

**ОПД.Р.03 СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА**  
**СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ.**  
**ДИНАМИКА, УСТОЙЧИВОСТЬ**  
Пособие к выполнению контрольных работ

Строительная механика завершает цикл теоретических прочностных дисциплин, являющихся базой для изучения конструкций, разнообразных по форме и материалам. Выполнение контрольных работ - важнейший элемент в усвоении курса, В предлагаемом пособии собраны решения типовых задач, входящих в состав контрольных работ по расчету статически неопределимых систем, динамике и устойчивости. Выполнение этих работ связано с определенными трудностями- Поэтому каждая задача предваряется кратким пояснением из теории, а также четким алгоритмом выполнения. Приведенные примеры по объему и трудности соответствуют контрольным заданиям, которые студент выбирает по своему учебному шифру из методических указаний и заданий.

Все задачи решены без применения ЭВМ. Исключение составляют наиболее трудоемкие задачи, связанные с расчетом рам по методу сил и методу перемещений. Эти задачи могут быть решены на ЭВМ но программам, разработанным на кафедре и имеющимся во всех филиалах и в представительствах института. Примеры решения этих задач на ЭВМ даны в предлагаемом пособии.

Большое число решенных задач можно найти в учебниках и пособиях, список которых приводится ниже.

1. **Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А.** Основы строительной механики стержневых систем. - М: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 1996.

2. **Строительная механика / Под ред. Л.С. Даркова.** - М.: Высшая школа, 1976,

3. **Анохин П.П.** Строительная механика в примерах и задачах. Ч II. Статически неопределимые системы. - М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов. 2000.

4. **Бобаков Л.П., Зверьев Е.М., Хечумов А.Р.** Строительная механика: Методические указания к разделу «Матричная форма расчета статически неопределимых систем методами сил и перемещений». - М: ВЗИСИ. 1985.

5. **Строительная механика: Методические указания и задания к контрольным работам для студентов-заочников IV курса строительных специальностей.** - М.: МИКХиС. 2002.

# РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ РАМЫ МЕТОДОМ СИЛ

Работа состоит в построении эпюр изгибающих моментов  $M$ , поперечных сил  $Q$  и продольных сил  $N$  в раме.

## Порядок расчета рамы.

1. Определяют степень статической неопределимости заданной рамы. Проще всего это сделать, подсчитав число так называемых лишних связей. Нужно мысленно превратить заданную систему в известную статически определимую систему (балочную, консоль или трехшарнирную арку). Число отбрасываемых при этом связей и определит степень статической неопределимости.

2. Выбирают основную систему, которая должна быть статически определимой и геометрически неизменяемой. Она получается из заданной путем отбрасывания лишних связей. Следует помнить, что возможны несколько вариантов основной системы. По направлению отброшенных связей прикладывают неизвестные усилия  $X$ ;

3. Записывают канонические уравнения метода сил, смысл которых состоит в том, что перемещения по направлению отброшенных связей равны нулю. Число таких уравнений строго равно числу неизвестных усилий в отброшенных связях.

4. Определяют коэффициенты и свободные (грузовые) члены канонических уравнений.

4.1. В основной системе строят единичные эпюры  $M_j$  - эпюры изгибающих моментов от последовательно прикладываемых усилий в отброшенных связях, принятых равными единице.,

4.2. В основной системе строят грузовую эпюру  $M_p$  - эпюру изгибающих моментов от заданной нагрузки.

4.3. Вычисляют коэффициенты и свободные члены канонических уравнений, «перемножая» эпюры по правилу Верещагина.

5. Решают систему канонических уравнений, находят неизвестные усилия в отброшенных связях  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

6. Строят окончательную эпюру изгибающих моментов

$$M = M_p + M_1 X_1 + M_2 X_2 + \dots + M_n X_n$$

Удобно вначале построить так называемые исправленные эпюры  $M_1 X_1, M_2 X_2, \dots$ , полученные умножением ординат каждой единичной эпюры  $M_i$  на найденное соответствующее значение  $X_i$ . Если какое-либо усилие  $X$  получилось со знаком минус, то это означает, что исправленная эпюра должна быть построена на противоположном, чем  $M$ , волокне.

7. Проверяют окончательную эпюру  $M$

Для этого последовательно по правилу Верещагина «перемножают» окончательную эпюру  $M$  с суммарной эпюрой  $M_s$ , представляющей собой сумму всех единичных эпюр моментов  $M_i$ . Равенство нулю результата перемножения означает правильность решения задачи.

8. По эпюре моментов по формуле Журавского определяют для каждого элемента рамы поперечные силы  $Q$  и строят эпюру.

$$Q = \frac{dM}{ds}$$

9. Из условия равновесия узлов рамы вычисляют значения продольных сил  $N$  в ее элементах.

10. Проверяют общее равновесие рамы.

Пример.

Дано:

статически неопределимая рама (рис. 1) и задано соотношение моментов инерции сечений ее элементов:  $I_1 : I_2 = 3 : 4$ .

Требуется:

построить от заданной нагрузки эпюры изгибаю

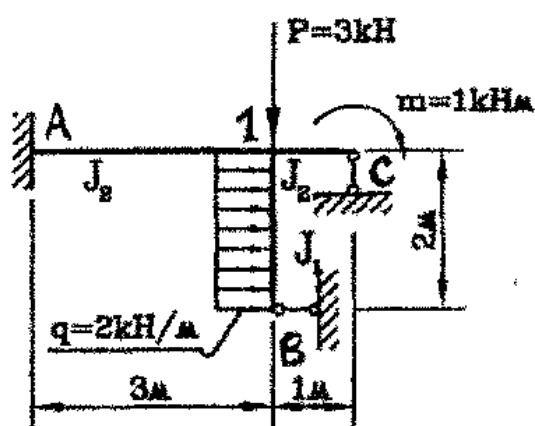


Рис. 1

щих моментов  $M$ , поперечных сил  $Q$  и продольных сил  $N$  и проверить их правильность.

1. Определяют степень статической неопределимости рамы (СНН)

$$СНН = 5 - 3 = 2$$

где 5 - число независимых опорных реакций.

3 - числе уравнений статики на плоскости.

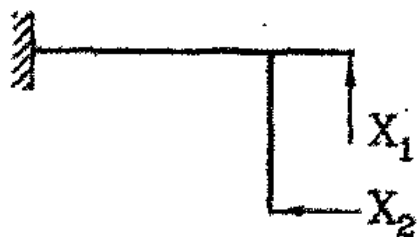


Рис. 2

2. Основная система показана на рис. 2,

В рассматриваемой задаче возможны и другие варианты основной системы, показанные на рис. 3,

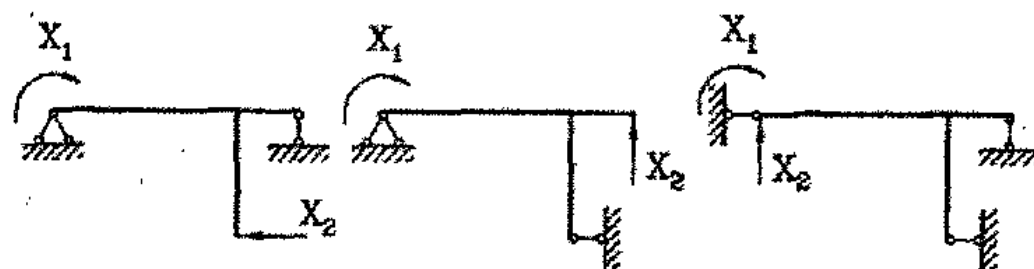


Рис. 3

В выбранной консольной основной системе (рис. 2) грузовая и единичные эпюры моментов могут быть построены без вычисления опорных реакций, только на основании одного лишь определения изгибающего момента в сечении.

Если основная система балочного или арочного типа, то необходимо привести все расчеты, связанные с построением эпюр.

3. Канонические уравнения:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0;$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0.$$

Здесь  $X_1$  и  $X_2$  - неизвестные усилия (реакции) в отброшенных связях.

4. Определение коэффициентов и грузовых членов канонических уравнений.

4.1. Единичные эпюры моментов  $M_1$  и  $M_2$  (рис. 4, 5)

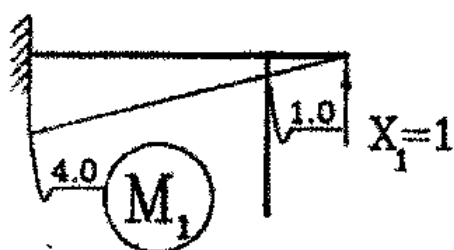


Рис. 4

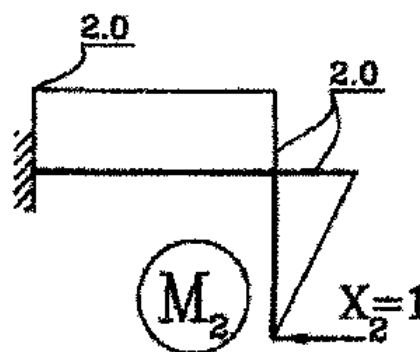


Рис. 5

4.2. Эпюра изгибающих моментов от заданной нагрузки  $M_p$  (рис. 6).

Как это принято у строителей, все эпюры изгибающих моментов построены «со стороны растянутого волокна».

4.3. Вычисление коэффициентов  $\delta_{ik}$  и свободных (грузовых) членов  $\Delta_{ip}$ .

Так как элементы рамы имеют разную жесткость на изгиб, то при вычислениях вводят ус-

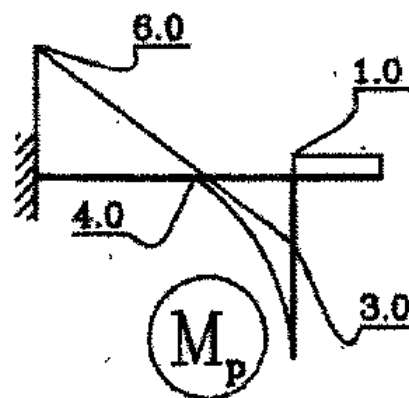


Рис. 6

ловную жесткости  $EI_0$ , учитывая заданное соотношение моментов инерции  $I_1 : I_2 = 3 : 4$ . Жесткость вертикального элемента примем равной  $3EI_0$ , а ригеля -  $4EI_0$ .

Для определения перемещений применим способ Верещагина. Для удобства «перемножаемые» эпюры изображены рядом.

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{M_1^2 ds}{EI} = \frac{\omega_1 y_1}{4EI_0} = \frac{4 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot \frac{1}{4EI_0} = 5,333 / EI_0 \text{ (рис. 7).}$$



Рис. 7

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int \frac{M_1 M_2}{EI} = \frac{\omega_2 (-y_2)}{4EI_0} = \frac{4+1}{2} \cdot 3(-2) \cdot \frac{1}{4EI_0} =$$

$$= -3,75 / EI_0 \text{ (рис. 8).}$$

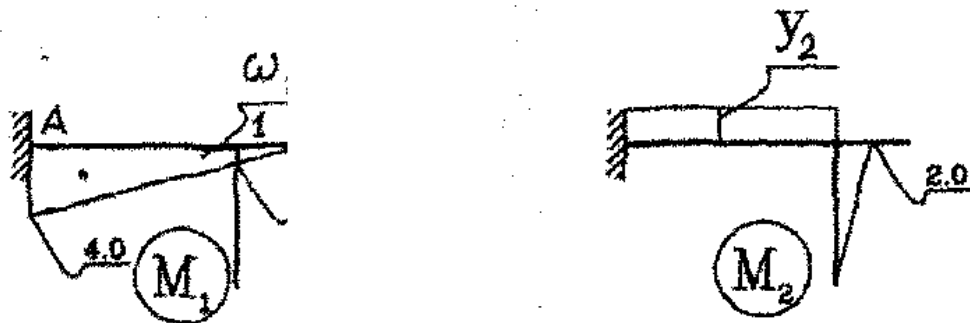


Рис.8

. (Точное положение центра тяжести трапеции на участке АІ определять не нужно так как где бы он ни находился внутри площади трапеции, ордината под ним в эпюре  $M_2$  будет постоянна).

Знак минус перед произведением объясняется тем, что площадь трапеции в эпюре  $M_1$  ордината под ее центром тяжести в эпюре  $M_2$  лежат по разные стороны элемента АІ.

$$\delta_{12} = \sum \int \frac{M_2^2 ds}{EI} = \frac{\omega_3 y_3}{4EI_0} + \frac{\omega_4 y_4}{3EI_0} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 2}{4EI_0} + \frac{2 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{3EI_0} =$$

$3,888 / EI_0$  (рис. 9).

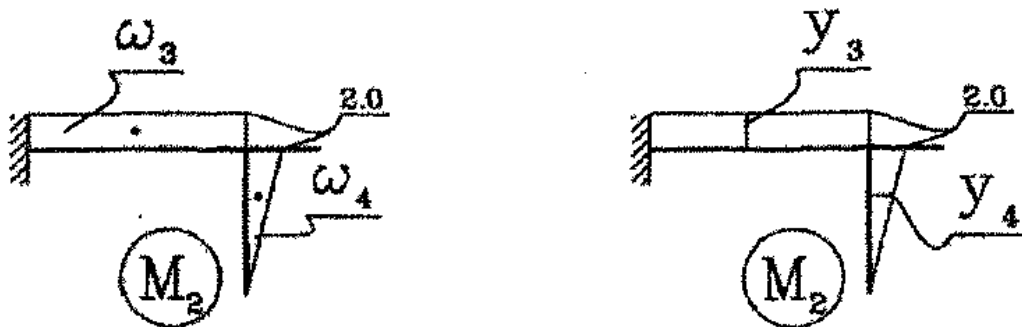


Рис. 9

$$\Delta_{1P} = \sum \int \frac{M_1 M_P}{EI} = [(-\omega_5) y_5 + \omega_6 y_6 + (-\omega_7) y_7] \frac{1}{4EI_0} =$$

$$\left[ -\frac{6 \cdot 3}{2} \left( \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \frac{3 \cdot 3}{2} \left( \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 4 \right) + (-1 \cdot 1) \cdot 0,5 \right] \frac{1}{4EI_0} =$$

$$-\frac{18,5}{4EI_0} = -4,625 / EI_0 \text{ (рис. 10).}$$



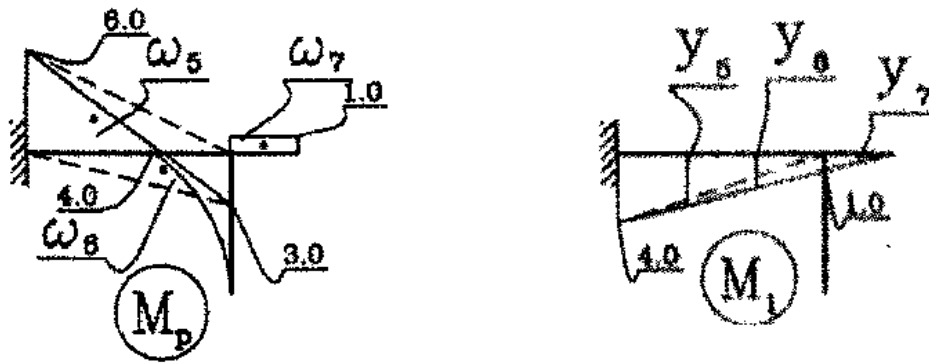


Рис. 10

Поясним, как перемножаются эпюры  $M_p$  и  $M_1$  на участке  $A1$  (рис. 11).

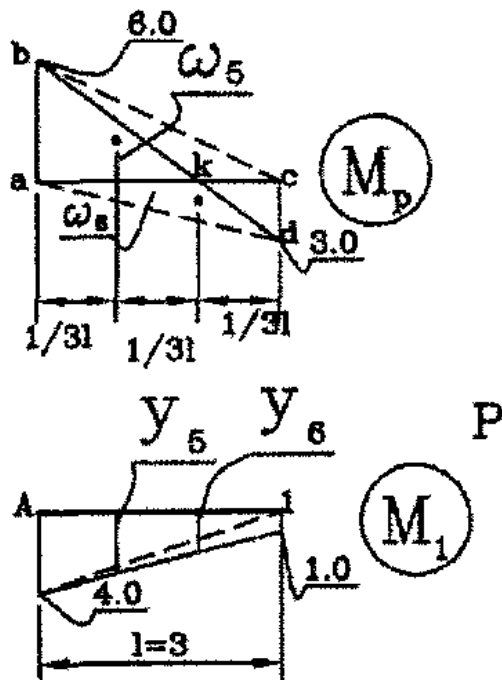


Рис. 11

Грузовой коэффициент  $\Delta_{2P}$  получается при «перемножении» эпюр  $M_p$  и  $M_2$  (рис. 12)

Представим эпюру  $M_p$  в виде двух треугольников  $abc$  и  $acd$ , расположенных по разные стороны от стержня. Их площади обозначены соответственно  $\omega_5 = 6 \cdot 3/2$  и  $\omega_6 = 3 \cdot 3/2$ . Умножая эти площади на соответствующие их центрам тяжести ординаты из эпюры  $M_1$ , получаем

$$\left[ (-\omega_5)y_5 + \omega_6 y_6 \right] \frac{1}{4El_0}$$

Добавленные при этом два треугольнике  $bkc$  и  $akd$  на результат не влияют, как их площади равны и равнозначны.

$$\Delta_{2P} = \sum \int \frac{M_2 M_P ds}{EI} = \frac{(-\omega_8)(-y_8)}{4EI_0} + \frac{\omega_9(-y_9)}{4EI_0} + \frac{(-\omega_{10})y_{10}}{3EI_0} =$$

$$= \left[ \left(-\frac{6 \cdot 3}{2}\right)(-2) + \frac{3 \cdot 3}{2}(-2) \right] \frac{1}{4EI_0} \left(-\frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 2\right) \frac{3}{4} \cdot 2 \frac{1}{3EI_0} = 0,9166 / EI_0.$$

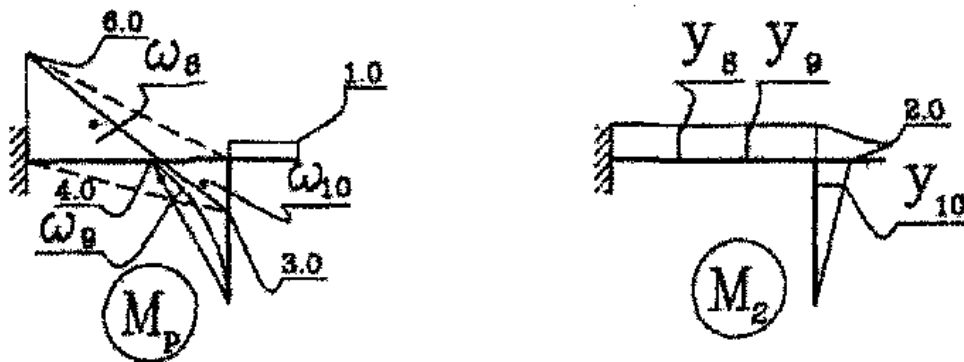


Рис. 12

5. Решают систему канонических уравнений находят неизвестные усилия  $X_1$

$$3,33 X_1 - 3,75 X_2 - 4,625 = 0 \quad (1)$$

$$-3,75 X_1 + 3,88 X_2 + 0,9166 = 0 \quad (2)$$

$$X_1 = 2,179.$$

$$X_2 = 1,865.$$

6. Строят окончательную эпюру  $M = M_P + M_1 X_1 + M_2 X_2$

6.1 В начале строят исправленные эпюры  $M_1 X_1$  и  $M_2 X_2$  (рис. 13).

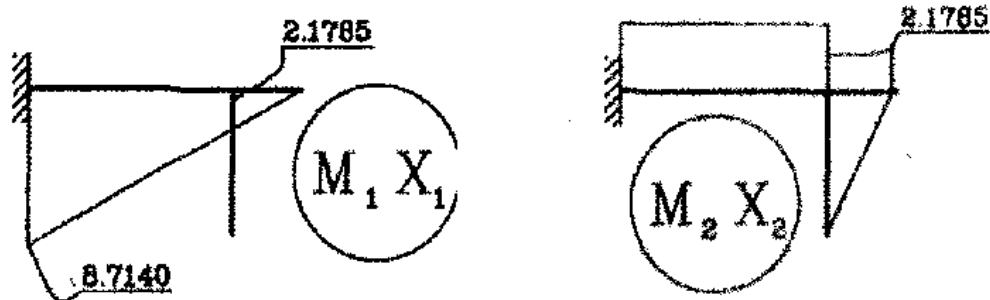


Рис.13

Если найденное усилие  $X_1$  получилось со знаком минус, то соответствующая исправленная эпюра должна быть построена на противоположных, чем эпюра  $M_1$ , сторонах элементов рамы.

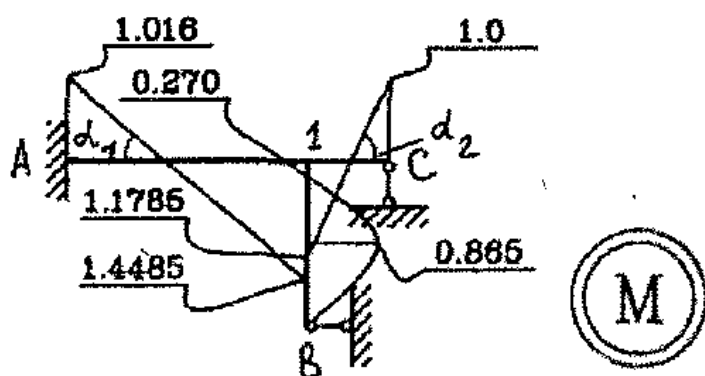


Рис. 14

6.2. Окончательная эпюра моментов  $M$  получается аккуратным сложением (по точкам) исправленных и грузовой эпюры (рис. 14).

7. Проверка эпюры  $M$ .

Проверку можно делать, умножая последовательно эпю-

ру  $M$  на единичные. Результат каждого произведения должен быть равен нулю, т.е.

$$\sum \int \frac{MM_s ds}{EI} = 0.$$

Можно предварительно построить суммарную единичную эпюру  $M_s$  сложив все единичные одну. Затем перемножить-эпюры  $M_s$  и  $M$ .

На рис. 15 показана  $M_5 = M_1 + M_2$  и рядом с ней эпюра  $M$ . На рисунке показано, как удобнее, представить площади эпюра  $M$  на отдельных участках для перемножения

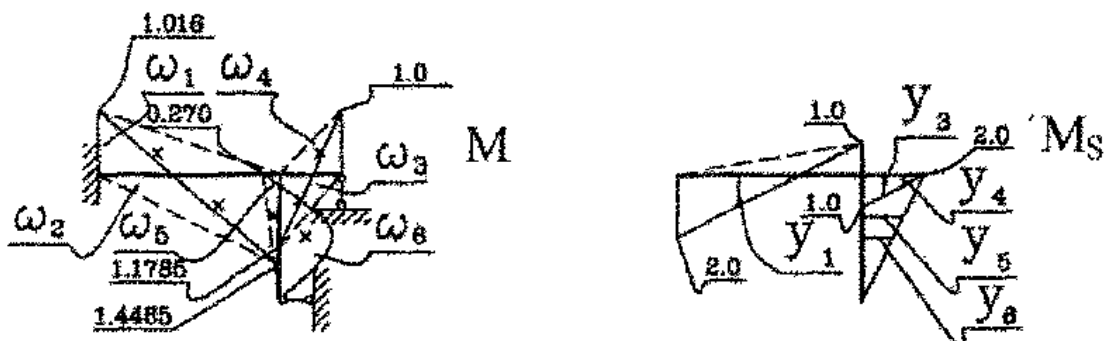


Рис. 15

$$\omega_1 = \frac{1,016 \cdot 3}{2} = 1,524, \quad \omega_2 = \frac{1,4485 \cdot 3}{2} = 2,1723,$$

$$\omega_3 = \frac{1,1785 \cdot 1}{2} = 0,58925, \quad \omega_4 = \frac{1 \cdot 1}{2} = 0,5,$$

$$\omega_5 = \frac{0,27 \cdot 2}{2} = 0,27, \quad \omega_6 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 = 1,3333.$$

$$y_1 = \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot 1 = 1, \quad y_2 = \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 2 = 0, \quad y_3 = \frac{2}{3} \cdot 1 = 0,6666,$$

$$y_4 = \frac{1}{3} \cdot 1 = 0,3333, \quad y_5 = \frac{2}{3} \cdot 2 = 1,3333, \quad y_6 = \frac{2}{2} = 1.$$

$$\sum \int \frac{MM_s ds}{EI} = \frac{1}{4EI} [(-\omega_1)y_1 + \omega_2 y_2 + \omega_3 y_3 + (-\omega_4)y_4] +$$

$$+ \frac{1}{3EI} [\omega_5(-y_5) + (-\omega_6)(-y_6)] =$$

$$= \frac{1}{EI} \left[ \frac{(-1,524) \cdot 1}{4} + \frac{2,1723 \cdot 0}{4} + \frac{0,58925 \cdot 0,6666}{4} + \frac{(-0,5) \cdot 0,3333}{4} + \frac{0,27 \cdot (-1,3333)}{3} + \frac{(-1,3333)(-1)}{3} \right] = \frac{1}{3EI} [-0,5426 + 0,5426] = 0.$$

8. Строят эпюру поперечных сил  $Q$  (рис. 16).

$$Q_{A1} = \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{1,016 + 1,4485}{3} = 0,8215,$$

$$Q_{1C} = \operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{1,1785 + 1}{1} = -2,1785.$$

Угол  $\alpha$ , следовательно, и  $\operatorname{tg} \alpha$  принимается положительным, если от оси рамы он отсчитывается по часовой стрелке. По этому правилу угол  $\alpha_1$  - положительный, а угол  $\alpha_2$  - отрицательный (рис. 14).

На участке, где действует распределенная нагрузка, поперечные силы определяются по краям участка по формулам

$$Q_{лев} = \frac{ql}{2} + \frac{M_{прав} - M_{лев}}{l}, \quad Q_{прав} = -\frac{ql}{2} + \frac{M_{прав} - M_{лев}}{l}.$$

Здесь важно не ошибиться со знаком эпюры  $M$ . Участок нужно рассматривать так, чтобы нагрузка действовала сверху вниз. Тогда (при условии, что эпюра  $M$  построена со стороны растянутых волокон) ординаты, расположенные над стержнем - принимаются отрицательными, под стержнем - положительными.

В нашем случае получаем

$$Q_{лев} = Q_{B1} = \frac{2 \cdot 2}{2} + \frac{-0,27 - 0}{2} = 1,865 \text{ кН.}$$

$$Q_{\text{прав}} = Q_{\text{лев}} = \frac{2 \cdot 2}{2} + \frac{-0,27 - 0}{2} = -2,135 \text{ кН.}$$

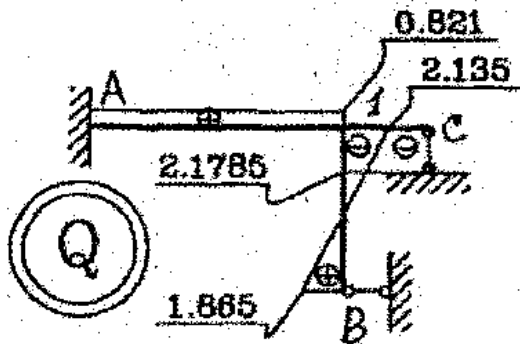


Рис. 16

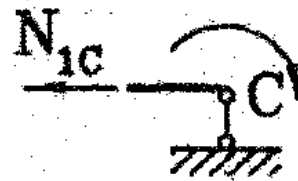


Рис. 17

9. Строят эпюру продольных сил N (рис. 19).

Продольные силы находят из равновесия узлов рамы.

Вырежем элемент рамы у опоры C (рис. 7)

$$\sum x = 0; \quad N_{1C} = 0.$$

Узел 1 (рис. 18)

$$\sum x = 0; \quad N_{A1} - 2,135 = 0;$$

$$N_{A1} = 2,135 \text{ кН,}$$

$$\sum y = 0; \quad N_{1B} - 0,8215 -$$

$$- 2,1765 + 3 = 0; \quad N_{1B} = 0.$$

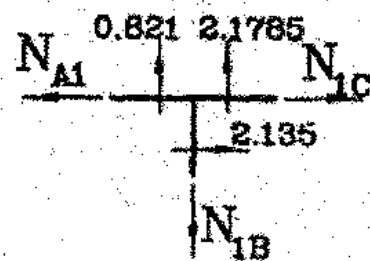


Рис. 18

10. Проверка общего равновесия рамы.

Раму отрезают от опор и в местах разрезов прикладывают значения N и Q с полу-

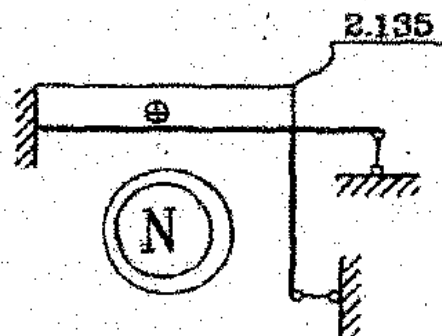


Рис. 19

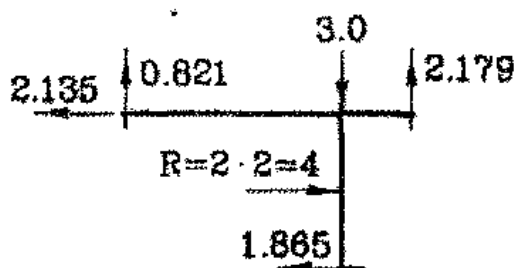


Рис. 20

ченных эпюр. Эти усилия должны находиться в равновесии с действующей на раму нагрузкой (рис. 20)

$$\sum x = 2 \cdot 3 - 2,135 -$$

$$- 1,865 = 0,$$

$$\sum y = 0,821 - 3 + 2,179 = 0.$$

### Расчет рамы с применением ЭВМ.

Разработанная на кафедре программа расчета рам по методу сия в матричной форме существенно облегчает и ускоряет получение результата.

Описание общей процедуры решения приведено в пособиях [4]. [5].

Выполнение работы включает в себя три этапа.

1. Подготовка данных для ввода в ЭВМ.

1.1. Выбор основной системы.

1.2. Построение единичных и грузовой эпюр изгибающих моментов в основной системе.

1.3. Выбор расчетных участков и расчетных точек для ЭВМ.

1.4. Формирование трех матриц:

1.4.1. Матрица из ординат единичных эпюр моментов в расчетных точках -  $M_I$ .

1.4.2. Матрица-столбец из ординат грузовой эпюры изгибающих моментов в расчетных точках -  $M_P$ ,

1.4.3. Матрица податливости рамы -  $L$ .

2. Работа на ЭВМ (ввод данных и вывод результатов расчета на дисплей).

ЭВМ выполняет следующие вычисления:

- вычисляет коэффициенты и грузовые члены канонических уравнений,

- формирует и решает систему канонических уравнений,

- вычисляет окончательные значения изгибающих моментов в расчетных точках.

Все результаты выводятся на экран монитора.

3. Обработка результатов расчета на ЭВМ.

3.1, Строят окончательную эпюру изгибающих моментов  $M$ ,

3.2. Используя правило Журавского, строят эпюру поперечных сил  $Q$ .

3.3. Из равновесия узлов рамы определяют продольные силы  $N$  и строят их эпюру.

Ниже приводится пример решения рассмотренной ранее рамы на ЭВМ.

1. Подготовка данных.

Пункты 1.1- 1.4 выполняются «на руках». Единичные эпюры  $M_1$  и  $M_2$  показаны на рис: 4, 5, грузовая эпюра  $M_p$  на рис. 6.

Сравнивая грузовую эпюру  $M_p$  с единичными эпюрами  $M_1$  и  $M_2$  обрезают раму на участки так, чтобы на каждом из них эпюры были гладкими и кривыми или прямолинейными (без переломов и скачков). Нумеруют концы выделенных участков. Эти точки и определяют места ввода данных (расчетные точки). Для каждого участка задают правило знаков. Это правило определяет лишь положение эпюры относительно стержня (сверху или снизу, справа или слева) к может не совпадать с правилом знаков, принятым для изгибающих моментов в сопротивлении материалов и строительной механике. -

На рис. 21 показана расчетная схема для ЭВМ с выделенными участками (обозначены римскими цифрами), расчетными точками и указаниями на знак моментов.

Формирование матрицы из ординат единичных эпюр моментов в расчетных точках.

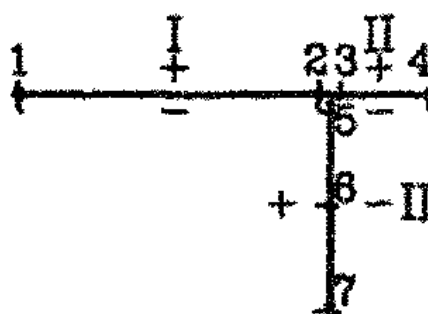


Рис. 21



$$M_I = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Формирование матрицы-столбца из ординат грузовой эпюры моментов  $M_p$  в расчетных точках.

$$M_P = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ . \end{pmatrix}$$

Формирование матрицы податливости рамы.

Вначале формируют матрицы податливости каждого участка.

$$L_1 = \frac{l}{6EI} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{- для участков, на которых обе эпюры прямо-}$$

$$L_2 = \frac{l}{6EI} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{- для участков, на которых грузовой эпюра -}$$

парабола.

$$L_3 = \frac{3}{6 \cdot 4EI_0} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{EI_0} \begin{pmatrix} 0,25 & 0,125 \\ 0,125 & 0,25 \end{pmatrix}$$

$$L_{II} = \frac{1}{6 \cdot 4 EI_0} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{EI_0} \begin{vmatrix} 0,08333 & 0,04166 \\ 0,04166 & 0,08333 \end{vmatrix}$$

$$L_{III} = \frac{2}{6 \cdot 3 EI_0} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{EI_0} \begin{vmatrix} 0,1111 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4444 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1111 \end{vmatrix}$$

$$L = \begin{vmatrix} L_I & 0 & 0 \\ 0 & L_{II} & 0 \\ 0 & 0 & L_{III} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{EI_0} \begin{vmatrix} .25 & .125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ .125 & .25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .083333 & .041666 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .041666 & .083333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .11111 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .44444 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .11111 \end{vmatrix}$$

## 2. Работа на ЭВМ.

Вводят в машину матрицы  $M_I$ ,  $M_R$  и  $L$ , руководствуясь указаниями на дисплее. Для получения достаточной точности расчетов целесообразно вводить значения элементов матрицы с тем количеством знаков, насколько позволяет дисплей. Десятичные дроби с нулевой целой частью нужно вводить так, как показано в примере: 0,083333 - .083333.

Результаты расчета выводятся на экран монитора в виде, показанном для решаемой задачи на рис. 22.

(Здесь, например,  $-.3750E+01 = -3,75$ ,  $0,9167E+00 = 0,9167$ ).

Все результаты нужно распечатать или списать с экрана.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА :

$F[M \times N] = M_{гр} * L * Ml$

$W[N] = M_{гр} * L * M_{Pr}$

$X[N] = F_{обр} * W$

МАТРИЦА КОЭФФИЦИЕНТОВ СИСТЕМЫ  
КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ "СКУ" ; ВЕКТОР СВОБОДНЫХ;  
ЧЛЕНОВ "СКУ" ; НЕИЗВЕСТНЫХ

0.5333E+01 -3.750E+01  
-3.750E+01 0.3889E+01

-4.625E+01  
0.9167E-00

0.2179E-01  
0.1865E+01

$M[M] = M_{Pr} + Ml * X$

ОРДИНАТЫ ОКОНЧАТЕЛЬНОЙ ЭПОЮРЫ МОМЕНТОВ В РАСЧЕТНЫХ ТОЧКАХ ;

1.02 -1.45 -1.18 1.00 0.27 -0.86 0.00

Рис. 22

### 3. Обработка результатов расчета на ЭВМ.

3.1. Откладывая в расчетных точках в произвольно выбранном масштабе моменты (последняя строка на дисплее) в соответствии с принятым правилом знаков и соединяя концы откладываемых отрезков прямыми линиями, получают окончательную эпюру  $M$ . На участке, на котором действует распределенная нагрузка, три точки (по концам и по середине участка) соединяют плавной кривой (рис. 23).

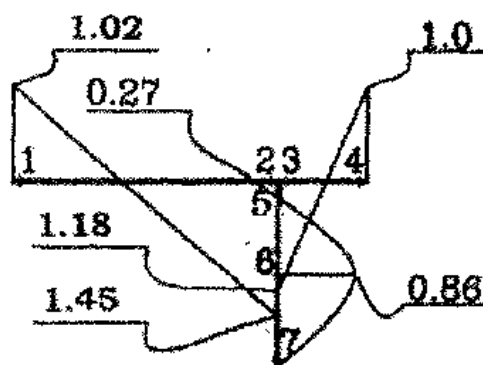


Рис. 23

Расчеты по пп. 3.2 и 3.3 (построение эпюр  $Q$  и  $N$ ) выполняются обычным способом, как это показано для рассматриваемой задачи на с. 14,15.

## РАСЧЕТ НЕРАЗРЕЗАННОЙ БАЛКИ

Неразрезная балка - это сплошной брус, лежащий на нескольких опорах.

Расчет включает построение эпюр изгибающих моментов  $M$  и поперечных сил  $Q$  от заданной постоянной нагрузки, а также построение эпюр изгибающих моментов от последовательного нагружения пролетов временной нагрузкой. Кроме того, строится огибающая эпюра моментов.

Опоры нумеруются слева направо, крайняя левая опора - нулевая. При такой системе обозначений пролет получает номер, соответствующий правой опоре.

В качестве основной системы метода сил принимают схему состоящую из простых двуопорных балок, полученную врезкой.

шарниров над каждой опорой. Неизвестными оказываются изгибающие моменты, действующие в опорных сечениях.

Если конец балки заделан, то вводится дополнительный (фиктивный) пролет нулевой длины.

Канонические уравнения метода сил принимают форму «уравнений трех моментов»:

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -6\Omega_n \frac{a_n}{l_n} - 6\Omega_{n+1} \frac{b_{n+1}}{l_{n+1}}, \quad (3)$$

где  $M_{n-1}$ ,  $M_n$ ,  $M_{n+1}$  — изгибающие моменты над опорами  $n-1$ , и  $n+1$  соответственно,

$l_n$ ,  $l_{n+1}$  —  $n$ -й и  $n+1$ -й пролеты балки,

$\Omega_n$  и  $\Omega_{n+1}$  — площади эпюр изгибающих моментов, построенных в  $n$ -ом и  $n+1$ -ом пролетах в простых шарнирно опертых балках (в основной системе от заданной нагрузки),

$a_n$  — расстояние от центра тяжести площади эпюры моментов в пролете до левой опоры,

$b_{n+1}$  — расстояние от центра тяжести площади эпюры моментов в пролете до правой опоры.

Порядок расчета балки на постоянную нагрузку

1. Строят эпюры изгибающих моментов в пролетах неразрезной балки. Каждый нагруженный пролет рассматривается как балка на двух шарнирных опорах.

Если крайние пролеты неразрезной балки имеют нагруженные консоли, то изгибающие моменты на этих опорах определяются сразу по определению изгибающего момента.

2. Записывают столько уравнений трех моментов, сколько неизвестных опорных моментов есть в решаемой задаче. Для этого в общее уравнение (1) поочередно подставляют номер опоры, для которой составляется уравнение.

Для вычисления грузовых членов нужно уметь вычислять площади эпюр. Для симметричных эпюр это не составляет труда. Полезно знать, где лежит центр тяжести несимметричной треугольной эпюры моментов (рис. 24).

$$a_n = \frac{1}{3}(2a + b),$$

$$b_n = \frac{1}{3}(a + 2b).$$

3. Решают систему уравнений, находят неизвестные моменты в опорных сечениях.

4. Строят эпюру изгибающих моментов  $M$ . Для этого откладывают на опорах в масштабе полученные опорные моменты и соединяют концы этих отрезков прямыми линиями. В пролетах, где нет внешней нагрузки, построенная эпюра моментов будет окончательной. Там, где задана нагрузка; на прямые линии «навешивают» балочные эпюры  $M$ , построенные в п. 1.

5. Используя формулу Журавского, по эпюре  $M$  строят эпюру поперечных сил  $Q$ .

Порядок расчета балки на временную нагрузку.

1. Для каждого пролета неразрезной балки подсчитывают левое  $k_n$  и правое  $k_n^I$  фокусные отношения, определяющие точки на оси балки, через которые проходит эпюра изгибающих моментов, когда временной нагрузкой загружен соответственно пролет справа или слева от рассматриваемого участка балки.

$$k_{n+1} = 2 + \frac{I_n}{I_{n+1}} \left( 2 - \frac{1}{k_n} \right) \quad (4)$$

$$k_n^I = 2 + \frac{I_{n+1}}{I_n} \left( 2 - \frac{1}{k_n^I} \right) \quad (5)$$

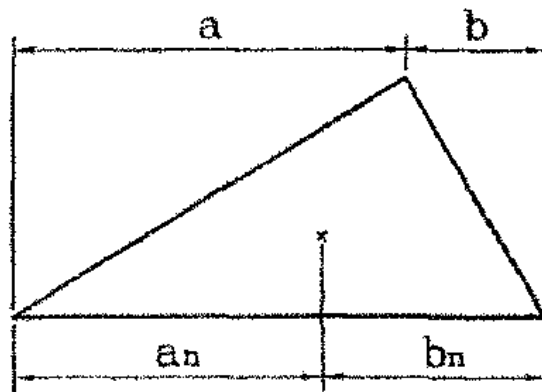


Рис. 24

Эти формулы легко «заводятся», если:

крайняя левая опора:

(нулевая) шарнирная, то  $k_1 = \infty$ ,

(нулевая) заделка, то  $k_1 = 2$ ,

крайний правая опора:

(n-ая) шарнирная, то  $k_n^1 = \infty$ ,

(n-ая)-заделка, то  $k_n^1 = 2$ .

2. Строят эпюры изгибающих моментов, последовательно загружая временной нагрузкой первый, второй и последующие пролеты балки. Для этого:

2.1. Определяют изгибающие моменты над левой и правой опорами по концам загруженного пролета по формулам

$$M_{n-1} = -\frac{6\Omega_n}{l_n^2} \cdot \frac{b_n k_n^1 - a_n}{k_n k_n^1 - 1}, \quad M_n = -\frac{6\Omega_n}{l_n^2} \cdot \frac{a_n k_n - b_n}{k_n k_n^1 - 1} \quad (6)$$

2.2. Вычисляют опорные моменты над опорами слева от загруженного пролета (если таковые имеются) по формуле

$$M_{n-1} = -\frac{M_n}{k_n} \quad (7)$$

2.3. Вычисляют опорные моменты над опорами справа от загруженного пролета, (если таковые имеются) по формуле

$$M_{n+1} = -\frac{M_n}{k_n^1} \quad (8)$$

2.4. Откладывают полученные опорные моменты в одном масштабе и соединяют концы отрезков прямыми линиями. В загруженном пролете «навешивают» балочную эпюру моментов.

3. Построение объемлющей эпюры моментов.

Объемлющая, эпюра моментов в каждом сечении балки показывает максимальный и минимальный изгибающие моменты, которые могут появиться в этом сечении от постоянной и комбинации временных нагрузок.

Огибающую эпюру в учебной работе можно строить в трех точках в каждом пролете: на опорах и в середине пролета (в пролете, где действует сосредоточенная сила, и под силой).

В каждом из рассматриваемых сечений, минимальный момент получается как сумма момента от постоянной нагрузки и отрицательных моментов со всех эпюр от временной нагрузки.

Максимальный момент в том же сечении получают, соответственно, как сумму момента от постоянной нагрузки и положительных моментов со всех эпюр от временной нагрузки.

Пример.

Дано:

неразрезная балка (рис. 25).

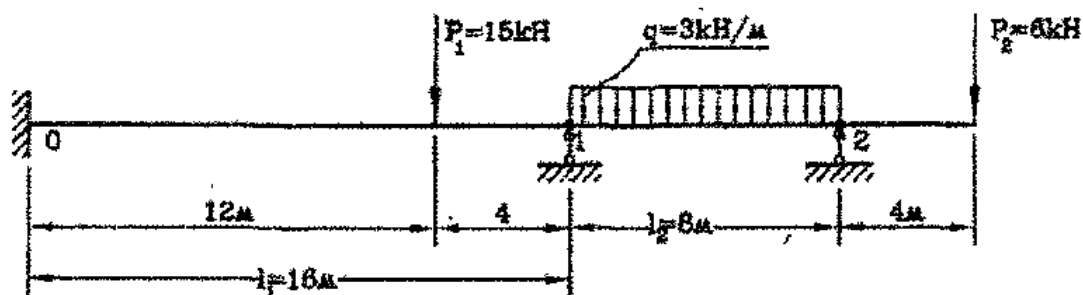


Рис. 25

Требуется:

найти с помощью уравнений трех моментов опорные моменты и построить эпюры  $M$  и  $Q$  от постоянной нагрузки;

найти моментные фокусные отношения и построить эпюры от последовательного, нагружения каждого пролета и консоли временной нагрузкой  $q = 9 \text{ кН/м}$ ;

построить объемлющую (огibaющую) эпюру моментов для второго пролета (считая слева).

Так как, левый конец балки зашцеилен, то для применения уравнений трех моментов вводим дополнительный фиктивный пролет  $l_0 = 0$  (рис. 26).



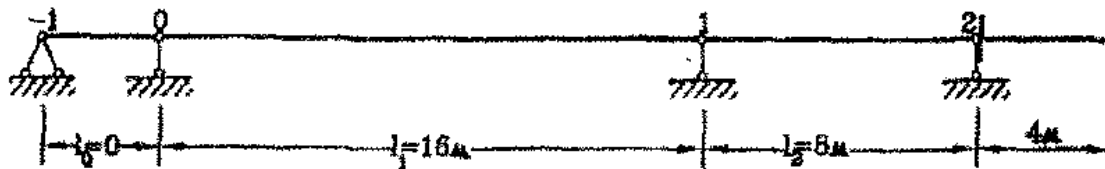


Рис. 26

1. Подсчитывают степень статической неопределимости (числа лишних связей)

$$W = 3D - \text{III} - C_0;$$

$$W = 3 \cdot 1 - 5 = -2.$$

Выбор основной системы. В качестве основной выбирают систему разрезных балок, полученную из заданной системы врезкой шарниров над каждой опорой. За неизвестные принимают опорные изгибающие моменты (рис. 27).



Рис. 27

2. Строят эпюры изгибающих моментов в основной системе от заданной нагрузки (рис. 28).

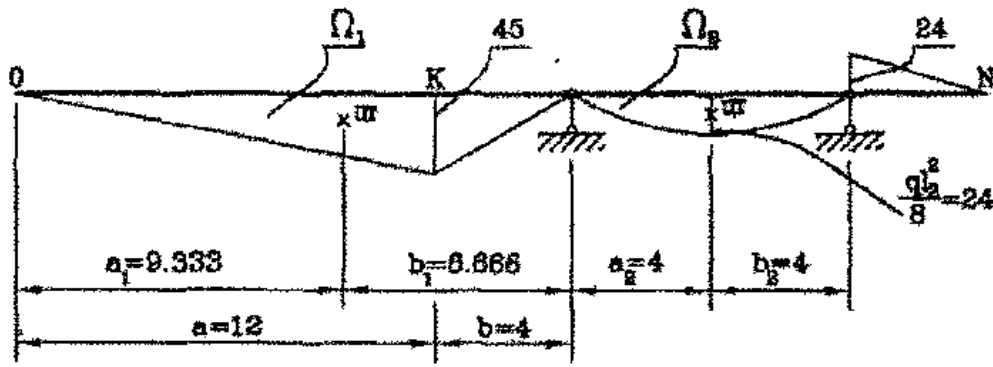


Рис. 28

$$a_1 = \frac{1}{3}(2a + b) = \frac{1}{3}(2 \cdot 12 + 4) = 9,333, \quad b_1 = \frac{1}{3}(a + 2b) =$$

$$= \frac{1}{3}(12 + 2 \cdot 4) = 6,666,$$

$$\Omega_1 = \frac{45 \cdot 16}{2} = 360, \quad \Omega_2 = \frac{2}{3} \cdot 24 \cdot 8 = 128.$$

3. Записывают уравнения трех моментов и находят неизвестные опорные моменты.

Для опоры 0 ( $n = 0$ )

$$M_1 l_0 + 2M_0(l_0 + l_1) + M_1 l_1 = -6\Omega_1 \frac{b_1}{l_1}.$$

Для опоры 1 ( $n = 1$ )

$$M_0 l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 = -6\Omega_1 \frac{a_1}{l_1} - 6\Omega_2 \frac{b_2}{l_2}.$$

$$2M_0 \cdot 16 + M_1 \cdot 16 = -6 \cdot 360 \frac{6,666}{16};$$

$$M_0 16 + 2M_1(16 + 8) - 248 = -6 \cdot 360 \frac{9,333}{16} - 6 \cdot 128 \frac{4}{8};$$

$$32M_0 + 16M_1 = -900;$$

$$16M_0 + 48M_1 = -1452;$$

$$M_0 = -28,125 - 0,5M_1;$$

$$48M_1 - 450 - 8M_1 = -1452;$$

$$M_1 = -25,05; \quad M_0 = -15,6.$$

4. Строят эпюру изгибающих моментов  $M$  от постоянной нагрузки (рис. 29).

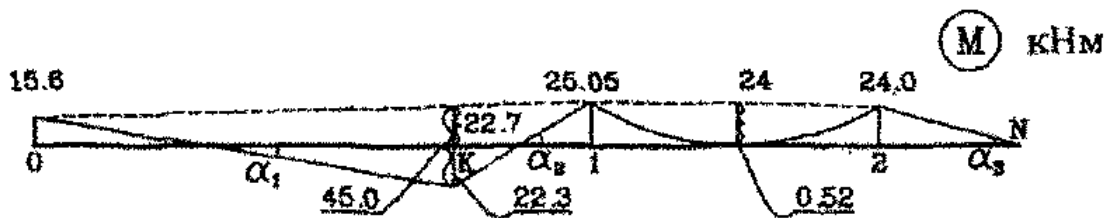


Рис. 29

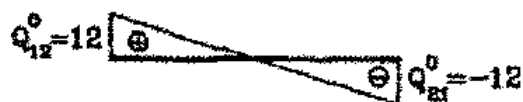
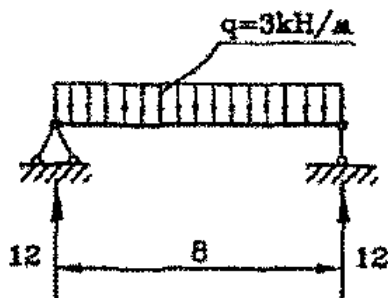


Рис. 30

5. Строят эпюру поперечных сил  $Q$  (рис. 30,31),

$$Q_{0K} = \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{15,6 + 22,3}{12} = 3,16,$$

$$Q_{K1} = -\operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{22,3 + 25,05}{4} = -11,84,$$

$$Q_{2N} = \operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{24}{4} = 6.$$

$$Q_{12} = Q_{12}^0 + \frac{M_{np} - M_{вс}}{l} = 12 + \frac{-24 + 25,05}{8} = 12,131;$$

$$Q_{21} = Q_{21}^0 + \frac{M_{np} - M_{вс}}{l} = -12 + \frac{-24 + 25,05}{8} = -11,869.$$

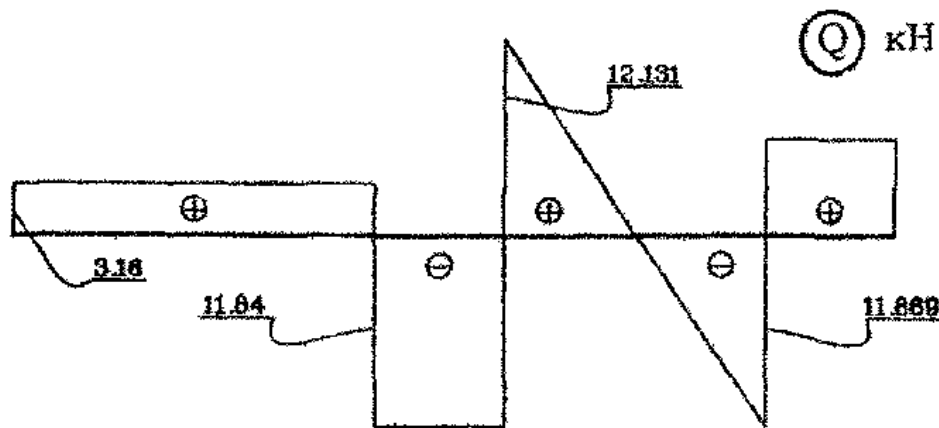


Рис. 31

6. Рассчитывают неразрезанную балку методом фокусных отношений. Для этого вычисляют фокусных отношений

Левые:

$$k_0 = \frac{M_0}{0} = \infty;$$

$$k_1 = 2 + \frac{l_0}{l_1} \left( 2 - \frac{1}{\infty} \right) = 2 + \frac{0}{16} (2 - 0) = 2;$$

$$k_2 = 2 + \frac{l_1}{l^2} \left( 2 - \frac{1}{k_1} \right) = 2 + \frac{16}{8} \left( 2 - \frac{1}{2} \right) = 5.$$

Правые:

$$k_2^1 = \frac{M_1}{0} = \infty; \quad k_1^1 = 2 + \frac{l_2}{l_1} \left( 2 - \frac{1}{k_2^1} \right) = 2 + \frac{8}{16} (2 - 0) = 3.$$

7. Строят эпюры изгибающих моментов от последовательного нагружения пролетов временной нагрузкой  $q_{\text{вп}} = 9 \text{ кН/м}$ .  
Загружают первый пролет временной нагрузкой (рис. 32).

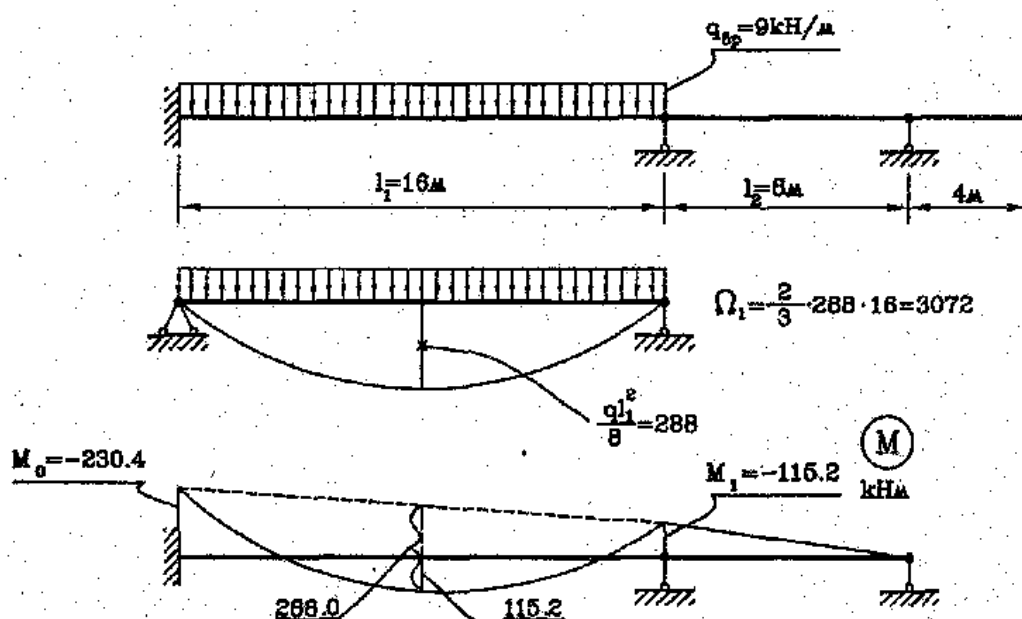


Рис. 32

8. Вычисляют значения изгибающих моментов по концам загруженного пролета по формулам (6)

$$M_0 = - \frac{6\Omega_1}{l_1^2} \frac{b_1 \cdot k_1 - a_1}{k_1 \cdot k_1^1 - 1} = - \frac{6 \cdot 3072}{16^2} \frac{8 \cdot 3 - 8}{2 \cdot 3 - 1} = - \frac{18432}{80} =$$

$$= - 230,4;$$

$$M_1 = -\frac{6\Omega_1 a_1 \cdot k_1 - b_1}{l_1^2 k_1 \cdot k_1^1 - 1} = -\frac{6 \cdot 3072 \cdot 8 \cdot 2 - 8}{16^2 \cdot 2 \cdot 3 - 1} = -\frac{9216}{80} = -115,2.$$

Загружают второй пролет временной нагрузкой (рис. 33).

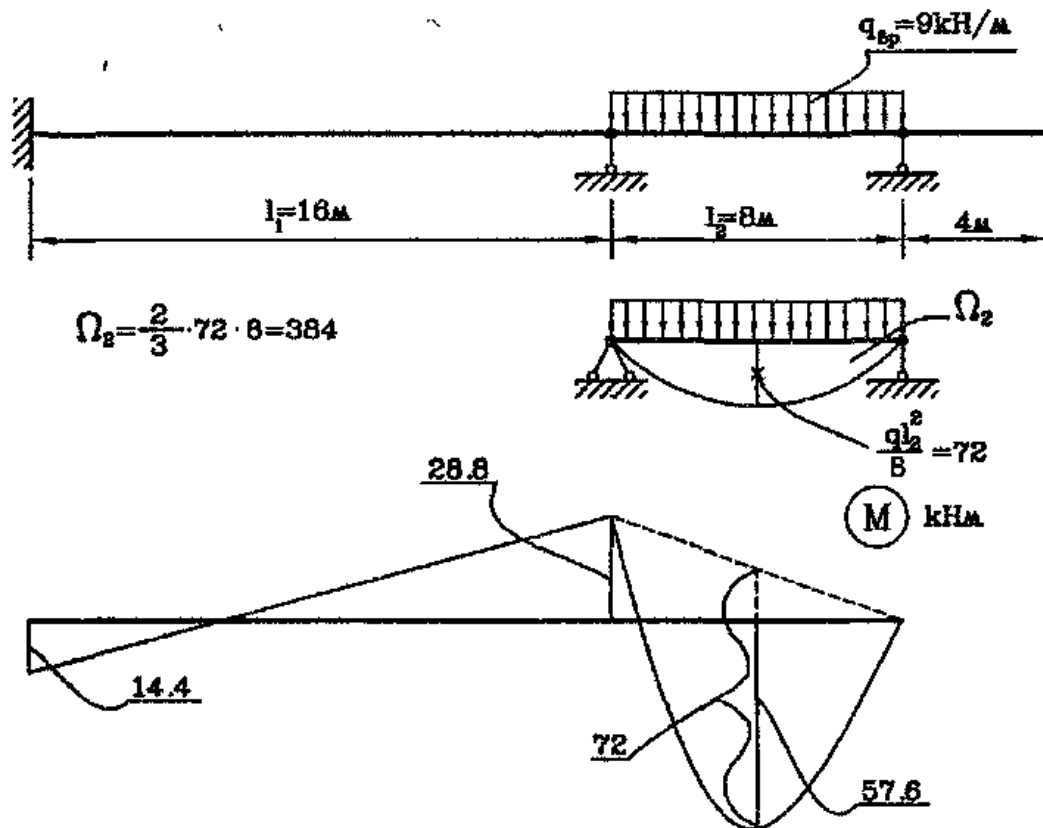


Рис. 33

$$M_1 = -\frac{6\Omega_2 b_2 \cdot k_2^1 - a_2}{l_2^2 k_2 \cdot k_2^1 - 1} = -\frac{6 \cdot 384 \cdot 4 \cdot \infty - 4}{64 \cdot 5 \cdot \infty - 1} = -\frac{6 \cdot 384 \cdot 4}{64 \cdot 5} = -28,8;$$

$$M_0 = -\frac{M_1}{k_1} = -\frac{-28,8}{2} = 14,4.$$

9. Загружают консоль временной нагрузкой (рис. 34).

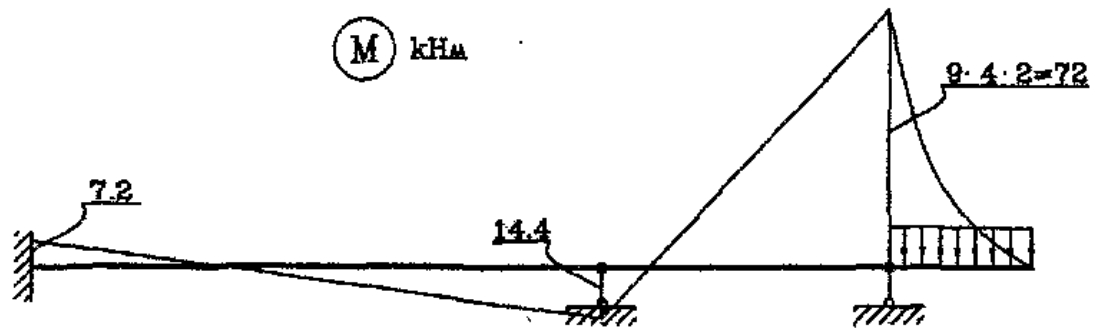


Рис. 34

$$M_1 = -\frac{M_1}{5} = -\frac{-72}{5} = 14,4, \quad M_0 = -\frac{14,4}{2} = -7,2.$$

10. Строят объемлющую эпюру моментов для второго пролета (рис. 35, 36).

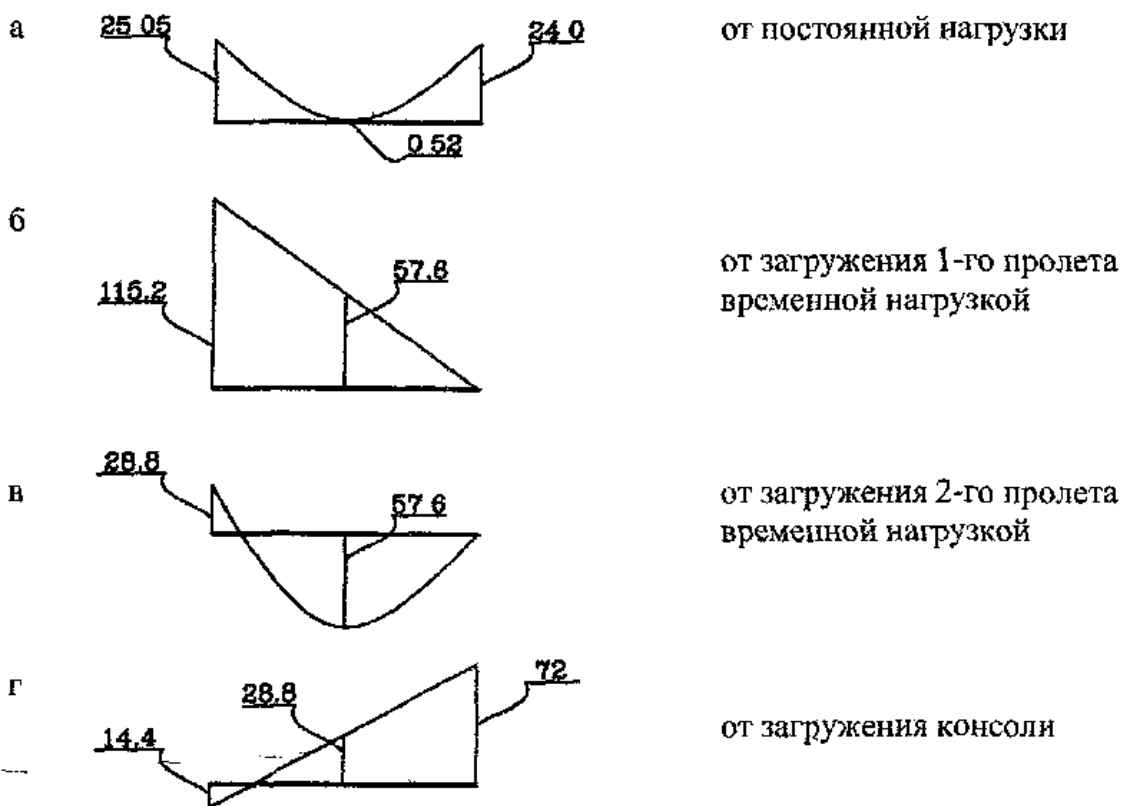


Рис. 35

Таблица 1

Точки	Моменты от постоянной нагрузки	Q <sub>вр</sub> 1 пролет	Q <sub>вр</sub> 2 пролет	Q <sub>вр</sub> консоль	M <sub>max</sub>	M <sub>min</sub>
1	-25,05,	-115,2	-28,8	14,4	-10,65	-169,05
2	-0,525	-57,6	57,6	-28,8	57,08	-86,92
3	-24	0	0	-72	-24	-96

Объемлющая эпюра изгибающих моментов в пролете  $l_2$  показана на рис. 36.

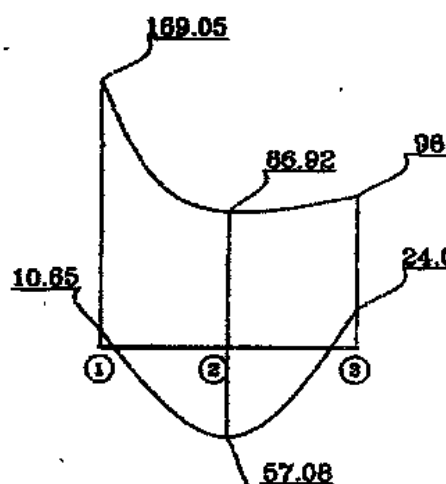


Рис. 36

## РАСЧЕТ ДВУХШАРНИРНОЙ АРКИ

Двухшарнирная арка - это криволинейный брус, лежащий на двух неподвижных шарнирных опорах. Разновидностью этой расчетной схемы является арка с затяжкой. Такие арки один раз статически неопределимы: лишними связями будет горизонтальный опорный стержень или затяжка.

Цель задачи - построить эпюры изгибающих моментов  $M$ , поперечных сил  $Q$  и продольных сил  $N$ .



Основная система при расчете методом сил имеет вид  
Спис.37У

для двухшарнирной арки



для арки с затяжкой

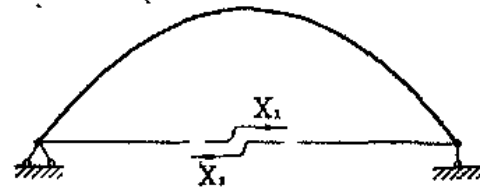


Рис. 37

Неизвестное усилие  $X_1$  определяется из канонического уравнения  
метода сил

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

Для не очень пологих арок коэффициент и свободный (грузовой) член этого уравнения определяются по Мору

$$\delta_{11} = \int_s \frac{M_1^2 ds}{EI} + \frac{1 \cdot l}{E_3 A_3};$$

$$\Delta_{1P} = \int_s \frac{M_1 M_P}{EI} ds,$$

где  $M_1 = -y$  – изгибающий момент в арке от силы  $X_1 = 1$ ,

$M_P$  – изгибающий момент в балке с пролетом, равным пролету арки от заданной нагрузки,

$l$  – пролет арки,

$EI$  – жесткость арки на изгиб,

$E_3 A_3$  – жесткость затяжки,

$l / E_3 I_3$  – удлинение затяжки от силы  $X_1 = 1$ .

Вычисление коэффициента и свободного члена этого уравнения осложняется тем, что интегрирование ведется вдоль криволинейной оси арки и обе, эпюры изгибающих моментов в основной системе  $M_1$  и  $M_p$ , стоящие под знаком интеграла, криволинейны. Правило Верещагина применить нельзя.

Поэтому в практических расчетах интегралы берут численно. Для этого пролет арки разбивают на  $n$  равных отрезков  $\Delta x = l/n$ . Каждому отрезку на оси абсцисс  $\Delta x$  соответствует отрезок  $\Delta s = \Delta x / \cos \varphi$ , где  $\varphi$  - угол между вертикалью и нормалью к оси арки.

Высота сечения арки часто задается изменяющейся по закону  $h = h_0 \cos \varphi$ , где  $h_0$  - высота сечения в замке. Если ширина сечения постоянна, то момент инерции произвольного сечения  $I$  равен

$$I = I_0 \cos^3 \varphi,$$

где  $I_0$  - момент инерции сечения арки в замке.

Заменяя интегрирование суммированием и умножая оба перемещения на  $E I_0$ , получаем

$$E I_0 \delta_{11} = \sum_n \frac{y^2 \Delta x}{\cos^4 \varphi} + \frac{E I_0}{E_3 A_3} l;$$

$$E I_0 \Delta_{1p} = - \sum \frac{y M_p}{\cos^4 \varphi} \Delta x.$$

Усилие  $X_1$  в арке с затяжкой определяется из канонического уравнения

$$X_1 = - \frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{\sum_n \frac{y M_p \Delta x}{\cos^4 \varphi}}{\sum \frac{y^2 \Delta x}{\cos^4 \varphi} + \frac{E I_0}{E_3 A_3} l}. \quad (9)$$

В двухшарнирной арке формула для  $X_1$  отличается лишь отсутствием последнего слагаемого в знаменателе

$$X_1 = - \frac{\sum \frac{yM_p \Delta x}{\cos^4 \varphi}}{\sum \frac{y^2 \Delta x}{\cos^4 \varphi}} \quad (10)$$

Приближенность расчета заключается в том, что на каждом участке  $\Delta x$  значения  $y \cdot M_p$  и  $\cos \varphi$  считаются постоянными.

После того, как будет найден распор  $X_1$  (или усилие в затяжке), расчетные усилия определяются по тем же формулам, что и в трехшарнирной арке:

$$\begin{aligned} M &= M_p - X_1 y; \\ Q &= Q_p \cos \varphi - X_1 \sin \varphi; \\ N &= - (Q_p \sin \varphi + X_1 \cos \varphi), \end{aligned} \quad (11)$$

где  $Q_p$  – поперечная сила от заданной нагрузки в балке с пролетом, равном пролету арки.

### Порядок расчета арки.

Весь расчет арки, связанный с кропотливыми вычислениями, рекомендуется записать в компактной форме, в виде таблицы, приведенной в примере.

1. Разбивают пролет арки на  $n$  равных частей. В контрольной работе можно ограничиться  $n = 6 \div 8$ . Концы отрезков на оси абсцисс и соответствующие точки на оси арки принимаются за расчетные.

2. В расчетных точках по заданному уравнению оси арки вычисляют координаты  $y$  и значения  $\cos \varphi$ .

3. Рассчитывают балку с пролетом, равным пролету арки на заданную нагрузку. В расчетных точках находят значения  $M_p$  и  $Q_p$

4. Заполняя таблицу по образцу, вычисляют  $\delta_{11}$  и  $\Delta_{1p}$ .

5. Вычисляют распор  $X_1$ .

6. Заполняя последние столбцы таблицы, находят  $M, Q$  и  $N$  в расчетных точках.

7. Строят эпюры  $M, Q$  и  $N$ , соединяя плавной линией концы отрезков, отложенных в расчетных точках по оси ординат и равных по величине вычисленным значениям соответствующих расчетных усилий.

**Пример.**

Дано:

двухшарнирная арка, очерченная по окружности (рис. 38)

$l = 32, \alpha = 0,45, q_2 = 2 \text{ кН/м}, f/l = 0,3, f = l \cdot 0,3 = 32 \cdot 0,3 = 9,6 \text{ м}$

Требуется:

построить эпюры  $M, Q$  и  $N$ .

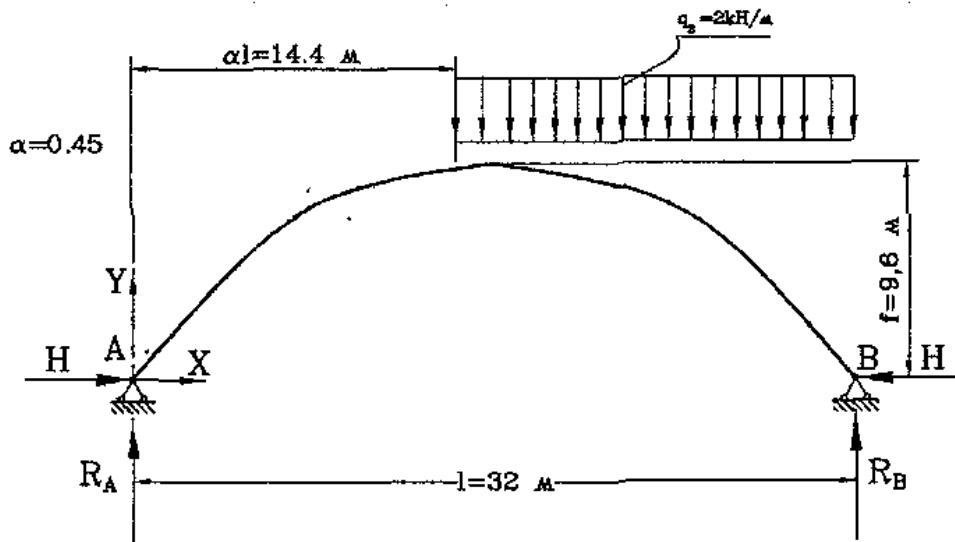


Рис. 38

1. Основная система и каноническое уравнение метода сил (рис. 39)



Рис. 39

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

2. Разбивают пролет арки на восемь частей:  $n = 8$   $\Delta x = l/8 = 32/8 = 4$  м,  $\Delta s = \Delta x / \cos \varphi$  (рис. 40)

$$R = \frac{l^2 + 4f^2}{8f} = \frac{32^2 + 4 \cdot 9,6^2}{8 \cdot 9,6} = 18,13 \text{ м.}$$

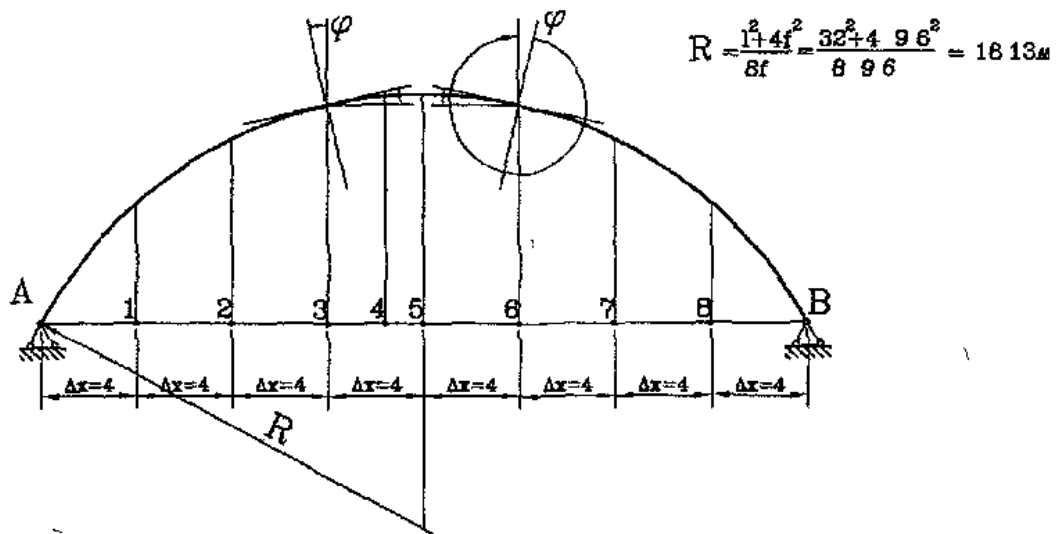


Рис. 40

Точка 4 соответствует началу распределенной нагрузки  $q_2$  (см. рис. 38).

3. В расчетных точках вычисляют значения  $y$ ,  $\sin \varphi$  и  $\cos \varphi$  по формулам, приведенным в табл. 2 (столбцы 3, 4, 5).

4. Рассчитывают балку с пролетом, равным пролету арки, на заданную нагрузку.

Определяют опорные реакции

$$\sum M_B = 0;$$

$$R_A \cdot 32 - 2 \cdot \frac{17,6^2}{2} = 0, \quad R_A = 9,68 \text{ кН};$$

$$\sum y = 0;$$

$$9,68 - 2 \cdot 17,6 + R_B = 0, \quad R_B = 25,52 \text{ кН}.$$

Эпюры  $M_p$  и  $Q_p$  показаны на рис. 41.

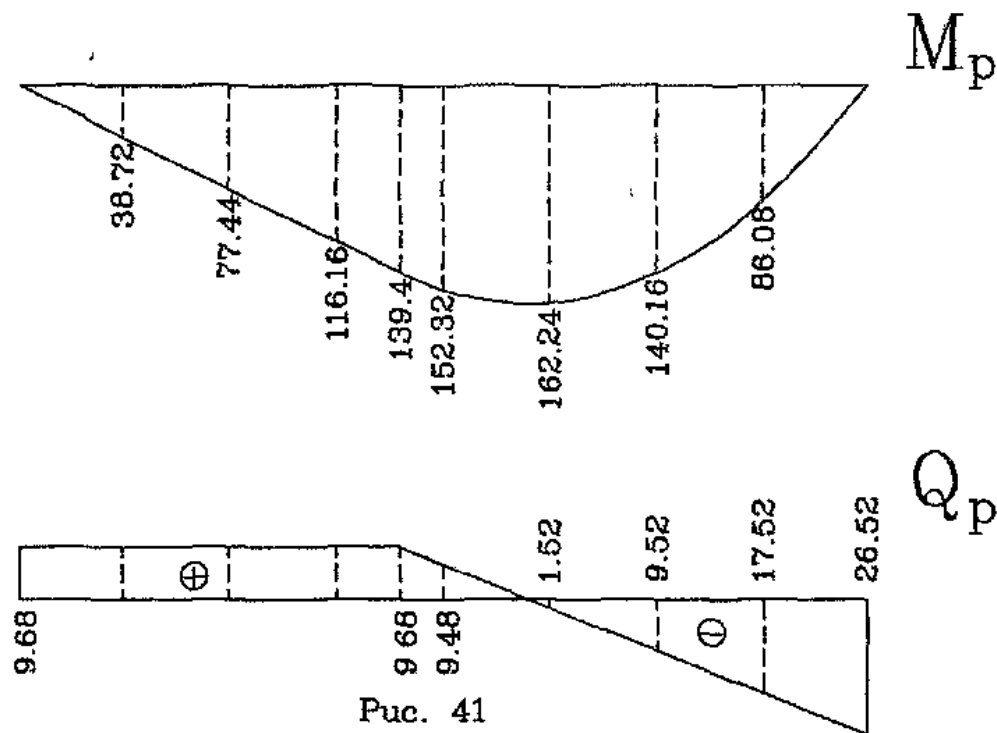


Рис. 41

Рис. 41

5. Все остальные необходимые расчеты показаны в таблице, а окончательные эпюры  $M$ ,  $Q$  и  $N$  на рис. 42.

Но- мер сече- ния	$x$ (м)	$y = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l-x}{2} - x\right)^2} - R + f$	$M_1 = -y$	$\sin \varphi = \frac{l-2x}{2R}$	$\cos \varphi = \frac{y+R-f}{R}$	$\cos^4 \varphi$	$\frac{\Delta x}{\cos^4 \varphi}$	$y^2$	$y^2 \frac{\Delta x}{\cos^4 \varphi}$	$M_1^2$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
A	0	0	0	0,8825	0,4705	0,049	81,63	0	0	0
1	4	5,06	-5,06	0,6619	0,7496	0,3157	12,67	25,604	324,40	38,72
2	8	7,74	-7,74	0,4413	0,8974	0,6485	6,168	59,907	369,506	77,44
3	12	9,15	-9,15	0,2206	0,9751	0,9040	4,425	83,72	370,461	116,16
4	14,4	9,53	-9,53	0,08825	0,9961	0,9845	4,0629	90,82	368,996	139,39
5	16	9,60	-9,6	0	1	1	4,0	92,16	368,64	152,32
6	20	9,15	-9,15	-0,2206	0,9751	0,9040	4,425	83,72	370,461	162,24
7	24	7,74	-7,74	-0,4413	0,8974	0,6485	6,168	59,907	369,506	140,16
8	28	5,06	-5,06	-0,6619	0,7496	0,3157	12,68	25,604	324,40	86,08
B	32	0	0	-0,8825	0,4705	0,049	81,63	0	0	0

$$EJ\delta_{11} =$$

$$= \Sigma -$$

$$= 2866,37$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{-40907,5}{2866,37} =$$

Таблица 2

$yM_p \frac{\Delta y}{\cos^3 \varphi}$	$\mu X_1$	$M = M_p - \mu X_1$	$M_1 M_p \frac{\Delta x}{\cos^3 \varphi}$	$Q_p$	$Q_p \cos \varphi$	$X_1 \sin \varphi$	$Q_p - Q_p \cos \varphi - X_1 \sin \varphi$	$Q_p \sin \varphi$	$X_1 \cos \varphi$	$N_p = (Q_p \sin \varphi + X_1 \cos \varphi)$
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
0	0	0	0	9,68	4,5544	12,5946	-8,0402	8,5426	6,7147	-15,25
-2482,3	72,206	-33,486	2175,9	9,68	7,256	9,4463	-2,1903	6,4072	10,6979	-17,10
-3697,0	110,46	-33,02	1576,45	9,68	8,6868	6,298	2,3888	4,2718	12,8079	-17,07
-4703,2	130,58	-14,42	584,017	9,68	9,4389	3,1483	6,2906	2,1354	13,9161	-16,05
-5397,1	136,01	3,38	-130,9846	9,68	9,6422	1,2594	8,3828	0,8543	14,2158	-15,07
-5849,1	137,01	15,31	-588,057	6,48	6,48	0	6,48	0	14,2715	-14,27
-6568,9	130,58	31,66	-1281,71	-1,52	-1,4822	-3,1483	1,666	0,3353	13,9161	-14,25
-6691,3	110,46	29,70	-1417,79	-9,52	-8,5432	-6,298	-2,2452	4,2012	12,8072	-17,00
-5518,6	72,206	13,874	-888,952	-17,52	-13,1329	-9,4463	-3,6866	11,5965	10,6979	-22,29
0	0	0	0	-25,52	-12,917	-12,5946	-0,3224	22,5214	6,7147	-29,23

 $E \Delta_{\Sigma} =$  $= \Sigma =$  $= 40907,5$  $\Sigma =$  $= 4307,498$  $+ 4336,367 =$  $= 28,869$ 

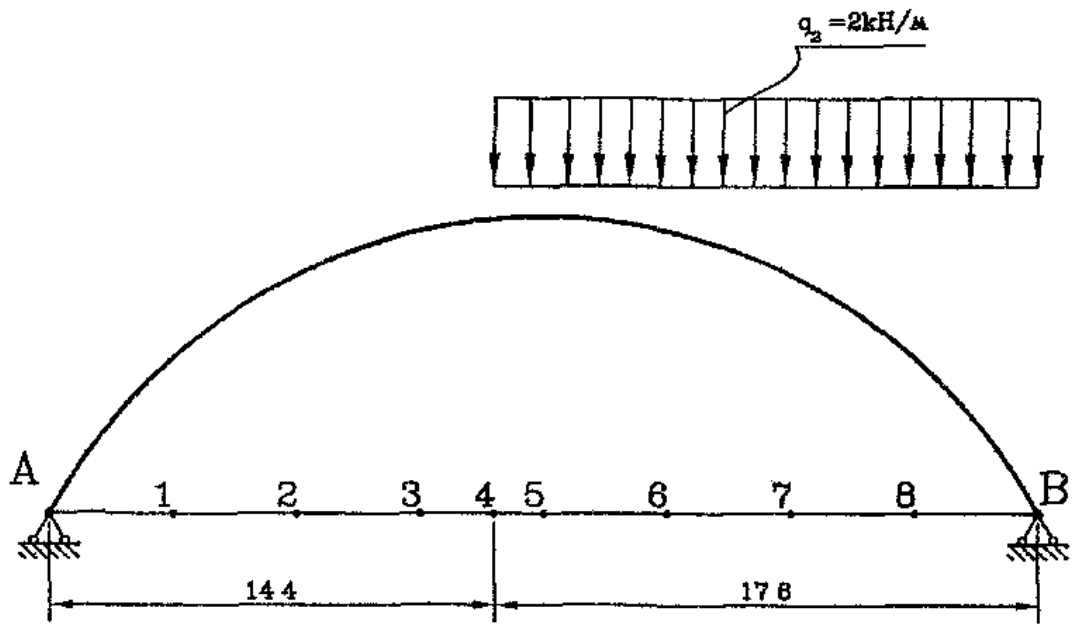
Относительная ошибка

$$\frac{28,869}{4307,498} \cdot 100\% = 0,67\%$$

 $= 14,2715$



a



б

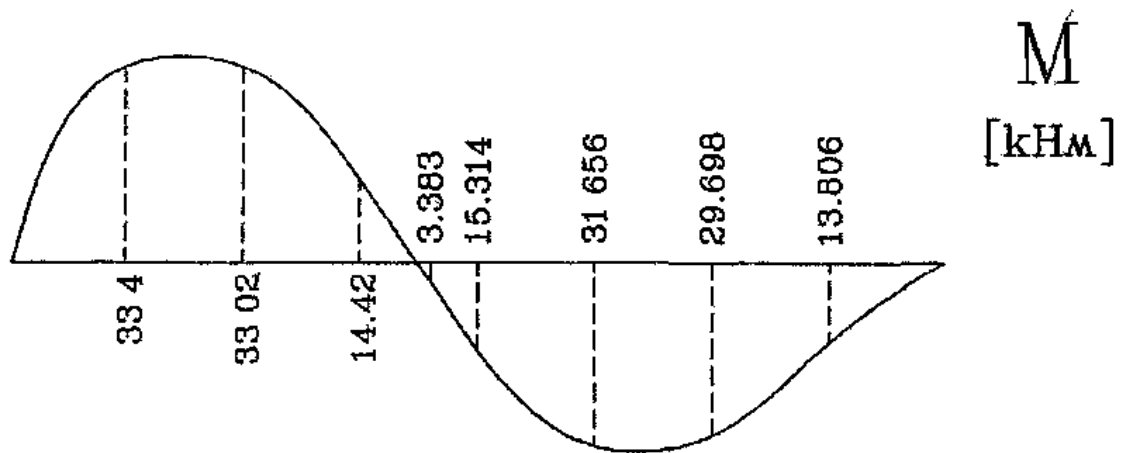
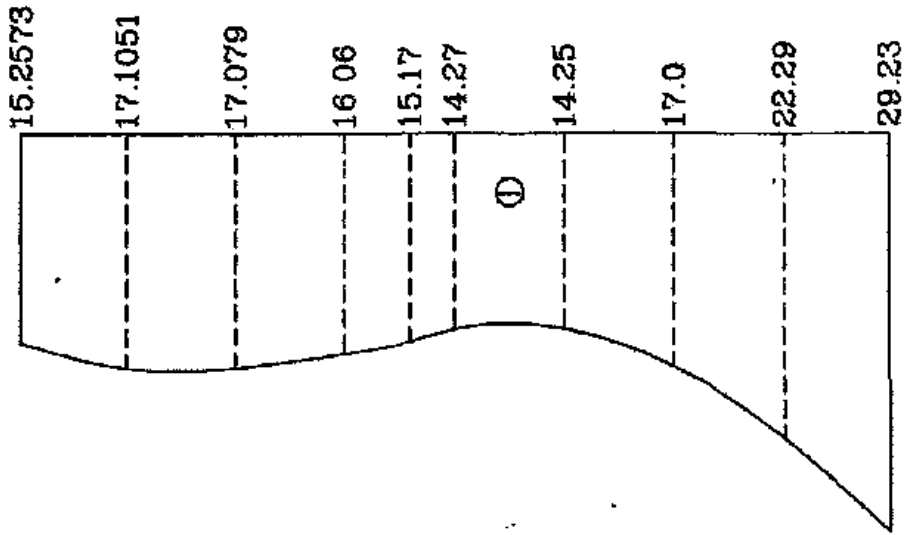


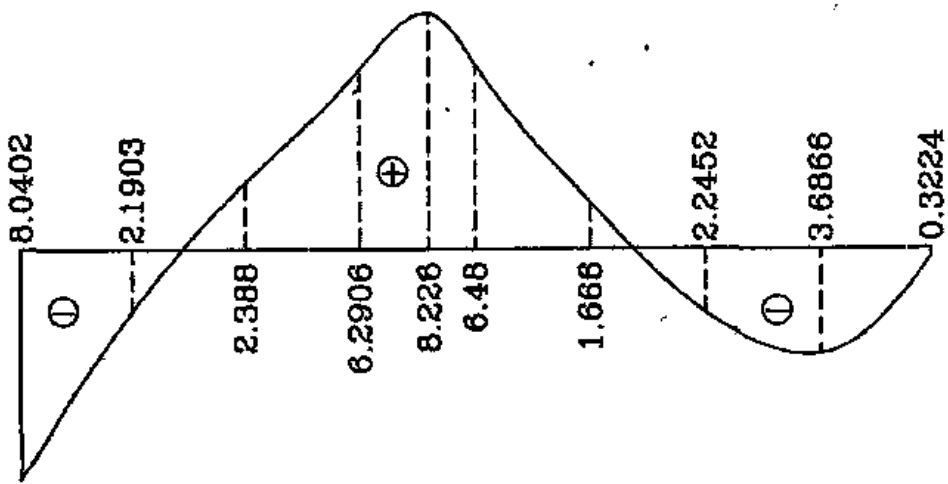
Рис. 42

B



N  
[kH]

r



Q  
[kH]

## РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ ФЕРМЫ

Статическая неопределимость фермы может возникнуть, если:

- 1) отказаться в расчетной схеме от введения в узлы шарниров;
- 2) в ферме имеются лишние стержни или опоры.

Шарниры в узлах расчетной схемы отражают действительную работу конструкции с гибкими элементами. Поэтому рассмотрим только те случаи возникновения статической неопределимости, которые связаны с наличием лишних связей.

Различают внешне и внутренне статически неопределимые фермы.

Внешне статически неопределимые фермы имеют лишние по сравнению со статически определимой балкой опорные элементы. Ферма на рис. 43, например, дважды статически неопределима (внешне).

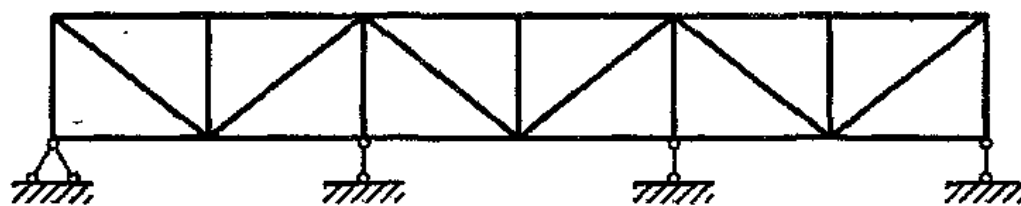


Рис. 43

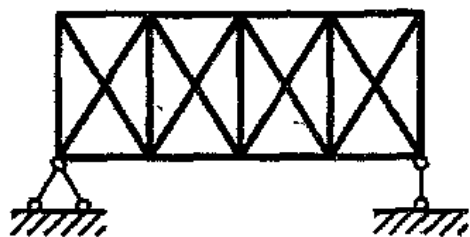


Рис. 44

Внутренне статически неопределимые фермы имеют лишние (по сравнению с простой фермой) элементы решетки. На рис. 44 четырежды статически неопределимая ферма (внутренне).

### Порядок расчета.

1. Определяют степень статической неопределимости.

2. Выбирают основную систему для расчета методом сил: отбрасывают лишние опоры, если ферма внешне статически неопределима, или разрезают лишние внутренние элементы так, чтобы превратить ферму в неизменяемую статически определимую систему. По направлению отброшенных связей прикладывают неизвестные продольные усилия  $X_i$ ;

3. Записывают канонические уравнения метода сил. В контрольной работе предлагается рассчитать ферму с одной лишней связью. Поэтому каноническое уравнение имеет вид

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

4. Вычисляют коэффициент и свободный член канонического уравнения.

4.1. Рассчитывают ферму - основную систему на силу  $X_1 = 1$ . Определяют усилия во всех стержнях  $N$ . Если основная система симметричная, то, естественно, рассчитывают лишь половину фермы.

4.2. Рассчитывают ферму - основную систему на заданную нагрузку. Находят усилия  $N_P$ .

4.3. Перемещения  $\delta_{11}$ , и  $\Delta_{1P}$ , определяют, используя интеграл Мора для систем с элементами, работающими только на растяжение-сжатие.

$$\delta_{11} = \sum_n \int_s \frac{N^2}{EA} ds = \frac{N_1^2 l}{EA}; \tag{12}$$

$$\Delta_{1P} = \sum_n \int_s \frac{N_1 N_P}{EA} ds = \frac{N_1 N_P l}{EA}.$$

Здесь суммирование ведется по всем стержням,  $l$  - длина стержня.  $A$  - площадь сечения стержня.

Так как стержни верхнего пояса, решетки и нижнего пояса могут иметь разные жёсткости, то удобно искать перемещения, умноженные на некоторую произвольную жесткость  $EA_0$ ,

$$EA_0 \delta_{11} = N_1^2 l \frac{A_0}{A};$$

$$EA_0 \Delta_{1P} = N_1 N_P l \frac{A_0}{A}.$$
(13)

Эти коэффициенты удобно вычислять в табличной форме, как это показано в приведенном ниже примере.

5. Определяют усилие в отброшенной связи

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}.$$

6. Расчетные значения усилий в элементах статически неопределимой фермы определяют по формуле

$$N = N_P + N_1 X_1.$$

7. Проверка правильности расчета: ищут перемещение, которое заведомо равно нулю. Для этого нужно взять интеграл

$$EA_0 \sum_n \frac{NN_P}{EA} ds = NN_P l \frac{A_0}{A}.$$

Если сумма равна нулю, то расчет верен.

**Пример.**

Дано:

статически неопределимая ферма (рис. 45)

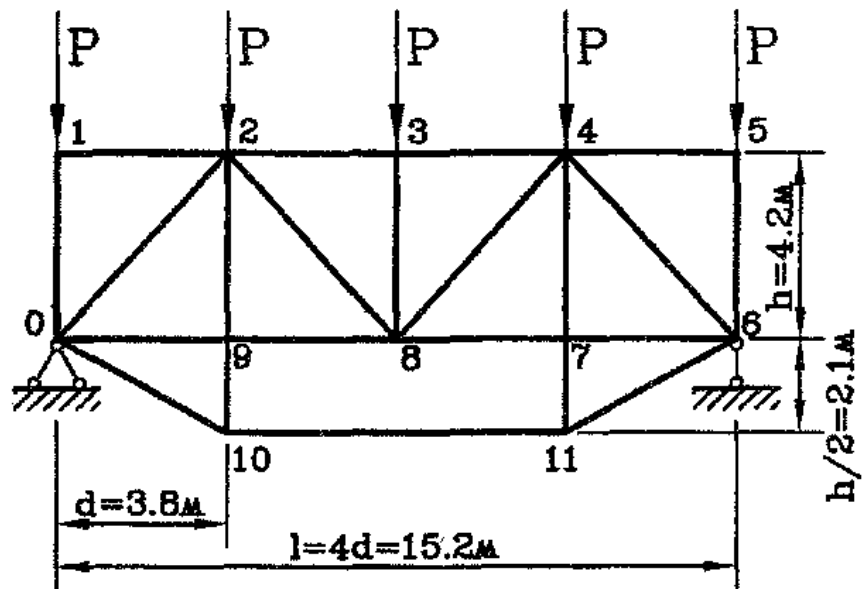
$P = 13 \text{ кН}$ ,  $d = 3,8 \text{ м}$ ,  $h = 4,2 \text{ м}$ ;

$A_{\text{ниж пояс}} = A_0$ ,  $A_{\text{верх пояс}} = 1,1A_0$ ;

$A_{\text{решетки}} = 0,8A_0$ ;

$A_{\text{шпренгеля}} = 0,6A_0$ .

Рис. 45



Требуется:

определить усилия в стержнях фермы.

1. Определяют степень статической неопределимости

$$CCH = S - 2K = 22 - 2 \cdot 12 + 3 = 1,$$

где  $S$  - число стержней в ферме,  
 $K$  - число узлов в ферме.

2. Основная система (рис. 46) и каноническое уравнение

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

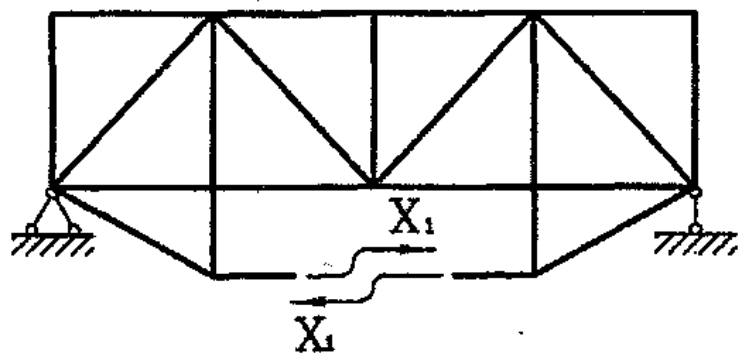


Рис. 46

3. Вычисляют усилия в стержнях основной системы от силы  $X_1 = 1$ .

Определяют опорные реакции (рис. 47)

$$\sum M_6 = 0; R_0 l - 1 \cdot h/2 + 1 \cdot h/2 = 0;$$

$$R_0 = 0;$$

$$\sum y = 0; R_0 + R_6 = 0; R_6 = 0.$$

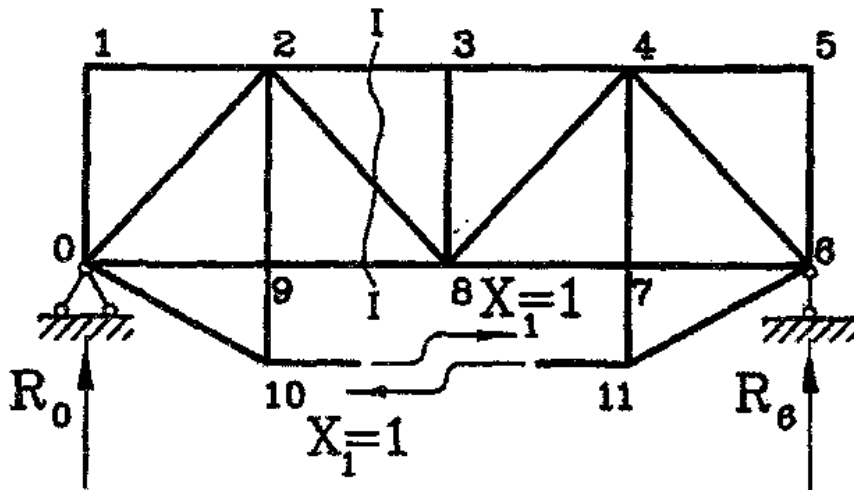


Рис. 47

Определяют нулевые стержни

$N_{01} = N_{12} = 0$ , так как в узле 1 сходятся два стержня и узел не нагружен.

$N_{38} = 0$ , так как в ненагруженном узле 3 сходятся три стержня, два из которых лежат на одной прямой и узел не нагружен.

#### СЕЧЕНИЕ I-I

Рассмотрим равновесие левой части фермы (рис. 48)

$$l = \sqrt{4,2^2 + 3,8^2} = 5,66;$$

$$\sin \alpha = 4,2 / 5,66 = 0,7415;$$

$$\cos \alpha = 3,8 / 5,66 = 0,6709;$$

$$\sum M_8 = N_{23} \cdot 4,2 - 1 \cdot 2,1 = 0;$$

$$N_{23} = 0,5;$$

$$\sum M_9 = N_{98} \cdot 4,2 + 1 \cdot 6,3 = 0;$$

$$N_{98} = -1,5;$$

$$\sum y = 0;$$

$$-N_{28} \sin \alpha = 0, \quad N_{28} = 0.$$

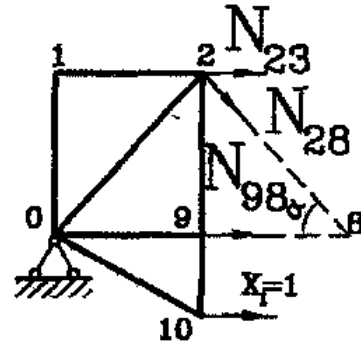


Рис. 48

Усилия  $N_{20}$ ,  $N_{29}$ ,  $N_{10-0}$ ,  $N_{10-9}$  вычисляют, используя способ вырезания узлов (рис. 49, 50, 51)

$$\sum x = -N_{20} \cos \alpha + N_{23} = 0;$$

$$N_{20} = 0,745;$$

$$\sum y = -N_{20} \sin \alpha - N_{29} = 0;$$

$$N_{29} = -0,553.$$

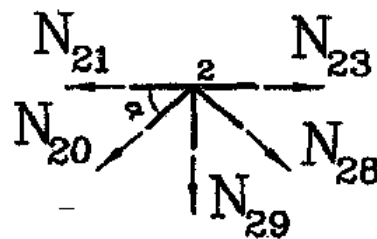


Рис. 49



$$l_{10-0} = \sqrt{2,1^2 + 3,8^2} = 4,34;$$

$$\sin \beta = 2,1/4,34 = 0,4839;$$

$$\cos \beta = 3,8/4,34 = 0,8756;$$

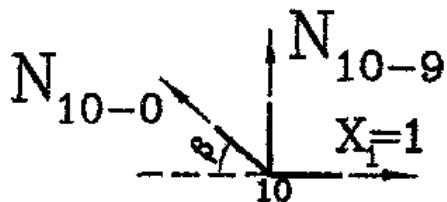


Рис. 50

$$\sum x = -N_{10-0} \cos \beta + 1 = 0;$$

$$N_{10-0} = 1,142;$$

$$\sum y = N_{10-0} \sin \beta + N_{10-9} = 0;$$

$$N_{10-9} = -0,553;$$

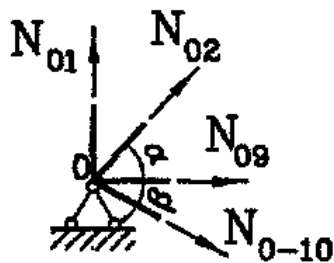


Рис. 51

$$\sum x = N_{02} \cos \alpha + N_{09} +$$

$$+ N_{0-10} \cos \beta = 0;$$

$$N_{09} = -1,5.$$

4. Вычисляют усилия в стержнях фермы от заданной нагрузки (рис.52)

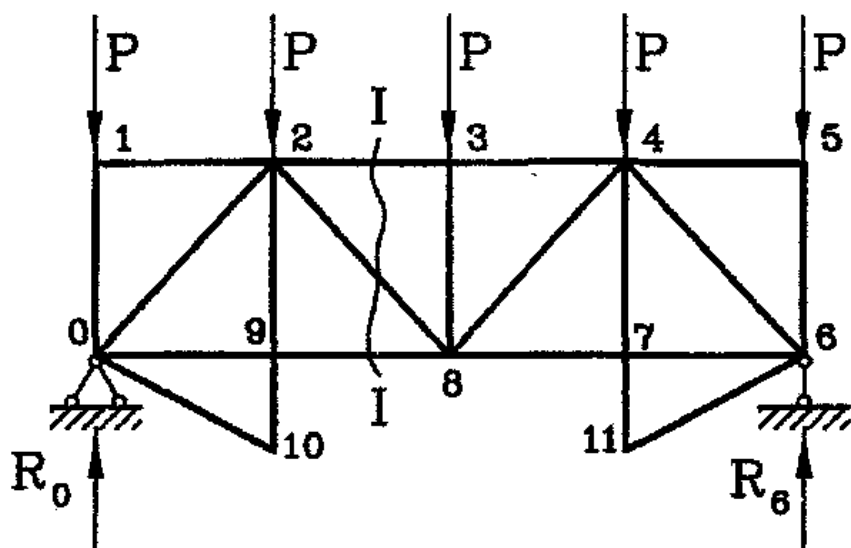


Рис. 52

Определяют опорные реакции

$$R_0 = R_6 = 5 \cdot 13/2 = 32,5 \text{ кН.}$$

Нулевые стержни:  $N_{12} = N_{0-10} = N_{9-10} = N_{29} = 0.$

Определяют усилия  $N_{23}, N_{28}, N_{98}$  (рис. 53), проведя сечение 1-1.

$$\begin{aligned} \sum M_8 &= R_0 \cdot 7,6 - P \cdot 7,6 - \\ &- P \cdot 3,8 + N_{23} \cdot 4,2 = 0; \\ N_{23} &= -23,524 \text{ кН;} \\ \sum y &= R_0 - P - P - N_{28} \sin \alpha = 0; \\ N_{28} &= 8,766 \text{ кН;} \\ \sum M_2 &= R_0 \cdot 3,8 - P \cdot 3,8 - \\ &- N_{98} \cdot 4,2 = 0; \\ N_{98} &= 17,643 \text{ кН.} \end{aligned}$$

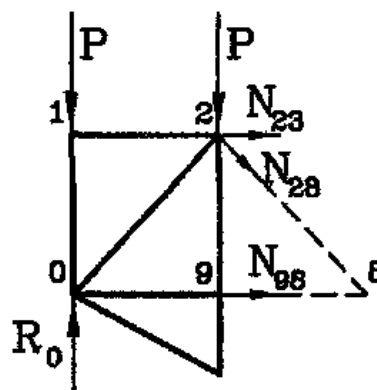
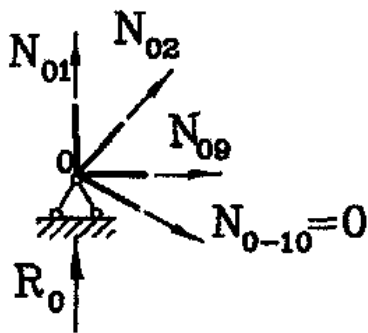


Рис. 53

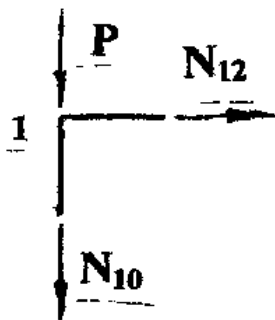
Усилия  $N_{01}$ ,  $N_{02}$ ,  $N_{09}$  определяют способом вырезания узлов (рис.54,55)



$$\sum y = -13 - N_{10} = 0;$$

$$N_{10} = -13 \text{ кН.}$$

Рис. 54



$$\sum y = R_0 + N_{01} + N_{02} \sin \alpha = 0;$$

$$N_{02} = -26,298 \text{ кН;}$$

$$\sum x = N_{02} \cos \beta + N_{09} = 0;$$

$$N_{09} = 17,643 \text{ кН.}$$

Рис. 55

Полученные результаты и окончание расчета приводятся в табл. 3.

Таблица 3

Средняя ИИИ	l	$A_0/A$	$N_1$	$N_p$	$N_1^2 \times A_0/A$	$N_1 N_p / A_0 A$	$N_1 X_1$	$N = N_p + N_1 X_2$	$NN_1 / A_0 A$
1-2	3,8	0	0	0	0	0	0	0	0
2-3	3,8	0,909	0,5	-23,524	0,864	-40,63	4,725	-18,80	-32,469
0-9	3,8	1	-1,5	17,643	8,55	-100,56	-14,175	3,468	-19,768
9-8	3,8	1	-1,5	17,643	8,55	-100,56	-14,175	3,468	-19,768
0-1	4,2	1,25	0	-13	0	0	0	-13	0
0-2	5,66	1,25	0,745	-26,3	3,927	-138,62	7,04	-19,26	-101,52
2-9	4,2	1,25	-0,553	0	-1,605	0	-5,226	-5,226	15,17
2-8	5,66	1,25	0	8,766	0	0	0	8,776	0
9-10	2,1	1,66	-0,553	0	1,066	0	-5,226	-5,226	10,074
0-10	4,34	1,66	1,142	0	9,395	0	10,79	10,79	88,77
					$\Sigma_1 = 33,956$	$\Sigma_2 = -380,37$			
3-8	4,2	1,25	0	-13	0	0	0	-13	0
10-11	7,6	1,66	1	0	12,62	0	9,45	9,45	119,22

$$EA_0 \delta_{11} = 2 \sum_1 + 12,62 = 80,53;$$

$$EA_0 \Delta_{1P} = 2 \sum_2 = -760,74; X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{760,74}{80,53} = 9,45.$$

Ошибка вычислений (относительная погрешность)

$$\sum NN_1 / A_0 / A = \frac{119,22 - 119,022}{119,22} 100\% = 0,166\%,$$

так как абсолютная ошибка равна  $(-173,525 + 114,014) \cdot 2 + 119,22 = 0,198$ .

## РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ РАМЫ ПО МЕТОДУ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

В работе следует построить эпюры изгибающих моментов  $M$ , поперечных сил  $Q$  и продольных сил  $N$ .

### Порядок расчета рамы.

1. Определяют степень кинематической неопределимости  $n$

$$n = n_1 + n_2,$$

где  $n_1$  - число жестких узлов в раме,

$n_2$  - число возможных линейных перемещений узлов и опор рамы.

2. Выбирают основную систему путем введения дополнительных связей:

2.1. В каждый жесткий узел вводится «плавающая» заделка, препятствующая повороту узла, но не мешающая ее линейному перемещению (всего вводится  $n_2$  заделок).

2.2. Вводят дополнительные опорные стержни, препятствующие линейным перемещениям узлов системы (всего вводится  $n_1$  опор).

Таким образом, основная система метода перемещений - это система балок с закрепленными и несмещаемыми концами.

В отличие от метода сил в методе перемещений возможна только одна основная система.

Основными неизвестными являются углы поворота и перемещения жестких узлов рамы.

3. Для определения неизвестных записывают канонические уравнения метода перемещений, смысл которых состоит в том, что приравниваются нулю реакции во введенных связях, т.е. снимается противоречие между рассчитываемой и основной системой.

4. Определяют коэффициенты и свободные (грузовые) члены канонических уравнений.

4.1. В основной системе последовательно строят единичные эпюры моментов  $M_1$  - эпюры изгибающих моментов от поворотов заделок на угол, равный единице и от единичных линейных перемещений по направлению введенных дополнительных опорных стержней. Эти эпюры строят при помощи таблиц, которые есть в любом учебнике строительной механики (см. табл. 4 на с. 58-60). Нетрудно построить эти эпюры, внимательно изучив приводимый ниже пример.

4.2. В основной системе по таблицам строят грузовую эпюру  $M_p$  от заданной нагрузки.

4.3. Вычисляют коэффициенты и свободные члены канонических уравнений, последовательно рассматривая равновесие узлов (для определения реактивных моментов) или отдельных стержней рамы (для определения реакций во введенных опорах).

5. Решают систему канонических уравнений, находят неизвестные углы поворота и перемещения узлов  $Z_1, Z_2, \dots$

6. Строят окончательную эпюру изгибающих моментов  $M$

$$M = M_p + M_1 Z_1 + M_2 Z_2 + \dots$$

Удобно вначале построить так называемые исправленные эпюры моментов  $M_1 Z_1, M_2 Z_2, \dots$ , полученные умножением орди-

нат каждой единичной эпюры  $M_i$  на найденное соответствующее значение  $Z_i$ . Если какое-либо перемещение или угол поворота  $Z_i$  получилось со знаком минус, то это означает, что исправленная эпюра должна быть построена на противоположном, чем единичная эпюра, волокне.

7. По эпюре моментов определяют (по формуле Журавского) и строят эпюру поперечных сил  $Q$ .

8. Из условия равновесия узлов рамы определяют продольные усилия  $N$  в ее стержнях.

**Пример.**

Дано:

статически неопределимая рама (рис. 56):  $I_1:I_2 = 3:2$ .

Требуется:

построить эпюры  $M$ ,  $Q$  и  $N$  от заданной нагрузки.

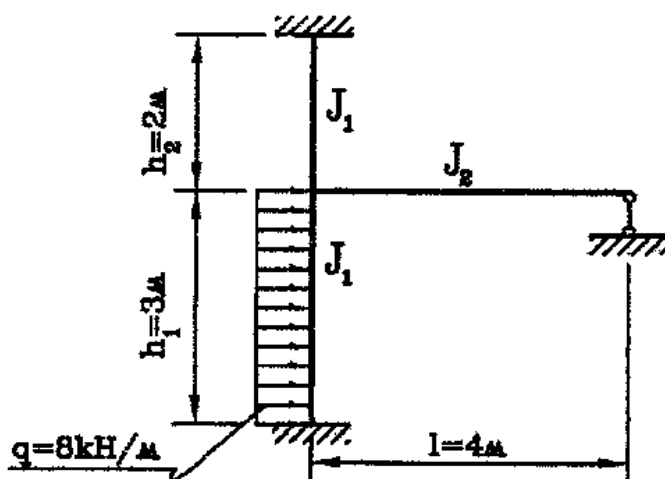


Рис. 56

1. Определяют степень кинематической неопределимости:

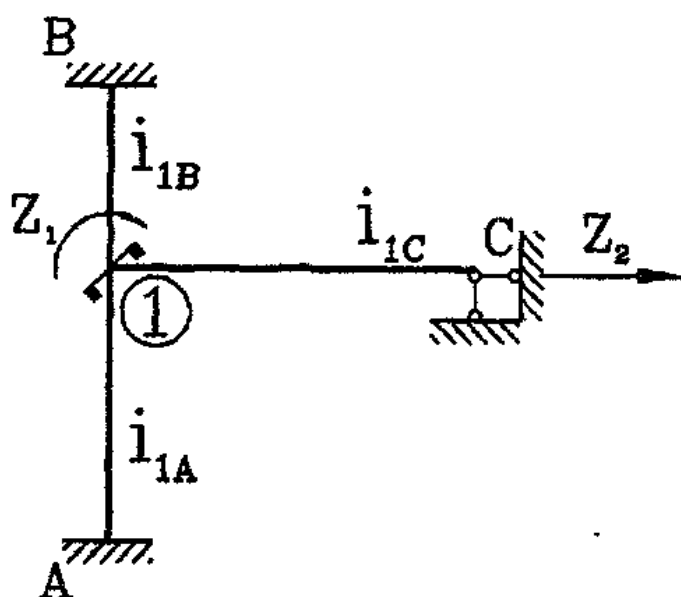
$$n_v = 1, n_r = 1, n = 1 + 1 = 2.$$

2. Основная система (рис. 57) и канонические уравнения имеют вид.

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1P} = 0;$$

$$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P} = 0.$$

Рис. 57



, 3. Строят единичные и грузовую эпюры изгибающих моментов (рис. 58-60).

Вводят условный момент инерции  $I_0$ , через который (учитывая заданное соотношение  $I_1:I_2$ ) можно выразить моменты инерции элементов рамы:

$$I_1 = 3I_0, I_2 = 2I_0.$$

Вычисляют погонных жесткости.

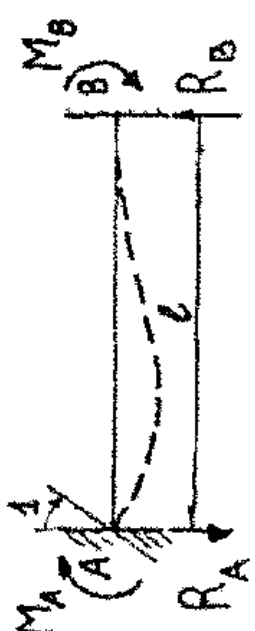
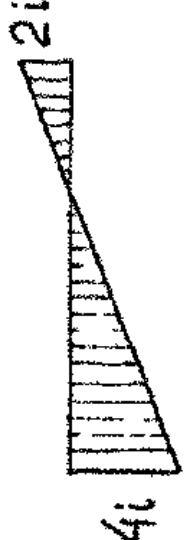
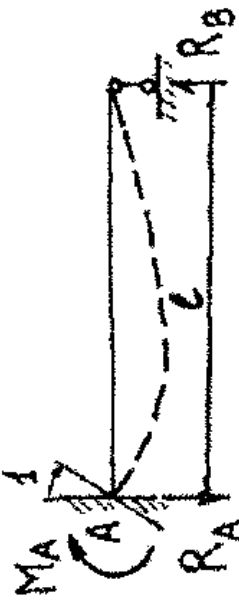

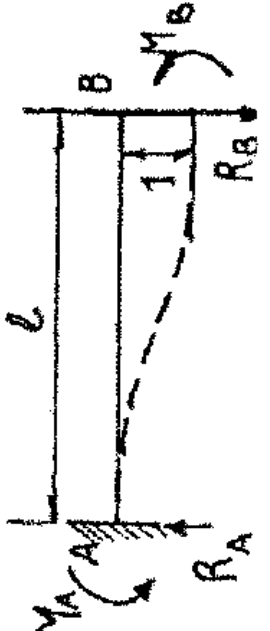
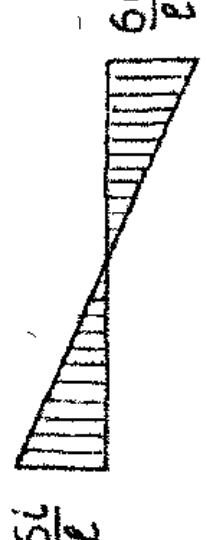
$$i_{1A} = i_{1B} = \frac{EI_1}{h_1} = \frac{E \cdot 3I_0}{3} = EI_0, \quad i_{1C} = \frac{EI_2}{h_2} = \frac{E \cdot 2I_0}{2} = EI_0;$$

$$i_{1C} = i_{1C} = \frac{EI_2}{l} = \frac{E \cdot 2I_0}{4} = 0,5EI_0.$$

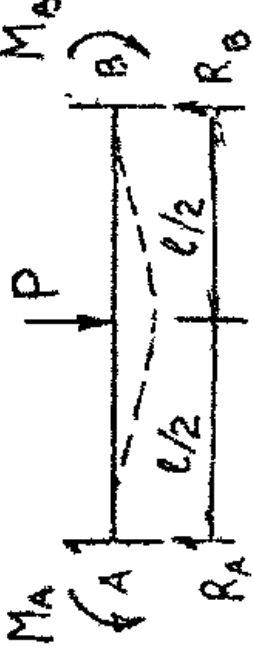
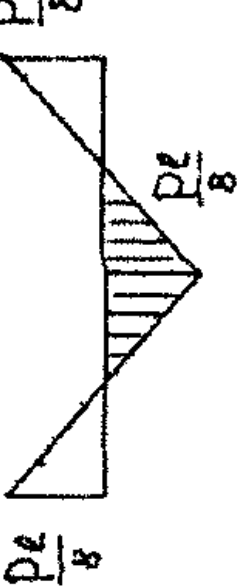
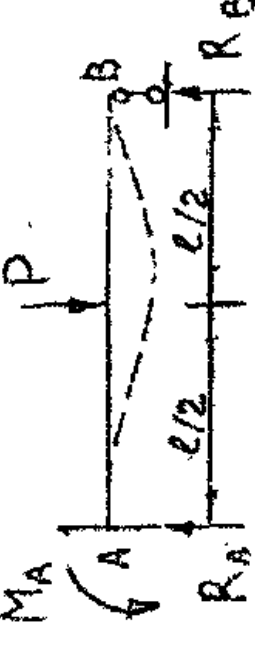
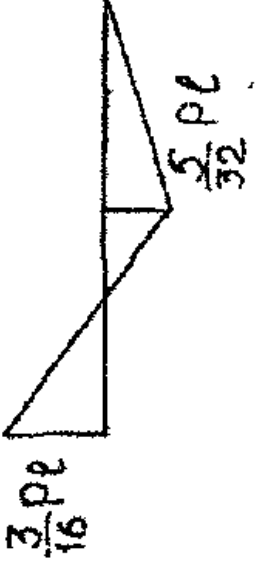
Эпюры строят по таблицам из учебников строительной механики. Для характерных воздействий и простейших случаев нагружения эпюры изгибающих моментов показаны в приводимой ниже таблице (табл. 4).



Таблица 4

Схемы элементов расчетной системы и воздействий	Эпюры изгибающих моментов	Формулы моментов и реакций
		$i = \frac{EJ}{l}$ $M_A = 4i; M_B = 2i$ $R_A = R_B = \frac{6i}{l}$
		$M_A = 3i$ $R_A = R_B = \frac{3i}{l}$
		$M_A = M_B = \frac{6i}{l}$ $R_A = R_B = \frac{12}{l^2}$

	<p style="text-align: center;"><math>\frac{3q}{8}l</math></p>	$M_A = \frac{3q}{l}$ $R_A = R_B = \frac{3q}{l^2}$
	<p style="text-align: center;"><math>\frac{q l^2}{12}</math>      <math>\frac{q l^2}{24}</math>      <math>\frac{q l^2}{12}</math></p>	$M_A = M_B = \frac{q l^2}{12}$ $R_A = R_B = \frac{q l}{2}$
	<p style="text-align: center;"><math>\frac{q l^2}{8}</math>      <math>\frac{q l^2}{16}</math>      <math>\frac{q l^2}{8}</math></p>	$M_A = \frac{q l^2}{8}$ $R_A = \frac{5}{8} q l; R_B = \frac{3}{8} q l$

Схемы элементов расчетной системы и воздействий	Эпюры изгибающих моментов	Формулы моментов и реакций
		$M_A = M_B = \frac{Pl}{8}$ $R_A = R_B = \frac{P}{2}$
		$M_A = \frac{3}{16} Pl$ $R_A = \frac{11}{16} P; R_B = \frac{5}{16} P$

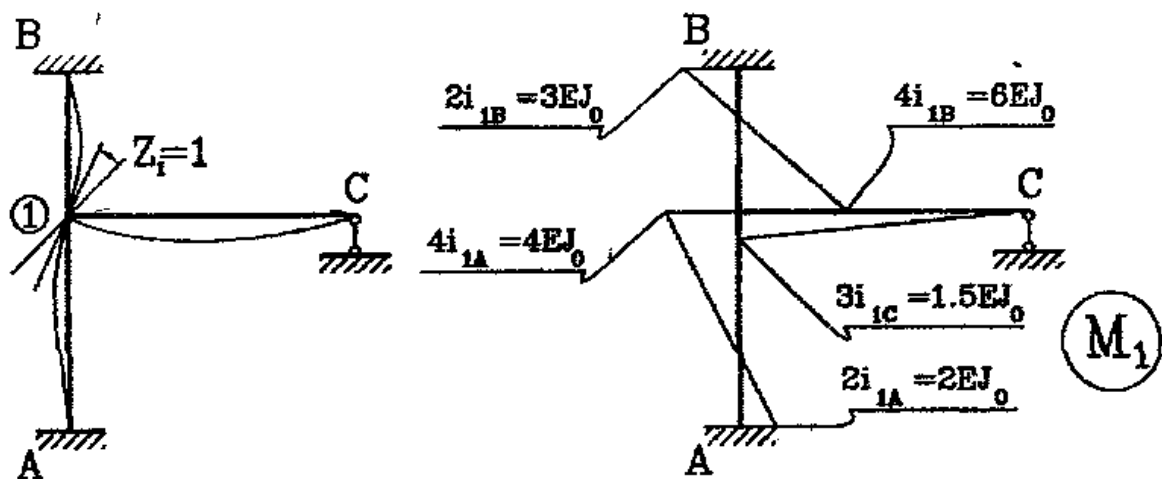


Рис. 58

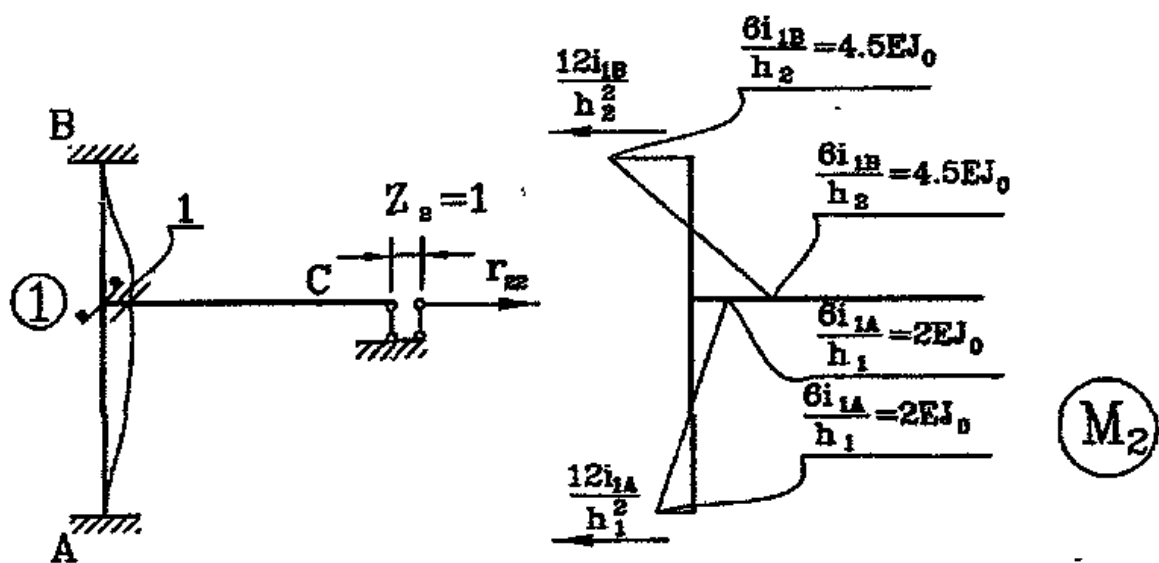


Рис. 59

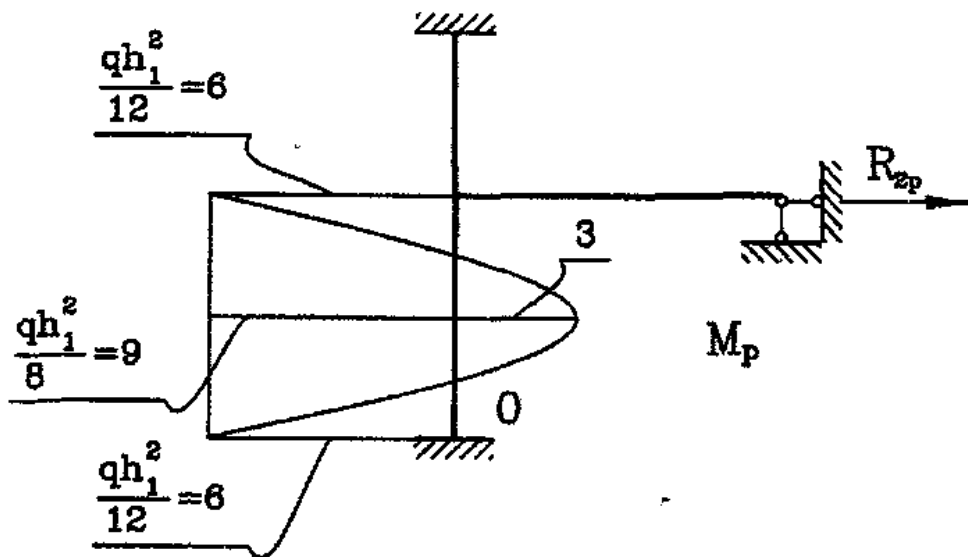
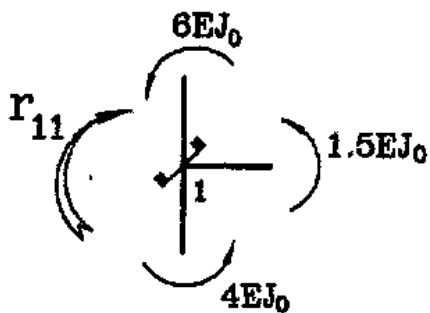


Рис. 60

4. Вычисляют коэффициенты и грузовые члены канонических уравнений (рис. 61-65).



$r_{11}$

$$\sum M_1 = 0,$$

$$r_{11} - 6EI_0 - 1,5EI_0 - 4EI_0 = 0;$$

$$r_{11} = 11,5EI_0.$$

Рис. 61

$r_{12}$

$$\sum M_1 = 0;$$

$$r_{12} - 4,5EI_0 + 2EI_0 = 0;$$

$$r_{12} = 2,5EI_0.$$

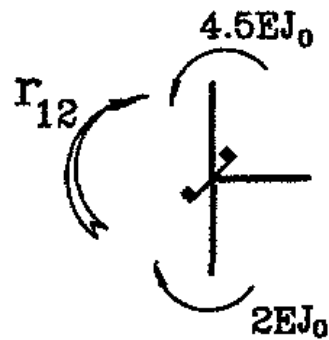


Рис. 62

$r_{22}$

$$\sum x = 0;$$

$$r_{22} - 4,5EI_0 - 1,333EI_0 = 0;$$

$$r_{22} = 5,833EI_0.$$

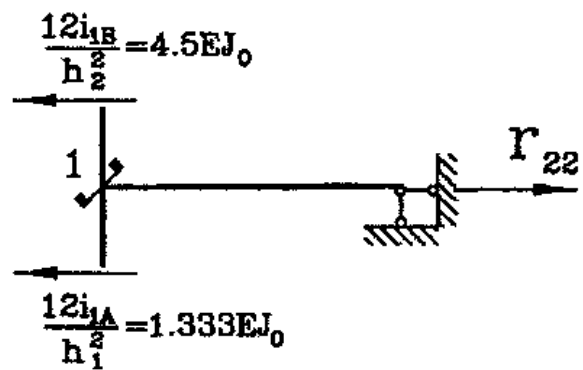


Рис. 63

$R_{1P}$

$$\sum M_1 = 0;$$

$$R_{1P} - 6 = 0;$$

$$R_{1P} = 6.$$

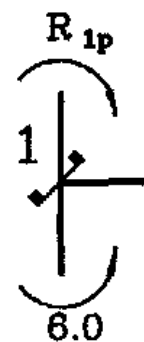


Рис. 64

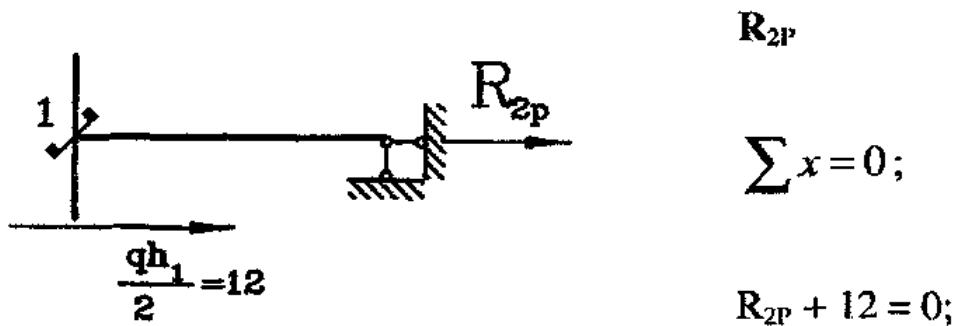


Рис. 65

5. Подставляют полученные значения коэффициентов  $\gamma$  и свободных членов  $R$  в канонические уравнения и решают систему.

$$11,5 Z_1 + 2,5 Z_2 + 6/EI_0 = 0;$$

$$2,5 Z_1 + 5,8333 Z_2 - 12/EI_0 = 0;$$

$$Z_1 = -1,0685/EI_0; \quad Z_2 = 2,5149/EI_0.$$

6. Строят «исправленные» эпюры (рис. 66,67)

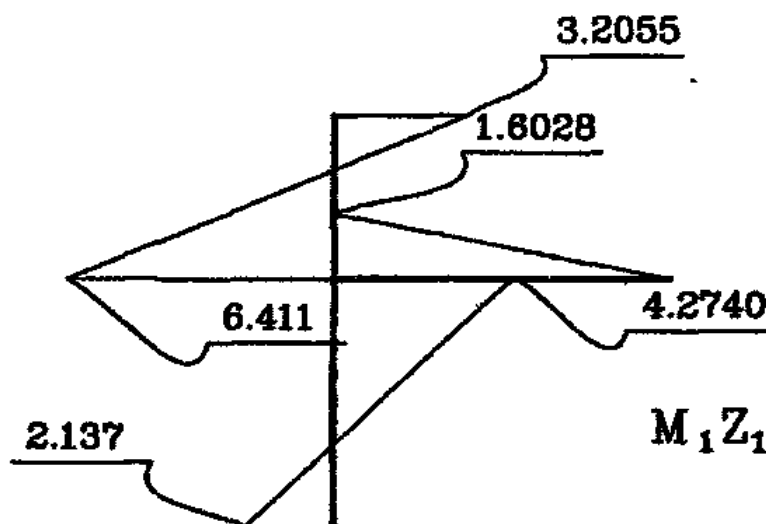
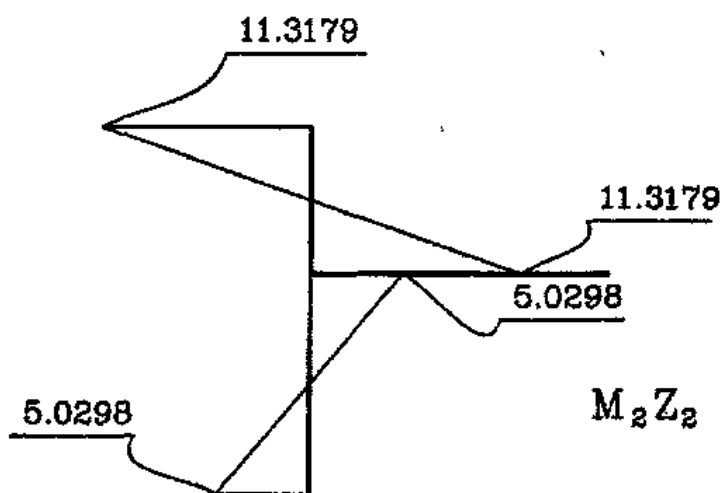


Рис. 66

Рис. 67



7. Строят окончательную эпюру  $M = M_1 + M_2 Z_2 + M_p$  (рис. 68)

$$M_A = 2,1370 + 5,0298 = 13,1668;$$

$$M_{1A} = 4,2740 + 5,0298 - 6 = 3,3038;$$

$$M_{1C} = 1,6028 + 0 + 0 = 1,6028;$$

$$M_{1B} = 6,411 - 11,3179 + 0 = -4,9069;$$

$$M_B = 3,2055 - 11,3179 = -8,1124.$$

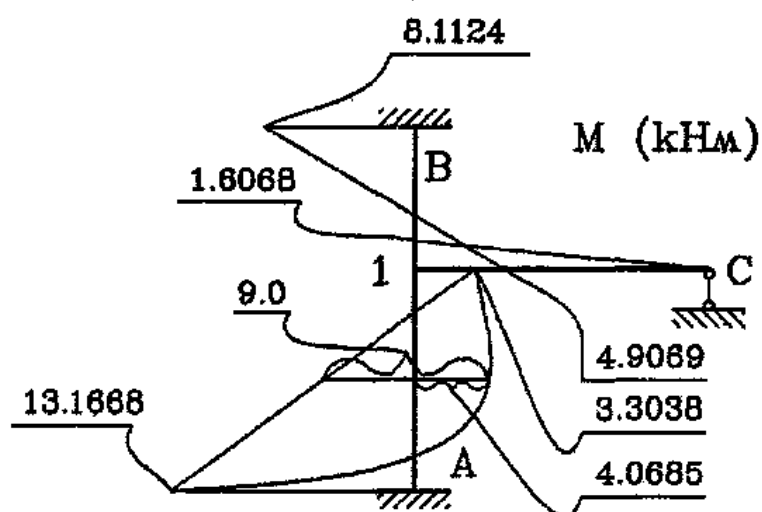


Рис. 68



Проверяют равновесие моментов в узле 1.

$$\sum M_i = 3,3038 + 1,6068 - 4,9069 \approx 0.$$

8. Строят эпюру поперечных сил  $Q$  (рис. 69)

$$Q_{AJ} = \frac{8 \cdot 3}{2} + \frac{3,3038 - (-13,1668)}{3} = 17,4902;$$

$$Q_{IA} = -\frac{8 \cdot 3}{2} + \frac{3,3038 - (-13,1668)}{3} = -6,5098;$$

$$Q_{IC} = \frac{0 - (-1,6068)}{4} = 0,4017;$$

$$Q_{IB} = \frac{-8,1124 - 4,9069}{2} = -6,5098.$$

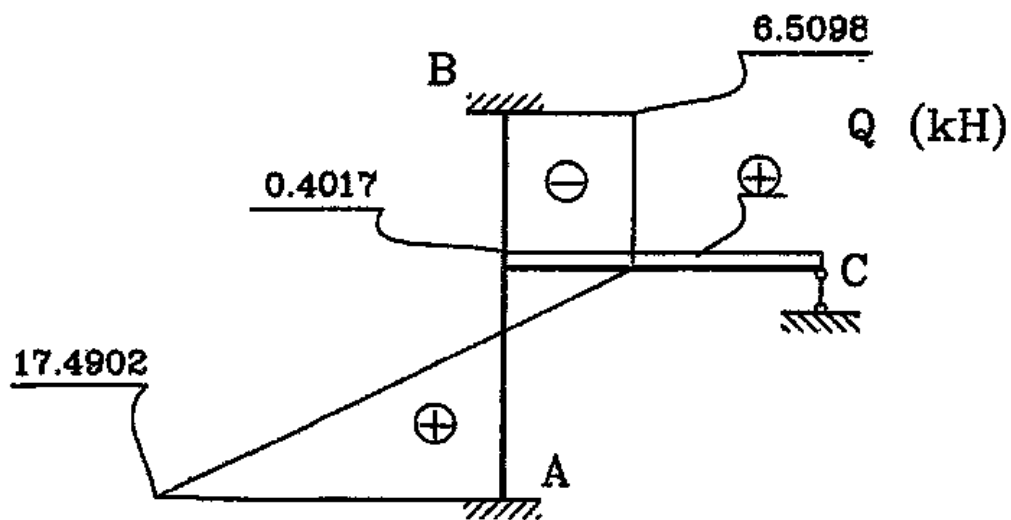


Рис. 69

9. Строят эпюру продольных сил  $N$  (рис. 71).

Вырезают узел 1 (рис. 70).

$$\sum x = 0; N_{1C} + 6,5098 -$$

$$- 6,5098 = 0;$$

$$N_{1C} = 0;$$

$$\sum y = 0; N_{1B} + N_{1A} -$$

$$- 0,4017 = 0.$$

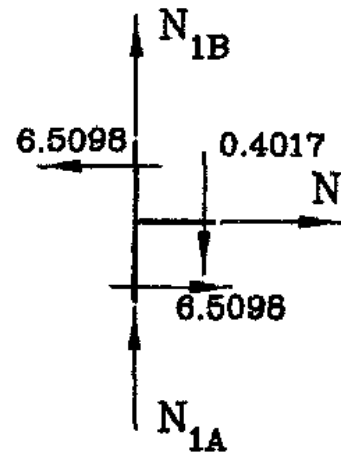


Рис. 70

Распределяют усилия в стержнях В1 и 1А из условия неразрывности деформаций в узле 1: удлинение стержня В1 должно равняться укорочению стержня 1А, т.е.

$$\frac{N_{1B} l_{1B}}{E_2 A_2} = \frac{N_{1A} l_{1A}}{E_1 A_1} \quad \text{или} \quad N_{1B} : N_{1A} = E_2 A_2 l_{1A} : E_1 A_1 l_{1B}.$$

Полагают, что  $E_1 = E_2$  и  $A_1 = A_2$ .

Тогда усилия в стержнях распределяются обратно пропорционально длинам стержней

$$N_{1B} = \frac{2}{3} 0,4017 = 0,2678 \text{ (растяжение);}$$

$$N_{1A} = -\frac{1}{3} 0,4017 = -0,1339 \text{ (сжатие).}$$

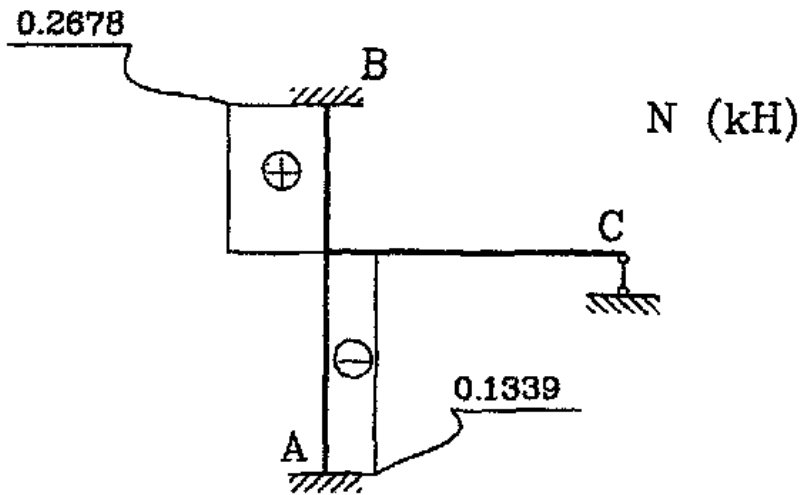


Рис. 71

10. Проверяют равновесие рамы в целом (рис. 72)

$$\sum x = 8 \cdot 3 - 6,5098 - 17,4902 = 0;$$

$$\sum y = 0,4017 - 0,2678 - 0,1339 = 0.$$

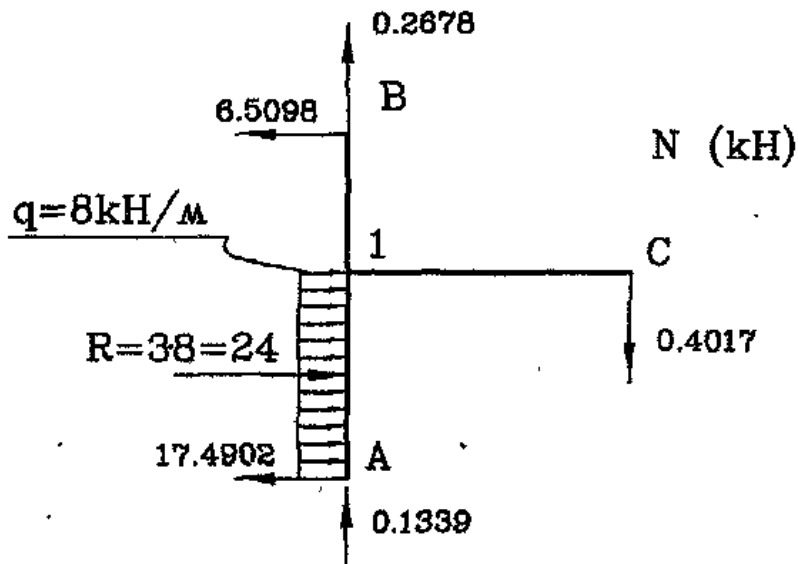


Рис. 72

### Расчет рамы на ЭВМ.

Описание общей процедуры решения задачи матричным способом приведено в пособиях [4], [5].

Порядок расчета по предлагаемой программе предусматривает три этапа;

1. Подготовка данных для ввода в ЭВМ.
2. Работа на ЭВМ.
3. Обработка результатов расчета на ЭВМ.

Ниже приводится пример решения на ЭВМ задачи, рассмотренной на с. 56-68.

1. Подготовка данных.

На первом этапе как и при ручном счете выбирают основную систему (см. рис. 57), строят единичные эпюры моментов  $M_1$  и  $M_2$  (рис. 58, 59) и грузовую эпюру моментов  $M_p$  (см. рис. 60).

Для вычисления грузовых членов канонических уравнений перемножением эпюр необходимо дополнительно построить эпюру изгибающих моментов от заданной нагрузки в произвольной основной системе метода сил, построенной для заданной рамы,  $-M_p^{MC}$ .

1. Выберем, например, систему, показанную на рис. 73.

Эпюра изгибающих моментов в этой системе от заданной нагрузки  $M_p^{MC}$  показана на рис. 74.

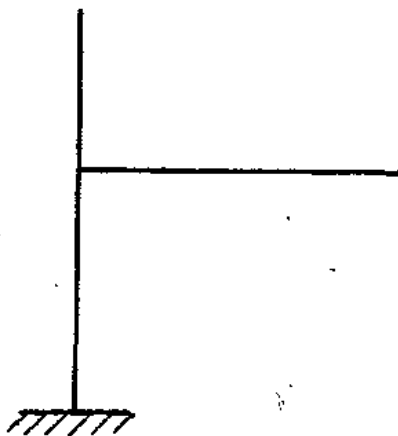


Рис. 73

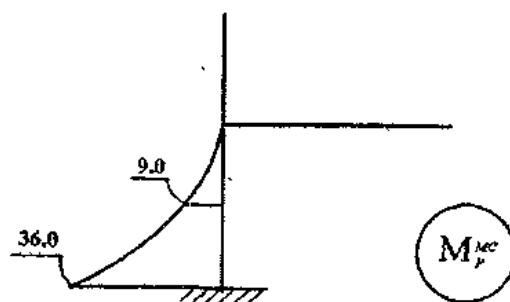
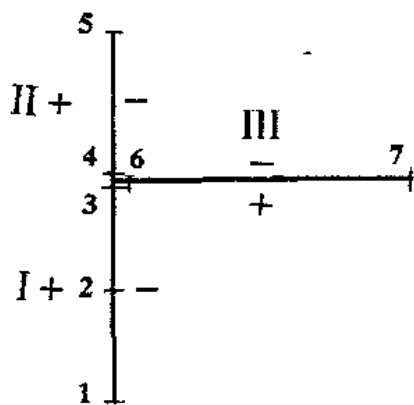


Рис. 74

Сравнивая грузовые эпюры  $M_p$  и  $M_p^{MC}$  единичными эпюрами  $M_1$  и  $M_2$ , разбивают раму на участки так, чтобы на каждом из них эпюры были гладкими кривыми или прямолинейными (без перегибов и скачков). Нумеруют концы выделенных участков. Эти точки и определяют места ввода данных (расчетные точки). Для каждого участка задают правило знаков. Это правило определяет лишь положение эпюры относительно стержня (сверху или снизу, справа или слева) и может не совпадать с правилом знаков, принятым для изгибающих моментов в сопротивлении материалов и строительной механике.



На рис. 75 показана расчетная схема для ЭВМ с выделенными участками (обозначены римскими цифрами), расчетными точками и указаниями на них моментов.

На рис. 75 показана расчетная схема для ЭВМ с выделенными участками (обозначены римскими цифрами), расчетными точками и указаниями на них моментов.

Рис. 75

Формирование матрицы из ординат единичных эпюр моментов в расчетных точках.

$$\|MI\| = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 4 & -2 \\ -6 & -4.5 \\ 3 & 4.5 \\ 1.5 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Формирование матрицы из ординат грузовой эпюры моментов  $M_p$  в расчетных точках

$$\|MP\| = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

формирование матрицы  $\|MPS\|$  ИЗ ординат грузовой эпюры моментов  $M_r^{MC}$  в расчетных точках

$$\|MPS\| = \begin{pmatrix} 36 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Формирование матрицы податливости рамы.

Вначале формируют матрицы податливости каждого участка.

$L_1 = \frac{l}{6EI} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  - для участков, на которых обе эпюры прямолинейные,

$L_1 = \frac{l}{6EI} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  - для участков, на которых грузовая эпюра -парабола.

$$L_I = \frac{3}{6 \cdot 3EI_0} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{EI_0} \begin{vmatrix} 0.16666 & 0 & 0 \\ 0 & 0.66666 & 0 \\ 0 & 0 & 0.16666 \end{vmatrix};$$

$$L_{II} = \frac{2}{6 \cdot 3EI_0} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{EI_0} \begin{vmatrix} 0.22222 & 0.11111 \\ 0.11111 & 0.22222 \end{vmatrix}$$

$$L_{III} = \frac{4}{6 \cdot 2EI_0} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$L = \begin{vmatrix} L_I & 0 & 0 \\ 0 & L_{II} & 0 \\ 0 & 0 & L_{III} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{EI_0} \begin{vmatrix} 0.1666 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6666 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1666 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2222 & 0.1111 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1111 & 0.2222 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6666 & 0.3333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3333 & 0.6666 & 0 \end{vmatrix}$$

## 2. Работа на ЭВМ.

Вводят в машину матрицы MI, MP, MPS и L, руководствуясь указаниями на дисплее. Для получения достаточной точности расчетов целесообразно вводить значения элементов матрицы с тем количеством знаков, насколько позволяет дисплей. Десятичные дроби с нулевой целой частью нужно вводить так, как показано в примере: 0,333333 - .333333.

Результаты расчета выводятся на экран монитора в виде, показанном для решаемой задачи на рис. 76.

(здесь, например, 0.1200E +02 = 12.0, -,1068e + 01 =- 1.068.

Все результаты нужно распечатать или списать с экрана.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА :

```

F[MxN] = MTr * L * MП
      ||
      ||
      ||
МАТРИЦА КОЭФФИЦИЕНТОВ СИСТЕМЫ
КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ "СКУ"
      ||
      ||
      ||
      0.1150E+02 0.2500E+01 .....
      0.2500E+01 0.5833E+01 .....
      .....

```

```

M[M] = MP + MГ*Z
      |
      |
ОРДИНАТЫ ОКОНЧАТЕЛЬНОЙ ЭПЮРЫ МОМЕНТОВ В РАСЧЕТНЫХ ТОЧКАХ
      13.17  -4.07  -3.30  -4.91  8.11  -1.60  0.00

```

Рис. 76



### 3. Обработка результатов расчета на ЭВМ.

Откладывая в расчетных точках в произвольно выбранном масштабе моменты (последняя строка на дисплее) в соответствии с принятым правилом знаков и соединяя концы откладываемых отрезков прямыми линиями, получают окончательную эпюру  $M$ . На участке, на котором действует распределенная нагрузка, три точки (по концам и по середине участка) соединяют плавной кривой (рис.77).

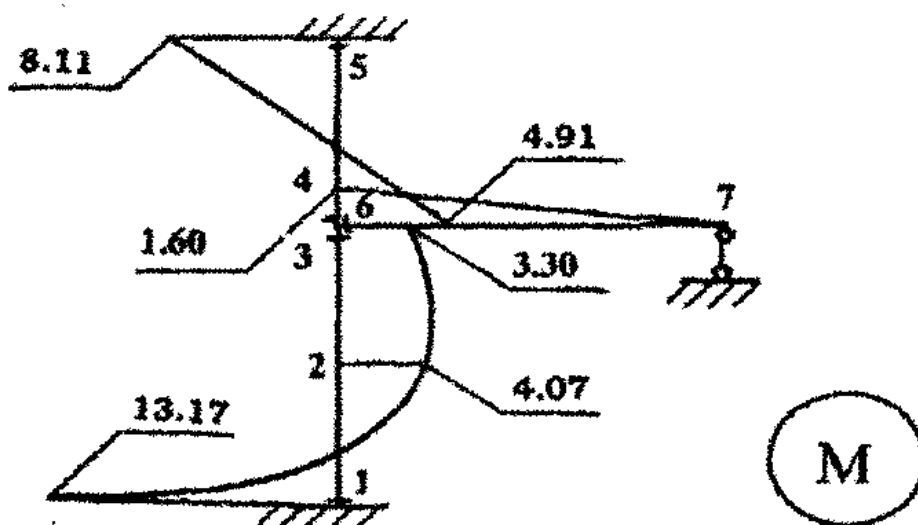


Рис.77

Расчеты, связанные с построением эпюр  $Q$  и  $N$ , выполняются обычным способом, как это показано для рассматриваемой задачи на с. 66, 67.

## РАСЧЕТ ПЛОСКОЙ РАМЫ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

Рамы на устойчивость удобно рассчитывать методом перемещений. При этом определяются критические значения нагрузки, заданной в виде узловых сосредоточенных сил. При потере устойчивости элементы рамы, стержни изгибаются. Поэтому коэффициенты канонических уравнений метода перемещений в задаче устойчивости вычисляются с учетом продольных сил при изгибе элементов рамы в момент потери устойчивости.

Приведем вывод формул для вычисления реактивных усилий по концам элементов основной системы (стержней с разным закреплением концов) от продольных сжимающих нагрузок.

Уравнение изгиба центрально сжатого силой  $P$  стержня в момент потери устойчивости относительно функции прогиба  $y(x)$  имеет вид:

$$d^4y/dx^4 + k^2d^2y/dx^2 = 0, \quad (14)$$

$$\text{где } k^2 = P/EI, \quad (15)$$

$EI$  — жесткость стержня при изгибе.

Решение уравнения (14) определяется выражением:

$$y = C_1 + C_2x + C_3\cos kx + C_4\sin kx,$$

где  $C_1, C_2, C_3, C_4$  — произвольные постоянные интегрирования.

Путем дифференцирования функции прогиба найдем выражения для угла поворота  $\theta$ , изгибающего момента  $M$  и поперечной силы  $Q$  в стержне:

$$\theta = dy/dx = C_2 + k(-C_3\sin kx + C_4\cos kx);$$

$$M = -EI d^2y/dx^2 = EIk^2 (C_3\cos kx + C_4\sin kx);$$

$$Q = -EI d^3 dx^3 - P dy/dx = -PC, + (Eik_3 - Pk)(-C_3 \sin kx + C_4 \cos kx).$$

Произвольные постоянные нетрудно выразить через начальные параметры  $y_0, \theta_0, M_0$  и  $Q_0$ , представляющие собой значения соответствующих величин  $y, \theta, M, Q$  при  $x = 0$ .

$$Y = y_0 + \theta_0 \sin kx/k - M_0(1 - \cos kx)/P - Q_0(kx - \sin kx)/kP;$$

$$\theta = \theta_0 \cos kx - M_0 k \sin kx/P - Q_0(1 - \cos kx)/P; \quad (16)$$

$$M = \theta_0 P \sin kx/k + M_0 \cos kx + Q_0 \sin kx/k;$$

$$Q = Q_0$$

Рассмотрим единичные состояния сжатого стержня длины  $l$ .

1. Стержень  $0l$  с защемленным верхним и опертым нижним концами. Верхний конец ( $x = 0$ ) поворачивается на угол, равный  $1$  (рис.78, а). Из граничных условий

$$y|_{x=0} = y_0 = 0, \theta|_{x=0} = \theta_0 = 1; y|_{x=l} = y_1 = 0, M|_{x=l} = M_1 = 0$$

на основании (21) получим выражения для  $M_0$  и  $Q_0$ :

$$M_0 = (3EI/l) \varphi_1(v), \theta_0 = (3EI/l^2) \varphi_1(v).$$

Здесь введена функция

$$\varphi_1(v) = v^2 \sin v / (3 \sin v - v \cos v),$$

$$v = kl = l(P/EI)^{1/2}. \quad (17)$$

2. Стержень  $0l$  с двумя защемленными концами. Верхний конец ( $x = 0$ ) поворачивается на угол, равный  $1$  (рис.78, б). Из граничных условий

$$y|_{x=0} = y_0 = 0, \theta|_{x=0} = \theta_0 = 1; y|_{x=l} = y_1 = 0, \theta|_{x=l} = \theta_1 = 0$$

на основании (3) получим выражения для  $M_0$  и  $Q_0$ :

$$M_0 = (4EI/l) \varphi_2(v), \quad Q_0 = (6EI/l^2) \varphi_4(v),$$

где  $\varphi_2(v) = v(\sin v - v \cos v)/4S$ ,  $\varphi_4(v) = v^2(1 - \cos v)/6S$ .

$$S(v) = 2 - 2\cos v - v \sin v. \quad (18)$$

Момент на другом конце стержня  $x = l$  определяется из общего выражения (16) при найденных значениях  $M_0$  и  $Q_0$ :

$$M_l = (2EI/l) \varphi_3(v), \quad \varphi_3(v) = v(v - \sin v)/2S.$$

На рис.78, а, б приведены фактические направления концевых моментов и поперечных сил, действующих на стержень со стороны опор, при повороте узла 0 на единичный угол по часовой стрелке.

3. Оба конца стержня зашпемлены. Конец  $x = 0$  имеет единичное смещение (рис.78, в). В этом случае

$$y|_{x=0} = y_0 = 1, \quad \theta|_{x=0} = \theta_0 = 0; \quad y|_{x=l} = y_l = 0, \quad \theta|_{x=l} = \theta_l = 0.$$

Отсюда согласно (16) находим:

$$M_0 = (6EI/l^2) \varphi_4(v), \quad Q_0 = -(12EI/l^3) \eta_2(v),$$

$$\eta_2(v) = v^3 \sin v / 12S. \quad (19)$$

4. Конец стержня  $x = 0$  зашпемлен и имеет единичное смещение. Другой конец  $x = l$  оперт (рис. 78, г). В этом случае

$$y|_{x=0} = y_0 = 1, \quad \theta|_{x=0} = \theta_0 = 0; \quad y|_{x=l} = y_l = 0, \quad M|_{x=l} = M_l = 0.$$

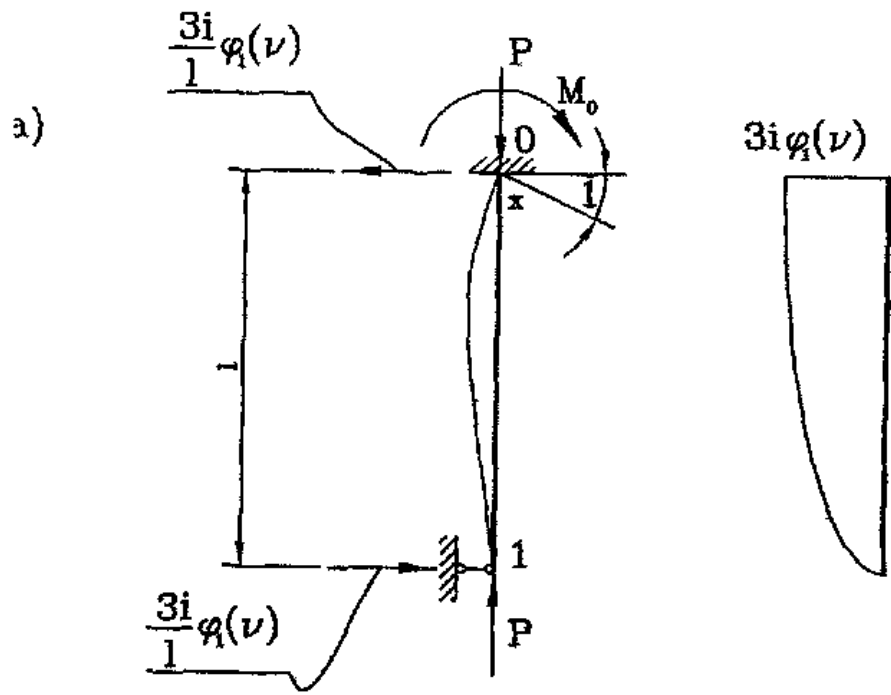
На основании (16) будем иметь:

$$M_0 = (3EI/l^2) \varphi_1(v), \quad Q_0 = -(3EI/l^3) \eta_1(v),$$

$$\eta_1(v) = v^3 \cos v / (3 \sin v - v \cos v). \quad (20)$$

На рис.78, в, г показаны действительные направления моментов и поперечных сил по концам стержня со стороны опор при приведенных единичных смещениях верхнего конца стержня.

a



б

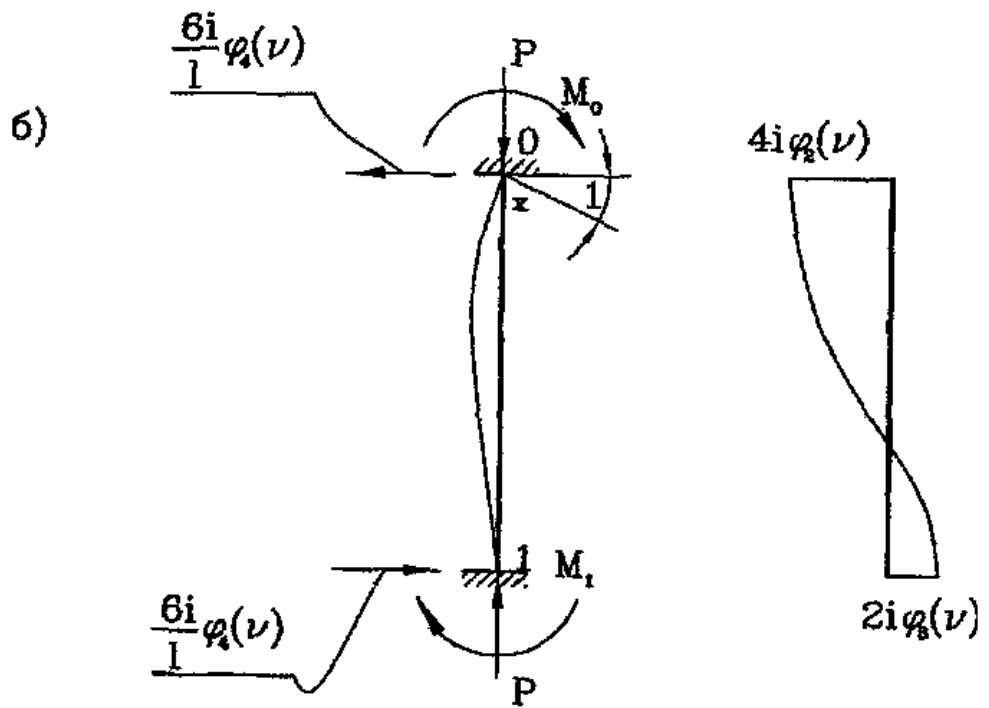
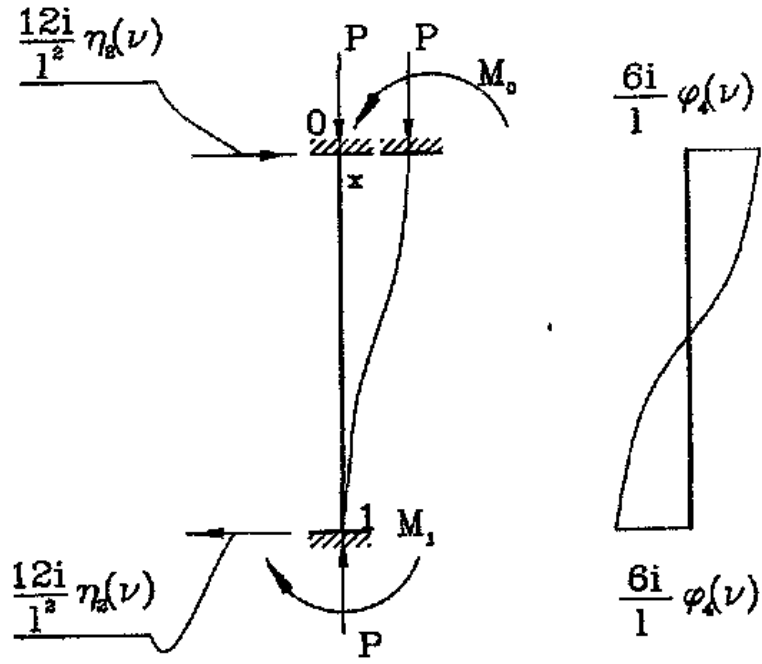


Рис. 78

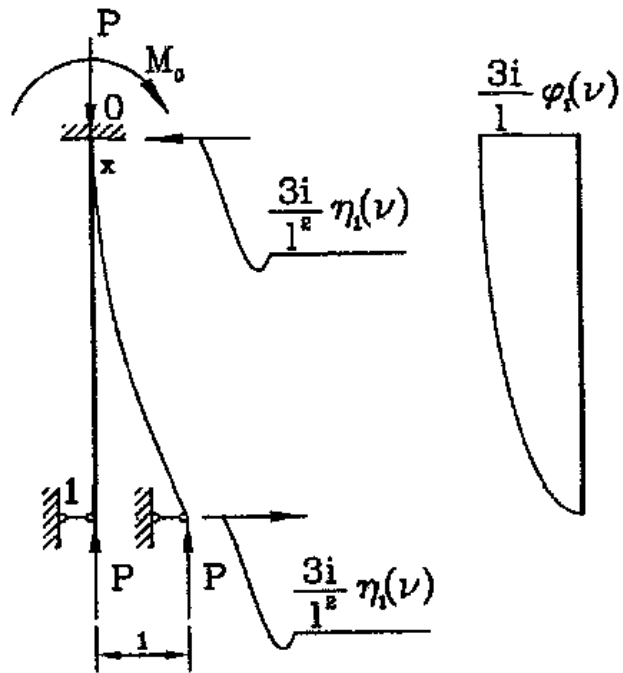
B

B)



Г

a)



Значения функций  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \eta_1, \eta_2$  даны в форме табл. 5 при изменении аргумента  $v$  в пределах  $0 < v < 6,2$  с интервалом 0,1. При  $v = 0$  все они принимают единичные значения. Коэффициенты при этих функциях в формулах для моментов и поперечных сил по концам стержня соответствующих табличным значениям, возникающим при единичных угле поворота и смещении узла 0 в отсутствие сжимающей силы  $P$ .

**Пример.**

Дано:

рама, нагруженная двумя узловыми сосредоточенными силами (рис. 79)

$EI/EI_2 = 0,6; P_1/P_2 = 1,6; l_1 = 6 \text{ м}, l_2 = 5 \text{ м}, h_1 = 4 \text{ м}, h_2 = 8 \text{ м}.$

Требуется:

определить критические значения заданной нагрузки.

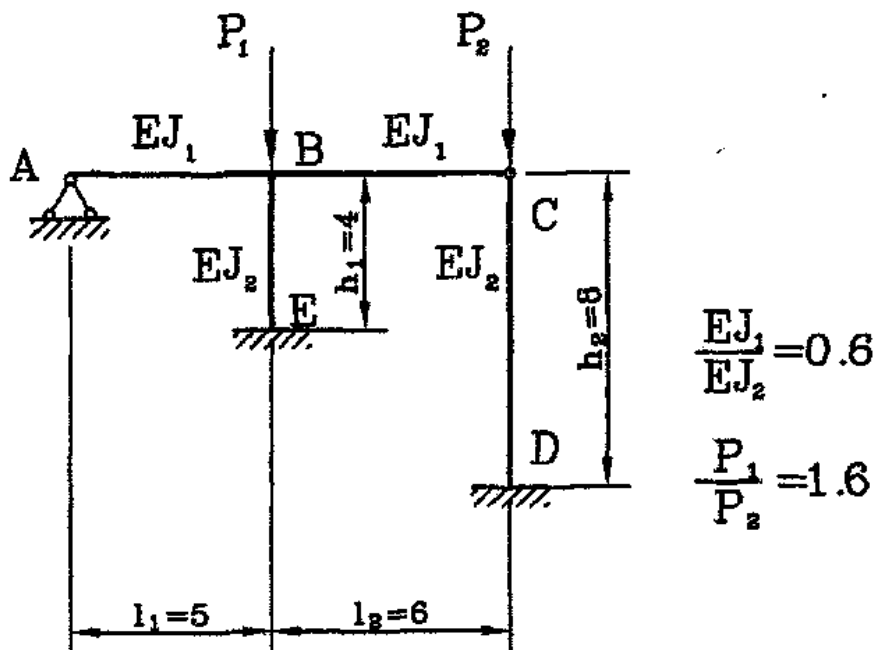


Рис. 79

1. Выбирают основную систему по методу перемещений (рис. 80).

(Как вводить дополнительные связи объяснено в задаче о расчете рамы по методу перемещений).

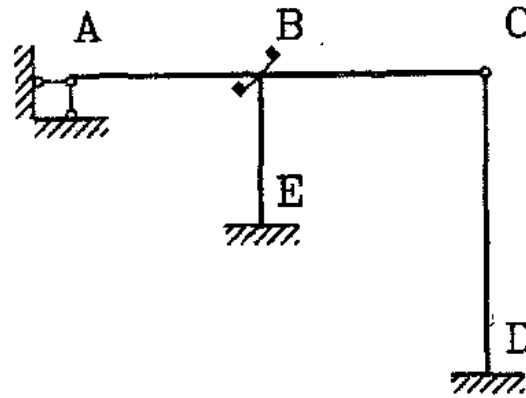


Рис. 80

В качестве основных неизвестных в канонических уравнениях метода перемещений выступают:

$Z_1$  - угол поворота заделки в узле B,

$Z_2$  - линейное перемещение введенной горизонтальной связи на опоре.

2. Канонические уравнения

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 = 0; \tag{21}$$

$$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 = 0.$$

3. Строят единичные эпюры моментов - эпюры изгибающих моментов от единичных воздействий  $Z_1 = 1$  и  $Z_2 = 1$  соответственно (рис.81, 82). В элементах основной системы, нагруженных продольными силами, эпюры строят в соответствии с рис. 78, в остальных элементах - используя стандартные эпюры, которые можно найти в любом учебнике строительной механики.



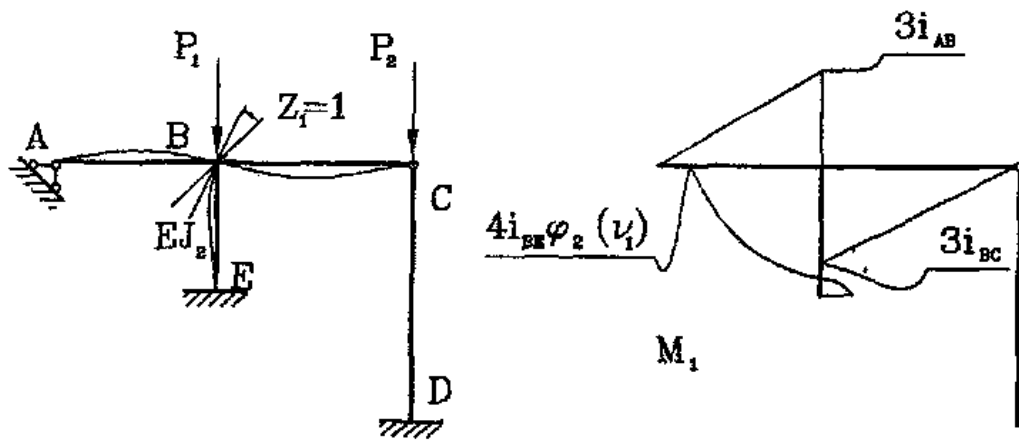


Рис. 81

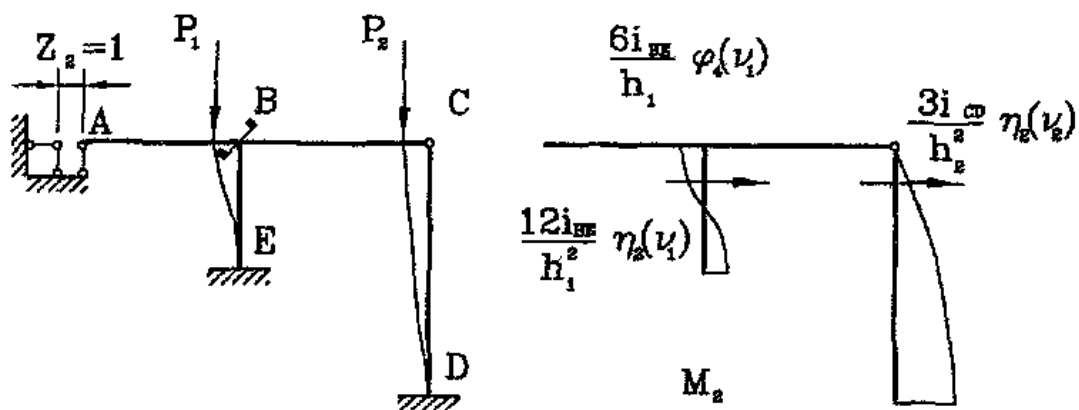


Рис. 82

4. Из равновесия узлов и элементов основной системы определяют коэффициенты канонических уравнений.

Предварительно вычисляют погонные жесткости элементов рамы. Все жесткости выражены через  $EI_2$  по заданию:

$$EI_1 = 0,6EI_2$$

$$i_{AB} = EI_1/l_1 = EI_1/6 = 0,6EI_2/6 = 0,1EI_2, \quad i_{BE} = EI_2/h_1 = EI_2/4 =$$

$$= 0,25EI_2$$

$$i_{BC} = EI_1/l_2 = EI_1/5 = 0,6EI_2/5 = 0,12EI_2, \quad i_{CD} = EI_2/h_2 = EI_2/8 =$$

$$= 0,125EI_2.$$

Из равновесия узла В по эпюре  $M_1$  находим  $r_{11}$  (рис. 83)

$$\Sigma M_B = 0, \quad r_{11} - 3i_{AB} -$$

$$- 4i_{BE}\varphi_2(\nu_1) - 3i_{BC} = 0;$$

$$r_{11} = (0,66 + \varphi(\nu_1))EI_2.$$

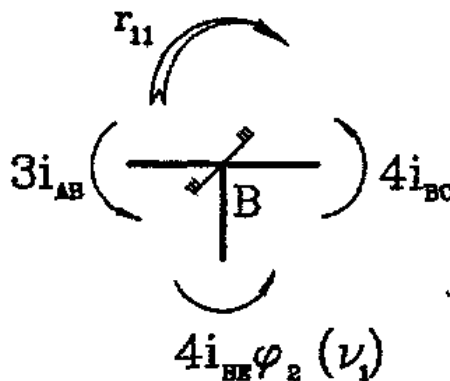
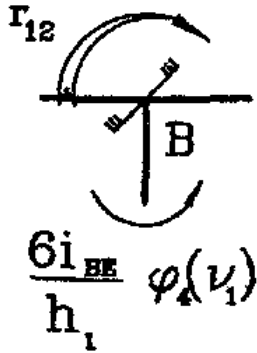


Рис. 83

Из равновесия узла В по эпюре  $M_2$  находим  $r_{12} = r_{21}$  (рис. 84)



$$\Sigma M_B = 0, r_{12} - 6i_{BE}\varphi_4(v_1) = 0$$

$$r_{12} = 0,375\varphi_4(v_1).$$

Рис.84

Из равновесия ригеля (рис. 85) для состояния основной системы, соответствующей воздействию  $Z_2 = 1$ , находим  $r_{22}$

$$\Sigma X = 0;$$

$$r_{22} - 12i_{BE}\eta_2(v_1)/h_1^2 - 3i_{CD}\eta_1(v_2)/h_2^2 = 0;$$

$$r_{22} = [0,1875\eta_2(v_1) + 0,00586\eta_1(v_2)].$$

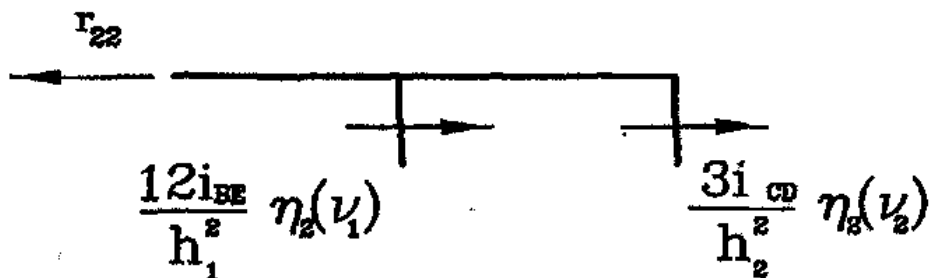


Рис. 85

5. Нетривиальное (ненулевое) решение системы уравнений (21) может быть получено только в том случае, когда определитель этой системы равен нулю

$$D = r_{11} r_{22} - r_{12}^2 = 0. \quad (22)$$

В это уравнение подставляют найденные значения коэффициентов. Предварительно выразим параметр  $v_2$  через  $v_1$  используя соотношения (17) и данные, задачи

$$v_1 = h_1(P_1/EI_2)^{1/2}. \quad (23)$$

Отсюда  $P_1 = v_1^2 EI_2 / h_1^2$ . По заданию  $P_1 = 1,6P_2$ .

Отсюда

$$P_2 = v_1^2 EI_2 / 1,6h_1^2;$$

$$v_2 = h_2(P_2/EI_2)^{1/2} = h_2(v_1^2 EI_2 / 1,6h_1^2 EI_2)^{1/2} = 1,581v_1. \quad (24)$$

$$D = (0,66 + \varphi(v_1) (0,1875\eta_2(v_1) + 0,00586\eta_1(1,581v_1)) - 0,140625\varphi_4^2(v_1) = 0. \quad (25)$$

Уравнение (25) - трансцендентное и имеет бесчисленное множество значений  $v_1$  ему удовлетворяющих. Необходимо найти наименьшее из них, которому отвечает искомая критическая нагрузка.

Поиск ведется подбором значений  $v_1$  при которых выполняется условие (25).

Для того чтобы установить область изменения параметра  $v_1$  поступают следующим образом. Рассматривают какую-нибудь из стоек, например, левую. Если рассматривать этот элемент как стержень с двумя заделанными концами, то он будет значительно более жестким, чем в заданной раме. В этом случае критическое значение нагрузки для этого элемента будет значительно более высоким, чем для рамы. Если напротив, считать верхний элемента концом свободным, то он будет более «мягким», чем в раме, а

критическая нагрузка меньшей. В обоих случаях критическая нагрузка определяется по формулам Эйлера

$$P_{кр} = \pi^2 EI_2 / (0,7h_1)^2, \quad P_{кр} = \pi^2 EI_2 / (2h_2)^2 \quad (26)$$

Для заданных значений  $h$  получим два «граничных» значения критического параметра  $v_1$

$$v_{1кр}^* = h_1(P/EI_2)^{1/2} = h_1\{\pi^2 EI_2 / EI_2 (0,7h_1)^2\}^{1/2} = \pi/0,7 = 4,488;$$

$$v_{1кр}^{**} = \pi/2 = 1,5708.$$

Следовательно, критическое значение для рамы находится в пределах  $1,5708 < v_{кр} < 4,488$ .

Возьмем, например,  $v_1 = 2,1$ . В этом случае по (24)  $v_2 = 3,3204$ . По таблице находим:  $\varphi_2(2,1) = 0,8437$ ,  $\varphi_4(2,1) = 0,924$ ,  $\eta_2(2,1) = 0,5565$ ,  $\eta_1(3,3204) = -3,8874$ . Здесь последнее значение определяется интерполяцией. Подставляя найденные значения в (25), находим

$$D(2,1) = (0,66 + 0,8437) [0,1875 * 0,5565 + 0,00568(-3,8874)] - \\ - 0,140625 * 0,924^2 = 0,122647164 - 0,1200882 = 0,0025585.$$

Примем  $v_1$  равным 2,2. В этом случае  $v_2 = 3,4786$ .

$$\varphi_2(2,2) = 0,8273, \varphi_4(2,2) = 0,9164, \eta_2(2,2) = 0,5131, \eta_1(3,4786) = \\ = -4,4898.$$

$$D(2,2) = (0,66 + 0,8273) [0,1875 * 0,5131 + 0,00568(-4,4898)] - \\ - 0,140125 * 0,924^2 = 0,103956353 - 0,1180953 = -0,014139.$$

При  $v_1 < 2,1$   $D > 0$ , при  $v_1 = 2,2$   $D < 0$ . Поскольку произошло изменение знака у  $D$  значение  $v_{кр}$ , для которого  $D = 0$ , находится между этими значениями  $v_1$ .

Примем для  $v_{кр}$  значение, равное 2,11.

Вычисляем значения критических нагрузок.

$$P_{1кр} = v_{кр}^2 EI_2 / h_1^2 = \frac{2,11^2}{4^2} EI_2 = 0,278 EI_2,$$

$$P_{2кр} = P_{1кр} / 1,6 = \frac{0,278 EI_2}{1,6} = 0,174 EI_2.$$

Значения функций см. в табл. 5.

Таблица 5

$y$	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$	$\eta_1$	$\eta_2$
0.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.1	0.9999	0.9997	1.0000	0.9998	0.9960	0.9990
0.2	0.9993	0.9987	1.0000	0.9992	0.9840	0.9960
0.3	0.9940	0.9970	1.0000	0.9985	0.9640	0.9910
0.4	0.9893	0.9947	1.0000	0.9973	0.9360	0.9840
0.5	0.9832	0.9916	1.0000	0.9958	0.8999	0.9760
0.6	0.9757	0.9879	1.0000	0.9940	0.8557	0.9640
0.7	0.9669	0.9836	1.0000	0.9918	0.8035	0.9510
0.8	0.9565	0.9785	1.0000	0.9893	0.7432	0.9360
0.9	0.9447	0.9727	1.0000	0.9864	0.6747	0.9189
1.0	0.9313	0.9662	1.0000	0.9832	0.5980	0.8999
1.1	0.9164	0.9590	1.0000	0.9797	0.5131	0.8768
1.2	0.8998	0.9511	1.0000	0.9757	0.4198	0.8457
1.3	0.8814	0.9424	1.0000	0.9715	0.3181	0.8067
1.4	0.8613	0.9329	1.0000	0.9669	0.2080	0.7635
1.5	0.8393	0.9227	1.0000	0.9619	0.0893	0.7144
1.6	0.8152	0.9116	1.0000	0.9565	-0.0381	0.6632
1.7	0.7891	0.8998	1.0000	0.9508	-0.1743	0.6100
1.8	0.7606	0.8871	1.0000	0.9447	-0.3194	0.5647
1.9	0.7397	0.8735	1.0000	0.9382	-0.4736	0.5274
2.0	0.6961	0.8590	1.0000	0.9313	-0.6372	0.4960
2.1	0.6597	0.8436	1.0000	0.9241	-0.8102	0.4666
2.2	0.6202	0.8272	1.0000	0.9164	-0.9931	0.4381
2.3	0.5772	0.8099	1.0000	0.9083	-1.1861	0.4106
2.4	0.5304	0.7916	1.0000	0.8998	-1.3896	0.4198

$\nu$	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$	$\eta_1$	$\eta_2$
2.5	0.4793	0.7720	1.1286	0.8908	-1.6040	0.3700
2.6	0.4234	0.7513	1.1417	0.8814	-1.8299	0.3181
2.7	0.3621	0.7295	1.1559	0.8716	-2.0679	0.2641
2.8	0.2944	0.7064	1.1712	0.8613	-2.3189	0.2080
2.9	0.2195	0.6819	1.1878	0.8505	-2.5838	0.1497
3.0	0.1361	0.6560	1.2057	0.8393	-2.8639	0.0893
3.1	0.0424	0.6287	1.2251	0.8275	-3.1609	0.0267
3.2	-0.0635	0.5997	1.2462	0.8152	-3.4769	-0.0381
3.3	-0.1847	0.5691	1.2691	0.8024	-3.8147	-0.1051
3.4	-0.3248	0.5366	1.2940	0.7891	-4.1781	-0.1743
3.5	-0.4894	0.5021	1.3212	0.7751	-4.5727	-0.2457
3.6	-0.6862	0.4655	1.3509	0.7606	-5.0062	-0.3194
3.7	-0.9270	0.4265	1.3834	0.7455	-5.4904	-0.3954
3.8	-1.2303	0.3850	1.4191	0.7297	-6.0436	-0.4736
3.9	-1.6269	0.3407	1.4584	0.7133	-6.6969	-0.5542
4.0	-2.1726	0.2933	1.5019	0.6961	-7.5060	-0.6372
4.1	-2.9802	0.2424	1.5501	0.6783	-8.5836	-0.7225
4.2	-4.3156	0.1878	1.6037	0.6597	-10.1956	-0.8103
4.3	-6.9947	0.1287	1.6636	0.6404	-13.1581	-0.9005
4.4	-15.3271	0.0648	1.7310	0.6202	-21.7805	-0.9931
4.5	227.9292	-0.0048	1.8070	0.5991	221.1792	-1.0884
4.6	14.6693	-0.0809	1.8933	0.5772	7.6160	-1.1861
4.7	7.8186	-0.1645	1.9920	0.5543	0.4553	-1.2865
4.8	5.4023	-0.2572	2.1056	0.5304	-2.2777	-1.3896
4.9	4.1463	-0.3607	2.2375	0.5054	-3.8570	-1.4954
5.0	3.3615	-0.4772	2.3923	0.4793	-4.9719	-1.6040
5.1	2.8130	-0.6099	2.5757	0.4520	-5.8570	-1.7155
5.2	2.3986	-0.7629	2.7960	0.4234	-6.6147	-1.8299
5.3	2.0668	-0.9422	3.0648	0.3935	-7.2965	-1.9474
5.4	1.7884	-1.1563	3.3989	0.3621	-7.9316	-2.0679
5.5	1.5455	-1.4182	3.8236	0.3291	-8.5379	-2.1917
5.6	1.3266	-1.7481	4.3794	0.2044	-9.1268	-2.3189
5.7	1.1235	-2.1803	5.1346	0.2580	-9.7065	-2.4495
5.8	0.9302	-2.7777	6.2139	0.2195	-10.2831	-2.5838
5.9	0.7421	-3.6679	7.8727	0.1790	-10.8613	-2.7219

$y$	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$	$\eta_1$	$\eta_2$
6.0	0.3557	-5.1594	10.7370	0.1361	-11.4449	2.8639
6.1	0.3656	-8.2336	16.7392	0.0907	-12.0277	3.0102
6.2	0.7709	-13.5905	37.3084	0.0424	-12.8433	3.1609

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТ И ФОРМ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

Колебания упругой системы без динамической нагрузки называют свободными. Такие колебания возникают тогда, когда систему каким-либо образом выводят из первоначального равновесного состояния и мгновенно устраняют причину этого воздействия.

Свободные (или собственные) колебания характеризуются частотами свободных колебаний и соответствующими формами свободных колебаний.

В системе, имеющей  $n$  степеней свободы, возникает  $n$  частот свободных колебаний. Если система состоит из элементов с распределенной массой, то она имеет бесчисленное число степеней свободы и, следовательно, бесконечное число собственных частот, образующих спектр частот свободных колебаний.

В практических расчетах систему с бесконечным числом степеней свободы заменяют системой с конечным их числом. При этом можно получить как грубые, так и достаточно точные модели колебаний рассматриваемой конструкции.

Систему «тяжелый груз на упругой жесткой балке» (рис. 86), например, можно приближенно наделять лишь одной степенью свободы, считать, что груз может совершать только поперечные колебания вдоль  $y$ , пренебрегая продольными колебаниями вдоль  $x$  и крутильными относительно центра масс груза.



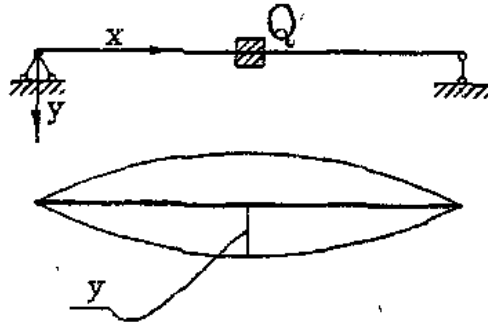


Рис. 86

### Порядок расчета.

1. На основании принципа Даламбера для рассматриваемой балки можно записать уравнение движения массы  $m$

$$y = \delta_{11} \left( -m \frac{d^2 y}{dt^2} \right),$$

где  $\delta_{11}$  - перемещение груза под действием силы  $P = 1 m = \frac{Q}{g}$ ;

$g$  - ускорение свободного падения, равное  $9,81 \text{ м/с}^2$ ;

$t$  - время.

2. Задавая колебание в виде

$$y = a \sin \omega t,$$

где  $a$  - амплитуда свободных колебаний,

$\omega$  - круговая частота свободных колебаний,

получают формулу для определения собственной частоты свободных колебаний одномассовой системы:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{y_{st}}}, \quad (27)$$

где  $y_{st}$  - статическое перемещение груза  $Q$  (прогиб балки в месте приложения груза).

3. Рассматривают систему, в которой груз имеет две степени свободы (рис. 87). В этой системе пренебрегаем возможным вращательным движением груза. Уравнения движения в направлении  $x$  и  $y$  запишем в виде

$$x = \delta_{11} \left(-m \frac{d^2 x}{dt^2}\right) + \delta_{12} \left(-m \frac{d^2 y}{dt^2}\right); \quad (28a)$$

$$y = \delta_{21} \left(-m \frac{d^2 x}{dt^2}\right) + \delta_{22} \left(-m \frac{d^2 y}{dt^2}\right), \quad (28b)$$

здесь  $\delta_{11}$ ,  $\delta_{12} = \delta_{21}$  имеют тот же смысл, что и при расчете рам по методу сил.

Задавая колебания в виде

$$x = a_1 \sin \omega t, \quad y = a_2 \sin \omega t, \quad (29)$$

получают однородную систему уравнений относительно неизвестных амплитуд  $a_1$  и  $a_2$

$$(1 - m\omega^2 \delta_{11}) a_1 - m\omega^2 \delta_{12} a_2 = 0;$$

$$-m\omega^2 \delta_{21} a_1 + (1 - m\omega^2 \delta_{22}) a_2 = 0.$$

Эта система имеет ненулевое решение только тогда, когда определитель из ее коэффициентов равен нулю

$$\begin{vmatrix} 1 - m\omega^2 \delta_{11} & -m\omega^2 \delta_{12} \\ -m\omega^2 \delta_{21} & 1 - m\omega^2 \delta_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, получаем уравнение для определения частот свободных колебаний

$$\omega^4 - \frac{\delta_{11} + \delta_{22}}{m(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)}\omega^2 + \frac{1}{m^2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)} = 0. \quad (30)$$

**Пример.**

Дано:

на стальной раме (рис. 87) из стержней с прямоугольным поперечным сечением укреплен груз Q.

Требуется:

определить частоты и формы свободных колебаний рамы, если  $Q = 15 \text{ кН}$ ,  $b = 20 \text{ мм}$ ,  $h = 50 \text{ мм}$ ,  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ ,  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ .

Собственный вес рамы не учитывается.

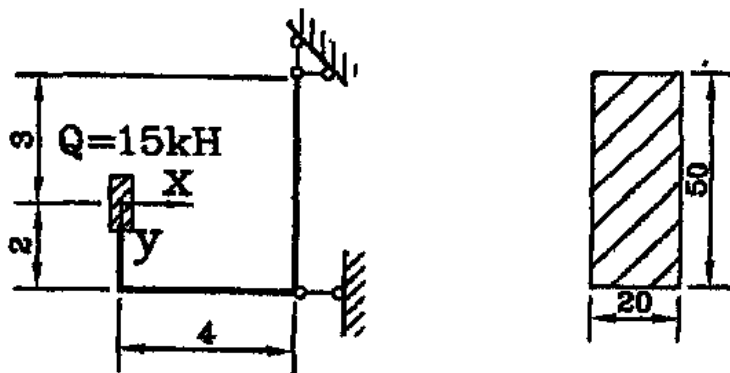


Рис. 87

1. Уравнение для определения собственных частот имеет вид (30).

2. Для определения коэффициентов этого уравнения строят эпюры  $M_1$  и  $M_2$  от сил  $P_1 = 1$  и  $P_2 = 1$ , действующих по направлению возможных колебаний груза  $Q$  (рис. 88).

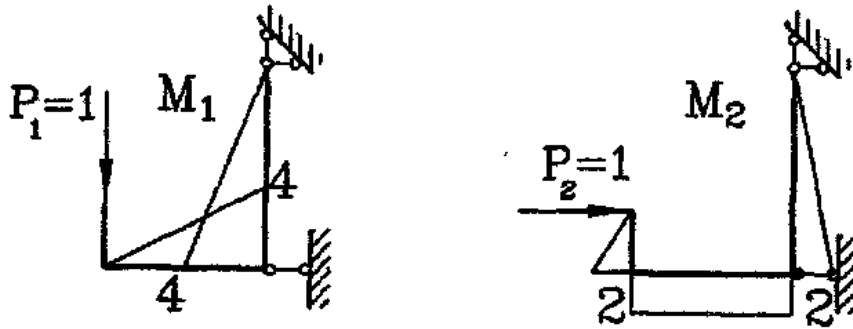


Рис. 88

3. Перемещения, входящие в коэффициенты частотного уравнения (30), определяем перемножением эпюр  $M_1$  и  $M_2$  по правилу Верещагина.

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left( \frac{4 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{4 \cdot 5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) = \frac{48}{EI};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \left( \frac{2 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + \frac{2 \cdot 5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right) = \frac{25,33}{EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI} \left( -\frac{4 \cdot 4}{2} \cdot 2 - \frac{4 \cdot 5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right) = -\frac{29,33}{EI}.$$

4. Решая уравнение (30), находят собственные частоты

$$m = Q/g = 15 \text{ кН}/9,81 \text{ м/с}^2 = 1,529 \text{ кНс}^2/\text{м};$$

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ кГ/см}^2 = 2 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2;$$

$$I = bh^3/12 = 0,02 \cdot 0,05^3/12 = 20,8 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4, \quad EI = 41,6 \text{ кНм}^2;$$

$$\omega^4 - \frac{(48 + 25,33)EI}{1,529(48 \cdot 25,33 - 29,33^2)}\omega^2 + \frac{(EI)^2}{1,529^2(48 \cdot 25,33 - 29,33^2)} = 0;$$

$$\omega^4 - 5,51\omega^2 + 2,08 = 0;$$

$$\omega^2 = 2,805 \pm \sqrt{2,805^2 - 2,08};$$

$$\omega_2^2 = 5,21, \quad \omega_1^2 = 0,399;$$

$$\omega_1 = 0,63 \text{ с}^{-1}, \quad \omega_2 = 2,28 \text{ с}^{-1}.$$

5. Формы колебаний груза Q соответствуют картинам изгиба-ния рамы под действием единичных сил (рис. 89).

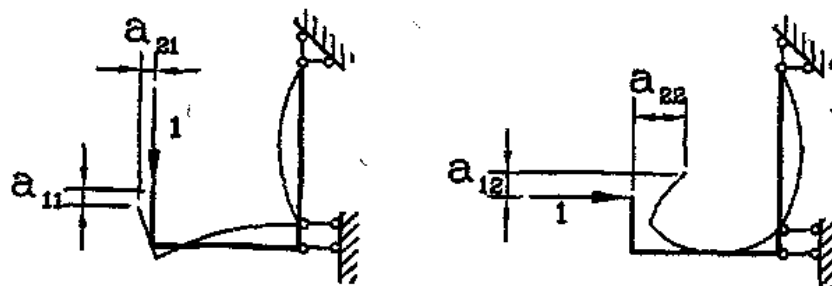


Рис. 89

6. Для определения амплитудных значений этих изгибаний в месте приложения груза Q записывают уравнение (29) для первой частоты

$$x_2 = a_{11}\sin \omega_1 t, \quad y = a_{21}\sin \omega_1 t.$$

Подставляют эти выражения в (28а). После преобразований получают

$$a_{21} = a_{11} \frac{1 - m\delta_{11}\omega_1^2}{m\delta_{12}\omega_1^2}; \quad a_{21} = -0,688a_{11}.$$

Амплитудные значения прогибов для второй формы свободных колебаний получают, подставив выражения

$$x_2 = a_{12}\sin \omega_2 t, \quad y = a_{22}\sin \omega_2 t$$

в (28б)

$$a_{22} = \frac{m\delta_{21}\omega_2^2}{1 - m\delta_{22}\omega_2^2} a_{12}, \quad a_{22} = 1,45a_{12}.$$

Решение задачи будет правильным, если полученные формы колебаний оказываются ортогональными и выполняется условие (31)

$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0. \tag{31}$$

В решаемой задаче

$$a_{11}a_{12} + (-0,688a_{11})1,45a_{12} \equiv 0.$$