=Q^{2-3}(o)$		
	9	$EIV^{2-3}(o)$		9	$EIV^{2-3}(\ell)$		
	10	$EI\varphi^{2-3}(o)$		10	$EI\varphi^{2-3}(\ell)$		
	11	$M^{2-3}(o)$		11	$M^{2-3}(\ell)=0$		
	12	$Q^{2-3}(o)$		12	$Q^{2-3}(\ell)=0$		
		1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12					

1			$-A_{13}$	$-A_{14}$	$-2$										5
2			$-A_{23}$	$-A_{13}$		$-2$									6
3			$A_{33}$	$A_{23}$				$-1$							3
4			$A_{43}$	$A_{33}$					$-1$						4
5					$A_{11}$	$A_{12}$	$-A_{13}$	$-A_{14}$	$-2$						9
6					$A_{21}$	$A_{11}$	$-A_{23}$	$-A_{13}$		$-2$					10
7					$-A_{31}$	$-A_{21}$	$A_{33}$	$A_{23}$				$-1$			7
8					$-A_{41}$	$-A_{31}$	$A_{43}$	$A_{33}$						$-1$	8
9	$-1$									$A_{11}$	$A_{12}$	$-A_{13}$	$-A_{14}$		1
10		$-1$								$A_{21}$	$A_{11}$	$-A_{23}$	$-A_{13}$		2
11										$-A_{31}$	$-A_{21}$	$A_{33}$	$A_{23}$		11
12										$-A_{41}$	$-A_{31}$	$A_{43}$	$A_{33}$		12

Пример 26. Определить неконсервативные критические силы неразрезного стержня (рис. 4.14) при действии следящей силы  $F$ .

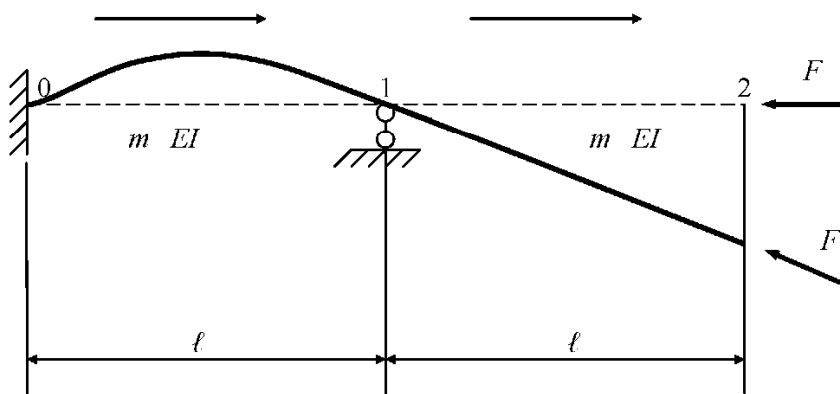


Рис. 4.14

Топологическую матрицу  $\mathbf{C}$  формируем по матрицам  $\mathbf{X}^*$ ,  $\mathbf{Y}$ , а динамическая матрица устойчивости имеет 8-й порядок. Учет следящей силы, как и у консольного стержня, производится с помощью граничных условий  $Q^{1-2}(\ell) = M^{1-2}(\ell) = 0$ .

$$1 \quad \boxed{EI V^{0-1}(0) = 0; \quad Q^{0-1}(\ell)}$$

$$1 \quad \boxed{EI V^{0-1}(\ell) = 0}$$

2	$EI\varphi^{0-1}(o)=0; EI\varphi^{1-2}(\ell)$
3	$M^{0-1}(o)$
$X^*=4$	$Q^{0-1}(o)$
5	$EIV^{1-2}(o)=0; EI\varphi^{1-2}(\ell)$
6	$EI\varphi^{1-2}(o)$
7	$M^{1-2}(o)$
8	$Q^{1-2}(o)$

;

2	$EI\varphi^{0-1}(\ell)=EI\varphi^{1-2}(o)$
3	$M^{0-1}(\ell)=M^{1-2}(o)$
$Y=4$	$Q^{0-1}(\ell)$
5	$EIV^{1-2}(\ell)$
6	$EI\varphi^{1-2}(\ell)$
7	$M^{1-2}(\ell)=0$
8	$Q^{1-2}(\ell)=0$

	1	2	3	4	5	6	7	8	
1			$-A_{13}$	$-A_{14}$					3
2			$-A_{23}$	$-A_{13}$		$-1$			4
3			$A_{33}$	$A_{23}$			$-1$		7
$A^*=4$	$-1$		$A_{43}$	$A_{33}$					1
5		$-1$				$A_{12}$	$-A_{13}$	$-A_{14}$	2
6					$-1$	$A_{11}$	$-A_{23}$	$-A_{13}$	5
7						$-A_{21}$	$A_{33}$	$A_{23}$	6
8						$-A_{31}$	$A_{43}$	$A_{33}$	8

Изменения первых 7 частот неразрезного стержня показаны на рис. 4.15.

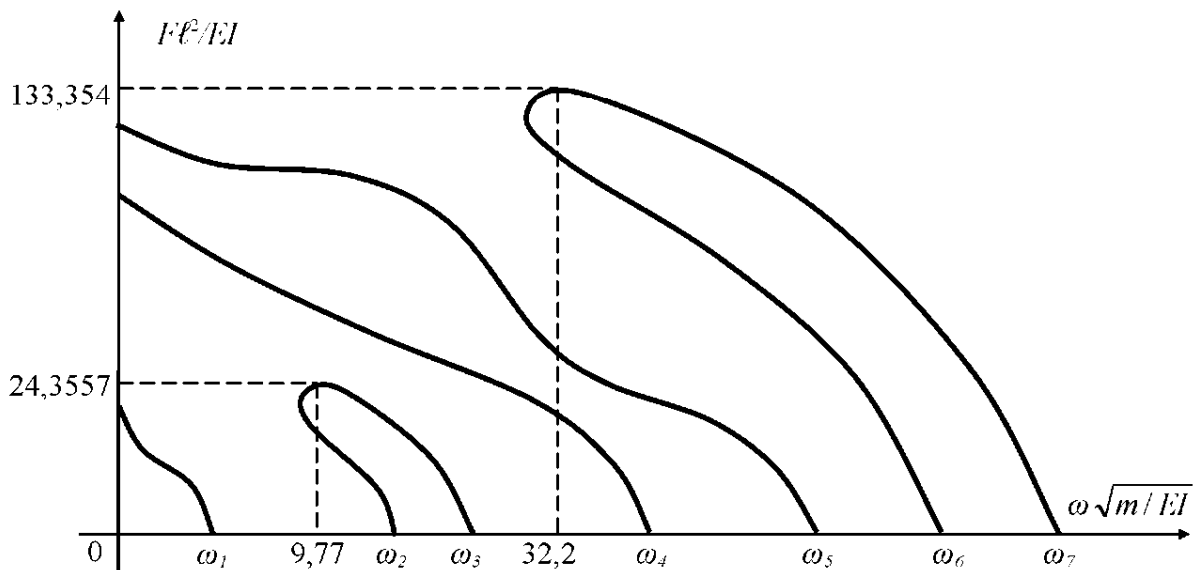


Рис. 4.15

Видно, что поведение частот уже простейшей системы качественно отлично от поведения частот консольного стержня. Первая частота  $\omega_1 = 2,465\sqrt{EI/m}$  стремится к нулю при  $F_{\text{Э1}} = 20,1905EI/\ell^2$ , где  $F_{\text{Э1}}$  – эйлерова критическая сила участка стержня 0-1. Это означает, что неразрезной стержень при росте следящей силы вначале теряет устойчивость с появлением изгибных форм. К комплексному значению собственных частот стремятся  $\omega_2 = 15,415\sqrt{EI/m}$  и  $\omega_3 = 22,205\sqrt{EI/m}$  (у отдельных комплексных частот действительные части одинаковы). Первая критическая неконсервативная сила  $F_1 = 24,3557EI/\ell^2$  приводит систему к флаттеру. Четвертая  $\omega_4 = 49,95\sqrt{EI/m}$  и пятая  $\omega_5 = 61,65\sqrt{EI/m}$  частоты стремятся к нулю (эйлеров тип потери устойчивости), а ко второй комплексной частоте стремятся  $\omega_6 = 104,25\sqrt{EI/m}$  и  $\omega_7 = 121,95\sqrt{EI/m}$ . Здесь  $F_2 = 133,354EI/\ell^2$ . Данное исследование поведения системы показывает, что действие неконсервативных следящих сил приводит к взаимному наложению спектров эйлеровых и неконсервативных критических сил, т.е. поведение упругой системы существенно сложнее случаев, когда действуют консервативные силы. Более того, действие неконсервативных сил может приводить к потере устойчивости при значительно меньших критических силах, равных или меньших эйлеровым критическим силам.

Отметим еще одну особенность поведения неразрезного стержня. В данной расчетной схеме стержень 1-2 является моделью консольного стержня с нежесткой заделкой ( $\varphi^{1,2}(0) \neq 0$ ). У такого стержня флаттер наступает при большей критической силе, чем у консольного стержня с жесткой заделкой ( $F_{1*} = 24,355EI/\ell^2$  и  $F_1 = 20,05EI/\ell^2$ . В условиях неучета сдвига и инерции вращения эти силы несколько меньше действительных критических сил). При «мертвой» силе картина противоположная ( $F_{1*} = 1,55EI/\ell^2$  и  $F_1 = 2,467EI/\ell^2$ ).

**Пример 27.** Исследовать поведение частот собственных колебаний свободной рамы (рис. 4.16), нагруженной следящей силой в узле 1.

1. Разбиваем раму на 4 стержня, нумеруем узлы и указываем стрелками начало и конец каждого стержня.

2. Формируем динамическую матрицу устойчивости  $A_*$  рамы. Матрицы  $X_*$ ,  $Y$  с уравнениями равновесия и совместности перемещений узлов 1, 2 представлены ниже. Используем блоки уравнений (4.12), (3.10) с добавлением нормальных сил. В данной раме имеются линейно подвижные стержни 0-1 и 1-2. При колебаниях рамы массы этих стержней вызывают силы инерции. Учет таких сил инерции выполняем по формуле (3.15). К началу стержня 1-3 прикладываем сосредоточенную массу  $1,5 m \ell$ , а к концу стержня 4-2 –  $0,5 m \ell$ . Тогда по формуле (3.15) при  $V(x) = \sin(\pi x / 2\ell)$  будем иметь  $m_*^{1-3} = 4m$  и  $m_*^{4-2} = 2m$ . Уравнения, учитывающие эф-

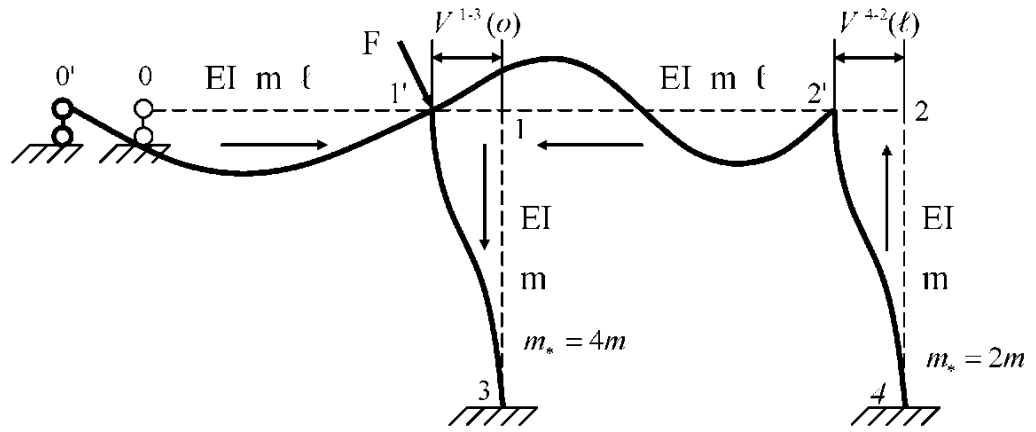


Рис. 4.16

1	$EIV^{0-1}(o)=0; M^{2-1}(l)$	1	$EIV^{0-1}(l)=0$
2	$EI\varphi^{0-1}(o)$	2	$EI\varphi^{0-1}(l)=EI\varphi^{1-3}(o)$
3	$M^{0-1}(o)=0; Q^{2-1}(l)$	3	$M^{0-1}(l)=M^{1-3}(o)-M^{2-1}(l)$
4	$Q^{0-1}(o)$	4	$Q^{0-1}(l)=N^{1-3}(o)+Q^{2-1}(l)$
5	$N^{0-1}(o)=0; N^{2-1}(l)$	5	$N^{0-1}(l)=-Q^{1-3}(o)+N^{2-1}(l)$
6	$EIV^{1-2}(o)=0; M^{1-3}(l)$	6	$EIV^{2-1}(l)=0$
7	$EI\varphi^{2-1}(o)$	7	$EI\varphi^{2-1}(l)=EI\varphi^{1-3}(o)$
8	$M^{2-1}(o)$	8	$M^{2-1}(l)$
9	$Q^{2-1}(o)$	9	$Q^{2-1}(l)$
10	$N^{2-1}(o)$	10	$N^{2-1}(l)$
11	$EIV^{4-2}(o)=0; Q^{1-3}(l)$	11	$EIV^{4-2}(l)=-EIV^{1-3}(o)$
12	$EI\varphi^{4-2}(o)=0; N^{1-3}(l)$	12	$EI\varphi^{4-2}(l)=EI\varphi^{2-1}(o)$
13	$M^{4-2}(o)$	13	$M^{4-2}(l)=M^{2-1}(o)$
14	$Q^{4-2}(o)$	14	$Q^{4-2}(l)=-N^{2-1}(o)$
15	$N^{4-2}(o)$	15	$N^{4-2}(l)=Q^{2-1}(o)$
16	$EIV^{1-3}(o)$	16	$EIV^{1-3}(l)=0$
17	$EI\varphi^{1-3}(o)$	17	$EI\varphi^{1-3}(l)=0$
18	$M^{1-3}(o)$	18	$M^{1-3}(l)$
19	$Q^{1-3}(o)$	19	$Q^{1-3}(l)$
20	$N^{1-3}(o)$	20	$N^{1-3}(l)$



Эти уравнения порождают компенсирующие элементы,  $A(3,18)=-1$ ;  $A(3,1)=1$ ;  $A(5,19)=1$ ;  $A(5,5)=-1$ , которыми и обеспечивается учет следящей силы. Координаты таких элементов не являются строго определенными. При другом ориентированном графе расчетной схемы и другом порядке начальных блоков матрицы  $X^*$  положение компенсирующих элементов в матрице  $A^*$  изменится. В целом все компенсирующие элементы обеспечивают связь кинематических и статических граничных параметров стержней рамы при действии следующей силы. В расчетах изменения частот принято  $EI = m = \ell = 1$ , так что аргументы фундаментальных функций запишутся так

стержень 1-3

$$\alpha = \sqrt{-F/2 + \sqrt{F^2/4 + 4\omega^2}}; \quad \beta = \sqrt{F/2 + \sqrt{F^2/4 + 4\omega^2}};$$

стержни 0-1, 2-1, 4-2

$$\lambda^{0-1} = \lambda^{2-1} = \sqrt{\omega}; \quad \lambda^{4-2} = \sqrt[3]{2\omega^2}.$$

Поведение частот рамы изображено на рис. 4.17. Критическая сила  $F_1 = 121,78EI/\ell^2$  в 8 раз больше критической силы при «мертвой» силе ( $F_{\text{Э}1} = 15,1EI/\ell^2$ , см. § 4.4;  $F_1/F_{\text{Э}1} = 8,065$ ).

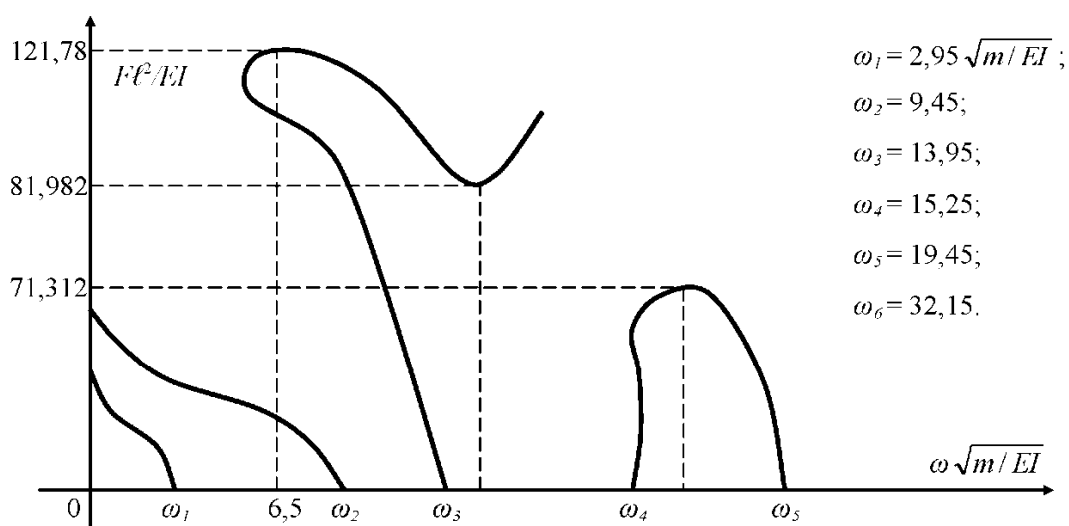


Рис. 4.17

В данной раме стержень 1-3 отличается от консольного стержня присоединенными массами и упругими связями других стержней. Поэтому отношение  $F_1/F_{\text{Э}1}$  у рамы и консольного стержня должно быть одинаковым. Для консольного стержня с распределенной массой  $F_1/F_{\text{Э}1} = 20,05/2,467 = 8,127$ , что практически совпадает с аналогичным отношением для рамы. Это свидетельствует как о достоверности результатов МГЭ, так и о точности определения эквивалентных масс по формуле (3.15).

Из рис. 4.17 видно, что при  $F_c [71,312; 81,982] EI / \ell^2$  возникает скрытая потеря устойчивости. Стоит только системе при данной силе каким-то образом проскочить 3-ью форму колебаний, как она сорвется во флаттер (в этом интервале имеются точки слияния  $\omega_4$  и  $\omega_5$ ), т.е. в упругой системе существуют условия внезапного возникновения флаттера.

В заключение данного параграфа представим решения неконсервативных задач М. Бекка, В.И. Реута для консольного стержня на упругом основании. Применяя граничные условия (4.18), (4.19) к уравнению (4.24), получим частотные уравнения задачи М. Бекка

$$A_{33}A_{44} - A_{23}A_{43} + (2t/EI)(-A_{23}^2 + A_{13}A_{33}) = 0;$$

$$A_{33}A_{44} - A_{23}A_{43} = 0.$$

Поиск критических сил приводит к следующим результатам:  
граничные условия (4.18)

$$F_1 = 20,16EI / \ell^2 \quad \text{при} \quad \omega = 7,83\sqrt{EI/m};$$

граничные условия (4.19)

$$F_1 = 20,25EI / \ell^2 \quad \text{при} \quad \omega = 7,85\sqrt{EI/m}.$$

Граничные условия задачи В.И. Реута для стержня на упругом основании

$$M(\ell) = F_x V(\ell); \quad Q_x(\ell) = (F_x + 2t)\varphi(\ell)$$

приводят к следующему уравнению для критических сил

$$A_{33}A_{44} - A_{23}A_{43} + (F_x + 2t)(-A_{23}^2 + A_{13}A_{33})/EI - (F_x + 2t) \times \\ \times (-A_{13}A_{44} + A_{14}A_{43})/EI + (A_{13}^2 - A_{14}A_{23})(F_x + 2t)/EI]^2 = 0.$$

При единичных исходных данных ( $\sigma = h = \gamma = H = EI = E_0 = \ell = m = m_0 = 1; \mu = 0,3; \mu_0 = 0,3$ ) коэффициенты  $r^2, S^4, t$  примут значения  $r^2 = 0,5F_x - 0,0566; S^4 = 1,1193 - 2\omega^2; t = 0,0566$ . Критическая сила задачи В.И. Реута  $F_1 = 20,25EI / \ell^2$  при  $\omega = 7,85\sqrt{EI/m}$ . В этих результатах незначительное влияние упругого основания объясняется малым значением коэффициента  $t$  при единичных исходных данных.

#### 4.5.7. НЕКОНСЕРВАТИВНЫЕ КОМБИНИРОВАННЫЕ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ

Под комбинированными будем понимать задачи устойчивости, когда в одной конструкции имеется сочетание разных вариантов поведения сжимающих сил. В качестве примера рассмотрим определение критических сил свободной рамы при сочетании следящей силы с разными вариантами поведения сжимающих сил.



**Пример 28.** Пусть в узле 1 рамы (рис. 4.18) приложена следящая сила, а в узле 2 – сила с фиксированной линией действия. В данном случае это будет комбинация неконсервативных задач М. Бекка и В.И. Реута. По сравнению с примером 27 изменятся уравнения равновесия узла 2. Они примут вид

$$\begin{aligned} M^{4-2}(\ell) &= M^{2-1}(o) + F[V^{4-2}(\ell) = -V^{1-3}(o)]; & Q^{4-2}(\ell) &= -N^{2-1}(o) + F[\varphi^{4-2}(\ell) = \varphi^{2-1}(o)]; \\ N^{4-2}(\ell) &= Q^{2-1}(o). \end{aligned}$$

Как результат, в динамической матрице устойчивости  $\mathbf{A}^*$  примера 27 добавляется 2 компенсирующих элемента  $A(13,16) = F/EI$  и  $A(14,7) = -F/EI$ , т.е. возникает переменная топология, как и в примере 24, но за счет 2-х элементов. Изменяя пропорционально параметр

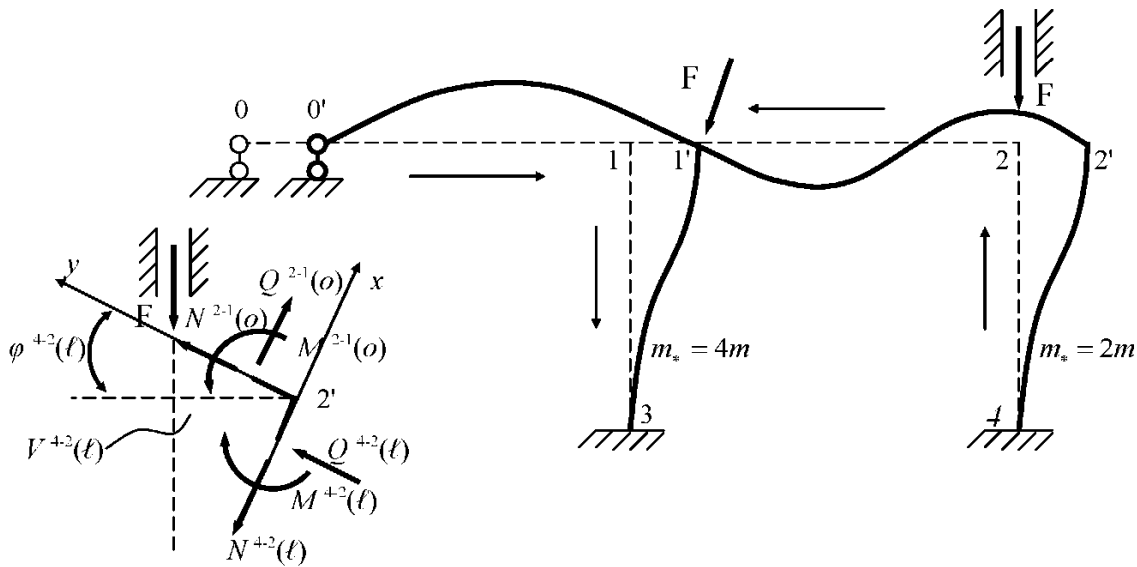


Рис. 4.18

$F$  стержней 1-3 и 4-2 (в матрице  $\mathbf{A}^*$  для стержня 4-2 необходимо использовать блок фундаментальных функций уравнения (4.12)), фиксируем изменения частот рамы. Графики  $\omega_i = f(F)$  представлены на рис. 4.19.

В данном случае рама вначале попадает во флаттер и  $F_1 = 19,162EI / \ell^2$  при  $\omega = 3,8\sqrt{EI/m}$ , затем имеет место эйлеров тип потери устойчивости, далее второй раз наступает флаттер при  $F_2 = 72,056EI / \ell^2$  и т.д. Видно, что две неконсервативные силы существенно понижают первую критическую силу ( $F_1 = 121,78EI / \ell^2$ ), примера 27, а  $F_1 = 19,162EI / \ell^2$  всего в 2,5 раза больше первой критической силы при мертвых силах ( $F_{\text{эл}1} = 7,66EI / \ell^2$ ;  $F_{\text{эл}2} = 27,35EI / \ell^2$ ).

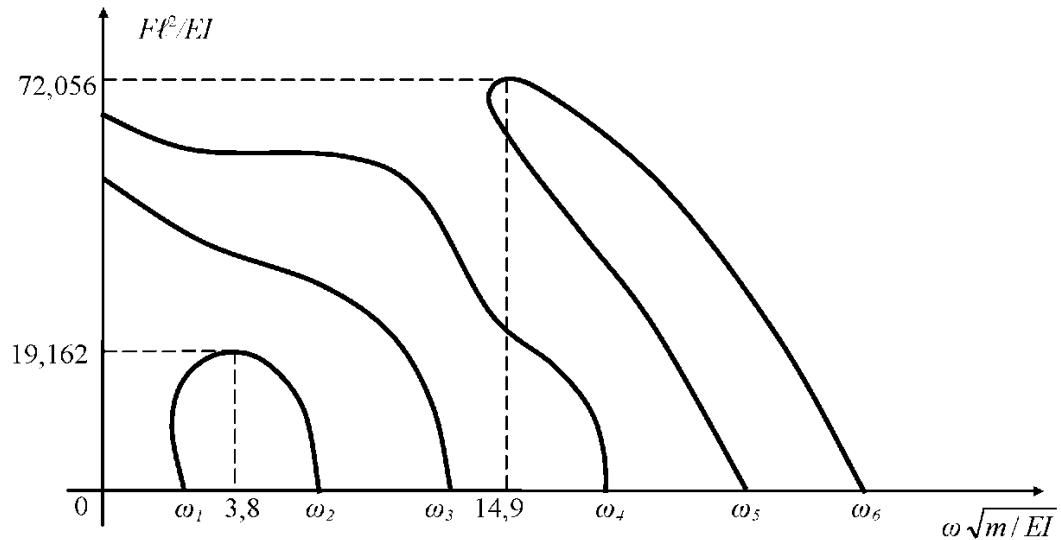


Рис. 4.19

Если в узле 2 рамы приложить силу с линией действия, проходящей через фиксированную точку, то его уравнения равновесия предстанут так

$$M^{4 \ 2}(\ell) = M^{2 \ 1}(o), \quad Q^{4 \ 2}(\ell) = -N^{2 \ 1}(o) + F[V^{4 \ 2}(\ell)/r + \varphi^{4 \ 2}(\ell)]; \quad N^{4 \ 2}(\ell) = Q^{2 \ 1}(o)$$

Тогда компенсирующие элементы  $A(13,16) = 0$ ;  $A(14,16) = F/rEI$ . Остальные ненулевые элементы матрицы  $\mathbf{A}^*$  не изменятся. Исследование поведения частот показало, что все они стремятся к нулю, каждая отдельно, т.е. имеет место только эйлеров тип потери устойчивости.

Прикладывая в узле 2 «мертвую» силу  $F$ , получим уравнения его равновесия

$$M^{4 \ 2}(\ell) = M^{2 \ 1}(o), \quad Q^{4 \ 2}(\ell) = -N^{2 \ 1}(o) + F\varphi^{4 \ 2}(\ell); \quad N^{4 \ 2}(\ell) = Q^{2 \ 1}(o).$$

По сравнению с предыдущим случаем  $A(14,16) = 0$ . В данном случае частоты собственных колебаний рамы (каждая в отдельности) стремятся к нулю. Следовательно, сочетание в упругой системе неконсервативных и консервативных сил, когда параметр  $F$  растет пропорционально, не приводит к флаттеру или дивергенции.

МГЭ могут решаться и более сложные задачи неконсервативной устойчивости, описываемые дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами. Такие задачи встречаются в авиа- и ракетостроении, когда переменными являются жесткость, масса стержня или продольная сжимающая сила. В этом случае стержень дискретизируется на отдельные части, в пределах которых считается верным дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, т.е. система с распределенными параметрами заменяется множеством систем с постоянными параметрами. Далее проводится анализ поведения частот соб-

ственных колебаний дискретизированной системы.

#### 4.5.7.1. ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ С.П. ТИМОШЕНКО

Более точные решения дифференциальных уравнений открывают новые возможности при решении различных задач, в том числе и задач устойчивости. Применительно к неконсервативным задачам устойчивости прямолинейного стержня можно отметить, что задачи М. Бекка и В.И. Реута достаточно хорошо исследованы только на основе приближенных решений (4.12). Стремление уточнить существующие результаты привело к появлению работ [101 – 103], где применялась модель С.П. Тимошенко. В этих работах исследовалась только задача М. Бекка, причем в неполной мере. В этой связи вызывает научный и практический интерес более полное и подробное решение неконсервативных задач, которые рассмотрим в комбинированной форме (рис. 4.10).

1. Одновременное действие сил  $F_1, F_2$ . Линеаризованные граничные условия этой задачи весьма просты

$$EIV(o) = EI\varphi(o) = 0; \quad M(\ell) = F_2V(\ell); \quad Q(\ell) = F_2\varphi(\ell).$$

При  $x = \ell$  и данных граничных условиях уравнение (4.38) приводится по схеме (1.38) к виду ( $B=0$ )

	1	2	3	4	
1	$-1 + a_4 A_{13} / EI$	$\epsilon_4 A_{14} / EI$	$-A_{13}$	$-A_{14}$	$EIV(\ell)$
2	$a_4 A_{23} / EI$	$-1 + \epsilon_4 A_{24} / EI$	$-A_{23}$	$-A_{24}$	$EI\varphi(\ell)$
3	$[-F_2 + a_4(A_{33} - 1)] / EI$	$\epsilon_4 A_{34} / EI$	$A_{33}$	$A_{34}$	$M(o)$
4	$a_4 A_{43} / EI$	$[-F_2 + \epsilon_4(A_{44} - 1)] / EI$	$A_{43}$	$A_{44}$	$Q(o)$

$$= 0. \quad (4.45)$$

При  $F_2 = 0$  уравнение  $[A_*(\omega, F_x)] = 0$  представляет задачу М. Бекка, при  $F_1 = 0$  - задачу В.И. Реута на основе модели С.П. Тимошенко, т.е. дополнительно учитываются сдвиг, инерция вращения и деформированное состояние стержня. Определяя методом последовательного перебора корни уравнения (3.2) и координаты точек слияния двух первых частот, можно найти критические силы различных неконсервативных задач устойчивости. Полученные результаты сведены в таблицу 16. Если в коэффициентах  $a_1 - a_4, \epsilon_1 - \epsilon_4$  выражений (4.37) не учитывать продольные силы ( $F_1 = F_2 = 0$ ), то уравнение (4.38) будет описывать модель жесткого стержня, когда максимальные прогибы лежат в пределах  $(1/100 - 1/1000)\ell$ . При больших прогибах продольные силы  $F_1, F_2$  оказывают влияние на изгибающий момент и поперечную силу. В этой связи в таблице 16 приведены критические силы по двум моделям стержня - жесткой ( $F_z$ ) и

условно гибкой ( $F_g$ ), а также при разных отношениях высоты и ширины сечения. Площадь сечения  $A = bh = 0,01 \text{ м}^2$  при этом не изменялась. Данные таблицы 16 позволяют сделать ряд интересных выводов.

Задача М. Бекка. Учет сдвига, инерции вращения и деформированного состояния стержня незначительно увеличивают критическую силу. По жесткой модели при  $\ell/h = 10$  уточнение составляет 4,69%, по гибкой – 2,59%. Изменение отношения  $h/b$  мало влияет на величину критической силы.

Задача В.И. Реута. Гибкая модель приводит к существенному снижению критической силы (в 2,12 раза) по сравнению с жесткой моделью. Таким образом, сила с фиксированной линией действия более опасна, чем следящая за углом поворота сила.

Таблица 16

Задачи устойчивости	Координаты точек слияния первых двух частот	Отношение высоты к ширине сечения $h/b$ ; $A = bh = 0,01 \text{ м}^2$					
		1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
М. Бекка $F_1 = F$ ; $F_2 = 0$	$\frac{F_g \ell^2 / EI}{\omega \ell^2 \sqrt{m / EI}}$	$\frac{20,57}{11,35}$	$\frac{20,33}{11,05}$	$\frac{20,25}{10,099}$	$\frac{20,21}{10,09}$	$\frac{20,16}{11,05}$	$\frac{20,15}{10,96}$
	$\frac{F_2 \ell^2 / EI}{\omega \ell^2 \sqrt{m / EI}}$	$\frac{20,99}{10,68}$	$\frac{20,52}{10,95}$	$\frac{20,37}{10,99}$	$\frac{20,30}{10,96}$	$\frac{20,23}{11,05}$	$\frac{20,21}{10,96}$
В.И. Реута $F_1 = 0$ ; $F_2 = F$	$\frac{F_g \ell^2 / EI}{\omega \ell^2 \sqrt{m / EI}}$	$\frac{9,12}{16,02}$	$\frac{9,31}{16,52}$	$\frac{9,38}{16,66}$	$\frac{9,42}{16,70}$	$\frac{9,42}{16,57}$	$\frac{9,44}{16,68}$
	$\frac{F_2 \ell^2 / EI}{\omega \ell^2 \sqrt{m / EI}}$	$\frac{19,34}{12,02}$	$\frac{19,72}{11,42}$	$\frac{19,85}{11,34}$	$\frac{19,91}{11,22}$	$\frac{19,92}{11,20}$	$\frac{19,95}{11,12}$
Комбинированная $F_1 = F$ ; $F_2 = F$ ; $F_g = 2F$	$\frac{F_g \ell^2 / EI}{\omega \ell^2 \sqrt{m / EI}}$	$\frac{12,62}{14,69}$	$\frac{12,76}{15,11}$	$\frac{12,81}{15,15}$	$\frac{12,83}{15,10}$	$\frac{12,83}{15,08}$	$\frac{12,84}{15,21}$

Комбинированная задача. Совместное действие сил  $F_1$  и  $F_2$  приводит к большей критической силе, чем случай действия одной силы  $F_2$ , что невозможно при консервативных сжимающих силах. В жесткой модели все частоты в отдельности стремятся к нулю, т.е. определенная комбинация неконсервативных сил может приводить к консервативным задачам.

2. Свободный стержень нагружен в граничных точках силами  $F_1$  и  $F_2$  (рис. 4.20). Краевые условия этой задачи

$$M(o) = F_2 \cdot V(o), \quad Q(o) = F_2 \phi(o), \quad M(\ell) = F_2 V(\ell), \quad Q(\ell) = F_2 \phi(\ell)$$

в преобразованиях (1.38) приводят к матрице устойчивости вида

1	2	3	4
---	---	---	---

$$\mathbf{A}_* = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A_{11} - F_2 A_{13} / EI & A_{12} - F_2 A_{14} / EI & -1 + a_4 A_{13} / EI & \epsilon_2 A_{14} / EI \\ \hline A_{21} - F_2 A_{23} / EI & A_{22} - F_2 A_{24} / EI & a_4 A_{23} / EI & -1 + \epsilon_2 A_{24} / EI \\ \hline -A_{31} + F_2 A_{33} / EI & -A_{32} + F_2 A_{34} / EI & [-F_2 + a_4 (A_{33} - 1)] / EI & \epsilon_2 A_{34} / EI \\ \hline -A_{41} + F_2 A_{43} / EI & -A_{42} + F_2 A_{44} / EI & a_4 A_{43} / EI & [-F_2 + \epsilon_2 (A_{44} - 1)] / EI \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{array} \quad (4.46)$$

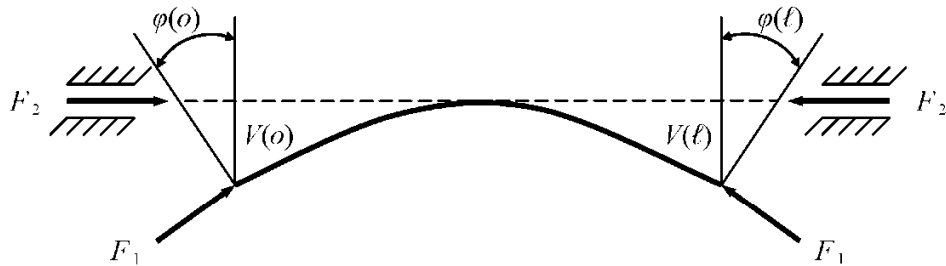


Рис. 4.20

Для исключения нулевых ведущих элементов матрицы (в жесткой модели), ее строки необходимо переставить в новом порядке, как показано цифрами справа. Критические силы данной задачи при квадратном сечении и  $\ell/h = 10$  принимают значения

$$\begin{aligned}
 F_1 &= 0; \quad F_2 = F \\
 F_g &= 1,982EI / \ell^2 \quad \text{при } \omega = 2,87\sqrt{EI/m}; \\
 F_z &= 30,88EI / \ell^2 \quad \text{при } \omega = 9,48\sqrt{EI/m},
 \end{aligned} \quad (4.47)$$

т.е. для свободного стержня отношение критических сил жесткой и гибкой моделей резко увеличивается по сравнению с консольным стержнем,

$$\begin{aligned}
 F_1 &= F_2 = F \\
 F_g &= 3,028EI / \ell^2 \quad \text{при } \omega = 2,67\sqrt{EI/m}.
 \end{aligned} \quad (4.48)$$

Остальные случаи действия сжимающих сил по рис. 4.20 проводят к консервативным задачам.

3. Консольный стержень с дискретным расположением сил  $F_1$  и  $F_2$ . Для определенности положим, что одна сила приложена в середине пролета, другая на свободном конце. Стержень дискретизируется на две части, где стрелками показаны их начало и конец, а цифрами отмечены граничные точки (рис. 4.21).

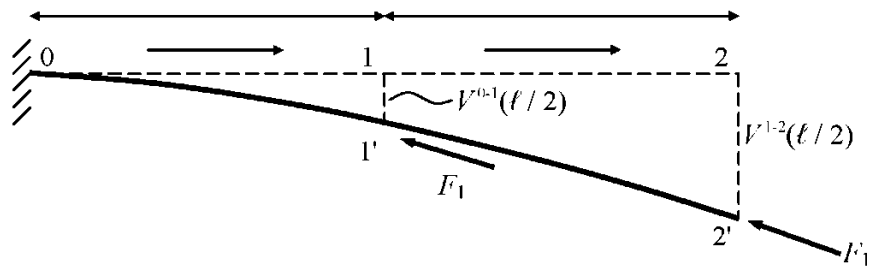


Рис. 4.21

1	$EIV^{0-1}(o)=0; EIV^{1-2}(\ell)$	1	$EI[V^{0-1}(\ell)=V^{1-2}(o)]-a_4A_{13}^{0-1}V^{1-2}(o)-e_2A_{44}^{0-1}\varphi^{1-2}(o)$
2	$EI\varphi^{0-1}(o)=0; EI\varphi^{1-2}(\ell)$	2	$EI[\varphi^{0-1}(\ell)=\varphi^{1-2}(o)]-a_4A_{23}^{0-1}V^{1-2}(o)-e_2A_{24}^{0-1}\varphi^{1-2}(o)$
3	$M^{0-1}(o)$	3	$[M^{0-1}(\ell)=M^{1-2}(o)]-a_4(A_{33}^{0-1}-1)V^{1-2}(o)-e_2A_{34}^{0-1}\varphi^{1-2}(o)$
4	$Q^{0-1}(o)$	4	$[Q^{0-1}(\ell)=Q^{1-2}(o)]-a_4A_{43}^{0-1}V^{1-2}(o)-e_2(A_{44}^{0-1}-1)\varphi^{1-2}(o)$
$X^* = 5$	$EIV^{1-2}(o)$	5	$EIV^{1-2}(\ell)-a_4A_{13}^{1-2}V^{1-2}(\ell)-e_2A_{44}^{1-2}\varphi^{1-2}(\ell)$
6	$EI\varphi^{1-2}(o)$	6	$EI\varphi^{1-2}(\ell)-a_4A_{23}^{1-2}V^{1-2}(\ell)-e_2A_{24}^{1-2}\varphi^{1-2}(\ell)$
7	$M^{1-2}(o)$	7	$[M^{1-2}(\ell)=0]-a_4(A_{33}^{1-2}-1)V^{1-2}(\ell)-e_2A_{34}^{1-2}\varphi^{1-2}(\ell)$
8	$Q^{1-2}(o)$	8	$[Q^{1-2}(\ell)=0]-a_4A_{43}^{1-2}V^{1-2}(\ell)-e_2(A_{44}^{1-2}-1)\varphi^{1-2}(\ell)$

После переноса параметров из матрицы  $Y$  в матрицу  $X^*$ , частотное уравнение задачи по рис. 4.21 примет вид, где компенсирующие элементы определяются выражениями

	1	2	3	4	5	6	7	8		
$ A^*  = 4$	1			$-A_{13}$	$-A_{14}$	$A_{15}^*$	$A_{16}^*$			5
	2			$-A_{23}$	$-A_{24}$	$A_{25}^*$	$A_{26}^*$			6
	3			$A_{33}$	$A_{34}$	$A_{35}^*$	$A_{36}^*$	$A_{37}^*$		3
	4			$A_{43}$	$A_{44}$	$A_{45}^*$	$A_{46}^*$		$A_{48}^*$	4
	5	$A_{51}^*$	$A_{52}^*$			$A_{11}$	$A_{12}$	$-A_{13}$	$-A_{14}$	1
	6	$A_{61}^*$	$A_{62}^*$			$A_{21}$	$A_{22}$	$-A_{23}$	$-A_{24}$	2
	7	$A_{71}^*$	$A_{72}^*$			$-A_{31}$	$-A_{32}$	$A_{33}$	$A_{34}$	7
	8	$A_{81}^*$	$A_{82}^*$			$-A_{41}$	$-A_{42}$	$A_{43}$	$A_{44}$	8

стержень 0-1  
= 0 . (4.49)  
стержень 1-2

стержень 0-1

$$\begin{aligned}
 A_{15}^* &= -1 + a_4 A_{13} / EI; & A_{16}^* &= e_2 A_{14} / EI; & A_{25}^* &= a_4 A_{23} / EI; \\
 A_{26}^* &= -1 + e_2 A_{24} / EI; & A_{35}^* &= a_4 (A_{33} - 1) / EI; & A_{36}^* &= e_2 A_{34} / EI; & A_{37}^* &= -1; \\
 A_{45}^* &= e_2 A_{43} / EI; & A_{46}^* &= e_2 (A_{44} - 1) / EI; & A_{48}^* &= -1;
 \end{aligned}
 \tag{4.50}$$

стержень 1-2

$$\begin{aligned} A_{51}^* &= -1 + \alpha_4 A_{13} / EI; & A_{52}^* &= \alpha_2 A_{14} / EI; & A_{61}^* &= \alpha_4 A_{23} / EI; \\ A_{62}^* &= -1 + \alpha_2 A_{24} / EI; & A_{71}^* &= \alpha_4 (A_{33} - 1) / EI; & A_{72}^* &= \alpha_2 A_{34} / EI; \\ A_{81}^* &= \alpha_4 A_{43} / EI; & A_{82}^* &= \alpha_2 (A_{44} - 1) / EI. \end{aligned} \quad (4.51)$$

3.1. Стержень сжат двумя силами  $F_1$  (рис. 4.21). Для квадратного сечения и  $\ell/h = 10$  из уравнения (4.49) следует, что

$$F_g = 13,79EI / \ell^2 \quad \text{при } \omega = 10,08\sqrt{EI/m}; \quad (4.52)$$

$$F_z = 15,02EI / \ell^2 \quad \text{при } \omega = 10,62\sqrt{EI/m}.$$

3.2. Стержень сжат двумя силами  $F_2$ . В этом случае изменятся компенсирующие элементы матрицы (4.49):

стержень 0-1

$$\begin{aligned} A_{15}^* &= -1; & A_{16}^* &= A_{25}^* = A_{36}^* = A_{45}^* = 0; & A_{26}^* &= -1; & A_{35}^* &= -F_2 / EI; \\ A_{37}^* &= -1; & A_{46}^* &= -F_2 / EI; & A_{48}^* &= -1; \end{aligned} \quad (4.53)$$

стержень 1-2

$$\begin{aligned} A_{51}^* &= -1; & A_{52}^* &= A_{61}^* = A_{72}^* = A_{81}^* = 0; & A_{62}^* &= -1; \\ A_{71}^* &= -F_2 / EI; & A_{82}^* &= -F_2 / EI. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Критические силы этой задачи будут равны

$$F_g = 6,60EI / \ell^2 \quad \text{при } \omega = 14,55\sqrt{EI/m}; \quad (4.55)$$

$$F_z = 13,11EI / \ell^2 \quad \text{при } \omega = 12,02\sqrt{EI/m}.$$

3.3. Стержень сжат в точке 1 силой  $F_1$ , в точке 2 силой  $F_2$ . Компенсирующие элементы матрицы (4.49) будут равны выражениям (4.50) для стержня 0-1 и выражениям (4.54) для стержня 1-2. Критическую силу удастся определить только для гибкой модели

$$F_g = 7,68EI / \ell^2 \quad \text{при } \omega = 14,55\sqrt{EI/m}. \quad (4.56)$$

3.4. Стержень сжат в точке 1 силой  $F_2$ , в точке 2 силой  $F_1$ . Компенсирующие элементы стержня 0-1 будут равны выражениям (4.53), а стержня 1-2 – (4.51). Критическая сила определяется только для гибкой модели

$$F_g = 10,57EI / \ell^2 \quad \text{при } \omega = 11,82\sqrt{EI/m}. \quad (4.57)$$

Для сравнения приведем критическую силу при двух мертвых силах

$$F_1 = 2,067EI / \ell^2.$$

Из представленных результатов следует, что в комбинированных задачах наблюдается снижение критических сил в различной степени по сравнению с задачами М. Бекка и В.И. Реута.

## ГЛАВА V. ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ ПРАКТИЧЕСКОГО ПРИМЕНЕНИЯ АЛГОРИТМА МГЭ В ЗАДАЧАХ СТАТИКИ, ДИНАМИКИ и устойчивости стержневых систем

Анализ алгоритма МГИУ и практика его применения приводят к следующим выводам:

1. Расчет напряженно-деформированного состояния элементов стержневых систем выполняется только в рамках локальных систем координат каждого стержня.

Данный вывод можно считать положительным, т.к. имеется возможность выбора произвольного порядка формирования главной матрицы МГЭ – вектора начальных параметров  $X$ . Это значит, что для данной стержневой системы существует множество вариантов топологической матрицы  $C$ , матриц  $A$  и  $B$ . В этой связи возникает проблема оптимального построения матриц  $X$  и  $C$ , которая сводится к проблеме рационального обхода узлов. Если в МКЭ направление обхода узлов существенно влияет на ширину ленты матрицы коэффициентов и связанную с этим трудоемкость решения задачи [71], то в МГЭ направление обхода узлов (ориентированный граф) влияет на трудоемкость расчета значительно слабее. Связано это с тем, что по МГЭ ориентированный граф незначительно изменяет лишь топологическую матрицу  $C$ , а структура матрицы  $A$  остается неизменной. Последующие операции обнуления столбцов и перестановки строк приводят матрицу  $A^*$  к матрице, мало отличающейся от верхнетреугольной. Тогда трудоемкость решения различных вариантов уравнения (2.22) будет иметь незначительные отклонения от оптимальной. В отличие от МКЭ, алгоритм МГЭ исключает операции перехода от локальных систем координат к глобальной и наоборот.

2. МГЭ не требует проведения статического и кинематического анализов стержневых систем на предмет выбора основных систем – фундаментальных понятий методов сил и перемещений. Это означает, что расчетная схема конструкции в МГЭ не подвергается изменениям и тем самым повышается достоверность результатов расчета, т.к. выбор основной системы влияет на устойчивость и точность решения.

3. Стержневая система разбивается в узлах на отдельные элементы. Как правило, узловыми точками являются точки разрыва статических и кинематических параметров стержней.

Сетки дискретизации расчетных схем по МГЭ и МКЭ совпадают, если перемещения стержней точно описываются полиномами. Если перемещения описываются гиперболическими и тригонометрическими функциями, то сетка МКЭ содержит больше стержней, чем сетка МГЭ при одинаковой точности результатов расчета.

4. МГЭ имеет больший порядок разрешающей системы уравнений, чем методы сил и перемещений, но существенно более простую логику алгоритма, чем другие методы. При фор-



мировании разрешающей системы уравнений МГЭ исключает такие операции как транспонирование, перемножение, обращение матриц, сведение заданной нагрузки к эквивалентной узловой. Матрицы МГЭ формируются на базе интегрального уравнения – решения задачи Коши, в котором по циклу меняются длина и нагрузка стержней.

Можно заключить, что МГЭ имеет максимум арифметических операций и минимум логики алгоритма, т.е. содержит все признаки машинных методов расчета, а большой порядок разрешающей системы уравнений позволяет получить более полную информацию о напряженно-деформированном состоянии системы.

5. МГЭ состоит из решения задачи Коши в матричной форме и краевой задачи для линейной системы. Краевая задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно начальных и конечных параметров всех стержней. Для решения системы уравнений МГЭ целесообразно применять метод исключения Гаусса без выбора ведущих элементов или с ограниченным выбором ведущих элементов.

6. МГЭ приводит к образованию хорошо обусловленных и сильно разреженных матриц коэффициентов  $A^*$  общего вида (не симметричных и не положительно определенных). Матрица  $A$  имеет клеточную (блочную) структуру, которая затем нарушается после операции  $A^* = A_0 + C$  и перестановки строк. Использование метода Гаусса без выбора ведущих элементов не приводит к накоплению ошибок при операциях исключения. Связано это с большой разреженностью матрицы  $A^*$ , в результате чего в каждой строке число ненулевых элементов невелико и, следовательно, мало число операций исключения.

Наличие жесткостных параметров  $EI$ ,  $EA$ ,  $GI_k$ ,  $GA$  и т.д. в матрице  $X^*$  естественным образом масштабирует матрицу  $A$ , создавая в ней набор чисел, убывающих по мере удаления от главной диагонали. Определитель матрицы  $A$  в безразмерных величинах равен единице. Вместе с системой граничных значений фундаментальных ортонормированных функций это способствует хорошей устойчивости решения системы уравнений (1.38).

7. МГЭ имеет значительные резервы экономии времени работы и памяти компьютера. Эти резервы состоят в следующем.

7.1. Ненулевые элементы матриц  $A$ ,  $B$  определяются из набора фундаментальных функций, а в матрице  $C$  – из анализа матриц  $X$ ,  $Y$ . При этих условиях в памяти ЭВМ можно хранить только ненулевые элементы матриц  $A^*$ ,  $B$ .

7.2. Не представляется целесообразным вычислять все неизвестные параметры вектора  $X^*$ . Решение системы уравнений (1.38) можно прекратить, как только будут определены все неизвестные начальные параметры стержней, т.е. обратный ход метода Гаусса может быть сокращен. Для упорядоченного определения всех начальных параметров конечные граничные пара-

метры можно сгруппировать в верхней части матрицы  $X^*$ , т.е. наряду с перестановкой строк можно использовать операцию перестановки столбцов.

7.3. Прямой и часть обратного хода метода Гаусса можно выполнять только под ненулевыми элементами матриц  $A^*$ ,  $B$ .

8. МГЭ позволяет учесть различные факторы реальных конструкций. Для этого необходимо рассмотреть более точное дифференциальное уравнение и аналитически решить соответствующую задачу Коши. Далее уточненное решение необходимо применить в схеме (1.38).

9. Топологическая матрица  $C$  содержит компенсирующие элементы, которые отражают геометрические особенности линейной системы в узлах. Набор ее ненулевых элементов зависит от принятого ориентированного графа и инвариантен по отношению к виду расчета (статическому, динамическому, бифуркационному).

10. МГЭ позволяет без промежуточных операций переходить от краевой задачи определения начальных параметров к вычислению напряженно-деформированного состояния во внутренних точках стержней.

11. Между МГЭ и МКЭ существует связь. Матрица жесткости КЭ может быть получена из уравнения МГЭ (2.22) при решении задач деформирования от единичных линейных и угловых перемещений.

12. МГЭ относится к точным методам определения спектров частот собственных колебаний и критических сил потери устойчивости упругих систем.

13. МГЭ исключает возможность появления фиктивных и пропуск действительных собственных значений, т.к. расчетные схемы конструкций не подвергаются изменениям и представляют собой заданные наборы стержней с бесконечными числами степеней свободы.

14. Определение спектра собственных значений упругих систем сводится к поиску корней трансцендентного уравнения  $A_*(\omega, F) = 0$ , где  $A_*$  - матрица коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений МГЭ. Корни трансцендентного уравнения (3.2) наиболее просто определяются методом последовательного перебора в сочетании с прямым ходом метода исключения Гаусса. Алгоритм МГЭ объединяет в себе преимущества МКЭ, метода перемещений (отсутствие точек разрыва 2-го рода в трансцендентном уравнении для собственных значений, возможность определения точного спектра, простота логики формирования уравнения (3.2) и т.д.) и отбрасывает их недостатки. Достигается это ценой более высокого порядка частотного уравнения по сравнению с существующими методами.

15. Учет сосредоточенных масс и сил инерции линейно подвижных стержней выполняется путем увеличения распределенных масс связанных с ними несвободных стержней по формуле (3.15).

16. Алгоритм МГЭ в наибольшей степени приспособлен для решения неконсервативных задач устойчивости упругих систем любой структуры по сравнению с существующими методами.

17. Учет неконсервативных сжимающих сил в МГЭ обеспечивается топологической матрицей  $C$ , где каждый вариант поведения сжимающей силы имеет свой набор ненулевых компенсирующих элементов.

18. Для линейных систем, нагруженных неконсервативными силами, существует спектр критических сил и криволинейные формы равновесия, как и при действии консервативных сил. В линейных системах спектры эйлеровых и неконсервативных критических сил могут накладываться друг на друга. Поэтому действие неконсервативных сжимающих сил может существенно понизить первую неконсервативную критическую силу.

19. Флаттер упругой системы можно прекратить не только наложением дополнительных связей, снижением уровня нагружения, но и переводом системы в смежную форму равновесия.

20. Упругие системы обладают возможностью внезапного перехода во флаттер. Такая возможность возникает при определенных величинах неконсервативных нагрузок, при которых начальные формы равновесия системы перестают существовать.

21. При одинаковых по величине консервативных и неконсервативных сжимающих сил флаттер не наступает и имеет место только эйлеров тип потери устойчивости.

## РАЗДЕЛ II. ПЛАСТИНЧАТЫЕ СИСТЕМЫ

Изложенные выше вопросы теории и практического применения одномерного варианта МГЭ показывают его эффективность и преимущества перед МКЭ, МКР, методами сил, перемещений, смешанным методом, методом начальных параметров и другими методами. Не попавшие в наше поле зрения другие задачи механики линейных систем (соответственно и линейные задачи электротехники, теплотехники, гидравлики, физики и т.д.) также могут решаться предложенным алгоритмом. Для этого любую задачу необходимо представить в форме решения задачи Коши (1.32) и далее применить алгоритма краевой задачи (1.38) – алгоритм одномерного варианта МГЭ.

Заметим, что форма (1.32) есть аналитическое решение линейной задачи, а схема решения краевой задачи (1.38) – численное определение начальных и, если требуется, конечных параметров. Теоретически определение граничных параметров линейной системы из уравнения (1.38) можно выполнить аналитически, но целесообразней применять численный метод исключения Гаусса, т.к. трудности аналитического решения резко увеличиваются с ростом порядка матрицы  $A^*$ . Поэтому данное сочетание задачи Коши и численного решения краевой задачи позволяют определить предложенный одномерный вариант МГЭ как численно-аналитический

метод решения дифференциальных уравнений независимо от физического содержания задачи. Если требуется решить задачу для линейной системы, состояние каждого элемента которой описывается обыкновенным дифференциальным уравнением, то всегда можно применить предложенный выше алгоритм. Если состояние элементов описывается дифференциальными уравнениями в частных производных (пластинчатые и оболочечные системы), то для применения одномерного варианта МГЭ нужны дополнительные преобразования, сводящие дифференциальные уравнения в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям. В математике, как известно, возможность понижения мерности исходной задачи существует. В механике такую процедуру выполняет вариационный метод, предложенный с разных позиций выдающимися советскими учеными академиком Л.В. Канторовичем и членом-корреспондентом АН СССР В.З. Власовым, который носит их имя.

В этой связи весьма перспективной представляется проблема объединения одномерного варианта МГЭ и вариационного метода Канторовича-Власова. Очевидно, что от этого объединения возможности МГЭ и метода Канторовича-Власова существенно увеличатся. Впервые эта проблема освещена в работах авторов настоящего пособия [58 – 65]. Изложению этого вопроса в отдельных задачах теории пластин и посвящен материал данного раздела.

## ГЛАВА VI. ДВУМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТОНКИХ ПЛАСТИН

### 6.1. ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД КАНТОРОВИЧА – ВЛАСОВА СВЕДЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ К ОДНОМЕРНЫМ

Согласно принципу возможных перемещений сумма возможных работ всех внешних и внутренних сил упругой пластины на всяком возможном бесконечно малом изменении перемещений равна нулю. Применительно к изгибу тонких прямоугольных пластин вариационное уравнение этого принципа имеет вид [92]

$$\iint q(x, y) \delta w(x, y) dx dy = \iint D \nabla^2 \nabla^2 w(x, y) \delta w(x, y) dx dy, \quad (6.1)$$

где  $q(x, y)$  - поперечная нагрузка на пластину;  $\delta w(x, y)$  - вариация поперечного (возможного) перемещения;  $D = Eh^3 / 12(1 - \mu^2)$  - цилиндрическая жесткость;  $\mu$  - коэффициент Пуассона;  $\nabla^2$  - оператор Лапласа. Разложим прогиб  $w(x, y)$  в функциональный ряд

$$w(x, y) = W_1(y)X_1(x) + W_2(y)X_2(x) + \dots + W_i(y)X_i(x) + \dots, \quad (6.2)$$

где  $X_i(x)$ ,  $i = \overline{1, \infty}$  - заданная система функций от переменной  $x$ ;  $W_i(y)$ ,  $i = \overline{1, \infty}$  - искомая система функций другой переменной  $y$ . Здесь предполагается, что прогиб  $w(x, y)$  является обобщен-

ной разделяющей функцией, как и в методе Фурье разделения переменных [36]. Усечем ряд (6.2) до одного члена и возьмем вариацию прогиба только по направлению переменной  $y$

$$\delta\omega(x, y) = X_1(x) \cdot \delta W_1(y), \quad (6.3)$$

что равносильно принятию расчетной схемы тонкой пластины, имеющей бесконечное число степеней свободы в одном направлении и одну степень свободы в другом направлении. В этом положении заложено большое преимущество метода Канторовича-Власова перед другими методами, где не рассматривается модель пластины с бесконечным числом степеней свободы хотя бы в одном направлении.

Подставляя (6.3) в (6.1), получим

$$\int_0^{\ell} \left\{ \int_0^{\ell_1} [\nabla^2 \nabla^2 \omega(x, y) - q(x, y) / D] X_1(x) dx \right\} \delta W_1(y) dy = 0, \quad (6.4)$$

откуда следует, что

$$\int_0^{\ell_1} [\nabla^2 \nabla^2 \omega(x, y) - q(x, y) / D] X_1(x) dx = 0. \quad (6.5)$$

Это уравнение определяет основную процедуру вариационного метода Канторовича-Власова, являющегося развитием более общего метода Фурье разделения переменных применительно к уравнениям теории упругости. Для сведения дифференциального уравнения в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению необходимо использовать разложение (6.2) и выполнить операции в (6.5), т.е. умножить обе части исходного дифференциального уравнения на выбранную функцию  $X_1(x)$  и проинтегрировать в пределах характерного размера пластины (для прямоугольной пластины это ее ширина). Точное решение получается, когда ряд (6.2) не ускается, а из (6.5) следует бесконечная система линейных дифференциальных уравнений и расчетная схема имеет бесконечное число степеней свободы в двух направлениях. При этом весьма удобно использовать ортогональную систему функций  $X_i(x)$ . В этом случае будут равны нулю многие побочные коэффициенты системы линейных дифференциальных уравнений (6.5) и она существенно упростится, а при шарнирном опирании вообще распадается на отдельные уравнения. В расчетной практике весьма редко используют два и более членов ряда (6.2), ограничиваясь только первым приближением. Связано это с высокой точностью полученных результатов, вследствие, как представляется, незначительного расхождения между приближенной схемой и реальным объектом. Формально это выражается в надлежащем выборе функции  $X(x)$ . Чем точнее она описывает какой-либо параметр в направлении оси  $ox$ , тем меньше погрешность результата.

Сходимость ряда (6.2) обусловлена тем, что прогиб  $\omega(x, y)$  и правая часть  $q(x, y)$  (она тоже разлагается в ряд по ортогональной системе функций  $X_i(x)$ ) во всей области, занимаемой

пластиной, удовлетворяют условиям Дирихле, т.е. имеют конечное число разрывов 1-го рода и конечное число максимумов и минимумов.

Профессор В.З. Власов показал также, что преобразования, аналогичные преобразованиям (6.5), необходимо выполнять для изгибающего момента, приведенной поперечной силе и статическим граничным условиям. При этом получаются одномерные граничные условия и статические параметры, а роль кинематических параметров выполняют функции  $W(y)$  и  $W'(y)=\theta(y)$ . Обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами (6.5) и уже обобщенные начальные параметры образуют задачу Коша для двумерного объекта, а краевая задача может быть решена одномерным вариантом МГЭ.

## 6.2. ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН

В технической теории изгиба тонких прямоугольных пластин уравнение равновесия элементарной части приводится к виду (уравнение Жермен-Лагранжа)

$$\frac{\partial^4 \omega(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega(x, y)}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D}. \quad (6.6)$$

Кинематические параметры (прогиб и углы поворота нормалей)

$$\omega(x, y); \quad \theta_x(x, y) = \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial x}; \quad \theta_y(x, y) = \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial y}. \quad (6.7)$$

Статические параметры (изгибающие, крутящие моменты и поперечные силы)

$$M_x(x, y) = -D \left[ \frac{\partial^2 \omega(x, y)}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega(x, y)}{\partial y^2} \right]; \quad (6.8)$$

$$M_y(x, y) = -D \left[ \frac{\partial^2 \omega(x, y)}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega(x, y)}{\partial x^2} \right];$$

$$H_x(x, y) = -H_y(x, y) = -D(1 - \mu) \frac{\partial^2 \omega(x, y)}{\partial x \partial y}; \quad (6.9)$$

$$V_x(x, y) = -D \left[ \frac{\partial^3 \omega(x, y)}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \omega(x, y)}{\partial x \partial y^2} \right]; \quad (6.10)$$

$$V_y(x, y) = -D \left[ \frac{\partial^3 \omega(x, y)}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \omega(x, y)}{\partial x^2 \partial y} \right].$$

Приведенные поперечные силы

$$Q_x(x, y) = -D \left[ \frac{\partial^3 \omega(x, y)}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 \omega(x, y)}{\partial x \partial y^2} \right]; \quad (6.11)$$

$$Q_y(x, y) = -D \left[ \frac{\partial^3 \omega(x, y)}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 \omega(x, y)}{\partial x^2 \partial y} \right].$$

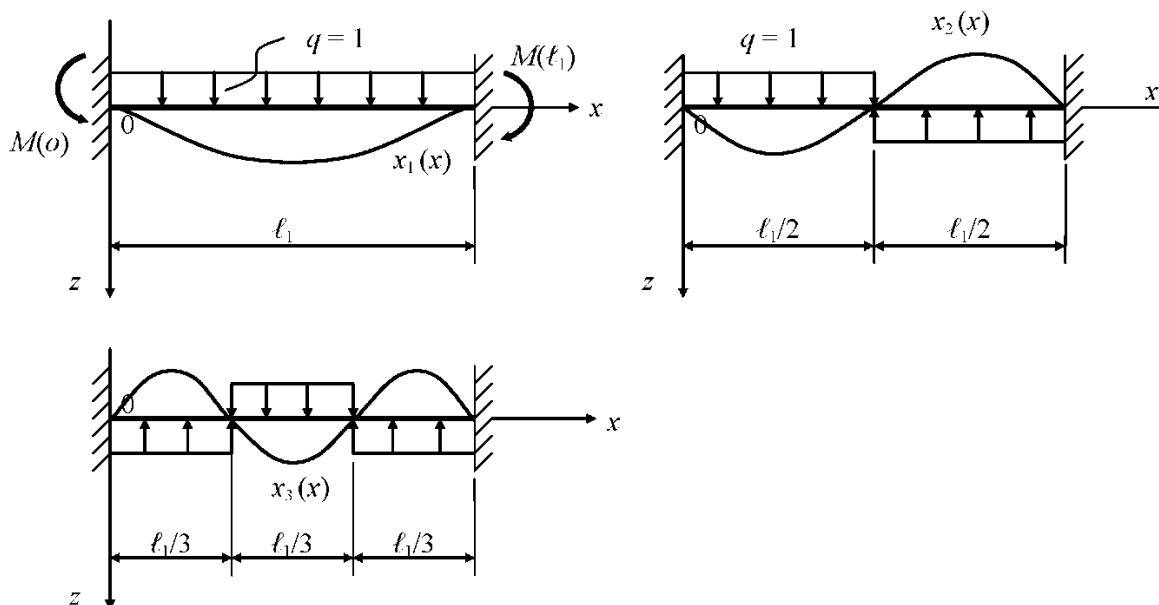
## 6.2.1. ВЫБОР ФУНКЦИИ ПОПЕРЕЧНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОГИБОВ ПЛАСТИНЫ

Заданную безразмерную систему функций  $X_i(x)$  необходимо выбрать такой, чтобы она максимально точно описывала форму изогнутой поверхности пластины в направлении оси  $ox$ . Очевидно, этому требованию удовлетворяют кривые прогиба балки, имеющей такие же условия опирания, как и пластина в направлении оси  $ox$ . Здесь рекомендуется два способа для выбора функций  $X_i(x)$  [24]:

1. Статический, когда прогиб балки определяется статической нагрузкой (рис. 6.1)

$$X_1(x) = \left( \frac{x}{\ell_1} - 2 \frac{x^3}{\ell_1^3} + \frac{x^4}{\ell_1^4} \right) + M(o) \left( 8 \frac{x}{\ell_1} - 12 \frac{x^2}{\ell_1^2} + 4 \frac{x^3}{\ell_1^3} \right) + M(\ell_1) \left( 4 \frac{x}{\ell_1} - 4 \frac{x^3}{\ell_1^3} \right);$$

$$M(o) = M(\ell_1) = -\frac{1}{12}.$$



**Рис. 6.1**

Нагрузка должна быть такой, чтобы последовательно чередовались симметричные и кососимметричные формы кривой прогиба. Функции  $X_i(x)$  представляются в виде степенных полиномов, которые легко дифференцировать, интегрировать и вычислять без применения сложных программ.

2. Динамический, когда прогибы балки представляются формами ее собственных колебаний (рис. 6.2).

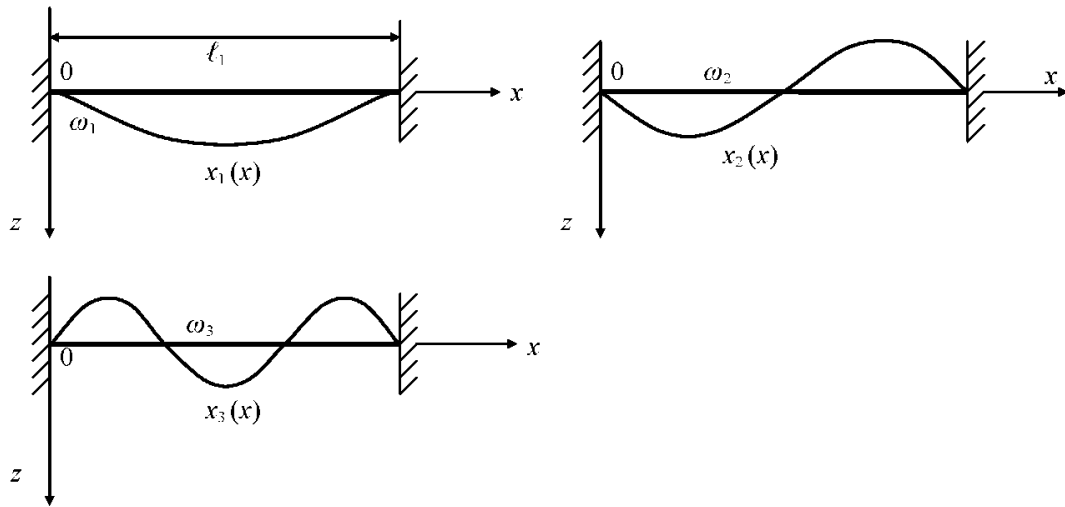


Рис. 6.2

$$X_1(x) = \sin(\omega_1 x / \ell_1) - \operatorname{sh}(\omega_1 x / \ell_1) - \alpha_* [\cos(\omega_1 x / \ell_1) - \operatorname{ch}(\omega_1 x / \ell_1)];$$

$$\alpha_* = \frac{\sin \omega_1 - \operatorname{sh} \omega_1}{\cos \omega_1 - \operatorname{ch} \omega_1}; \quad \omega_1 = 4,73004075.$$

Если в статическом способе необходимо строить функции  $X_i(x)$  в зависимости от нагрузки и реакций балки, то в динамическом способе достаточно менять только значения собственных частот, что весьма удобно. Однако, применение функций  $X_i(x)$  по этому способу возможно только с применением персональных компьютеров. Функции  $X_i(x)$  (индекс  $i$  у этих функций в дальнейшем опущен) для различных условий опирания балки представлены в таблице 8, где  $\lambda = \omega$ .

### 6.2.2. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

Прогиб точки срединной плоскости пластины представим одним членом ряда (6.2)

$$w(x, y) = W(y)X(x). \quad (6.12)$$

Подставляя (6.12) в (6.6), (6.8), (6.11), умножая обе части этих равенств на  $X(x)$  и интегрируя в пределах  $[0, \ell_1]$ , получим задачу Коши одномерной модели изгиба прямоугольной пластины

$$W''''(y) - 2r^2 W''(y) + s^4 W(y) = q(y) / D;$$

$$DW(0), \quad D\theta(0) = DW'(0), \quad M(0) = -DA[W''(0) - \mu r^2 W(0)];$$

$$Q(0) - DA[W'''(0) - (2 - \mu)r^2 W'(0)], \quad (6.13)$$



где

$$r^2 = -B/A; \quad s^4 = C/A; \quad q(y) = \int_0^{\ell_1} q(x,y)X(x)dx/A;$$

$$A = \int_0^{\ell_1} X^2(x)dx; \quad B = \int_0^{\ell_1} X''(x)X(x)dx; \quad C = \int_0^{\ell_1} X^{IV}(x)X(x)dx. \quad (6.14)$$

Кинематические и статические параметры изгиба пластины предстанут так

$$\theta_x(x,y) = W(y)X'(x); \quad \theta_y(x,y) = W'(y)X(x); \quad (6.15)$$

$$M_x(x,y) = -D[W(y)X''(x) + \mu W''(y)X(x)]; \quad M_y(x,y) = -D[W''(y)X(x) + \mu W(y)X''(x)]; \quad (6.16)$$

$$H_x(x,y) = -H_y(x,y) = -D(1-\mu)W'(y)X'(x); \quad (6.17)$$

$$V_x(x,y) = -D[W(y)X'''(x) + W''(y)X'(x)]; \quad V_y(x,y) = -D[W'''(y)X(x) + W'(y)X'''(x)]. \quad (6.18)$$

Из (6.16) и (6.18) следует, что для свободных продольных кромок пластины в направлении оси  $ox$   $M_x(0,x) \neq 0$ ;  $M_x(\ell_1,x) \neq 0$ ;  $V_x(0,y) \neq 0$ ;  $V_x(\ell_1,y) \neq 0$ , т.е. не удовлетворяются однородные статические краевые условия. Данная некорректность модели изгиба прямоугольной пластины практически не сказывается на точности расчетов [24]. В направлении оси  $oy$  краевые условия автоматически удовлетворяются искомой функцией  $W(y)$ .

Значения коэффициентов А, В, С из выражений (6.14) для функций  $X(x)$  по таблице 8 представлены в таблице 17.

**Таблица 17**

Условия опирания пластины	Коэффициент уравнения (6.13)			
	А	В	С	$\gamma_q(\omega)$
	1,03593604	-12,744725	518,5521	0,845658712
	0,998446857	-11,4946506	237,351635	0,859332803
	1,85564166	1,592594	22,94006	1,06660652
	0,5	-4,934801	48,70452	0,6366199

Интегралы вычислялись по формуле Симпсона с шагом  $h = 0,1 \cdot 10^{-3}$  в режиме двойной точности. Достоверность работы программы доказывалась аналитическим вычислением отдельных интегралов. Текст программ на языках Fortran и Pascal представлен в Приложении №1.

Решение уравнения (6.13) зависит от корней характеристического уравнения, корни которого определяются выражениями

$$K_{1,4} = \pm \sqrt{r^2 \pm \sqrt{r^4 - s^4}}. \quad (6.19)$$

Вид фундаментальных функций, как следует из (6.19), определяется соотношением между  $r$  и  $s$ , которое зависит от граничных условий на продольных краях пластины. Решение задачи Коши (6.13) можно представить по алгоритму §1,3 в матричной форме (знаки минус для случая, когда ось  $oz$  пластины направлена вниз)

$$\begin{array}{|c|} \hline DW(y) \\ \hline D\theta(y) \\ \hline M(y) \\ \hline Q(y) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A_{11} & A_{12} & -A_{13} & -A_{14} \\ \hline A_{21} & A_{22} & -A_{23} & -A_{24} \\ \hline -A_{31} & -A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ \hline -A_{41} & -A_{42} & A_{43} & A_{44} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline DW(o) \\ \hline D\theta(o) \\ \hline M(o) \\ \hline Q(o) \\ \hline \end{array} + \int_0^y \begin{array}{|c|} \hline A_{14}(y-\xi) \\ \hline A_{13}(y-\xi) \\ \hline -A_{12}(y-\xi) \\ \hline -A_{11}(y-\xi) \\ \hline \end{array} q(\xi) d\xi. \quad (6.20)$$

Положительные направления обобщенных кинематических и статических параметров одномерной модели изгиба прямоугольной пластины совпадают с положительными направлениями соответствующих параметров изгиба прямолинейного стержня, которые представлены на рис. 1.8. Положительное направление поперечной нагрузки представлено на рис. 1.6.

Таким образом, решение уравнения Жермен-Лагранжа по методу Канторовича-Власова будет заключаться в определении функции прогиба по (6.12), где функция  $X(x)$  задана, а функция  $W(y)$  определяется из (6.20) в виде

$$DW(y) = A_{11} \cdot DW(o) + A_{12} \cdot D\theta(o) - A_{13} \cdot M(o) - A_{14} \cdot Q(o) + \int_0^y A_{14}(y-\xi) q(\xi) d\xi. \quad (6.20)$$

Фундаментальные ортонормированные функции и грузовые члены для  $q(x,y)$  по (1.20) будут иметь вид:

1.  $|S| > |r|$ . Случай жесткого защемления продольных краев пластины. Корни (6.19)

комплексные

$$k_{1,4} = \pm \alpha \pm i\beta; \quad \alpha = \sqrt{(S^2 + r^2)/2}; \quad \beta = \sqrt{(S^2 - r^2)/2};$$

$$\Phi_1 = ch\alpha y \sin \beta y; \quad \Phi_2 = ch\alpha y \cos \beta y; \quad \Phi_3 = sh\alpha y \cos \beta y; \quad \Phi_4 = sh\alpha y \sin \beta y;$$

$$A_{11} = \Phi_2 + \frac{(1-\mu)r^2}{2\alpha\beta} \Phi_4; \quad A_{12} = \frac{S^2 - \mu r^2}{2\beta S^2} \Phi_1 + \frac{S^2 + \mu r^2}{2\alpha S^2} \Phi_3;$$

$$\begin{aligned}
A_{13} &= \frac{\Phi_4}{2\alpha\beta A}; & A_{14} &= \frac{\alpha\Phi_1 - \beta\Phi_3}{2\alpha\beta S^2 A}; & A_{21} &= \frac{S^2 + \mu r^2}{2\alpha}\Phi_3 - \frac{S^2 - \mu r^2}{2\beta}\Phi_1; \\
A_{22} &= \Phi_2 + \frac{(1+\mu)r^2}{2\alpha\beta}\Phi_4; & A_{23} &= \frac{\alpha\Phi_1 + \beta\Phi_3}{2\alpha\beta A}; & A_{31} &= \frac{A[\mu r^4(2-\mu) - S^4]}{2\alpha\beta}\Phi_4; \\
A_{32} &= \frac{A[-S^4 + 2(1-\mu)S^2 r^2 + \mu^2 r^4]}{2\beta S^2}\Phi_1 + \frac{A[S^4 + 2(1-\mu)S^2 r^2 - \mu^2 r^4]}{2\alpha S^2}\Phi_3; \\
A_{41} &= \frac{A[-S^4 + 2(1-\mu)S^2 r^2 + \mu^2 r^4]}{2\beta}\Phi_1 - \frac{A[S^4 + 2(1-\mu)S^2 r^2 - \mu^2 r^4]}{2\alpha}\Phi_3; & & & & (6.22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{11} &= q \left( \frac{\left\{ r^2 \Phi_4 (y-d_H)_+ + 2\alpha\beta [H(y-d_H) - \Phi_2 (y-d_H)_+] \right\} \gamma_q(\omega) \Big|_{c_H}^6}{2\alpha\beta S^4 A} - \frac{\left\{ r^2 \Phi_4 (y-d_K)_+ + 2\alpha\beta \times \right.}{2\alpha\beta S^2 A} \\
&\quad \left. \times [H(y-d_K) - \Phi_2 (y-d_K)_-] \gamma_q(\omega) \Big|_{c_K}^6 \right) + F\gamma(\omega) \frac{\alpha\Phi_1 (y-d_F)_+ - \beta\Phi_3 (y-d_F)_+}{2\alpha\beta S^2 A} + \\
&\quad + M_y \gamma_{My}(\omega) \frac{\Phi_4 (y-d_M)_-}{2\alpha\beta A} + M_x \gamma_{Mx}(\omega) \frac{\alpha\Phi_1 (y-d_M)_+ - \beta\Phi_3 (y-d_M)_+}{2\alpha\beta S^2 A}; \\
B_{21} &= q \left( \frac{\left[ \alpha\Phi_1 (y-d_H)_- - \beta\Phi_3 (y-d_H)_+ \right] \gamma_q(\omega) \Big|_{c_H}^6}{2\alpha\beta S^2 A} - \frac{\left[ \alpha\Phi_1 (y-d_K)_+ - \beta\Phi_3 (y-d_K)_+ \right] \gamma_q(\omega) \Big|_{c_K}^6}{2\alpha\beta S^2 A} \right) + \\
&\quad + F\gamma_F(\omega) \frac{\Phi_4 (y-d_F)_+}{2\alpha\beta A} + M_y \gamma_{My}(\omega) \frac{\alpha\Phi_1 (y-d_M)_+ + \beta\Phi_3 (y-d_M)_+}{2\alpha\beta A} + M_x \gamma_{Mx}(\omega) \frac{\Phi_4 (y-d_M)_+}{2\alpha\beta A};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{31} = q & \left( \frac{\left\{ 2\mu\alpha\beta r^2 [\Phi_2(y-d_{II})_- - H(y-d_{II})] + (S^4 - \mu r^4) \Phi_4(y-d_{II})_+ \right\} \gamma_q(\omega) \Big|_{C_H}^6}{2\alpha\beta S^4} - \right. \\
& \left. - \frac{\left\{ 2\mu\alpha\beta r^2 [\Phi_2(y-d_K)_- - H(y-d_K)] + (S^4 - \mu r^4) \Phi_4(y-d_K)_+ \right\} \gamma_q(\omega) \Big|_{C_K}^6}{2\alpha\beta S^4} \right) + F\gamma_F(\omega) \times \\
& \times \frac{(S^2 - \mu r^2) \alpha \Phi_1(y-d_{IV})_- + (S^2 + \mu r^2) \beta \Phi_3(y-d_{IV})_-}{2\alpha\beta S^2} + M_y \gamma_{My}(\omega) \times \\
& \times \frac{2\alpha\beta \Phi_2(y-d_M)_+ + (1-\mu)r^2 \Phi_4(y-d_M)_-}{2\alpha\beta} + M_x \gamma_{Mx}(\omega) \frac{(S^2 - \mu r^2) \alpha \Phi_1(y-d_M)_+ +}{2\alpha\beta S^2} \\
& + \frac{(S^2 + \mu r^2) \beta \Phi_3(y-d_M)_-}{2\alpha\beta S^2};
\end{aligned} \tag{6.22}$$

$$\begin{aligned}
B_{41} = q & \left( \frac{\left\{ \alpha [2\beta^2 - (1-\mu)r^2] \Phi_1(y-d_H)_1 + \beta [2\alpha^2 + (1-\mu)r^2] \Phi_3(y-d_H)_1 \right\} \gamma_q(\omega) \Big|_{C_H}^6}{2\alpha\beta S^2} - \right. \\
& \left. - \frac{\left\{ \alpha [2\beta^2 - (1-\mu)r^2] \Phi_1(y-d_K)_1 + \beta [2\alpha^2 + (1-\mu)r^2] \Phi_3(y-d_K)_1 \right\} \gamma_q(\omega) \Big|_{C_K}^6}{2\alpha\beta S^2} \right) + \\
& + F\gamma_F(\omega) \left[ \Phi_2(y-d_{IV})_+ - \frac{(1-\mu)r^2}{2\alpha\beta} \Phi_4(y-d_{IV})_- \right] + M_y \gamma_{My}(\omega) \left[ \frac{S^2 + \mu r^2}{2\alpha} \Phi_3(y-d_M)_+ - \right. \\
& \left. - \frac{S^2 - \mu r^2}{2\beta} \Phi_1(y-d_M)_+ \right] + M_x \gamma_{Mx}(\omega) \left[ \Phi_2(y-d_M)_- - \frac{(1-\mu)r^2}{2\alpha\beta} \Phi_4(y-d_M)_+ \right];
\end{aligned}$$

$$\gamma_q(\omega) = \frac{\ell_1}{\omega} \left[ -\cos \frac{\omega x}{\ell_1} - ch \frac{\omega x}{\ell_1} - \alpha_* \left( \sin \frac{\omega x}{\ell_1} - sh \frac{\omega x}{\ell_1} \right) \right];$$

$$\gamma_F(\omega) = \sin \frac{\omega C_F}{\ell_1} - sh \frac{\omega C_F}{\ell_1} - \alpha_* \left( \cos \frac{\omega C_F}{\ell_1} - ch \frac{\omega C_F}{\ell_1} \right);$$

$$\gamma_{Mx}(\omega) = \frac{\omega}{\ell_1} \left[ -\cos \frac{\omega C_M}{\ell_1} + ch \frac{\omega C_M}{\ell_1} - \alpha_* \left( \sin \frac{\omega C_M}{\ell_1} + sh \frac{\omega C_M}{\ell_1} \right) \right];$$

$$\gamma_{My}(\omega) = \sin \frac{\omega C_M}{\ell_1} - sh \frac{\omega C_M}{\ell_1} - \alpha_* \left( \cos \frac{\omega C_M}{\ell_1} - ch \frac{\omega C_M}{\ell_1} \right); \quad \nu = \ell_1.$$

2. S - r. Случай шарнирного опирания продольных кромок. Решение М. Леви. Корни (6.19) действительные и кратные

$$\kappa_{1-4} = \pm\sqrt{r^2};$$

$$\Phi_1 = ychry; \quad \Phi_2 = chry; \quad \Phi_3 = shry; \quad \Phi_4 = yshry;$$

$$A_{11} = \Phi_2 - \frac{(1-\mu)r}{2}\Phi_4; \quad A_{12} = \frac{(1-\mu)r}{2}\Phi_1 + \frac{(1+\mu)r}{2r}\Phi_3; \quad A_{13} = \frac{\Phi_4}{2rA};$$

$$A_{14} = \frac{r\Phi_1 - \Phi_3}{2r^3A}; \quad A_{21} = \frac{r(1+\mu)}{2}\Phi_3 - \frac{(1-\mu)r^2}{2}\Phi_1;$$

$$A_{22} = \Phi_2 + \frac{(1-\mu)r}{2}\Phi_4; \quad A_{23} = \frac{1}{2A}\Phi_1 + \frac{1}{2rA}\Phi_3; \quad A_{31} = -\frac{(1-\mu)^2r^3A}{2}\Phi_4; \quad (6.23)$$

$$A_{32} = A\left[(1-\mu)^2r^2\Phi_1 + (1-\mu)(3+\mu)r\Phi_3\right]/2; \quad A_{41} = A\left[(1-\mu)^2r^4\Phi_1 - (1-\mu)(3+\mu)r^3\Phi_3\right]/2;$$

$$B_{11} = q \left\{ \frac{\left[ r\Phi_4(y-d_H)_+ + 2H(y-d_H) - 2\Phi_2(y-d_H)_- \right] \gamma_q(\omega) \Big|_{C_H}^6}{2r^4A} - \frac{\left[ r\Phi_4(y-d_K)_- + 2H(y-d_K) - 2\Phi_2(y-d_K)_- \right] \gamma_q(\omega) \Big|_{C_K}^6}{2r^4A} \right\} + F\gamma_F(\omega) \frac{r\Phi_1(y-d_F)_- - \Phi_3(y-d_F)_-}{2r^3A} + M_y\gamma_{M_y}(\omega) \frac{\Phi_4(y-d_M)_-}{2rA} + M_x\gamma_{M_x}(\omega) \frac{r\Phi_1(y-d_M)_- - \Phi_3(y-d_M)_-}{2r^3A};$$

$$B_{21} = q \left\{ \frac{\left[ r\Phi_1(y-d_H)_- - \Phi_3(y-d_H)_- \right] \gamma_q(\omega) \Big|_{C_H}^6}{2r^3A} - \frac{\left[ r\Phi_1(y-d_K)_- - \Phi_3(y-d_K)_- \right] \gamma_q(\omega) \Big|_{C_K}^6}{2r^3A} \right\} + F\gamma_F(\omega) \frac{\Phi_4(y-d_F)_-}{2rA} + M_y\gamma_{M_y}(\omega) \frac{\Phi_3(y-d_M)_- + r\Phi_1(y-d_M)_-}{2rA} + M_x\gamma_{M_x}(\omega) \frac{\Phi_4(y-d_M)_-}{2rA};$$

$$\begin{aligned}
B_{31} = q & \left\{ \frac{\left[ (1-\mu)r\Phi_4(y-d_H)_1 + 2\mu\Phi_2(y-d_H)_1 - 2\mu H(y-d_H) \right] \gamma_q(\omega) \Big|_{C_H}^a}{2r^2} - \right. \\
& \left. - \frac{\left[ (1-\mu)r\Phi_4(y-d_K)_+ + 2\mu\Phi_2(y-d_K)_- - 2\mu H(y-d_K) \right] \gamma_q(\omega) \Big|_{C_K}^a}{2r^2} \right\} + \\
& + F\gamma_F(\omega) \frac{(1-\mu)r\Phi_1(y-d_F)_1 + (1+\mu)\Phi_3(y-d_F)_1}{2r} + \\
& + M_y\gamma_{My}(\omega) \frac{2r\Phi_2(y-d_M)_1 + (1-\mu)r^2\Phi_4(y-d_M)_1}{2r} + \\
& + M_x\gamma_{Mx}(\omega) \frac{(1-\mu)r\Phi_1(y-d_M)_- + (1+\mu)\Phi_3(y-d_M)_+}{2r}; \\
B_{41} = q & \left\{ \frac{\left[ (3-\mu)\Phi_3(y-d_H)_+ - (1-\mu)r\Phi_1(y-d_H)_- \right] \gamma_q(\omega) \Big|_{C_H}^a}{2r} - \right. \\
& \left. - \frac{\left[ (3-\mu)\Phi_3(y-d_K)_1 - (1-\mu)r\Phi_1(y-d_K)_1 \right] \gamma_q(\omega) \Big|_{C_K}^a}{2r} \right\} + F\gamma_F(\omega) \left[ \Phi_2(y-d_F)_1 - \right. \\
& \left. - (1-\mu)r\Phi_4(y-d_F)_1 / 2 \right] + M_y\gamma_{My}(\omega) \left[ (1+\mu)r\Phi_3(y-d_M)_1 - (1-\mu) \times \right. \\
& \left. \times r^2\Phi_1(y-d_M)_1 \right] / 2 + M_x\gamma_{Mx}(\omega) \left[ \Phi_2(y-d_M)_1 - (1-\mu)r\Phi_4(y-d_M)_1 / 2 \right]; \\
\gamma_q(\omega) & = \frac{\ell_1}{\omega} \left( -\cos \frac{\omega X}{\ell_1} \right); \quad \gamma_r(\omega) = \sin \frac{\omega C_F}{\ell_1}; \quad \gamma_{My}(\omega) = \sin \frac{\omega C_M}{\ell_1}; \quad \gamma_{Mx} = \frac{\omega}{\ell_1} \left( -\cos \frac{\omega C_M}{\ell_1} \right).
\end{aligned} \tag{6.23}$$

3.  $|S| < |r|$ . Случай свободных продольных кромок. Корни (6.19) действительные и разные

$$\begin{aligned}
\lambda_1 & = \sqrt{r^2 + \sqrt{r^4 - s^4}}; \quad \lambda_2 = \sqrt{r^2 - \sqrt{r^4 - s^4}}; \\
\Phi_1 & = sh\lambda_2 y; \quad \Phi_2 = ch\lambda_1 y; \quad \Phi_3 = sh\lambda_1 y; \quad \Phi_4 = sh\lambda_2 y; \\
A_{11} & = \frac{\lambda_1^2 \Phi_4 - \lambda_2^2 \Phi_2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}; \quad A_{12} = \frac{\lambda_1 \Phi_3 - \lambda_2 \Phi_1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}; \quad A_{13} = \frac{\Phi_2 - \Phi_4}{A(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}; \quad A_{14} = \frac{\lambda_2 \Phi_3 - \lambda_1 \Phi_1}{A\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}; \\
A_{21} & = \lambda_1 \lambda_2 \frac{\lambda_1 \Phi_1 - \lambda_2 \Phi_3}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}; \quad A_{22} = \frac{\lambda_1^2 \Phi_2 - \lambda_2^2 \Phi_4}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}; \quad A_{23} = A_{12} / A; \quad A_{31} = A(\lambda_1 \lambda_2)^2 \frac{\Phi_4 - \Phi_2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}; \\
A_{32} & = A \frac{\lambda_1^3 \Phi_3 - \lambda_2^3 \Phi_1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}; \quad A_{41} = A\lambda_1 \lambda_2 \frac{\lambda_2^3 \Phi_3 - \lambda_1^3 \Phi_1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{11} = & q \left\{ \frac{\left[ \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \Phi_2(y-d_H)_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} H(y-d_H) - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \Phi_4(y-d_H) \right] \gamma_q(\omega) \Big|_{C_H}^a}{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) A} - \right. \\
& \left. \frac{\left[ \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \Phi_2(y-d_K)_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} H(y-d_K) - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \Phi_4(y-d_K)_1 \right] \gamma_q(\omega) \Big|_{C_K}^a}{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) A} \right\} + \quad (6.24) \\
& + F \gamma_F(\omega) \frac{\lambda_2 \Phi_3(y-d_F)_1 - \lambda_1 \Phi_1(y-d_F)}{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) A} + M_y \gamma_{My}(\omega) \frac{\Phi_2(y-d_M)_1 - \Phi_4(y-d_M)_1}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) A} + \\
& + M_x \gamma_{Mx}(\omega) \frac{\lambda_2 \Phi_3(y-d_M)_- - \lambda_1 \Phi_1(y-d_M)_-}{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) A}; \\
\mathbf{B}_{21} = & q \left\{ \frac{\left[ \frac{1}{\lambda_1} \Phi_3(y-d_H)_- - \frac{1}{\lambda_2} \Phi_1(y-d_H)_+ \right] \gamma_q(\omega) \Big|_{C_H}^a}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) A} - \frac{\left[ \frac{1}{\lambda_1} \Phi_3(y-d_K)_+ - \frac{1}{\lambda_2} \Phi_1(y-d_K)_+ \right] \times}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) A} \right. \\
& \left. \times \gamma_q(\omega) \Big|_{C_K}^a \right\} + F \gamma_F(\omega) \frac{\Phi_2(y-d_F)_1 - \Phi_4(y-d_F)}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) A} + M_y \gamma_{My}(\omega) \times \\
& \times \frac{\lambda_1 \Phi_3(y-d_M)_+ - \lambda_2 \Phi_1(y-d_M)_-}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) A} + M_x \gamma_{Mx}(\omega) \frac{\Phi_2(y-d_M)_+ - \Phi_4(y-d_M)_-}{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) A}; \\
\mathbf{B}_{31} = & q \left\{ \frac{\left[ \Phi_2(y-d_H)_1 - \Phi_4(y-d_H)_1 \right] \gamma_q(\omega) \Big|_{C_H}^a}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} - \frac{\left[ \Phi_2(y-d_K)_1 - \Phi_4(y-d_K)_1 \right] \gamma_q(\omega) \Big|_{C_K}^a}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \right\} + \\
& + F \gamma_F(\omega) \frac{\lambda_1 \Phi_3(y-d_F)_1 - \lambda_2 \Phi_1(y-d_F)}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} + M_y \gamma_{My}(\omega) \frac{\lambda_1^2 \Phi_2(y-d_M)_1 - \lambda_2^2 \Phi_4(y-d_M)_1}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} + \\
& + M_x \gamma_{Mx}(\omega) \frac{\lambda_1 \Phi_3(y-d_M)_+ - \lambda_2 \Phi_1(y-d_M)_-}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}; \\
\mathbf{B}_{41} = & q \left\{ \frac{\left[ \lambda_1^3 \Phi_1(y-d_H)_- - \lambda_2^3 \Phi_3(y-d_H)_+ \right] \gamma_q(\omega) \Big|_{C_H}^a}{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} - \frac{\left[ \lambda_1^3 \Phi_1(y-d_K)_+ - \lambda_2^3 \Phi_3(y-d_K)_+ \right] \gamma_q(\omega) \Big|_{C_K}^a}{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \right\} + \\
& + F \gamma_F(\omega) \frac{\lambda_1^2 \Phi_4(y-d_F)_1 - \lambda_2^2 \Phi_2(y-d_F)}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} + M_y \gamma_{My}(\omega) \times
\end{aligned}$$

$$\times \frac{\lambda_1^2 \lambda_2 \Phi_1(y-d_M)_+ - \lambda_1 \lambda_2^2 \Phi_3(y-d_M)_+}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} + M_x \gamma_{Mx}(\omega) \frac{\lambda_1^2 \Phi_4(y-d_M)_+ - \lambda_2^2 \Phi_2(y-d_M)_-}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}.$$

4.  $S = 0$ . Стесненное кручение пластинки. Корни (6.19) действительные и кратные

$$\kappa_{1,2} = 0; \quad \kappa_{3,4} = \pm r_1; \quad r_1 = -2B/A;$$

$$\Phi_1 = shr_1 y; \quad \Phi_2 = 1; \quad \Phi_2 = y; \quad \Phi_3 = chr_1 y;$$

$$A_{11} = 1; \quad A_{12} = shr_1 y / r_1; \quad A_{13} = (chr_1 y - 1) / r_1^2 A; \quad A_{14} = (shr_1 y - r_1 y) / r_1^3 A; \quad A_{22} = chr_1 y;$$

$$A_{21} = A_{31} = A_{41} = A_{42} = A_{43} = 0; \quad A_{23} = A_{12} / A; \quad A_{32} = r_1 shr_1 y; \quad A_{44} = 1;$$

$$\begin{aligned} B_{11} = q & \left\{ \frac{\left[ chr_1(y-d_{II})_- - H(y-d_{II}) - 0,5r_1^2(y-d_{II})_+^2 \right] \gamma_q(\omega) \Big|_{C_H}^{\circ}}{r_1^4 A} - \right. \\ & \left. - \frac{\left[ chr_1(y-d_K)_- - H(y-d_K) - 0,5r_1^2(y-d_K)_+^2 \right] \gamma_q(\omega) \Big|_{C_K}^{\circ}}{r_1^4 A} \right\} + \\ & + F \gamma_F(\omega) \frac{shr_1(y-d_F)_+ - r_1(y-d_F)_+}{r_1^3 A} + M_y \gamma_{My}(\omega) \frac{chr_1(y-d_M)_- - H(y-d_M)}{r_1^2 A} + \\ & + M_x \gamma_{Mx}(\omega) \frac{shr_1(y-d_M)_- - r_1(y-d_M)_-}{r_1^3 A}; \\ B_{21} = q & \left\{ \frac{\left[ chr_1(y-d_{II})_+ - r_1(y-d_{II})_+ \right] \gamma_q(\omega) \Big|_{C_H}^{\circ}}{r_1^3 A} - \frac{\left[ shr_1(y-d_K)_+ - r_1(y-d_K)_+ \right] \gamma_q(\omega) \Big|_{C_K}^{\circ}}{r_1^3 A} \right\} + \\ & + F \gamma_F(\omega) \frac{chr_1(y-d_F)_+ - H(y-d_F)}{r_1^2 A} + M_y \gamma_{My}(\omega) \frac{shr_1(y-d_M)_+}{r_1 A} + \\ & + M_x \gamma_{Mx}(\omega) \frac{chr_1(y-d_M)_- - H(y-d_M)}{r_1^2 A}; \\ B_{31} = q & \left\{ \frac{\left[ chr_1(y-d_H)_+ - H(y-d_H) \right] \gamma_q(\omega) \Big|_{C_H}^{\circ}}{r_1^2} - \frac{\left[ chr_1(y-d_K)_+ - H(y-d_K)_- \right] \gamma_q(\omega) \Big|_{C_K}^{\circ}}{r_1^2} \right\} + \\ & + F \gamma_F(\omega) \frac{shr_1(y-d_F)_+}{r_1} + M_y \gamma_{My}(\omega) chr_1(y-d_M)_- + M_x \gamma_{Mx}(\omega) \frac{shr_1(y-d_M)_-}{r_1}; \\ B_{41} = q & \left[ \frac{\left( y-d_{II} \right)_+ \gamma_q(\omega) \Big|_{C_H}^{\circ}}{C_H} - \frac{\left( y-d_K \right)_- \gamma_q(\omega) \Big|_{C_K}^{\circ}}{C_K} \right] + F \gamma_F(\omega) H(y-d_F) + \\ & + M_y \gamma_{My}(\omega) \delta(y-d_M) + M_x \gamma_{Mx}(\omega) H(y-d_M). \end{aligned} \tag{6.25}$$



### 6.2.3. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ МЕТОДА КАНТОРОВИЧА-ВЛАСОВА

Рассмотрим случай изгиба квадратной пластины с шарнирным опиранием всех кромок. В этом случае совместная система линейных дифференциальных уравнений (6.5) распадается на отдельные уравнения и сравнительно просто можно определить несколько членов ряда (6.2). Уравнение (6.20) для данной задачи преобразуется следующим образом (при  $y = \ell = 1$ )

$$\begin{array}{cccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
 1 & & A_{12} & & -A_{14} \\
 2 & -1 & A_{22} & & -A_{13} \\
 3 & & -A_{32} & & A_{12} \\
 4 & & -A_{31} & -1 & A_{11}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 DW(0)=0 \\
 D\theta(0) \\
 M(0)=0 \\
 Q(0)
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 DW(\ell)=0 \\
 D\theta(\ell) \\
 M(\ell)=0 \\
 Q(\ell)
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 -B_{11} \\
 -B_{21} \\
 B_{31} \\
 B_{41}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 2 \\
 1 \\
 4 \\
 3
 \end{array}
 \quad (6.26)$$

Для граничных условий на продольных кромках  $X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{\ell_1}$ ,  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$  Прогиб в центре пластины представит рядом

$$D\omega(1/2, 1/2) = D[W_1(1/2) - W_3(1/2) + W_5(1/2) - W_7(1/2) + \dots]$$

Здесь четные значения  $X_n(1/2) = 0$ . Величина  $W(y)$  определяется по форме

$$DW(y) = A_{12}(y)D\theta(0) - A_{14}(y)Q(0) + B_{11}(y),$$

а начальные параметры из уравнения (6.26). Для квадратной пластины, нагруженной сосредоточенной силой в центре, получим

$$\begin{aligned}
 DW_1(1/2) &= 107,66533 \cdot 10^{-4}; & DW_3(1/2) &= -5,96245 \cdot 10^{-4}; & DW_5(1/2) &= 1,28613 \cdot 10^{-4}; \\
 DW_7(1/2) &= -0,44462 \cdot 10^{-4}; & DW_9(1/2) &= 0,22120 \cdot 10^{-4}.
 \end{aligned}
 \quad (6.27)$$

Сумма 5 членов дает значение прогиба в центре квадратной шарнирно опертой пластины ( $\mu = 0,3$ )  $D\omega(1/2, 1/2) = 115,57973 \cdot 10^{-4}$ . Видно, что величина прогиба по вариационному методу сходится к точному значению  $D\omega(1/2, 1/2) = 116,0 \cdot 10^{-4}$  [92]. Из результатов (6.27) следует также, что первый член ряда (6.2) содержит почти 93% точного значения прогиба при сосредоточенной нагрузке. Такое быстрое приближение к точному результату является особенностью метода Канторовича-Власова.

Для жесткого защемления и шарнирного опирания кромок квадратной пластины погрешности метода Канторовича-Власова при использовании одного члена ряда представлены в таблице 18. Анализ данных этой таблицы показывает, что предельно возможная погрешность для напряжений не превосходит 5-6%. Для прогибов погрешность больше только для сосредоточенных нагрузок и достигает 8,0%. Отметим, что характерной особенностью метода Канто-

ровича-Власова является наибольшее расхождение с точными результатами у квадратных пластин, а для прямоугольных пластин погрешность уменьшается [9]. Все это подтверждает вывод о том, что для нужд инженерного расчета вполне достаточно использовать только один член ряда (6.2). Погрешность метода при других комбинациях граничных условий будет находиться в пределах, представленных таблицей 18. При этом всегда соблюдается соответствие: если нагрузка кусочно-непрерывная функция, то результаты метода больше эталонных, если нагрузка сосредоточенная, то – меньше. Очевидно, это связано с тем, что один член разложения описывает кусочно-непрерывную нагрузку с избытком, а сосредоточенную – с недостатком.

К положительным элементам одномерного варианта МГЭ (простота логики формирования разрешающей системы уравнений, хорошая устойчивость численного процесса, непосредственное определение начальных параметров каждого обобщенного стержня из разрешающей системы и т.д.) добавляются существенно важные для расчета пластинчатых систем факторы. Ядра интегральных уравнений (функции Грина) в МГЭ не содержат сингулярных точек. По этой причине уравнение (6.20) снимает проблему вычисления многомерных сингулярных интегралов. Исключается и проблема построения численного решения в окрестностях угловых точек пластины, что весьма актуально в прямом методе граничных элементов [7]. Как будет показано ниже, этот момент позволяет существенно повысить точность решения задач устойчивости тонких пластин по предложенному алгоритму МГЭ. Использование обобщенных функций для описания нагрузки  $q(x, y)$  в (1.20) также приводит к неожиданным результатам. Реальной становится возможность вычисления касательных и нормальных напряжений в точках приложения сосредоточенных нагрузок. В этих точках, в частности, поперечная сила  $Q_x = 0,25F(1/\Delta x) \rightarrow \infty$  при  $\Delta x \rightarrow 0$  [3, с. 173]. Здесь можно отметить, что неопределенность в значениях сил и моментов возникает от величины  $(1/\Delta x)$ , которая при  $\Delta x \rightarrow 0$  становится дельта-функцией Дирака. Применение фильтрующего свойства дельта-функции и ее производных в интегральных соотношениях уравнения (6.20) позволяет раскрыть неопределенность в сингулярных точках пластины, а использование одного члена ряда (6.2) уменьшает точное значение пределов не более, чем на 10-15%. Характерно, что точки приложения сосредоточенных нагрузок являются значительными концентраторами напряжений. Так, согласно таблице 18, для жестко защемленной пластины отношение изгибающих моментов в середине и заделке равно:  $M_y(1/2, 1/2)/M_y(1/2, 0) = 0,456$  при равномерно распределенной нагрузке; 1,615 при сосредоточенной силе в центре пластины; 3,013 при сосредоточенном изгибающем моменте в центре пластины. Такие же отношения для жестко защемленной балки соответственно равны: 0,5; 1,0; 2,0. Скачок изгибающего момента в точке приложения сосредоточенного момента в 2,52 раза больше скачка по балочной теории, при шарнирном опирании этот скачок больше в 2,0 раза и

т.д. Подобные результаты нельзя получить, пользуясь классическими методами решения задач теории упругости (см., например, [19, 20, 72, 92] и др.), а математический аппарат МГЭ позволяет выявлять концентрации напряжений в сингулярных точках.

**Таблица 18**

Условия опирания	Нагрузка	Прогиб в центре пластины $D\omega(1/2, 1/2)$	Погрешность, %	Изгибающие моменты			
				$M_x(1/2, 0)$	погрешность, %	$M_y(1/2, 1/2)$	погрешность, %
Жесткая заделка по периметру	$q(x, y) = q$	$12,992 \cdot 10^{-4}q$	+3,1	$-5,3886 \cdot 10^{-2}q$	+5,0	$2,4561 \cdot 10^{-2}q$	+6,3
	$q(x, y) = F\delta\left(x - \frac{1}{2}\right)\delta\left(y - \frac{1}{2}\right)$	$51,521 \cdot 10^{-4}F$	-8,0	$-11,8969 \cdot 10^{-2}F$	-5,3	$19,2120 \cdot 10^{-2}F$	-
	$q(x, y) = M_x \delta^x\left(x - \frac{1}{2}\right)\delta\left(y - \frac{1}{2}\right)$	$\approx 0,0$	-	$\approx 0,0$	-	$\approx 0,0$	-
	$q(x, y) = M_y \delta^y\left(x - \frac{1}{2}\right)\delta\left(y - \frac{1}{2}\right)$	$\approx 0,0$	-	$-41,8592 \cdot 10^{-2}M_y$	-	$1,2611 M_y$ $-1,2611 M_y$	-
Шарнирное опирание по периметру	$q(x, y) = q$	$41,093 \cdot 10^{-4}q$	+1,2	0,0	-	$4,9202 \cdot 10^{-2}q$	+2,7
	$q(x, y) = F\delta\left(x - \frac{1}{2}\right)\delta\left(y - \frac{1}{2}\right)$	$107,665 \cdot 10^{-4}F$	-7,2	0,0	-	$21,7556 \cdot 10^{-2}F$	-
	$q(x, y) = M_x \delta^x\left(x - \frac{1}{2}\right)\delta\left(y - \frac{1}{2}\right)$	$\approx 0,0$	-	0,0	-	$\approx 0,0$	-
	$q(x, y) = M_y \delta^y\left(x - \frac{1}{2}\right)\delta\left(y - \frac{1}{2}\right)$	$\approx 0,0$	-	0,0	-	$1,0 M_y$ $-1,0 M_y$	-

Рассмотрим возможность дискретизации отдельной пластины на подобласти с помощью алгоритма МГЭ.

**Пример 29.** Определить прогиб в центре дискретизированной пластины (рис. 6.3), нагруженной равномерно распределенной нагрузкой.

1. Разбиваем жестко защемленную по периметру пластину на 3 подобласти. Каждая подобласть может быть представлена обобщенным стержнем, начало, и конец которого показаны стрелкой. Конечные точки обозначены цифрами. Положение обобщенного стержня в подобласти не определено и поэтому он представляет собой «плавающую» модель в пределах размера  $\ell_1$  совместно с другими обобщенными стержнями остальных подобластей.

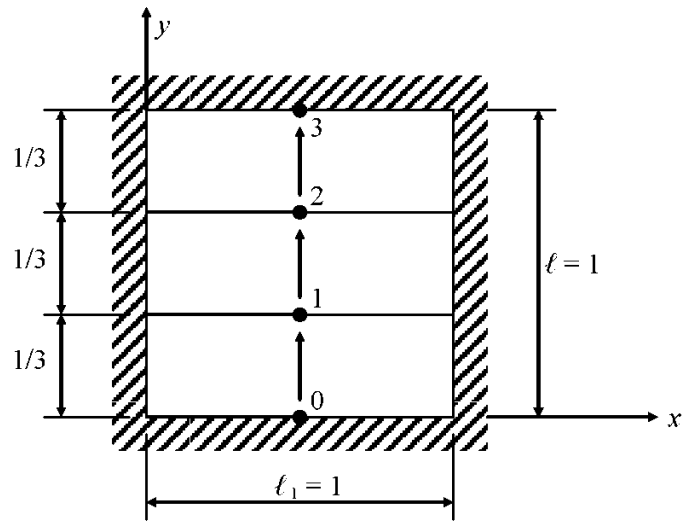


Рис. 6.3

2. Формируем уравнение МГЭ (1.32) пластины, как плоской системы 3 пластин с одинаковыми граничными условиями по торцам. На линии границ подобластей должны быть равны кинематические и статические параметры пластины

$$\begin{aligned} \omega^{0-1}(x, \ell/3) &= \omega^{1-2}(x, 0); & \theta_y^{0-1}(x, \ell/3) &= \theta_y^{1-2}(x, 0); \\ M_y^{0-1}(x, \ell/3) &= M_y^{1-2}(x, 0); & Q_y^{0-1}(x, \ell/3) &= Q_y^{1-2}(x, 0) \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

Применяя к этим равенствам процедуру метода Канторовича-Власова, получим уравнения связи между кинематическими и статическими параметрами обобщенных стержней, ко-

$\mathbf{X}^* =$	1	$DW^{0-1}(0) = 0; M^{2-3}(1/3)$	;	$\mathbf{Y} =$	1	$DW^{0-1}(1/3) = DW^{1-2}(0)$
	2	$D\theta^{0-1}(0) = 0; Q^{2-3}(1/3)$			2	$D\theta^{0-1}(1/3) = D\theta^{1-2}(0)$
	3	$M^{0-1}(0)$			3	$M^{0-1}(1/3) = M^{1-2}(0)$
	4	$Q^{0-1}(0)$			4	$Q^{0-1}(1/3) = Q^{1-2}(0)$
	5	$DW^{1-2}(0)$			5	$DW^{1-2}(1/3) = DW^{2-3}(0)$
	6	$D\theta^{1-2}(0)$			6	$D\theta^{1-2}(1/3) = D\theta^{2-3}(0)$
	7	$M^{1-2}(0)$			7	$M^{1-2}(1/3) = M^{2-3}(0)$
	8	$Q^{1-2}(0)$			8	$Q^{1-2}(1/3) = Q^{2-3}(0)$
	9	$DW^{2-3}(0)$			9	$DW^{2-3}(1/3) = 0$
	10	$D\theta^{2-3}(0)$			10	$D\theta^{2-3}(1/3) = 0$
	11	$M^{2-3}(0)$			11	$M^{2-3}(1/3)$
	12	$Q^{2-3}(0)$			12	$Q^{2-3}(1/3)$

торые чисто формально не будут отличаться от соответствующих уравнений обычных стержней. Подчеркнем, что это имеет место только в случае, когда краевые условия по торцам подобластей одинаковы. Уравнения связи между граничными параметрами помещаем в матрицу  $\mathbf{Y}$ . Значения фундаментальных функций и грузовых членов вычисляем по формулам (6.22) при  $\mu=0,3$ ;  $y=1/3$ ;  $q(x,y)=q=1$ ;  $c_H=0$ ;  $\nu=\ell_1=1$ ;  $c_K=\ell_1=1$ ;  $d_H=0$ ;  $d_K=1/3$ .

Уравнение МГЭ пластины примет вид

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		
1			-A <sub>13</sub>	-A <sub>14</sub>	-1								$M^{2-3}(1/3)$	$-B_{11}^{0-1}$ 5
2			-A <sub>23</sub>	-A <sub>13</sub>		-1							$Q^{2-3}(1/3)$	$-B_{21}^{0-1}$ 6
3			A <sub>22</sub>	A <sub>12</sub>			-1						$M^{0-1}(o)$	$B_{31}^{0-1}$ 3
4			A <sub>21</sub>	A <sub>11</sub>				-1					$Q^{0-1}(o)$	$B_{41}^{0-1}$ 4
5					A <sub>11</sub>	A <sub>12</sub>	-A <sub>13</sub>	-A <sub>14</sub>	-1				$DW^{1-2}(o)$	$-B_{11}^{1-2}$ 9
6					A <sub>21</sub>	A <sub>22</sub>	-A <sub>23</sub>	-A <sub>13</sub>		-1			$D\theta^{1-2}(o)$	$-B_{21}^{1-2}$ 10
7					-A <sub>31</sub>	-A <sub>32</sub>	A <sub>22</sub>	A <sub>12</sub>			-1		$M^{1-2}(o)$	$B_{31}^{1-2}$ 7
8					-A <sub>41</sub>	-A <sub>31</sub>	A <sub>21</sub>	A <sub>11</sub>				-1	$Q^{1-2}(o)$	$B_{41}^{1-2}$ 8
9									A <sub>11</sub>	A <sub>12</sub>	-A <sub>13</sub>	-A <sub>14</sub>	$DW^{2-3}(o)$	$-B_{11}^{2-3}$ 11
10									A <sub>21</sub>	A <sub>22</sub>	-A <sub>23</sub>	-A <sub>13</sub>	$D\theta^{2-3}(o)$	$-B_{21}^{2-3}$ 12
11	-1								-A <sub>31</sub>	-A <sub>32</sub>	A <sub>22</sub>	A <sub>12</sub>	$M^{2-3}(o)$	$B_{31}^{2-3}$ 1
12		-1							-A <sub>41</sub>	-A <sub>31</sub>	A <sub>21</sub>	A <sub>11</sub>	$Q^{2-3}(o)$	$B_{41}^{2-3}$ 2

Переставляя строки матриц  $\mathbf{A}^*$ ,  $\mathbf{B}$ , как показано цифрами справа, методом Гаусса определяем начальные обобщенные параметры всех подобластей:

$$\begin{aligned}
 M^{2-3}(1/3) &= -0,345 \cdot 10^{-1}q; & Q^{2-3}(1/3) &= -0,307q; & M^{0-1}(o) &= -0,0345q; & Q^{0-1}(o) &= 0,307q; \\
 DW^{1-2}(o) &= 6,549 \cdot 10^{-4}q; & D\theta^{1-2}(o) &= 1,73 \cdot 10^{-3}q; & M^{1-2}(o) &= 1,16 \cdot 10^{-2}q; \\
 Q^{1-2}(o) &= 0,07q; & DW^{2-3}(o) &= 6,55 \cdot 10^{-4}q; & D\theta^{2-3}(o) &= -1,73 \cdot 10^{-3}q; \\
 M^{2-3}(o) &= 1,16 \cdot 10^{-2}q; & Q^{2-3}(o) &= -0,069q.
 \end{aligned}
 \tag{6.28}$$

Начальные параметры пластины как целого модуля будут равны

$$Q^{0-1}(o) = 0,307q; \quad M^{0-1}(o) = 0,0345q,
 \tag{6.29}$$

т.е. совпадают с начальными параметрами подобласти 0-1 дискретизированной пластины. Прогиб в центре пластины по начальным параметрам из (6.28) по формулам (6.21) и (6.12) равен

$$D\omega(1/2, 1/2) = DW(1/6) \cdot X(1/2) = 1,29918 \cdot 10^{-3}q$$

и совпадет с прогибом по таблице 18. Данный пример доказывает, что каждую пластину можно дискретизировать на подобласти. В свою очередь подобласти могут выступать как независимые элементы упругой системы и иметь свои краевые условия на торцах. Это позволяет рассматривать пластину со смешанными краевыми условиями в одном направлении как плоскую систему отдельных подобластей.

### 6.3. ИЗГИБ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН

Круглые пластины как элементы различных сооружений, машин, приборов, механизмов распространены так же широко, как и прямоугольные пластины. Очевидно, что при рассмотрении изгиба круглых пластин необходимо перейти к полярной системе координат. В рамках технической теории изгиба можно использовать следующие соотношения между частными производными в декартовой и полярной системах координат [8, 26].

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial x} &= \frac{\partial \omega}{\partial \rho} \cos \varphi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \sin \varphi; & \frac{\partial \omega}{\partial y} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \cos \varphi + \frac{\partial \omega}{\partial \rho} \sin \varphi; & \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho^2} \cos^2 \varphi - \frac{2}{\rho} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho \partial \varphi} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} \frac{\sin^2 \varphi}{\rho^2}; \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial \rho} \sin \varphi + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} \cos^2 \varphi; & \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho \partial \varphi} \cos \varphi - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \sin \varphi \cos \varphi, \end{aligned} \quad (6.30)$$

а также выражение для оператора Лапласа

$$\nabla^2 \omega = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2}. \quad (6.31)$$

Дифференциальное уравнение изгиба Жермен-Лагранжа (6.6) преобразуется с помощью выражений (6.30), (6.31) к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \omega}{\partial \rho^4} + \frac{1}{\rho^4} \frac{\partial^4 \omega}{\partial \varphi^4} + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial^4 \omega}{\partial \rho^2 \partial \varphi^2} - \frac{2}{\rho^3} \frac{\partial^3 \omega}{\partial \rho^2 \partial \varphi} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial^3 \omega}{\partial \rho \partial \varphi^3} + \\ + \frac{4}{\rho^4} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^3} \frac{\partial \omega}{\partial \rho} = \frac{q(\rho, \varphi)}{D}. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Данное уравнение дополняют:

- кинематические параметры (прогибы и углы поворота)

$$\omega(\rho, \varphi); \quad \theta_\rho(\rho, \varphi) = \frac{\partial \omega}{\partial \rho}; \quad \theta_\varphi(\rho, \varphi) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi}; \quad (6.33)$$

- статические параметры
- изгибающие моменты

$$M_\rho(\rho, \varphi) = -D \left[ \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho^2} + \frac{\mu}{\rho^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial \rho} \right]; \quad (6.34)$$

$$M_\varphi(\rho, \varphi) = -D \left[ \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial \rho} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho^2} \right]; \quad (6.35)$$

— поперечные силы

$$V_\rho(\rho, \varphi) = -D \left[ \frac{\partial^3 \omega}{\partial \rho^3} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^3 \omega}{\partial \rho \partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \omega}{\partial \rho} - \frac{2}{\rho^3} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} \right]; \quad (6.36)$$

$$V_\varphi(\rho, \varphi) = -D \left[ \frac{1}{\rho^3} \frac{\partial^3 \omega}{\partial \varphi^3} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^3 \omega}{\partial \rho^2 \partial \varphi} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho \partial \varphi} \right]; \quad (6.37)$$

— крутящие моменты

$$M_{\rho\varphi}(\rho, \varphi) = -M_{\varphi\rho}(\rho, \varphi) = -(1-\mu)D \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho \partial \varphi} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} \right]; \quad (6.38)$$

— приведенные поперечные силы

$$Q_\rho(\rho, \varphi) = -D \left[ \frac{\partial^3 \omega}{\partial \rho^3} + \frac{(2-\mu)}{\rho^2} \frac{\partial^3 \omega}{\partial \rho \partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho^2} - \frac{(3-\mu)}{\rho^3} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \omega}{\partial \rho} \right]; \quad (6.39)$$

$$Q_\varphi(\rho, \varphi) = -D \left[ \frac{1}{\rho^3} \frac{\partial^3 \omega}{\partial \varphi^3} + \frac{(2-\mu)}{\rho} \frac{\partial^3 \omega}{\partial \rho^2 \partial \varphi} + \frac{2(1-\mu)}{\rho^3} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} - \frac{(1-2\mu)}{\rho^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho \partial \varphi} \right]. \quad (6.40)$$

### 6.3.1. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

Различные методы решения уравнения изгиба круглых пластин (6.32) по сути исходят из известной схемы разделения переменных по А. Клебшу, когда задаются компоненты перемещения по угловой координате и находят компоненты перемещения по радиальной координате, решая соответствующее дифференциальное уравнение [92]. Примеры и численные результаты такого подхода приводятся в справочных данных [17, 18, 26, 72, 92] и др. Если попытаться решить проблему стыковки прямоугольной и круглой пластин в рамках одномерного варианта МГЭ, то очевидно, что схема А. Клебша не работает, т.к. прямоугольные и круглые подобласти могут стыковаться между собой по радиальным линиям. Здесь будет работать принципиально новая схема разделения переменных, когда задается компонента перемещения по радиальной координате и находится компонента перемещения по угловой координате. В силу этого прогиб точки срединной плоскости круглой пластины представим разложением в ряд по ортогональной системе функций и воспользуемся только одним членом ряда

$$\omega(\rho, \varphi) = W(\varphi)X(\rho), \quad (6.41)$$

где  $X(\rho)$  - заданная функция распределения прогибов в радиальном направлении;  $W(\varphi)$  - искомая функция прогибов в направлении угловой координаты. Функция  $X(\rho)$  может быть выбрана по таблице 8 с небольшой коррекцией. Вместо координаты  $x$  необходимо подставить радиальную координату  $(\rho - a)$ , где  $a$  - расстояние от центра до внутреннего контура круглой пластины (рис. 6.4).

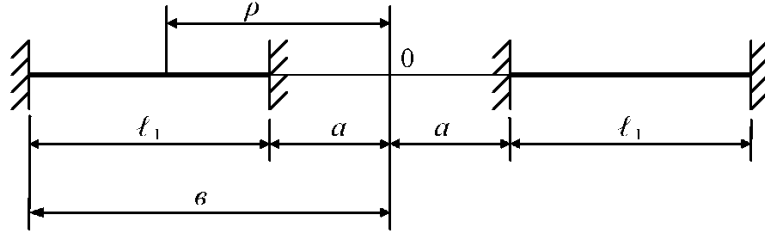


Рис. 6.4

Используя процедуру вариационного метода Канторовича-Власова, умножаем обе части уравнения (6.32) на  $\rho^4 X(\rho)$  (компонента  $\rho^4$  необходима для исключения сингулярных точек в коэффициентах обыкновенного дифференциального уравнения). Применяя операцию интегрирования в пределах радиальной длины пластины, получаем дифференциальное уравнение 4-го порядка

$$W^{IV}(\varphi) + 2r^2 W''(\varphi) + S^4 W(\varphi) = \frac{q(\varphi)}{D}. \quad (6.42)$$

Коэффициенты и правая часть имеют вид

$$r^2 = B/A; \quad S^4 = C/A; \quad q(\varphi) = \int_a^b q(\rho, \varphi) \rho^4 X(\rho) d\rho; \quad A = \int_a^b X^2(\rho) d\rho;$$

$$B = \int_a^b [\rho^2 X''(\rho) - \rho X'(\rho) + 2X(\rho)] X(\rho) d\rho;$$

$$C = \int_a^b [\rho^4 X^{IV}(\rho) + 2\rho^3 X'''(\rho) - \rho^2 X''(\rho) + \rho X'(\rho)] X(\rho) d\rho. \quad (6.43)$$

Аналогичные преобразования выполняем для изгибающего момента (6.35) и приведенной поперечной силы (6.40). Кинематические и статические параметры одномерной модели изгиба круглой пластины запишутся так

$$W(\varphi); \quad \theta(\varphi) = W'(\varphi); \quad M(\varphi) = -DA_M [W''(\varphi) + r_M^2 W(\varphi)];$$

$$Q(\varphi) = -DA_Q [W'''(\varphi) + r_Q^2 W'(\varphi)], \quad (6.44)$$

где

$$A_M = \int_a^b \rho^2 X^2(\rho) d\rho; \quad B_M = \int_a^b [\mu \rho^4 X''(\rho) + \rho^3 X'(\rho)] X(\rho) d\rho;$$

$$r_M^2 = B_M / A_M; \quad A_Q = \int_a^b \rho X^2(\rho) d\rho; \quad r_Q^2 = B_Q / A_Q;$$

$$B_Q = \int_a^b [(2-\mu)\rho^3 X''(\rho) - (1-2\mu)\rho^2 X'(\rho) + 2(1-\mu)\rho X(\rho)] X(\rho) d\rho.$$

Другие параметры изгиба круглой пластины предстанут в виде



$$\begin{aligned}
\theta_\rho(\rho, \varphi) &= W(\varphi)X'(\rho); \quad \theta_\varphi(\rho, \varphi) = \frac{1}{\rho}W'(\varphi)X(\rho); \\
M_\rho(\rho, \varphi) &= -D \left[ W(\varphi)X''(\rho) + \frac{\mu}{\rho^2}W''(\varphi)X(\rho) + \frac{\mu}{\rho}W(\varphi)X'(\rho) \right]; \\
M_\varphi(\rho, \varphi) &= -D \left[ \frac{1}{\rho^2}W''(\varphi)X(\rho) + \frac{1}{\rho}W(\varphi)X'(\rho) + \mu W(\varphi)X''(\rho) \right]; \quad (6.46) \\
V_\rho(\rho, \varphi) &= -D \left[ W(\varphi)X'''(\rho) + \frac{1}{\rho^2}W''(\varphi)X'(\rho) + \frac{1}{\rho}W(\varphi)X''(\rho) - \frac{1}{\rho^2}W(\varphi)X'(\rho) - \frac{2}{\rho^3}W''(\varphi)X(\rho) \right]; \\
V_\varphi(\rho, \varphi) &= -D \left[ \frac{1}{\rho^3}W'''(\varphi)X(\rho) + \frac{1}{\rho}W(\varphi)X''(\rho) + \frac{1}{\rho^2}W'(\varphi)X'(\rho) \right]; \\
M_{r\varphi}(\rho, \varphi) &= -M_{\varphi r}(\rho, \varphi) = -(1-\mu)D \left[ \frac{1}{\rho}W'(\varphi)X'(\rho) - \frac{1}{\rho^2}W'(\varphi)X(\rho) \right].
\end{aligned}$$

Из выражений (6.46) следует, что по сравнению с прямоугольной пластиной добавляются условия  $M_\rho(a, \varphi) \neq 0$ ;  $M_\rho(b, \varphi) \neq 0$  при шарнирном опирании, т.е. не удовлетворяются однородные краевые условия для изгибающего момента в радиальном направлении. Поскольку эти параметры не входят в исходное уравнение (6.42) и соотношения (6.44), то данный недостаток одномерной модели мало влияет на точность результатов.

Значения коэффициентов по (6.43), (6.45) для круга единичного радиуса и некоторых граничных условий приведены в таблице 19. Для вычислений интегралов применялась формула Симпсона в режиме двойной точности с шагом  $h = 1 \cdot 10^{-4}$  (текст программы приведен в Приложении №1). Достоверность результатов таблицы 19 проверялась аналитическим вычислением отдельных интегралов.

Положительные направления нагрузки, формальных кинематических и статических параметров круглой пластины соответствуют параметрам прямоугольной пластины и представлены на рис. 1.6, 1.8. Вид фундаментальных функций и грузовых членов решения уравнения (6.42) зависит от соотношения между  $r$  и  $s$  и вида корней (4.23). Из таблицы 19 следует, что для круглой пластины основным является случай  $s > r$ . Фундаментальные функции этого случая имеют вид

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= ch\alpha\varphi \cdot \sin \beta\varphi; \quad \Phi_2 = ch\alpha\varphi \cdot \cos \beta\varphi; \quad \Phi_3 = sh\alpha\varphi \cdot \cos \beta\varphi; \quad \Phi_4 = sh\alpha\varphi \cdot \sin \beta\varphi; \\
\alpha &= \sqrt{(s^2 - r^2)/2}; \quad \beta = \sqrt{(s^2 + r^2)/2}.
\end{aligned}$$

Граничные условия		Коэффициенты							
Центр пластины	Край пластины	A	B	C	B <sub>M</sub>	B <sub>Q</sub>	A <sub>M</sub>	A <sub>Q</sub>	$\gamma_q(\omega)$
Жесткое заземление	Жесткое заземление	1,0359	-0,5716	84,2774	-0,6428	-1,7129	0,2817	0,5180	0,09944
		$D\omega(1/2,0) = 38,1441 \cdot 10^{-4}q$ ; $M\rho(0,0) = -13,97 \cdot 10^{-2}q$ ; $M\rho(1/2,0) = 6,5324 \cdot 10^{-2}q$ ; $M\rho(1,0) = -10,75 \cdot 10^{-2}q$							
Жесткое заземление	Шарнирное заземление	0,9985	-2,1441	53,3291	-1,1706	-4,2579	0,3489	0,5677	0,1487
		$D\omega(1/2,0) = 70,8149 \cdot 10^{-4}q$ ; $M\rho(0,0) = -19,65 \cdot 10^{-2}q$ ; $M\rho(1/2,0) = 8,3781 \cdot 10^{-2}q$							
Жесткое заземление	Свободный край	1,8554	1,3821	9,7536	1,8899	1,6913	1,2515	1,4964	0,4217
		$D\omega(1/2,0) = 495,891 \cdot 10^{-4}q$ ; $D\omega(1,0) = 1460,552 \cdot 10^{-4}q$ ; $M\rho(0,0) = -66,7592 \cdot 10^{-2}q$ ; $M\rho(1/2,0) = -27,6278 \cdot 10^{-2}q$							
Шарнирное опирание	Шарнирное опирание	0,5	-0,1450	10,8859	-03809	-1,0098	0,1413	0,25	0,0881
		$D\omega(1/2,0) = 161,942 \cdot 10^{-4}q$ ; $M\rho(1/2,0) = 15,9831 \cdot 10^{-2}q$							

Константы интегрирования уравнения (6.42) определяются из системы уравнений при  $\varphi = 0$

	1				C <sub>1</sub>		W(o)	(6.47)
$\beta$		$\alpha$			C <sub>2</sub>		Q(o)	
	$-r^2 + r_M^2$		$2\alpha\beta$		C <sub>3</sub>	=	$-M(o)/DA_M$	
$\beta(s^2 - 2r^2 + r_Q^2)$		$\alpha(-s^2 - 2r^2 + r_Q^2)$			C <sub>4</sub>	=	$-Q(o)/DA_Q$	

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{1}{2\beta s^2} \left\{ (s^2 + 2r^2 - r_Q^2)\theta(o) + [-Q(o)/DA_Q] \right\}; \quad C_2 = W(o); \\
 C_3 &= \frac{1}{2\alpha s^2} \left\{ (s^2 - 2r^2 + r_Q^2)\theta(o) - [-Q(o)/DA_Q] \right\}; \\
 C_4 &= \frac{1}{2\alpha\beta} \left\{ (-r^2 + r_M^2)W(o) - [-M(o)/DA_M] \right\}.
 \end{aligned} \tag{6.48}$$

Подставляя константы (6.48) в выражение для обобщенного прогиба  $W(\varphi)$  и нормируя фундаментальные функции, представим решение уравнения (6.42) в матричной форме

$DW(\varphi)$		A <sub>11</sub>	A <sub>12</sub>	-A <sub>13</sub>	-A <sub>14</sub>	$DW(o)$		A <sub>14}(\varphi - \xi)</sub>	(6.49)
$D\theta(\varphi)$	=	A <sub>21</sub>	A <sub>22</sub>	-A <sub>23</sub>	-A <sub>24</sub>	$D\theta(o)$	+ $\int_0^\varphi$	A <sub>24}(\varphi - \xi)</sub>	
$M(\varphi)$		-A <sub>31</sub>	-A <sub>32</sub>	A <sub>33</sub>	A <sub>34</sub>	$M(o)$		-A <sub>34}(\varphi - \xi)</sub>	
$Q(\varphi)$		-A <sub>41</sub>	-A <sub>42</sub>	A <sub>43</sub>	A <sub>44</sub>	$Q(o)$		-A <sub>44}(\varphi - \xi)</sub>	

Если ось  $oz$  круглой пластины направлена «вверх», то знаки минус опускаются. Фундаментальные ортонормированные функции и грузовые члены примут вид

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \Phi_2 - \frac{r_M^2 - r^2}{2\alpha\beta} \Phi_4; \quad A_{12} = \frac{s^2 + 2r^2 - r_Q^2}{2\beta s^2} \Phi_1 + \frac{s^2 - 2r^2 + r_Q^2}{2\alpha s^2} \Phi_3; \\
 A_{13} &= \frac{\Phi_4}{2\alpha\beta A_M}; \quad A_{14} = \frac{\alpha\Phi_1 - \beta\Phi_3}{2\alpha\beta s^2 A_Q}; \quad A_{21} = \frac{s^2 - r_M^2}{2\alpha} \Phi_3 - \frac{s^2 + r_M^2}{2\beta} \Phi_1; \\
 A_{22} &= \Phi_2 + \frac{r^2 - r_Q^2}{2\alpha\beta} \Phi_4; \quad A_{23} = \frac{\alpha\Phi_1 + \beta\Phi_3}{2\alpha\beta A_M}; \quad A_{24} = \frac{\Phi_4}{2\alpha\beta A_Q}; \\
 A_{31} &= \frac{A_M(-s^4 + 2r^2 r_M^2 - r_M^4)}{2\alpha\beta} \Phi_4; \quad A_{33} = \Phi_2 + \frac{r_M^2 - r^2}{2\alpha\beta} \Phi_4; \\
 A_{32} &= \frac{A_M[-s^2(s^2 - r_M^2 + r_Q^2) + r_M^2(2r^2 - r_Q^2)]}{2\beta s^2} \Phi_1 + \frac{A_M[s^2(s^2 + r_M^2 - r_Q^2) - r_M^2(2r^2 - r_Q^2)]}{2\beta s^2} \Phi_3;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{34} &= \frac{A_M}{A_Q} \left( \frac{s^2 + r_M^2}{2\beta s^2} \Phi_1 + \frac{s^2 - r_M^2}{2\alpha s^2} \Phi_3 \right); \quad A_{42} = \frac{A_Q (-s^4 + 2r^2 r_Q^2 - r_Q^4)}{2\alpha\beta} \Phi_4; \\
A_{41} &= \frac{A_Q \left[ -s^2 (s^2 - r_M^2 + r_Q^2) + r_M^2 (2r^2 - r_Q^2) \right]}{2\beta} \Phi_1 - \frac{A_Q \left[ s^2 (s^2 + r_M^2 - r_Q^2) - r_M^2 (2r^2 - r_Q^2) \right]}{2\alpha} \Phi_3; \\
A_{43} &= \frac{A_Q}{A_M} \left( \frac{s^2 - 2r^2 + r_Q^2}{2\alpha} \Phi_3 - \frac{s^2 + 2r^2 - r_Q^2}{2\beta} \Phi_1 \right); \quad A_{44} = \Phi_2 + \frac{r_Q^2 - r^2}{2\alpha\beta} \Phi_4; \\
B_{11} &= q \left( \frac{\left\{ r^2 \Phi_4 (\varphi - \varphi_H)_+ + 2\alpha\beta [H(\varphi - \varphi_H) - \Phi_2 (\varphi - \varphi_H)_-] \right\} \gamma_q(\omega) \Big|_{\rho H}^6}{2\alpha\beta s^4 A_Q} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\left\{ r^2 \Phi_4 (\varphi - \varphi_K)_+ + 2\alpha\beta [H(\varphi - \varphi_K) - \Phi_2 (\varphi - \varphi_K)_-] \right\} \gamma_q(\omega) \Big|_{\rho K}^6}{2\alpha\beta s^4 A_Q} \right) + F \gamma_F(\omega) \frac{\alpha \Phi_1 (\varphi - \varphi_F)_+ -}{2\alpha\beta s^2 A_Q} \\
&\quad - \frac{\beta \Phi_3 (\varphi - \varphi_F)_+}{2\alpha\beta s^2 A_Q} + M_{\varphi} \gamma_{M\varphi}(\omega) \frac{\Phi_4 (\varphi - \varphi_M)_-}{2\alpha\beta A_Q} + M_{\rho} \gamma_{M\rho}(\omega) \frac{\alpha \Phi_1 (\varphi - \varphi_M)_+ - \beta \Phi_3 (\varphi - \varphi_M)_-}{2\alpha\beta s^2 A_Q}; \\
B_{21} &= q \left( \frac{\left[ \alpha \Phi_1 (\varphi - \varphi_H)_- - \beta \Phi_3 (\varphi - \varphi_H)_- \right] \gamma_q(\omega) \Big|_{\rho H}^6}{2\alpha\beta s^2 A_Q} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\left[ \alpha \Phi_1 (\varphi - \varphi_K)_- - \beta \Phi_3 (\varphi - \varphi_K)_- \right] \gamma_q(\omega) \Big|_{\rho K}^6}{2\alpha\beta s^2 A_Q} \right) + F \gamma_F(\omega) \frac{\Phi_4 (\varphi - \varphi_F)_-}{2\alpha\beta A_Q} + \\
&\quad + M_{\varphi} \gamma_{M\varphi}(\omega) \frac{\alpha \Phi_1 (\varphi - \varphi_M)_- + \beta \Phi_3 (\varphi - \varphi_M)_-}{2\alpha\beta A_Q} + M_{\rho} \gamma_{M\rho}(\omega) \frac{\Phi_4 (\varphi - \varphi_M)_-}{2\alpha\beta A_Q}; \\
B_{31} &= q \left( \frac{\left\{ 2\alpha\beta r_M^2 [H(\varphi - \varphi_H) - \Phi_2 (\varphi - \varphi_H)_-] + (s^4 - r_M^2 r^2) \Phi_4 (\varphi - \varphi_H)_- \right\} \gamma_q(\omega) \Big|_{\rho H}^6}{2\alpha\beta s^4} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\left\{ 2\alpha\beta r_M^2 [H(\varphi - \varphi_K) - \Phi_2 (\varphi - \varphi_K)_-] + (s^4 - r_M^2 r^2) \Phi_4 (\varphi - \varphi_K)_- \right\} \gamma_q(\omega) \Big|_{\rho K}^6}{2\alpha\beta s^4} \right) \frac{A_M}{A_Q} + \\
&\quad + F \gamma_F(\omega) \frac{A_M}{A_Q} \frac{\alpha (s^2 + r_M^2) \Phi_1 (\varphi - \varphi_F)_+ + \beta (s^2 - r_M^2) \Phi_3 (\varphi - \varphi_F)_+}{2\alpha\beta s^2} +
\end{aligned} \tag{6.50}$$

$$\begin{aligned}
& + M_{\varphi} \gamma_{M\varphi}(\omega) \frac{A_M}{A_Q} \frac{(r^2 + r_M^2) \Phi_4(\varphi - \varphi_M)_1 + 2\alpha\beta \Phi_2(\varphi - \varphi_M)_1}{2\alpha\beta} + \\
& + M_{\rho} \gamma_{M\rho}(\omega) \frac{A_M}{A_Q} \frac{\alpha(s^2 + r_M^2) \Phi_1(\varphi - \varphi_M)_+ + \beta(s^2 - r_M^2) \Phi_3(\varphi - \varphi_M)_+}{2\alpha\beta s^2}; \\
B_{41} = q & \left\{ \frac{\left[ \alpha(s^2 + r_Q^2) \Phi_1(\varphi - \varphi_{II})_- + \beta(s^2 - r_Q^2) \Phi_3(\varphi - \varphi_{II})_- \right] \gamma_q(\omega) \Big|_{\rho H}^a}{2\alpha\beta s^2} - \right. \\
& \left. - \frac{\left[ \alpha(s^2 + r_Q^2) \Phi_1(\varphi - \varphi_K)_+ + \beta(s^2 - r_Q^2) \Phi_3(\varphi - \varphi_K)_+ \right] \gamma_q(\omega) \Big|_{\rho K}^a}{2\alpha\beta s^2} \right\} + \\
& + F \gamma_F(\omega) \left[ \Phi_2(\varphi - \varphi_F)_- + \frac{r_Q^2 - r^2}{2\alpha\beta} \Phi_4(\varphi - \varphi_F)_+ \right] + \\
& + M_{\varphi} \gamma_{M\varphi}(\omega) \left[ \frac{s^2 - 2r^2 + r_Q^2}{2\alpha} \Phi_3(\varphi - \varphi_M)_+ - \frac{s^2 + 2r^2 - r_Q^2}{2\beta} \Phi_1(\varphi - \varphi_M)_+ \right] + \\
& + M_{\rho} \gamma_{M\rho}(\omega) \left[ \Phi_2(\varphi - \varphi_M)_+ + \frac{r_Q^2 - r^2}{2\alpha\beta} \Phi_4(\varphi - \varphi_M)_+ \right];
\end{aligned} \tag{6.50}$$

$$\gamma_q(\omega) = \int \rho^4 X(\rho) d\rho;$$

$$\gamma_F(\omega) = \rho_F^3 \left[ \sin \frac{\omega(\rho_F - a)}{\ell_1} - sh \frac{\omega(\rho_F - a)}{\ell_1} - \alpha_* \cos \frac{\omega(\rho_F - a)}{\ell_1} + \alpha_* ch \frac{\omega(\rho_F - a)}{\ell_1} \right];$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{M\rho}(\omega) = 4\rho_M^2 & \left[ -\sin \frac{\omega(\rho_M - a)}{\ell_1} + sh \frac{\omega(\rho_M - a)}{\ell_1} + \alpha_* \cos \frac{\omega(\rho_M - a)}{\ell_1} - \alpha_* ch \frac{\omega(\rho_M - a)}{\ell_1} \right] + \\
& + \rho_M^3 \left[ -\cos \frac{\omega(\rho_M - a)}{\ell_1} + ch \frac{\omega(\rho_M - a)}{\ell_1} - \alpha_* \sin \frac{\omega(\rho_M - a)}{\ell_1} - \alpha_* sh \frac{\omega(\rho_M - a)}{\ell_1} \right] \frac{\omega}{\ell_1};
\end{aligned}$$

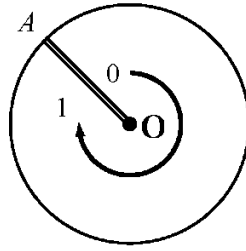
$$\gamma_{M\varphi}(\omega) = \rho_M^2 \left[ \sin \frac{\omega(\rho_M - a)}{\ell_1} - sh \frac{\omega(\rho_M - a)}{\ell_1} - \alpha_* \cos \frac{\omega(\rho_M - a)}{\ell_1} + \alpha_* ch \frac{\omega(\rho_M - a)}{\ell_1} \right].$$

Фундаментальные функции (6.50) при  $A_M = A_Q = A$ ;  $r_M^2 = \mu r^2$ ;  $r_Q^2 = (2 - \mu)r^2$  переходят в известные функции В.З. Власова для прямоугольных пластин [24].

### 6.3.2. РЕШЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ

Полученное решение (6.49) с фундаментальными функциями (6.50) обладает значительной степенью общности. Нагрузка на пластину и условия опирания кромки и линии ОА (рис. 6.5) могут быть произвольными. В частности, вдоль линии ОА могут быть свободные края

(пластина с разрезом); жестко защемленные края (пластина с жестким ребром); шарнирное опирание краев и т.д.



**Рис. 6.5**

Рассмотрим случай, когда по линии  $OA$  отсутствуют какие-либо связи, но центр пластины (точка  $O$ ) имеет жесткое защемление и шарнирное опирание. Эти связи не перемещаются в пространстве. При этом получается обычная круглая пластина с заданными условиями опирания кромки и центральной точки. Такие конструкции встречаются в механизмах распределения жидкости или газа, где пластины выполняют роль клапанов, и в различных сооружениях (например, конструкция крыши аэропорта Пулково в г. С. – Петербурге). К таким задачам сводятся и предельные случаи кольцевых пластин, когда радиус внутреннего кольца стремится к нулю. Пусть нагрузка на пластину будет равномерно распределенной  $q(\rho, \varphi) = q = 1$ . Тогда, как частный случай, получаем осесимметричные задачи изгиба. Очевидно, что на линии  $OA$  начальные обобщенные параметры пластины при изгибе будут равны конечным параметром. Матрица  $C$  будет единичной и разрешающая система линейных уравнений круглой пластины по схеме (1.38) при  $\varphi = 2\pi$  примет вид

	1	2	3	4					
1	$A_{11}-1$	$-A_{12}$	$-A_{13}$	$-A_{14}$	$DW^{0-1}(o)$	=	$-B_{11}^{0-1}$	.	(6.52)
2	$A_{21}$	$A_{22}-1$	$-A_{23}$	$-A_{24}$	$DQ^{0-1}(o)$		$-B_{21}^{0-1}$		
3	$-A_{31}$	$-A_{32}$	$A_{33}-1$	$A_{34}$	$M^{0-1}(o)$		$B_{31}^{0-1}$		
4	$-A_{41}$	$-A_{42}$	$A_{43}$	$A_{44}-1$	$Q^{0-1}(o)$		$B_{41}^{0-1}$		

Решая эту систему при исходных данных таблицы 19 ( $a=0$ ;  $v=1$ ;  $\ell_1=1$ ;  $\mu=0,3$ ), получаем начальные параметры (представлены в таблице 20). Обобщенный прогиб точки круглой пластины определяется согласно (6.49) по формуле

$$DW(\varphi) = A_{11}(\varphi) \cdot DW(o) + A_{12}(\varphi) \cdot D\theta(o) - A_{13}(\varphi) \cdot M(o) - A_{14}(\varphi) \cdot Q(o) + B_{11}(\varphi),$$

а функция  $X(\rho)$  выбирается по таблице 8. Далее можно вычислить действительные прогибы и изгибающие моменты в отдельных точках линии ОА (рис. 6.5) по выражениям (6.41), (6.46).

**Таблица 20**

Граничные условия		Начальные параметры круглой пластины			
Центр пластины	Край пластины	$DW(o)$	$DQ(o)$	$M(o)$	$Q(o)$
Жесткое защемление	Жесткое защемление	$0,236 \cdot 10^{-2}$	0,0	$0,152 \cdot 10^{-2}$	0,0
Жесткое защемление	Шарнирное опирание	$0,491 \cdot 10^{-2}$	0,0	$0,574 \cdot 10^{-2}$	0,0
Жесткое защемление	Свободный край	$0,536 \cdot 10^{-1}$	0,0	- 0,1013	0,0
Шарнирное опирание	Шарнирное опирание	$0,162 \cdot 10^{-1}$	0,0	$0,617 \cdot 10^{-2}$	0,0

При этом учитывалось, что в сингулярной точке  $O(0,0)$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{X'(\rho)}{\rho} = X''(o), \quad \lim_{\substack{\varphi \rightarrow 0 \\ \rho \rightarrow 0}} \frac{W''(\varphi)}{\rho^2} = 0; \quad W''(o) = 0.$$

В таблице 19 представлены результаты этих вычислений. Заметим, что данные осесимметричные задачи изгиба имеют трудности математического порядка при интегрировании уравнений равновесия [92, с. 69].

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\varphi) \right] = -\frac{Q(r)}{D}; \quad \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\omega}{dr} \right) \right] = \frac{Q(r)}{D}.$$

В центре пластины по рис. 6.5 значения  $Q$  и  $M \rightarrow \infty$  и вся сложность состоит в определении величины  $Q$ , учитывающей реакцию в центре, что предопределяет отсутствие решений подобных задач в справочных данных работ [17, 18, 26, 38, 72, 92] и др. Ранее отмечалось, что МГЭ имеет математический аппарат, позволяющий раскрывать подобные неопределенности и результаты таблицы 19 это подтверждают. Достоверность результатов МГЭ можно подтвердить сравнением с результатами таблиц 65 и 67 монографии проф. С.П. Тимошенко [92, с. 332]. Там представлены максимальный прогиб и изгибающие моменты для полукруглой пластины. Для упругих пластин уменьшение угловой координаты в 2 раза уменьшает примерно в 2 раза и параметры напряженно-деформированного состояния. Данные работы [92] весьма хорошо согласуются с результатами таблицы 19:

жесткое защемление по контуру

$$\omega(1/2,0) = 20,2 \cdot 10^{-4} qR^4 / D; \quad M\rho(o,o) = -7,31 \cdot 10^{-2} qR^2;$$

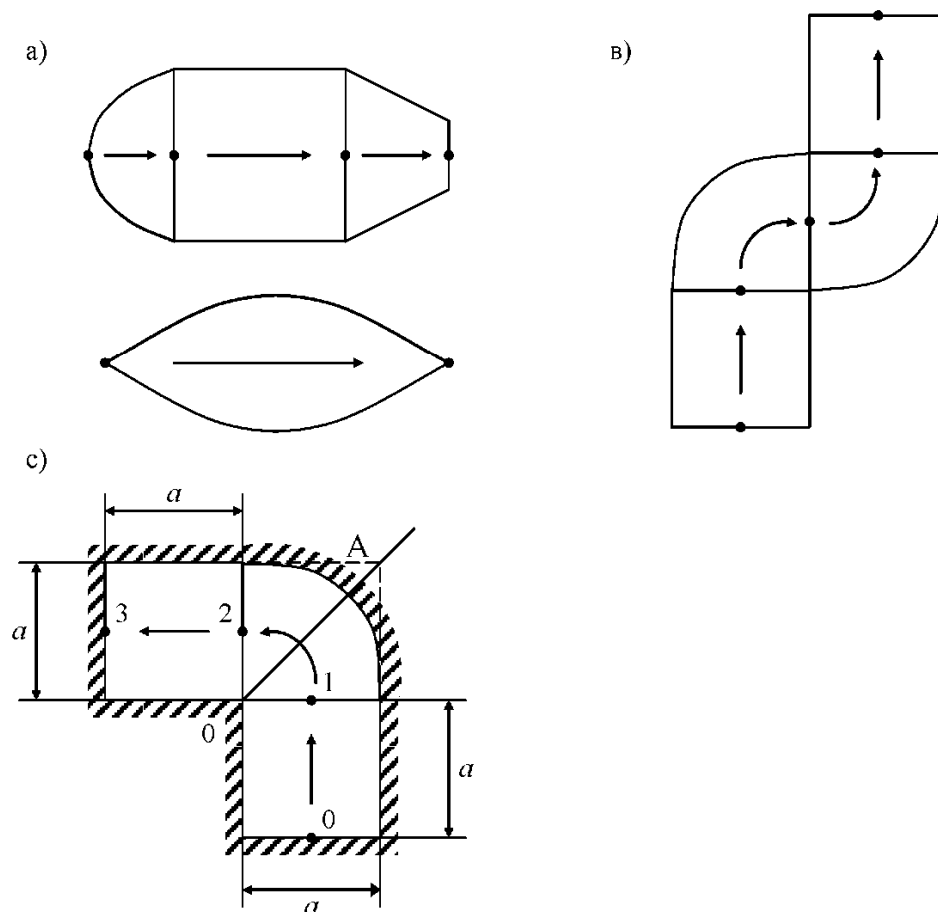
$$M\rho(1/2,0) = 3,55 \cdot 10^{-2} qR^2 / D; \quad M\rho(1,0) = -5,84 \cdot 10^{-2} qR^2,$$

шарнирное опирание по контуру

$$\omega(1/2,0) = 81,1 \cdot 10^{-4} qR^4 / D; \quad M\rho(1/2,0) = 8,68 \cdot 10^{-2} qR^2.$$

#### 6.4. РАСЧЕТ ПЛАСТИН С КОМБИНИРОВАННЫМ КОНТУРОМ

В §6.2.3 показано, что уравнения МГЭ позволяют разбивать отдельную пластину на подобласти. Этот вывод справедлив и для круглой пластины, что позволяет рассчитывать пластинчатую конструкцию, состоящую из набора прямоугольных и круглых областей. Важным свойством круглого элемента является возможность изменения угла между прямоугольными элементами, что существенно расширяет область применения одномерного варианта МГЭ. Если пластина в плане представляет собой правильную область хотя бы с одной осью симметрии (рис. 6.6, а), то ее всегда можно аппроксимировать прямоугольными элементами. Однако, неправильные, кососимметричные и многосвязные области не могут быть описаны прямоугольными элементами.





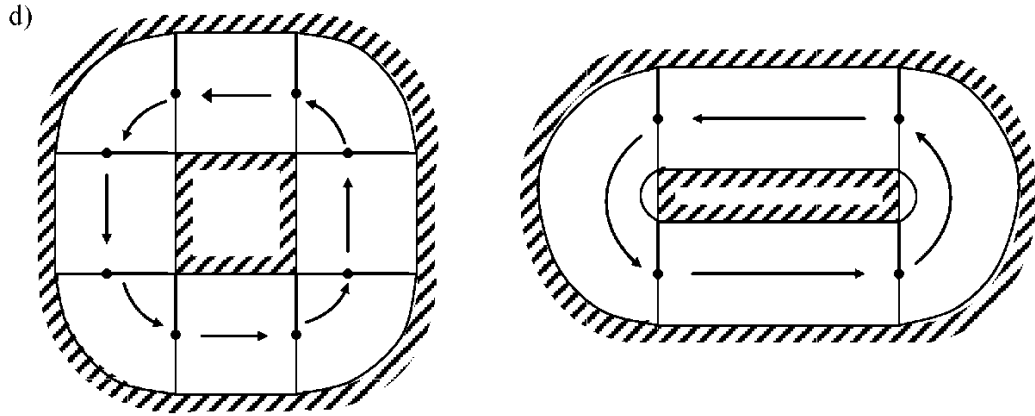


Рис. 6.6

Такие области приближенно можно аппроксимировать набором прямоугольных и круглых элементов, т.е. пластина с произвольным контуром заменяется пластиной с комбинированным контуром. Ориентированные графы подобных случаев представлены на рис. 6.6. Применим одномерные интегральные уравнения (6.20), (6.49) для расчета пластины с «Г» – образной областью, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой (рис.6.6, с).

**Пример 30.** В пластине по рис. 6.6, с два прямоугольных элемента соединяются под прямым углом посредством кругового сектора. Выполняя процедуру по схеме (1.38), обобщенные граничные параметры каждого элемента находим из решения системы уравнений 12-го порядка, где матрицы лишь минимально отличаются от матриц примера 29. Для подобластей 0-1 и 2-3 используются фундаментальные функции (6.22) при  $a = 1$ , для круговой подобласти 1-2 – (6.50) при  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . Исходные данные круглого элемента:

$$r^2 = -0,55178; \quad s^2 = 9,01964; \quad r_M^2 = -2,28233; \quad r_Q^2 = -3,30686;$$

$$\alpha = 2,18763; \quad \beta = 2,05765; \quad \mu = 0,3; \quad \varphi = \frac{\pi}{2};$$

у прямоугольных элементов:

$$r^2 = -12,30241; \quad s^2 = 22,3729; \quad \alpha = 4,16385; \quad \beta = 2,24394;$$

$$\gamma_q(\omega) = 0,84567; \quad \mu = 0,3; \quad \ell = a = 1.$$

Методом Гаусса получаем обобщенные граничные параметры пластины по рис. 6.6, с

$$M^{2-3}(1) = -0,037512q; \quad Q^{2-3}(1) = -0,31303q; \quad M^{0-1}(o) = -0,0375q;$$

$$Q^{0-1}(o) = 0,31303q; \quad DW^{1-2}(o) = 0,184 \cdot 10^{-2}q; \quad D\theta^{1-2}(o) = 0,157 \cdot 10^{-2}q;$$

$$M^{1-2}(o) = 0,167 \cdot 10^{-2}q; \quad Q^{1-2}(o) = 0,577 \cdot 10^{-2}q; \quad DW^{2-3}(o) = 0,184 \cdot 10^{-2}q;$$

$$D\theta^{2-3}(o) = -0,157 \cdot 10^{-2}q; \quad M^{2-3}(o) = 0,167 \cdot 10^{-2}q; \quad Q^{2-3}(o) = -0,58 \cdot 10^{-2}q. \quad (6.52)$$

Начальные параметры секториального элемента 1-2 позволяют определить напряженно-деформированное состояние в любой внутренней точке своей области. В частности, результаты рас-

четов по линии ОА (рис. 6.6, с) сведены в таблицу 21. Там же приведены результаты метода  $R$ -функций для подобной пластины, но с прямоугольным средним элементом [75, с. 111] (в этих пластинах не совпадает примерно 22% длины контура). Близкое соответствие между результатами двух задач должно наблюдаться в средней зоне круглого элемента, что и отражается данными таблицы 21. Изгибающие моменты в круглом элементе должны быть больше, чем в прямоугольном, т.е. большие прогибы при меньших размерах достигаются за счет больших моментов. Таким образом, сравнение с результатами метода  $R$ -функций подтверждает достоверность результатов МГЭ. При этом, в отличие от метода  $R$ -функций, получено аналитическое решение задачи изгиба пластины с неканонической областью в плане и определены первые приближения для изгибающих моментов в сингулярной точке 0. По МКЭ такая задача потребует составления и решения алгебраической системы из 150-200 уравнений.

**Таблица 21**

Величины	Метод	Линия ОА						
		0,0 а	0,2 а	0,4 а	0,5 а	0,6 а	0,8 а	1,0 а
Прогиб	МГЭ	0,0	15,314	35,98	39,27	35,98	15,31	0,0
$D\omega \cdot 10^4 / q$	$R$ -функций	0,0	18,0	35,0	38,0	37,0	25,0	10,0
Изгибающий момент $M\rho \cdot 10^2 / q$	МГЭ	-14,38	-2,88	5,28	6,72	5,28	-2,88	-11,1
	$R$ -функций	$-\infty$	1,2	4,2	4,3	3,6	1,5	-0,8
Изгибающий момент $M_\varphi \cdot 10^2 / q$	МГЭ	-14,38	-6,31	0,13	2,02	0,13	-6,31	-3,3
	$R$ -функций	$-\infty$	-1,8	1,2	2,4	2,85	3,2	2,5

Очевидно, что применение одномерного варианта МГЭ имеет свою золотую середину. Наибольший эффект может быть достигнут там, где область пластины хорошо описывается набором прямоугольных и круглых элементов. При этом существенно (минимум на порядок) уменьшается трудоемкость расчета и облегчается процесс построения вычислительных программ в сравнении с другими численными методами [49]. Там же, где область пластины требует разбиения на большое число круглых и прямоугольных элементов, эффективность метода снижается. В этой связи одномерный вариант МГЭ должен занимать полагающееся ему место в ряду других методов расчета пластинчатых систем.

Добавим, что расчетные соотношения (6.49) могут быть применены также для расчета различных секторов. Для этого необходимо соответствующим образом комбинировать нагрузку всей пластины, как показано в работе [92, с. 330]. В этих случаях вариационный метод Канторовича-Власова освобождает расчеты от мало удобных в применении функций Бесселя.

## 6.5. ПРЕДЛОЖЕНИЯ ПО УЧЕТУ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ

## ФАКТОРОВ

Решения задач изгиба прямоугольной (6.20) и круглой (6.49) пластин сравнительно просто могут быть приспособлены для учета разнообразных дополнительных факторов. Рассмотрим наиболее существенные из них.

### 1. Учет ортотропности материала пластин.

Дифференциальное уравнение изгиба ортотропной пластины имеет вид [3]

$$D_1 \frac{\partial^4 \omega(x, y)}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 \omega(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 \omega(x, y)}{\partial y^4} = q(x, y), \quad (6.53)$$

где жесткости определяются формулами

$$D_1 = \frac{E_x h^3}{12(1 - \mu_{xy} \mu_{yx})}; \quad D_2 = \frac{E_y h^3}{12(1 - \mu_{xy} \mu_{yx})}; \quad D_K = \frac{Gh^3}{12};$$

$$D_3 = D_1 \mu_{xy} + 2D_K = D_2 \mu_{yx} + 2D_K.$$

Если применить к уравнению (6.53) процедуру метода Канторовича-Власова, то получим обыкновенное дифференциальное уравнение 4-го порядка вида (6.13), где изменятся лишь коэффициенты

$$B = D_3 \int_0^{\ell_1} X''(x)X(x)dx / D_1; \quad C = D_2 \int_0^{\ell_1} X^{IV}(x)X(x)dx / D_1,$$

т.е. учет ортотропности материала будет выполняться коэффициентами  $\alpha$  и  $\beta$  фундаментальных функций.

### 2. Учет ребер жесткости в одном направлении.

Если воспользоваться теорией проф. В.З. Власова о воздействии ребер жесткости на пластину [24], то правая часть уравнения (6.6) примет вид

$$\bar{q}(x, y) = q(x, y) - \sum_{i=1}^n EI_x W^{IV}(y) X(a_i) \delta(x - a_i) - \sum_{i=1}^n [EI_\omega W^{IV}(y) X'(a_i) - GI_K W''(y) X'(a_i)] \delta'(x - a_i),$$

где  $EI_x$ ,  $EI_\omega$ ,  $GI_K$  - жесткости  $i$ -го ребра на изгиб и кручение;  $a_i$  - координаты расположения  $i$ -го ребра. Подставляя  $\bar{q}(x, y)$  в уравнение (6.6) и применяя метод Канторовича-Власова, придем только к новым выражениям для коэффициентов

$$\bar{A} = A + \sum_{i=1}^n \{EI_x X^2(a_i) + EI_\omega [X'(a_i)]^2\};$$

$$\bar{B} = B + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n GI_K [X'(a_i)]^2$$

и параметры жесткости ребер попадают в коэффициенты  $\alpha$   $\beta$  фундаментальных функций (6.22).

### 3. Учет упругого основания.

Дифференциальное уравнение изгиба пластины на упругом основании с двумя коэффициентами постели приводится к виду

$$\frac{\partial^4 \omega(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega(x, y)}{\partial y^4} + \kappa_1 \frac{\omega(x, y)}{D} - \kappa_2 \left( \frac{\partial^2 \omega(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega(x, y)}{\partial y^2} \right) \frac{1}{D} = \frac{q(x, y)}{D},$$

где  $\kappa_1, \kappa_2$  – коэффициенты упругого основания. Применяя к этому уравнению процедуру метода Конторовича-Власова, получим следующие коэффициенты, отличные от (6.14)

$$\bar{B} = B - \int_0^{\ell_1} X^2(x) \kappa_2 dx / 2D;$$

$$\bar{C} = C + \int_0^{\ell_1} [\kappa_1 X^2(x) - \kappa_2 X''(x) X(x)] dx / D.$$

Видно, что учет упругого основания сводится к усложнению коэффициентов  $\alpha, \beta$  фундаментальных функций.

Ограничившись этими случаями, отметим, что и другие дополнительные факторы могут быть учтены путем рассмотрения более точного дифференциального уравнения и усложнения коэффициентов его фундаментальных функций.

## 6.6. УСТОЙЧИВОСТЬ И ДИНАМИКА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН

Различные задачи устойчивости и динамики тонких изотропных прямоугольных пластин постоянной толщины в рамках гипотезы Кирхгофа-Лява сводятся к решению дифференциального уравнения [72]

$$\nabla^2 \nabla^2 \omega(x, y) - \frac{\gamma \omega^2}{D} \omega(x, y) + \frac{N_x(y)}{D} \frac{\partial^2 \omega(x, y)}{\partial x^2} + 2 \frac{N_{xy}}{D} \frac{\partial^2 \omega(x, y)}{\partial x \partial y} + \frac{N_y(x)}{D} \frac{\partial^2 \omega(x, y)}{\partial y^2} = \frac{q(x, y)}{D}, \quad (6.54)$$

где  $\omega(x, y)$  – амплитудное значение прогиба;  $\gamma$  – плотность материала;  $\omega$  – частота собственных колебаний;  $N_x(y), N_{xy}; N_y(x)$  – усилия в срединной плоскости пластины (рис. 6.7);  $q(x, y)$  – амплитудное значение поперечной нагрузки. Разработано множество методов решения уравнения (6.54), результаты которых приводятся в справочных данных работ [18, 26, 72, 92 и др.]. Проф. В.З. Власов, кроме статики пластин, выдвинул идею о применимости своего метода для решения задач устойчивости, однако эта идея не была реализована в полной мере [24].



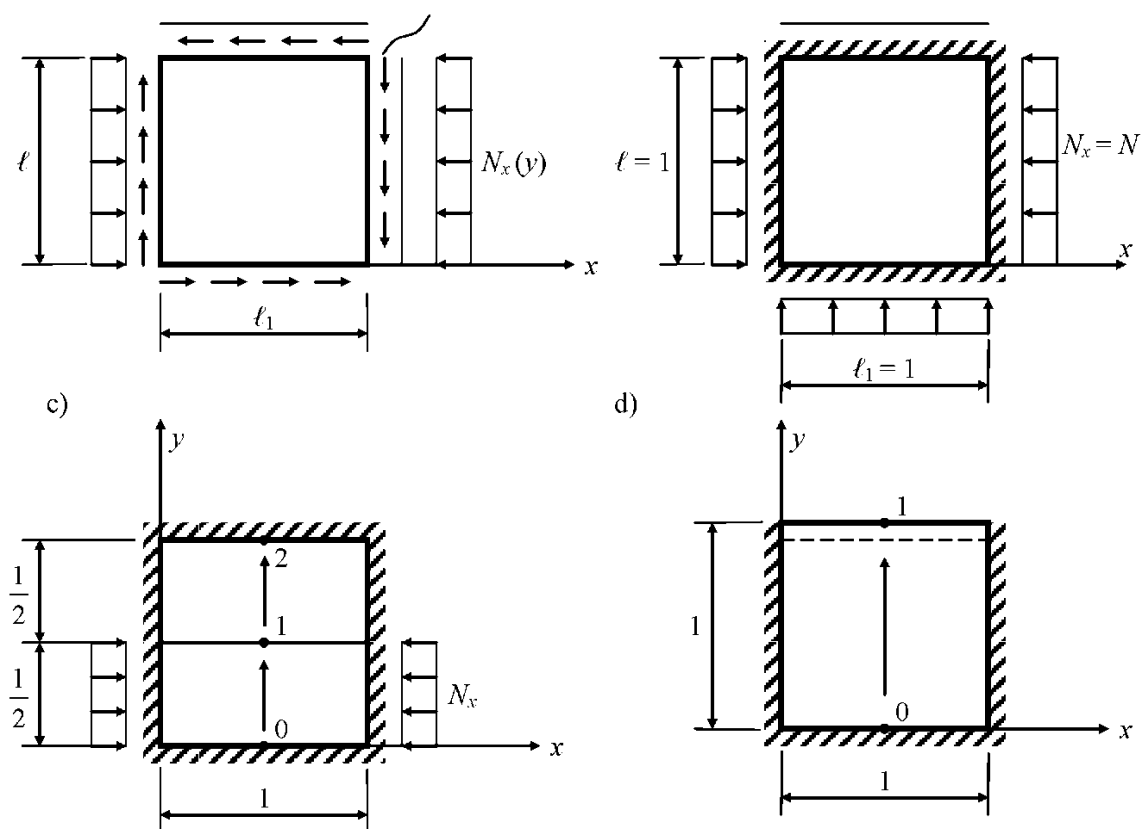


Рис. 6.7

Уравнение (6.54) по алгоритму вариационного метода Канторовича-Власова приводится к виду

$$W^{IV}(y) + 2r^2W''(y) + f^2W'(y) + s^4W(y) = q(y)/D, \quad (6.55)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} W(0); \quad \theta(0) = W'(0); \quad M(0) = -DA[W''(0) + \mu r_*^2 W(0)]; \\ Q(0) = -DA[W'''(0) + (2 - \mu)r_*^2 W'(0)]. \end{aligned} \quad (6.56)$$

Коэффициенты и правая часть уравнения (6.55) предстанут выражениями

$$r^2 = B/A; \quad f^2 = G/A; \quad s^4 = C/A; \quad q(y) = \int_0^{\ell_1} q(x, y)X(x)dx;$$

$$A = \int_0^{\ell_1} X^2(x)dx; \quad B = \int_0^{\ell_1} [X''(x) + N_y(x)X(x)/2D]X(x)dx; \quad (6.57)$$

$$G = \int_0^{\ell_1} 2N_{xy}X'(x)X(x)dx/D; \quad r_*^2 = \int_0^{\ell_1} X''(x)X(x)dx/A;$$

$$C = \int_0^{\ell_1} [X^{IV}(x) - \mu\omega^2 X(x)/D + N_x(y)X''(x)/D]X(x)dx. \quad (6.57)$$

Из выражений (6.57) следует, что  $N_x(x)$  может быть любой функцией от  $x$ , а  $N_x(y)$ ;  $N_{xy}$  - только кусочно-постоянными функциями от  $y$ , в противном случае получим дифференциальное уравнение (6.55) с переменными коэффициентами.

Решение задачи Коши (6.55), (6.56) может быть представлено в матричной форме (6.49). Вид фундаментальных функций зависит от корней характеристического уравнения для (6.55)

$$\kappa^4 + 2r^2\kappa^2 + f^3\kappa + s^4 = 0. \quad (6.58)$$

Корни этого уравнения в общем случае могут быть определены численно. При  $f = 0$  ( $N_{xy} = 0$ ) уравнение (6.58) упрощается и корни вычисляются по формулам (4.23). Рассмотрим 4 основных случая фундаментальных функций.

1.  $|S| > |r|$ . Корни (4.23) комплексные  $\kappa_{1,4} = \pm \alpha - i\beta$ . Фундаментальные функции представлены выражениями (6.28), где

$$\alpha = \sqrt{(S^2 - r^2)/2}; \quad \beta = \sqrt{(S^2 + r^2)/2},$$

а в фундаментальных функциях вместо  $r^2$  необходимо использовать  $r_*^2$  из (6.57).

2.  $S^4 < 0$ ;  $r^2 \neq 0$ . Корни (4.23) действительные и мнимые  $\kappa_{1,2} = \pm \alpha$ ;  $\kappa_{3,4} = \pm i\beta$ .

$$\alpha = \sqrt{-r^2 + \sqrt{r^4 - S^4}}; \quad \beta = \sqrt{r^2 + \sqrt{r^4 - S^4}};$$

$$A_{11} = \frac{(\beta^2 - \mu r_*^2) \operatorname{ch} \alpha y + (\alpha^2 - \mu r_*^2) \cos \beta y}{\alpha^2 + \beta^2}; \quad A_{13} = \frac{\operatorname{ch} \alpha y - \cos \beta y}{A(\alpha^2 + \beta^2)}; \quad A_{24} = A_{13};$$

$$A_{12} = \frac{\beta[\beta^2 - (2 - \mu)r_*^2] \operatorname{sh} \alpha y + \alpha[\alpha^2 + (2 - \mu)r_*^2] \sin \beta y}{\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)}; \quad A_{14} = \frac{\beta \operatorname{sh} \alpha y - \alpha \sin \beta y}{A\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)};$$

$$A_{21} = \frac{\alpha(\beta^2 - \mu r_*^2) \operatorname{sh} \alpha y - \beta(\alpha^2 + \mu r_*^2) \sin \beta y}{\alpha^2 + \beta^2}; \quad A_{23} = \frac{\alpha \operatorname{sh} \alpha y + \beta \sin \beta y}{A(\alpha^2 + \beta^2)}; \quad (6.59)$$

$$A_{22} = \frac{[\beta^2 - (2 - \mu)r_*^2] \operatorname{ch} \alpha y + [\alpha^2 + (2 - \mu)r_*^2] \cos \beta y}{\alpha^2 + \beta^2};$$

$$A_{31} = A(\alpha^2 + \mu r_*^2)(\beta^2 - \mu r_*^2) \frac{\operatorname{ch} \alpha y - \cos \beta y}{\alpha^2 + \beta^2};$$

$$A_{32} = \frac{A\{\beta[\beta^2 - (2 - \mu)r_*^2][\alpha^2 + \mu r_*^2] \operatorname{sh} \alpha y - \alpha[\alpha^2 + (2 - \mu)r_*^2][\beta^2 - \mu r_*^2] \sin \beta y\}}{\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)};$$

$$A_{33} = \frac{(\alpha^2 + \mu r_*^2) \operatorname{ch} \alpha y + (\beta^2 - \mu r_*^2) \cos \beta y}{\alpha^2 + \beta^2}; \quad A_{34} = \frac{\beta(\alpha^2 + \mu r_*^2) \operatorname{sh} \alpha y + \alpha(\beta^2 - \mu r_*^2) \sin \beta y}{\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)};$$

$$A_{41} = \frac{A\{\alpha[\alpha^2 + (2 - \mu)r_*^2][\beta^2 - \mu r_*^2] \operatorname{sh} \alpha y + \beta[\beta^2 - (2 - \mu)r_*^2][\alpha^2 + \mu r_*^2] \sin \beta y\}}{\alpha^2 + \beta^2};$$

$$A_{42} = A[\alpha^2 + (2 - \mu)r_*^2][\beta^2 - (2 - \mu)r_*^2] \frac{\operatorname{ch} \alpha y - \cos \beta y}{\alpha^2 + \beta^2};$$

$$\begin{aligned}
A_{43} &= \frac{\alpha[\alpha^2 + (2-\mu)r_*^2] \operatorname{sh} \alpha y - \beta[\beta^2 - (2-\mu)r_*^2] \sin \beta y}{\alpha^2 + \beta^2}; \\
A_{44} &= \frac{[\alpha^2 + (2-\mu)r_*^2] \operatorname{ch} \alpha y + [\beta^2 - (2-\mu)r_*^2] \cos \beta y}{\alpha^2 + \beta^2}. \\
3. \quad S^4 > 0; |S| < |r|; r^2 > 0. \quad \text{Корни (4.23) мнимые } k_{1,2} = \pm \alpha i, \quad k_{3,4} = \beta i. \\
\alpha &= \sqrt{r^2 - \sqrt{r^4 - S^4}}; \quad \beta = \sqrt{r^2 + \sqrt{r^4 - S^4}}; \\
A_{11} &= \frac{(\beta^2 - \mu r_*^2) \cos \alpha y - (\alpha^2 - \mu r_*^2) \cos \beta y}{\beta^2 - \alpha^2}; \quad A_{13} = \frac{\cos \alpha y - \cos \beta y}{A(\beta^2 - \alpha^2)}; \quad A_{24} = A_{13}; \\
A_{12} &= \frac{\beta[\beta^2 - (2-\mu)r_*^2] \sin \alpha y - \alpha[\alpha^2 - (2-\mu)r_*^2] \sin \beta y}{\alpha\beta(\beta^2 - \alpha^2)}; \quad A_{14} = \frac{\beta \sin \alpha y - \alpha \sin \beta y}{A\alpha\beta(\beta^2 - \alpha^2)}; \\
A_{21} &= \frac{-\alpha(\beta^2 - \mu r_*^2) \sin \alpha y + \beta(\alpha^2 - \mu r_*^2) \sin \beta y}{\beta^2 - \alpha^2}; \quad A_{23} = \frac{-\alpha \sin \alpha y + \beta \sin \beta y}{A(\beta^2 - \alpha^2)}; \\
A_{22} &= \frac{[\beta^2 - (2-\mu)r_*^2] \cos \alpha y - [\alpha^2 - (2-\mu)r_*^2] \cos \beta y}{\beta^2 - \alpha^2}; \\
A_{31} &= \frac{A(\alpha^2 - \mu r_*^2)(\beta^2 - \mu r_*^2)(-\cos \alpha y + \cos \beta y)}{\beta^2 - \alpha^2}; \\
A_{32} &= A \frac{-\beta[\beta^2 - (2-\mu)r_*^2](\alpha^2 - \mu r_*^2) \sin \alpha y + \alpha[\alpha^2 - (2-\mu)r_*^2](\beta^2 - \mu r_*^2) \sin \beta y}{\alpha\beta(\beta^2 - \alpha^2)}; \\
A_{33} &= \frac{-(\alpha^2 - \mu r_*^2) \cos \alpha y + (\beta^2 - \mu r_*^2) \cos \beta y}{\beta^2 - \alpha^2}; \quad A_{34} = \frac{-\beta(\alpha^2 - \mu r_*^2) \sin \alpha y + \alpha(\beta^2 - \mu r_*^2) \sin \beta y}{\alpha\beta(\beta^2 - \alpha^2)}; \\
A_{41} &= \frac{A\{\alpha[\alpha^2 - (2-\mu)r_*^2](\beta^2 - \mu r_*^2) \sin \alpha y - \beta[\beta^2 - (2-\mu)r_*^2](\alpha^2 - \mu r_*^2) \sin \beta y\}}{\beta^2 - \alpha^2}; \\
A_{42} &= A[\alpha^2 - (2-\mu)r_*^2][\beta^2 - (2-\mu)r_*^2] \frac{-\cos \alpha y + \cos \beta y}{\beta^2 - \alpha^2}; \\
A_{43} &= \frac{\alpha[\alpha^2 - (2-\mu)r_*^2] \sin \alpha y - \beta[\beta^2 - (2-\mu)r_*^2] \sin \beta y}{\beta^2 - \alpha^2}; \\
A_{44} &= \frac{-[\alpha^2 - (2-\mu)r_*^2] \cos \alpha y + [\beta^2 - (2-\mu)r_*^2] \cos \beta y}{\beta^2 - \alpha^2}.
\end{aligned} \tag{6.60}$$

Согласно главам III и IV определение частот собственных колебаний и критических сил упругой системы выполняется после формирования матрицы  $\mathbf{A}^*$ . В отличие от других методов (см. [18, 81]) здесь предполагается, что граничные статические и кинематические параметры пластины будут отличны от нуля (при бифуркации или при стоячих волнах), если отличны от нуля обобщенные статические и кинематические параметры одномерной модели. Тогда трансцендентное уравнение собственных значений пластинчатой системы примет вид

$$|\mathbf{A}_*(\omega, N_x, N_y, N_{xy})| = 0. \quad (6.61)$$

Матрица  $\mathbf{A}_*$  этого уравнения обладает многими замечательными свойствами. Она является весьма разреженной матрицей общего вида, ее система фундаментальных ортонормированных функций обеспечивает хорошую устойчивость численного процесса решения краевой задачи, в определителе отсутствуют точки разрыва 2-го рода, формируется без привлечения матричных операций. Эти преимущества позволяют эффективно определять спектр собственных значений – корни уравнения (6.61). Точность спектра зависит, естественно, от точности исходной модели, где, напомним, используется только один член ряда (6.2). Уравнение (6.61) позволяет определять критические силы как статическим (при  $\omega = 0$ ), так и динамическим методами. При определении собственных значений пластин нужно учитывать, что из уравнения (6.61) можно получить спектры частот и критических сил при фиксированном числе полуволн в направлении оси  $ox$  (например, для коэффициентов  $A, B, C$  таблицы 17 одна полуволна в направлении оси  $ox$  и множество полуволн в направлении оси  $oy$ ). Вычисляя коэффициенты  $A, B, C$  при второй частоте колебаний балки, из уравнения (6.61) можно получить спектры пластины для двух полуволн в поперечном и множества полуволн в продольном направлениях и т.д. Точность решения задач устойчивости и динамики прямоугольных пластин по МГЭ определим из примеров.

**Пример 31.** Рассмотрим жестко защемленную квадратную пластину, нагруженную силами  $N_x = N_y = N$  (рис. 6.7, в). Выше отмечалось, что наибольшая погрешность вариационного метода Канторовича-Власова наблюдается у квадратных пластин, а условия ее опирания не позволяют получить точного аналитического решения задач статики, динамики и устойчивости. Поэтому данная задача позволяет дать оценку точности и эффективности различных методов, в том числе и МГЭ. Матрица устойчивости и ее определитель для краевых условий по рис. 6.7, в примут вид

$$\mathbf{A}_* = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & -A_{13} & -A_{14} \\ \hline & & -A_{23} & -A_{13} \\ \hline -1 & & A_{33} & A_{34} \\ \hline & -1 & A_{43} & A_{44} \\ \hline \end{array}; \quad |\mathbf{A}_*(N_x, N_y)| = A_{13}^2 - A_{14}A_{23} = 0. \quad (6.62)$$

Задачу решаем статическим методом. При  $N_y = 0$   $N_x$  входит в коэффициент  $S$ . Определяя корень уравнения (6.62) находим, что первая критическая сила равна  $N_{11} = 105,65D$  (одна полуволна в двух направлениях), что больше на 6% критической силы по методу Ритца  $N_{11} = 99,39D$  [31]. При  $N_x = 0$   $N_y$  входит в коэффициент  $r$  и  $N_{11} = 94,05D$ , что меньше на 5% эталонного значения. Средняя же величина критической силы по двум вариантам ( $N_{11}^{cp} = 99,85D$ ) практически



совпадает с точным значением. Взаимная компенсация погрешностей происходит, когда  $N_x$  и  $N_y$  одновременно отличны от нуля (параметр  $N$  входит в коэффициенты  $r$  и  $S$ ). При  $N_x = N_y = N$  критическая сила  $N_{11} = 51,35D$  отличается от точного значения  $N_{11} = 52,24D$  [18] на 1,7%. Для сравнения приведем значение критической силы при  $N_y = 0$  по модифицированному асимптотическому методу проф. В.В. Болотина  $N_{11} = 84,0D$  [31]. Старшие критические силы по уравнению (6.61) будут определены с большой погрешностью и здесь нужно использовать решение соответствующего нелинейного уравнения. Высокая точность результатов метода Канторовича-Власова объясняется тем, что в этом методе удовлетворяются в полном объеме краевые условия по всему периметру пластины, включая и угловые зоны.

**Пример 32.** Рассмотрим более сложную задачу устойчивости. Определить критическую силу такой же пластины, но нагруженной на части контура (рис. 6.7, *с*). Усилие  $N_x$  можно продолжить на всю длину кромки с помощью выражения  $N_x = N[1 - H(x - 1/2)]$ , где  $H(x - 1/2)$  - единичная функция Хевисайда со сдвигом. При включении  $N_x$  в коэффициент  $S$  критическая сила получается со значительным превышением  $N_{11} = 211,35D$ . При включении  $N_x$  в коэффициент  $r$  (путем поворота систем координат) критическая сила получается существенно меньшей  $N_{11} = 100,05D$ . Среднее значение двух вариантов  $N_{11} = 155,7D$ . При решении данной задачи предполагалось, что вся область пластины испытывает продольно-поперечный изгиб. Это весьма грубое допущение и критическая сила получилась существенно меньше истинного значения. Задачу можно решить в более точной постановке, т.е. считать, что подобласть 0-1 испытывает продольно-поперечный, а подобласть 1-2 - поперечный изгиб в момент потери устойчивости. Если пренебречь искажением указанных напряженных состояний в граничной зоне под областей, то матрица устойчивости  $A_*$  примет вид

	1	2	3	4	5	6	7	8	
1			$-A_{13}$	$-A_{14}$	-1				5
2			$-A_{23}$	$-A_{24}$		-1			6
3			$A_{33}$	$A_{34}$			-1		3
4			$A_{43}$	$A_{44}$				-1	4
5					$A_{11}$	$A_{12}$	$-A_{13}$	$-A_{14}$	7
6					$A_{21}$	$A_{22}$	$-A_{23}$	$-A_{24}$	8
7	-1				$-A_{31}$	$-A_{32}$	$A_{22}$	$A_{12}$	1
8		-1			$-A_{41}$	$-A_{42}$	$A_{21}$	$A_{11}$	2

0-1  
  
  
  
  
  
  
  
1-2

Методом Гаусса вычисляя определитель и фиксируя изменение его знака, получаем, что  $N_{11} = 178,95D$ . Если предположить, что уменьшение периметра сжимающей нагрузки в 2 раза увеличивает критическую силу в 1,9 раза (см. пример 31), то полученный результат всего на 5,4% меньше условного точного значения критической силы.

При определении частот собственных колебаний жестко заземленной квадратной пластины необходимо использовать уравнение (6.62) при  $N_x = N_y = 0$ ,  $\omega \neq 0$ . Безразмерные величины частот приведены в таблице 22, из которой следует хорошее соответствие результатов МГЭ с результатами Эдмана и Игути [72].

Таблица 22

Расчетная схема	Метод	Безразмерные частоты $\omega_{nm} = \omega \sqrt{h/D}$ $m$ – число полуволн в направлении оси $ox$ $n$ – число полуволн в направлении оси $oy$			
		$\omega_{11}$	$\omega_{12}$	$\omega_{13}$	$\omega_{14}$
Рисунок 6.7, <i>в</i>	МГЭ	36,05	73,65	132,45	211,35
	Эдмана	35,999	73,405	131,902	210,526
	Игути	35,985	73,400	132,184	-
Рисунок 6.7, <i>д</i>	МГЭ	31,85	63,65	116,95	190,5
	<i>R</i> -функций	31,826	63,331	116,358	-

Пример 33. Изменение граничных условий видоизменяет частотное уравнение. Для пластины по рис. 6.7, *д*, где одна кромка шарнирно оперта, матрица  $A^*$  и частотное уравнение примут вид

$$A^* = \begin{bmatrix} & & -A_{13} & -A_{14} \\ -1 & & -A_{23} & -A_{13} \\ & & A_{33} & A_{34} \\ & -1 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix}; \quad |A^*(\omega)| = A_{13}A_{34} - A_{14}A_{33} = 0. \quad (6.63)$$

Корни уравнения (6.63) представлены в таблице 22, из которой следует практически полное совпадение результатов МГЭ с результатами метода *R*-функций проф. В.Л. Рвачева [75].

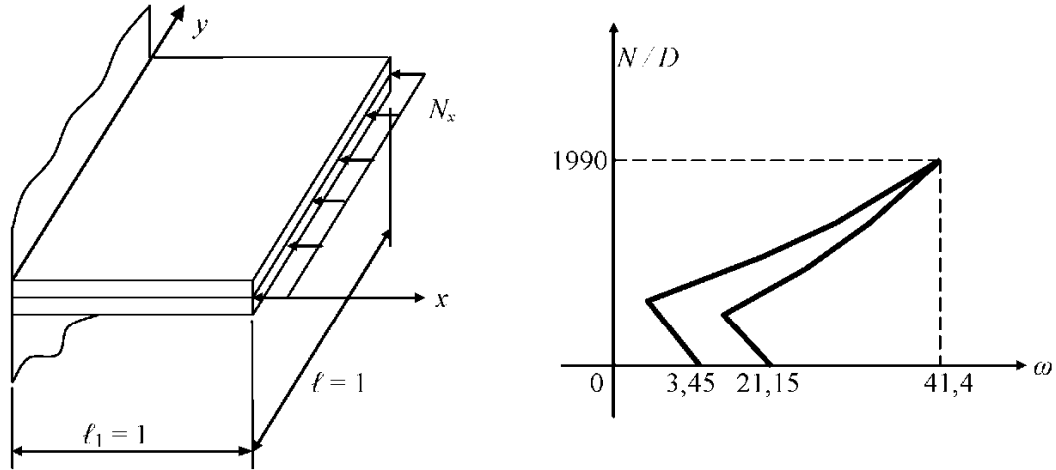
Анализ результатов примеров 31-33 приводит к двум выводам:

1. Вариационный метод Канторовича-Власова при использовании одного члена ряда (6.2) позволяет практически точно решать задачи на собственные значения упругих изотропных пластин.

2. Основная часть погрешности вариационного метода Канторовича-Власова при использовании одного члена ряда (6.2) связана с неточным описанием внешней нагрузки, а влияние на погрешность побочных коэффициентов линейной системы дифференциальных уравнений проф. В.З. Власова весьма мало.

Последний вывод следует из первого, поскольку в задачах на собственные значения не учитываются как раз побочные коэффициенты.

**Пример 34.** Возможности МГЭ проиллюстрируем решением неконсервативной задачи устойчивости квадратной пластины, нагруженной следящей за углом поворота нагрузкой (рис. 6.8).



**Рис. 6.8**

Уравнение (6.61) будет включать  $\omega$  и  $N_x$ . Граничные условия в направлении оси  $ox$  будут выполняться функцией  $X(x)$  (см. табл. 8). Кинематические граничные условия будут удовлетворяться точно, а статические граничные условия – только в жесткой заделке. Матрица  $A_*$  и частотное уравнение для граничных условий в направлении оси  $oy$  примут вид

$$A_* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & -1 & \\ A_{21} & A_{22} & & -1 \\ -A_{31} & -A_{32} & & \\ -A_{41} & -A_{42} & & \end{bmatrix}; \quad |A_*(\omega, N_x)| = A_{31}A_{42} - A_{32}A_{41} = 0. \quad (6.64)$$

Корни уравнения (6.64) при  $N_x = 0$   $\omega_{11} = 3,45\sqrt{D/\gamma h}$ ;  $\omega_{12} = 21,15\sqrt{D/\gamma h}$  весьма близки к эталонным значениям ( $\omega_{11} = 3,494\sqrt{D/\gamma h}$ ;  $\omega_{12} = 21,44\sqrt{D/\gamma h}$ ) частот данной пластины [81]. Это позволяет исследовать дальнейшее поведение двух частот по уравнению (6.64). Зависимость между  $N_x$  и  $\omega$  представлена на рис. 6.8. Неконсервативность действующей нагрузки подтверждается поведением двух соседних частот, стремящихся слиться в одной точке. При этом критическая сила существенно зависит от точности определения координаты слияния частот. Так,  $N_{11} = 180,0D$  при разности двух частот  $\Delta\omega = 0,5\sqrt{D/\gamma h}$ ;  $N_{11} = 460,0D$  при  $\Delta\omega = 0,3\sqrt{D/\gamma h}$ ;  $N_{11} = 720,0D$  при  $\Delta\omega = 0,2\sqrt{D/\gamma h}$ ;  $N_{11} = 1990,0D$  при  $\Delta\omega = 0,1\sqrt{D/\gamma h}$  и т.д. Очевидно, для достовер-

ного определения критической силы необходимо знание пороговой разности соседних частот, при которой наступает флаттер пластины.

## 6.7. УСТОЙЧИВОСТЬ И ДИНАМИКА КРУГЛЫХ ПЛАСТИН

Дифференциальное уравнение установившихся поперечных колебаний изотропной круглой пластины в амплитудном состоянии с учетом сжимающих усилий в срединной плоскости следует из (6.54) при использовании соотношений (6.30), (6.31) (рис. 6.9)

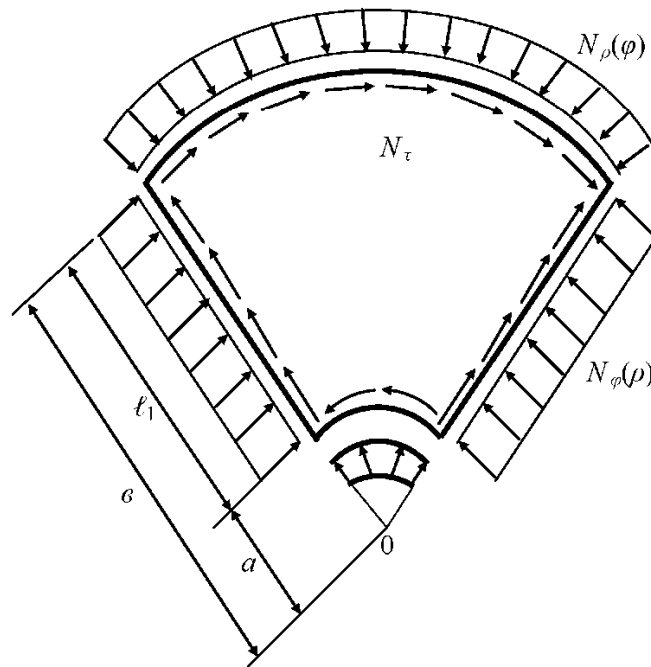


Рис. 6.9

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \omega(\rho, \varphi) - \frac{\gamma h \omega^2}{D} \omega(\rho, \varphi) + \frac{N r(\varphi)}{D} \frac{\partial^2 \omega(\rho, \varphi)}{\partial \rho^2} + \\ + 2 \frac{N \tau}{D} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \omega(\rho, \varphi)}{\partial \rho \partial \varphi} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \omega(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} \right] + \\ + \frac{N \varphi(\rho)}{D} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \omega(\rho, \varphi)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \omega(\rho, \varphi)}{\partial \varphi^2} \right] = \frac{q(\rho, \varphi)}{D}. \end{aligned} \quad (6.65)$$

Задача Коши данного уравнения согласно §6.3 представляется выражениями

$$\begin{aligned} W^{(4)}(\varphi) + 2r^2 W''(\varphi) + f^3 W'(\varphi) + s^4 W(\varphi) = q(\varphi / D); \\ W(0); \quad \theta(0) = W'(0); \quad M(0) = -DA_M [W''(0) + r_M^2 W(0)]; \\ Q(0) = -DA_Q [W'''(0) + r_Q^2 W'(0)], \end{aligned} \quad (6.66)$$

где  $W(\rho), \theta(\rho), M(\rho), Q(\rho)$  - соответственно начальные обобщенные прогиб, угол поворота, изгибающий момент и приведенная поперечная сила в направлении угловой координаты  $\varphi$ . Коэффициенты выражений (6.66) имеют вид

$$r^2 = B_* / A; \quad f^3 = G / A; \quad s^4 = C_* / A; \quad B_* = B + \int_a^b N_\varphi(\rho) \rho^2 X^2(\rho) d\rho / D;$$

$$G = \int_a^b [2N_\tau \rho^3 X'(\rho) - 2N_\tau \rho^2 X(\rho)] X(\rho) d\rho / D; \quad (6.67)$$

$$C_* = C + \int_a^b [N\rho(\varphi) \rho^4 X''(\rho) + N_\varphi(\rho) \rho^3 X'(\rho) - \mathcal{H}\omega^2 \rho^4 X(\rho)] X(\rho) d\rho / D.$$

**Таблица 23**

Параметры круглых пластин	Краевые условия круглых пластин							
	Центр	Край	Центр	Край	Центр	Край	Центр	Край
	Жесткое защемле- ние	Жесткое защемле- ние	Жесткое защемле- ние	Шарнир- ное опи- рание	Жесткое защем- ление	Сво- бод- ный край	Шарнир- ное опи- рание	Шарнир- ное опи- рание
$I_1$	0,140830103		0,174437352		0,625768423		0,070668244	
$I_2$	-0,734504282		-2,15772564		0,188696919		-0,562951668	
$I_3$	-0,422490267		-0,523312036		1,83326479		-0,212004652	
$I_4$	0,100033342		0,155583304		0,940638360		0,057038952	
$r^2$	-0,551779305		-2,147395088		0,744932928		-0,289862244	
$s^4$	81,3538733- -0,708341N- 0,096563 $\omega^2$		53,4119876- -2,16108N- -0,15583 $\omega^2$		5,2569042+ +0,10170N- -0,50698 $\omega^2$		21,7716964- -1,125903N- -0,114078 $\omega^2$	
Критическая сила $N_{11}/D$ $N_\varphi=N_\tau=0$	117,821		27,165		-		20,740	
Безразмерная частота $\omega_{11}\sqrt{\mathcal{H}/D}$ $N_\Gamma=N_\varphi=N_\tau=0$	32,464		23,573		5,493 (5,176 [9])		14,307	

Из (6.67) следует, что для задач динамики и устойчивости круглых пластин необходимо дополнительно вычислить по сравнению с задачами статики следующие интегралы

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_a^a \rho^2 X^2(\rho) d\rho / 2; & I_2 &= \int_a^a \rho^4 X''(\rho) X(\rho) d\rho; \\
I_3 &= \int_a^a \rho^3 X'(\rho) X(\rho) d\rho; & I_4 &= \int_a^a \rho^4 X^2(\rho) d\rho.
\end{aligned}
\tag{6.68}$$

Данные интегралы вычислялись для пластины с единичным радиусом по формуле Симпсона с шагом  $h = 0,1 \cdot 10^{-3}$ , их значения представлены в таблице 23. Другие коэффициенты в (6.66), вид функций  $X(\rho)$ , положительные направления параметров круглой пластины представлены в таблицах 8, 19 и на рис. 1.6, 1.8.

В выражениях (6.67) могут быть учтены любые законы изменения усилий в срединной плоскости. Для  $N_\varphi(\rho)$  это выполняется непосредственно, для  $N_r$  и  $N_\rho(\varphi)$  путем кусочно-постоянной аппроксимации.

### 6.7.1. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

Решение задачи Коши (6.66), как и в §6.3.1, можно записать в виде интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода в матричной форме (6.49). Представим основные случаи фундаментальных ортонормированных функций.

1 случай.  $|S| > |r|$ . Корни (4.23) комплексные  $\kappa_{1,4} = \pm \alpha \pm i\beta$ .

$\alpha = \sqrt{(s^2 - r^2)/2}$ ;  $\beta = \sqrt{(s^2 + r^2)/2}$ ; Фундаментальные функции имеют вид (6.50).

2 случай.  $S^4 > 0$ ;  $|S| < |r|$ ;  $r^2 < 0$ . Корни (4.23) действительные и разные

$\kappa_{1,2} = \pm \alpha$ ;  $\kappa_{3,4} = -\beta$ ;  $\alpha = \sqrt{-r^2 + \sqrt{r^4 - S^4}}$ ;  $\beta = \sqrt{-r^2 - \sqrt{r^4 - S^4}}$ ;

$$A_{11} = \frac{(\beta^2 + r_M^2)ch\alpha\varphi - (\alpha^2 + r_M^2)ch\beta\alpha}{\beta^2 - \alpha^2}; \quad A_{12} = \frac{\beta(\beta^2 + r_Q^2)sh\alpha\varphi - \alpha(\alpha^2 + r_Q^2)sh\beta\alpha}{\alpha\beta(\beta^2 - \alpha^2)};$$

$$A_{13} = \frac{-ch\alpha\varphi + ch\beta\varphi}{A_M(\beta^2 - \alpha^2)}; \quad A_{14} = \frac{-\beta sh\alpha\varphi + \alpha sh\beta\varphi}{A_Q\alpha\beta(\beta^2 - \alpha^2)};$$

$$A_{21} = \frac{\alpha(\beta^2 + r_M^2)sh\alpha\varphi - \beta(\alpha^2 + r_M^2)sh\beta\alpha}{\beta^2 - \alpha^2}; \quad A_{22} = \frac{(\beta^2 + r_Q^2)ch\alpha\varphi - (\alpha^2 + r_Q^2)ch\beta\alpha}{\beta^2 - \alpha^2};$$

$$A_{23} = \frac{-\alpha sh\alpha\varphi + \beta sh\beta\varphi}{A_M(\beta^2 - \alpha^2)}; \quad A_{24} = \frac{-ch\alpha\varphi + ch\beta\varphi}{A_Q(\beta^2 - \alpha^2)}; \tag{6.69}$$

$$A_{31} = \frac{A_M(\beta^2 + r_M^2)(\alpha^2 + r_M^2)(ch\alpha\varphi - ch\beta\varphi)}{\beta^2 - \alpha^2}; \quad A_{33} = \frac{-(\alpha^2 + r_M^2)ch\alpha\varphi + (\beta^2 + r_M^2)ch\beta\varphi}{\beta^2 - \alpha^2};$$

$$A_{32} = \frac{A_M[\beta(\beta^2 + r_Q^2)(\alpha^2 + r_M^2)sh\alpha\varphi - \alpha(\alpha^2 + r_Q^2)(\beta^2 + r_M^2)sh\beta\varphi]}{\alpha\beta(\beta^2 - \alpha^2)};$$

$$A_{34} = \frac{A_M [-\beta(\alpha^2 + r_M^2)sh\alpha\varphi + \alpha(\beta^2 + r_M^2)sh\beta\alpha]}{A_Q \alpha \beta (\beta^2 - \alpha^2)}; \quad A_{42} = \frac{A_Q (\alpha^2 + r_Q^2)(\beta^2 + r_Q^2)(ch\alpha\varphi - ch\beta\varphi)}{\beta^2 - \alpha^2};$$

$$A_{41} = \frac{A_Q [\alpha(\beta^2 + r_M^2)(\alpha^2 + r_Q^2)sh\alpha\varphi - \beta(\alpha^2 + r_M^2)(\beta^2 + r_Q^2)sh\beta\varphi]}{\beta^2 - \alpha^2};$$

$$A_{43} = \frac{-\alpha(\alpha^2 + r_Q^2)sh\alpha\varphi + \beta(\beta^2 + r_Q^2)sh\beta\varphi}{\beta^2 - \alpha^2} \frac{A_Q}{A_M}; \quad A_{44} = \frac{-(\alpha^2 + r_Q^2)ch\alpha\varphi + (\beta^2 + r_Q^2)ch\beta\varphi}{\beta^2 - \alpha^2}.$$

3 случай.  $S^4 < 0$ ;  $r^2 \neq 0$ . Корни (4.23) действительные и мнимые

$$\kappa_{1,2} = \pm \alpha; \quad \kappa_{3,4} = \pm i\beta; \quad \alpha = \sqrt{-r^2 + \sqrt{r^4 - S^4}}; \quad \beta = \sqrt{r^2 + \sqrt{r^4 - S^4}};$$

$$A_{11} = \frac{(\beta^2 - r_M^2)ch\alpha\varphi + (\alpha^2 + r_M^2)ch\beta\varphi}{\alpha^2 + \beta^2}; \quad A_{12} = \frac{\beta(\beta^2 - r_Q^2)sh\alpha\varphi + \alpha(\alpha^2 + r_Q^2)\sin\beta\varphi}{\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)};$$

$$A_{13} = \frac{ch\alpha\varphi - \cos\beta\varphi}{A_M(\alpha^2 + \beta^2)}; \quad A_{14} = \frac{\beta sh\alpha\varphi - \alpha \sin\beta\varphi}{A_Q \alpha \beta (\alpha^2 + \beta^2)};$$

$$A_{21} = \frac{\alpha(\beta^2 - r_M^2)sh\alpha\varphi - \beta(\alpha^2 + r_M^2)sh\beta\varphi}{\alpha^2 + \beta^2}; \quad A_{22} = \frac{(\beta^2 - r_Q^2)ch\alpha\varphi + (\alpha^2 + r_Q^2)\cos\beta\varphi}{\alpha^2 + \beta^2};$$

$$A_{23} = \frac{\alpha sh\alpha\varphi + \beta \sin\beta\varphi}{A_M(\alpha^2 + \beta^2)}; \quad A_{24} = \frac{ch\alpha\varphi - \cos\beta\varphi}{A_Q(\alpha^2 + \beta^2)}; \quad (6.70)$$

$$A_{31} = A_M (\alpha^2 + r_M^2)(\beta^2 - r_M^2) \frac{ch\alpha\varphi - \cos\beta\varphi}{\alpha^2 + \beta^2}; \quad A_{33} = \frac{(\alpha^2 + r_M^2)ch\alpha\varphi + (\beta^2 - r_M^2)\cos\beta\varphi}{\alpha^2 + \beta^2};$$

$$A_{32} = \frac{A_M [\beta(\beta^2 - r_Q^2)(\alpha^2 + r_M^2)sh\alpha\varphi - \alpha(\alpha^2 + r_Q^2)(\beta^2 - r_M^2)\sin\beta\varphi]}{\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)};$$

$$A_{34} = \frac{A_M \beta(\alpha^2 + r_M^2)sh\alpha\varphi + \alpha(\beta^2 - r_M^2)\sin\beta\varphi}{A_Q \alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)}; \quad A_{42} = A_Q (\alpha^2 + r_Q^2)(\beta^2 - r_Q^2) \frac{ch\alpha\varphi - \cos\beta\varphi}{\alpha^2 + \beta^2};$$

$$A_{41} = A_Q \frac{\alpha(\beta^2 - r_M^2)(\alpha^2 + r_Q^2)sh\alpha\varphi + \beta(\beta^2 - r_Q^2)(\alpha^2 + r_M^2)\sin\beta\varphi}{\alpha^2 + \beta^2};$$

$$A_{43} = \frac{A_Q \alpha(\alpha^2 + r_Q^2)sh\alpha\varphi - \beta(\beta^2 - r_Q^2)\sin\beta\varphi}{A_M \alpha^2 + \beta^2}; \quad A_{44} = \frac{(\alpha^2 + r_Q^2)ch\alpha\varphi + (\beta^2 - r_Q^2)\cos\beta\varphi}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

4 случай.  $S^4 > 0$ ;  $|S| < |r|$ ;  $r^2 > 0$ . Корни (4.23) мнимые

$$\kappa_{1,2} = \pm i\alpha; \quad \kappa_{3,4} = \pm i\beta; \quad \alpha = \sqrt{r^2 - \sqrt{r^4 - S^4}}; \quad \beta = \sqrt{r^2 + \sqrt{r^4 - S^4}};$$

$$A_{11} = \frac{(\beta^2 - r_M^2)\cos\alpha\varphi - (\alpha^2 - r_M^2)\cos\beta\varphi}{\beta^2 - \alpha^2}; \quad A_{12} = \frac{\beta(\beta^2 - r_Q^2)\sin\alpha\varphi - \alpha(\alpha^2 - r_Q^2)\sin\beta\varphi}{\alpha\beta(\beta^2 - \alpha^2)};$$

$$A_{13} = \frac{\cos\alpha\varphi - \cos\beta\varphi}{A_M(\beta^2 - \alpha^2)}; \quad A_{14} = \frac{\beta \sin\alpha\varphi - \alpha \sin\beta\varphi}{A_Q \alpha \beta (\beta^2 - \alpha^2)};$$

$$\begin{aligned}
A_{21} &= \frac{-\alpha(\beta^2 - r_M^2)\sin\alpha\varphi + \beta(\alpha^2 - r_M^2)\sin\beta\varphi}{\beta^2 - \alpha^2}; & A_{22} &= \frac{(\beta^2 - r_Q^2)\cos\alpha\varphi - (\alpha^2 - r_Q^2)\cos\beta\varphi}{\beta^2 - \alpha^2}; \\
A_{23} &= \frac{-\alpha\sin\alpha\varphi + \beta\sin\beta\varphi}{A_M(\beta^2 - \alpha^2)}; & A_{24} &= \frac{\cos\alpha\varphi - \cos\beta\varphi}{A_Q(\beta^2 - \alpha^2)}; \\
A_{31} &= A_M(\beta^2 - r_M^2)(\alpha^2 - r_M^2) \frac{-\cos\alpha\varphi + \cos\beta\varphi}{\beta^2 - \alpha^2}; & A_{33} &= \frac{-(\alpha^2 - r_M^2)\cos\alpha\varphi + (\beta^2 - r_M^2)\cos\beta\varphi}{\beta^2 - \alpha^2}; \\
A_{32} &= A_M \frac{-\beta(\beta^2 - r_Q^2)(\alpha^2 - r_M^2)\sin\alpha\varphi + \alpha(\alpha^2 - r_Q^2)(\beta^2 - r_M^2)\sin\beta\varphi}{\alpha\beta(\beta^2 - \alpha^2)}; \\
A_{34} &= \frac{A_M - \beta(\alpha^2 - r_M^2)\sin\alpha\varphi + \alpha(\beta^2 - r_M^2)\sin\beta\varphi}{A_Q \alpha\beta(\beta^2 - \alpha^2)}; \\
A_{41} &= A_Q \frac{\alpha(\alpha^2 - r_Q^2)(\beta^2 - r_M^2)\sin\alpha\varphi - \beta(\beta^2 - r_Q^2)(\alpha^2 - r_M^2)\sin\beta\varphi}{\beta^2 - \alpha^2}; \\
A_{42} &= A_Q(\alpha^2 - r_Q^2)(\beta^2 - r_Q^2) \frac{-\cos\alpha\varphi + \cos\beta\varphi}{\beta^2 - \alpha^2}; \\
A_{43} &= \frac{A_Q}{A_M} \frac{\alpha(\alpha^2 - r_Q^2)\sin\alpha\varphi - \beta(\beta^2 - r_Q^2)\sin\beta\varphi}{\beta^2 - \alpha^2}; & A_{44} &= \frac{-(\alpha^2 - r_Q^2)\cos\alpha\varphi + (\beta^2 - r_Q^2)\cos\beta\varphi}{\beta^2 - \alpha^2}.
\end{aligned} \tag{6.71}$$

Выражения (6.69) – (6.71) переходят в фундаментальные функции для прямоугольных пластин, если  $r_M^2 = \mu r^2$ ;  $r_Q^2 = (2 - \mu)r^2$ ;  $A_M = A_Q = A$ . Добавим, что вариационный метод Канторовича-Власова исключает функции Бесселя, применяемые обычно при решении задач статики, динамики и устойчивости круглых пластин [19, 20, 26, 72, 92 и др.].

## 6.7.2. ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Собственные значения круглых пластин можно определить из трансцендентного уравнения (6.61), которое в данном случае примет вид

$$|\mathbf{A}_*(\omega, N_\varphi, N_\rho, N_\tau)| = 0. \tag{6.72}$$

**Пример 35.** Рассмотрим осесимметричные задачи на собственные значения, когда образуется одна полуволна в радиальном направлении, и отсутствуют полуволны в направлении угловой координаты («шляпообразные» формы колебаний и потери устойчивости). Матрица  $\mathbf{C}$  преобразования (1.38) будет единичной, а матрица собственных значений примет вид ( $N_\varphi = N_\tau = 0$ )

$$\mathbf{A}_*(\omega, N_\rho) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A_{11}-1 & A_{12} & -A_{13} & -A_{14} \\ \hline A_{21} & A_{22}-1 & -A_{23} & -A_{24} \\ \hline \end{array}. \tag{6.73}$$



$-A_{31}$	$-A_{32}$	$A_{33-1}$	$A_{34}$
$-A_{41}$	$-A_{42}$	$A_{43}$	$A_{44-1}$

Вычисляя методом Гаусса определитель матрицы (6.73) ( $\mu = 0,3$ ), фиксируем значения  $N_p$ ,  $\omega$ , при которых выполняется условие (6.72). Критические силы потери устойчивости и частоты собственных колебаний представлены в таблице 23. Следуя выводам §6.6 отметим, что частоты и критические силы по МГЭ завышены ( $N_p$  и  $\omega$  входят в коэффициент  $S$  дифференциального уравнения (6.66)) по отношению к точным значениям. Для сравнения приведем значение частоты свободной пластины, расчетная схема которой близка к схеме с жестко заземленной точкой в центре и свободными краями, из работы [9]  $\omega = 5,176\sqrt{D/\gamma h}$ .

В отличие от прямоугольной пластины поведение определителя круглой пластины (6.73) характерно постоянством его знака. Интервал, содержащий корни трансцендентного уравнения (6.72), в этом случае находится при нарушении монотонного изменения определителя. Визуально это проявляется в резком уменьшении порядка значений определителя. Относительная величина шага изменения определителя  $h = 0.001$  надежно выявляет подозрительные на корни интервалы. Далее корни уточняются.

## 6.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПЛАСТИН С КОМБИНИРОВАННЫМ КОНТУРОМ

Пластины со сложными геометрическими и краевыми условиями могут быть дискретизированы на ряд отдельных прямоугольных и круглых подобластей. Для дискретизированной пластины составляется трансцендентное уравнение (6.72), из которого определяются собственные значения. Чем меньше отклонение контура пластины от контура заменяющей ее пластины, тем точнее будут собственные значения.

Пример 36. Определить критическую силу и частоты собственных колебаний Г-образной пластины с комбинированным контуром (рис. 6.10).

Здесь предполагается, что круглый и прямоугольные элементы находятся в условиях всестороннего сжатия. При этом для прямоугольных подобластей ( $\gamma = h = D = a = 1$ ;  $\mu = 0,3$ ):  $r^2 = -12,302617 + N/2$ ;  $S^4 = 500,5638 - 12,302617N - \omega^2$ ; для секториальной подобласти:  $r^2 = -0,551779 + 0,135945N$ ;  $S^4 = 81,35384 - 1,116859N - 0,096563\omega^2$ .

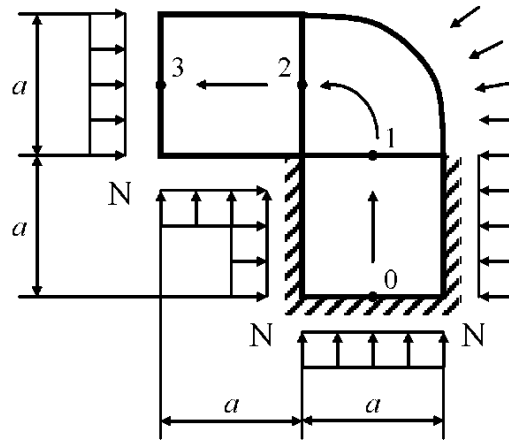


Рис. 6.10

Матрица уравнения (6.72) пластины примет вид

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		
1			$-A_{13}$	$-A_{14}$	$-1$									3
2			$-A_{23}$	$-A_{13}$		$-1$								4
3			$A_{33}$	$A_{34}$			$-1$							7
4			$A_{43}$	$A_{44}$				$-1$						8
5					$A_{11}$	$A_{12}$	$-A_{13}$	$-A_{14}$	$-1$					5
6					$A_{21}$	$A_{22}$	$-A_{23}$	$-A_{24}$		$-1$				6
7					$-A_{31}$	$-A_{32}$	$A_{33}$	$A_{34}$				$-1$		11
8					$-A_{41}$	$-A_{42}$	$A_{43}$	$A_{44}$					$-1$	12
9									$A_{11}$	$A_{12}$	$-A_{13}$	$-A_{14}$		9
10									$A_{21}$	$A_{22}$	$-A_{23}$	$-A_{13}$		10
11	$-1$								$-A_{31}$	$-A_{32}$	$A_{33}$	$A_{34}$		1
12		$-1$							$-A_{41}$	$-A_{42}$	$A_{43}$	$A_{44}$		2

Переставляя строки матрицы  $A^*$  в новом порядке, как показано цифрами справа, методом Гаусса находим корни ее определителя. Наличие в расчетной схеме круглого и прямоугольных элементов требует синхронизации в замене фундаментальных функций. Для данной пластины синхронная смена фундаментальных функций выполнялась автоматически и в соответствии с таблицей 24. При этом поведение определителя матрицы  $A^*$  характеризовалось четким изменением знаков при переходе через его корни.

Первая критическая сила оказалась равной  $N_{11} = 39,6041D$ . Подобная задача, но с прямоугольным средним элементом, решена в работе [75, с. 155], где первая критическая сила, приведенная к размерам пластины по рис. 6.10, равна  $N_{11} = 34,0D$ . Учитывая, что круглая по-

добласть в данной пластине более устойчива (за счет меньшей площади в плане), чем прямоугольная, можно сделать вывод о достоверности полученного результата. Частоты собственных колебаний равны ( $N = 0$ ):

$$\omega_{11} = 24,75\sqrt{D/\gamma h}; \quad \omega_{12} = 35,425\sqrt{D/\gamma h}; \quad \omega_{13} = 40,35\sqrt{D/\gamma h};$$

$$\omega_{14} = 46,35\sqrt{D/\gamma h}; \quad \omega_{15} = 68,15\sqrt{D/\gamma h}; \quad \omega_{16} = 78,75\sqrt{D/\gamma h} \text{ и т.д.}$$

**Таблица 24**

Устойчивость		
Корни характеристического уравнения		Интервалы изменения сжимающего усилия
Прямоугольные элементы	Круглый элемент	
$\kappa_{1-4} = \pm \alpha \pm i\beta$	$\kappa_{1-4} = \pm \alpha \pm i\beta$	$0 < N < 37,0$
$\kappa_{1-2} = \pm i\alpha; \quad \kappa_{3-4} = \pm i\beta$	$\kappa_{1-4} = \pm \alpha \pm i\beta$	$37,5 < N < 40,5$
$\kappa_{1-2} = \pm \alpha; \quad \kappa_{3-4} = \pm i\beta$	$\kappa_{1-4} = \pm \alpha \pm i\beta$	$41,0 < N < 45,0$
$\kappa_{1-2} = \pm \alpha; \quad \kappa_{3-4} = \pm i\beta$	$\kappa_{1-2} = \pm i\alpha; \quad \kappa_{3-4} = \pm i\beta$	$45,6 < N < 72,5$
$\kappa_{1-2} = \pm \alpha; \quad \kappa_{3-4} = \pm i\beta$	$\kappa_{1-2} = \pm \alpha; \quad \kappa_{3-4} = \pm i\beta$	$73,0 < N$
Собственные колебания		
Корни		Интервалы изменения частот
$\kappa_{1-4} = \pm \alpha \pm i\beta$	$\kappa_{1-4} = \pm \alpha \pm i\beta$	$0 < \omega < 18,5$
$\kappa_{1-2} = \pm \alpha; \quad \kappa_{3-4} = \pm \beta$	$\kappa_{1-4} = \pm \alpha \pm i\beta$	$19,0 < \omega < 22,0$
$\kappa_{1-2} = \pm \alpha; \quad \kappa_{3-4} = \pm i\beta$	$\kappa_{1-4} = \pm \alpha \pm i\beta$	$22,5 < \omega < 28,5$
$\kappa_{1-2} = \pm \alpha; \quad \kappa_{3-4} = \pm i\beta$	$\kappa_{1-2} = \pm \alpha; \quad \kappa_{3-4} = \pm \beta$	$29,0 < \omega < 29,02$
$\kappa_{1-2} = \pm \alpha; \quad \kappa_{3-4} = \pm i\beta$	$\kappa_{1-2} = \pm \alpha; \quad \kappa_{3-4} = \pm i\beta$	$29,3 < \omega$

Достоверность результатов косвенно подтверждается снижением значений и уменьшением промежутков между собственными частотами по сравнению с частотами отдельных пластин.

## 6.9. РАСЧЕТ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СКЛАДЧАТЫХ СИСТЕМ

Цилиндрические складчатые конструкции в виде оболочек и плитобалочных систем находят широкое применение в строительстве, судостроении, нефтяной, газовой, химической промышленности, машиностроении и других отраслях народного хозяйства. Элементами этих конструкций являются относительно тонкие пластины, работающие в условиях изгиба и плоской задачи теории упругости.

Метод расчета напряженно-деформированного состояния цилиндрических складчатых систем разработал проф. В.З. Власов [24]. К недостаткам метода В.З. Власова следует отнести

сложную логику формирования разрешающей системы уравнений, необходимость решать дифференциальные уравнения для каждого элемента конструкции, ограничения на торцевые условия опирания элементов складчатых систем (они должны быть одинаковыми), относительную сложность реализации алгоритма на вычислительных машинах. Позже были разработаны другие эффективные методы расчета складчатых систем. Отметим метод перемещений, основанный на решениях М. Леви (изгиб) и Л. Файлона (плоская задача) для прямоугольных пластин с шарнирным опиранием по торцам [2] и различные модификации метода перемещений и смешанного метода [46, 104]. Метод перемещений устраняет многие недостатки метода В.З. Власова в части реализации алгоритма на персональных компьютерах. Однако он привносит в методику расчета недостатки, связанные с природой метода перемещений. В частности, формирование матрицы реакций требует привлечения матричных операций, образование основной системы привносит недостатки, связанные с ее использованием, необходимы промежуточные вычисления для перехода от перемещений узлов к напряженно-деформированному состоянию во внутренних точках элементов системы.

В данной работе предлагается принципиально новый метод расчета цилиндрических складчатых систем, основанный на алгоритме МГЭ для стержневых систем. Теоретической основой метода является вариационный метод Канторовича-Власова. Решение задачи Коши изгиба прямоугольной пластины представлено в §6.2. Его можно использовать для расчета пластинчатых систем в случаях, когда плоским напряженно-деформированным состоянием элементов можно пренебречь. Алгоритм МГЭ устраняет практически все отмеченные выше недостатки существующих методов. Так, для формирования системы разрешающих уравнений типа (1.38) не используются матричные операции, не рассматривается основная система, снимаются ограничения на условия опирания пластин по торцам (граничные условия могут быть любыми, а каждая пластина может иметь смешанные граничные условия и включать как прямоугольные, так и круглые элементы), матрица коэффициентов  $\mathbf{A}^*$  сильно разрежена, хорошо обусловлена и может применяться в задачах статики, динамики и устойчивости, возможен учет ортотропии, ребер жесткости, упругого основания, переменной толщины и т.д. Таким образом, алгоритм МГЭ охватывает практически наиболее общий случай расчета. Перечисленные преимущества сопровождаются, как это бывает всегда, и недостатками. В частности, порядок матрицы  $\mathbf{A}^*$  существенно больше порядка матрицы реакций метода перемещений. Однако этот недостаток компенсируется тем, что больший порядок системы уравнений (1.38) позволяет получить из разрешающей системы существенно больше информации, чем по методу перемещений. Точность МГЭ покажем на тестовом примере.

Пример 37 [2, с. 379]. Определить изгибающие моменты, действующие в стеновых плитных панелях и в плитах перекрытия в конструкции, среднее сечение которой показано на рис. 6.11.

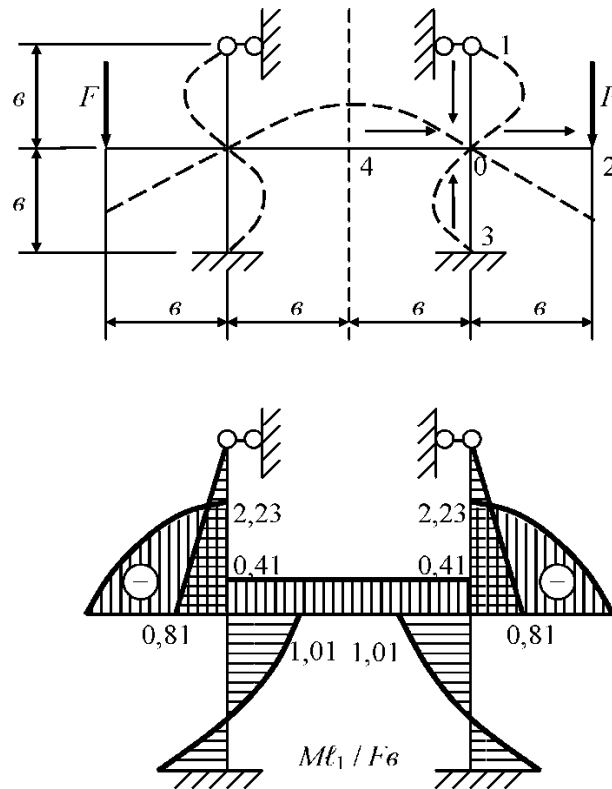


Рис. 6.11

Вследствие симметрии рассмотрим правую часть, где ось  $ox$  направлена перпендикулярно рисунку. Систему разбиваем на 4 пластины, которые заменяем обобщенными стержнями. Получается плоская стержневая система. Стрелками обозначаем начало и конец всех стержней. Нумеруем граничные точки. Толщины всех элементов одинаковы,  $\ell = \sigma = 1$ ,  $\ell_1 = 5,24\sigma$ , на торцах пластин шарнирное опирание,  $\mu = 0,15$ . Формируем матрицы  $X(\sigma)$ ,  $Y(\ell)$ . Данная конструкция позволяет пренебречь плоской задачей (узловые линии не смещаются), поэтому в матрицах помещаем параметры изгиба пластин по уравнению (6.20) с фундаментальными функциями (6.23) при  $r = S = n\pi / \ell_1$ . Уравнения равновесия и угловых перемещений узла составляются точно так же, как и для плоской стержневой системы. Для начальных и конечных параметров аналогично учитываются краевые условия.

1	$DW^{1-0}(\sigma) = 0; \quad Q^{1-0}(\ell)$
2	$D\theta^{1-0}(\sigma)$

1	$DW^{1-0}(\ell) = 0$
2	$D\theta^{1-0}(\ell) = D\theta^{0-2}(\sigma)$

3	$M^{1\ 0}(o)=0; M^{4\ 0}(\ell)$
4	$Q^{1\ 0}(o)$
5	$DW^{4\ 0}(o)$
6	$D\theta^{4\ 0}(o)=0; Q^{4\ 0}(\ell)$
7	$M^{4\ 0}(o)$
$X_* = 8$	$Q^{4\ 0}(o)=0; M^{3\ 0}(\ell)$
9	$DW^{3\ 0}(o)=0; Q^{3\ 0}(\ell)$
10	$D\theta^{3\ 0}(o)=0; DW^{0\ 2}(\ell)$
11	$M^{3\ 0}(o)$
12	$Q^{3\ 0}(o)$
13	$DW^{0\ 2}(o)=0; D\theta^{0\ 2}(\ell)$
14	$D\theta^{0\ 2}(o)$
15	$M^{0\ 2}(o)$
16	$Q^{0\ 2}(o)$

3	$M^{1\ 0}(\ell)=M^{0\ 2}(o)-M^{4\ 0}(\ell)-M^{3\ 0}(\ell)$
4	$Q^{1\ 0}(\ell)$
5	$DW^{4\ 0}(\ell)=0$
6	$D\theta^{4\ 0}(\ell)=D\theta^{0\ 2}(o)$
7	$M^{4\ 0}(\ell)$
$Y = 8$	$Q^{4\ 0}(\ell)$
9	$DW^{3\ 0}(\ell)=0$
10	$D\theta^{3\ 0}(\ell)=D\theta^{0\ 2}(o)$
11	$M^{3\ 0}(\ell)$
12	$Q^{3\ 0}(\ell)$
13	$DW^{0\ 2}(\ell)$
14	$D\theta^{0\ 2}(\ell)$
15	$M^{0\ 2}(\ell)=0$
16	$Q^{0\ 2}(\ell)=0$

В матрице  $X(o)$  нулевыми оказались 1, 3, 6, 8, 9, 10 и 13 строки, соответственно обнуляем столбцы матрицы  $A$  с теми же номерами. Определив адреса и значения компенсирующих элементов, получаем уравнение МГЭ для пластинчатой системы. Как и в других задачах, в матрице  $A_*$  появляются нулевые ведущие элементы. Переставив строки матриц  $A_*$ ,  $B$  в новом порядке, методом Гаусса получаем начальные параметры. В частности, при  $n=1$ ,  $\ell_1=5,24$ ,  $F=1$  будем иметь:

стержень 0-2

$$D\theta^{0\ 2}(o)=0,03523; M^{0\ 2}(o)=-0,78302; Q^{0\ 2}(o)=1,00223;$$

стержень 4-0

$$DW^{4\ 0}(o)=-0,01656; Q^{0\ 1}(o)=-0,08366;$$

стержень 1-0

$$D\theta^{0\ 1}(o)=-0,01699; Q^{1\ 0}(o)=-0,28703;$$

стержень 3-0

$$M^{3\ 0}(o)=0,18234; Q^{3\ 0}(o)=-0,56001.$$



$$M_y^{0,2}(\ell_1/2, 0) = -D[W''(0)X(\ell_1/2) + \mu W(0)X''(\ell_1/2)] = -1,566 \text{ вл}^2/\ell_1.$$

Согласно §6.2.3 точное значение параметров изгиба пластины при сосредоточенной нагрузке можно получить при сохранении 5 членов ряда (6.2). Поэтому повторяем вычисления начальных параметров стержней при  $n = 3, 5, 7$  и  $9$ . Удобство шарнирного опирания торцов пластинчатой системы состоит в том, что в уравнении МГЭ для вычисления всех членов ряда достаточно менять только величину  $n$ . В таблице 25 представлены изгибающие моменты по МГЭ и методу перемещений [2], из которой следует полное совпадение результатов двух разных методов. Отметим, что результаты метода перемещений являются точными, поскольку составлялось только одно уравнение, и погрешности из-за решения системы уравнений отсутствуют. По МГЭ составлена система уравнений, порядок которой в 16 раз больше порядка системы метода перемещений и получены такие же результаты. Этот пример наглядно иллюстрирует возможности МГЭ, вытекающие из внутренней структуры построения матриц и свойств ортонормированной системы фундаментальных функций. Кроме того, данный пример является доказательством возможности применимости алгоритма МГЭ к расчету цилиндрических

**Таблица 25**

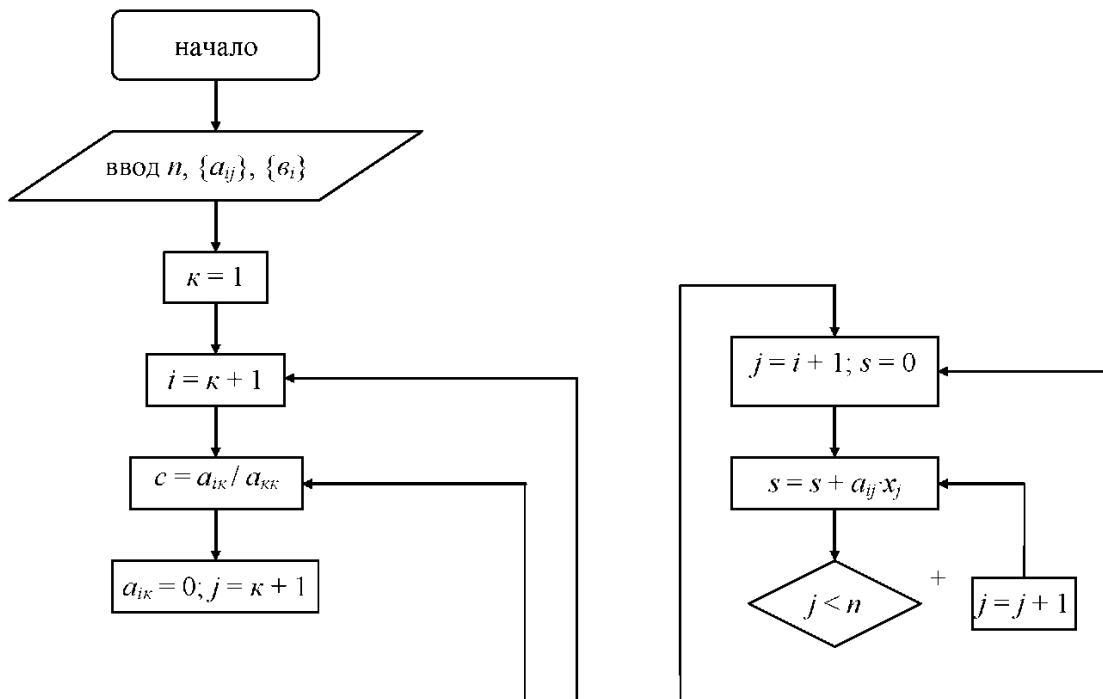
Номер члена ряда, $n$	$M^{0,2}(\ell_1/2, 0)\ell_1 / F\text{в}$		$M^{3,0}(\ell_1/2, \ell)\ell_1 / F\text{в}$	
	МГЭ	МП	МГЭ	МП
1	-1,56603	-1,565	0,75611	0,756
2	0,48865	0,487	-0,19391	-0,193
3	-0,13516	-0,135	0,04712	0,047
4	0,03778	0,038	-0,01270	-0,013
5	-0,01080	-0,01	0,00360	0,003
$\sum_{i=1}^5 M_i$	-2,23842	-2,235	1,01344	1,012
$n$	$M^{4,0}(\ell_1/2, \ell)\ell_1 / F\text{в}$		$M^{1,0}(\ell_1/2, \ell)\ell_1 / F\text{в}$	
1	0,22971	0,23	0,58021	0,58
2	-0,12614	-0,126	-0,16860	-0,168
3	0,04292	0,043	0,04511	0,045
4	-0,01250	-0,012	-0,01258	-0,012
5	0,00360	0,003	0,00360	0,003
$\sum_{i=1}^5 M_i$	0,41487	0,414	0,81010	0,808

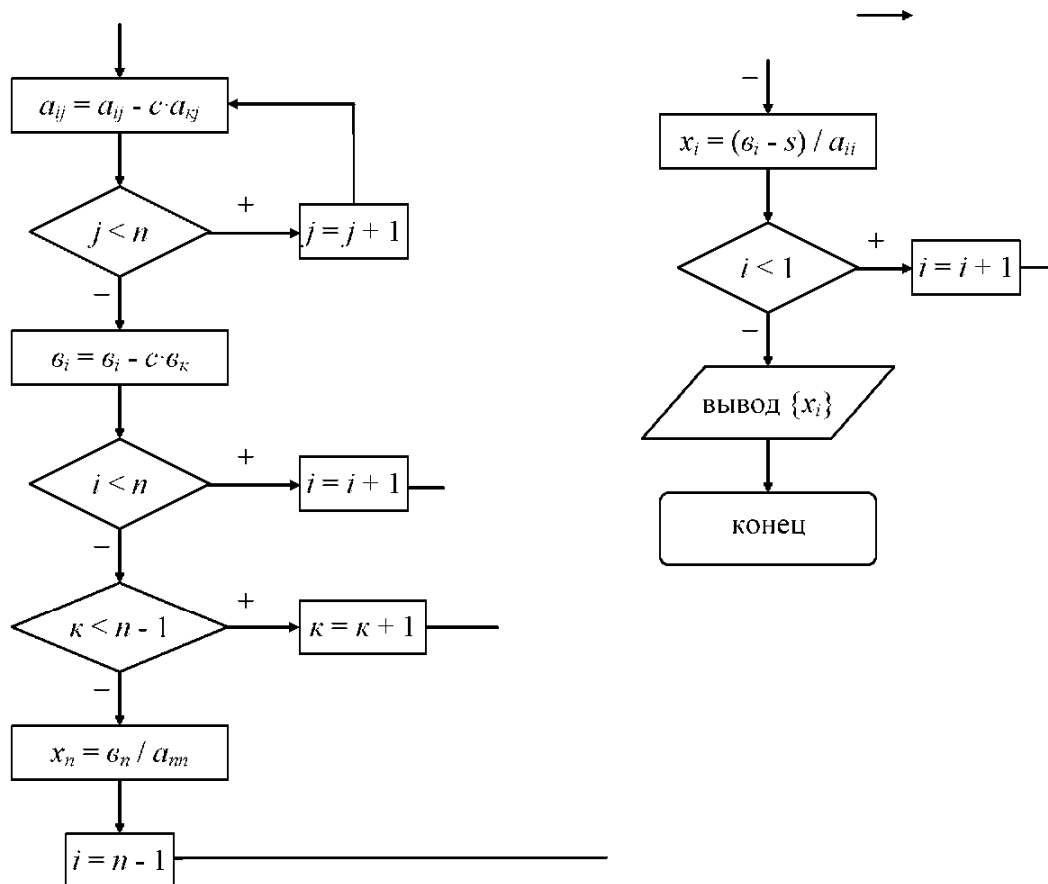
складчатых систем, который сводится к расчету плоской стержневой системы. Эпюра изгибающих моментов в среднем сечении пластин показана на рис. 6.11.





Программа примера №3. Предназначена для решения системы уравнений  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = -\mathbf{B}$  методом исключения Гаусса без выбора главных элементов и реализует следующую блок-схему





**Рис. 1**

Обозначения переменных, принятых в программе:

AZ (12, 12) – матрица коэффициентов  $\mathbf{A}^*$ ;

X (12) – матрица начальных и конечных параметров  $\mathbf{X}^*$ ;

B (12) – вектор нагрузки  $\mathbf{B}$ ;

K, C, S – вспомогательные переменные алгоритма метода Гаусса;

AK – изгибно-крутильная характеристика сечения тонкостенного стержня (2.15);

N – порядок системы уравнений (1.32).

Результаты работы программы выводятся в файл с именем rez. for, который помещается в ту же папку, где находится головная программа.

```
PROGRAM PR 3
```

```
DOUBLE PRECISION AZ (12, 12), X (12), B (12), C, S, AK
```

```
OPEN (1, file = ' rez. for '
```

```
N = 12
```

```
DO 1 I = 1, N
```

```
DO 1 J = 1, N
```

$B(1) = 0.0$   
1  $AZ(1, 1) = 0.0$   
 $AZ(1, 1) = -1.0$   
 $AZ(1, 3) = AK * DSINH(AK * 8.0)$   
 $AZ(1, 4) = DCOSH(AK * 8.0)$   
 $B(1) = -DSINH(AK * 8.0)/AK$   
 $AZ(2, 2) = -1.0$   
 $AZ(2, 7) = AK * DSINH(AK * 6.0)$   
 $AZ(2, 8) = DCOSH(AK * 6.0)$   
 $B(2) = -3.2 * DCOSH(AK * 3.0)$   
 $AZ(3, 3) = -(DCOSH(AK * 8.0) - 1.0)$   
 $AZ(3, 4) = -(DSINH(AK * 8.0) - AK * 8.0) / AK$   
 $B(3) = -(-1.0) * ((DCOSH(AK * 8.0) - 1.0) / AK**2 - 32.0)$   
 $AZ(4, 3) = DCOSH(AK * 8.0)$   
 $AZ(4, 4) = DSINH(AK * 8.0) / AK$   
 $AZ(4, 7) = -1.0$   
 $B(4) = -DSINH(AK * 8.0) / AK$   
 $AZ(5, 5) = -1.0$   
 $AZ(5, 10) = 2.0$   
 $AZ(5, 11) = -(DCOSH(AK * 2.0) - 1.0)$   
 $AZ(5, 12) = -(DSINH(AK * 2.0) - AK * 2.0) / AK$   
 $AZ(6, 3) = -AK * DSINH(AK * 8.0)$   
 $AZ(6, 4) = AZ(3, 3)$   
 $AZ(6, 6) = -1.0$   
 $B(6) = (DSINH(AK * 8.0) / AK - 8.0)$   
 $AZ(7, 6) = 6.0$   
 $AZ(7, 7) = -(DCOSH(AK * 6.0) - 1.0)$   
 $AZ(7, 8) = -(DSINH(AK * 6.0) - AK * 6.0) / AK$   
 $B(7) = 3.2 * (DSINH(AK * 3.0) - AK * 3.0) / AK$   
 $AZ(8, 7) = DCOSH(AK * 6.0)$   
 $AZ(8, 8) = DSINH(AK * 6.0) / AK$   
 $AZ(8, 11) = -1.0$   
 $B(8) = -3.2 * DSINH(AK * 3.0) / AK$   
 $AZ(9, 9) = -1.0$   
 $AZ(9, 10) = 1.0$

```

AZ (9, 11) = - AK * DSINH (AK * 2.0)
AZ (9, 12) = AZ (5, 11)
AZ (10, 6) = 1.0
AZ (10, 7) = - AK * DSINH (AK * 6.0)
AZ (10, 8) = AZ (7,7)
AZ (10, 10) = - 1.0
B (10) = 3.2 * (DCOSH (AK * 3.0) - 1.0)
AZ (11, 11) = DCOSH (AK * 2.0)
AZ (11, 12) = DSINH (AK * 2.0) / AK
B (11) = - 1.0
AZ (12, 9) = 1.0
AZ (12, 11) = - AZ (9, 11)
AZ (12, 12) = AZ (11, 11)
K = 1
5 I = K + 1
51 C = AZ (I, K) / AZ (K, K)
    AZ (I, K) = 0.0
    J = K + 1
7 AZ (I, J) = AZ (I, J) - C * AZ (K, J)
    IF (J. LT. N) GO TO 6
    B (I) = B (I) - C * B (K)
    IF (I. LT. N) GO TO 8
    IF (K. LT. (N-1)) GO TO 9
    GO TO 11
6 J = J + 1
    GO TO 7
8 I = I + 1
    GO TO 51
9 K = K + 1
    GO TO 5
11 X (N) = B (N) / AZ (N, N)
    I = N - 1
12 J = I + 1
    S = 0.0
16 S = S + AZ (I, J) * X (J)

```

```

      IF (J. LT. N) GO TO 14
      X (I) = (B (I) - S) / AZ (I, I)
      GO TO 15
14 J = J + 1
      GO TO 16
15 IF (I. GT. 1) GO TO 17
18 FORMAT (E40.9)
      WRITE (1, 18) (X (I), I = 1, N)
      STOP
17 I = I - 1
      GO TO 12
      END

```

Программа примера №6. Предназначена для решения системы уравнений  $A \cdot X = -B$  методом исключения Гаусса без выбора главных элементов и реализует блок-схему по рис. 1 приложения.

Обозначения переменных, принятых в программе:

$n$  – порядок системы уравнений (1.38);

$s, i, j, k$  – переменные алгоритма метода Гаусса;

$a$  – матрица коэффициентов  $A$ ;

$x$  – вектор неизвестных  $X$ ;

$b$  – вектор нагрузки  $B$ .

Результаты работы программы выводятся в файл с именем rez. pas, который помещается в папку temp на диске C.

```

PROGRAM PR 6;
label 1, 2, 3, 4, 5; const n = 16;
var c, s: real; a: array [1..n, 1..n] of real;
x, b: array [1..n] of real; i, j, k: integer; fl: text;
begin
assign (fl, 'c: \temp \rez. pas');

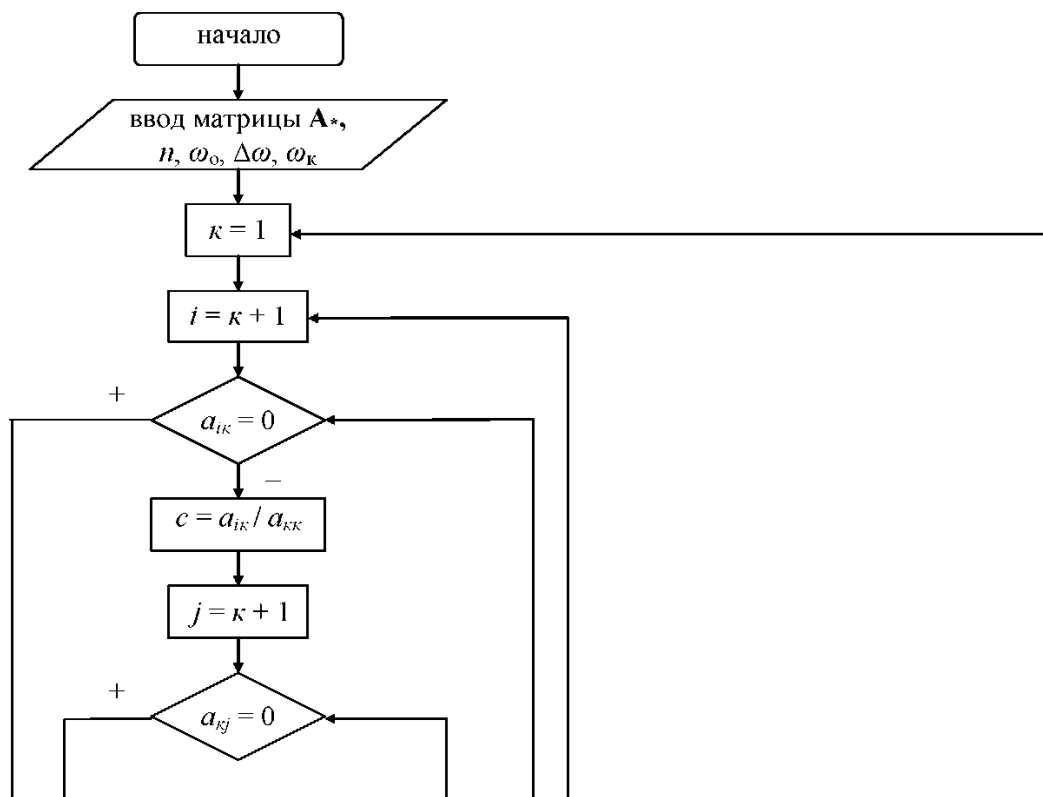
```

```

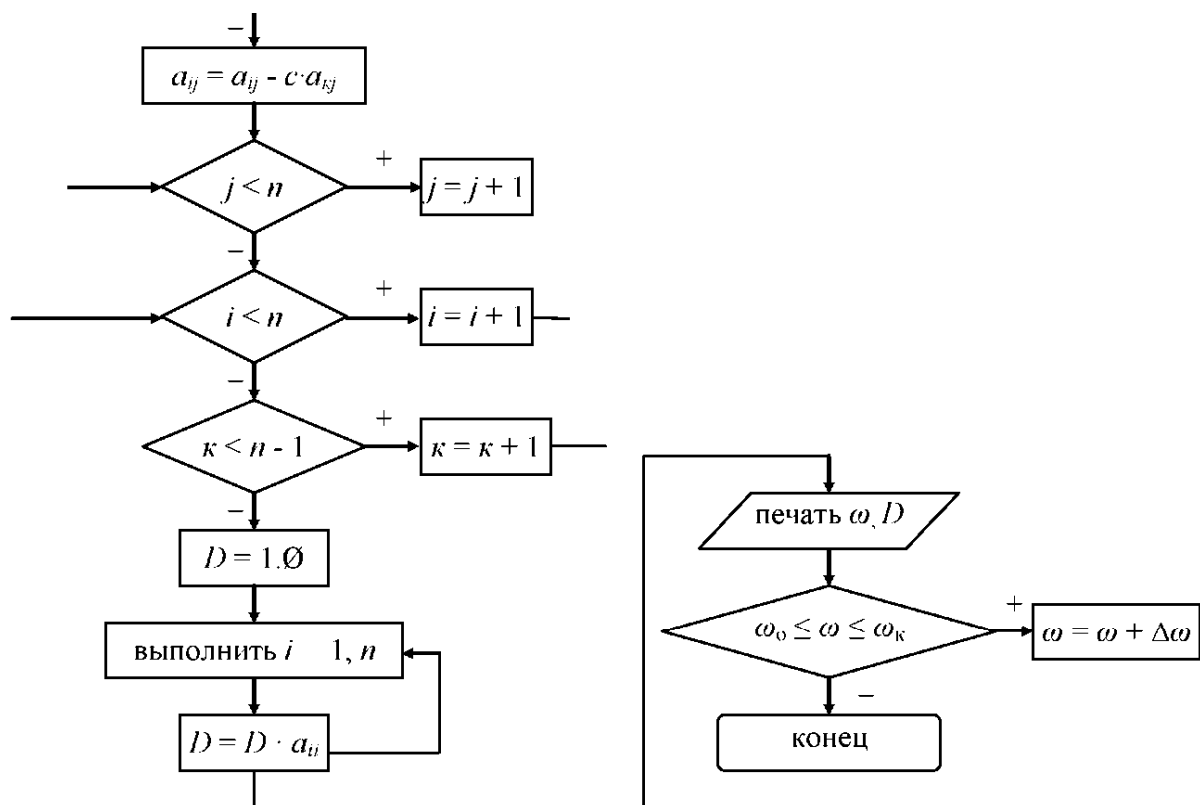
a [1, 1]: = - 1; a [1, 4]: = 1; b [1]: = 4; a [2, 2]: = - 1; a [2, 8]: = 1;
b [2]: = 4; a [3, 3]: = - 32; a [3, 4]: = - 256/3; b [3]: = - 256/6;
a [4, 3]: = - 8; a [4, 4]: = - 32; a [4, 6]: = - 1; b [4]: = - 32; b [7]: = 16.0;
a [5, 5]: = - 1; a [5, 12]: = 1; b [5]: = 12; a [6, 6]: = 6; a [6, 7]: = -18;
a [6, 8]: = - 36; b [6]: = - 18; a [7, 3]: = 1; a [7, 4]: = 8; a [7, 7]: = - 1;
a [8, 6]: = 1; a [8, 7]: = - 6; a [8, 8]: = - 18; a [8, 10]: = - 1; b [8]: = - 18;
a [9, 9]: = - 1; a [9, 14]: = 2; a [9, 15]: = - 2; a [9, 16]: = - 4/3; b [9]: = - 4/3;
a [10, 10]: = 6; a [10, 11]: = - 18; a [10, 12]: = - 36; b [10]: = - 108;
a [11, 7]: = 1; a [11, 8]: = 6; a [11, 11]: = - 1; b [11]: = 12; a [12, 11]: = 1;
a [12, 12]: = 6; a [12, 15]: = -1; b [12]: = 36; a [13, 13]: = - 1;
a [13, 14]: = 1; a [13, 15]: = - 2; a [13, 16]: = - 2; b [13]: = - 8/3;
a [14, 10]: = 1; a [14, 11]: = - 6; a [14, 12]: = - 18; a [14, 14]: = - 1;
b [14]: = - 72; a [15, 15]: = 1; a [15, 16]: = 2; b [15]: = 4; a [16, 16]: = 1;
b [16]: = 4; k := 1; 1: i = k + 1; 2: c := a [i, k] / a [k, k]; a [i, k]: = 0;
j := k + 1; 3: a [i, j]: = a [i, j] - c * a [k, j];
if j < n then begin j := j + 1; goto 3; end
else b[i]: = b[i] - c * b[k]; if i < n then begin i := i + 1; goto 2; end
else if k < (n-1) then begin k := k + 1; goto 1; end
else x [n]: = b [n] / a [n, n]; i := n - 1; 4: j := i + 1; s := 0;
5: s := s + a [i, j] * x [j]; if j < n then begin j := j + 1; goto 5; end
else x [i]: = (b [i] - s) / a [i, i];
if i > 1 then begin i := i - 1; goto 4; end else begin
rewrite (f1); for i := 1 to n do
writeln (' x [', i, '] = ', x [i]: 12: 4); end: close (f1);
end.

```

Программа примера №13. Предназначена для поиска частот соответственных колебаний упругих систем путем вычисления определителя  $|A^*(\omega)|$  методом исключения Гаусса (без выбора главных элементов) на определенном интервале и реализует следующую блок-схему.







**Рис. 2**

Обозначение переменных, принятых в программе:

AZ (15, 15) – матрица частотного уравнения (3.2);

N – порядок матрицы  $\mathbf{A}^*$ ;

D – величина определителя  $|\mathbf{A}^*(\omega)|$ ;

NN, K, C – вспомогательные переменные метода Гаусса;

AM – частота собственных колебаний  $\omega$ ;

X1, X2, X3 – длины элементов рамы  $\ell^{0-1}$ ,  $\ell^{2-1}$ ,  $\ell^{1-3}$ ;

AM1, AM2, AM3 – массы элементов рамы  $m^{0-1}$ ,  $m^{2-1}$ ,  $m^{1-3}$ ;

E11, E12, E13 – поперечные жесткости стержней  $EI^{0-1}$ ,  $EI^{2-1}$ ,  $EI^{1-3}$ ;

AL1, AL2, AL3 – параметры поперечных колебаний стержней  $\lambda^{0-1}$ ,  $\lambda^{2-1}$ ,  $\lambda^{1-3}$ ;

DAM – шаг изменения частоты  $\Delta\omega$ ;

N1 – число циклов вычисления определителя  $|\mathbf{A}^*(\omega)|$ .

PROGRAM PR 13

DOUBLE PRECISION AZ (15, 15), C, AM, X1, X2, X3, AM1, AM2, AM3, E11, E12, E13,

\* AL1, AL2, AL3, D, DAM

OPEN (1, file = ' rez. for ')

N1 = 1000

```

N = 15
NN = N - 1
AM = 0.1
DAM = 0.01
X1 = 1.0
X2 = 1.0
X3 = 1.0
AM1 = 1.0
AM2 = 1.0
AM3 = 1.2
EI1 = 1.0
EI2 = 1.0
EI3 = 1.0
DO 19 L = 1, N1
DO 1 I = 1, N
DO 1 J = 1, N
1 AZ (I, J) = 0.0
AL1 = (AM ** 2 * AM1 / EI1) ** 0.25
AL2 = (AM ** 2 * AM2 / EI2) ** 0.25
AL3 = (AM ** 2 * AM3 / EI3) ** 0.25
AZ (1, 1) = - 1.0
AZ (1, 7) = (DSINH (AL3 * X3) + DSIN (AL3 * X3)) / (2.0 * AL3)
AZ (1, 8) = -(DCOSH (AL3 * X3) - DCOS (AL3 * X3)) / (2.0 * AL3 ** 2)
AZ (1, 9) = -(DSINH (AL3 * X3) - DSIN (AL3 * X3)) / (2.0 * AL3 ** 3)
AZ (2, 2) = (DSINH (AL1 * X1) + DSIN (AL1 * X1)) / (2.0 * AL1)
AZ (2, 4) = -(DSINH (AL1 * X1) - DSIN (AL1 * X1)) / (2.0 * AL1 ** 3)
AZ (3, 3) = - 1.0
AZ (3, 7) = - AL3 * (DSINH (AL3 * X3) - DSIN (AL3 * X3)) / 2.0
AZ (3, 8) = (DCOSH (AL3 * X3) + DCOS (AL3 * X3)) / 2.0
AZ (3, 9) = (DSINH (AL3 * X3) + DSIN (AL3 * X3)) / (2.0 * AL3)
AZ (4, 2) = (DCOSH (AL1 * X1) + DCOS (AL1 * X1)) / 2.0
AZ (4, 4) = -(DCOSH (AL1 * X1) - DCOS (AL1 * X1)) / (2.0 * AL1 ** 2)
AZ (4, 7) = - 1.0
AZ (5, 5) = - 1.0
AZ (5, 10) = 1.0

```

$AZ(6, 2) = -AL1 * (DSINH(AL1 * X1) - DSIN(AL1 * X1)) / 2.0$   
 $AZ(6, 4) = (DSINH(AL1 * X1) + DSIN(AL1 * X1)) / (2.0 * AL1)$   
 $AZ(6, 6) = 1.0$   
 $AZ(6, 8) = -1.0$   
 $AZ(7, 7) = -1.0$   
 $AZ(7, 12) = (DCOSH(AL2 * X2) + DCOS(AL2 * X2)) / 2.0$   
 $AZ(7, 14) = -(DCOSH(AL2 * X2) - DCOS(AL2 * X2)) / (2.0 * AL2 ** 2)$   
 $AZ(8, 7) = -(DCOSH(AL2 * X2) - DCOS(AL2 * X2)) * AL2 ** 2 / 2.0$   
 $AZ(8, 8) = -AZ(3, 7)$   
 $AZ(8, 9) = AZ(3, 8)$   
 $AZ(9, 7) = AZ(3, 8)$   
 $AZ(9, 8) = -AZ(3, 9)$   
 $AZ(9, 9) = AZ(1, 8)$   
 $AZ(10, 10) = -1.0$   
 $AZ(10, 11) = 1.0$   
 $AZ(11, 11) = -1.0$   
 $AZ(11, 12) = -(DCOSH(AL2 * X2) - DCOS(AL2 * X2)) * AL2 ** 2 / 2.0$   
 $AZ(11, 14) = AZ(7, 12)$   
 $AZ(12, 12) = (DSINH(AL2 * X2) + DSIN(AL2 * X2)) / (2.0 * AL2)$   
 $AZ(12, 14) = -(DSINH(AL2 * X2) - DSIN(AL2 * X2)) / (2.0 * AL2 ** 3)$   
 $AZ(13, 2) = AZ(4, 4) * AL1 ** 4$   
 $AZ(13, 4) = AZ(4, 2)$   
 $AZ(13, 9) = -1.0$   
 $AZ(13, 13) = -1.0$   
 $AZ(14, 6) = -1.0$   
 $AZ(14, 12) = AZ(12, 14) * AL2 ** 4$   
 $AZ(14, 14) = AZ(12, 12)$   
 $AZ(15, 13) = -1.0$   
 $AZ(15, 15) = 1.0$   
 $k = 1$   
5 I = k + 1  
51 IF (AZ(I, K).EQ.0.0) GO TO 13  
    C = AZ(I, K) / AZ(K, K)  
    J = K + 1  
7 IF (AZ(K, J).EQ.0.0) GO TO 77

```

      AZ (I, J) = AZ (I, J) - C * AZ (K, J)
77 IF (J. LT. N) GO TO 6
13 IF (I. LT. N) GO TO 8
      IF (K. LT. NN) GO TO 9
      GO TO 11
6  J = J + 1
      GO TO 7
8  I = I + 1
      GO TO 51
9  K = K + 1
      GO TO 5
11 D = 1.0
      DO 12 I = 1, N
      D = D * AZ (I, I)
12 CONTINUE
14 WRITE (1,18) AM, D
18 FORMAT (2E 30.9)
19 AM = AM + DAM
      STOP
      END

```

Значение N1 выбирают в пределах 1000 – 10 000. Результаты вычисления определителя D с шагом DAM помещаются в файл с именем rez. for. Сам файл помещается в папку, где находится головная программа. Просмотр файла позволяет найти корень уравнения (3.2) – частоту собственных колебаний упругой системы.

Программа примера №14. Предназначена для поиска частот собственных колебаний упругих систем (вычисления определителя  $|\mathbf{A}^*(\omega)|$  в циклическом режиме) методом исключения Гаусса без выбора главных элементов и реализует блок-схему по рис. 2.

Обозначения переменных, принятых в программе:

$a$  – матрица  $\mathbf{A}^*$ ;

$n$  – порядок матрицы  $\mathbf{A}^*$ ;

$n1$  – число циклов вычисления определителя  $D(\lambda)$ ;

$d$  – величина определителя  $D(\lambda)$ ;

$m$  – счетчик цикла вычисления определяется  $D(\lambda)$ ;

$c, i, j, k$  – переменные прямого хода метода Гаусса;

$f1$  – файловая переменная;

$m1, m2, m3$  – погонные массы стержней 0-1, 1-2, 2-3 соответственно;

$\ell1, \ell2, \ell3$  – длины стержней 0-1, 1-2, 2-3 соответственно;

$E11, E12, E13$  – поперечные жесткости стержней 0-1, 1-2, 2-3;

$\ell a1, \ell a2, \ell a3$  – коэффициенты  $\lambda$  фундаментальных функций стержней 0-1, 1-2, 2-3;

$sh1, sh2, sh3$  – гиперболические синусы фундаментальных функций стержней 0-1, 1-2, 2-3;

$ch1, ch2, ch3$  – гиперболические косинусы фундаментальных функций стержней 0-1, 1-2, 2-3;

am – частота собственных ( $\omega$ ) колебаний;

dam – шаг изменения частоты.

Результаты работы программы (частота  $\omega$  и определитель  $D(\lambda)$ ) выводятся в файл с именем rez. pas, который помещается в папку temp на жестком диске C.

```
PROGRAM PR 14;
label 1, 2, 3, 4, 5; const n = 12;
var a: array [1..n, 1..n] of real; n1, i, j, k, m: integer;
f1: text; m1, m2, m3, EI1, EI2, EI3, l1, l2, l3, la1, la2, la3, sh1, sh2, sh3, ch1, ch2, ch3,
d, am, dam, c : real;
begin
assign (f1, 'c:\temp\rez. pas '); rewrite (f1);
m1: = 1.0; m2: = 1.0; m3: = 1.0;
EI1: = 1.0; EI2: = 1.0; EI3: = 1.0;
l1: = 6.0; l2: = 4.0; l3: = 6.0;
am: = 0.30; dam: = 0.01;
n1: = 24;
for m: = 1 to n1 do begin
la1: = exp (0.25 * ln (am * am * m1 / EI1));
la2: = exp (0.25 * ln (am * am * m2 / EI2));
la3: = exp (0.25 * ln (am * am * m3 / EI3));
sh1: = (exp (la1 * l1) - exp (- la1 * l1)) / 2.0;
sh2: = (exp (la2 * l2) - exp (- la2 * l2)) / 2.0;
sh3: = (exp (la3 * l3) - exp (- la3 * l3)) / 2.0;
ch1: = (exp (la1 * l1) + exp (- la1 * l1)) / 2.0;
ch2: = (exp (la2 * l2) + exp (- la2 * l2)) / 2.0;
ch3: = (exp (la3 * l3) + exp (- la3 * l3)) / 2.0;
for i: = 1 to n do for j: = 1 to n do a [i, j]: = 0.0;
a [1, 1]: = - 1.0;
a [1, 3]: = sqr (la1) * sqr (la1) * (sh1 - sin (la1 * l1)) / (2.0 * la1 * la1 * la1);
a [1, 4]: = (ch1 + cos (la1 * l1)) / 2.0;
a [7, 3]: = a [1, 4];
a [7, 4]: = (sh1 + sin (la1 * l1)) / (2.0 * la1);
a [7, 7]: = - 1.0; a [4, 3]: = - a [7, 4];
a [4, 4]: = - (ch1 - cos (la1 * l1)) / (2.0 * la1 * la1);
```

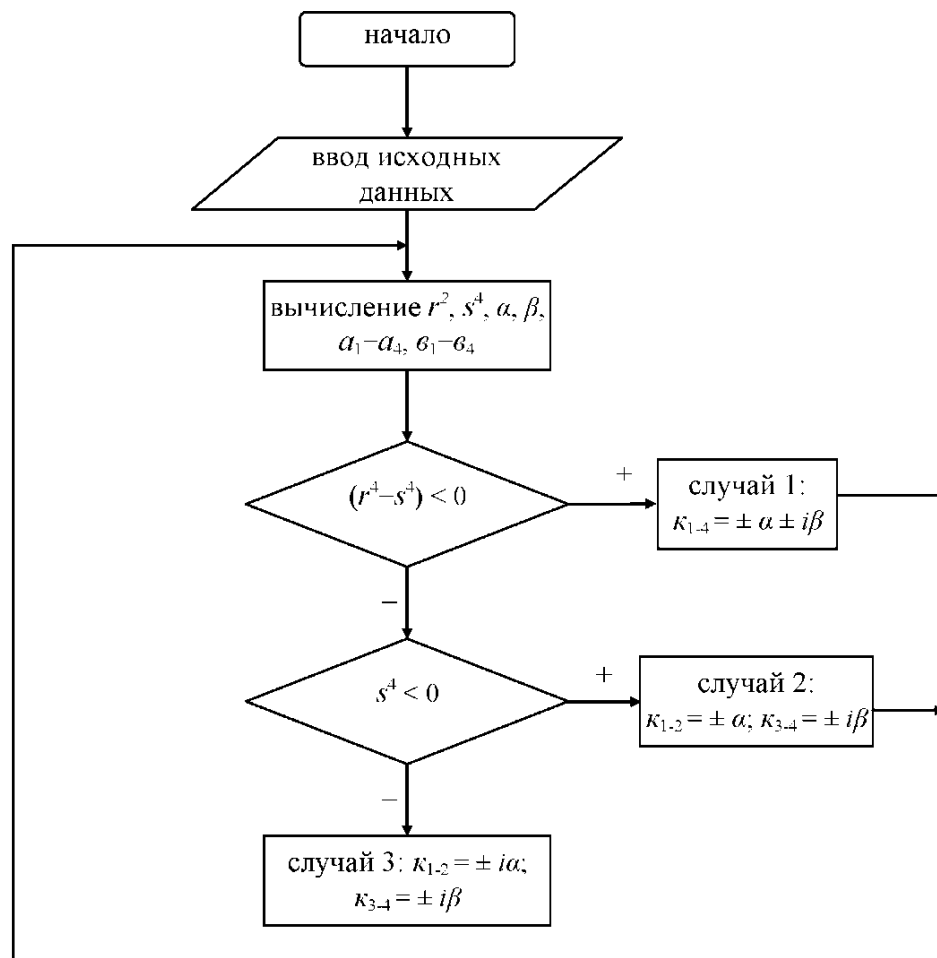
$a[4, 6] := -2.0;$   
 $a[3, 3] := a[4, 4];$   
 $a[3, 4] := -(sh1 - \sin(\ell a1 * \ell1)) / (2.0 * \ell a1 * \ell a1 * \ell a1);$   
 $a[6, 6] := sh2 + \sin(\ell a1 * \ell1) / (2.0 * \ell a2);$   
 $a[6, 7] := -(ch2 - \cos(\ell a2 * \ell2)) / (2.0 * \ell a2 * \ell a2);$   
 $a[6, 8] := -(sh2 - \sin(\ell a2 * \ell2)) / (2.0 * \ell a2 * \ell a2 * \ell a2);$   
 $a[8, 10] := -0.5;$   
 $a[8, 6] := (ch2 + \cos(\ell a2 * \ell2)) / 2.0;$   
 $a[8, 7] := -a[6, 6];$   
 $a[8, 8] := a[6, 7];$   
 $a[11, 6] := \text{sqr}(\ell a2) * \text{sqr}(\ell a2) * a[6, 8];$   
 $a[11, 7] := a[8, 6];$   
 $a[11, 8] := a[6, 6];$   
 $a[11, 11] := -1.0;$   
 $a[2, 2] := -1.0;$   
 $a[2, 6] := \text{sqr}(\ell a2) * \text{sqr}(\ell a2) * a[6, 7];$   
 $a[2, 7] := -a[11, 6];$   
 $a[2, 8] := a[8, 6];$   
 $a[10, 10] := (sh3 + \sin(\ell a3 * \ell3)) / (2.0 * \ell a3);$   
 $a[10, 11] := -(ch3 - \cos(\ell a3 * \ell3)) / (2.0 * \ell a3 * \ell a3);$   
 $a[10, 12] := -(sh3 - \sin(\ell a3 * \ell3)) / (2.0 * \ell a3 * \ell a3 * \ell a3);$   
 $a[5, 5] := -1.0;$   
 $a[5, 10] := (ch3 + \cos(\ell a3 * \ell3)) / 2.0;$   
 $a[5, 11] := -a[10, 10];$   
 $a[5, 12] := a[10, 11];$   
 $a[12, 10] := \text{sqr}(\ell a3) * \text{sqr}(\ell a3) * a[10, 12];$   
 $a[12, 11] := a[5, 10];$   
 $a[12, 12] := a[10, 10];$   
 $a[9, 9] := -1.0;$   
 $a[9, 10] := \text{sqr}(\ell a3) * \text{sqr}(\ell a3) * a[5, 12];$   
 $a[9, 11] := -a[12, 10];$   
 $a[9, 12] := a[5, 10];$   
 $k := 1; 1: i := k + 1;$   
2: if  $a[i, k] = 0.0$  then goto 3 else  
 $c := a[i, k] / a[k, k]; j := k + 1;$

```

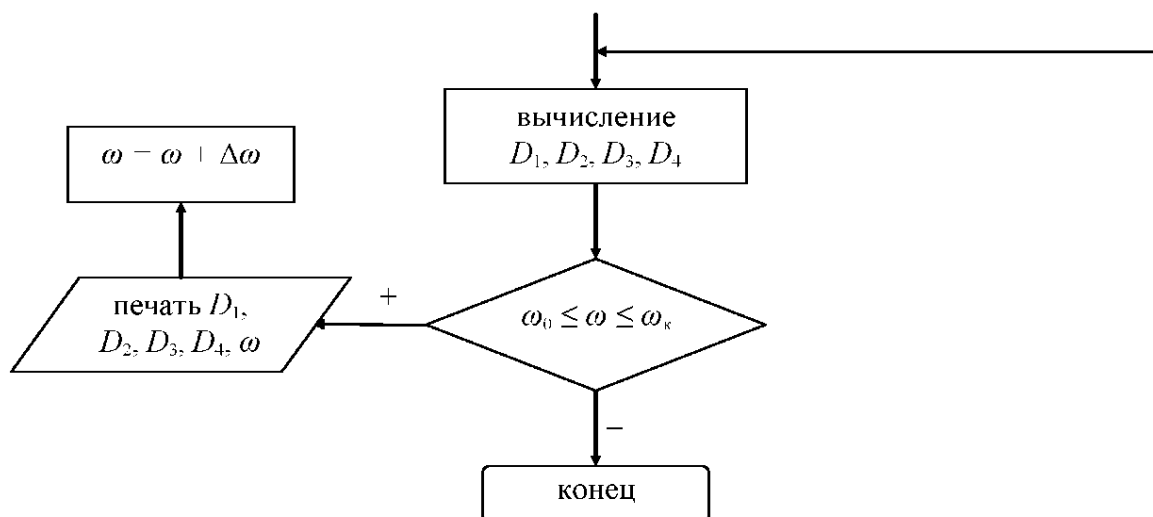
4: if a [k, j] = 0. 0 then goto 5
else a [i, j]: = a [i, j] - c * a [k, j];
5: if j < n then begin
j: = j + 1; goto 4;
end else 3: if i < n then begin i: = i + 1;
goto 2;
end else if k < (n - 1) then begin k: = k + 1;
goto 1; end
else d: = 1.0;
for i: = 1 to n do d: = d * a [i, i];
writeln (f1, ' am = ', am: 12: 6, ' d = ', d);
am: = am + dam;
end; close (f1);
end.

```

Программа для определения частот собственных колебаний по модели С.П. Тимошенко. Вычисляет значения определителей  $D_1, D_2, D_3, D_4$  (см. табл. №15) и реализует блок схему







**Рис. 3**

Обозначения переменных, принятых в программе:

$N$  – число циклов вычисления определителей  $D_1 - D_4$ ;

$TI$  – осевой момент инерции сечения  $I = hb^3/12$ ;

$EI$  – поперечная жесткость сечения стержня;

$AM$  – частота собственных колебаний  $\omega$ ;

$DAM$  – шаг изменения частоты  $\omega$ ;

$R2$  – коэффициент  $r^2$ ;  $S4$  – коэффициент  $S^4$ ;

$A1 - A8$  – коэффициенты  $a_1 - a_4$ ;  $v_1 - v_4$ ;

$AL$  – коэффициент  $\alpha$ ;

$B$  – коэффициент  $\beta$ ;

$A12 - A44$  – фундаментальные функции уравнения (4.38);

$FP1 - FP2$  – гиперболотригонометрические функции  $\Phi_1 - \Phi_4$ ;

$D1 - D2$  – определители таблицы №15;

$FX$  – продольная сила  $F_x$ ;

PROGRAM TIMOSCHENKO

DOUBLE PRECISION TI, EI, AL1, AM, DAM, R2, S4, A1, A2, A4,

\*A5, A6, A8, AL, B, A12, A13, A14, A23, A24, A33, A34, A43, A44,

\*FP1, FP2, FP3, FP4, D1, D2, D3, D4, FX

OPEN (1, file = ' rez. for ')

```

N = 1000
TI = 8,333333 * 10.0 ** (-6.0)
EI = 2.1 * 10.0 ** 11.0 * TI
AM = 0.01
DAM = 0.01
FX = 0.0
DO 1 II = 1, N
R2 = (2.163005 * 10.0 ** 13.0 * AM ** 2 * TI + (7800.0 * TI * AM ** 2 + 6.73083 *
* 10.0 * 8.0) * FX) / (TI * (2.82695 * 10.0 ** 20.0 + 4.2 * 10.0 * 11.0 * FX))
S4 = (AM ** 2 * (6.084 * 10.0 ** 5.0 * AM ** 2 - 5.2500474 * 10.0 ** 10.0)) / (TI *
* (1.4134743 * 10.0 * 20.0 + 2.1 * 10.0 ** 11.0 * FX))
A1 = 1.0 + 1.4857 * 10.0 ** (-9.0) * FX
A2 = 1.15884668 * 10.0 ** (-7.0) * AM ** 2 + 4.761904762 * 10.0 ** (-12.0) * FX / TI
A4 = 4.761904762 * 10.0 ** (-12.0) * FX / TI
A5 = (6.73083 * 10.0 ** 8.0 + FX) / (6.73083 * 10.0 ** 8.0 - 7800.0 * AM ** 2 * TI)
A6 = (2.16300474 * TI * 10.0 ** 13.0 * AM ** 2 + (6.73083 * 10.0 ** 8.0 + 7800.0 *
* TI * AM ** 2) * FX) / (TI * (1.4134743 * 10.0 * 20.0 - TI * AM ** 2 * 1.638 * 10.0 ** 15.0))
A8 = FX * AM ** 2 / (1.812146538 * 10.0 ** 16.0 - 2.1 * 10.0 ** 11.0 * TI * AM ** 2)
IF ((R2 ** 2 - S4). LT. 0.0) GO TO 2
IF (S4. LT. 0.0) GO TO 3
AL = (R2 - (R2 ** 2 - S4) ** 0.5) ** 0.5
B = (R2 + (R2 ** 2 - S4) ** 0.5)
A12 = (B * (A6 - A5 * B ** 2) * DSIN (AL) - AL * (A6 - A5 * AL ** 2) * DSIN (B)) /
* (A5 * AL * B * (AL ** 2 - B ** 2))
A13 = (- D COS (AL) + D COS (B)) / (A1 * (AL ** 2 - B ** 2))
A14 = (- B * DSIN (AL) + AL * DSIN (B)) / (A5 * AL * B * (AL ** 2 - B ** 2))
A23 = (AL * DSIN (AL) - B * DSIN (B)) / (A1 * (AL ** 2 - B ** 2))
A24 = (-DCOS (AL) + DCOS (B)) / (A5 * (AL ** 2 - B ** 2))
A33 = (- (A2 - A1 * AL ** 2) * DCOS (AL) + (A2 - A1 * B ** 2) * DCOS (B)) / (A1 * (AL **
* 2 - B ** 2))
A34 = (- B * (A2 - A1 * AL ** 2) * DSIN (AL) + AL * (A2 - A1 * B ** 2) * DSIN (B)) / (
* AL * B * (AL ** 2 - B ** 2) * A5)
A43 = (AL * (A6 - A5 * AL ** 2) * DSIN (AL) - B * (A6 - A5 * B ** 2) * DSIN (B)) / (
* A1 * (AL ** 2 - B ** 2))

```

$$A44 = (- (A6 - A5 * AL ** 2) * DCOS (AL) + (A6 - A5 * B ** 2) * DCOS (B)) / (A5 * (AL ** 2 - B ** 2))$$

GOTO 4

$$2 \quad AL = ((S4 ** 0.5 - R2) / 2.0) ** 0.5$$

$$B = ((S4 ** 0.5 + R2) / 2.0) ** 0.5$$

$$FP1 = DCOSH (AL) * DSIN (B)$$

$$FP2 = DCOSH (AL) * DCOS (B)$$

$$FP3 = DSINH (AL) * DCOS (B)$$

$$FP4 = DSINH (AL) * DSIN (B)$$

$$A12 = (B * (A6 - A5 * (B ** 2 - 3.0 * AL ** 2)) * FP3 - AL * (A6 + A5 * (AL ** 2 - 3.0 * B ** 2)) * FP1) / (2.0 * AL * B * A5 * S4 ** 0.5)$$

$$A13 = FP4 / (2.0 * AL * B * A1)$$

$$A14 = (AL * FP1 - B * FP3) / (2.0 * A5 * AL * B * S4 ** 0.5)$$

$$A23 = (AL * FP1 + B * FP3) / (2.0 * AL * B * A1)$$

$$A24 = FP4 / (2.0 * AL * B * A5)$$

$$A33 = FP2 + (A2 - A1 * R2) * FP4 / (2.0 * AL * B * A1)$$

$$A34 = ((AL * (A2 - A1 * R2) + 2.0 * AL * B ** 2 * A1) * FP1 - (B * (A2 - A1 * R2) - 2.0 * AL ** 2 * B * A1) * FP3) / (2.0 * AL * B * A5 * S4 ** 0.5)$$

$$A43 = (AL * (A6 + A5 * (AL ** 2 - 3.0 * B ** 2)) * FP1 + B * (A6 - A5 * (B ** 2 - 3.0 * AL ** 2)) * FP3) / (2.0 * AL * B * A1)$$

$$A44 = FP2 + (A6 - A5 * R2) * FP4 / (2.0 * AL * B * A5)$$

GOTO 4

$$3 \quad AL = (- R2 + (R2 ** 2 - S4) ** 0.5) ** 0.5$$

$$B = (R2 + (R2 ** 2 - S4) ** 0.5) ** 0.5$$

$$A12 = (-B * (A6 - A5 * B ** 2) * DSINH (AL) + AL * (A6 + A5 * AL ** 2) * DSIN (B)) / (AL * B * A5 * (AL ** 2 + B ** 2))$$

$$A13 = (DCOSH (AL) - DCOS (B)) / (A1 * (AL ** 2 + B ** 2))$$

$$A14 = (B * DSINH (AL) - AL * DSIN (B)) / (A5 * AL * B * (AL ** 2 + B ** 2))$$

$$A23 = (AL * DSINH (AL) + B * DSIN (B)) / (A1 * (AL ** 2 + B ** 2))$$

$$A24 = (DCOSH (AL) - DCOS (B)) / (A5 * (AL ** 2 + B ** 2))$$

$$A33 = ((A2 + A1 * AL ** 2) * DCOSH (AL) - (A2 - A1 * B ** 2) * DCOS (B)) / (A1 * (AL ** 2 + B ** 2))$$

$$A34 = (B * (A2 + A1 * AL ** 2) * DSINH (AL) - AL * (A2 - A1 * B ** 2) * DSIN (B)) / (AL * B * A5 * (AL ** 2 + B ** 2))$$

$$A43 = (AL * (A6 + A5 * AL ** 2) * DSINH (AL) + B * (A6 - A5 * B ** 2) * DSIN (B)) / * (A1 * (AL ** 2 + B ** 2))$$

$$A44 = ((A6 + A5 * AL ** 2) * DCOSH (AL) - (A6 - A5 * B ** 2) * DCOS (B)) / (A5 * (AL ** 2 + B ** 2))$$

$$4 \quad D1 = A13 * A24 - A14 * A23$$

$$D2 = A13 * A34 - A14 * A33$$

$$D3 = A33 * A44 - A34 * A43$$

$$D4 = A12 * A34 - A14 * A32$$

5 FORMAT (5 E 14.6)

WRITE (1, 5) AM, D1, D2, D3, D4

1 AM = AM + DAM

STOP

END

Значения частоты  $\omega$  и определителей  $D_1 - D_4$  выводятся в файл с именем rez. for, который помещается в папку, где находится головная программа.

Программа для вычисления определенных интегралов. Вычисляет определенные интегралы по формуле Симпсона, с назначаемым шагом интегрирования.

Обозначения переменных, принятых в программе:

Y (10001) – массив значений подынтегральной функции  $f(x)$ ;

H – шаг интегрирования;

T – множитель для определения аргумента  $x$ ;

CH – частота собственных колебаний балки  $\omega$ ;

AL1 – ширина пластины  $\ell_1$  (длина соответствующей балки);

S1 – сумма ординат  $f(x)$ , умножаемых на 2;

S2 – сумма ординат  $f(x)$ , умножаемых на 4;

AZ – коэффициент  $\alpha$  функции  $X(x)$ ;

P – аргумент  $x$  подынтегральной функции  $f(x)$ ;

Z – аргумент тригонометрических и гиперболических функций;

X – величина функции  $X(x)$ ;

S – значение определенного интеграла по формуле Симпсона.

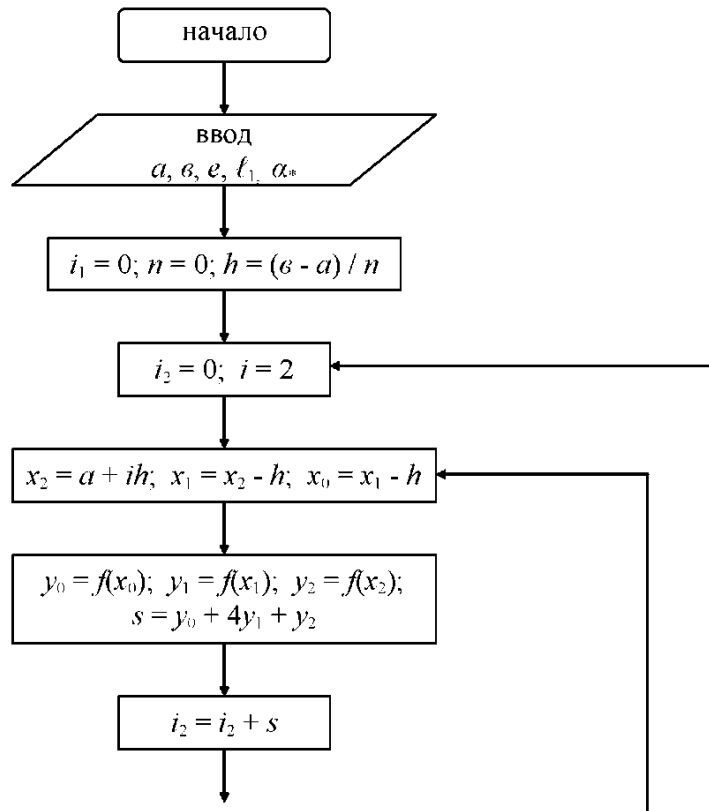
Величина определенного интеграла S выводится в файл под именем rez. for, который помещается в той же папке, где находится головная программа.

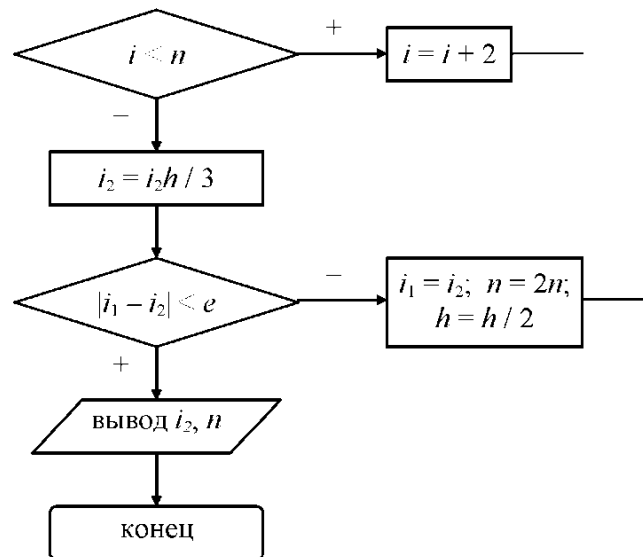
```

PROGRAM SIMPSON
DOUBLE PRECISION Y(10001), H, T, CH, AL1,
* S1, S2, AZ, P, Z, S, X
OPEN (1, file = ' rez. for ')
H = 0.0001
T = 1.0
CH = 4.73004075
AL1 = 1.0
S1 = 0.0
S2 = 0.0
AZ = (DSIN (CH) – DSINH (CH)) / (DCOS (CH) – DCOSH (CH))
DO 1 I = 1, 10001
P = H * (T – 1.0)
Z = CH * P / AL1
X = DSTN (Z) – DSINH (Z) – AZ * (DCOS (Z) – DCOSH (Z))
Y (I) = X * X
1 T = T + 1.0
DO 2 I = 1, 4999
K = 2 * I + 1
2 S1 = S1 + Y (K) * 2.0
DO 3 I = 1, 5000
K = 2 * I
3 S2 = S2 + Y (K) * 4.0
S = (Y (1) + S1 + S2 + Y (10001)) * H / 3.0
WRITE (1, 4) S
4 FORMAT (30.9)
STOP
END

```

Программа для вычисления определенных интегралов. Вычисляет определенные интегралы по формуле Симпсона с заданной точностью и автоматическим делением шага интегрирования и реализует блок-схему





**Рис. 4.**

Обозначения переменных, принятых в программе:

$\omega$  – частота собственных колебаний балки  $\omega$ ;

$l_1$  – длина балки  $l_1$ ;

$a$  – нижний предел интегрирования;

$b$  – верхний предел интегрирования;

$i_1$  – первое значение интеграла;

$i_2$  – уточненное значение интеграла;

$h$  – шаг интегрирования;

$x_1$  – начальное значение аргумента  $x$ ;

$x_1$  – среднее значение аргумента  $x$  на участке интегрирования;

$x_2$  – конечное значение аргумента  $x$ ;

$u_1, u_2$  – соответственно значения функции  $f(x)$ ;

$e$  – точность вычисления определенного интеграла;

$S$  – значение текущей площади криволинейной трапеции;

$i$  – составляющая шага интегрирования;

$\alpha$  – коэффициент  $\alpha$ ;

$n$  – число участков криволинейной трапеции.

Значение определенного интеграла выводится в файл с именем rez. pas, который помещается в папку temp на жестком диске C.

```

PROGRAM METSIMP;
label 1, 2, 3; const am = 4.73004075;
var l1, a, b, i1, i2, h, xn, x1, x2, yn, y1, y2, e, s, az: real;
i, n: integer; f1: text;
function f(z: real): real;
begin
f = sgr (SIN(am * z / l1) - (exp (am * z / l1) - exp (-am * z / l1)) / 2.0 - az * (cos (am * z /
l1) - (exp (am * z / l1) + exp (-am * z / l1)) / 2.0)); end;
begin
assign (f1, ' c: \ temp \ rez. pas '); rewrite (f1);
writeln (' Введите исходные данные a, b, e, l1, az ');
readln (a, b, e, l1, az); i1 := 0; n := 4; h := (b - a) / n;
1: i2 := 0; i := 2;
2: x2 := a + i * h; x1 := x2 - h; xn := x1 - h;
yn := f (xn); y1 := f (x1); y2 := f (x2); S := yn + 4 * y1 + y2;
i2 := i2 + S;
if i < n then begin i := i + 2; goto 2; end
else i2 := i2 * h / 3;
if abs (i1 - i2) < e then begin
writeln (f1, ' integral = ', i2, ' □ □ n = ', n); goto 3; end
else begin i1 := i2; n := 2 * n; h := h / 2; goto 1; end;
3: close (f1); end.

```



## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

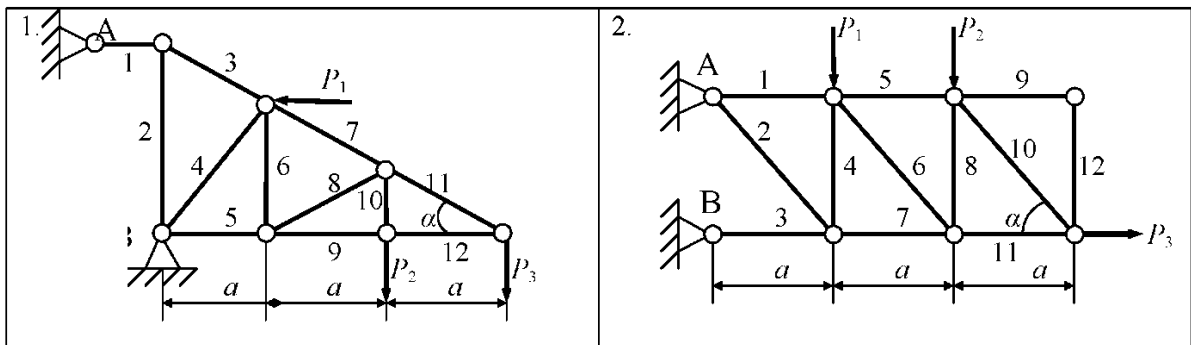
### Варианты заданий, рекомендуемые для самостоятельной работы

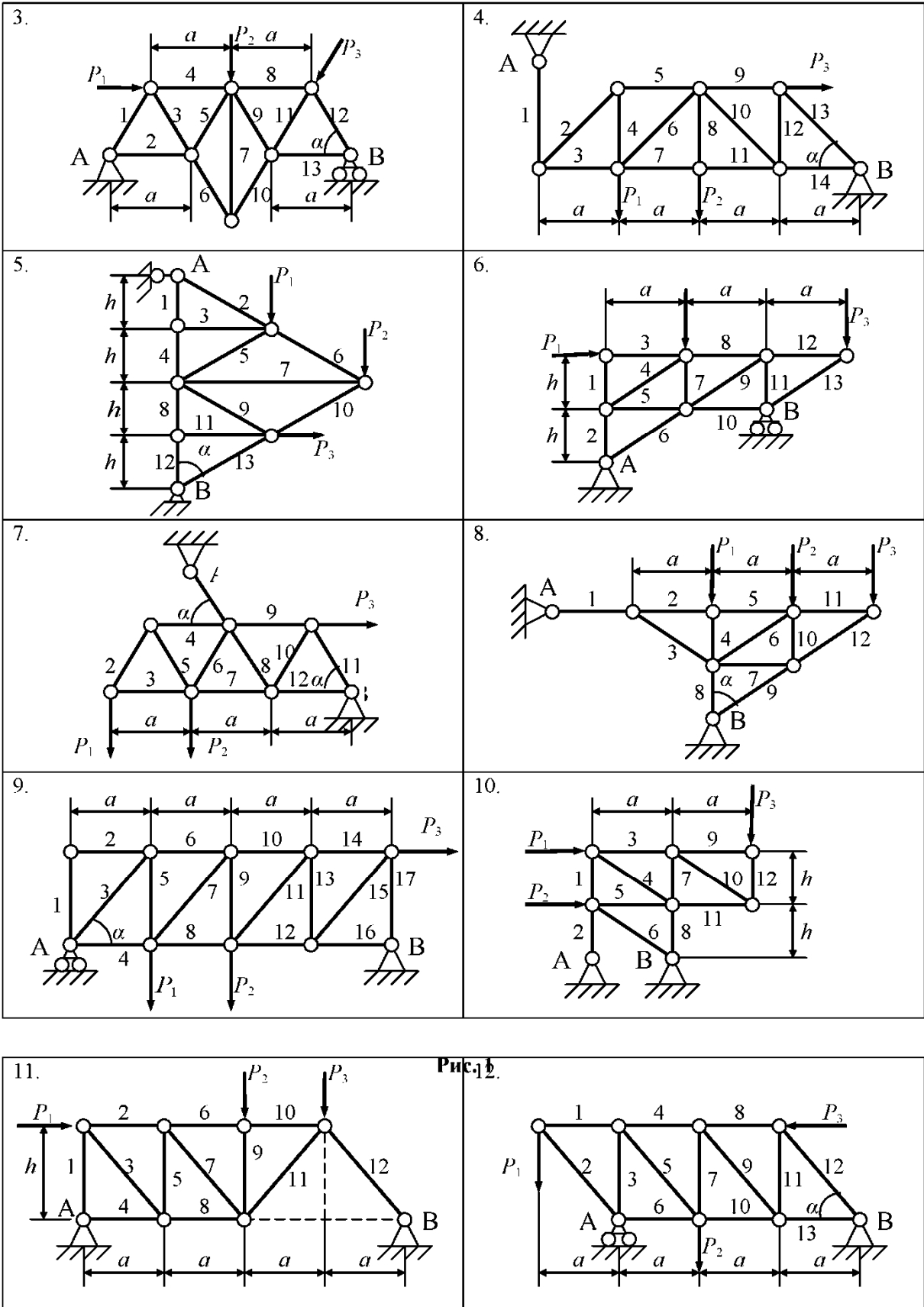
Статически определимые фермы. Варианты заданий заимствованы из кн. «Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике»: Учебное пособие для технических вузов / Яблонский А.А., Норейко С.С., Вольфсон С.А. и др. – М.: Высшая школа, 1985. – 367с.

**Таблица №26**

Номер варианта	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>3</sub>	a	h	α, град
	кН			м		
1	4	9	2	2,0	-	30
2	10	3	4	2,5	-	60
3	2	12	6	3,0	-	60
4	10	10	5	4,0	-	60
5	2	4	2	-	2,0	60
6	3	7	5	4,0	3,0	-

7	4	6	3	4,0	-	60
8	5	7	7	3,2	-	45
9	10	8	2	5,0	-	60
10	3	4	5	4,4	3,3	-
11	2	6	8	2,5	3,0	-
12	5	7	2	4,0	-	60
13	4	6	2	4,8	3,6	-
14	3	5	5	3,0	-	60
15	2	2	10	4,0	6,0	-
16	5	6	2	5,0	-	60
17	4	4	10	4,0	6,0	-
18	5	2	8	-	5,0	60
19	8	4	10	5,0	10,0	60
20	2	3	5	4,0	6,0	-
21	3	2	7	6,0	-	45
22	4	2	9	4,0	-	45
23	5	8	8	4,0	9,0	30
24	6	10	2	3,6	-	45
25	7	10	5	4,4	3,3	-
26	8	12	2	4,0	-	30
27	9	4	4	4,0	3,0	-
28	10	5	3	5,0	-	30
29	12	8	2	6,0	-	45
30	5	10	4	4,0	2,0	-





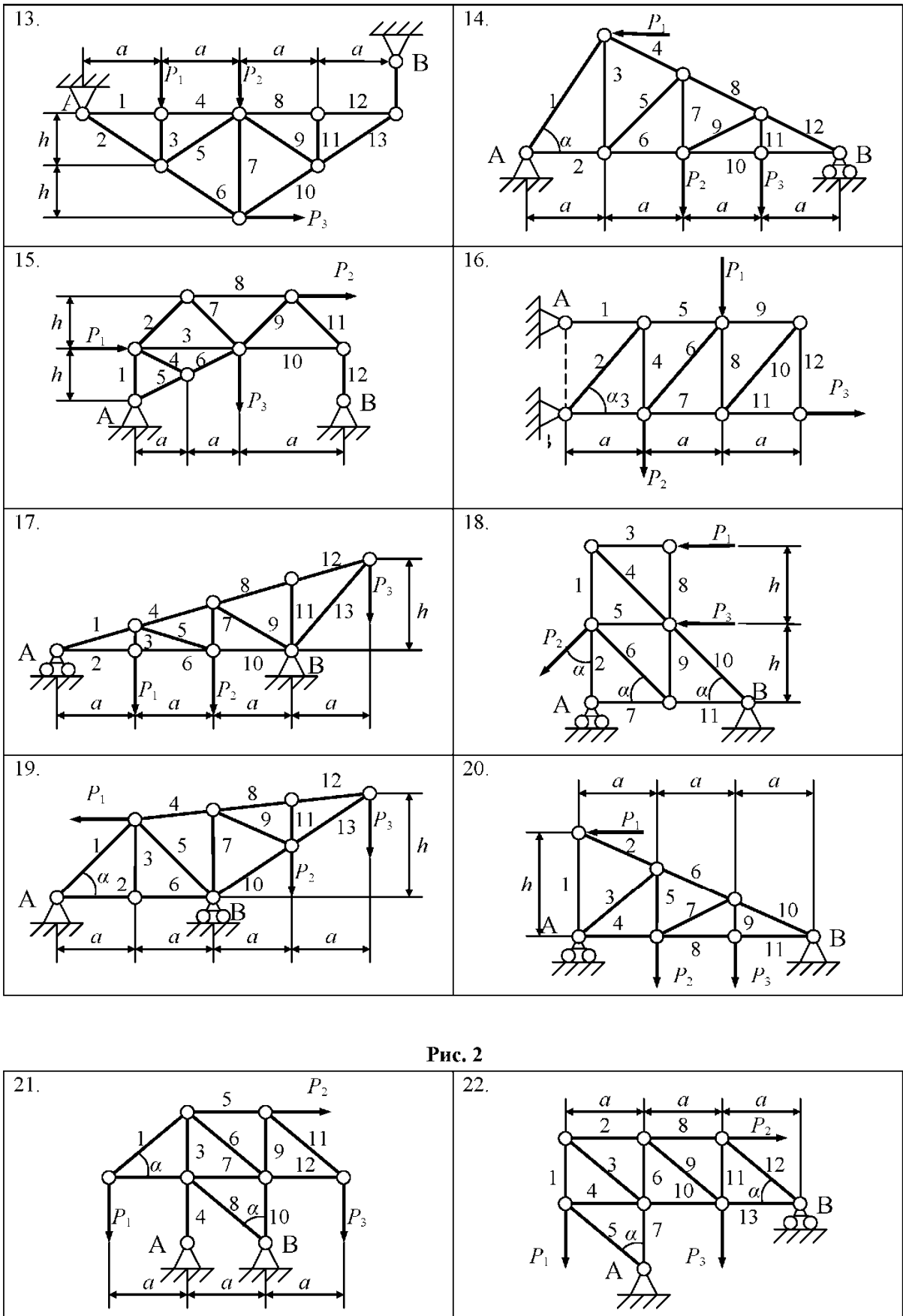


Рис. 2

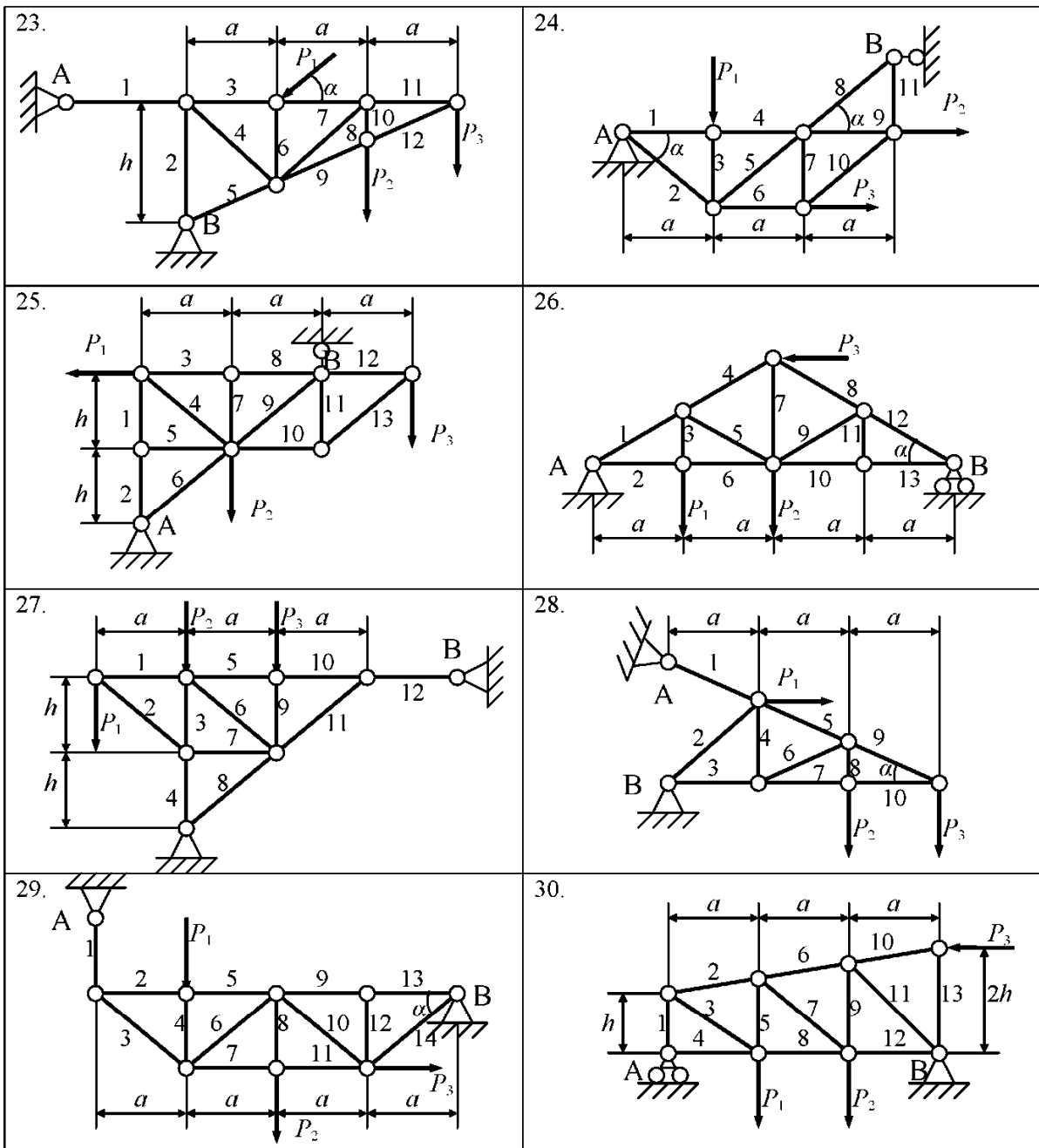


Рис. 3

Нерезные балки.

Таблица №27

№ вар.	$l_1$	$l_2$	$l_3$	$l_4$	$a$	$b$	$c$	$F$	$F_1$	$F_2$	$M$	$M_1$	$M_2$	$q$	$q_1$	$q_2$
	м							кН			кНм			кН/м		
1	2	3	3	1	1	2	1	10	20	30	6	8	10	10	12	8
2	2	4	4	2	2	1	2	40	50	60	10	8	6	8	15	6

3	4	3	5	1,5	3	3	1,5	5	15	20	20	30	40	6	10	12
4	5	6	6	3	2	2	3	25	35	45	25	36	38	4	8	6
5	6	8	7	2,5	1	1	1	10	8	6	12	6	18	2	4	3
6	7	5	8	1	3	2,5	1,5	10	15	25	15	20	25	12	2	7
7	6	4	7	1,5	1	1,5	2,5	30	40	50	40	35	16	20	8	10
8	5	3	6	2	2	2	1,5	60	70	80	10	15	20	15	12	15
9	4	4	5	1	1,5	1	2	30	15	18	25	30	35	12	2	5
10	3	6	4	1,5	3	1,5	1	28	32	24	40	45	50	8	4	10
11	2	5	5	1	2	1,5	1,5	12	14	16	10	18	28	6	8	15
12	4	8	3	2	1	1,5	2	5	15	10	40	12	10	10	12	2
13	3	10	4	4	1	2	2	3	22	30	10	14	16	18	12	14
14	5	4	5	2	1	1,5	3	40	24	26	20	30	35	10	30	15
15	2	5	6	1,5	2	1,5	2	15	10	8	15	18	20	5	20	10
16	2	6	3	1	1	2	1	10	20	30	6	8	10	10	12	8
17	2	7	4	2	2	1	2	40	50	60	10	8	6	8	15	6
18	4	5	5	1,5	3	3	1,5	5	15	20	20	30	40	6	10	12
19	5	3	6	3	2	2	1,5	25	35	45	25	36	38	4	8	6
20	6	5	7	2,5	1	1	1	10	8	6	12	6	18	2	4	3
21	7	4	8	1	3	1,5	1,5	10	15	25	15	20	25	12	2	7
22	6	8	7	1,5	1	2	2,5	30	40	50	40	35	16	20	8	10
23	5	6	6	2	2	2	1,5	60	70	80	10	15	20	15	12	15
24	4	7	5	1	1,5	1	2	30	15	18	25	30	35	12	2	5
25	3	5	4	1,5	3	1,5	1	28	32	24	40	45	50	8	4	10
26	2	4	5	1	2	2	1,5	12	14	16	10	18	28	6	8	15
27	4	6	3	2	1	1,5	2	5	15	10	40	12	10	10	12	2
28	3	5	4	4	1	2	2	3	22	30	10	14	16	18	12	14
29	5	4	5	2	1	1,5	1,5	40	24	26	20	30	35	10	30	15
30	2	3	6	1,5	2	1	2	15	10	8	15	18	20	5	20	10

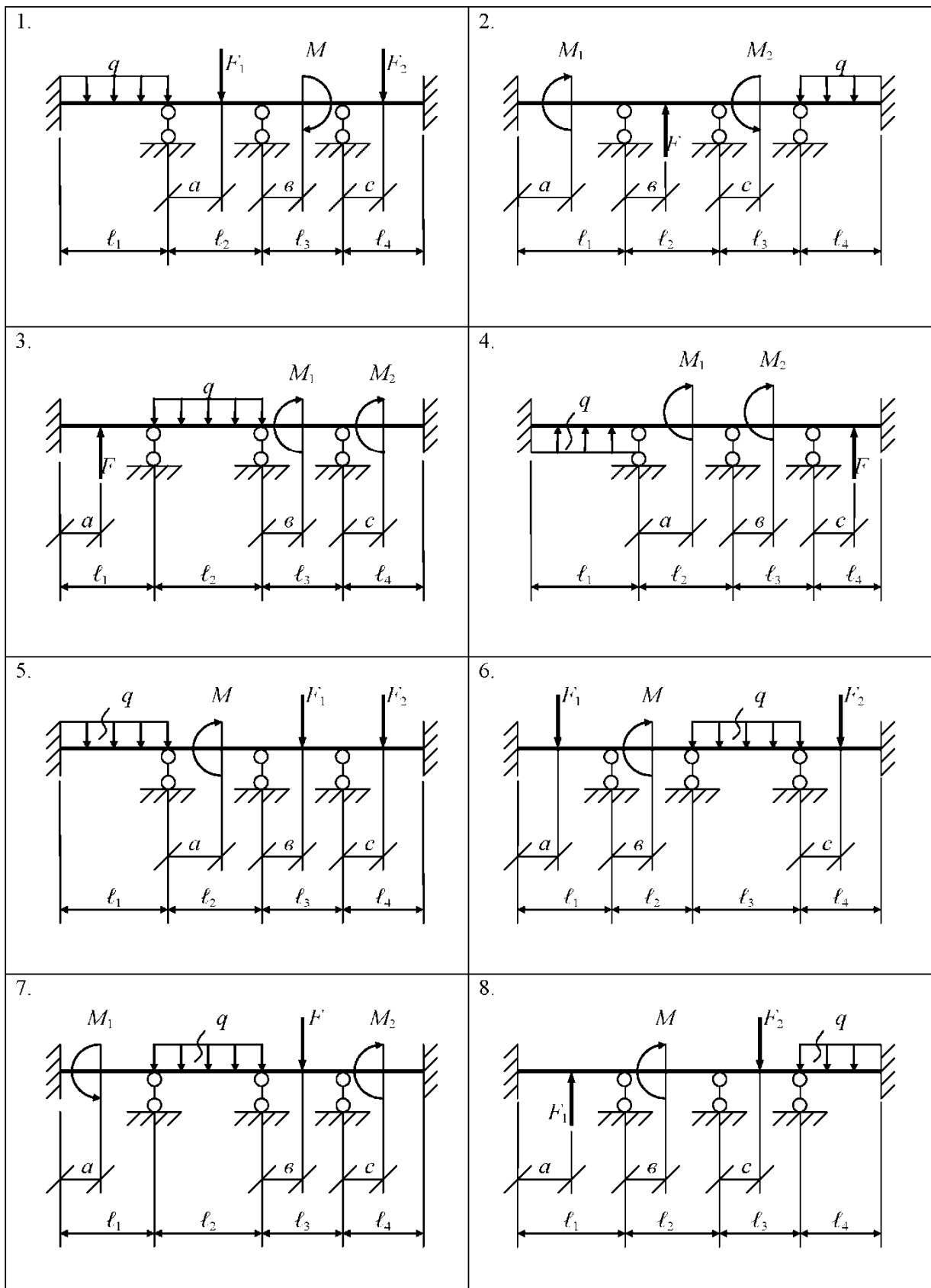


Рис. 4

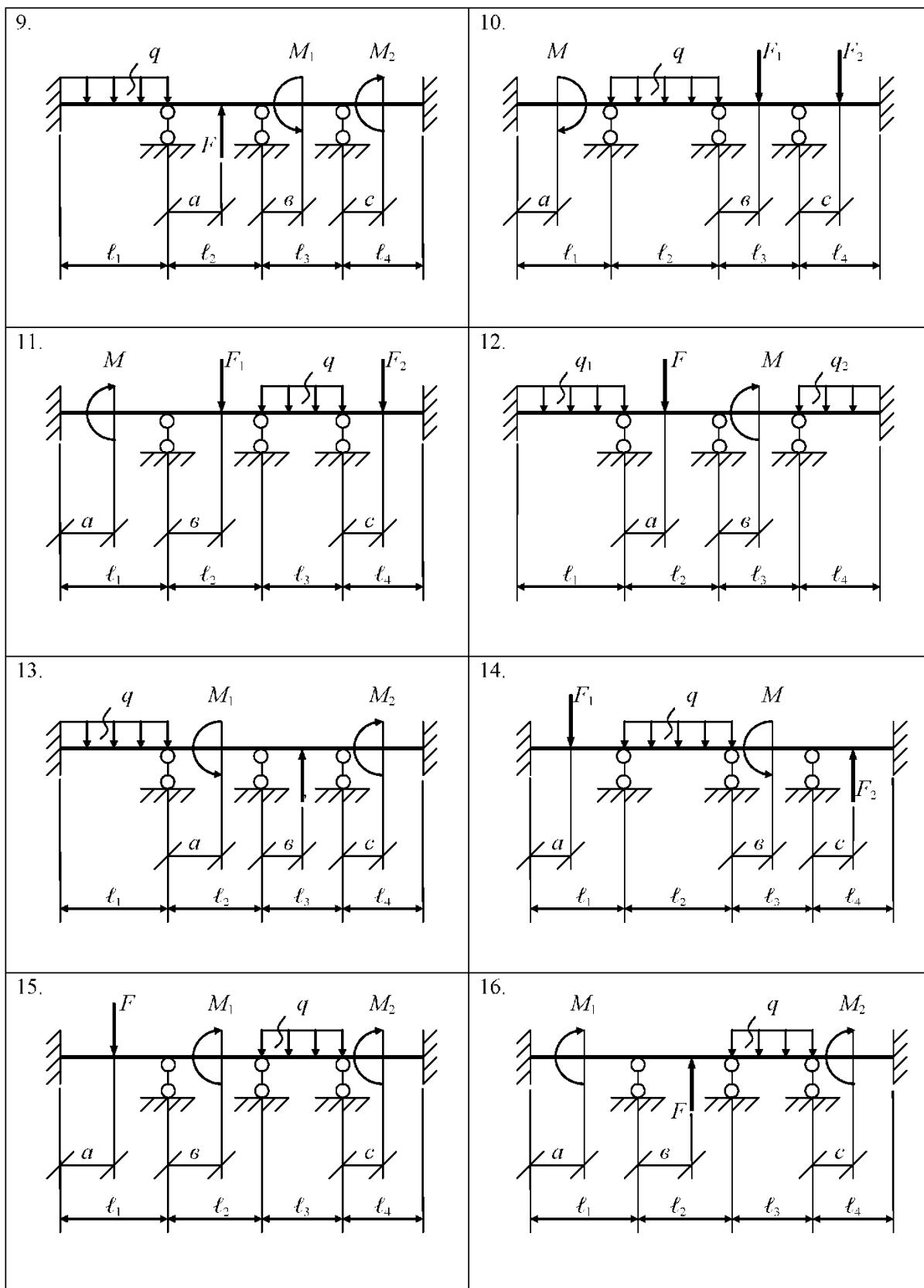


Рис. 5



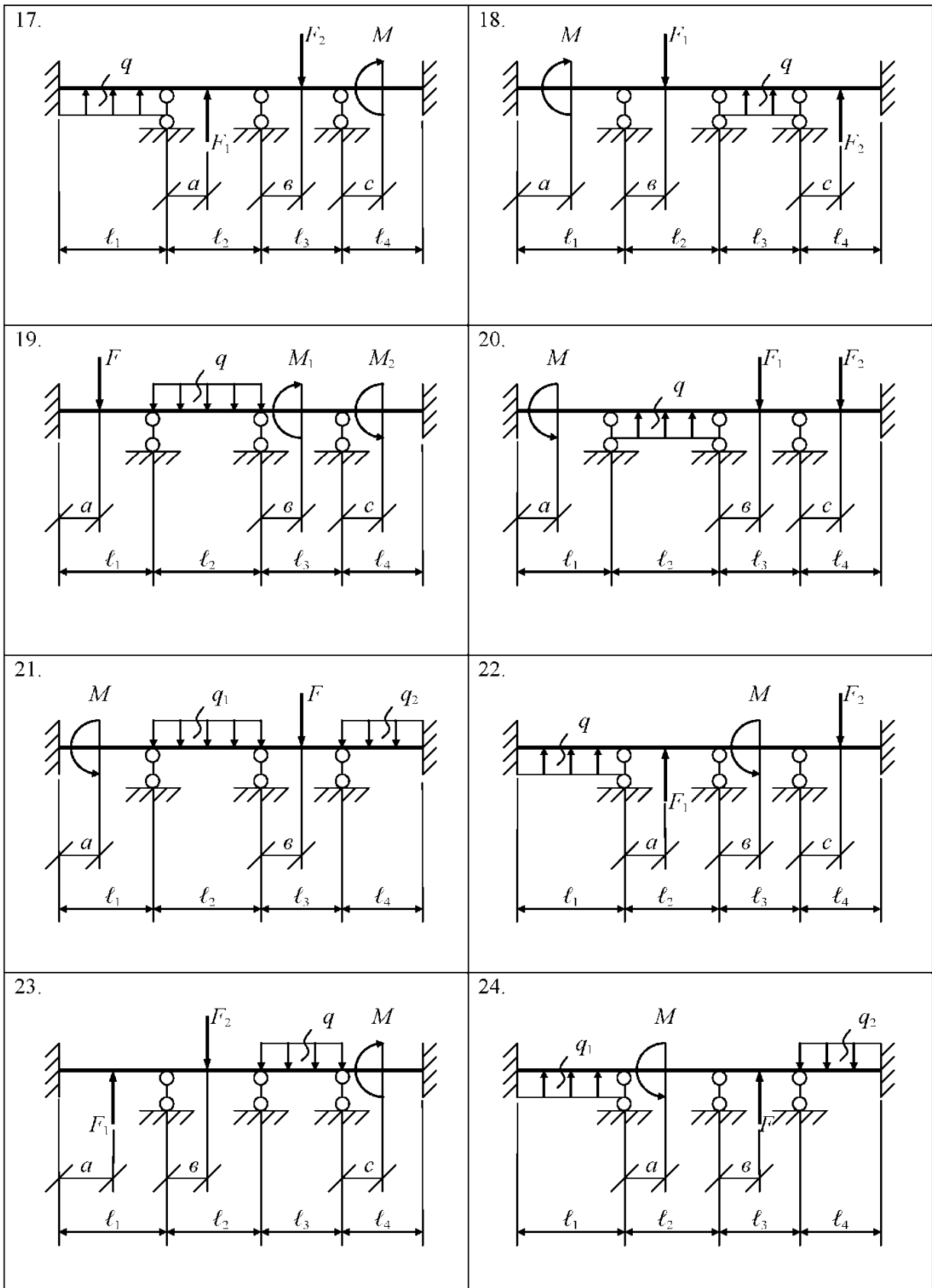


Рис. 6

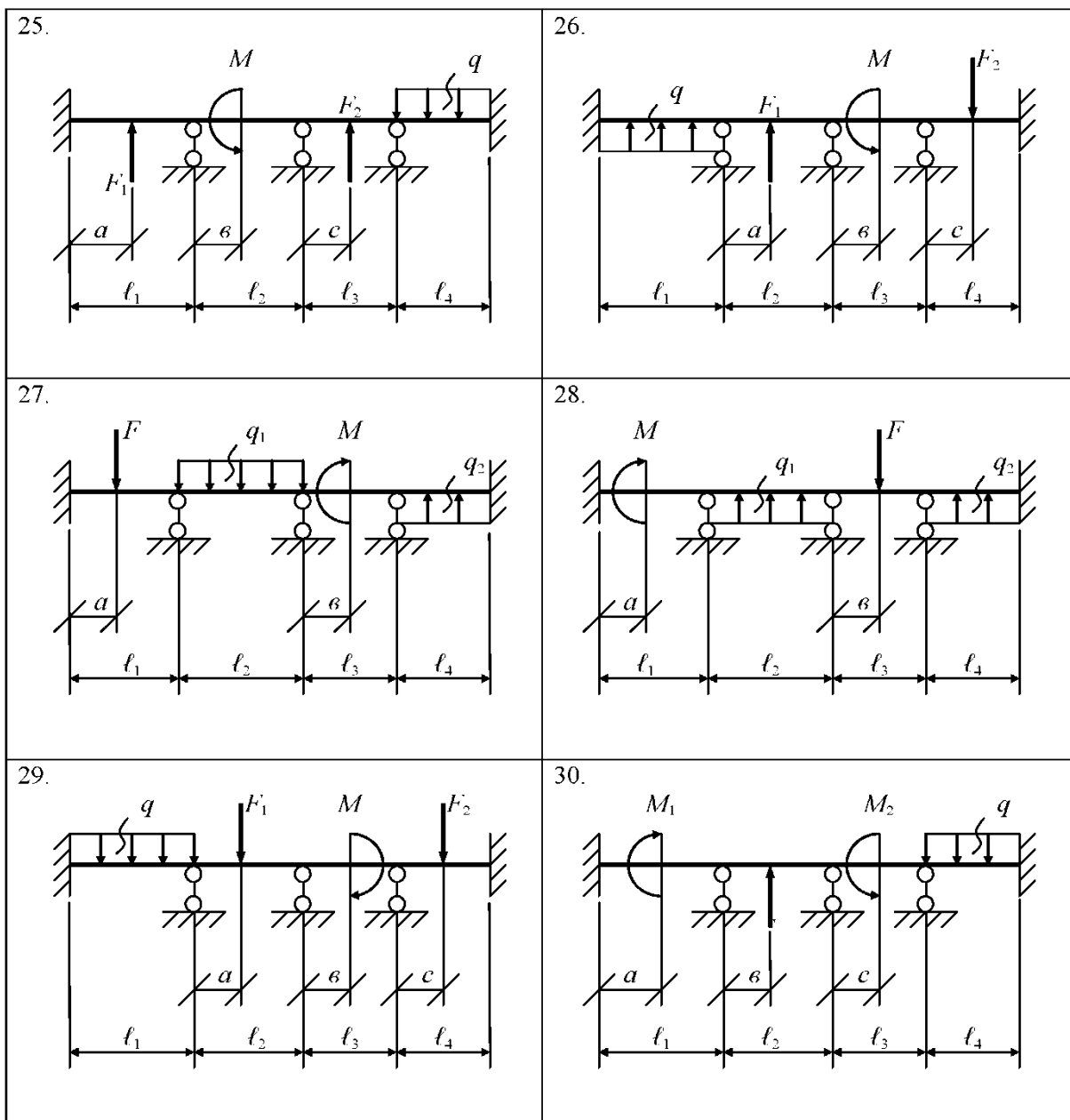


Рис. 7

Статически неопределимые рамы.

**Таблица №28**

№ варианта	$l_1$	$l_2$	$l_3$	$h_1$	$h_2$	$h_3$	F	M	q
	M						кН	кНм	кН/м
1	1	3	4	2	3	4	10	16	10
2	2	2	5	3	1	2	40	12	8
3	3	4	2	2	1	2	5	20	6
4	5	4	1	2	1	2	25	25	4
5	5	1	3	3	4	4	10	15	2
6	2	6	4	2	2	1	10	15	12
7	1	3	3	2	1	2	30	40	20
8	1	3	1	1	2	1,5	60	15	15
9	2	1	3	1,2	1	1,5	30	25	12
10	3	1	2	4	2	1	28	40	8
11	1	1	2	1	2	2	12	15	6
12	4	5	4	1	2	3	5	40	10
13	2	3	4	2	1	1	3	15	18
14	2	1	1	2	4	3	40	20	10
15	5	2	4	4	3	2	15	15	5
16	1	3	2	4	5	1	20	6	12
17	5	4	2	3	2	2	40	10	10
18	1	2	1	4	3	1	25	20	8
19	3	1	4	2,5	4	5	25	25	14
20	5	4	1	2	4	5	15	16	12
21	1	2	3	5	4	3	10	15	16
22	4	2	4	3	2	1	30	40	22
23	5	4	2	4	4	2	60	18	17
24	1	3	5	2	4	5	30	25	14
25	4	2	2	1	2	4	28	40	10
26	5	3	2	2	1	2	20	18	6
27	3	2	1	2	3	4	25	40	10
28	5	4	4	2	3	4	20	15	18
29	2	3	1	3	4	5	40	20	10
30	1	2	5	4	5	1	15	15	7

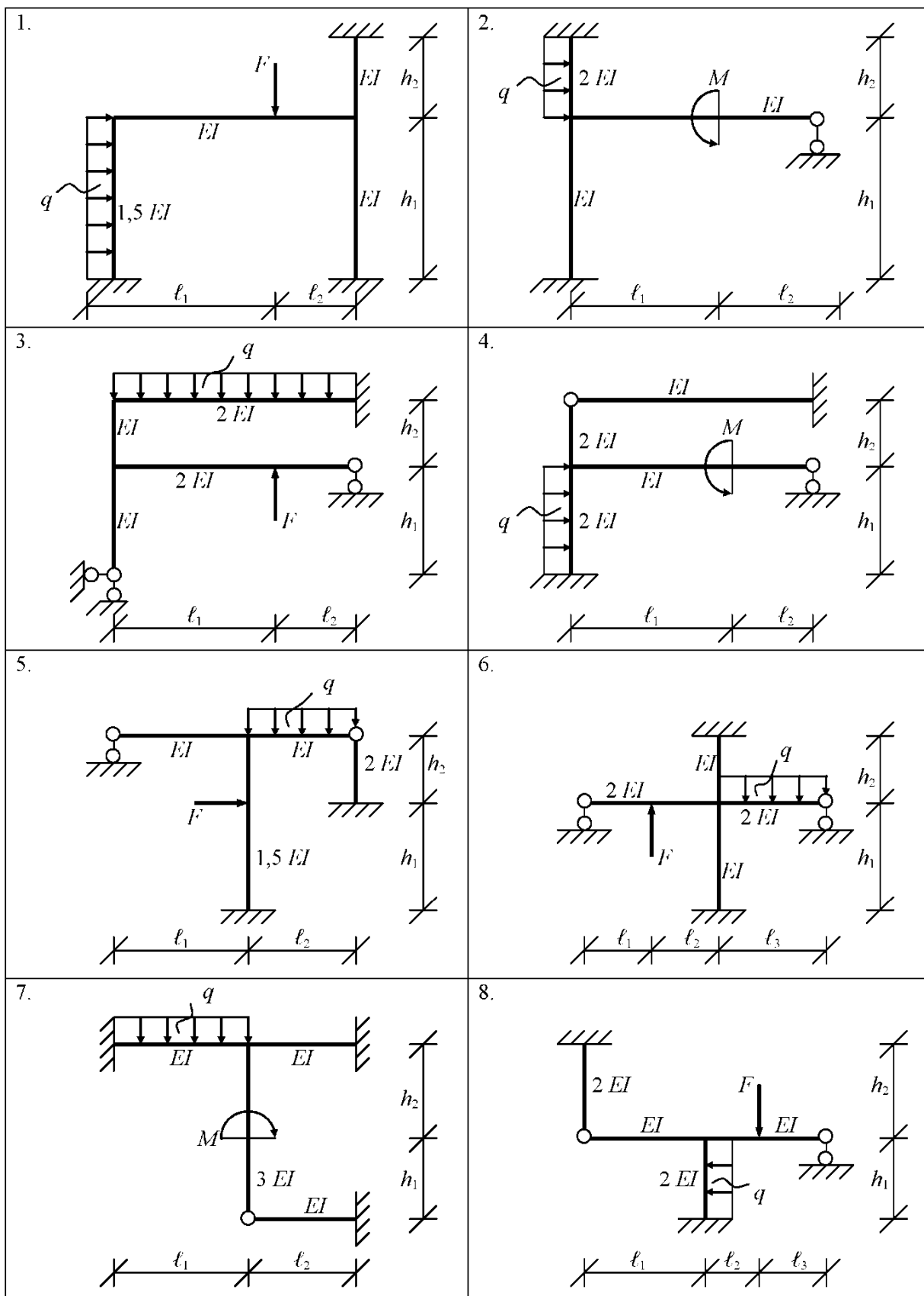


Рис. 8

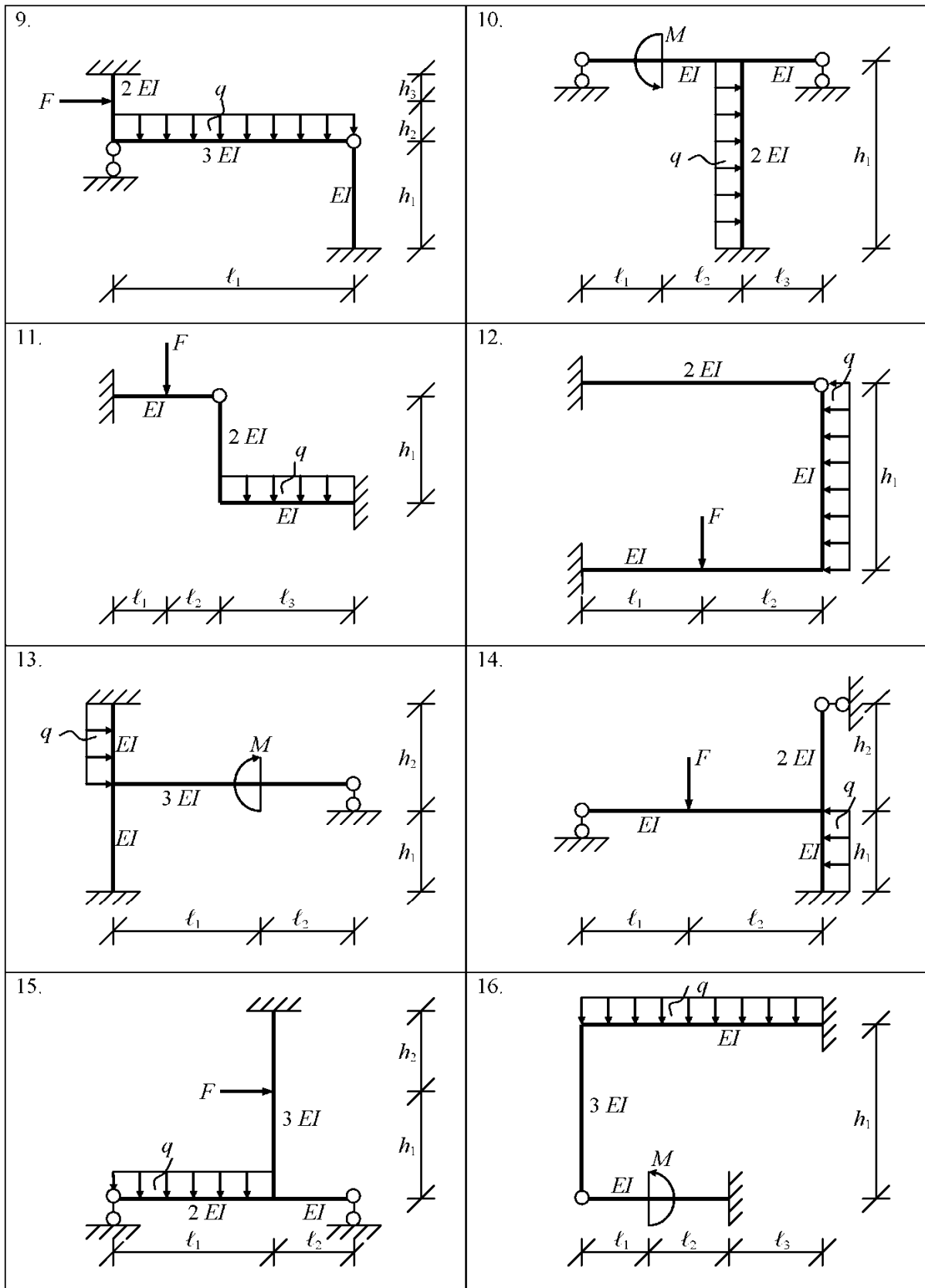


Рис. 9

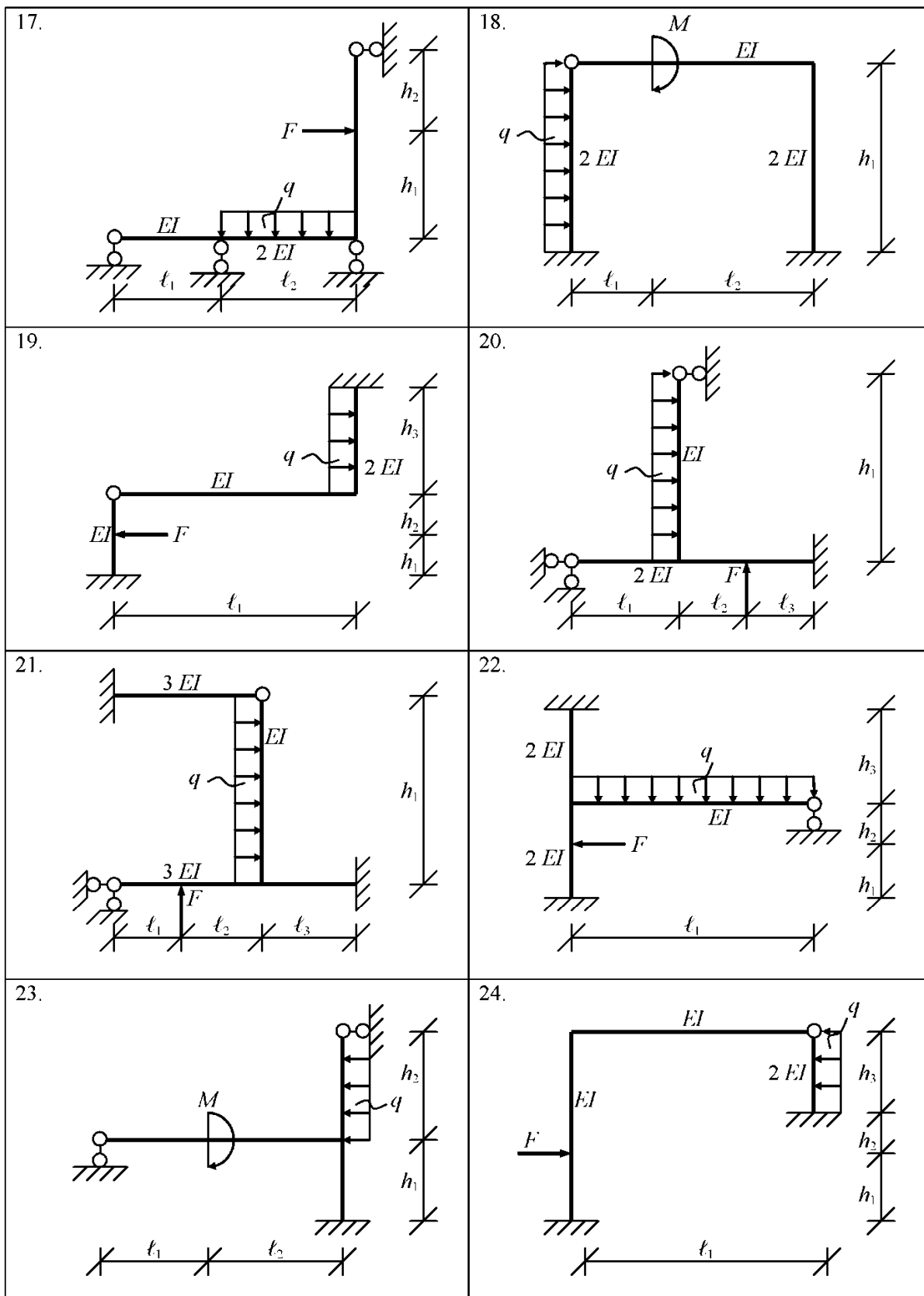


Рис. 10

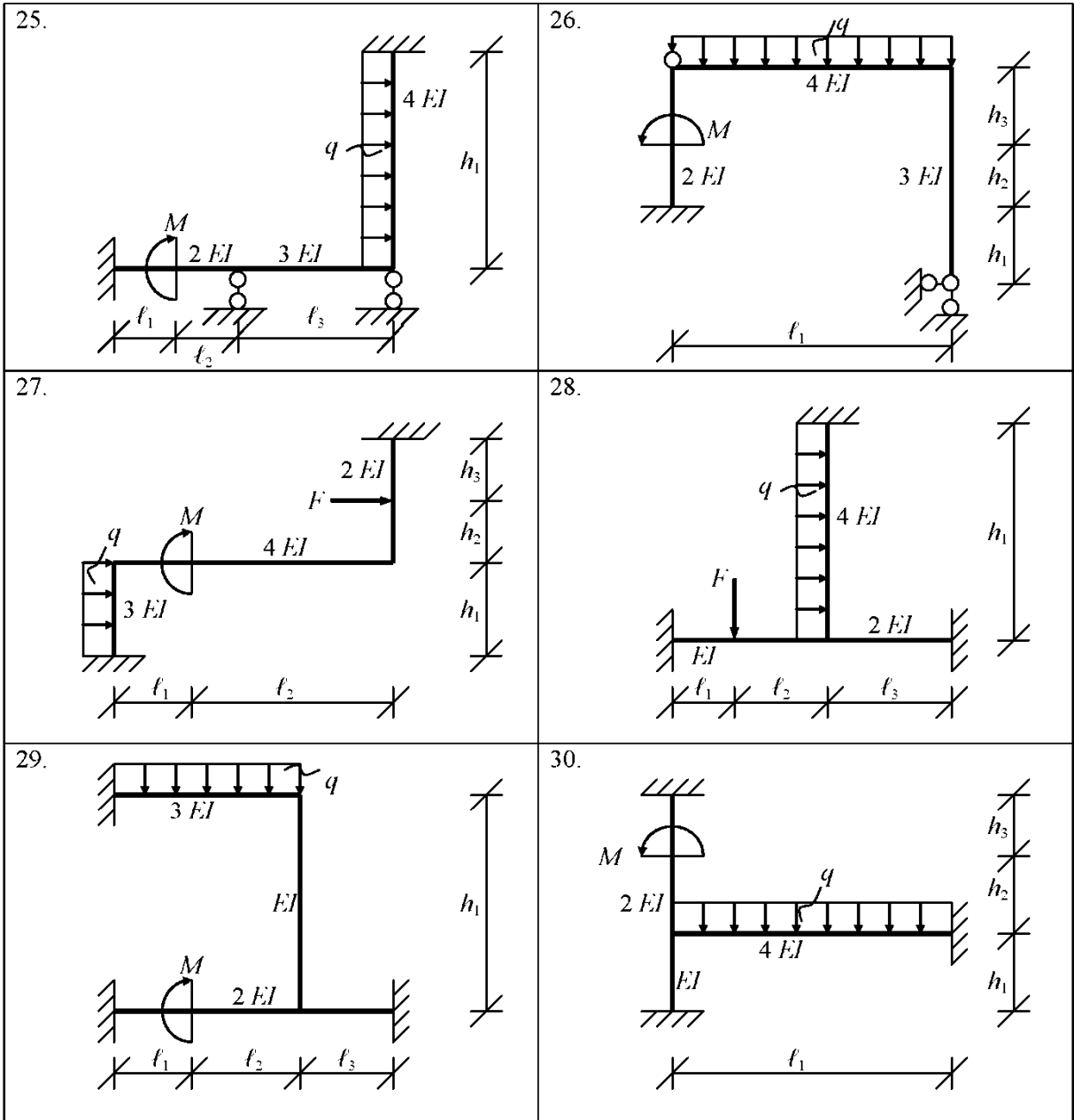


Рис. 11

## ЛИТЕРАТУРА

1. Альберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее применение. – М.: Мир, 1972. – 316с.
2. Александров А.В., Лашеников Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы. – М.: Стройиздат, 1983. – 488с.
3. Александров А.В., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высшая школа, 1990. – 400с.
4. Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход. – М.: Мир, 1976. – 311с.
5. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков. Численные методы. – М.: Наука, 1987. – 598с.
6. Безухов Н.И., Лужин О.В., Колкунов Н.В. Устойчивость и динамика сооружений. – М.: Высшая школа, 1987. – 264с.
7. Бенерджи П.К., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках / Под ред. Р.В. Гольдштейна. – М.: Мир, 1984. – 494с.
8. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. – М.: Машиностроение, 1977. – 488с.
9. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. – М.: Высшая школа, 1980. – 408с.
10. Биргер И.А. Некоторые математические методы решения инженерных задач. М.: Оборонгиз, 1956. – 152с.
11. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: Гостехиздат, 1956. – 600с.
12. Болотин В.В. Неконсервативные задачи упругой устойчивости. – М.: Физматгиз, 1961. – 335с.
13. Бояршинов С.В. Основы строительной механики машин. – М.: Машиностроение, 1973. – 456с.
14. Бреббиа К., Теллес Д., Вроубел Л. Методы граничных элементов / Под ред. Э.И. Григолюка. – М.: Мир, 1987. – 524с.
15. Бреббиа К., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике / Под ред. Э.И. Григолюка. – М.: Мир, 1982. – 248с.
16. Бычков Д.В. Строительная механика стержневых тонкостенных конструкций. – М.: Стройиздат, 1952. – 475с.
17. Вайнберг Д.В., Вайнберг Е.Д. Расчет пластин. – Киев.: Будівельник, 1970. – 436с.
18. Вайнберг Д.В. Справочник по прочности, устойчивости и колебаниям пластин. – Киев.: Будівельник, 1973. – 488с.
19. Варвак П.М. Новые методы решения задач сопротивления материалов. – Киев.: Вища школа, 1977. – 159с.



20. Варданян Г.С., Андреев В.И., Атаров Н.М., Горшков А.А. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. – М.: Изд-во Ассоциации строит. вузов, 1995. – 576с.
21. Верюжский Ю.В. Численные методы потенциала в некоторых задачах прикладной математики. – Киев.: Вища школа, 1978. – 183с.
22. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979, - 318с.
23. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. – М.: Физматгиз, 1960. – 490с.
24. Власов В.З. Избранные труды. – Т. 2, 3. – М.: Изд. АН СССР, 1963, 1964.
25. Волошин И.И., Громов В.Г. О критерии устойчивости стержня на упругом основании при действии следящей силы // Изд. АН СССР. Механика твердого тела. – 1977. - №4. – с. 169 – 171.
26. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984с.
27. Гельфанд И.М., Шиллов Г.Е. Обобщенные функции. Вып. 1 – 3. – М.: Физматгиз, 1958.
28. Горбунов – Посадов М.И., Маликова Т.А., Соломин В.И. Расчет конструкций на упругом основании. М.: Стройиздат, 1984. – 679с.
29. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика. – М.: Высшая школа. 1985. – 607с.
30. Джордж А., Лю Дж. Численное решение больших разреженных систем. – М.: Мир, 1984. – 334с.
31. Дикинсон С.М. Применение модифицированного метода Болотина для исследования устойчивости и колебаний напряженных пластинок // Ракетная техника и космонавтика. – 1975. – Т. 13. – №12. – с. 151 – 152.
32. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. – М.: Высшая школа, 1975. – 407с.
33. Ершова В.В. Импульсные функции. Функции комплексной переменной. Операционное исчисление / Под ред. В.И. Азаматовой. – Минск.: Вышэйшая школа, 1976. – 255с.
34. Земанян А.Г. Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1974. – 399с.
35. Зубчанинов В.Г. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высшая школа, 1990. – 368с.
36. Каленюк П.И., Баранецкий Я.Е., Нитребич З.Н. Обобщенный метод разделения переменных. – Киев.: Наукова думка, 1993. – 232с.
37. Карякин Н.И. Основы расчета тонкостенных конструкций. – М.: Высшая школа, 1960. – 239с.
38. Коваленко А.Д. Пластины и оболочки в роторах турбомашин. – Киев.: Изд-во АН УССР, 1955. – 303с.
39. Колоушек В. Динамика строительных конструкций. – М.: Стройиздат, 1965. – 632с.

40. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. – М.: Мир, 1987. – 328с.
41. Лазарян В.А. Энергия деформации и перемещения линейных систем. – Киев.: Наукова думка, 1972. – 140с.
42. Лазарян В.А., Конашенко С.И. Обобщенные функции в задачах механики. – Киев.: Наукова думка, 1974. – 191с.
43. Макеев В.П., Гриненко Н.И., Павлюк Ю.С. Статистические задачи динамики упругих конструкций. – М.: Наука, 1984. – 231с.
44. Масленников А.М. Расчет строительных конструкций численными методами. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1987. – 225с.
45. Матевосян Р.Р. Устойчивость сложных стержневых систем (качественная теория). – М.: Госстройиздат, 1961. – 252с.
46. Милейковский Н.Е., Трушин С.И. Расчет тонкостенных конструкций. – М.: Стройиздат, 1989. – 197с.
47. Муллагулов М.Х. Экспериментально-теоретическое исследование устойчивости стержней, сжатых следящими силами // Проблемы прочности. – 1994. - №6. С. 53 – 59.
48. Мышкис А.Д. Математика для ВТУЗов. Специальные курсы. – М.: Наука, 1971. – 632с.
49. Мяченков В.И., Мальцев В.П. Методы и алгоритмы расчета пространственных конструкций на ЭВМ ЕС. – М.: Машиностроение, 1984. – 280с.
50. Новацкий В. Динамика сооружений. – М.: Госстройиздат, 1963. – 376с.
51. Оробей В.Ф., Работягов Д.Д. Расчет ферм методом граничных интегральных уравнений // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1983. - №10. С. 107 – 111.
52. Оробей В.Ф., Работягов Д.Д. Решение задач статики стержневых систем методом граничных интегральных уравнений // Сопротивление материалов и теория сооружений. Киев.: Будівельник. – 1983. - №54. – с. 90 – 95.
53. Оробей В.Ф., Работягов Д.Д. Статический расчет комбинированных арочных систем методом граничных интегральных уравнений // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1989. - №12. – с. 24 – 28.
54. Оробей В.Ф., Работягов Д.Д. Решение задач статики тонкостенных стержневых систем методом граничных интегральных уравнений // Сопротивление материалов и теория сооружений. – Киев.: Будівельник. – 1989. - №55. – с. 81 – 86.
55. Оробей В.Ф., Работягов Д.Д. Решение задач динамики и устойчивости стержневых систем методом граничных интегральных уравнений // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1990. - №12. – с. 27 – 31.

56. Оробей В.Ф., Работягов Д.Д. Метод граничных интегральных уравнений в устойчивости упругих стержневых систем от следящих сил // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1991. - №11. – с. 22 – 28.
57. Оробей В.Ф., Работягов Д.Д. Неконсервативные комбинированные задачи устойчивости упругих систем // Изв. вузов. Строительство. – 1992. - №1. – с. 23 – 28.
58. Оробей В.Ф., Работягов Д.Д. Расчет пластин на изгиб одномерным вариантом метода граничных интегральных уравнений // Изв. вузов. Строительство. – 1993. - №1. – с. 20 – 27.
59. Оробей В.Ф., Орлов С.А., Орлов Н.Н. Метод граничных интегральных уравнений в динамике и устойчивости прямоугольных пластин // Изв. вузов. Строительство. – 1994. - №3. – с. 25 – 31.
60. Оробей В.Ф. Расчет пластин с комбинированным контуром методом граничных интегральных уравнений // Изв. вузов. Строительство. – 1994. - №4. – с. 9 – 16.
61. Оробей В.Ф. Расчет цилиндрических складчатых систем методом граничных интегральных уравнений // Изв. вузов. Строительство. – 1995. - №2. – с. 31 – 38.
62. Оробей В.Ф. Применение метода граничных интегральных уравнений к решению задач на собственные значения пластин с круглым и комбинированным методом // Изв. вузов. Строительство. – 1995. - №7-8. – с. 37 – 44.
63. Оробей В.Ф., Дашенко А.Ф. К вопросу об интегрировании уравнений статики пологих оболочек (сообщение 1) // Изв. вузов. Строительство. – 1996. - №5. – с. 19 – 27.
64. Оробей В.Ф., Дашенко А.Ф. К вопросу об интегрировании уравнений статики пологих оболочек (сообщение 2) // Изв. вузов. Строительство. – 1996. - №7. – с. 32 – 37.
65. Оробей В.Ф., Дашенко А.Ф., Андриенко Н.Н. Метод граничных интегральных уравнений в расчетах линейных систем. – Киев: Наукова думка, 1996. – 391с.
66. Оробей В.Ф., Дашенко А.Ф. Неконсервативные задачи устойчивости упругих систем, связанных с упругим основанием // Труды XVIII международной конференции по теории оболочек и пластин. – Саратов: Изд. Саратовского гос. техн. ун-та, 1997. – Т. 1. – с. 102 – 106.
67. Оробей В.Ф. Применение модели Тимошенко в неконсервативных задачах устойчивости упругих систем // Труды международной конференции «Математика в индустрии». – Таганрог: Изд. Таганрогского гос. педагогич. ин-та, 1998. – с. 248 – 250.
68. Оробей В.Ф., Варивода В.А. Об одномерных моделях расчета упругих стержневых систем на упругом основании // Изв. вузов. Строительство. – 1998. - №11-12. – с. 8 – 14.
69. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. – М.: Наука, 1987. – 352с.
70. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. – Т. 1. – М.: Наука, 1985. – 430с.

71. Постнов В.А., Суслов В.П. Строительная механика корабля и теория упругости. – Т. 1, 2. – Л.: Судостроение, 1987.
72. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник. – Т. 1 – 3 / Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968.
73. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1979. – 744с.
74. Райс Дж. Матричные вычисления и математическое обеспечение. – М.: Мир, 1984. – 264с.
75. Рвачев В.Л., Курпа Л.В. R – функции в задачах теории пластин. – Киев: Наукова думка, 1987. 175с.
76. Ржаницын А.Р. Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1991. – 440с.
77. Рогоцкий С.А. Новый метод расчета на прочность и устойчивость. – Москва – Свердловск: Машгиз, 1960. – 352.
78. Розин Л.А. Теоремы и методы статики деформируемых систем. – Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1986. – 276с.
79. Розин Л.А., Константинов И.А., Смелов В.А. Расчет статически определимых стержневых систем. – Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1983. – 227с.
80. Розин Л.А., Константинов И.А., Смелов В.А. Расчет статически неопределимых стержневых систем. – Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1980. – 328с.
81. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики / Г.К. Клейн, Н.Н. Леонтьев, М.Г. Ванюшенков и др. – М.: Высшая школа, 1980. – 384с.
82. Светлицкий В.А. Механика стержней. Части 1, 2. – М.: Высшая школа, 1987.
83. Симвулиди И.А. Расчет инженерных конструкций на упругом основании. – М.: Высшая школа, 1987. – 575с.
84. Снитко Н.К. Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1980. – 432с.
85. Соппротивление материалов / Г.С. Писаренко, В.А. Агарев, А.Л. Квитка и др. – Киев: Вища школа, 1979. – 694с.
86. Строительная механика / Ю.И. Бутенко, Н.А. Засядько, С.Н. Кан и др. – Киев: Вища школа, 1989. – 480с.
87. Строительная механика. Руководство к практическим занятиям / Ю.И. Бутенко, Н.А. Засядько, С.Н. Кан и др. – Киев: Вища школа, 1989. – 367с.
88. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений / Под ред. А.Ф. Смирнова. – М.: Стройиздат, 1984. – 415с.
89. Теллес Д.К.Ф. Применение метода граничных элементов для решения неупругих задач. – М.: Стройиздат, 1987. – 160с.
90. Терегулов И.Г. Соппротивление материалов и основы теории упругости и пластичности. – М.: Высшая школа, 1984. – 472с.

91. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: Физматгиз, 1959. – 439с.
92. Тимошенко С.П., Войновский – Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: Наука, 1966. – 636с.
93. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1985, - 232с.
94. Турчак Л.И. Основы численных методов. – М.: Наука, 1987. – 319с.
95. Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1986. – 296с.
96. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1972. – 544с.
97. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. – М.: Мир, 1980. – 280с.
98. Филин А.П. Элементы расчета арок. – Л.: Изд-во ЛИИЖТ, 1963. – 132с.
99. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970. – 736с.
100. Shastry B., Rao G.V. Free vibrations of short beams. J. of Sound and Vibration. – 1985. – №100. – p. 305 – 308.
101. Nemat – Nasser S. Instability of cantilever under a follower force according Timoshenko ... J. Appl. Mech. – 1967. №34. – p. 484 – 485.
102. Kounadis A.N. Shear and rotatory inertial effect on Beck's column. J. of Sound and Vibration. – 1976. - №49. – p. 171 – 178.
103. Sandararamaiah V., Rao G.V. Effect of shear deformation and rotatory inertia on stability of Beck's ... AIAA J. – 1980. - №18. – p. 124 – 125.
104. Чудновский В.Г. Исследование колебаний и устойчивости пластин и пластинчатых систем методом расчленения уравнений в частных производных // Расчет пространственных конструкций. – М.: Стройиздат, 1967. – Вып. XI. – с. 171 – 230.
105. Баженов В.А., Дашенко О.Ф., Коломієць Л.В., Ухов О.В. Будівельна механіка та металеві конструкції. – Одеса, Астропрінт, 2001. – с. 428.

## О Г Л А В Л Е Н И Е

ВВЕДЕНИЕ.....		3
Раздел I. Стержневые системы .....		5
Глава I. Теоретические основы МГЭ в задачах строительной механики стержневых систем .....		5
1.1. Обобщенные функции и их свойства .....		5
1.2. Интенсивность внешней нагрузки.....		8
1.3. Метод сведения задачи Коши к расчетным соотношениям.....		12
1.4. Основные соотношения и правила знаков для граничных параметров стержней.....		16

	1.5.	Метод решения краевых задач для линейных систем.....	22
Глава	II.	Статика стержневых систем.....	29
	2.1.	Растяжение-сжатие, сдвиг, кручение и изгиб.....	29
	2.2.	Кручение тонкостенных стержней.....	31
	2.3.	Соотношения МГЭ пространственного случая деформирования прямолинейного стержня.....	33
	2.4.	Расчеты плоских и пространственных стержневых систем.....	35
	2.4.1.	Статически определимые фермы.....	35
	2.4.2.	Статически неопределимые фермы.....	38
	2.4.3.	Кручение тонкостенных неразрезных балок и рам.....	42
	2.4.4.	Неразрезные балки и плоские рамы.....	52
	2.4.5.	Учет продольных перемещений стержней.....	64
	2.4.6.	Пространственные рамы.....	67
	2.5.	Статика арочных систем.....	72
	2.5.1.	Вывод системы дифференциальных уравнений деформирования плоского кругового стержня.....	73
	2.5.2.	Фундаментальные решения для кругового стержня.....	74
	2.5.3.	Расчет плоских комбинированных арочных систем.....	81
Глава	III.	Динамика стержневых систем.....	91
	3.1.	Определение частот и форм собственных колебаний.....	92
	3.2.	Продольные, крутильные и поперечные колебания прямолинейного стержня.....	93
	3.3.	Общий случай гармонического динамического воздействия.....	95
	3.4.	Выделение симметричных и кососимметричных форм колебаний.....	97
	3.5.	Учет сосредоточенных масс.....	98
	3.6.	Стержневые системы с подвижными и неподвижными узлами.....	99
	3.6.1.	Учет сил инерции подвижных стержней.....	111
Глава	IV.	Устойчивость стержневых систем.....	120
	4.1.	Фундаментальные решения для продольно-поперечного изгиба стержня.....	121
	4.2.	Определение спектра критических сил и форм потери устойчивости статическим методом.....	122
	4.3.	Устойчивость свободных стержней и стержней на жестких и упругих опорах.....	123
	4.4.	Устойчивость стержневых систем с подвижными и неподвижными	

		узлами.....	130
	4.5.	Динамический метод решения задач устойчивости.....	137
	4.5.1.	Методика учета следящих сил.....	138
	4.5.2.	Фундаментальные решения для поперечных колебаний с учетом продольной силы.....	140
	4.5.3.	Стержень на упругом основании.....	141
	4.5.4.	Модель С.П. Тимошенко.....	151
	4.5.5.	Устойчивость систем от следящих консервативных сил.....	159
	4.5.6.	Устойчивость систем от неконсервативных сил.....	162
	4.5.7.	Неконсервативные комбинированные задачи устойчивости.....	171
	4.5.7.1.	Применение модели С.П. Тимошенко.....	174
Глава	V.	Основные выводы практического применения алгоритма МГЭ в задачах статики, динамики и устойчивости стержневых систем.....	180
Раздел	II.	Пластинчатые системы.....	184
Глава	VI.	Двумерные задачи теории тонких пластин.....	185
	6.1.	Вариационный метод Канторовича-Власова сведения двумерных задач к одномерным.....	185
	6.2.	Изгиб прямоугольных пластин.....	186
	6.2.1.	Выбор функции поперечного распределения прогибов пластины.....	187
	6.2.2.	Фундаментальные решения.....	189
	6.2.3.	Оценка точности метода Канторовича-Власова.....	197
	6.3.	Изгиб круглых пластин.....	202
	6.3.1.	Фундаментальные решения.....	203
	6.3.2.	Решение осесимметричных задач.....	209
	6.4.	Расчет пластин с комбинированным контуром.....	212
	6.5.	Предложения по учету дополнительных факторов.....	215
	6.6.	Устойчивость и динамика прямоугольных пластин.....	216
	6.7.	Устойчивость и динамика круглых пластин.....	224
	6.7.1.	Фундаментальные решения.....	226
	6.7.2.	Осесимметричные задачи на собственные значения.....	228
	6.8.	Определение собственных значений пластин с комбинированным контуром.....	229
	6.9.	Расчет цилиндрических складчатых систем.....	231

Приложение №1	Программы, реализующие отдельные вопросы алгоритма МГЭ и рекомендуемые для применения в учебном процессе.....	238
Приложение №2	Варианты заданий, рекомендуемые для самостоятельной работы.....	262
ЛИТЕРАТУРА.....		277