

ОПД.Р.03 СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА
КУРС ЛЕКЦИЙ
Учебное пособие

В настоящем курсе лекций изложены основы расчёта статически определимых и статически неопределимых конструкций и сооружений на действие статических, подвижных, температурных и динамических нагрузок. Кроме того, рассмотрены основы расчёта стержневых систем на устойчивость и динамическое воздействие. Приведены некоторые справочные материалы, связанные с расчётом транспортных и строительных сооружений.

Данный курс лекций рекомендуется студентам высших учебных заведений, обучающимся на строительных специальностях.

В предлагаемом курсе лекций излагаются основы классической строительной механики, без глубокого осмысления которых невозможно освоение современных методов расчёта сооружений, использующих многочисленные программные продукты.

Для того чтобы излагаемый материал оказался доступным для понимания, при написании данного курса авторы стремились максимально использовать накопленный опыт преподавания классической строительной механики. При этом рассматривались только традиционные методы расчётов сооружений.

Известно, что строительная механика, как и сопротивление материалов, занимается расчётами на прочность, жёсткость и устойчивость. Но если сопротивление материалов изучает эти вопросы применительно только к простым элементам конструкций, строительная механика решает вопросы, связанные с расчётом сооружений в целом.

В первых разделах курса изучается расчёт статически определимых конструкций, таких как многопролётные статически определимые балки, арки, фермы и рамы. Кроме того, в этих же разделах рассматриваются теоретические обоснования классических методов определения перемещений. В последующих разделах рассмотрены вопросы расчёта статически неопределимых конструкций – неразрезных балок и рам. Рассматриваются также теоретические основы расчёта конструкций на действие как статических, так и подвижных, и динамических нагрузок. Приведены в курсе и первоначальные сведения расчёта статически неопределимых рам на устойчивость, имеются справочные данные, позволяющие использовать эту книгу при выполнении студентами расчётно-графических работ.

В настоящем курсе рассматривается строительная механика, связанная с расчётом только стержневых конструкций, используемых при создании транспортных сооружений, предназначенных для эксплуатации их автомобильным транспортом. Рассматриваются кон-

струкции, находящиеся вместе с внешней нагрузкой в одной плоскости.

1. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

1.1. Степень свободы в статике сооружений

Стержневыми называются такие системы, которые состоят в основном из прямолинейных стержней, объединённых в конструкцию различными типами соединений (сварными, болтовыми, заклёпочными и др.).

Целью кинематического анализа сооружений является оценка этих сооружений с точки зрения их геометрической неизменяемости. В строительной механике стержневых систем рассматривается расчёт геометрически неизменяемых сооружений, перемещения любых точек которых невозможны без деформации конструкции как в целом, так и отдельных её элементов.

Для того чтобы конструкция могла быть использована в качестве сооружения, она должна быть и геометрически неизменяемой, и неподвижной относительно основания. Геометрическая изменяемость и подвижность сооружения относительно основания характеризуются его степенью свободы. В статике сооружений *степенью свободы называется число независимых геометрических параметров, определяющих положение диска на плоскости* (рис. 1.1). В этом определении степени свободы под термином «диск» понимается любой жёсткий геометрически неизменяемый структурный элемент сооружения.

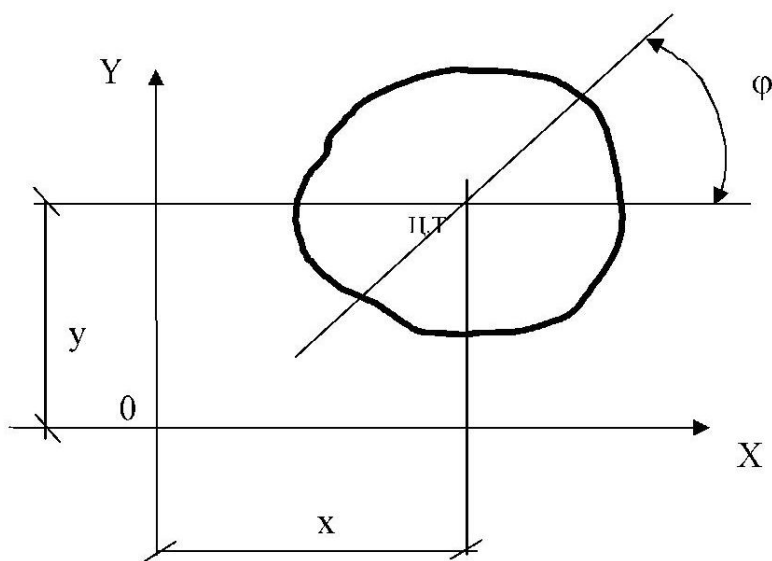


Рис. 1.1

Из анализа рис. 1.1 очевидно, что диск на плоскости обладает тремя степенями свободы – он может перемещаться поступательно вдоль осей x и y соответственно и поворачиваться (угол φ) вокруг центра тяжести диска. Зная эти три параметра, можно точно определить положение диска на плоскости.

1.2. Опоры

Для того чтобы в процессе создания и последующей эксплуатации сооружение оставалось геометрически неизменяемым и неподвижным по отношению к основанию (как говорят в строительной механике, к земле), сооружение с землёй соединяют специальными устройствами, называемыми опорами, каждая из которых лишает сооружение определённого числа степеней свободы. Всякое устройство, отнимающее у жёсткого диска одну степень свободы, называется *простой кинематической связью*.

В опорах возникают опорные реакции, которые вместе с внешними нагрузками создают уравновешенную систему сил, действующую на сооружение.

В строительной механике различают три типа опор, состоящих из определённого числа простых кинематических связей. Кинематическая связь представляет собой прямолинейный стержень, ограниченный с обеих сторон шарнирами. Шарниры бывают *простыми*, когда они соединяют два стержня, и *кратными*, когда они соединяют более чем два стержня (рис.1.2). *Кратность шарнира определяется числом стержней, сходящихся в нём, без единицы.*

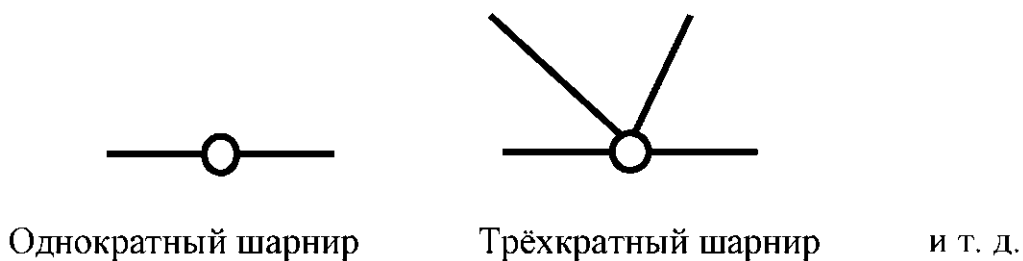


Рис. 1.2

Каждый простой шарнир предполагает наличие в нём двух простых кинематических связей.

Шарнирно-подвижная опора (рис. 1.3, *а*) состоит из одной простой кинематической связи. Такая опора лишает диск на плоскости одной степени свободы, то есть она не даёт возможности поступательного перемещения вдоль продольной оси этой опорной связи. При любом характере нагружения диска внешней нагрузкой опорная реакция R в шарнирно-подвижной опоре может быть направлена только вдоль оси этой простой кинематической связи и перпендикулярно продольной оси диска.

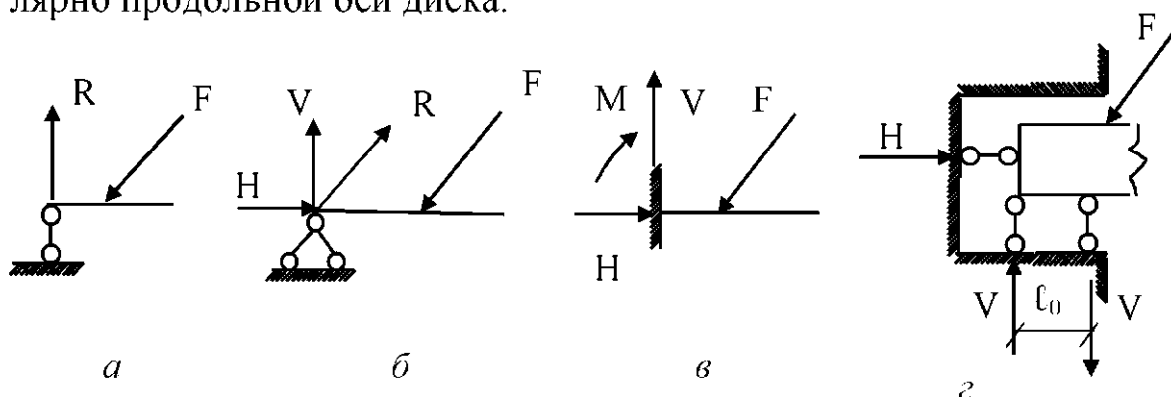


Рис. 1.3

Шарнирно-неподвижная опора (рис. 1.3, *б*) состоит из двух простых кинематических связей. При таком характере прикрепления диска к земле опорная реакция R может быть направлена под углом к продольной оси диска. Такую опорную реакцию разлагают на две взаимно-перпендикулярные составляющие – вертикальную V и горизонтальную H . Шарнирно-неподвижная опора отнимает у диска на плоскости две степени свободы, лишая его возможности поступательного перемещения по двум взаимно-перпендикулярным направлениям.

Жёсткая заделка (защемление) предполагает наличие в ней трёх простых кинематических связей (рис. 1.3, *в*), *отнимающих* у диска на плоскости три степени свободы, лишая его возможности как поступательных, так и угловых перемещений. При таком закреплении диска возникающую опорную реакцию раскладывают на три составляющие – V , H и M . Характер возникновения опорного момента $M=V \ell_0$ иллюстрируется шарнирно-стержневым эквивалентом защемления (рис. 1.3, *г*).

При этом величина опорного момента равна $M=V \ell_0$.

1.3. Геометрический анализ изменяемости стержневых систем

Число степеней свободы n сооружения в целом может быть определено по формуле П.Л. Чебышева

$$n = 3D - 2Ш - C_0. \quad (1.1)$$

Каждая цифра и символ этой формулы несут свою смысловую нагрузку: D описывает число жёстких дисков рассматриваемой стержневой системы; 3 означает, что каждый диск на плоскости обладает тремя степенями свободы; $Ш$ описывает число простых шарниров; 2 со знаком минус означает, что каждый простой шарнир «отнимает» у жёсткого диска на плоскости две степени свободы, т. е. предотвращает возможность поступательных перемещений диска по двум взаимно-перпендикулярным направлениям; C_0 описывает число простых кинематических связей; 1 и знак минус означает, что каждая простая кинематическая связь «отнимает» у жёсткого диска одну степень свободы, т.е. предотвращает возможность линейного перемещения диска вдоль стержня простой кинематической связи.

Для кинематического анализа таких стержневых систем, как фермы, удобно пользоваться формулой

$$n = 2U - C_f - C_0, \quad (1.2)$$

где U описывает число узлов фермы, а 2 означает, что каждый узел фермы на плоскости обладает двумя степенями свободы; C_f и C_0 описывают число стержней фермы и число опорных простых кинематических связей соответственно; -1 перед ними означает, что каждый стержень налагает на координаты узлов фермы условие постоянства расстояния между узлами фермы. Если в результате определения числа степеней свободы (степени изменяемости) стержневой системы оказывается, что $n > 0$, то система считается изменяемой, так как она не обладает необходимым минимумом связей. Такая система является геометрически изменяемой и не может быть использована в качестве сооружения.

Система, для которой $n = 1$, называется *механизмом* и она тоже не может быть использована в качестве сооружения. Случай, когда $n = 0$,

означает, что рассматриваемая система обладает необходимым минимумом связей и при определённых условиях может быть использована в качестве сооружения. При $n < 0$ рассматриваемая система обладает числом связей больше необходимого минимума. Естественно, что такая система может быть использована в качестве сооружения. Последнее условие $n < 0$ является необходимым, но недостаточным для точной оценки геометрической изменяемости стержневой системы, поскольку геометрическая изменяемость стержневой системы зависит не только от числа связей, но и от их расположения.

Для полной оценки изменяемости стержневой системы необходимо соблюдать следующие принципы образования геометрически неизменяемых систем:

1) присоединение к жёсткому диску системы двухстержневого звена (диады) не изменяет степени свободы стержневой системы (рис. 1.4, а);

2) два жёстких диска могут быть соединены жёстко с помощью шарнира C и стержня AB , ось которого не проходит через центр шарнира (рис. 1.4, б);

3) два жёстких диска могут быть соединены геометрически неизменяемо друг с другом тремя стержнями, оси которых не пересекаются в одной точке (рис. 1.4, в);

4) три жёстких диска (или стержня) можно соединить в геометрически неизменяемую систему с помощью трёх шарниров, не лежащих на одной прямой.

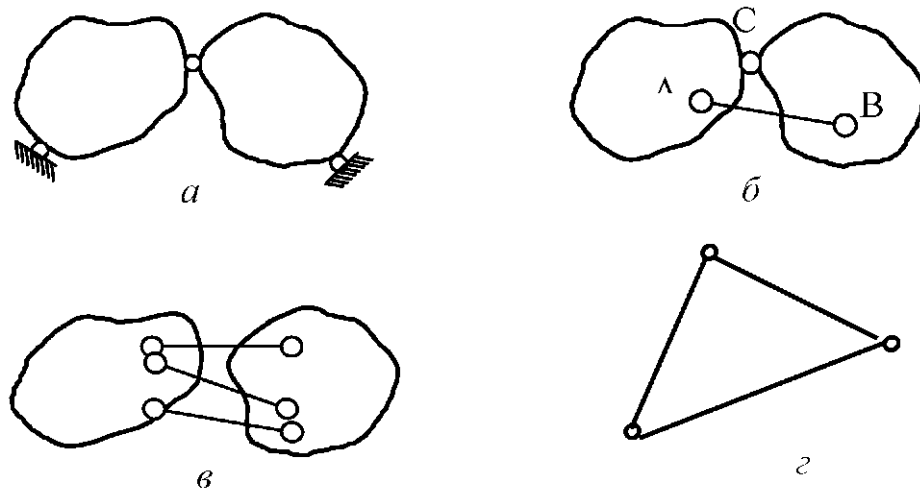


Рис. 1.4

Несоблюдение указанных принципов образования геометрически

неизменяемых систем может привести не только к появлению просто геометрически неизменяемой системы, но и к так называемой *мгновенно изменяемой системе*. Рассмотрим всегда геометрически неизменяемую двухстержневую систему ACB , нагруженную в шарнире C сосредоточенной силой F так, как это показано на рис. 1.5.

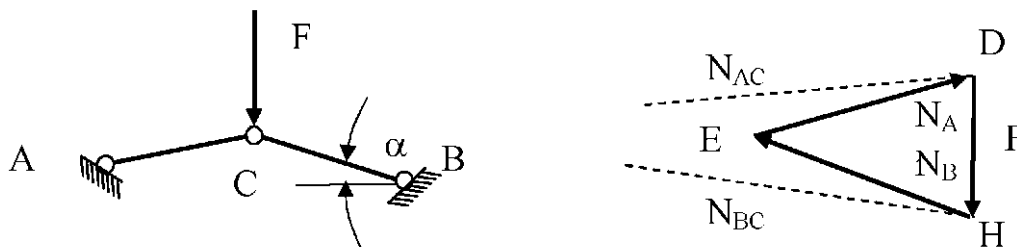


Рис. 1.5

На построенном силовом треугольнике сторона DE параллельна стержню AC и длина её в соответствии с принятым масштабом сил равна величине продольного усилия N_{AC} , а длина BC соответственно равна величине N_{BC} . При уменьшении угла α , что видно из силового треугольника, величины усилий N_{AC} и N_{BC} при неизменности значения силы F будут увеличиваться и в какое-то мгновение, когда все три шарнира окажутся на одной прямой, величины этих усилий станут равными бесконечности и стержни разрушатся. Вот почему мгновенно изменяемые системы не могут быть использованы в качестве строительных конструкций.

2. РАСЧЁТ МНОГОПРОЛЁТНЫХ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК

2.1. Расчёт многопролётных статически определимых балок на действие статической нагрузки

Многопролётные статически определимые балки (рис. 2.1) образуются из статически неопределимых (неразрезных) балок путём введения в них определённого числа шарниров.

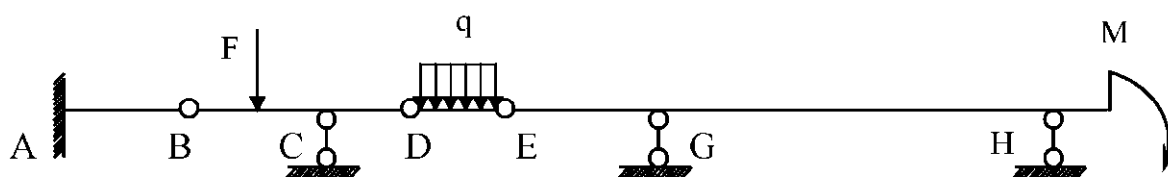


Рис. 2.1

Количество необходимых шарниров можно определить по формуле (1.1). Известно, что для жёсткого прикрепления балки к земле необходимо минимум три простые кинематические связи. Число простых кинематических связей, превышающих этот минимум, равно числу шарниров, которые надо ввести в неразрезную балку, чтобы превратить её в многопролётную статически определимую балку. При постановке этих шарниров необходимо придерживаться следующих правил: 1) если крайний пролёт неразрезной балки имеет шарнирное опирание, то в нём должно быть не более одного шарнира; 2) если крайний пролёт неразрезной балки закреплён, в нём должно быть не более двух шарниров; 3) если в одном из пролётов неразрезной балки стоит два шарнира, то должен быть обязательно один пролёт, в котором нет шарниров.

Расчёт многопролётной статически определимой балки на действие статической нагрузки удобно вести с использованием так называемой этажной схемы. При построении этажной схемы из многопролётной балки выбирают основную и дополнительные балки (рис. 2.2). При этом основной считается та балка, которая прикреплена к земле тремя связями. В многопролётной балке может быть одна или несколько основных балок. Дополнительными считаются те балки, ко-

торые прикреплены частью связей к основной балке, а частью – к земле либо всеми связями прикреплены к основной балке. В схеме, представленной на рис. 2.2, основными являются балки AB и GH , а дополнительными – все остальные.

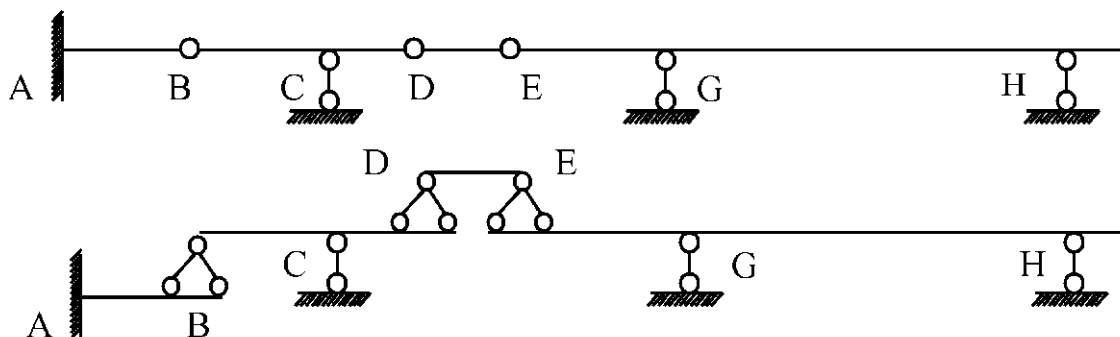


Рис. 2.2

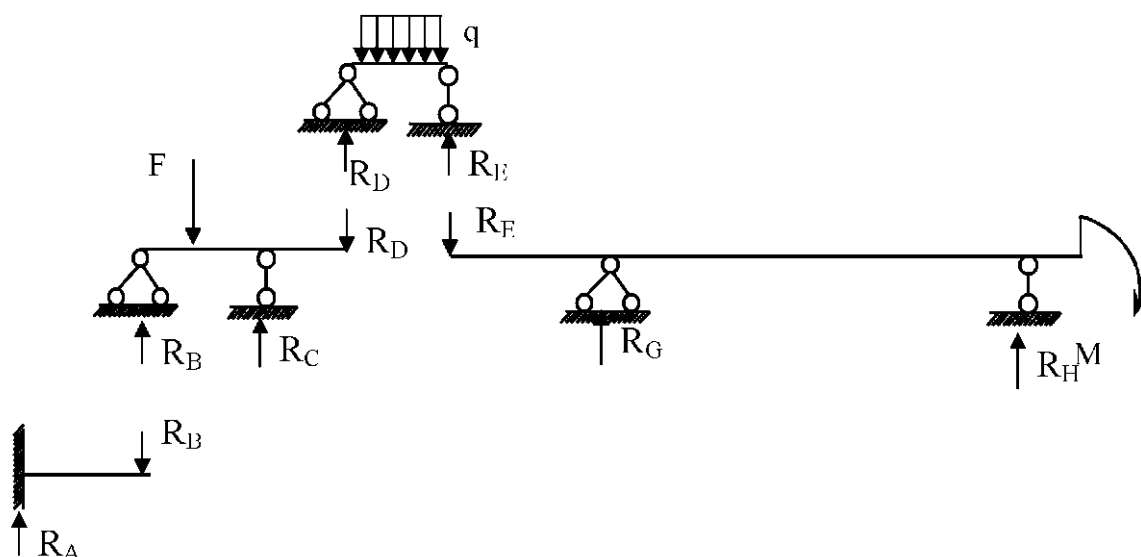


Рис. 2.3

Взаимодействие балок между собой при действии на них статической нагрузки иллюстрируется на рис. 2.3. Следует отметить, что горизонтальная простая кинематическая связь шарнира E принадлежит балке GH , что и отражено на рис. 2.3.

Из анализа рис. 2.3 очевидно, что расчёт многопролётных статически определимых балок необходимо начинать с дополнительных, так как опорные реакции таких балок являются внешней нагрузкой

для балок, на которые они опираются.

2.2. Расчёт стержневых конструкций на действие подвижной нагрузки

К подвижной нагрузке, оказывающей внешнее силовое воздействие на сооружения, относят автомобильный и железнодорожный транспорт, мостовые краны и т.д.

Особенностью расчёта сооружений на подвижную нагрузку является то, что для оценки напряжённо-деформированного состояния во всех поперечных сечениях по длине сооружения необходимо фиксировать бесконечно большое число раз подвижную нагрузку, превращая её в статическую. Такой расчёт, естественно, нерационален. Поэтому при расчёте сооружений на подвижную нагрузку не строят эпюры внутренних усилий, описывающих их изменение по длине сооружения.

Для решения этой задачи в строительной механике разработан аппарат линий влияния. *Линией влияния называется график изменения какого-либо параметра (момент, сила, напряжение, перемещение и т.д.) в зависимости от положения безразмерной силы $\bar{F}=1$.* Таким образом, линия влияния (л.в.) описывает изменение изучаемого параметра в каком-то конкретном сечении. *Физический смысл ординаты л.в. заключается в том, что такая ордината описывает величину того параметра л. в., для которого она построена* (рис. 2.4).

2.3. Линии влияния опорных реакций

Известно, что любой расчёт конструкции начинают с определения опорных реакций. Не является исключением и расчёт, связанный с построением линий влияния.

Рассмотрим построение линий влияния опорных реакций для двухопорной балки. Поместим на неё силу $\bar{F}=1$ движение которой по балке будем описывать изменением координаты x (см. рис. 2.4). При фиксированном положении силы $\bar{F}=1$ составим уравнение моментов относительно шарнира B , как и при обычном расчёте:

$$\sum M_B = R_A \ell - F(\ell - x) = 0 \Rightarrow R_A = F \frac{\ell - x}{\ell}. \quad (2.1)$$

Из анализа выражения (2.1) очевидно, что оно описывает прямую линию. Тогда из (2.1) при $x = 0$ и с учётом найдём, что $R_A = 1$, а при $x = \ell$ $R_A = 0$. Составляя аналогичное уравнение моментов относительно шарнира A , можно построить линию влияния опорной реакции R_B . В строительной механике принято положительные ординаты линии влияния откладывать вверх от базовой линии.

Эти же линии влияния можно построить, вообще не осуществляя аналитических выводов. Ясно, что в тот момент времени, когда подвижная сила $\bar{F}=1$ окажется над опорой A , \bar{F} будет восприниматься только опорой A , опорная реакция которой будет равна 1, тогда как опорная реакция на опоре B в этот же момент времени будет равна 0. При этом известно, что если между двумя шарнирами нет нагрузки, то любое внутреннее усилие на таком участке стержня будет изменяться по закону прямой линии.

Если рассматривать балку с двумя консолями (рис. 2.5), то уравнения для реакции будут такими же, что и для балки без консолей.

Учитывая, что зависимость между опорными реакциями R_A и R_B и координатой x является функцией первой степени (см. выражение (2.1), то, продолжая прямые линии на консоли, получают линии влияния опорных реакций R_A и R_B . Форма линий влияния R_A и R_B и значения их ординат показаны на рис. 2.5.

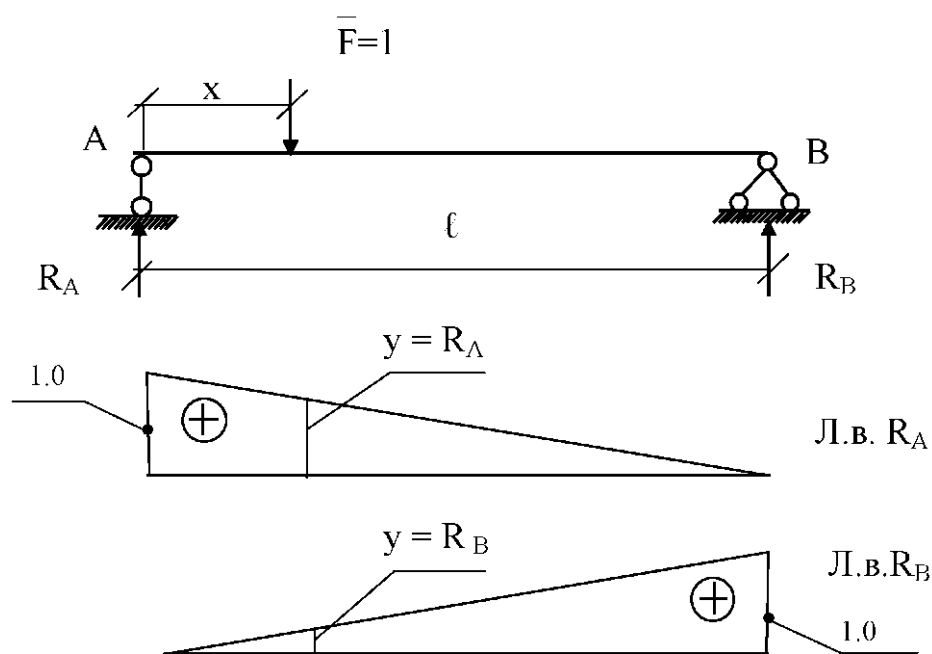


Рис. 2.4

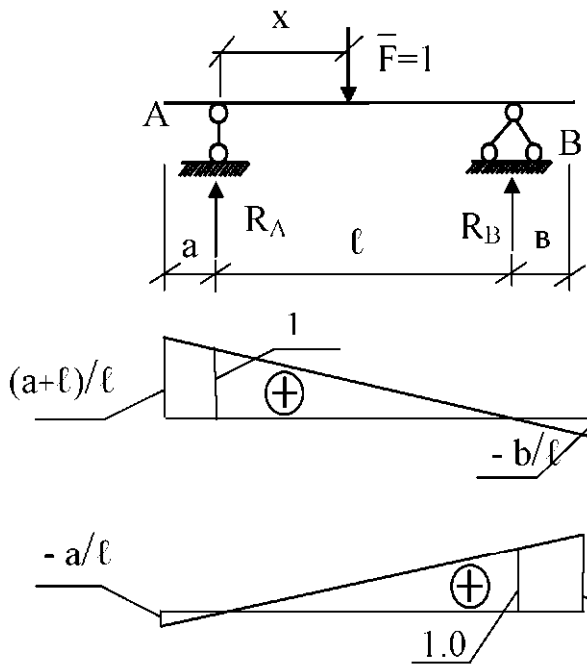


Рис. 2.5

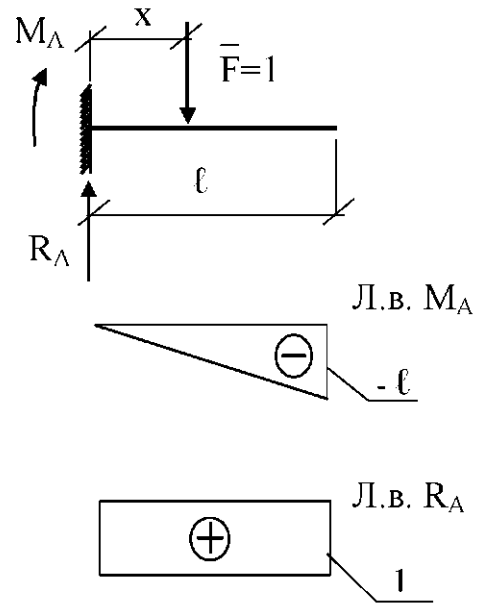


Рис. 2.6

Построим линии влияния опорных реакций защемлённой балки, изображённой на рис. 2.6. В защемлении возникают две опорные реакции: M_A и R_A . Из условия равновесия $\sum M_A = 0$ получаем $M_A + F \cdot x = 0 \Rightarrow M_A = -x$. Тогда при $x = 0$ $M_A = -l$. Из уравнения проекций $\sum Y = -F + R_A = 0 \Rightarrow R_A = 1$.

На рис. 2.6 показаны формы и значения ординат линий влияния опорных реакций M_A и R_A для консольной балки.

2.4. Линии влияния внутренних усилий

При построении линий влияний внутренних усилий рассматривают два положения подвижной единичной силы – слева и справа от рассматриваемого сечения. При этом рассматривают равновесие той части балки, на которой в данный момент отсутствует подвижная сила. При построении линий влияния внутренних усилий считаем линии влияния опорных реакций известными. Пусть, например, требуется построить линию влияния изгибающего момента M , расположенного в сечении k на расстоянии a от левой опоры балки AB , изображённой на рис. 2.7.

Пусть подвижная сила расположена справа от рассматриваемого сечения k . Тогда, рассматривая равновесие левой части балки, запишем выражение для определения момента в сечении k .

$$M_k = R_A \cdot a \quad - \text{ правая прямая.} \quad (2.2)$$

Выражение (2.2) говорит о том, что при положении подвижной силы $\bar{F} = 1$ справа от рассматриваемого сечения k изгибающий момент M_k в этом сечении изменяется точно так же, как и опорная реакция R_A . Но ординаты л.в. R_A при этом изменяются на постоянную величину a .

При расположении силы $\bar{F} = 1$ слева от сечения k из уравнения равновесия правой части балки AB найдём выражение для M_k :

$$M_k = R_B (\ell - a) \quad - \text{ левая прямая.} \quad (2.3)$$

Выражение (2.3) говорит о том, что при положении подвижной силы $\bar{F} = 1$ слева от рассматриваемого сечения k изгибающий момент M_k изменяется точно так же, как и опорная реакция R_B , только ординаты л.в. R_B изменены на постоянную величину $(\ell - a)$. Необходимо знать, что левая и правая прямые должны *обязательно* пересекаться под сечением. При этом правая прямая действительна справа до сечения, а левая – слева. Физический смысл любой из ординат л.в. M_k заключается в том, что она равна величине M_k именно в сечении k при расположении подвижной единичной силы над этой ординатой. Размерность ординат л.в. M_k имеет размерность длины.

При построении линии влияния Q_k в том же сечении k рассматриваемой балки AB (рис. 2.8) так же, как и в предыдущем случае, подвижную силу \bar{F} располагают поочерёдно справа и слева от рассматриваемого сечения k .

При расположении подвижной силы $\bar{F} = 1$ правее сечения k поперечная сила может быть найдена из выражения, полученного из уравнения равновесия левой части балки:

$$\sum Y = R_A - Q_k = 0 \Rightarrow Q_k = R_A \quad - \text{ правая прямая.} \quad (2.4)$$

При расположении подвижной силы $\bar{F} = 1$ левее сечения k поперечная сила может быть найдена из выражения, полученного из уравне-

ния равновесия правой части балки:

$$\sum Y = R_B + Q_k = 0 \Rightarrow Q_k = -R_B \quad \text{— левая прямая.} \quad (2.5)$$

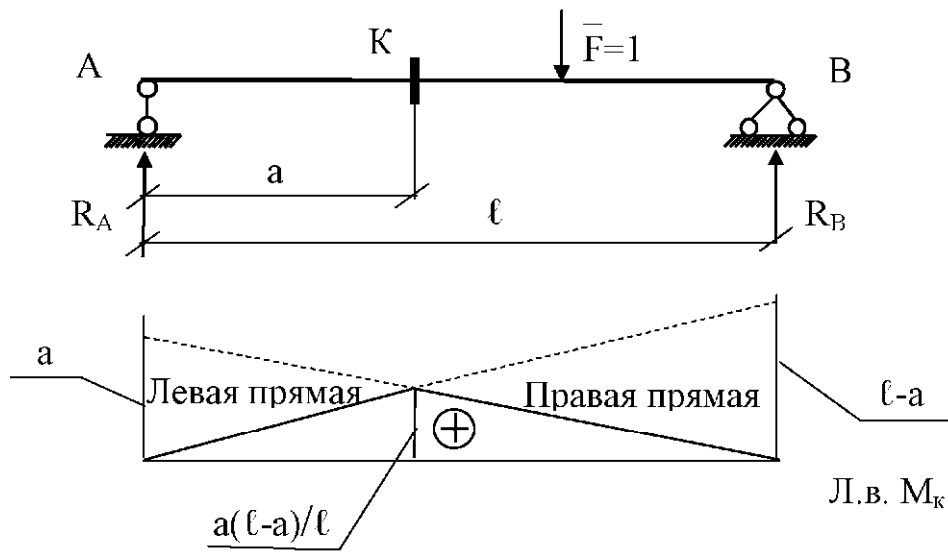


Рис. 2.7

Из анализа выражений (2.4) и (2.5) очевидно, что поперечная сила Q_k при расположении подвижной силы справа и слева от сечения k будет изменяться как опорные реакции R_A и R_B соответственно.

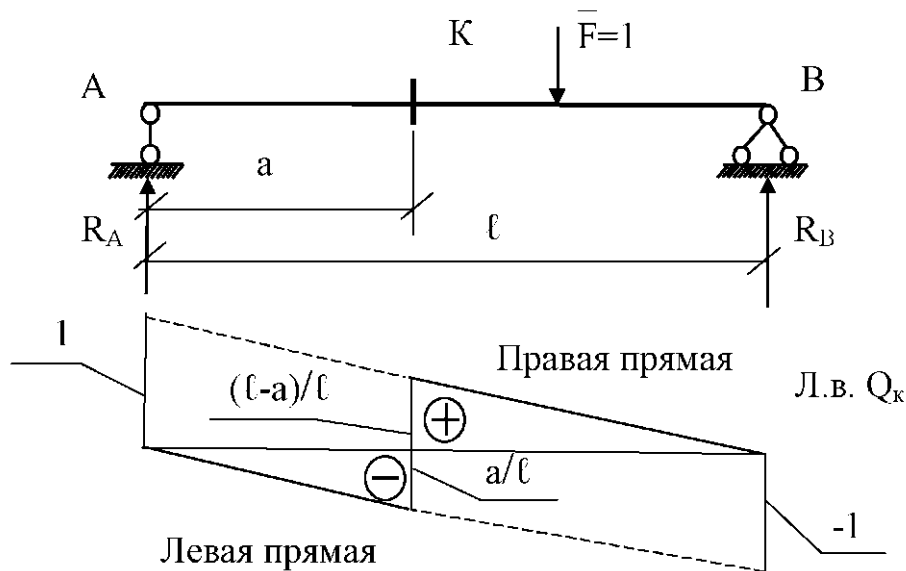


Рис. 2.8

При этом левая и правая прямые оказываются параллельными, а

«скачок» на л.в., расположенный под сечением, равен единице. Ординаты л.в. Q не имеют размерности.

На рис. 2.9 показаны линии влияния внутренних усилий для сечений, расположенных между опорными связями двухконсольной балки.

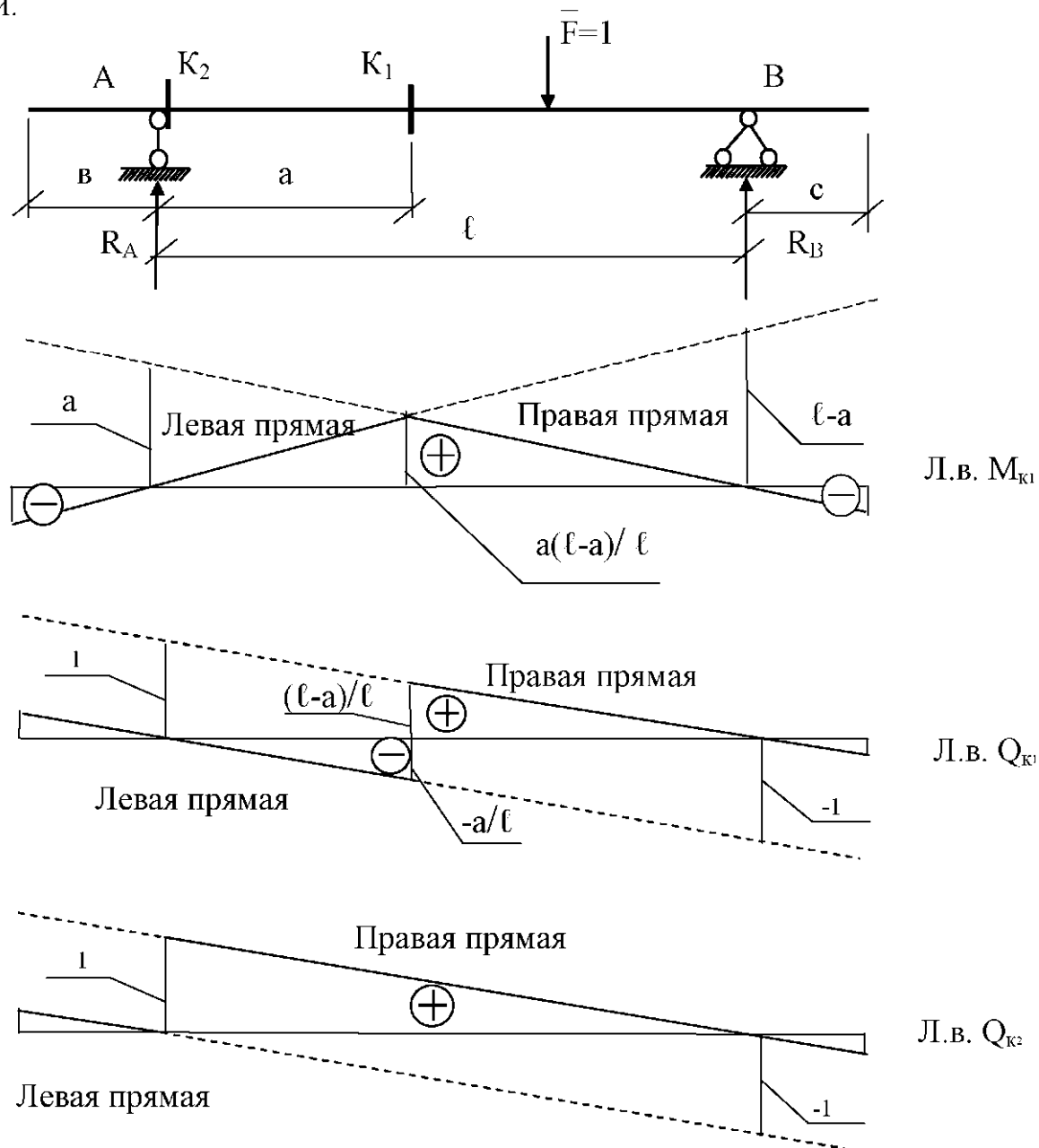


Рис. 2.9

При построении линий влияния внутренних усилий для сечений, расположенных в консольных балках так же, как и в предыдущих случаях, рассматривают положение подвижной единичной силы слева и справа от сечения. Однако при любом положении силы \bar{F} рассмат-

ривается равновесие незакреплённой части балки. При этом положение подвижной силы \bar{F} «привязывают» не к опоре, как это имеет место при построении линий влияния усилий для двухопорной балки, а к сечению (рис. 2.10).

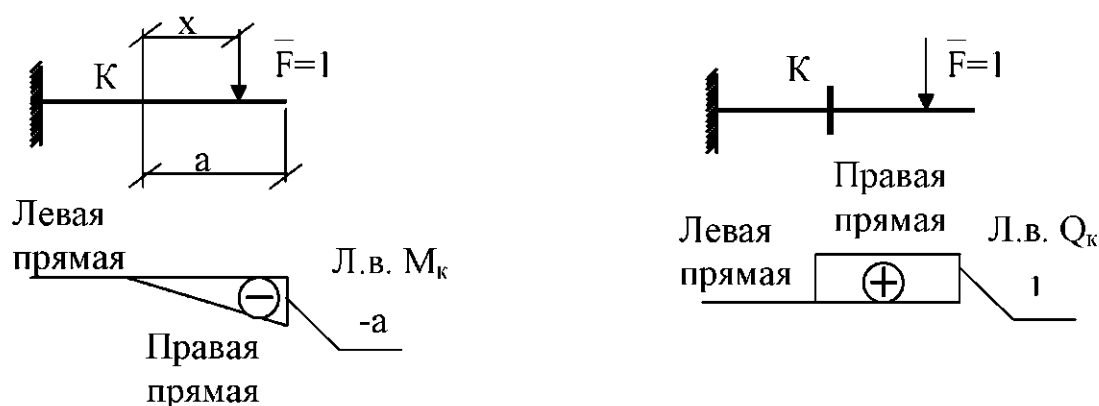


Рис. 2.10

Л.в. M_K

- груз справа. Рассматривая равновесие правой части балки, найдём $M_K = -\bar{F} \cdot x$ – правая прямая. Тогда при $x = 0$ $M_K = 0$, а при $x = a$ $M_K = -a$;

- груз слева. Рассматривая равновесие правой части балки, найдём $M_K = 0$.

Л.в. Q_K

- груз справа. Рассматривая равновесие правой части балки, найдём $Q_K = 1$ – правая прямая;

- груз слева. Рассматривая равновесие правой части балки, найдём $Q_K = 0$ – левая прямая.

2.5. Линии влияния усилий в сечениях многопролётных статически определимых балок

Отличительной особенностью линий влияния опорных реакций и усилий в многопролётных статически определимых балках является то, что их построение начинают с той балки, в которой требуется построить линию влияния. Это делают так, как изложено ранее. После этого исследуют влияние на рассматриваемое усилие различного положения подвижной единичной силы на других балках. На рис. 2.11 показан числовой пример построения различных линий влияния для многопролётной статически определимой балки.

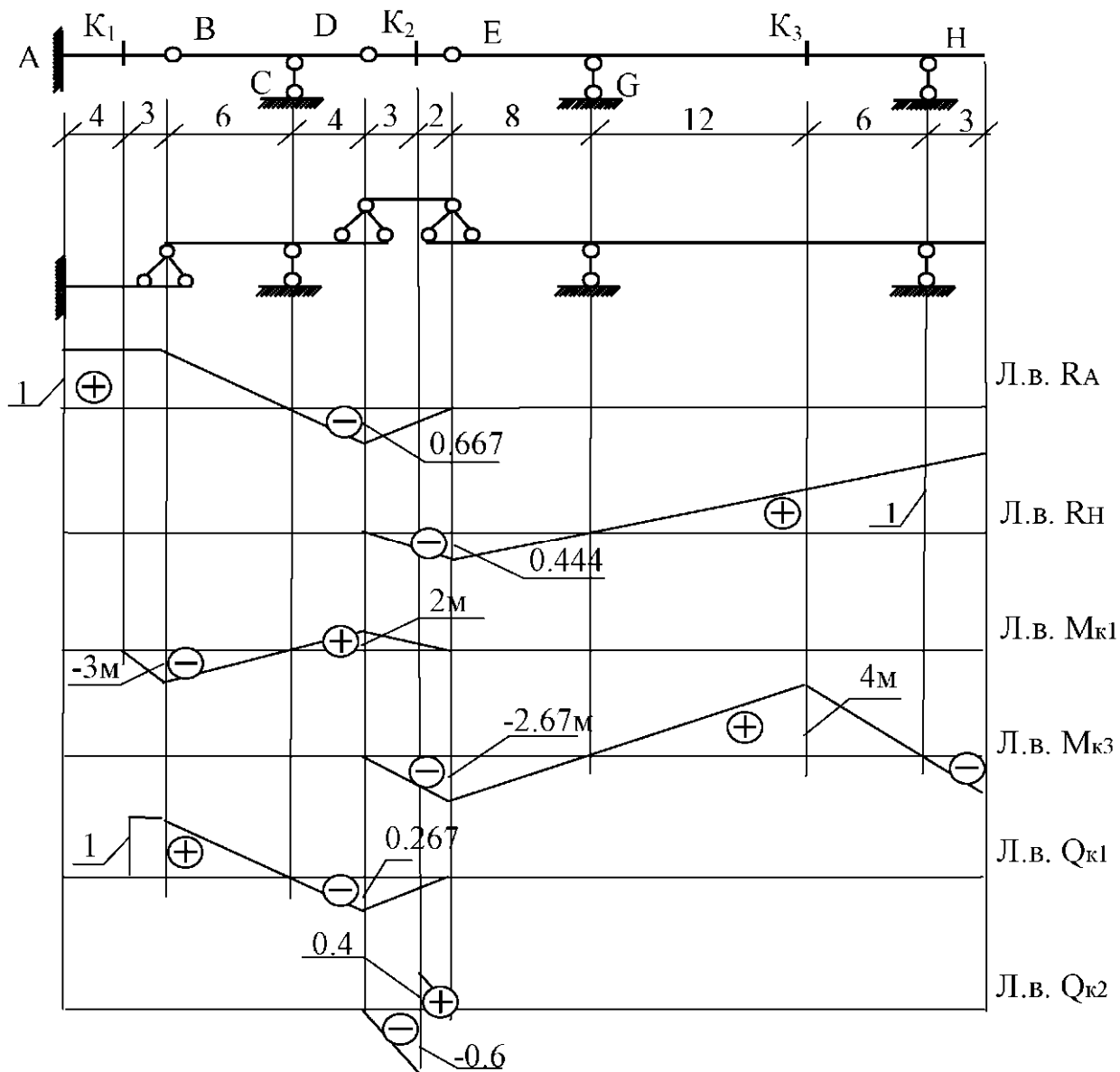


Рис. 2.11

2.6. Определение усилий с помощью линий влияния

Процесс определения усилий с помощью линий влияния называется *загрузением линий влияния*. Загрузка линий влияния осуществляется в соответствии с физическим смыслом ординаты линии влияния. Рассмотрим характерные виды внешних нагрузок. Совершенно очевидно, что если любая ордината л.в. представляет собой величину искомого усилия при положении подвижной (сосредоточенной) силы \bar{F} над этой ординатой, то действительное значение этого усилия (рис. 2.12) будет равно произведению заданного сосредоточенного значения силы \bar{F} на значение ординаты, находящейся под этой си-

лой.

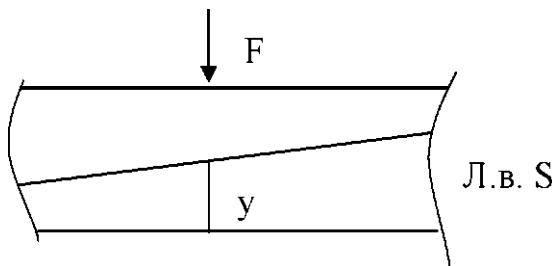
Произведение (2.6) считается положительным, если вектор сосредоточенной силы направлен вниз, а ордината л.в. положительна или если вектор сосредоточенной силы направлен вверх, а ордината л.в. отрицательна.

Если над линией влияния находится система сосредоточенных сил, то в соответствии с принципом суперпозиции усилие S будет равно сумме произведений сил на соответствующие ординаты.

Определение усилия с помощью линии влияния от действия на балку равномерно распределённой нагрузки интенсивностью q иллюстрируется на рис. 2.13. Элементарная сосредоточенная сила, выделенная из заданной, равна $dF = q \cdot dl$. Тогда элементарное усилие dS_q от загрузки л.в. сосредоточенной силой dF будет равно

$$dS_q = dF \cdot y = q \cdot dl \cdot y.$$

$$\text{Полное усилие } S_q = \int_a^b q \cdot y \cdot dl.$$



$$S_F = F \cdot y;$$

$$S_F = \sum_{i=1}^n F_i \cdot y_i. \quad (2.6)$$

Рис. 2.12

После интегрирования получается, что усилие S_q от загрузки л.в. равномерно распределённой нагрузкой интенсивностью q или от системы равномерно распределённых нагрузок различной интенсивности может быть определено: $S_q = q \cdot \omega$;

$$S_q = \sum_{i=1}^n q_i \cdot \omega_i. \quad (2.7)$$

Произведение $q \cdot \omega$ считается положительным, если вектор интенсивности распределённой нагрузки направлен вниз, а площадь л.в. ω является положительной. При этом следует помнить, что в формулах (2.7) участвует вся площадь л.в., находящаяся в пределах действия распределённой нагрузки.

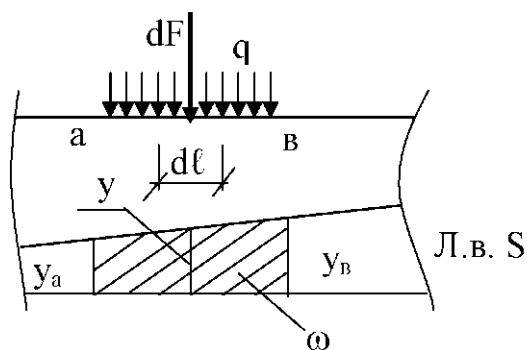


Рис. 2.13

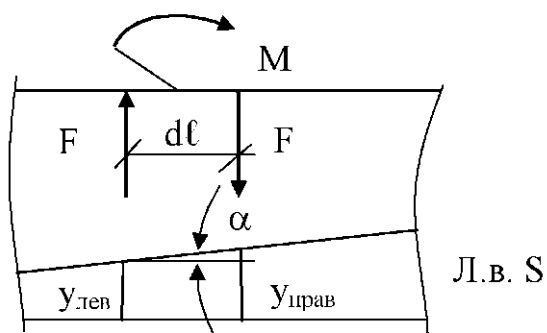


Рис. 2.14

При загрузении л.в. сосредоточенным моментом M (рис. 2.14) удобно представить этот момент в виде пары одинаковых сил $F_{лев} = F$ и $F_{прав} = F$, векторы которых направлены в противоположные стороны и расположены на расстоянии $d\ell$ друг от друга. Тогда $M = F \cdot d\ell \Rightarrow F = \frac{M}{d\ell}$. В этом случае усилие S_M в соответствии с (2.6) можно найти из выражения $S_M = -F \cdot y_{лев} + F \cdot y_{прав}$.

После преобразований получим
$$S_M = M \frac{y_{прав} - y_{лев}}{d\ell}.$$

Так как выражение $\frac{y_{прав} - y_{лев}}{d\ell}$ представляет собой тангенс угла наклона л.в. к базовой линии, можем записать выражения (2.8), первое из которых даёт возможность определить по л.в. усилие S_M от действия одного сосредоточенного момента M , а второе – от действия системы таких моментов в количестве n .

$$S_M = M \cdot \operatorname{tg} \alpha; \quad S_M = \sum_{i=1}^n M_i \cdot \operatorname{tg} \alpha_i. \quad (2.8)$$

В (2.8) произведения считаются положительными, если направляющий вектор сосредоточенного момента M пытается «прижать» л.в. к базовой линии.

2.7. Кинематический способ построения линий влияния

Кинематический способ построения линий влияния основан на принципе возможных перемещений (принцип Лагранжа). Если система твёрдых тел, связанная между собой идеальными связями,

находится в равновесии, то сумма работ всех заданных сил на любых сколь угодно малых возможных перемещениях равна нулю.

Идеальными считаются такие связи, в которых отсутствуют трение, обмятия узлов и другие аналогичные явления. Возможными считаются такие перемещения, какие допускают идеальные связи.

В соответствии с этим методом каждая линия влияния представляет собой эпюру перемещений. Рассмотрим построение линии влияния опорной реакции (рис. 2.15) для однопролётной балки AB . Поместив подвижную единичную силу \bar{F} в произвольную точку, отбрасывают опорную связь в точке A .

Под действием силы балка AB , ставшая механизмом, повернётся вокруг опоры B на угол α , а перемещение точки под силой \bar{F} составит величину y .

В соответствии с принципом Лагранжа можно записать следующее выражение:

$$\bar{F} \cdot y - R_A \cdot \delta = 0. \quad (2.9)$$

Работа силы взята со знаком минус, так как сила R_A противоположна направлению перемещения точки A . Учитывая, что $\bar{F} = 1$, найдём $R_A = 1 \cdot y / \delta$.

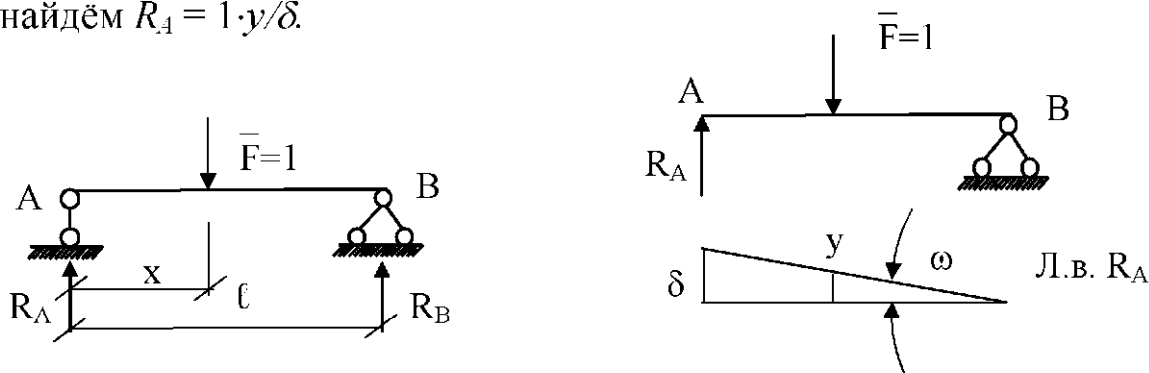


Рис. 2.15

Если ординаты возможных перемещений выразить как функцию угловой скорости ω возможного вращения вокруг шарнира B , то выражение величины опорной реакции получит такой же вид, как и выражение (2.1), т. е. $R_A = \frac{\ell - x}{\ell}$. Исходя из этого, когда подвижная сила \bar{F} будет находиться над опорой A , станет соблюдаться равенство $y = \delta$.

При построении линии влияния момента для превращения балки AB в механизм (рис. 2.16) в сечении, для которого требуется постро-

ить эту линию влияния, вводят условный шарнир. Высвободившееся усилие обозначают символом M .

Введение шарнира даёт балке возможность провиснуть, и эпюра возможных перемещений такой балки охарактеризуется двумя прямыми, взаимно пересекающимися на вертикали под шарниром. Восстановление равновесия может быть достигнуто приложением в рассматриваемом сечении двух равных взаимно противоположных моментов M .

Выражение возможной работы в этом случае примет следующий вид:

$$-M \cdot \alpha - M \cdot \beta + F \cdot y = 0. \quad (2.10)$$

Учитывая то, что $\bar{F} = 1$, из (2.10) найдём $M = \frac{1 \cdot y}{\alpha + \beta}$.

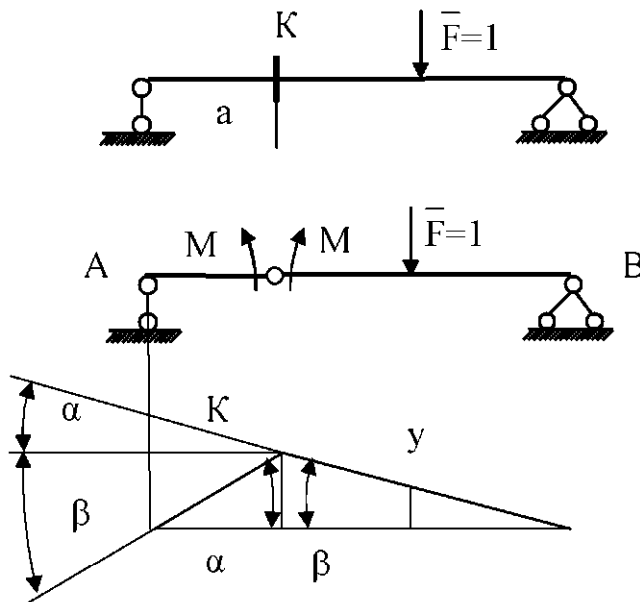


Рис. 2.16

Величины угловых смещений α и β по их малости могут быть заменены тангенсами углов, а именно $\alpha + \beta = k/a$, тогда последнее выражение примет вид

$$M = \frac{y}{\alpha + \beta} = \frac{y}{k} \cdot a = \frac{\ell - x}{\ell}. \quad (2.11)$$

По выражению (2.11) можно найти ординаты линии влияния M . При построении линии влияния поперечной силы Q для превращения балки AB в механизм (рис. 2.17) в сечении, в котором требуется построить эту линию влияния, вводят условное устройство, допускаю-

шее только взаимный сдвиг звеньев балки между собой.

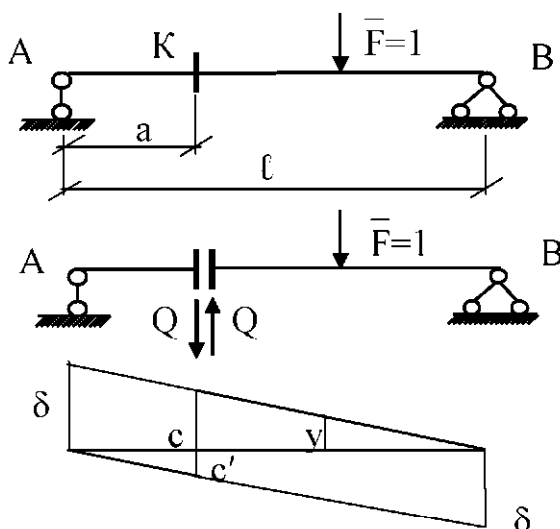


Рис. 2.17

Выражение возможной работы в этом случае примет вид

$$-Q \cdot c - Q \cdot c' + F \cdot y = 0.$$

Откуда с учётом того, что $c + c' = \delta$, находят

$$Q = \frac{\delta}{\delta} = \frac{\ell - \delta}{\ell}. \quad (2.12)$$

2.8. Определение расчётного положения подвижной системы нагрузок

Расчётное положение подвижной системы сосредоточенных сил над линией влияния усилия S соответствует \max или \min искомой величины этого усилия. В общем случае искомое усилие S может иметь несколько экстремальных (\max или \min) значений.

Искомое усилие $S=f(x)$ функционально зависит от положения системы сосредоточенных сил на балке. Для определения его экстремального значения необходимо, чтобы первая производная от усилия S по координате x соответствовала условию $dS/dx = 0$. Исходя из этого, можно найти такое положение подвижной системы сосредоточенных сил, при котором $S=f(x)$ достигает экстремального значения.

Рассмотрим определение экстремального значения усилия S при загрузении треугольных линий влияния.

Для случая, когда вершина треугольника линии влияния находится в начале или в конце линии влияния (рис. 2.18), экстремальным положение подвижной системы сосредоточенных нагрузок будет тогда, когда вся наибольшая нагрузка находится над вершиной линии влияния или вся система нагрузок находится над всей линией влияния, начиная с её вершины.

То или иное расположение нагрузки зависит от количественных

значений каждой из нагрузок, составляющих данную подвижную систему. В случае, когда подвижная нагрузка представляет собой равномерно распределённую нагрузку, экстремальным будет такое (рис. 2.19) расположение этой нагрузки, когда ординаты этой линии влияния, находящиеся в начале и конце действия распределённой нагрузки y_H и y_K , будут равны между собой.

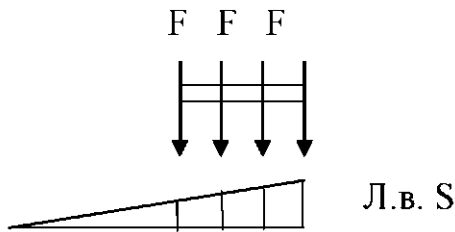


Рис. 2.18

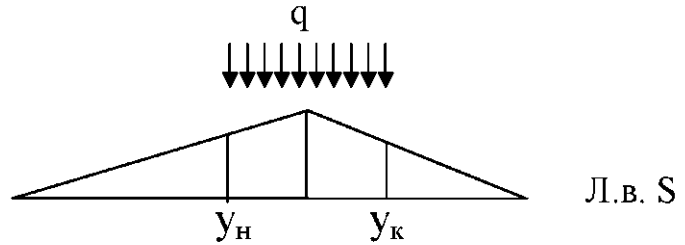


Рис. 2.19

При загрузении треугольной линии влияния системой сосредоточенных подвижных сил (рис. 2.20), когда вершина линии влияния находится на расстоянии a от её начала, любое усилие можно найти исходя из выражения

$$S = \sum_{i=1}^n F_i \cdot y_i \quad (2.13)$$

Если предположить, что вся система нагрузок сдвинулась вправо или влево, значение усилия получит приращение dS . В правой части равенства (2.13) ординаты изменятся на величину $dx \cdot \operatorname{tg} \alpha_k$. Тогда

$$dS = \sum_{i=1}^n F_i \operatorname{tg} \alpha_i dx \quad (2.14)$$

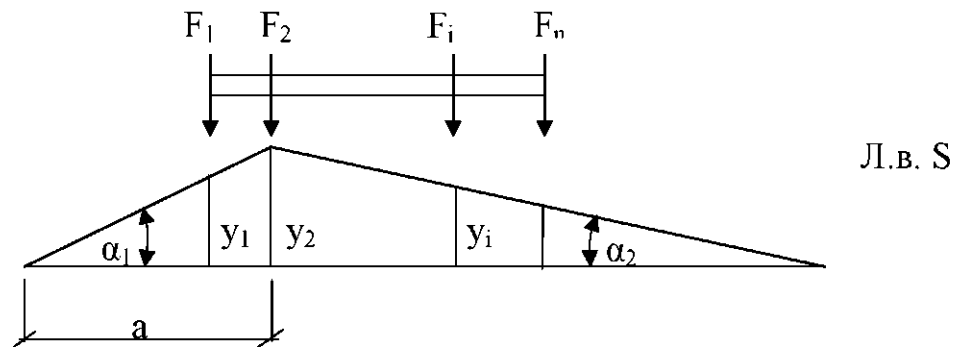


Рис. 2.20

Сумма, стоящая в правой части равенства (2.14), представляет со-

бой значение первой производной от величины S . Известно, что функция достигает своего экстремального значения, когда её первая производная равна нулю. В соответствии с этим

$$\frac{dS}{dx} = \sum_{i=1}^n F_i \cdot \operatorname{tg} \alpha_i = 0. \quad (2.15)$$

Но так как углы наклона $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_n$ линии влияния остаются без изменения, выражение (2.15) может обратиться в ноль при условии, если изменяются величины некоторых сил F . Последнее условие возможно только при переходе какой-либо силы, называемой $F_{кр}$, через вершину линии влияния, что позволило получить неравенства (2.16), определяющие экстремальное положение над треугольной линией влияния системы сосредоточенных подвижных нагрузок:

$$\begin{cases} \frac{\sum F_{лев} + F_{кр}}{a} \geq \frac{\sum F_{прав}}{b}, \\ \frac{\sum F_{лев}}{a} \leq \frac{\sum F_{прав} + F_{кр}}{b}. \end{cases} \quad (2.16)$$

В практике расчёта конструкций транспортных сооружений часто используют так называемую эквивалентную нагрузку. *Эквивалентной называется такая равномерно распределённая нагрузка интенсивностью $q_э$, которая создаёт в рассматриваемом сечении такое же усилие, какое вызывает система из сосредоточенных нагрузок, установленная в экстремальном положении.*

При загрузении линии влияния любого усилия системой сосредоточенных нагрузок усилие может быть найдено по выражению (2.6)

$S_F = \sum_{i=1}^n F_i \cdot y_i$. По данному определению эквивалентной нагрузки уси-

лие в соответствии с (2.7) может быть найдено по выражению $S = q_э \cdot \omega$. Приравнявая оба значения S , найдём

$$q_э = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot y_i}{\omega}. \quad (2.17)$$

Очевидно, что величина эквивалентной нагрузки зависит от вида и очертания линии влияния. Однако для подобных между собой линий

влияния, которые могут быть построены одна из другой изменением всех ординат в одном и том же соотношении, эквивалентные нагрузки имеют одинаковую интенсивность.

2.9. Узловая передача нагрузки

В конструкциях транспортных сооружений внешняя, в частности подвижная, нагрузка на несущие элементы передаётся через вспомогательные элементы. Имеет место так называемая узловая передача нагрузки. В этом случае обобщение закона о линиях влияния требует, чтобы последние в характере своего изменения удовлетворяли, с одной стороны, основному свойству линии влияния, по которому (рис. 2.21) усилие определяют по формуле $S_{F'} = F \cdot y$; с другой стороны, чтобы эта величина удовлетворяла условию передаточного действия нагрузки, по которому $S = F_n y_n + F_{n+1} y_{n+1}$.

По правилу рычага нагрузку F раскладывают на нагрузки F_n и F_{n+1} , являющиеся узловыми нагрузками

$$F_n = F \frac{d-x}{d}; F_{n+1} = F \frac{x}{d}. \quad (2.18)$$

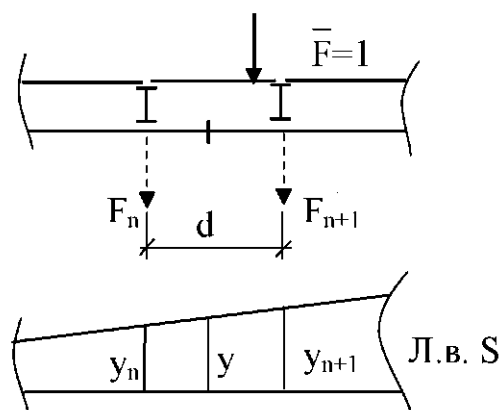


Рис. 2.21

Отсюда следует, что при узловой передаче нагрузки линия влияния изменяется между узлами по закону прямой линии. На рис. 2.22 показаны примеры построения линий влияния при узловой передаче нагрузки.

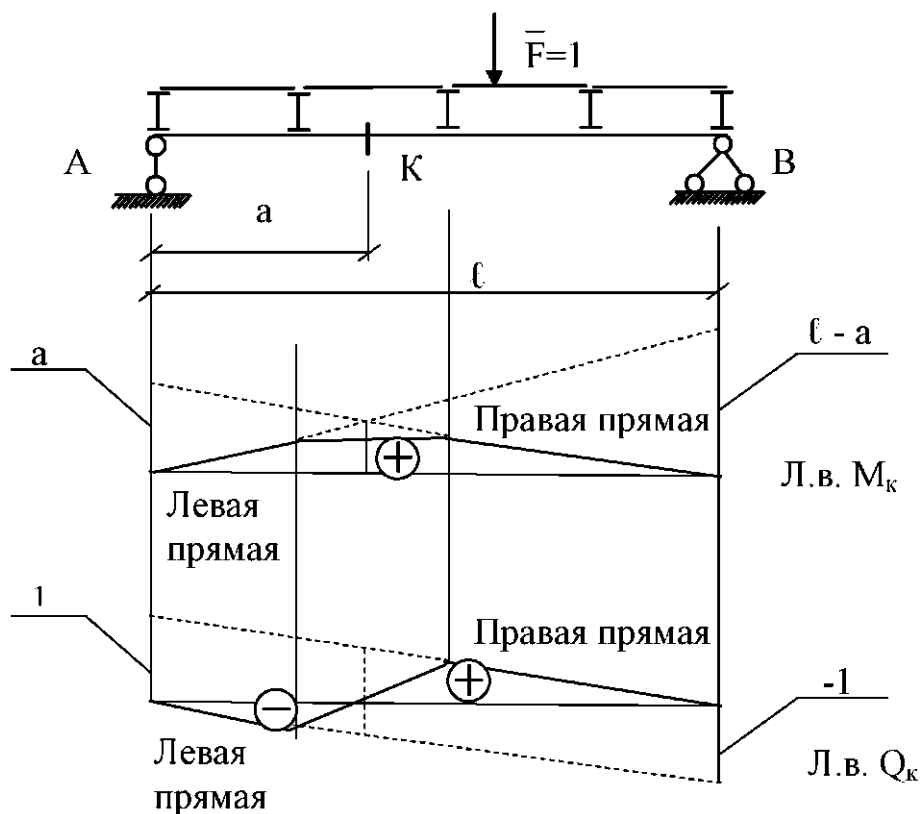


Рис. 2.22

2.10. Определение усилий в матричной форме

При решении многих задач строительной механики удобным оказывается использование матричного аппарата линейной алгебры.

На основании принципа суперпозиций запишем аналитические выражения для определения любых внутренних усилий S в различных сечениях стержня, подверженного действию системы сосредоточенных сил.

$$\begin{cases} S_1 = s_{11} \cdot F_1 + \dots + s_{1i} \cdot F_i + \dots + s_{1k} \cdot F_k; \\ \dots \\ S_i = s_{i1} \cdot F_1 + \dots + s_{ii} \cdot F_i + \dots + s_{ik} \cdot F_k; \\ \dots \\ S_n = s_{n1} \cdot F_1 + \dots + s_{ni} \cdot F_i + \dots + s_{nk} \cdot F_k. \end{cases} \quad (2.19)$$

В выражении (2.19) $s_{ij} (i = \overline{1, n}; j = \overline{1, k})$ – усилие в i -м сечении от действия силы $F_j = 1$. В матричной форме эта система уравнений может быть записана в виде

$$\vec{S} = L_s \cdot \vec{F}. \quad (2.20)$$

В выражении (2.20) вектор искомых усилий $\vec{S} = [S_1 \dots S_i \dots S_n]$; $\vec{F} = [F_1 \dots F_j \dots F_k]^T$ – транспонированный вектор внешних нагрузок.

$$L_s = \begin{vmatrix} s_{11} & \cdot & s_{1i} & \cdot & s_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{i1} & \cdot & s_{ii} & \cdot & s_{ik} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n1} & \cdot & s_{ni} & \cdot & s_{nk} \end{vmatrix} - \text{ матрица влияния усилия.} \quad (2.21)$$

Из выражения (2.21) видно, что элементами матрицы влияния являются ординаты линий влияния того усилия, матрица влияния которого строится.

При определении усилий в матричной форме любая задача решается шире, чем это имеет место при определении усилия с помощью линии влияния. В этом случае охватывается сразу несколько сечений рассматриваемой конструкции. Размер матрицы влияния L_s зависит от числа участков, на которые разбивают рассчитываемую конструкцию.

Рассмотрим, например, построение матрицы влияния L_m моментов. Для этого возьмём двухпорную шарнирно опёртую с обеих сторон балку (рис. 2.23), разделённую на пять (n) равных по длине участков. Длина каждого участка $d = \ell/n$. Если в точках 1, 2, 3, 4 приложены какие-то сосредоточенные силы F , то изгибающий момент M в каждом из этих сечений определится в соответствии с (2.19) из выражений (2.21):

$$\begin{cases} M_1 = F_1 \cdot m_{11} + F_2 \cdot m_{12} + F_3 \cdot m_{13} + F_4 \cdot m_{14}; \\ M_2 = F_1 \cdot m_{21} + F_2 \cdot m_{22} + F_3 \cdot m_{23} + F_4 \cdot m_{24}; \\ M_3 = F_1 \cdot m_{31} + F_2 \cdot m_{32} + F_3 \cdot m_{33} + F_4 \cdot m_{34}; \\ M_4 = F_1 \cdot m_{41} + F_2 \cdot m_{42} + F_3 \cdot m_{43} + F_4 \cdot m_{44}. \end{cases} \quad (2.22)$$

В матричной форме выражения (2.22) примут вид $\vec{M} = L_m \cdot \vec{F}$, где \vec{M} – вектор-столбец искомых моментов; \vec{F} – вектор-столбец внешних нагрузок.

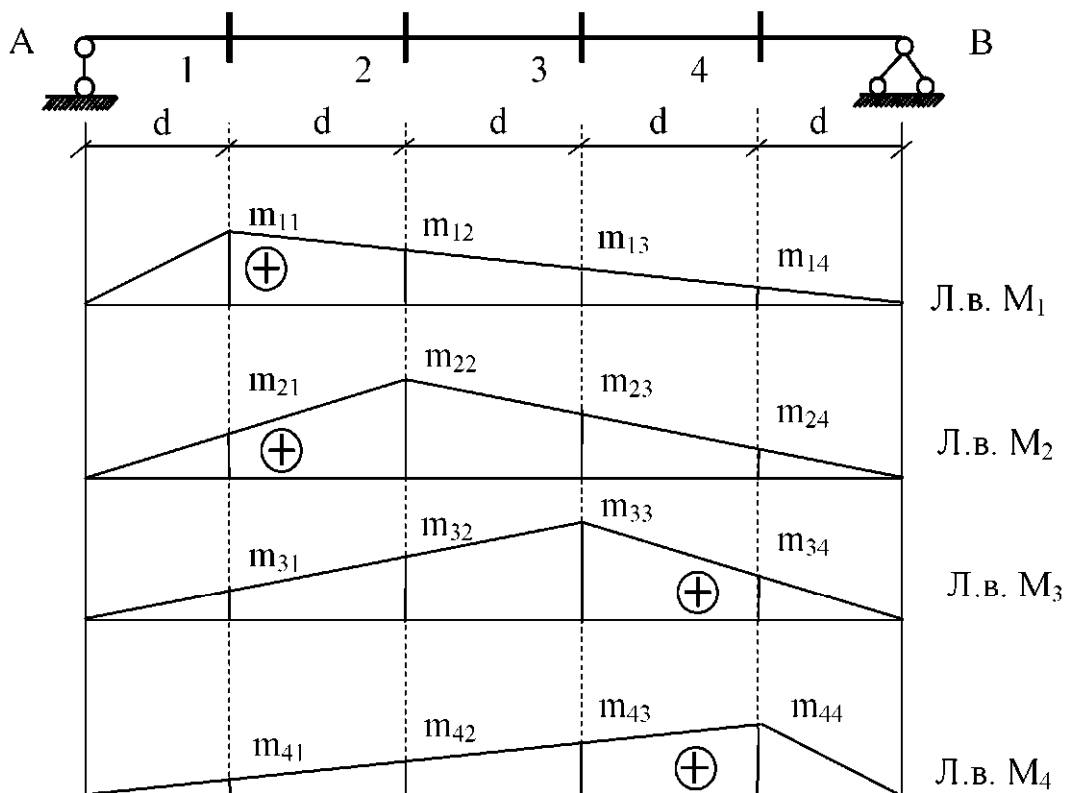


Рис. 2.23

Из анализа рис. 2.23 и выражений (2.22) ясно, что элементами матрицы влияния L_m являются ординаты линий влияния моментов M для каждого сечения соответственно. Для данного примера эта матрица примет следующий вид:

$$L_m = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{vmatrix} \quad - \text{ матрица влияния моментов.}$$

$$L_m = \begin{vmatrix} \frac{4d}{n} & \frac{3d}{n} & \frac{2d}{n} & \frac{1d}{n} \\ \frac{3d}{n} & \frac{6d}{n} & \frac{4d}{n} & \frac{2d}{n} \\ \frac{2d}{n} & \frac{4d}{n} & \frac{6d}{n} & \frac{3d}{n} \\ \frac{1d}{n} & \frac{2d}{n} & \frac{3d}{n} & \frac{4d}{n} \end{vmatrix} = \frac{d}{n} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}. \quad (2.23)$$

Из анализа структуры матрицы влияния L_m наблюдается закономерность в определении элементов матрицы влияния моментов, что позволяет вычислить любой элемент матрицы по формулам: при $i < j$ $m_{ij} = (d/n) \cdot (n - j)$; при $i > j$ $m_{ij} = (d/n) \cdot (n - i)$.

Рассмотрим пример построения эпюры M для балки (рис. 2.24), нагруженной системой сосредоточенных сил F . Пролёт балки $\ell = 10$ м разделён на пять частей, т.е. $n = 5$. Тогда длина одной части составит $d = \frac{\ell}{n}$. $F_1 = 5$ кН; $F_2 = 15$ кН; $F_3 = 5$ кН.

Построение эпюры M будем осуществлять в соответствии с выражением (2.19), которое в матричной форме имеет вид

$$\vec{M} = L_m \cdot \vec{F}. \quad (2.24)$$

При этом вектор-столбец искомых моментов \vec{M} , вектор-столбец \vec{F} и матрица влияния моментов L_m приобретают следующий вид:

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix}; \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ 0 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}; \quad L_m = \frac{d}{n} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Подставляя полученные матрицы в выражение (2.24) и совершая операцию перемножения матриц, получаем вектор-столбец искомых усилий – изгибающих моментов M .

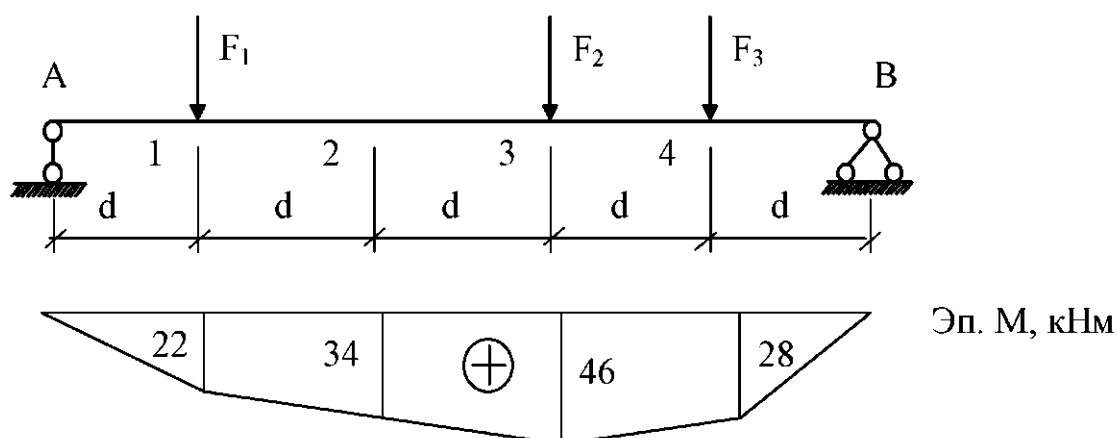


Рис. 2.24

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix} = \frac{2}{5} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \\ 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 22 \\ 34 \\ 46 \\ 28 \end{vmatrix}.$$

По полученному вектору искомых изгибающих моментов построена эпюра M (см. рис. 2.24).

Матрицы влияния моментов для балок-консоль имеют следующий вид:

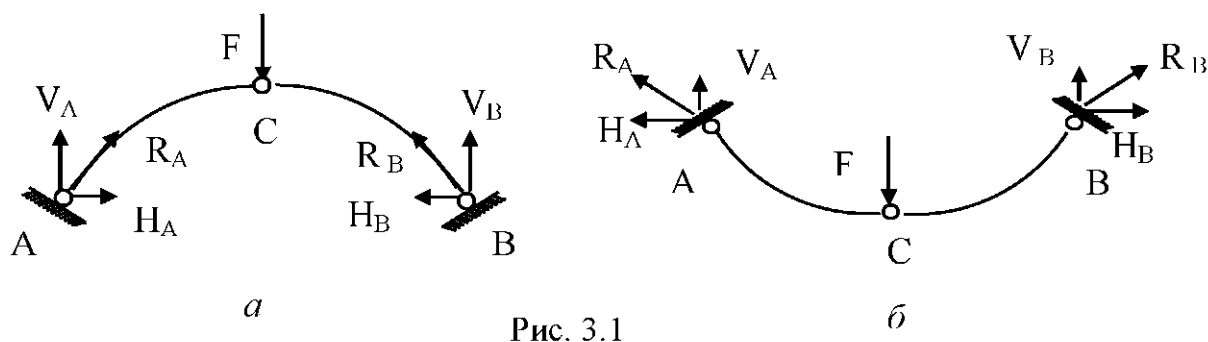
$$\text{Защемление балки слева} - L_m = d \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & \cdot & -n \\ 0 & 0 & -1 & \cdot & -(n-1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Защемление балки справа} - L_m = d \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ -1 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -(n-1) & \cdot & -1 & 0 & 0 \\ -n & \cdot & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

3. РАСЧЁТ РАСПОРНЫХ СИСТЕМ

3.1. Общие сведения

Распорной называется такая система, в результате действия на которую вертикальных внешних нагрузок в ней возникают наклонные опорные реакции. На рис. 3.1 показаны два типа распорных систем.



При расчёте распорных систем наклонную опорную реакцию R раскладывают на две составляющие: вертикальную V и горизонтальную H . Горизонтальная составляющая H опорной реакции называется распором. Если горизонтальная составляющая H направлена вовнутрь конструкции, то такую конструкцию называют **арочной системой** (рис. 3.1, *a*), если наружу – **висячей системой** (рис. 3.1, *б*). В настоящем курсе рассматривается только арочная система (арка).

По степени статической определимости различают арки: трёхшарнирные (рис. 3.2, *a*), двухшарнирные (рис. 3.2, *б*) и бесшарнирные (рис. 3.2, *в*).

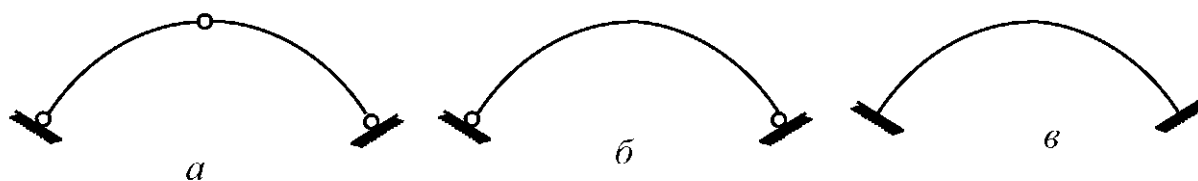


Рис. 3.2

Арки могут быть как сплошными, так и решётчатыми. Опоры арки могут располагаться как в одном уровне, так и в разных уровнях.

Конструктивные элементы арки показаны на рис. 3.3: l – пролёт арки; f – стрела подъёма арки; шарниры A и B называются пятовыми, а шарнир C – замковым. Элемент арки между шарнирами A и C называется левой полуаркой, а между шарнирами B и C – правой полуаркой.

По отношению стрелы подъёма арки к её длине различают следующие типы арок: $\frac{f}{\ell} > \frac{1}{5}$ – подъёмистая арка; $\frac{f}{\ell} < \frac{1}{5}$ – пологая арка.

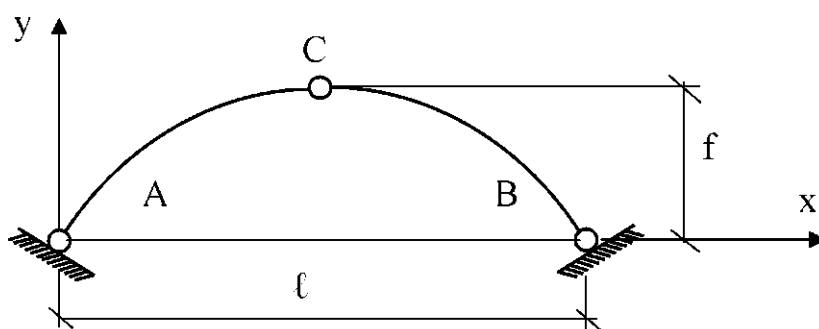


Рис. 3.3

Ось арки может быть очерчена различными кривыми. Наиболее часто в практике транспортного строительства используется парабола, описанная выражением (3.1), и дуга окружности, описанная выражением (3.2).

$$y = \frac{4f}{\ell^2} x(\ell - x) \quad \text{– парабола.} \quad (3.1)$$

Тригонометрические функции, соответствующие параболе, имеют следующий вид: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{4f}{\ell^2} (\ell - 2x)$; $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}$; $\sin \varphi = \cos \varphi \cdot \operatorname{tg} \varphi$.

$$y = \sqrt{R^2 - \left(\frac{\ell}{2} - x\right)^2} - R + f \quad \text{– дуга окружности.} \quad (3.2)$$

Тригонометрические функции, соответствующие дуге окружности, имеют такой вид: $R = \frac{f}{2} + \frac{\ell^2}{8f}$; $\sin \varphi = \frac{\ell - 2x}{2R}$; $\cos \varphi = \frac{y + R - f}{R}$. В последних формулах R – радиус окружности.

3.2. Расчёт трёхшарнирной арки на статическую нагрузку

Как и любой расчёт, расчёт трёхшарнирной арки начинают с определения опорных реакций. На рис. 3.4 изображена арка с пятами на одном уровне, находящаяся под воздействием системы внешних нагрузок.

Вертикальные составляющие V_a и V_b опорных реакций R_a и R_b

находят из рассмотрения пролёта арки как пролёта балки. Тогда из $\sum M_B = 0$ следует

$$V_A = \frac{\sum M_B^0}{\ell}, \text{ а из } \sum M_A = 0 \Rightarrow V_B = \frac{\sum M_A^0}{\ell}.$$

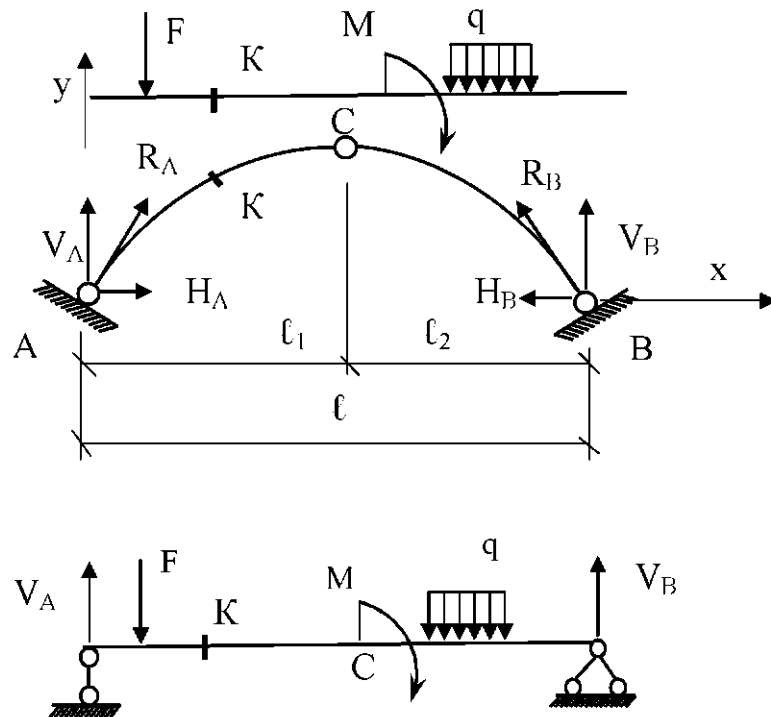


Рис. 3.4

Здесь $\sum M_{A(B)}^0$ представляет собой балочный момент, т.е. изгибающий момент, создаваемый действием вертикальных сил.

Для определения горизонтальных составляющих опорных реакций H_A и H_B рассмотрим равновесие арки в целом. Составим уравнение статики – суммы проекций всех сил, действующих на арку, на горизонтальную ось x . $\sum x = H_A - H_B = 0 \Rightarrow H_A = H_B = H$. Далее, составляя уравнение моментов относительно замкового шарнира C, рассматривая при этом равновесие либо левой, либо правой полуарок, можно записать

$$\begin{aligned} \sum M_c^{прав} &= \sum M_c^{0(прав)} - H \cdot f = 0; \\ \sum M_c^{лев} &= \sum M_c^{0(лев)} - H \cdot f = 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Исходя из (3.3) находят

$$H = \frac{\sum M_c^{0(прав)}}{f} = \frac{\sum M_c^{0(лев)}}{f}. \quad (3.4)$$

Для определения внутренних усилий в произвольном сечении арки мысленно в этом сечении проводят плоскость, нормальную к оси арки (рис. 3.5). Положение плоскости определяется координатами её центра тяжести x_k, y_k и φ_k .

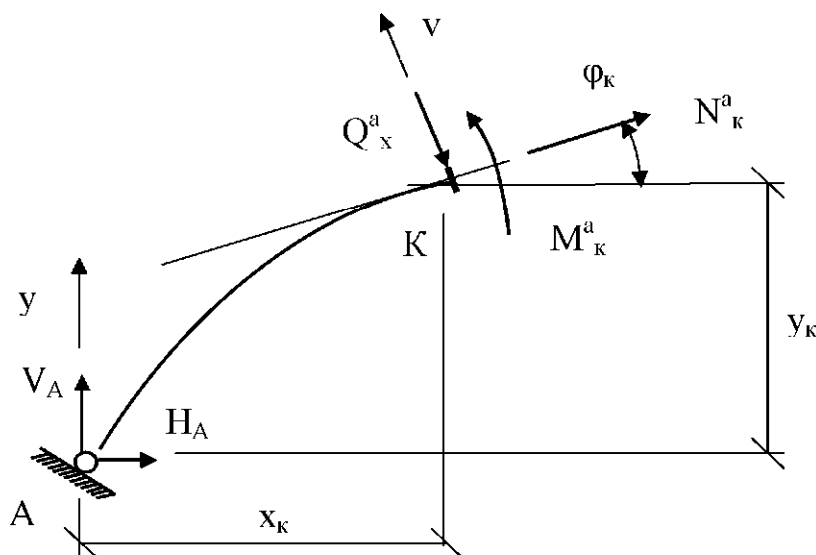


Рис. 3.5

Отделяемая этим сечением любая из частей арки находится в равновесии под действием приложенных к рассматриваемой части арки внешних сил и равнодействующей R внутренних сил, приложенной к плоскости сечения. С отнесением равнодействующей R в центр тяжести сечения внутренние усилия в сечении арки будут определяться изгибающим моментом M_k^a , поперечной силой Q_k^a и продольной силой N_k^a . Рассматривая равновесие оставшейся части арки (см. рис. 3.5), составляют уравнение моментов относительно сечения k и уравнения проекций всех сил на нормаль v и касательную к оси арки в точке k соответственно. Исходя из этого получены выражения

$$M = M_k^0 - H \cdot y_k; \quad (3.5)$$

$$Q_k^a = Q_k^0 \cdot \cos \varphi_k - H \cdot \sin \varphi_k; \quad (3.6)$$

$$N_k^a = -\left[Q_k^0 \cdot \sin \varphi_k + H \cdot \cos \varphi_k \right]. \quad (3.7)$$

В формуле (3.6) Q_k^a представляет собой так называемую балочную поперечную силу в сечении k при рассмотрении пролёта арки как пролёта балки.

По приведённым формулам строят эпюры внутренних усилий, предварительно определив геометрические параметры каждого рассматриваемого сечения трёхшарнирной арки.

3.3. Расчёт трёхшарнирной арки на подвижную нагрузку

Расчёт на подвижную нагрузку предполагает построение линий влияния всех искомым параметров, определяющих напряжённо-деформированное состояние рассчитываемой конструкции.

Как обычно, расчёт начинают с построения линий влияния опорных реакций. Линии влияния вертикальных V_A и V_B составляющих опорных реакций (рис. 3.6) строят так же, как строят линии влияния опорных реакций в двухопорной без консолей балке. При этом пролёт арки рассматривается как пролёт балки с длиной пролёта, равной расстоянию между пятовыми шарнирами A и B .

Линия влияния горизонтальной (распора H) составляющей опорной реакции может быть построена в соответствии с выражением (3.4), согласно которому

$$Л.в.Н = \frac{Л.в.М_c^0}{f}. \quad (3.8)$$

Из (3.8) видно, что линия влияния распора имеет в точности такой же вид, что и линия влияния изгибающего момента для сечения C , построенной из рассмотрения пролёта арки как пролёта простой двухопорной балки (см. рис. 3.5). В соответствии с этим все ординаты данной линии влияния поделены на постоянную f , равную стреле подъёма арки.

Линия влияния изгибающего момента M_k^a в произвольном сечении k арки, находящемся на расстоянии x от левой опоры, может быть построена исходя из формулы (3.5):

$$Л.в.М_k^a = Л.в.М_k^0 - Л.в.Н \cdot y_k. \quad (3.9)$$

В соответствии с этим выражением л.в. M_k^a представляет собой алгебраическую сумму двух линий влияния – линии влияния балочного момента и линии влияния распора H , ординаты которой умножают на постоянную величину y_k . На рис. 3.7 показано построение M_k^a путём геометрического сложения указанных линий влияния.

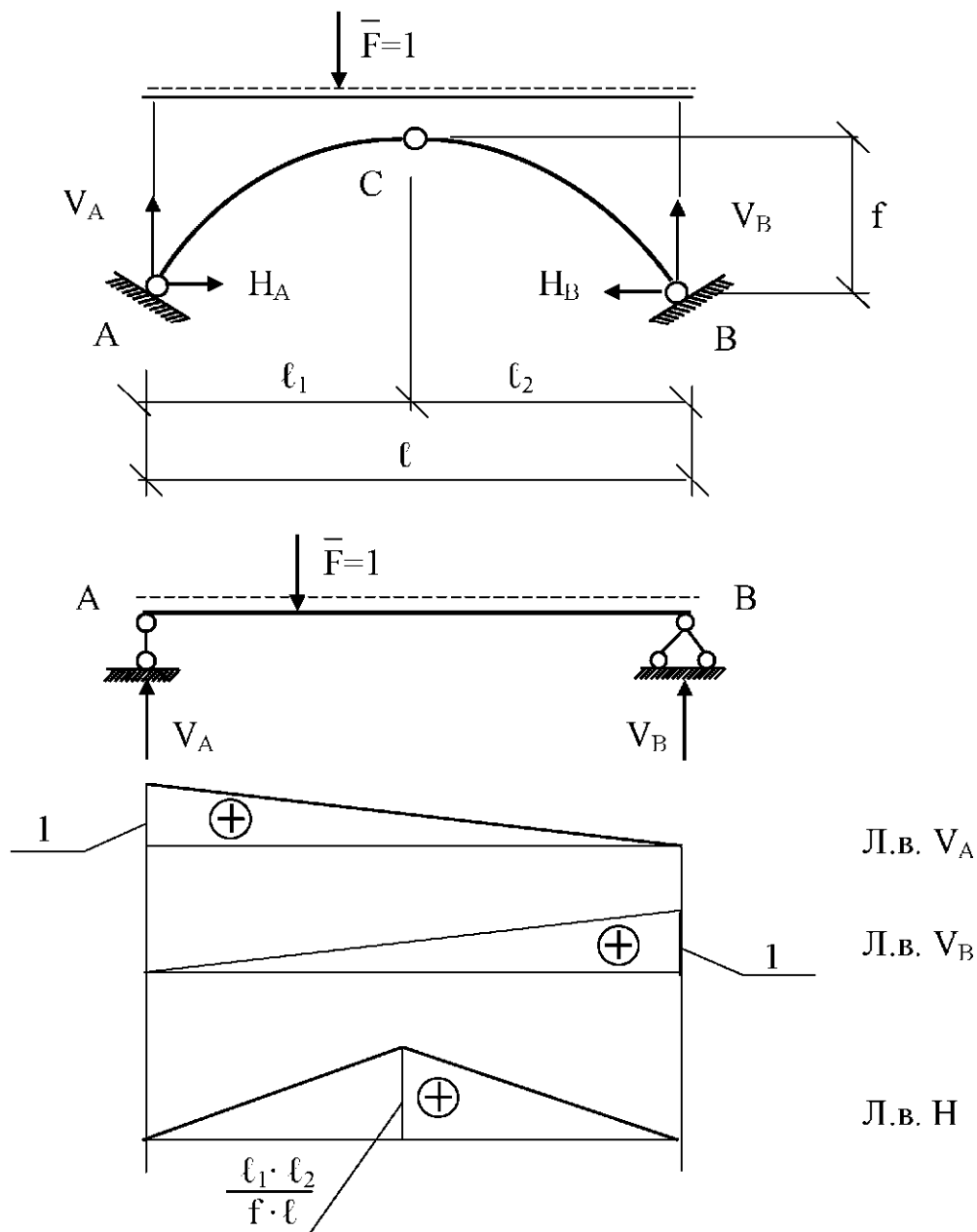


Рис. 3.6

Построение линии влияния поперечной силы Q основывается на формуле (3.6) и соответствует выражению

$$Л.в. Q_k^a = Л.в. Q_k^0 \cdot \cos \varphi_k - Л.в. H \cdot \sin \varphi_k. \quad (3.10)$$

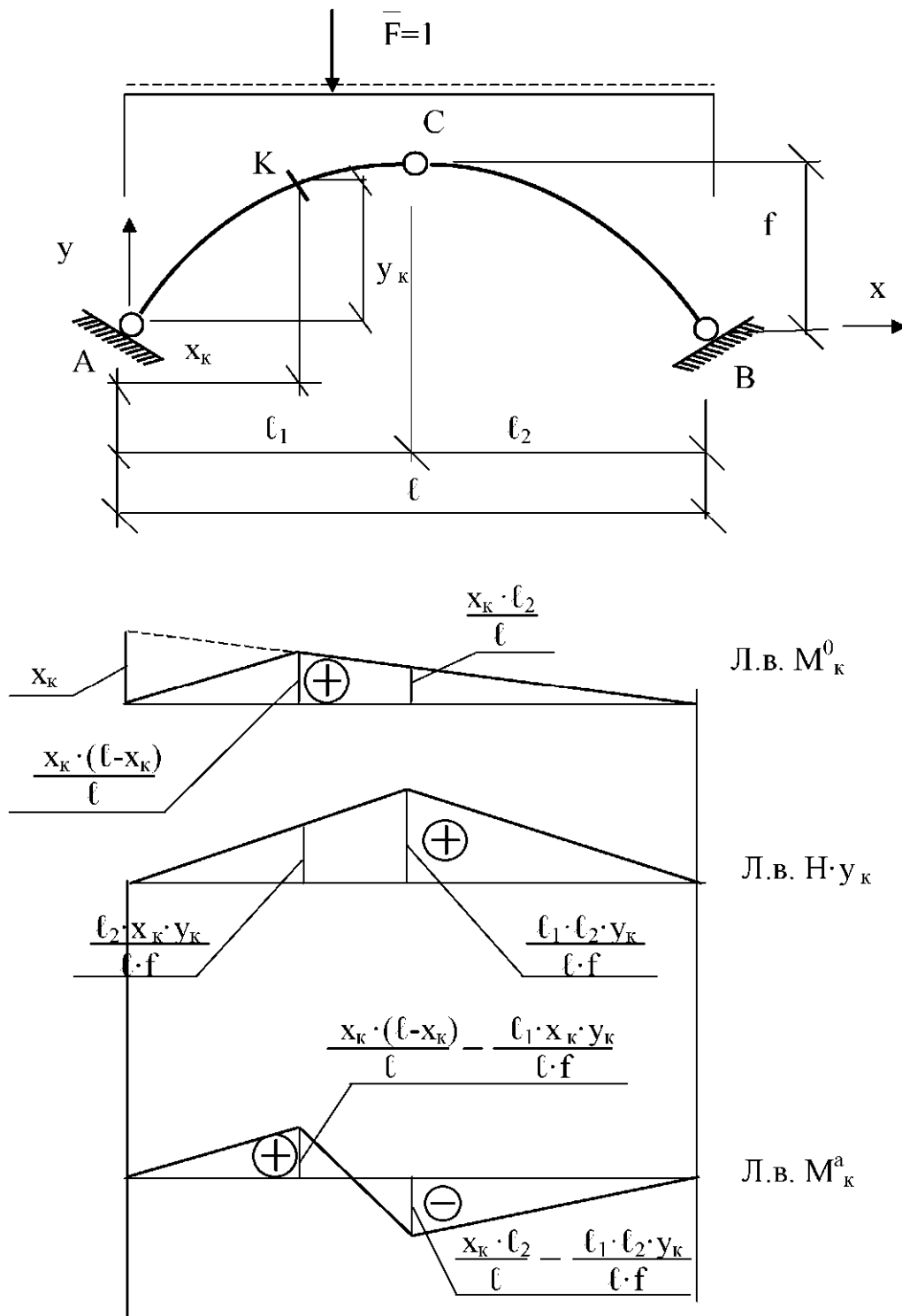


Рис. 3.7

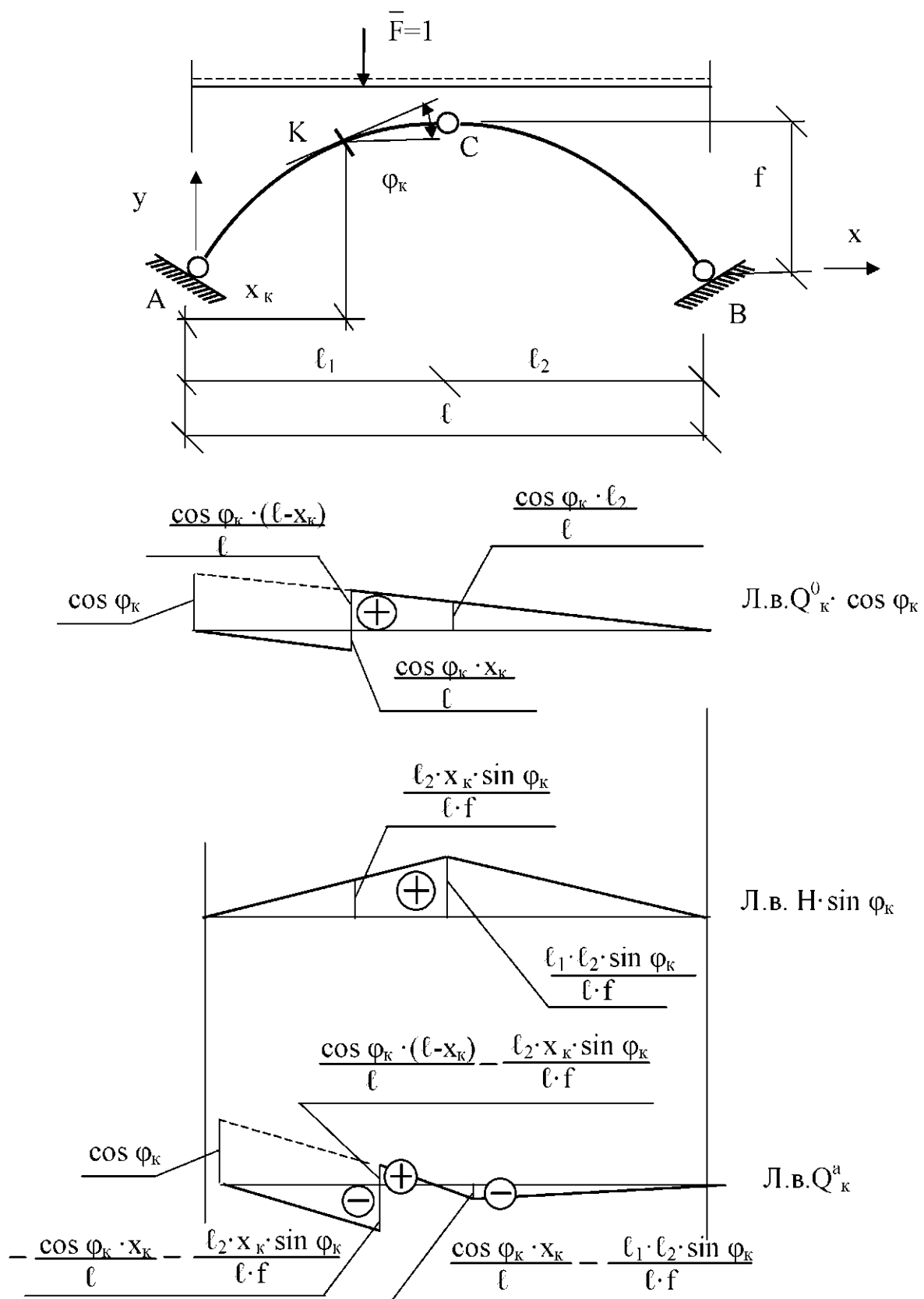


Рис. 3.8

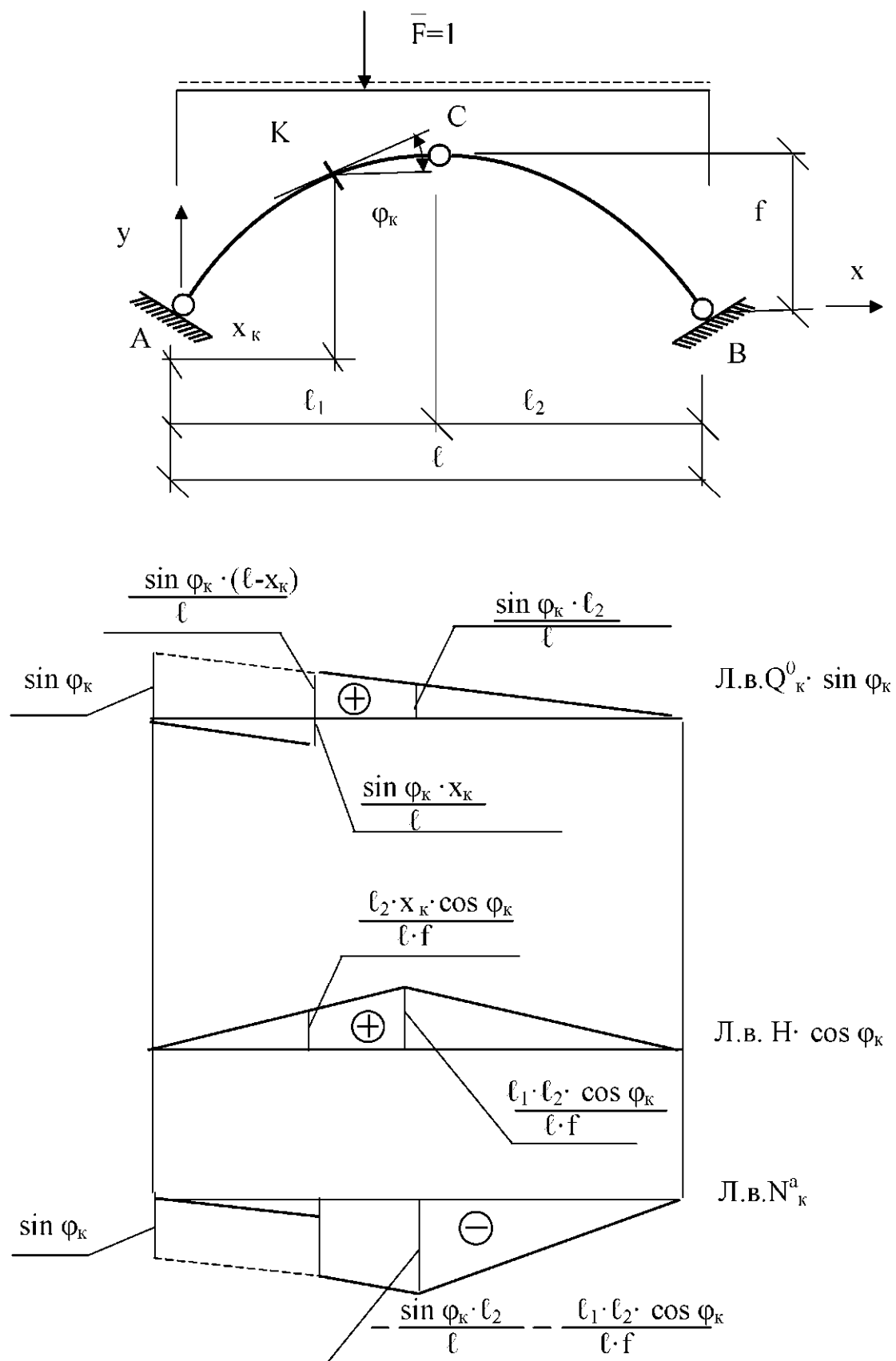


Рис. 3.9

Согласно (3.10) л.в. Q_k^a представляет собой геометрическую сумму двух линий влияния – балочной линии влияния Q_k^0 , построенной для сечения k из рассмотрения пролёта арки как пролёта балки, и линии влияния распора H , умноженных соответственно на значения $\cos \varphi_k$ и $\sin \varphi_k$, имеющих место в сечении k . На рис. 3.8 показано построение л.в. Q_k^a .

Построение линии влияния продольной силы N_k^a , согласно формуле (3.7), можно осуществить по выражению

$$Л.в. N_k^a = -[Л.в. Q_k^0 \cdot \sin \varphi_k + Л.в. H \cdot \cos \varphi_k]. \quad (3.11)$$

На рис. 3.9 показано построение этой линии влияния. Анализ всех трёх линий влияния показывает, что на каждой из них есть такая точка, при положении над которой подвижной силы $F=1$ искомое усилие равно нулю. Эта точка называется нулевой и может быть использована для геометрического построения указанных линий влияния.

Известно, что при расположении нагрузки только над одной из двух полуарок (например, левой) вектор наклонной опорной реакции в другой (например, правой) будет проходить через пятовый B и замковый C шарниры.

При построении линии влияния изгибающего момента M_k^a (рис. 3.10) методом нулевой точки (сечение k расположено на левой полуарке) вектор опорной реакции R_B проводят через шарниры B и C , а вектор опорной реакции R_A – через пятовый шарнир A и сечение k . Из рассмотрения равновесия левой от сечения k части арки очевидно, что $M_k^a = 0$ в случае прохождения вектора опорной реакции R_A через сечение k . Точка D пересечения векторов R_A и R_B является той точкой, при положении над которой подвижной силы $\bar{F} = 1$ изгибающий момент $M_k^a = 0$. Для определения аналитически точных значений ординат линии влияния изгибающего момента M_k^a из подобия треугольников $DOB \sim CPB$ и $DOA \sim kEA$ находят расстояние

$$x_M = \frac{f\ell}{l_2 \left(\frac{y_k + f}{x_k + l_2} \right)}. \quad (3.12)$$

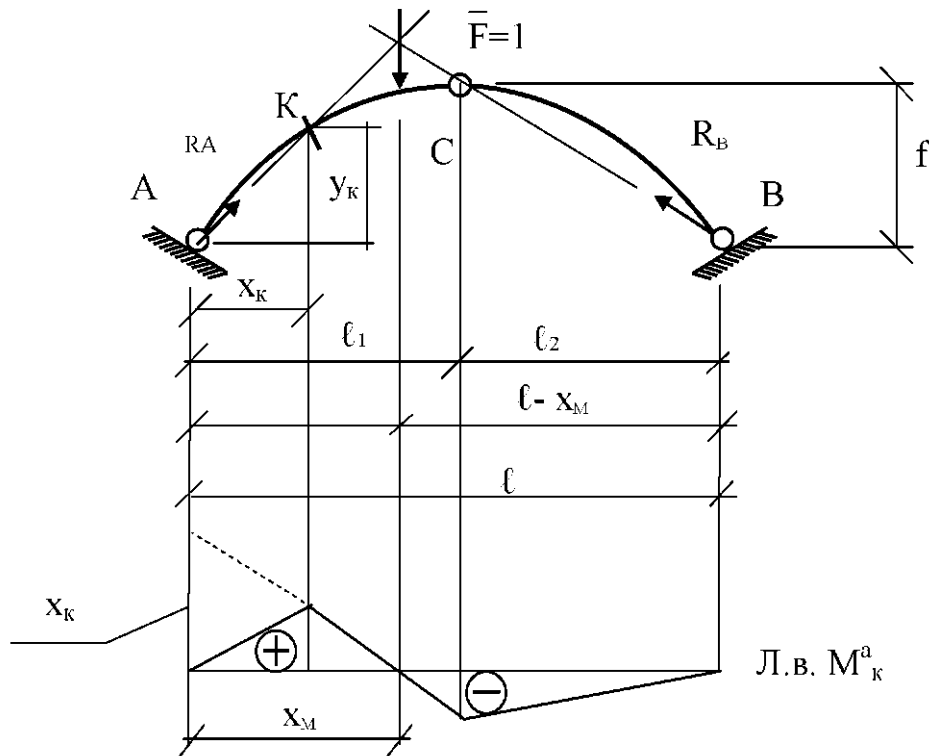


Рис. 3.10

Построение линии влияния поперечной силы Q_k^a методом нулевой точки показано на рис. 3.11. Для того чтобы поперечная сила в сечении k $Q_k^a = 0$, вектор опорной реакции R_A должен проходить параллельно касательной, проведенной к очертанию оси арки в точке k . Формула для определения расстояния x_Q , полученная по тому же принципу, что и в предыдущем случае, имеет вид

$$x_Q = \ell \operatorname{tg} \alpha / (\operatorname{tg} \varphi_k + \operatorname{tg} \alpha). \quad (3.13)$$

В рассмотренном примере $\operatorname{tg} \alpha = \frac{f}{l_2}$.

Расстояние x_N (см. рис. 3.11) можно определить по по формуле

$$x_N = \ell \operatorname{tg} \alpha / (\operatorname{ctg} \varphi_k - \operatorname{tg} \alpha). \quad (3.14)$$

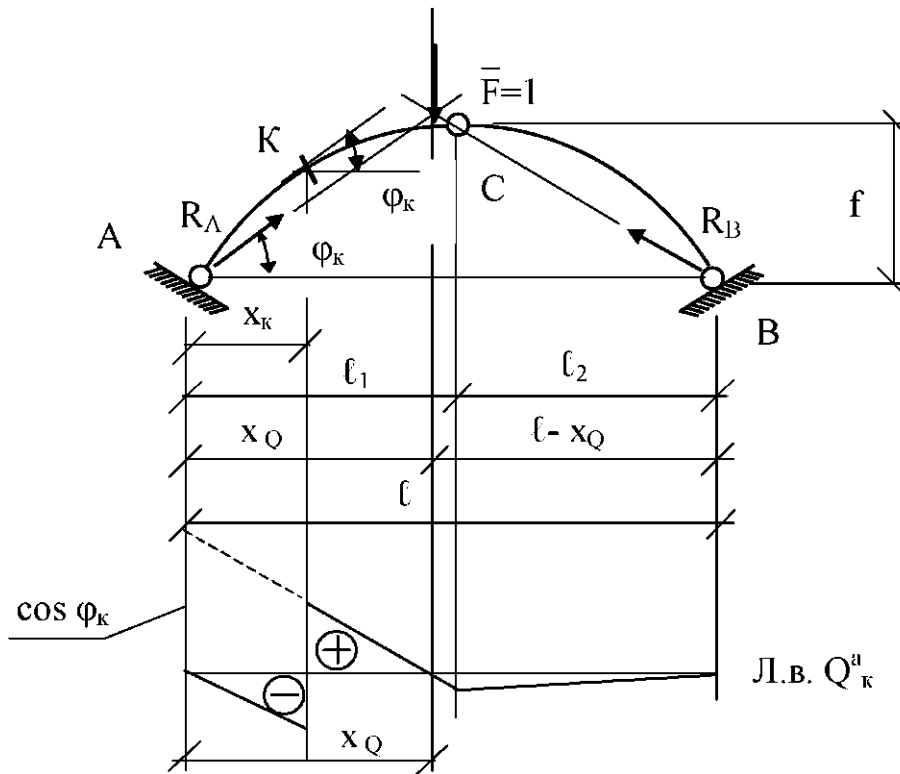


Рис. 3.11

В случае расположения сечения k на правой полуарке формулы (3.12), (3.13) и (3.14) можно использовать с учётом того, что эти расстояния необходимо отмерять от правой пятовой опоры B .

Рассмотрим два частных случая построения л.в. Q_k^a , показанные на рис. 3.13 и 3.14. Если сечение, например k_1 , расположено на левой полуарке ближе к замковому шарниру C , то направление вектора опорной реакции R_A пересечёт направление опорной реакции R_B в точке (нулевой точке), расположенной над правой полуаркой (см. рис. 3.13). Но между двумя шарнирами (в данном случае C и B) усилие должно изменяться по закону прямой линии. Если сечение, например k_2 , расположено на левой полуарке таким образом, что направления опорных реакций R_a и R_b пересекутся в шарнире C , то правая прямая (см. рис. 3.14) будет совпадать с базовой линией.

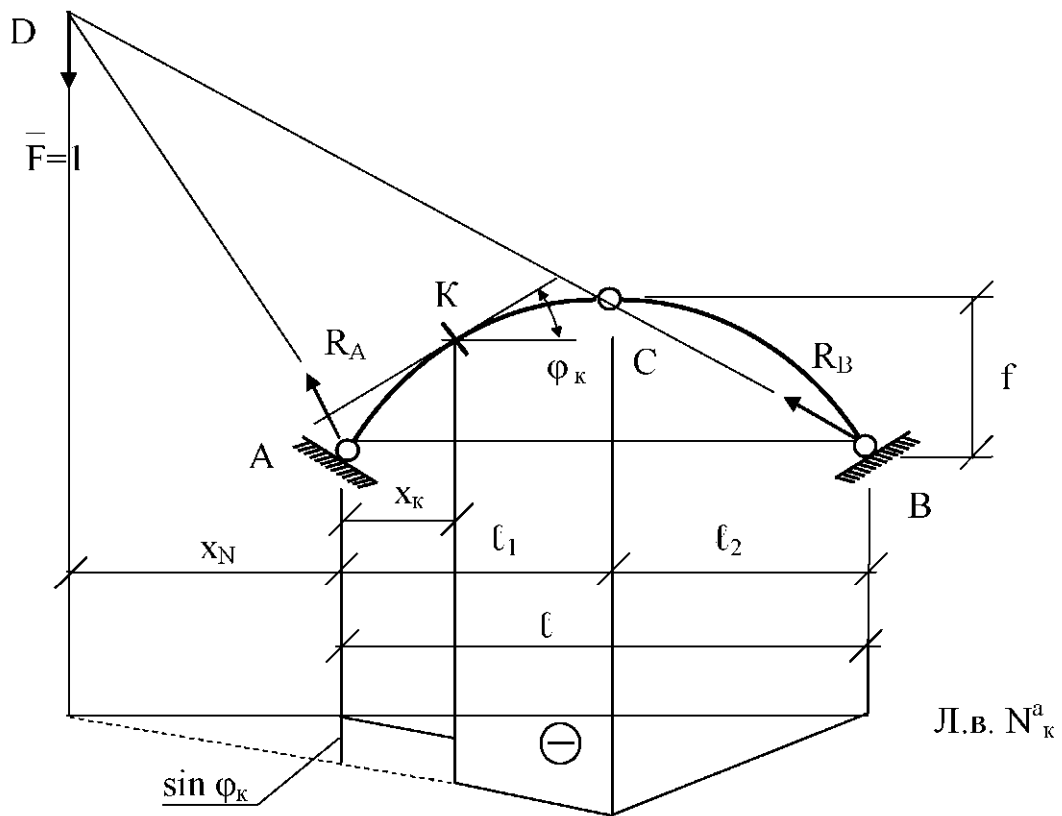


Рис. 3.12

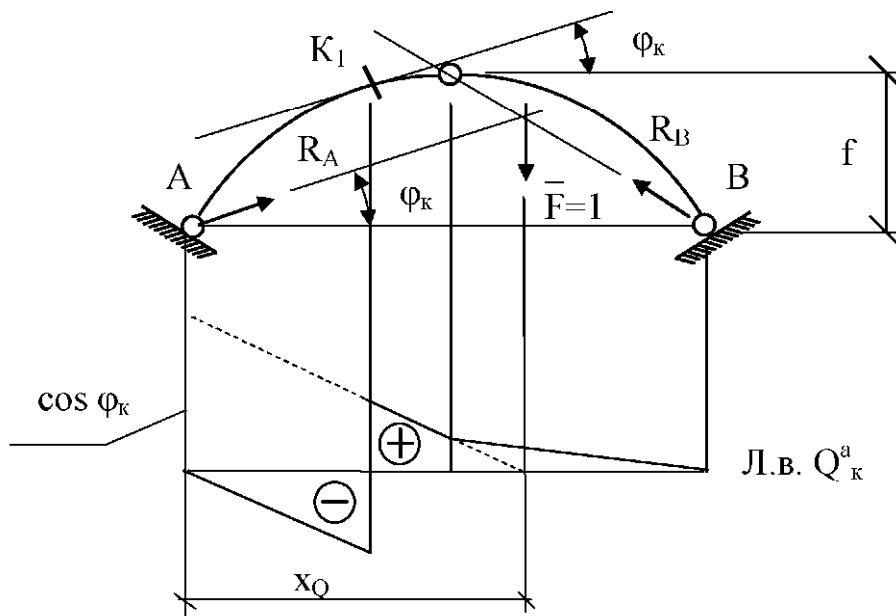


Рис. 3.13

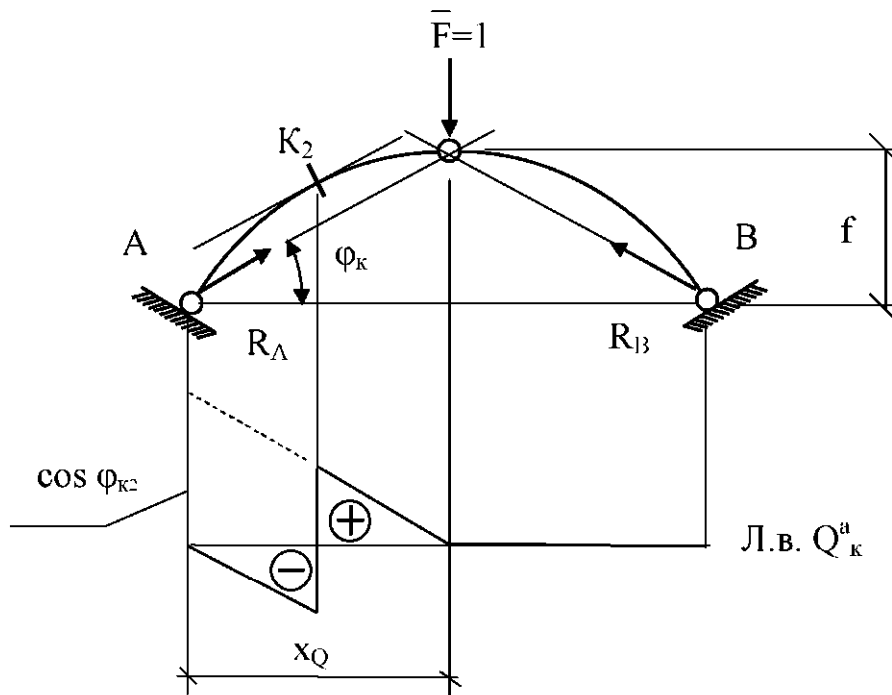


Рис. 3.14

3.4. Определение напряжений в сечениях арки

Нормальные напряжения в поперечных сечениях арки, испытывающих деформацию внецентренного сжатия, определяют по формуле, известной из курса сопротивления материалов:

$$\sigma = \frac{N}{A} \mp \frac{M}{J} \cdot e, \quad (3.15)$$

где A – площадь поперечного сечения арки; J – момент инерции сечения; e – расстояние от нейтральной линии сечения до той точки, в которой определяется напряжение.

Наибольшее значение напряжения будет соответствовать загрузению линий влияния для нормального усилия N и изгибающего момента M на экстремум. Из сопоставления линий влияния, представленных на рис 3.7 и 3.9, видно, что пределы загрузки этих линий влияния на экстремум различны, вследствие чего определять наибольшее напряжение приходится исходя из предположений: 1) определяют наибольшее положительное значение M и вычисляют соответствующее этому загрузению значение N ; 2) определяют

наибольшее отрицательное значение M и вычисляют соответствующее этому загрузению значение N ; 3) определяют наибольшее значение N , вычисляют соответствующее ему значение M . По формуле (3.15) определяют нормальные напряжения, соответствующие каждой схеме загрузения линий влияния M и N . Для конструирования сечения арки принимают наибольшее из трёх найденных значений нормальных напряжений.

Избежать тройного загрузения двух линий влияния можно, пользуясь расчётом при помощи *ядровых моментов*.

Двухчленная форма нормального напряжения может быть приведена к одночленной, если за точку моментов взять точки K_1 и K_2 ядра сечения (рис. 3.15).

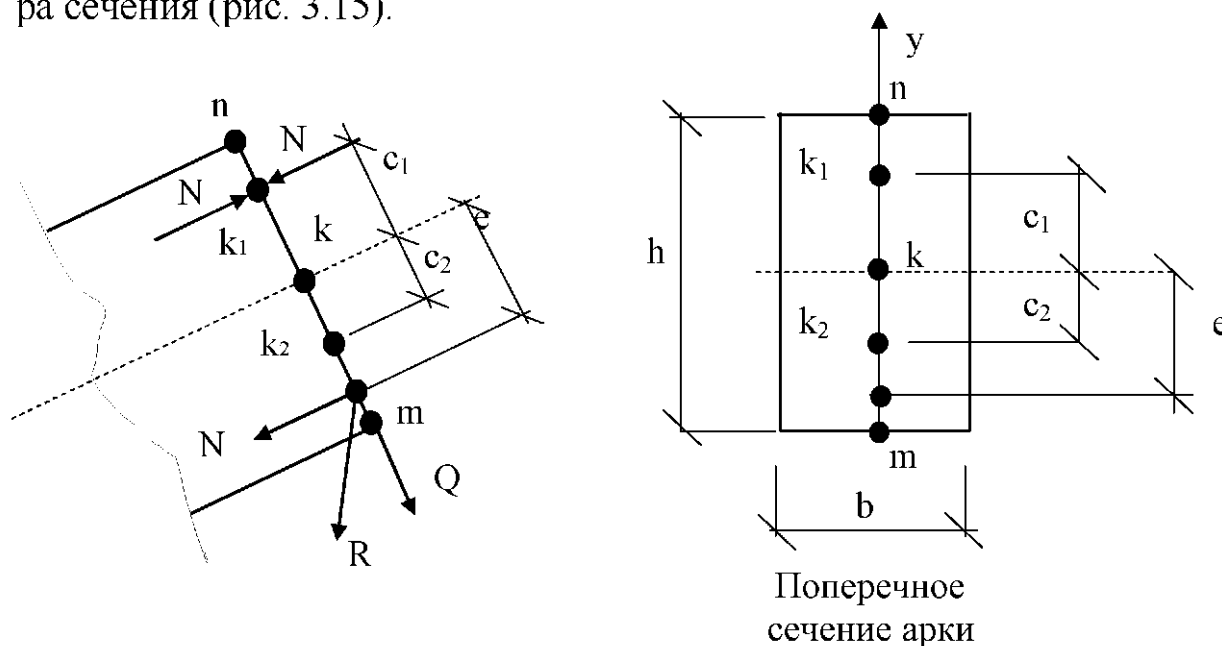


Рис. 3.15

Пусть расстояния крайних точек ядра сечения от оси арки будут c_1 и c_2 соответственно, а расстояние точки приложения нормальной силы N от оси арки e . Равнодействующую левых сил R разложим на две составляющие N и Q . В одной из крайних точек ядра сечения, например в верхней точке k_1 , приложим перпендикулярно сечению две взаимно уравновешенные силы N . В результате в сечении будет приложено три силы N , которые могут быть теперь сведены к паре с моментом $M = N \cdot (e + c_1)$ и продольной силе N , действующей в крайней верхней ядровой точке k_1 . В соответствии с изложенным величина нормального напряжения в нижней точке m сечения может быть

найдена по формуле $\sigma_m = \frac{N(e + c_1)}{W_m}$, т.к. от силы N , приложенной в верхней ядровой точке, нормальные напряжения в нижней точке m сечения равны нулю. Аналогично можно получить формулу для определения напряжения в верней точке сечения n : $\sigma_n = \frac{N(e - c_2)}{W_n}$.

Числители двух последних формул обозначают как $M_{ядр}^{(\kappa_1)}$ и $M_{ядр}^{(\kappa_2)}$ соответственно и называют **ядровыми моментами**. Окончательно формулы для определения нормальных напряжений в крайних точках сечения принимают вид

$$\sigma_m = \frac{M_{ядр}^{(\kappa_1)}}{W_m} \quad \text{и} \quad \sigma_n = \frac{M_{ядр}^{(\kappa_2)}}{W_n}. \quad (3.16)$$

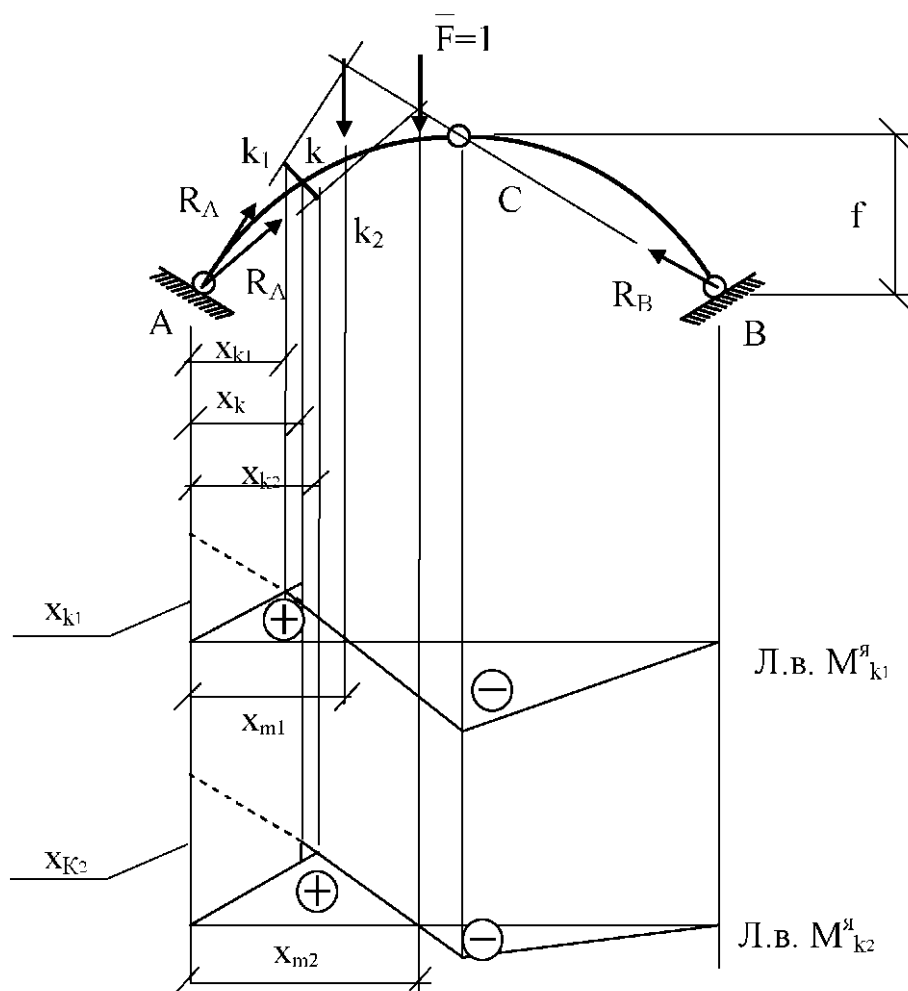


Рис. 3.16

Для того чтобы найти по этим формулам наибольшее напряжение

при невыгодном загрузении, остаётся построить линии влияния так называемых ядровых моментов M_{k_1} и M_{k_2} соответственно для крайних верхней и нижней точек k_1 и k_2 ядра сечения. На рис. 3.16 показано построение этих линий влияния методом нулевой точки. Расстояния x_{k_1} и x_{k_2} можно находить по формулам (3.17), а ординаты y_{k_1} и y_{k_2} – по формулам (3.18).

$$\begin{aligned}x_{k_1} &= x_k - c_1 \sin \varphi_k; \\x_{k_2} &= x_k + c_2 \sin \varphi_k.\end{aligned}\tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}y_{k_1} &= y_k + c_1 \cos \varphi_k; \\y_{k_2} &= y_k - c_2 \cos \varphi_k.\end{aligned}\tag{3.18}$$

3.5. Рациональное очертание оси арки

Рациональной осью трёхшарнирной арки заданного пролёта и заданной стрелы подъёма называется такая ось, при которой требуемые условиями прочности поперечные сечения арки будут наименьшими. Очевидно, что наименьшая величина нормального напряжения, согласно выражению (3.11), будет в том случае, когда значение изгибающего момента в сечении будет равно нулю. Последнее же возможно в том случае, когда равнодействующая внутренних проходит через центр тяжести поперечного сечения арки. Этому условию должны удовлетворять все сечения арки.

Рассмотрим типичный случай загрузки, когда арка находится под действием равномерно распределённой нагрузки (рис. 3.17).

Исходя из определения рациональной оси арки приравняем к нулю выражение (3.5).

$$M_x^a = M_x^0 - H \cdot y_x = 0.\tag{3.19}$$

Из этого выражения следует

$$y_x = \frac{M_x^0}{H}.\tag{3.20}$$

Рассмотрим частный случай, когда замковый шарнир C расположен в середине пролёта арки. Величина балочного изгибающего мо-

мента, как известно, может быть определена из выражения

$$M_x^0 = \frac{q}{2} \cdot x(\ell - x). \quad (3.21)$$

Распор H для симметричного расположения замкового шарнира будет соответственно равен

$$H = \frac{q\ell^2}{8f}. \quad (3.22)$$

Подставляя (3.21) и (3.22) в выражение (3.20), получим выражение, описывающее рациональное очертание оси арки, нагруженной равномерно распределённой нагрузкой интенсивностью q , при расположении замкового шарнира в середине пролёта арок

$$y_x = \frac{\frac{q}{2} \cdot x(\ell - x)}{\frac{q\ell^2}{8f}}. \quad (3.23)$$

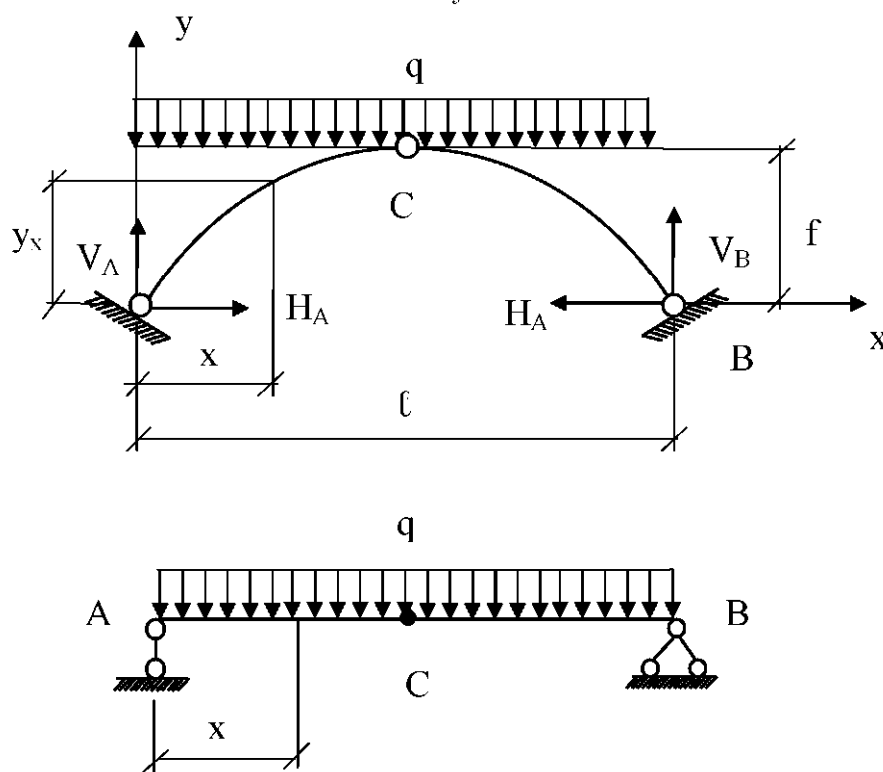


Рис. 3.17

После арифметических преобразований выражения (3.23) получим выражение, описывающее рациональное очертание оси арки.

$$y_x = \frac{4f}{\ell^2} \cdot x(\ell - x). \quad (3.24)$$

Анализ выражения (3.24) свидетельствует о том, что в данном частном случае нагружения трёхшарнирной арки рациональной оказалась ось, описанная по квадратной параболе.

Аналогичным методом можно вывести любую формулу, описывающую рациональное её очертание в зависимости от характера внешнего нагружения. Однако, как показывает опыт, технологически осуществить такие конструкции практически невозможно.

4. ПЛОСКИЕ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ БАЛОЧНЫЕ ФЕРМЫ

4.1. Понятие о ферме

Реальные фермы являются многократно статически неопределимыми системами, так как стержни в узлах соединены между собой жестко. Точный расчет таких ферм требует выполнения объемных вычислений. Однако, как показывают сравнительные расчеты, при действии на стальные фермы узловой нагрузки усилия в стержнях ферм с жесткими узлами мало отличаются от усилий в ферме с шарнирным соединением стержней в узлах. Это позволяет определять усилия в стержнях ферм способом вырезания узлов и методом сечений.

Фермы имеют такое же назначение, как и балки сплошного сечения, только для больших пролетов, и различаются по следующим признакам: 1) характеру очертания внешнего контура; 2) типу решетки; 3) типу опорных связей фермы; 4) назначению; 5) уровню езды.

По характеру очертания внешнего контура различают фермы с параллельными поясами (рис.4.1) и с полигональным очертанием поясов (рис. 4.3).

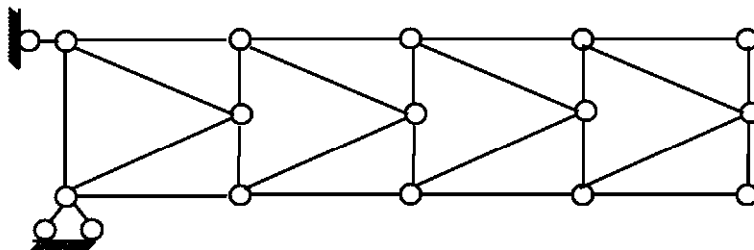


Рис. 4.1

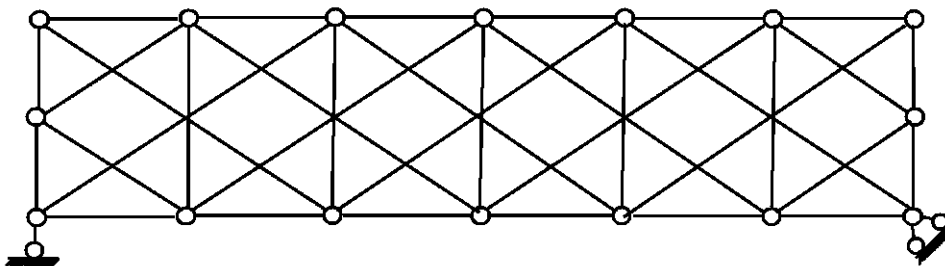


Рис. 4.2

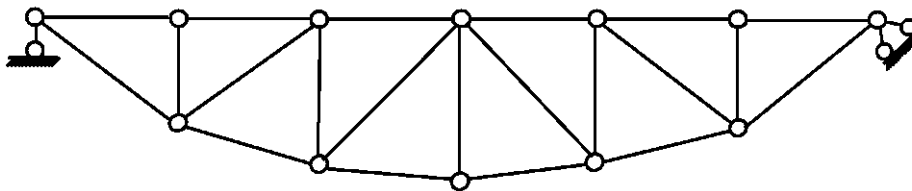


Рис. 4.3

По типу решетки различают фермы с треугольной решеткой (рис. 4.7), с раскосной решеткой (рис. 4.4), с полураскосной решеткой (см. рис. 4.1) и многорешетчатые (рис. 4.2).

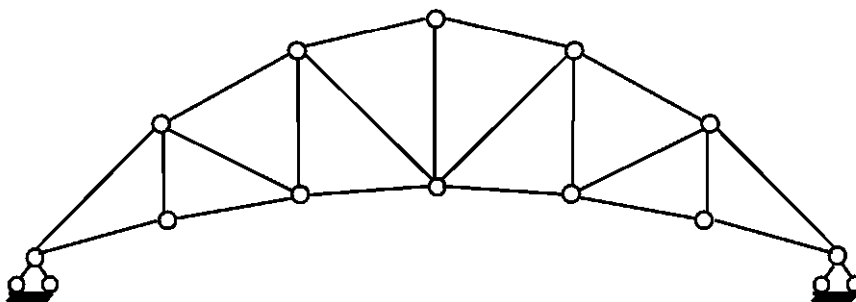


Рис. 4.4

По типу опорных связей различают фермы: балочные (рис. 4.3), арочные (см. рис. 4.4) и консольные (см. рис. 4.1).

По конструктивному назначению различают фермы стропильные, крановые, мостовые и др.

Мостовые фермы по уровню езды делятся на фермы с ездой поверху, с ездой понизу и с ездой посередине.

4.2. Линии влияния усилий в стержнях ферм

При построении линий влияния усилий в стержнях ферм рассматривают два положения единичной силы $\bar{F} = 1$ слева и справа от расчленённой панели ездового полотна. Сила $\bar{F} = 1$ может перемещаться по так называемому ездовому полотну, отмеченному на рисунках данного раздела пунктирной линией. Как правило, ездовым полотном бывает либо верхний пояс, либо нижний.

Так как ферма является конструкцией с узловой передачей нагрузки, линии влияния усилий в стержнях будут иметь вид ломаной линии

с вершинами под узлами. Если для определения усилия используется способ вырезания узлов, то рассматривается статическое равновесие узла, например узла 5 (рис. 4.5), для двух положений единичной безразмерной силы $\bar{F}=1$: в узле и вне узла фермы.

В случае определения усилий методом сечений линия влияния состоит из трех отрезков прямых: левой прямой, правой прямой и соединительной прямой. Левая прямая соответствует положению $\bar{F}=1$ слева от рассекаемой панели, а правая прямая справа от рассекаемой панели ездового полотна. Переходная прямая соединяет ординаты под узлами рассекаемой панели ездового полотна.

Рассмотрим построение линий влияния усилий в вертикальных элементах для фермы на рис. 4.6.

Для того чтобы построить линию влияния усилия V_{5-6} , при езде понизу необходимо вырезать узел 5 и рассмотреть его равновесие для двух положений подвижной силы $\bar{F}=1$:

1) сила $\bar{F}=1$ находится в любом узле, кроме узла 5 (левее узла 3 или правее узла 7) (см. рис 4.5,а). Тогда $\sum Y = -V_{5-6} = 0 \Rightarrow V_{5-6} = 0$.

2) сила $\bar{F}=1$ находится непосредственно в узле 5, что соответствует езде понизу (см. рис 4.5,б). Тогда $\sum Y = \bar{F} - V_{5-6} = 0 \Rightarrow V_{5-6} = 1$.

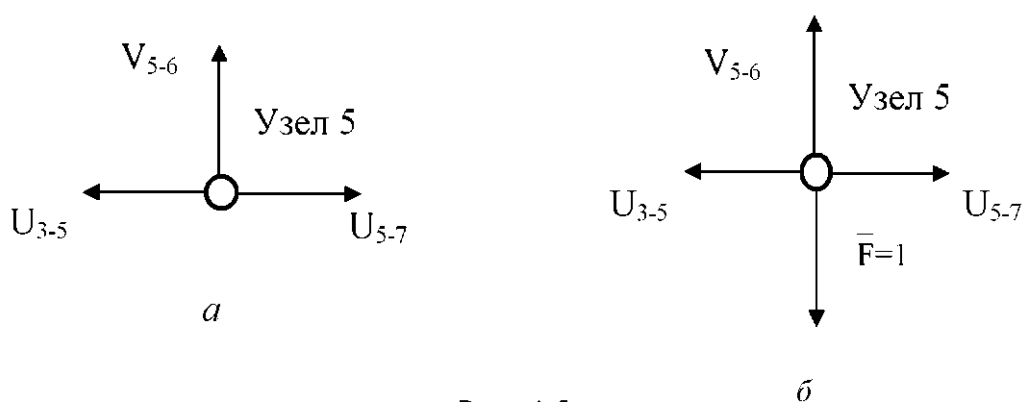


Рис. 4.5

Линия влияния усилия V_{5-6} для езды понизу приведёна на рис. 4.6,б.

При езде поверху сила $\bar{F}=1$ не может действовать на узел 5 (см. рис 4.5,а), поэтому $V_{5-6} = 0$.

Линия влияния усилия V_{5-6} для езды поверху приведена на рис. 4.6,в.

Для построения линии влияния усилия V_{3-4} при езде понизу необходимо мысленно рассечь ферму наклонным сечением в панелях 1 – 3

и 4–6 (см. рис 4.5,а) и рассмотрим равновесие левой отсеченной части (при этом подвижную нагрузку $\bar{F}=1$ сначала оставляем в правой отброшенной части фермы).

$$\sum Y = R_A - V_{3-5} = 0 \Rightarrow V_{3-5} = R_A \quad - \text{правая прямая.}$$

Таким образом, получена правая прямая, которая справедлива до тех пор, пока единичная сила находится правее узла 3 (езда понизу). Точка Риттера (моментная точка) лежит в бесконечности, потому что векторы двух других неизвестных усилий, попавших в сечение (U_{1-3} и O_{4-6}), параллельны и пересекаются в бесконечности. В связи с этим левая прямая должна пройти через ноль на левой опоре и быть параллельна правой прямой. Левая прямая справедлива до тех пор, пока подвижная сила $\bar{F}=1$ располагается левее узла 1. Переходная прямая соединяет ординаты линии влияния под узлами 1 и 3 рассечённой панели 1–3 ездового полотна.

Линия влияния усилия V_{3-4} для езды понизу приведена на рис. 4.6, з.

Переходная прямая при езде поверху соединяет ординаты линии влияния под узлами 4 и 6 рассечённой панели 4–6 ездового полотна.

Линия влияния усилия V_{3-4} для езды понизу приведена на рис. 4.6, д.

Построение линий влияния усилий в элементах поясов фермы рассмотрим на примере фермы, представленной на рис. 4.7.

Для определения усилия U_{3-5} нижнего пояса необходимо рассечь ферму в панелях 3–5 и 4–6 и рассмотреть равновесие левой отсеченной части (рис. 4.7, а) (при этом подвижную силу $\bar{F}=1$, как и в предыдущем случае, оставляем в правой отброшенной части фермы). Составим уравнение моментов относительно моментной точки 4:

$$\sum M^{лев}_4 = RA \cdot 1,5 - U_{3-5} \cdot h = 0 \Rightarrow U_{3-5} = \frac{1,5d}{h} R_A \quad - \text{правая прямая.}$$

Полученная правая прямая справедлива до тех пор, пока подвижная сила $\bar{F}=1$ находится правее узла 5.

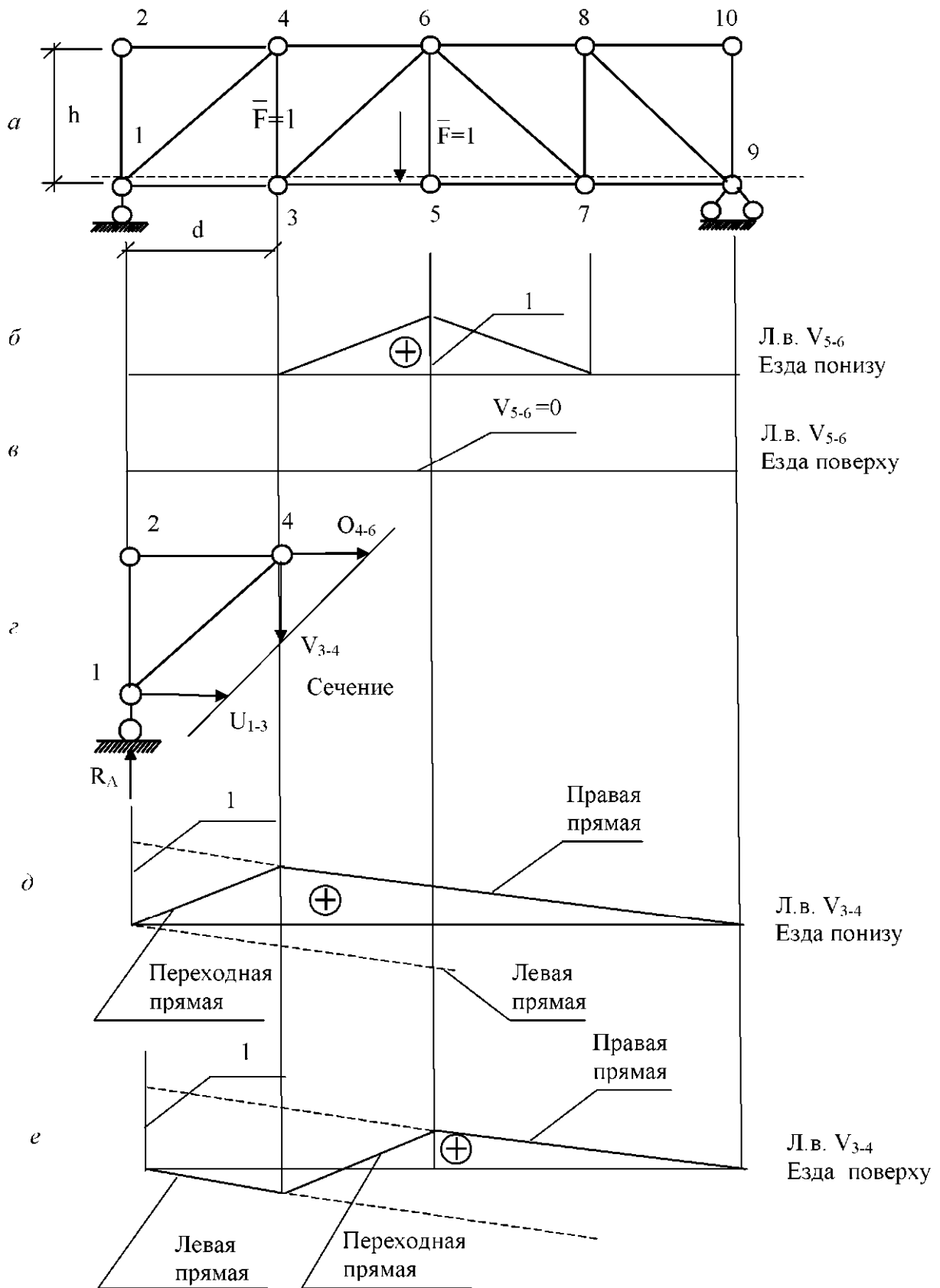


Рис. 4.6

Для построения левой прямой при положении подвижной силы $\bar{F} = 1$ правее сечения снова составим уравнение моментов относительно моментной точки 4, рассматривая равновесие правой отсечённой части (рис 4.7, в):

$$\sum M^p_4 = -R_B \cdot 2d + U_{3-5} \cdot h = 0 \Rightarrow U_{3-5} = \frac{1,5d}{h} R_B. \text{ – левая прямая.}$$

Аналогично строится линия влияния усилия O_{4-6} верхнего пояса. Моментной точкой для данного стержня является узел 5.

Усилие в раскосе D_{2-5} для фермы, представленной на рис. 4.8, можно определить, также мысленно рассекая сечением ферму через панели 2 – 4 и 3 – 5. Моментной точкой для данного стержня является точка к. Из уравнения моментов относительно этой точки определим положение правой прямой линии влияния D_{2-5} .

$$\sum M_k = D_{2-5} \cdot r_{2-5} - R_A \cdot c = 0 \Rightarrow D_{2-5} = R_A \cdot c / r_{2-5} \text{ – правая прямая.}$$

Положение левой прямой линии влияния D_{2-5} можно найти из того, что левая и правая прямые должны *обязательно* пересекаться под моментной точкой. В данном случае – это точка к, что показано на рис. 4.8. Спроецируем эту точку на правую прямую – точку о. Соединим её с точкой, находящейся на базовой линии под левой опорой (точка l) рассматриваемой фермы. Таким образом получено положение левой прямой линии влияния D_{2-5} . Переходная прямая соединяет ординаты левой прямой линии влияния D_{2-5} под узлами 3 и 5 рассекаемой панели 3 – 5 ездового полотна.

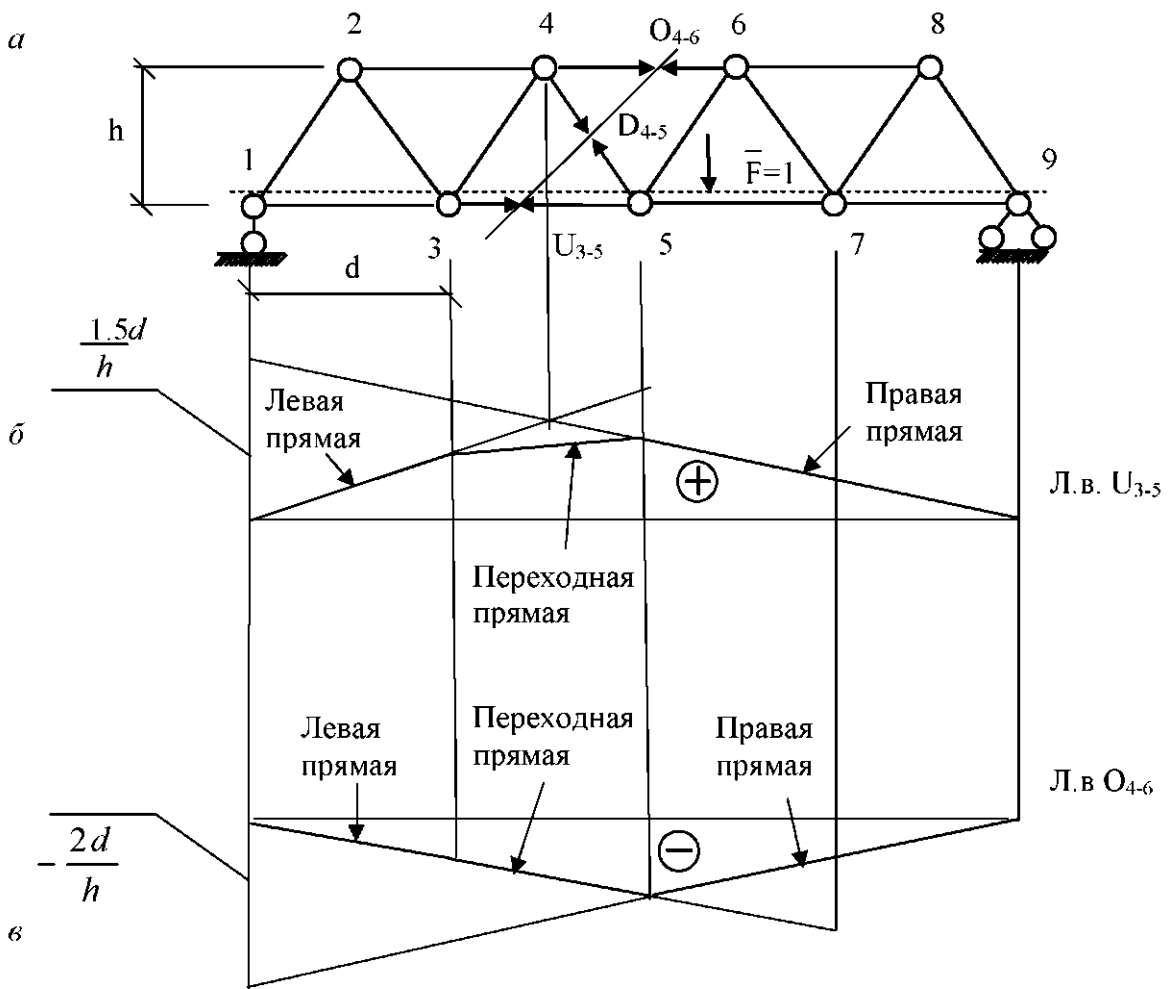


Рис. 4.7

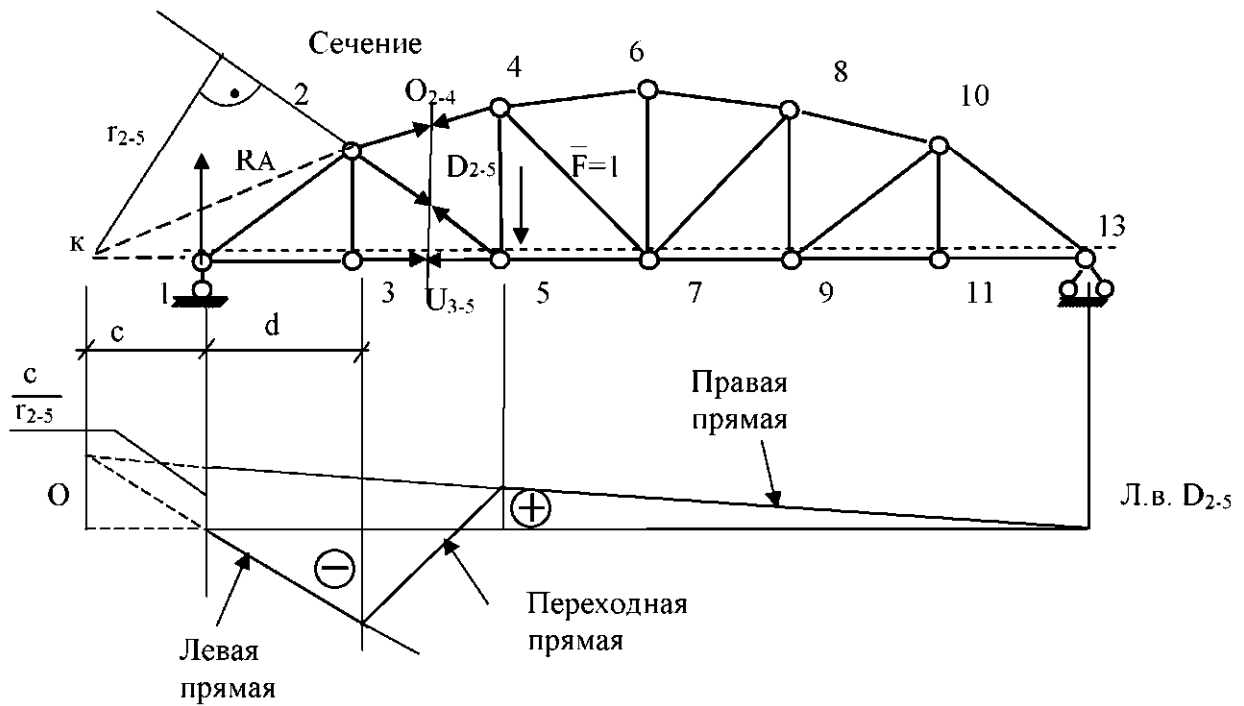


Рис. 4.8

4.3. Загружение линий влияния усилий в стержнях ферм

Загружение линий влияния усилий в стержнях ферм в принципе ничем не отличается от загружений линий влияния других усилий и осуществляется в соответствии с выражением $S_i = \sum_{i=1}^n F_i \cdot y_i$. Однако для некоторых стержней линии влияния усилий будут иметь различный вид в зависимости от расположения ездового полотна для езды поверху и езды понизу (см. рис. 4.6). В связи с этим величина усилия в стержне будут зависеть от того, к узлам какого пояса, верхнего или нижнего, приложена нагрузка и где расположено ездовое полотно.

Например, чтобы вычислить усилие в стержне V_{3-4} для силы F_6 , действующей на узел 4, необходимо её величину умножить на ординату y_6 линии влияния, соответствующей для езды поверху (см. рис. 4.6, e). Для определения усилия от F_n , приложенной в узле 3 нижнего пояса, величина V_{3-4} определяется путём умножения F_n на y_n линии влияния, соответствующей для езды понизу (см. рис. 4.6, d).

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В УПРУГИХ СИСТЕМАХ

5.1. Основные понятия и обозначения

Всякое сооружение под действием приложенных к нему внешних нагрузок и воздействий (сосредоточенные и распределённые нагрузки, осадка опор, температура и др.) изменяет свою первоначальную форму, т.е. все точки этого сооружения получают перемещения.

Определение перемещений осуществляют для того, чтобы оценить жёсткость сооружения. Для определения перемещений необходимо знать работу внутренних сил, возникающих в сооружении в результате действия на него внешних нагрузок.

В инженерной практике расчёт, связанный с определением перемещений, сводится к определению перемещений от действия внешних нагрузок, не вызывающих напряжений в поперечном сечении больше предела упругости. Такие перемещения называются упругими. Пусть отрезок ab , принадлежащий какому-то элементу конструкции, помещённый в прямоугольную систему координат и имеющий длину ds до деформирования элемента конструкции, занимал положение, показанное на рис. 5.1.

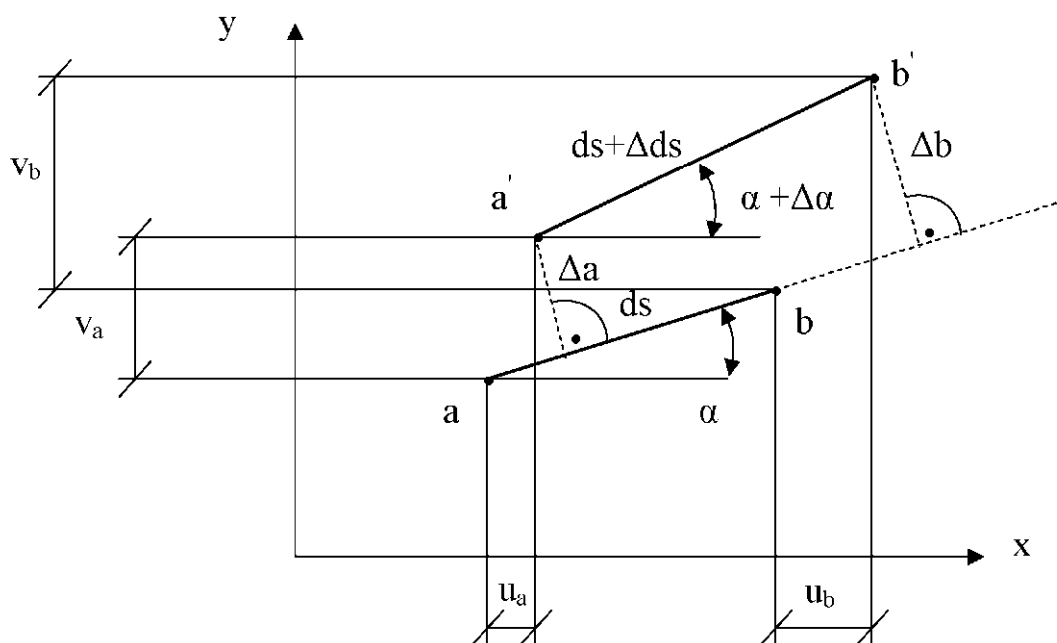


Рис. 5.1

После деформирования элемента конструкции этот отрезок займёт положение $a'b'$. При этом длина его изменится на величину Δds , а первоначальный угол α – на величину $\Delta\alpha$. Тогда расстояние aa' будет составлять полное перемещение точки a , а bb' – точки b ; $\Delta\alpha$ – угловое перемещение отрезка ab ; u_a и u_b – есть суть линейные перемещения точек a и b вдоль оси x соответственно, v_a и v_b – вдоль оси y , w – вдоль оси z (это перемещение на рис. 5.1 не показано, т.к. оно перпендикулярно плоскости чертежа).

Рассмотрим определение упругих перемещений. Полное перемещение обозначается символом Δ_{km} . Индексы у перемещения несут следующую смысловую нагрузку: первый индекс (в данном случае k) указывает на направление искомого перемещения; второй индекс (в данном случае m) указывает на причину, вызвавшую это перемещение. На рис. 5.2 показана иллюстрация индексов перемещений для балок, нагруженных разным типом нагрузок.

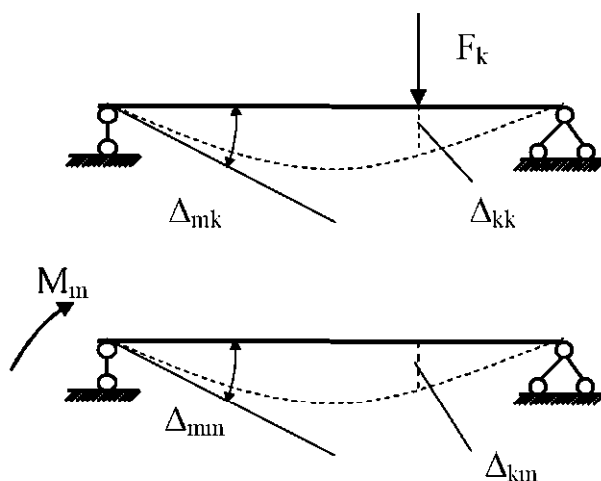


Рис. 5.2

Перемещения, вызванные действием силовых факторов, равных единице, называются *единичными* (удельными) и обозначаются δ_{km} или δ_{mm} .

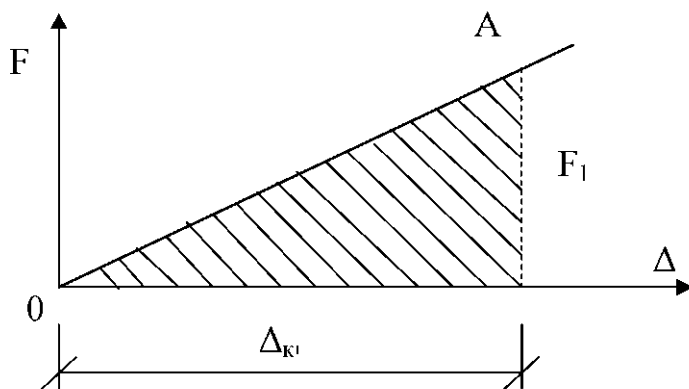
На основе принципа суперпозиции формула для определения перемещений, выраженных через единичные перемещения, принимает вид

$$\Delta_{km} = F_1 \cdot \delta_{k1} + \dots + F_i \cdot \delta_{ki} + \dots + F_n \cdot \delta_{kn}. \quad (5.1)$$

5.2. Действительная работа внешних сил

При определении работы внешних сил рассматривается статическое приложение нагрузки, когда она в процессе приложения к конструкции достаточно медленно возрастает от нуля до какого-то конечного значения и в дальнейшем остаётся неизменной.

Из сопротивления материалов известно, что работа, производимая силой F_1 на перемещении в направлении k , вызванном этой силой, равна площади треугольника OAB графика, показанного на рис. 5.3. В соответствии с этим действительная работа внешних сил описывается формулой

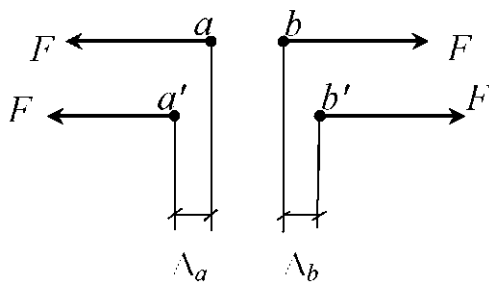


$$W = \frac{1}{2} \cdot F_1 \cdot \Delta_{k1}. \quad (5.2)$$

Рис. 5.3

5.3. Обобщённые силы и обобщённые перемещения

Под *обобщённой силой* будем понимать любое силовое воздействие. Под *обобщённым перемещением* будем понимать условное перемещение, определённое из того, что произведение обобщённой силы на обобщённое перемещение равно *обобщённой работе*. Сказанное поясним примерами.



Пример 1.

$$W = F \cdot \Delta a + F \cdot \Delta b = F \cdot (\Delta a + \Delta b) = F^* \cdot \Delta^*,$$

где F^* – обобщённая сила;

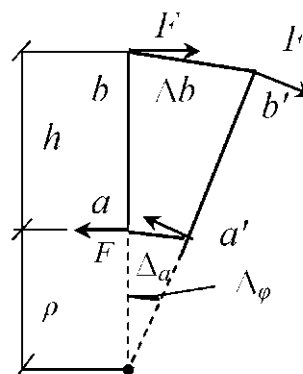
Δ^* – обобщённое перемещение.

Пример 2.

$$W = -F \cdot \Delta a + F \cdot \Delta b - F \cdot [(\rho + h) \cdot \Delta \varphi - \rho \cdot \Delta \varphi] - F \cdot h \cdot \Delta \varphi - M^* \cdot \Delta^*,$$

где M^* – обобщённая сила;

Δ^* – обобщённое перемещение.

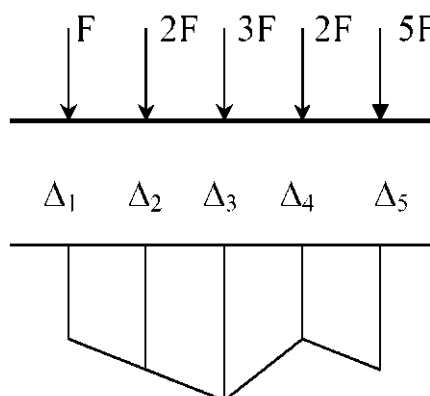


Пример 3.

$$A = F \cdot \Delta_1 + 2F \cdot \Delta_2 + 3F \cdot \Delta_3 + 2F \cdot \Delta_4 + 5F \cdot \Delta_5 = F(\Delta_1 + 2\Delta_2 + 3\Delta_3 + 2\Delta_4 + 5\Delta_5) = F^* \cdot \Delta^*,$$

где $F^* = F$ – обобщённая сила;

$\Delta^* = (\Delta_1 + 2\Delta_2 + 3\Delta_3 + 2\Delta_4 + 5\Delta_5)$ – обобщённое перемещение.



Здесь же необходимо дать понятие о действительной и возможной работе. При деформации тела внешние силы совершают работу на перемещениях точек приложения этих сил. Внутренние силы совершают работу на соответствующих им деформациях, которые могут быть как линейными, так и угловыми.

Работа называется действительной, если она производится на перемещениях, вызванных теми же силами. Работа называется возможной, если она производится на перемещениях или деформациях, вызванных другими факторами (силами, температурой, осадкой опор и др.).

5.4. Действительная работа внутренних сил

Выделим из конструкции, подверженной внешнему силовому воздействию, бесконечно малый элемент (рис. 5.4) длиной ds , на гранях которого имеют место внутренние силовые факторы M , Q и N .

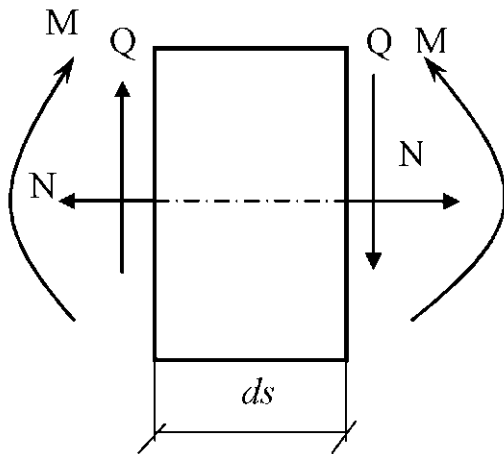


Рис. 5.4

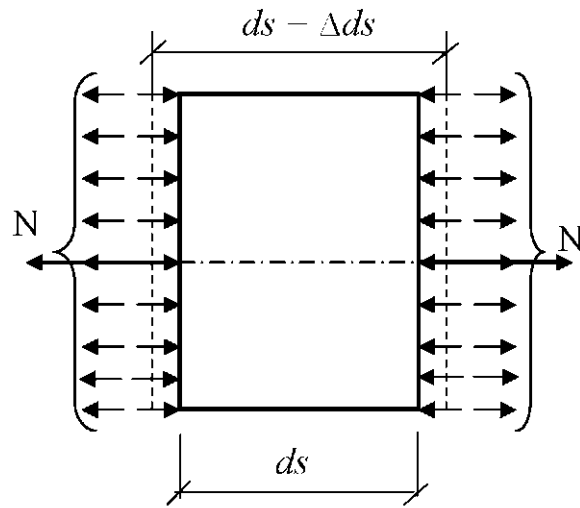


Рис. 5.5

Внутренние силовые факторы противодействуют изменению длин волокон материала, изгибу, сдвигу. Поэтому действительная работа, создаваемая внутренними силовыми факторами, будет отрицательной. В формулах для определения таких работ в этой связи ставят знак минус.

Найдём работу, совершаемую каждым из этих трёх внутренних силовых факторов на вызванных ими перемещениях.

1. Работа продольных сил.

Силы N вызвали изменение первоначальной длины элемента на величину Δds (рис. 5.5).

Из курса сопротивления материалов известно, что изменение длины стержня при деформации «растяжение–сжатие», когда на стержень действует сосредоточенная продольная сила N , определяют по формуле

$$\Delta ds = \frac{N \cdot ds}{EA}. \quad (5.3)$$

Элементарная работа внутренних сил на совершаемых ими перемещениях (в данном случае Δds), согласно приведённому определению действительной работы, может быть определена в соответствии с (5.2) по формуле

$$\Delta W^{(N)} = -\frac{1}{2} \cdot N \cdot \Delta ds. \quad (5.4)$$

Подставляя в выражение (5.4) выражение (5.3), получают формулу для определения элементарной работы:

$$\Delta W^{(N)} = \frac{1}{2} \cdot N \cdot \frac{N ds}{EA} = \frac{N^2 ds}{2EA}. \quad (5.5)$$

Тогда в целом по стержню продольная сила N совершит работу

$$W^{(N)} = -\int_s \frac{N^2 ds}{2EA}. \quad (5.6)$$

В случае системы, состоящей из n стержней, выражение (5.6) принимает следующий вид:

$$W^{(N)} = -\sum_{i=1}^n \int_s \frac{N_i^2 ds}{2E_i A_i}. \quad (5.7)$$

2. Работа изгибающего момента.

Под действием изгибающего момента M (рис. 5.6) произойдет взаимный поворот сечений бесконечно малого элемента длиной ds . При этом элементарная работа, совершаемая сосредоточенным моментом M , будет равна

$$\Delta W^{(M)} = -\frac{1}{2} \cdot M \cdot d\varphi. \quad (5.8)$$

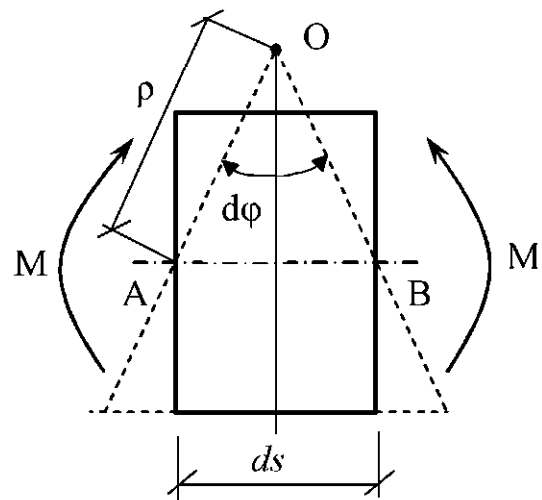


Рис. 5.6

В сопротивлении материалов при рассмотрении чистого изгиба получено следующее соотношение: $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ}$. Из рассмотрения треугольника OAB (см. рис. 5.6) очевидно, что $d\varphi = \frac{ds}{\rho}$. Подставляя эти соотношения в выражение (5.8), получим

$$\Delta W^{(M)} = -\frac{M \cdot ds}{2EJ}. \quad (5.9)$$

Выражение работы для стержневой системы с учётом действия на него системы сосредоточенных моментов принимает следующий вид:

$$W^{(M)} = -\sum_{i=1}^n \int \frac{M^2 ds}{2EJ}. \quad (5.10)$$

3. Работа от действия поперечной силы.

Вызванный силой Q сдвиг торцевых сечений бесконечно малого элемента определится из выражения $\Delta_y = \gamma \cdot ds$. С другой стороны, в соответствии с законом Гука при сдвиге $\gamma = \frac{\tau}{G}$. Подставив это соотношение в предыдущую формулу и учтя $\tau = \frac{Q}{A}$, найдём величину

сдвига
$$\Delta_y = \frac{Q \cdot ds}{AG}. \quad (5.11)$$

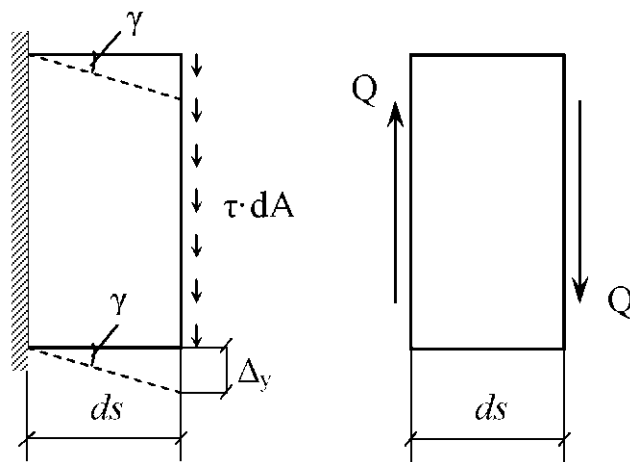


Рис. 5.7

Закрепим условно левую грань (рис. 5.7) бесконечно малого элемента и предположим, что касательные напряжения τ распределены по всей высоте сечения равномерно. Исходя из этого предположения

$$\tau = \frac{Q}{A}.$$

Элементарная работа статической силы Q на этом перемещении будет равна

$$\Delta W^{(Q)} = -\frac{1}{2} \cdot Q \cdot \Delta y = -\frac{Q^2 \cdot ds}{2AG}. \quad (5.12)$$

Из курса сопротивления материалов известно, что в действительности эпюра касательных напряжений по высоте сечения является непостоянной. Она изменяется по квадратной параболе от нуля в крайних волокнах до максимума в уровне нейтрального волокна. Поэтому в выражение (5.12) вводят поправочный коэффициент η , учитывающий неравномерность распределения по высоте сечения касательного напряжения τ . Формула, по которой определяют этот коэффициент, получена из известной формулы Журавского.

$$\eta = \frac{A}{J_z^2} \int \frac{S_{omc}}{b^2} dA. \quad (5.13)$$

Величина этого коэффициента, что очевидно из формулы (5.13), в которой участвуют только геометрические параметры сечения, зависит от формы поперечного сечения элемента. При этом коэффициент η всегда больше единицы. Так, для прямоугольника $\eta = 1,2$.

Выражение работы для стержневой системы с учётом действия на неё системы сосредоточенных поперечных сил принимает следующий вид:

$$W^{(Q)} = -\sum_{i=1}^n \int_s \eta \cdot \frac{Q^2 ds}{2GA}. \quad (5.14)$$

Суммируя работы от всех рассмотренных силовых факторов, получим выражение действительной работы внутренних силовых факторов стержневой системы

$$W = -\sum \int_s \frac{N^2 ds}{2EA} - \sum \int_s \frac{M^2 ds}{2EJ} - \sum \int_s \eta \frac{Q^2 ds}{2GA}. \quad (5.15)$$

Выражение (5.15), взятое с обратным знаком, носит название потенциальной энергии системы: $U = -W$.

5.5. Возможная работа внешних сил

Рассмотрим два состояния упругой системы (рис. 5.8).

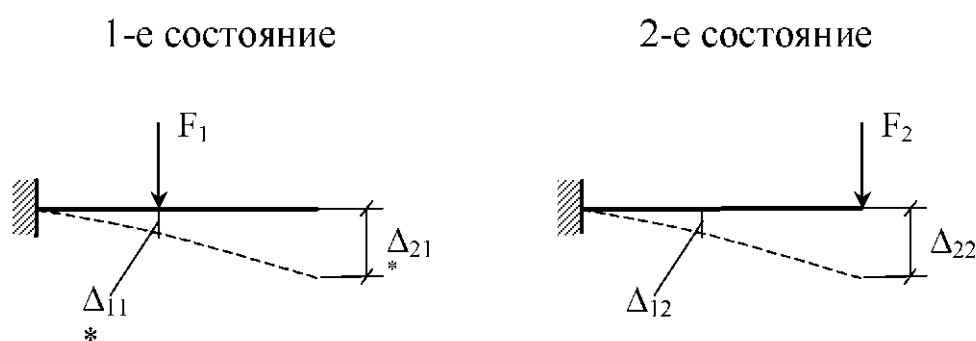


Рис. 5.8

В дальнейшем, понимая под F какую-то обобщённую силу, уберём индекс (*). Физический смысл показанных на рис. 5.8 перемещений заключается в следующем:

Δ_{11} – перемещение в направлении силы F_1 от действия той же силы F_1 ;

Δ_{21} – перемещение в направлении силы F_2 от действия силы F_1 ;

Δ_{12} – перемещение в направлении силы F_1 от действия силы F_2 ;

Δ_{22} – перемещение в направлении силы F_2 от действия той же силы F_2 .

Работу силы F_1 на вызванном ею перемещении Δ_{11} обозначим W_{11} , а работу силы F_2 на вызванном ею перемещении Δ_{22} – W_{22} . Учитывая, что эти силы приложены статически, в соответствии с определением действительной работы запишем

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= \frac{1}{2} \cdot F_1 \cdot \Delta_{11}; \\ A_{22} &= \frac{1}{2} \cdot F_2 \cdot \Delta_{22}. \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

С другой стороны, используя выражение (5.15), запишем

$$\left. \begin{aligned} W_{11} &= -\left(\sum_s \int \frac{N_1^2 ds}{2EA} + \sum_s \int \frac{M_1^2 ds}{2EJ} + \sum_s \eta \int \frac{Q_1^2 ds}{2GA}\right); \\ W_{22} &= -\left(\sum_s \int \frac{N_2^2 ds}{2EA} + \sum_s \int \frac{M_2^2 ds}{2EJ} + \sum_s \eta \int \frac{Q_2^2 ds}{2GA}\right). \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

Рассмотрим теперь статическое нагружение данной системы в такой последовательности (рис. 5.9): сначала к системе статически прикладывается сила F_1 . Затем, когда процесс нарастания силы F_1 закончится, к уже деформированной системе также статически прикладывается сила F_2 . До приложения силы F_2 работа

$$W_{11} = \frac{1}{2} \cdot F_1 \cdot \Delta_{11}.$$

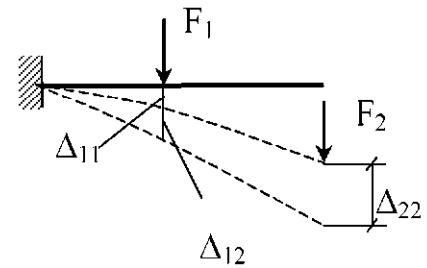


Рис. 5.9

В результате дополнительного нагружения силой F_2 система получает дополнительные деформации. В связи с этим в ней возникают дополнительные усилия, равные тем, что имели место во втором (см. рис. 5.8) состоянии. В процессе приложения силы F_2 сила F_1 остаётся неизменной. Поэтому она на перемещениях, вызванных силой F_2 , совершает возможную работу $A_{12} = F_1 \cdot \Delta_{12}$. В это время сила F_2 на вызванном ею перемещении Δ_{22} совершает действительную работу $A_{22} = \frac{1}{2} \cdot F_2 \cdot \Delta_{22}$. Таким образом, полная работа системы при описанном характере её нагружения будет равна

$$A = A_{11} + A_{12} + A_{22} = F_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \Delta_{11} + F_1 \cdot \Delta_{12} + F_2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \Delta_{22}. \quad (5.18)$$

С другой стороны, учитывая то, что работа сил не зависит от порядка их приложения, можно записать

$$A = F_1 \cdot \frac{\Delta_{11}}{2} + F_2 \cdot \Delta_{21} + F_2 \cdot \frac{\Delta_{22}}{2}. \quad (5.19)$$

Приравнивая два последних выражения, после преобразований получаются следующие равенства:

$$F_1 \cdot \Delta_{12} = F_2 \cdot \Delta_{21} \quad \text{или} \quad A_{12} = A_{21}. \quad (5.20)$$

На основании полученных равенств формулируется теорема о взаимности работ (теорема Бетти): *возможная работа внешних сил первого состояния на перемещениях по их направлениям, вызванных внешними силами второго состояния, равна возможной работе сил второго состояния на перемещениях по их направлениям, вызванных силами первого состояния.*

Снова рассмотрим два состояния системы. Но в качестве нагрузок в обоих состояниях примем силы $\bar{F}_1 = 1$ и $\bar{F}_2 = 1$. Тогда вызванные ими перемещения (рис. 5.10) будут единичными δ .

На основании теоремы Бетти можно записать $\bar{F}_1 \cdot \delta_{12} = \bar{F}_2 \cdot \delta_{21}$. Поскольку силы $\bar{F}_1 = 1$ и $\bar{F}_2 = 1$, то следует равенство $\delta_{12} = \delta_{21}$, называемое теоремой о взаимности перемещений (теорема Рэлея). *Перемещения по направлению сил первого состояния от сил, равных единице, второго состояния равны перемещениям по направлению сил второго состояния от сил, равных единице, первого состояния.*

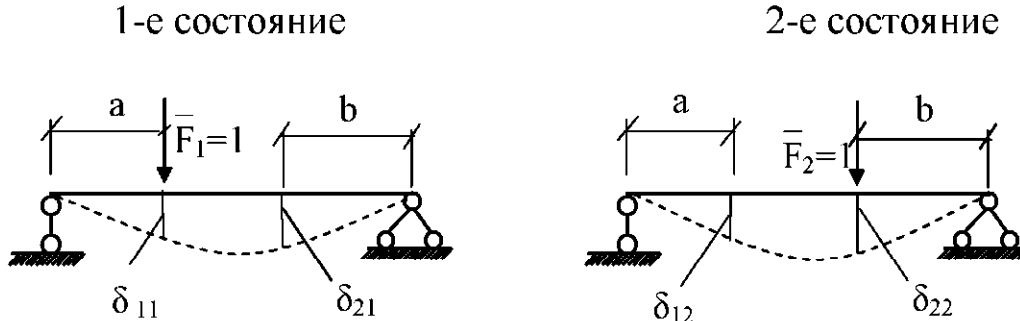


Рис. 5.10

5.6. Возможная работа внутренних сил

Определим возможную работу внутренних сил N , M и Q одного состояния на перемещениях, вызванных внутренними силами другого состояния (рис. 5.11).

В состоянии m под воздействием внешних сил в поперечном сечении рассматриваемого стержня возникают внутренние силы N_m , M_m и Q_m . После возникновения усилий состояния m к рассматриваемому стержню прикладывают внешнюю нагрузку состояния n , которая вы-

зывает появление в этом же поперечном сечении внутренних сил N_m , M_m и Q_m .

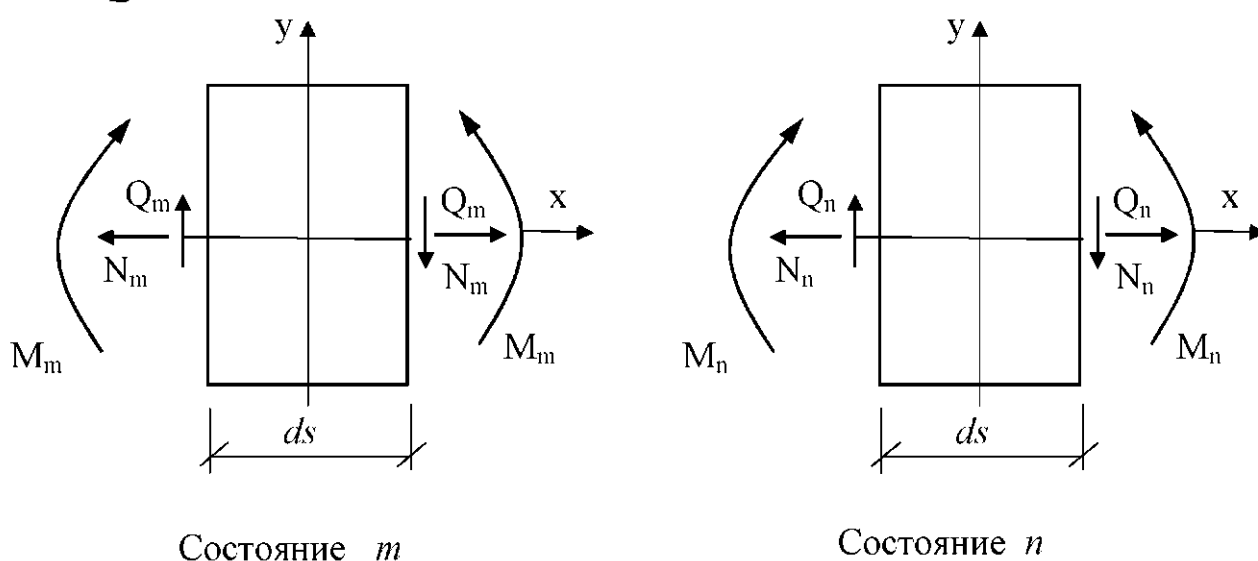


Рис. 5.11

Рассмотрим возможную работу сил N_m , M_m и Q_m на перемещениях, вызванных силами N_n , M_n и Q_n . Поскольку определяется работа внутренних сил, то она будет со знаком минус.

Элементарная возможная работа, создаваемая внутренними силовыми факторами в соответствии с принципом суперпозиции, представляет собой сумму $(dW_{N_m} + dW_{M_m} + dW_{Q_m})$ элементарных возможных работ. Каждое из слагаемых этой суммы представляет собой произведение величин внутреннего силового фактора состояния m на соответствующее перемещение, вызванное силами состояния n , что можно описать следующими выражениями: $dW_{N_m} = -N_m \cdot \frac{N_n ds}{EA}$;

$$dW_{M_m} = -M_m \cdot \frac{M_n ds}{EJ}; \quad dW_{Q_m} = -\eta Q_m \cdot \frac{Q_n ds}{GA}.$$

Возможная работа внутренних сил для стержневой системы в целом описывается выражением

$$W_{mn} = -\sum_s \int N_m \cdot \frac{N_n ds}{EA} - \sum_s \int M_m \cdot \frac{M_n ds}{EJ} - \sum_s \int \eta Q_m \frac{Q_n ds}{GA}. \quad (5.21)$$

Аналогично выражению (5.21) можно записать возможную работу внутренних сил состояния n на перемещениях, вызванных действием

внутренних сил состояния m :

$$W_{nm} = -\sum \int_s N_n \cdot \frac{N_m ds}{EA} - \sum \int_s M_n \cdot \frac{M_m ds}{EJ} - \sum \int_s \eta Q_n \frac{Q_m ds}{GA}. \quad (5.22)$$

Поскольку значения приведённых интегралов не зависят от перестановки местами значений внутренних усилий N_m , M_m , Q_m и N_n , M_n , Q_n , справедливым становится равенство $W_{nm} = W_{mn}$, называемое в строительной механике *теоремой о взаимности возможных работ внутренних усилий*. *Возможная работа внутренних сил состояния «m» на перемещениях, вызванных действием внутренних сил состояния «n», равна возможной работе внутренних сил состояния «n» на перемещениях, вызванных действием внутренних сил состояния «m».*

5.7. Определение перемещений. Интеграл Мора

Рассмотрим теперь два состояния системы, показанные на рис. 5.12. В первом из них на систему действует произвольный комплекс внешних нагрузок, во втором – только единичный силовой фактор – сила $\bar{F}_k = 1$.

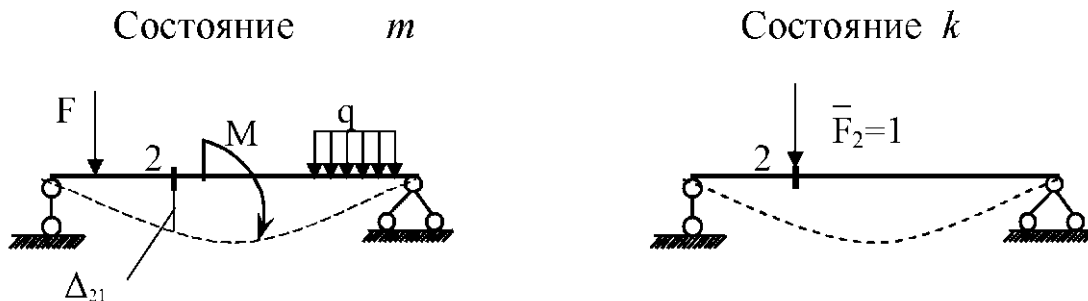


Рис.5.12

Составим выражение возможной работы, совершаемой заданным комплексом внешних и внутренних сил состояния k на перемещениях состояния m . Согласно принципу возможных перемещений, должно удовлетворяться равенство

$$W_{km} + \bar{F}_k \cdot \Delta_{km} = 0. \quad (5.23)$$

При этом возможная работа внутренних сил состояния k на пере-

мещениях состояния m

$$W_{km} = -\sum \int_s \bar{N}_k \frac{N_m d\ell}{EA} - \sum \int_s \bar{M}_k \frac{M_m d\ell}{EJ} - \sum \int_s \eta \bar{Q}_k \frac{Q_m d\ell}{GA}. \quad (5.24)$$

Возможная работа внешних сил состояния k на перемещениях состояния m будет равна

$$\bar{F}_k \cdot \Delta_{km} = 1 \cdot \Delta_{km}. \quad (5.25)$$

Подставляя в выражение (5.23) выражения (5.24) и (5.25), после арифметических преобразований получим

$$\Delta_{km} = \sum \int_s \bar{N}_k \frac{N_m ds}{EA} + \sum \int_s \bar{M}_k \frac{M_m ds}{EJ} + \sum \int_s \eta \bar{Q}_k \frac{Q_m ds}{GA}. \quad (5.26)$$

Черта над обозначениями усилий означает, что эти усилия найдены от действия единичного силового фактора. Таким образом, перемещения от любой нагрузки можно выразить через внутренние усилия, возникающие в этой системе от действия на неё заданной внешней нагрузки и от действия на неё единичного силового фактора. При этом направление единичного силового фактора совпадает с направлением искомого перемещения.

Если определяется линейное перемещение (рис. 5.13), то в единичном (дополнительном) состоянии к системе, в той точке, перемещение которой определяется, прикладывается сила $\bar{F} = 1$. Если определяется угловое перемещение (рис. 5.14), то к тому сечению, угол поворота которого определяется, прикладывают сосредоточенный момент $\bar{M} = 1$.

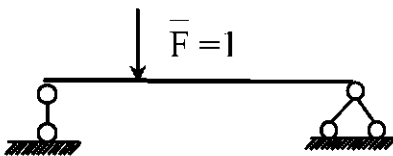


Рис. 5.13

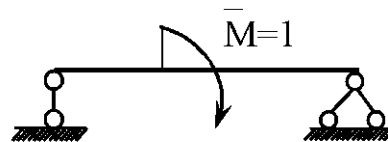


Рис. 5.14

Если определяют взаимное линейное смещение (рис. 5.15) двух точек системы, то в единичном состоянии к этим точкам по линии ис-

когого смещения прикладывают единичные сосредоточенные силы, вектор которых направлен в разные стороны.

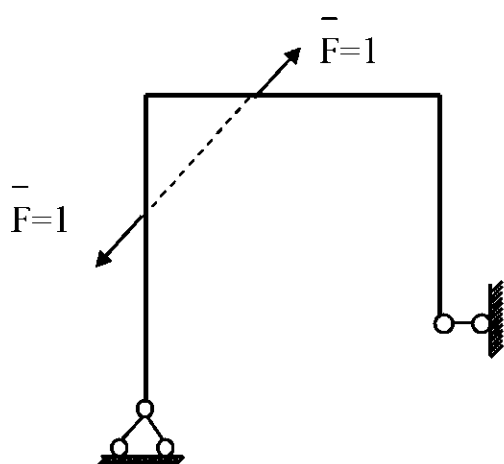


Рис. 5.15

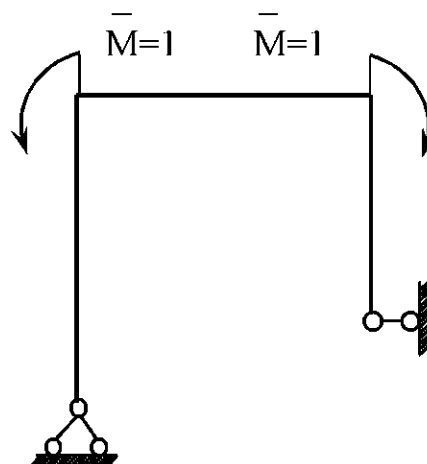


Рис. 5.16

Если определяют взаимное угловое перемещение двух сечений, то в единичном состоянии к этим двум сечениям (рис. 5.16) прикладывают сосредоточенные единичные моменты, вектор которых направлен в сторону возможного взаимного углового перемещения.

В общем виде формула для определения перемещений принимает вид выражения (5.26), называемого *интегралом Мора*.

Порядок определения перемещений:

- находят аналитические выражения для определения внутренних усилий при действии на систему заданной внешней нагрузки (действительное состояние системы – состояние m);

- по направлению искомого перемещения прикладывают соответствующий искомому перемещению единичный силовой фактор, от действия которого находят аналитическое выражение внутреннего силового фактора (единичное состояние системы – состояние k);

- полученные аналитические выражения внутренних силовых факторов подставляют под знаки интегралов и осуществляют интегрирование, результатом которого является определение величины искомого перемещения.

При этом следует отметить, что если знак найденного перемещения окажется отрицательным, то это означает, что действительное направление искомого перемещения направлено в противоположную сторону действия единичного силового фактора.

5.8. Правило П. Верещагина

На практике часто встречаются случаи, когда на отдельных участках стержни имеют одинаковые физические и геометрические параметры, а одна из подынтегральных функций изменяется линейно. Тогда при учёте только, например, изгибающего момента соответствующее слагаемое интеграла Мора принимает следующий вид:

$$\Delta_{km} = \frac{1}{EJ} \int \bar{M}_k \cdot M_m \cdot ds. \quad (5.27)$$

Подынтегральные функции представляют собой функции, по которым строят соответствующие эпюры (рис. 5.17).

Принимая $EJ = 1$ и переходя к интегрированию по координате x , получим

$$\Delta_{km} = \int_a^b \bar{M}_k \cdot M_m \cdot dx. \quad (5.28)$$

На рис. 5.16 эпюра \bar{M}_k представляет собой эпюру, построенную от того или иного силового фактора, равного единице (единичная эпюра), а эпюра M_m представляет собой эпюру, построенную от действия заданной внешней нагрузки. Такую эпюру называют грузовой эпюрой.

Из рис. 5.17 очевидно, что $\bar{M}_k = (x + a) \operatorname{tg} \alpha$. Подставив это выражение под знак интеграла (5.28), получим

$$\Delta_{km} = \int_c^b (x + a) \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot M_m \cdot dx = \operatorname{tg} \alpha \int_{\Omega} (x + a) \cdot d\Omega. \quad (5.29)$$

В выражении (5.27) $d\Omega = M_m \cdot dx$ – дифференциал площади эпюры M_m ; $\int_{\Omega} (x + a) d\Omega$ – статический момент площади эпюры M_m (площади Ω) относительно оси $O - O'$.

Этот статический момент можно записать как $S_m = (x_c + a) \Omega$, где $(x_c + a)$ – расстояние от центра тяжести эпюры M_m до оси $O - O'$. Таким образом, выражение (5.29)

можно переписать так: $\Delta_{km} = \int_c^b \bar{M}_k \cdot M_m \cdot dx = (x_c + a) \cdot \Omega \operatorname{tg} \alpha$.

Произведение в правой части $-(x_c + a) \cdot \operatorname{tg} \alpha = y_c$.

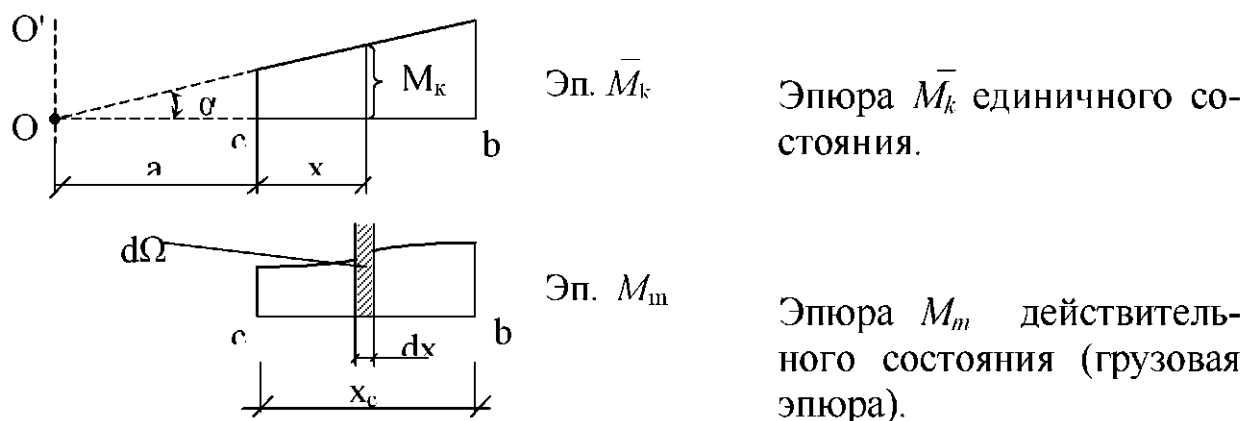


Рис.5.17

В выражении (5.27) $d\Omega = M_m \cdot dx$ – дифференциал площади пюры M_m ; $\int_{\Omega} (x + a) d\Omega$ – статический момент площади эпюры M_m (площади Ω) относительно оси $O - O'$. Этот статический момент можно записать как $S_m = (x_c + a)\Omega$, где $(x_c + a)$ – расстояние от центра тяжести эпюры M_m до оси $O - O'$. Таким образом, выражение (5.29)

можно переписать так: $\Delta_{km} = \int_c^b \bar{M}_k \cdot M_m \cdot dx = (x_c + a) \cdot \Omega \operatorname{tg} \alpha$. Произведение в правой части $-(x_c + a) \cdot \operatorname{tg} \alpha = y_c$. На основании изложенного

$$\Delta_{km} = \int_a^b \bar{M}_k \cdot M_m \cdot dx = \Omega y_c. \quad (5.30)$$

Окончательно можно записать следующее равенство:

$$\Delta_{km} = \frac{1}{EJ} \int_s \bar{M}_k \cdot M_m \cdot ds = \frac{\Omega \cdot y_c}{EJ} = \frac{\operatorname{Эп.} \bar{M}_k \cdot \operatorname{Эп.} M_m}{EJ}. \quad (5.31)$$

Таким образом, доказана возможность интегрирования методом перемножения эпюр. *Перемножить две эпюры – найти площадь одной из них и умножить на ординату, снятую на другой и находящуюся под центром тяжести первой.* Знак произведения считается положительным, если обе перемножаемые эпюры находятся по одну сторону стержня. Следует помнить, что если перемножаются две прямолинейные эпюры, то не имеет значения, на какой из них брать

площадь, а на какой – ординату. Если одна из перемножаемых эпюр является криволинейной, то необходимо брать площадь именно криволинейной эпюры. Перемножать эпюры можно только на тех участках, на которых обе эпюры являются неломаными и жёсткостные характеристики поперечных сечений являются постоянными. В противном случае перемножение эпюр необходимо осуществлять по участкам. Тогда выражение (5.31) примет вид

$$\Delta_{km} = \sum \frac{1}{EJ} \int \bar{M}_k \cdot M_m \cdot ds = \sum \frac{\text{Эп.} \bar{M}_k \cdot \text{Эп.} M_m}{EJ}. \quad (5.32)$$

Суммирование по выражению (5.32) должно осуществляться по всем участкам, по длине которых имеет место непрерывность подынтегральных функций \bar{M}_k и M_m .

В качестве примера (рис. 5.18) покажем перемножение двух трапеций.

Для того чтобы удобно было находить центр тяжести эпюр, необходимо эти эпюры разделять на простые фигуры, положение центра тяжести которых известно. В данном случае обе трапеции можно представить состоящими из двух треугольников, обозначенных римскими цифрами. Тогда по формуле (5.31)

$$\begin{aligned} \Delta_{km} &= I \cdot III + I \cdot IV + II \cdot III + II \cdot IV = \\ &= \frac{1}{EJ} (\omega_1 \cdot y_1 + \omega_1 \cdot y_1' + \omega_2 \cdot y_2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \omega_2 \cdot y_2') = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{2} a \ell \left(\frac{2}{3} c \right) + \frac{1}{2} a \ell \left(\frac{1}{3} d \right) + \frac{1}{2} b \ell \left(\frac{1}{3} c \right) + \frac{1}{2} b \ell \left(\frac{2}{3} d \right) \right) = \\ &= \frac{\ell}{6EJ} (2(ac + bd) + ad + bc). \end{aligned}$$

Полученное выражение носит название *формулы трапеции*.

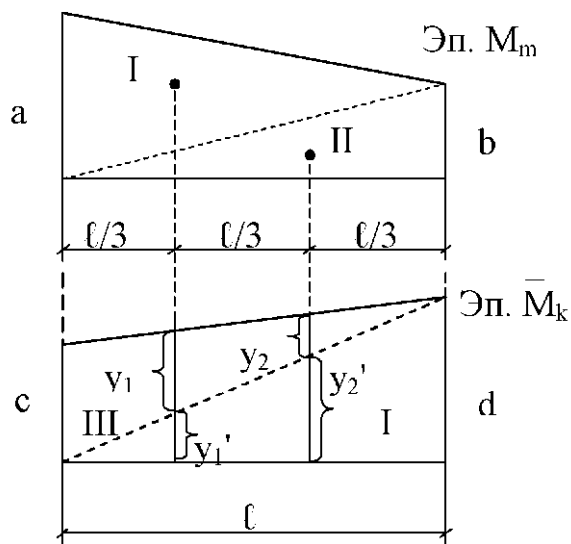


Рис. 5.18

5.9. Определение перемещений от действия температуры

Интеграл Мора, как отмечалось в предыдущем подразделе, может быть представлен в следующем виде:

$$\Delta_{km} = \sum \int_s \bar{M}_k \cdot \Delta_\varphi + \sum \int_s \bar{N}_k \cdot \Delta_s + \sum \int_s \bar{Q}_n \cdot \Delta_y. \quad (5.33)$$

В выражении (5.33) $\Delta_\varphi = \frac{M_m ds}{EJ}$ – взаимный угол поворота торцевых сечений (рис. 5.19) элемента, имеющего бесконечно малую длину ds стержня от заданной внешней нагрузки; $\Delta_s = \frac{N_m \cdot ds}{EA}$ – взаимное смещение торцевых сечений ds ; $\Delta_y = \eta \cdot \frac{Q_m ds}{GA}$ – взаимное смещение торцевых сечений вдоль оси, перпендикулярной оси элемента. В таком виде интеграл Мора может быть использован для определения перемещений не только от действия сил, но и от температуры.

Пусть верхнее волокно элемента ds нагрето на t_1 , а нижнее – на t_2 . При этом $t_1 > t_2$. Распределение температуры по высоте сечения принято по прямолинейному закону. При температурном коэффициенте линейного расширения α верхнее волокно удлинится на $\alpha t_1 ds$, а нижнее – на $\alpha t_2 ds$. На уровне нейтральной оси это удлинение, что очевидно из рис. 5.19, составит полусумму удлинений верхнего и нижнего волокон элемента ds .

$$\Delta_{sm} = \Delta_{st} = \frac{\alpha(t_1 + t_2)}{2} ds. \quad (5.34)$$

Выражение (5.34) соответствует тому состоянию элемента ds , при котором он по всей высоте сечения h получил равномерное изменение температуры. От неравномерного нагрева торцевые сечения элемента ds поворачиваются на угол

$$\Delta_{\varphi m} = \Delta_{\varphi t} = \frac{\alpha(t_1 - t_2)}{h} ds. \quad (5.35)$$

Деформация сдвига в элементе ds не возникает, т.е. $\Delta_{yn} = 0$.

Подставляя (5.34) и (5.35) в (5.33), получим интеграл Мора для определения температурных перемещений.

$$\Delta_{kt} = \sum \alpha \frac{t_1 - t_2}{h} \int_s \bar{M}_k \cdot ds + \sum \alpha \frac{t_1 + t_2}{2} \int_s \bar{N}_k \cdot ds. \quad (5.36)$$

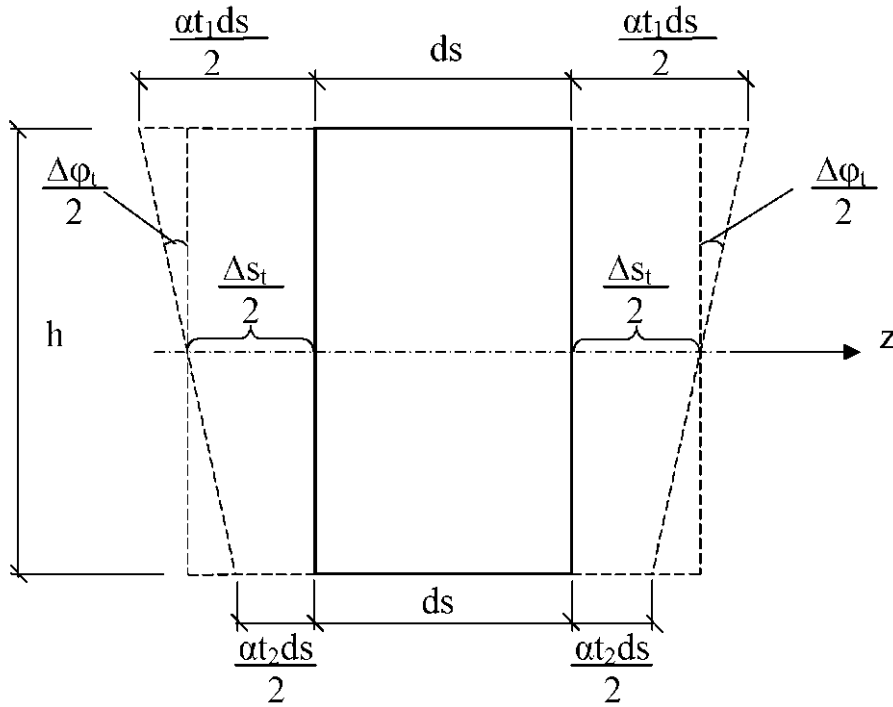


Рис. 5.19

Интеграл Мора (5.34) значительно упрощается тогда, когда интегрирование ведётся для прямолинейных или ломаных стержней, имеющих по длине постоянное поперечное сечение. В этом случае интегралы могут быть определены, как площади единичных эпюр.

$$\Delta_{kt} = \sum \alpha \frac{t_1 - t_2}{h} \Omega_{\bar{M}} + \sum \alpha \frac{t_1 + t_2}{2} \Omega_{\bar{N}}, \quad (5.37)$$

где $\Omega_{\bar{M}}$ и $\Omega_{\bar{N}}$ – площади единичных эпюр \bar{M} и \bar{N} .

При поперечном сечении элемента, несимметричном относительно нейтральной оси, в формулах (5.34) и (5.35) во втором слагаемом множитель, связанный с температурой, принимает вид $t_2 + [(t_1 - t_2)/h]y$, где y – расстояние от нижнего волокна до горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести. При этом необходимо помнить следующее правило знаков: *если деформации элемента ds от температуры и от единичной силы одного знака, то соответствующие слагаемые в формулах (5.34) и (5.35) будут положительными, и соответственно наоборот.*

5.10. Определение перемещений от осадки опор

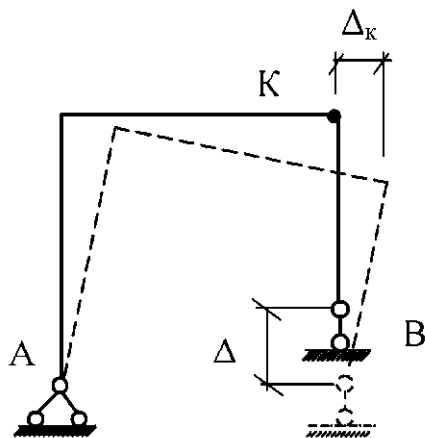
При перемещениях опор любой статически определимой конструкции в её опорных закреплениях опорные реакции не возникают.

Пусть опора B рамы, представленной на рис. 5.20, получила осадку на величину Δ . При определении линейного перемещения произвольной точки, например K , в единичном состоянии к этой точке в направлении искомого перемещения прикладывают сосредоточенную силу $\bar{F} = 1$. От действия этой силы определяют опорные реакции.

На основании принципа возможных перемещений можно составить следующую аналитическую зависимость:

$$\begin{aligned} \bar{F}_k \cdot \Delta_{k\Delta} - R_b \cdot \Delta &= 0; \\ 1 \cdot \Delta_{k\Delta} - R_b \cdot \Delta &= 0; \\ \Delta_{k\Delta} &= R_b \cdot \Delta. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Действительное состояние



Единичное состояние

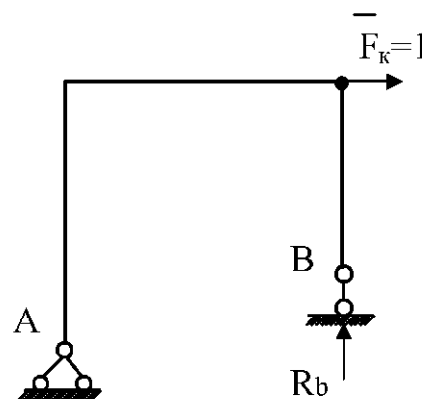


Рис. 5.20

В соответствии с третьим уравнением в (5.37) можно записать общую формулу для определения перемещений от i -й осадки опор:

$$\Delta_{k\Delta} = \sum R_i \cdot \Delta_i. \quad (5.39)$$

Произведение в (5.37) считается положительным, если опорная реакция направлена в противоположную сторону от осадки опор.

6. РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ

6.1. Понятие о статической неопределимости

Статически неопределимыми называются такие стержневые системы, для оценки напряжённо-деформированного состояния которых недостаточно трёх уравнений статики. Для того чтобы осуществить оценку напряжённо-деформированного состояния таких систем, необходимо составить дополнительные уравнения.

По способу составления таких уравнений (что называется раскрытием статической неопределимости) в строительной механике разработано несколько методов. Одним из первых таких методов был разработан *метод сил*.

Статически неопределимые системы имеют так называемые «лишние» связи. «Лишними» могут быть как внешние, так и внутренние связи. Поэтому различают как внешнюю, так и внутреннюю статическую неопределимость.

Число лишних связей определяет степень статической неопределимости системы:

$$n = 3K - Ш, \quad (6.1)$$

где K – количество замкнутых контуров системы; $Ш$ – число однократных шарниров.

Замкнутым считается такой контур, который полностью ограничен стержнями рамы или стержнями и землёй. Цифра 3 означает, что замкнутый контур является трижды статически неопределимой системой.

Выражение (6.1) является частным случаем выражения (1.1) и предназначено для определения статической неопределимости плоских рам. Если после определения степени статической неопределимости $n < 0$, это означает, что рассматриваемая стержневая система не обладает необходимым минимумом связей и поэтому не может быть использована в качестве сооружения. В случае $n = 0$ система обладает необходимым минимумом связей, является статически определимой и при правильном расположении этих связей, не допускающих любой геометрической изменяемости системы, может быть использована в качестве сооружения. В случае $n > 0$ рассматриваемая стержневая система обладает «лишними» связями и поэтому является статически

неопределимой и может быть использована в качестве сооружения. Так, для рамы, показанной на рис 6.1, $K = 2$; $Ш = 4$.

Подставляя эти данные в выражение (6.1), получим

$$n = 3 \cdot 2 - 4 = 2. \quad (6.2)$$

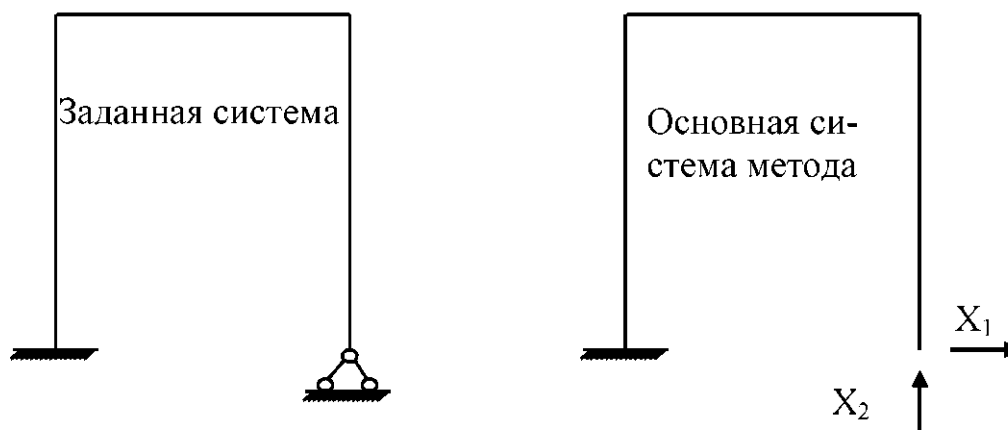


Рис. 6.1

Из выражения (6.2) очевидно, что рама, изображённая на рис. 6.1, является дважды статически неопределимой системой.

Статически неопределимые системы обладают следующими свойствами:

1. В статически неопределимых системах, по сравнению со статически определимыми, при одной и той же нагрузке значения внутренних усилий получаются меньшими.
2. Статически неопределимые системы являются более жёсткими по сравнению со статически определимыми.
3. Разрушение «лишних» связей в статически неопределимых системах не ведёт к разрушению всей системы.
4. В статически неопределимых системах температурные воздействия и осадка опор вызывают появление дополнительных усилий в отличие от статически определимых систем.

6.2. Основная система метода сил

Любой способ раскрытия статической неопределимости предполагает выбор для заданной системы основной системы. В методе сил основную систему выбирают из заданной, устраняя «лишние» связи.

За «лишние» могут быть приняты как внешние, так и внутренние связи. *Внешние связи* являются опорными связями, а *внутренними* являются связи, препятствующие взаимному перемещению двух смежных сечений при мысленном рассечении стержня или удалении из него шарнира.

Для любой статически неопределимой системы существует несколько вариантов основной системы.

Рациональной основной системой является такая, для которой при её решении наиболее просто составляются уравнения статики.

Основная система метода сил должна быть желательно статически определимой и геометрически неизменяемой. Для того чтобы основная система оставалась эквивалентна заданной, вместо устранённых «лишних» связей вводят неизвестные усилия X . На рис. 6.2 приведены два варианта основной системы. В качестве «лишних» связей выбраны внешние.

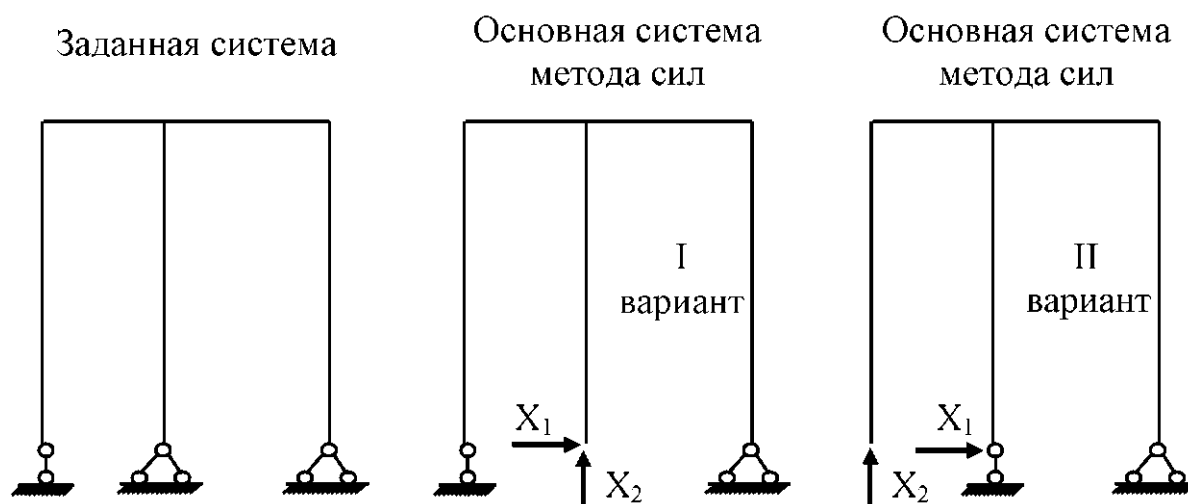


Рис. 6.2

Наиболее простым представляется II вариант основной системы.

На рис. 6.3 для заданной системы приведена основная система, где за «лишние» выбраны внутренние связи, полученные путём мысленного устранения внутреннего шарнира.

Основная система, принятая для расчёта и нагруженная внешней нагрузкой и усилиями X , приложенными вместо устранённых связей, будет эквивалентна заданной в случае, если перемещения в этих системах равны между собой.

Если при расчёте удаляются внешние связи, то условием эквивалентности будет равенство нулю перемещений по направлению

устранённых связей. Если за «лишние» связи приняты внутренние, то условием эквивалентности будет равенство нулю взаимных перемещений смежных поперечных сечений в месте разреза системы.

Для заданных систем, имеющих n лишних связей, условие эквивалентности имеет вид

$$\Delta_1 = 0; \quad \dots; \quad \Delta_i = 0; \quad \dots; \quad \Delta_n = 0, \quad (6.3)$$

где Δ_i – перемещения по направлению удаленных связей.

Используя принцип независимости действия сил, условие (6.3) запишем в виде

$$\Delta_i = \Delta_{i1} + \Delta_{i2} + \dots + \Delta_{ik} + \dots + \Delta_{iF} = 0, \quad (6.4)$$

где Δ_{ik} – перемещение по направлению i -й удалённой связи, вызванной действием k -й неизвестной силы; Δ_{iF} – перемещение по направлению i -й удалённой связи от действия нагрузки.

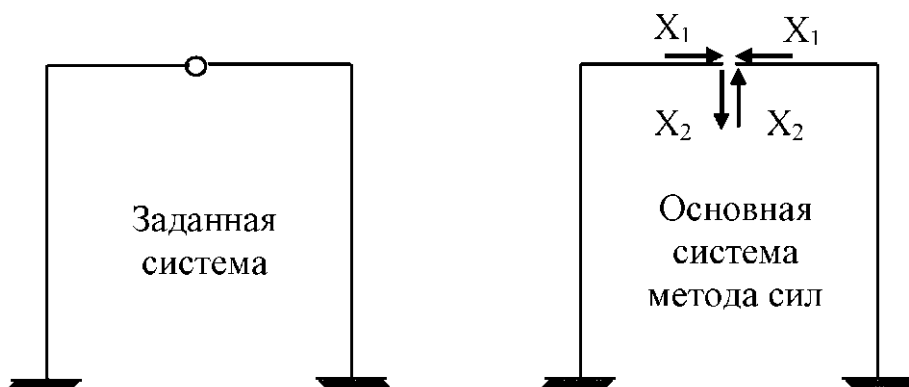


Рис. 6.3

6.3. Канонические уравнения метода сил

Любое перемещение, вызванное какой-либо силой, для линейно деформируемых систем можно выразить в виде произведения этой силы на перемещение от действия единичной силы:

$$\Delta_{ik} = X_k \delta_{ik}, \quad (6.5)$$

где X_k – искомое усилие; δ_{ik} – перемещение по направлению i -й связи основной системы от действия силы $X_k = 1$.

Для статически неопределимой системы с n «лишними» связями

система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} X_1 \cdot \delta_{11} + \dots + X_i \cdot \delta_{1i} + \dots + X_n \cdot \delta_{1n} + \Delta_{1F} = 0; \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ X_1 \cdot \delta_{i1} + \dots + X_i \cdot \delta_{ii} + \dots + X_n \cdot \delta_{in} + \Delta_{iF} = 0; \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ X_1 \cdot \delta_{n1} + \dots + X_i \cdot \delta_{in} + \dots + X_n \cdot \delta_{nn} + \Delta_{nF} = 0. \end{cases} \quad (6.6)$$

Система (6.6) называется *системой канонических уравнений метода сил*. В связи с тем, что заданная рассчитываемая статически неопределимая конструкция под действием внешних и внутренних сил находится в равновесии, каждое уравнение системы уравнений (6.6) отрицает наличие перемещений по направлению устранённых связей.

Коэффициенты с одинаковыми индексами называются главными и могут быть только положительными.

Коэффициенты с разными индексами называются побочными, они могут быть как положительными, так и отрицательными. Побочные коэффициенты обладают свойством взаимности, т.е. $\delta_{ij} = \delta_{ji}$.

Коэффициенты Δ_{iF} называются грузовыми и представляют собой перемещения в основной системе в направлении i -й устранённой связи от заданной внешней нагрузки.

6.4. Определение коэффициентов канонических уравнений

Вычисление коэффициентов при неизвестных системы канонических уравнений метода сил и её грузовых членов, представляющих единичные и грузовые перемещения, проводится с помощью известных методов определения перемещений, изложенных в предыдущем разделе.

Обычно при расчёте систем с прямолинейными элементами применяется правило П.Верещагина, в соответствии с которым осуществляется перемножение эпюр. При этом, если рассматриваются так называемые изгибные конструкции (балки, рамы и арки), то определение перемещений ведётся с учётом только изгибающих моментов M , так как перемещения, учитывающие значения продольных N и поперечных Q сил, оказываются несопоставимо малыми по сравнению с теми, которые имеют место от действия изгибающего момента M , и

ими пренебрегают.

Для определения единичных коэффициентов используют формулу

$$\delta_{ik} = \sum \frac{\text{Эн.}\bar{M}_i \cdot \text{Эн.}\bar{M}_k}{EJ} = \sum \frac{\omega_i \cdot y_k}{EJ}, \quad (6.7)$$

где $\text{Эн.}\bar{M}_i$ – эпюра изгибающих моментов, построенная в основной системе от действия неизвестной силы $X_i = 1$, приложенной в точке устранения i -й «лишней» связи; $\text{Эн.}\bar{M}_k$ – эпюра изгибающих моментов, построенная в основной системе от действия неизвестной силы $X_k = 1$, приложенной в точке устранения k -й «лишней» связи; ω_i – площадь эпюры изгибающих моментов \bar{M}_i ; y_k – координата на эпюре \bar{M}_k , расположенная под центром тяжести эпюры \bar{M}_i .

Свободные члены системы канонических уравнений (6.6) метода сил определяют по формуле

$$\Delta_{iF} = \sum \frac{\text{Эн.}M_F^0 \cdot \text{Эн.}\bar{M}_i}{EJ} = \sum \frac{\omega_F \cdot y_i}{EJ}, \quad (6.8)$$

где $\text{Эн.}M_F^0$ – эпюра изгибающих моментов (грузовая эпюра), построенная в основной системе от действия заданных внешних нагрузок; ω_F – площадь грузовой эпюры M_F^0 ; y_i – ордината на эпюре \bar{M}_i , расположенная под центром тяжести грузовой эпюры M_F^0 .

Для проверки правильности определения коэффициентов при неизвестных строят в соответствии с выражением (6.9) суммарную единичную эпюру \bar{M}_S .

$$\text{Эн.}\bar{M}_S = \sum_{i=1}^n \text{Эн.}\bar{M}_i. \quad (6.9)$$

Правильность определения коэффициентов δ_{ik} (единичных перемещений) при неизвестных в системе канонических уравнений метода сил в соответствии с *универсальной проверкой* осуществляется выражением (6.10), согласно которому квадрат суммарной единичной эпюры \bar{M}_S равен сумме всех коэффициентов при неизвестных:

$$\frac{\partial n \bar{M}_S^2}{EJ} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \delta_{ik} . \quad (6.10)$$

В случае неудовлетворения равенства (6.10) осуществляют согласно выражению (6.11) *построчную проверку*, когда произведение суммарной единичной эпюры \bar{M}_S на любую единичную эпюру должно дать сумму единичных перемещений того уравнения, на единичную эпюру которой осуществлялось перемножение:

$$\frac{\partial n \bar{M}_S \cdot \partial n \bar{M}_k}{EJ} = \sum_{k=1}^n \delta_{ik} . \quad (6.11)$$

Правильность определения свободных членов системы канонических уравнений метода сил осуществляется в соответствии с выражением (6.12). В соответствии с (6.12) суммарную единичную эпюру \bar{M}_S умножают на грузовую эпюру M_F^0 . Результат этого умножения должен быть равен сумме свободных членов системы канонических уравнений:

$$\frac{\partial n \bar{M}_S \cdot \partial n M_F^0}{EJ} = \sum \Delta_{iF} . \quad (6.12)$$

После контроля правильности определения параметров системы канонических уравнений их подставляют в эту систему. В результате решения полученной системы линейных алгебраических уравнений находят значения «лишних» неизвестных X_i .

6.5. Построение эпюр внутренних усилий в заданной системе

Основная система, в которой определены значения всех «лишних» неизвестных, представляет собой статически определимую систему с действующими на неё заданной внешней нагрузкой и усилиями X_i . Для построения эпюр внутренних усилий M, N, Q составляются аналитические выражения этих внутренних усилий для характерных участков рассчитываемой конструкции.

Кроме того, для построения эпюр внутренних усилий может быть использован также приём, основанный на принципе независимости действия сил. На основании этого принципа для заданной n раз стати-

чески неопределимой системы усилия определяются в соответствии с выражением

$$M = M_F^0 + \sum \bar{M}_i \cdot X_i. \quad (6.13)$$

По полученным ординатам (6.13) строят эпюру M в заданной системе. Достаточным условием правильности построения эпюры M является проведение деформационной проверки. Для проведения деформационной проверки из заданной рассчитываемой системы выбирают любую основную систему *метода сил*, в которой строят любую эпюру моментов \bar{M}_i от действия неизвестной силы $X_i = 1$.

Соблюдение условия $\frac{\text{Эп.}M \cdot \text{Эп.}\bar{M}_i(\text{мет.сил})}{EJ} = 0$ свидетель-

ствует о правильности построения эпюры M . Поперечные силы в заданной системе определяются по известной из теории изгиба дифференциальной зависимости

$$Q_x = \frac{dM}{ds} = \text{tg} \alpha = Q_x^0 + \frac{M_{\text{прав}} - M_{\text{лев}}}{\ell}, \quad (6.14)$$

где α – угол между эпюрой M и осью стержня рамы; Q_x^0 – балочное значение поперечной силы.

Продольные силы N в заданной системе определяют путём вырезания узлов на эпюре Q_x . Составляют уравнения равновесия для этих узлов, проецируя силы на оси стержней, из которых и находят искомые значения усилий N .

По эпюрам M , Q , N определяют реактивные усилия в опорах рассчитываемой рамы и проводят две проверки правильности построения итоговых эпюр внутренних усилий.

Узловая проверка. Вырезая узлы на эпюре M , составляют уравнения равновесия статики $\sum M$, равенство нулю которых свидетельствует о правильности построенной эпюры M .

Статическая проверка. Для осуществления статической проверки показывают заданную схему рамы с действующей на неё заданной внешней нагрузкой, найденными усилиями X_i и усилиями в опорных связях Q и N . Справедливость уравнений статики $\sum x = 0$ и $\sum y = 0$ свидетельствует о правильности построенных эпюр Q и N .

В данном «Курсе» представляем примеры расчёта статически неопределимых рам методом сил на действие температуры и осадки опор.

6.6. Расчёт статически неопределимых рам методом сил на температурные воздействия

Воздействие на конструкцию температуры является одним из видов внешнего силового фактора. Поэтому система канонических уравнений в этом случае будет отличаться от уравнений (6.6) только свободными членами.

$$\begin{cases} X_1 \cdot \delta_{11} + \dots + X_i \cdot \delta_{1i} + \dots + X_n \cdot \delta_{1n} + \Delta_{1t} = 0; \\ \dots \dots \dots \\ X_1 \cdot \delta_{i1} + \dots + X_i \cdot \delta_{ii} + \dots + X_n \cdot \delta_{in} + \Delta_{it} = 0; \\ \dots \dots \dots \\ X_1 \cdot \delta_{n1} + \dots + X_i \cdot \delta_{in} + \dots + X_n \cdot \delta_{nn} + \Delta_{nt} = 0. \end{cases} \quad (6.15)$$

В системе уравнений (6.15) коэффициенты при неизвестных (единичные перемещения) определяются так же, как при расчёте на действие статической нагрузки, тогда как свободный член Δ_{it} системы (6.15) представляет собой перемещение в основной системе рассчитываемой рамы по направлению устранённой i -й связи от действия температуры.

В результате решения системы уравнений (6.15) находят значения неизвестных усилий X_{it} . Тогда эпюра M^t может быть построена в соответствии с выражением

$$M^t = \sum_{i=1}^n \bar{M}_i \cdot X_{it}. \quad (6.16)$$

В основной системе рамы от действия температуры возникают только перемещения, а внутренние усилия при этом равны нулю. В заданной системе рамы возникают как перемещения, так и внутренние усилия. Рассмотрим пример расчёта статически неопределимой рамы (рис. 6.4), в качестве внешней нагрузки на которую действует изменение температуры.

Исходные данные для расчёта: $\ell=10$ м; α – коэффициент линейно-

го температурного расширения; t_1 – температура наружных волокон рамы; t_2 – температура внутренних волокон; $t_1 > t_2$; $h = 0,125 \ell$ – высота поперечного сечения рамы (рис. 6.5).

Степень статической неопределимости заданной системы определится из выражения

$$n = 3K - \text{III} = 3 \cdot 2 - 4 = 2. \quad (6.17)$$

Из (6.17) очевидно, что заданная система является дважды статически неопределимой.

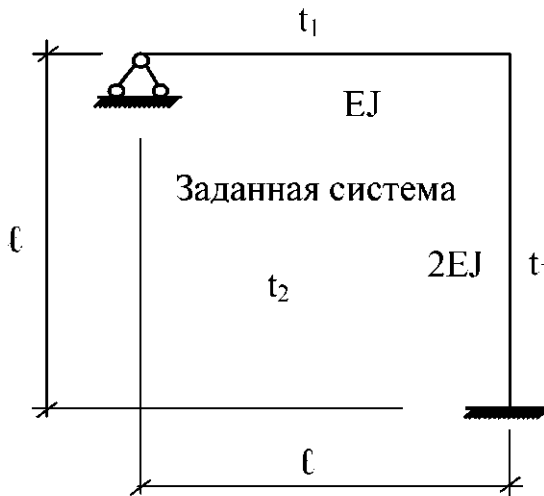


Рис. 6.4

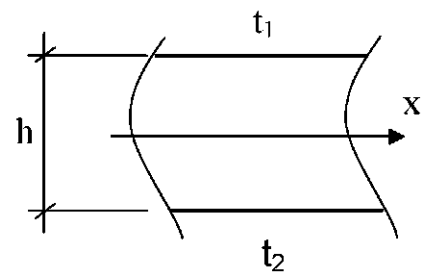


Рис. 6.5

Основная система рамы выбрана из заданной путём устранения из неё двух простых кинематических опорных связей. Для того чтобы основная система рамы была эквивалентна заданной, вместо устранённых связей поставлены искомые усилия X_{1t} и X_{2t} .

В связи с тем, что при определении перемещений от действия температуры учитывается влияние и изгибающих моментов M , и продольных сил N , единичные эпюры построены для этих силовых факторов. На рис. 6.7 и 6.8 представлены эпюры от действия соответственно $X_1=1$ и $X_2=1$.

Система канонических уравнений в данной задаче принимает вид выражения

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_{1t} + \delta_{12} \cdot X_{2t} + \Delta_{1t} = 0; \\ \delta_{21} \cdot X_{1t} + \delta_{22} \cdot X_{2t} + \Delta_{2t} = 0. \end{cases} \quad (6.18)$$



Рис. 6.6

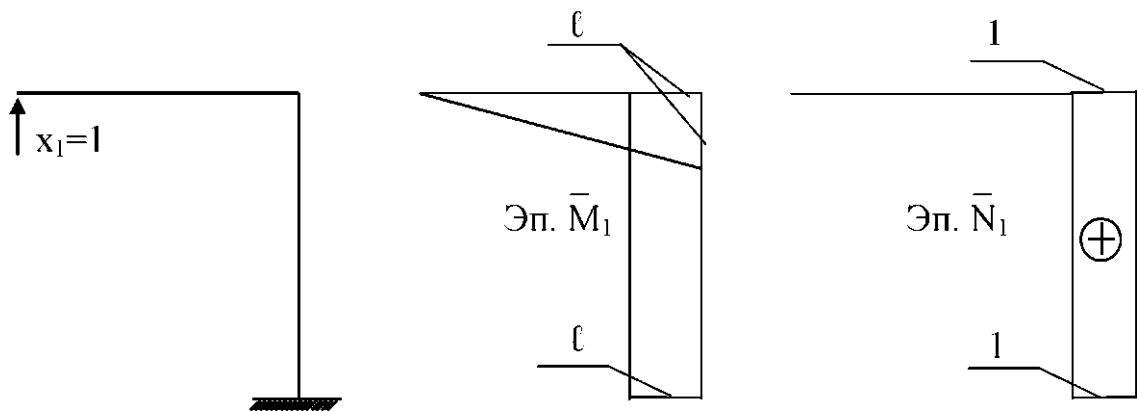


Рис. 6.7

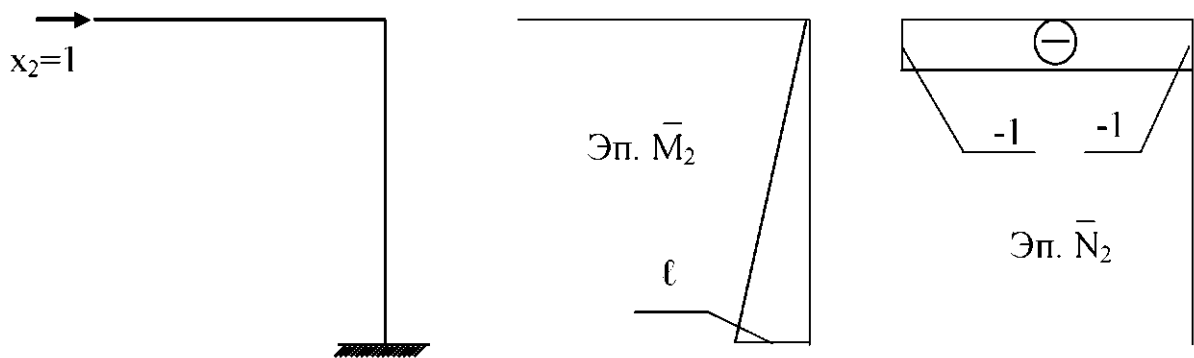


Рис. 6.8

Определим коэффициенты канонических уравнений:

$$\begin{aligned}
\delta_{11} &= \frac{\partial n \cdot \bar{M}_1 \cdot \partial n \cdot \bar{M}_1}{EJ} = \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot \ell \cdot \frac{2}{3} \ell \cdot \frac{1}{EJ} + \ell \cdot \ell \cdot \ell \cdot \frac{1}{2EJ} = \frac{5\ell^3}{6EJ}; \\
\delta_{12} = \delta_{21} &= \frac{\partial n \cdot \bar{M}_1 \cdot \partial n \cdot \bar{M}_2}{EJ} = \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot \ell \cdot \ell \cdot \frac{1}{2EJ} = \frac{\ell^3}{4EJ}; \\
\delta_{22} &= \frac{\partial n \cdot \bar{M}_2 \cdot \partial n \cdot \bar{M}_2}{EJ} = \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot \ell \cdot \frac{2}{3} \ell \cdot \frac{1}{2EJ} = \frac{\ell^3}{6EJ}.
\end{aligned} \tag{6.19}$$

Свободные члены системы канонических уравнений (6.19) определим по формулам предыдущего раздела:

$$\Delta_{it} = \pm \sum \alpha \cdot \frac{\Delta t}{h} \cdot \Omega_M \pm \alpha \cdot t_{cp} \cdot \Omega_N, \tag{6.20}$$

где $\Delta t = t_1 - t_2$ – изменение температур; h – высота поперечного сечения элемента; $\frac{\ell}{h} = 8$; $t_1 = 30^0$; $t_2 = 20^0$ С; Ω_M – площадь эпюры моментов \bar{M}_i в основной системе; Ω_N – площадь эпюры продольных сил \bar{N}_i в основной системе.

Знаки в (6.20) определяют, сравнивая деформации от температуры и от единичного воздействия. Если кривизна от силы и температуры одного знака, то знак в слагаемом берётся плюс.

Если деформации от силы и от температуры одного знака, то второе слагаемое будет положительное.

$$\begin{aligned}
\Delta_{1t} &= \alpha \frac{\Delta t}{2} \cdot \ell + \frac{\alpha \Delta t}{h} \left(\frac{1}{2} \cdot \ell \cdot \ell + \ell \cdot \ell \right) = \frac{\alpha \Delta t \ell}{2} \left(1 + 3 \frac{\ell}{h} \right); \\
\Delta_{2t} &= -\alpha \frac{\Delta t}{2} \cdot \ell + \alpha \cdot \frac{\Delta t}{h} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot \ell = \frac{\alpha \Delta t \ell}{2} \left(\frac{\ell}{h} - 1 \right).
\end{aligned}$$

Подставляя найденные значения перемещений (6.19) и (6.20) в систему уравнений (6.18), получают систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{5}{6} \cdot \frac{\ell^3}{EJ} \cdot X_{1t} + \frac{\ell^3}{4EJ} \cdot X_{2t} + \frac{\alpha \Delta t \ell}{2} \cdot \left(1 + 3 \frac{\ell}{h} \right) = 0; \\ \frac{\ell^3}{4EJ} \cdot X_{1t} + \frac{\ell^3}{6EJ} \cdot X_{2t} - \frac{\alpha \Delta t \ell}{2} \cdot \left(1 - \frac{\ell}{h} \right) = 0. \end{cases} \tag{6.21}$$

После решения любым известным в математике методом системы канонических уравнений (6.21) находят значения X_{1t} и X_{2t} усилий в «лишних» связях от действия температуры.

$$X_{1t} = \frac{-15,8362EJ\alpha\Delta t}{\ell^2} = -1,5836EJ\alpha; \quad X_{2t} = \frac{2,4575EJ\alpha\Delta t}{\ell^2} = 0,2457EJ\alpha.$$

Умножая эпюру \bar{M}_1 на X_{1t} , а эпюру \bar{M}_2 – на X_{2t} и суммируя их, получим эпюру M^t , от действия температуры (рис. 6.9).

По эпюре M^t , используя дифференциальную зависимость между Q и M , определяем

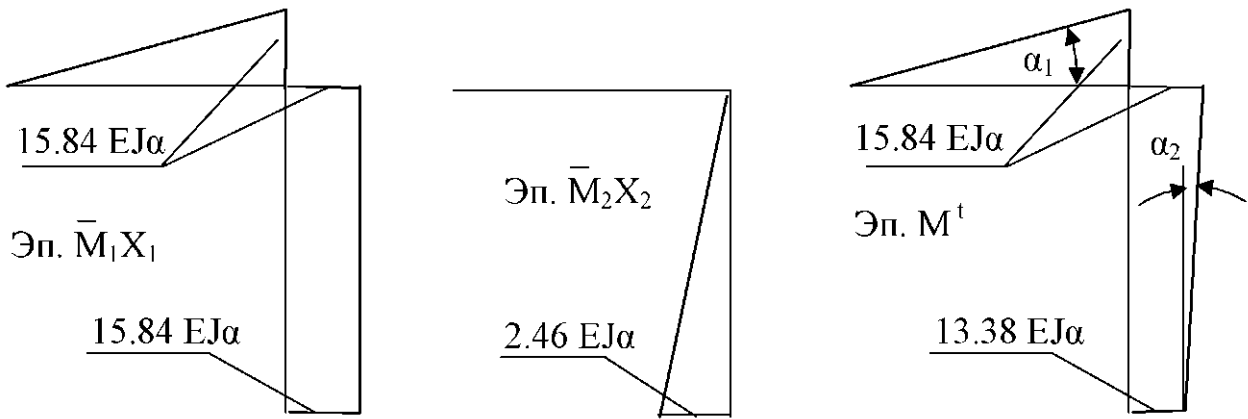


Рис. 6.9

$$Q^{\text{ригель}} = \text{tg}\alpha_1 = -1,8362EJ\alpha,$$

$$Q^{\text{стойка}} = \text{tg}\alpha_2 = +\frac{(15,8362-13,3787)EJ\alpha}{10};$$

$$Q^{\text{стойка}} = \frac{2,4575EJ\alpha\Delta t}{\ell^2} = 0,2457EJ\alpha.$$

По полученным значениям строим итоговую эпюру поперечных сил в заданной системе (рис. 6.10). Для построения эпюры продольных сил N^t на эпюре Q^t вырезаем узел С (рис. 6.11).

Составляем условия равновесия узла С:

$$\sum x = -2,4575 \frac{EJ\alpha\Delta t}{\ell^2} - N_{\text{риз}} = 0; \quad (6.22)$$

$$\sum y = -N_{\text{см}} - 1,58362 \frac{EJ\alpha\Delta t}{\ell^2} = 0. \quad (6.23)$$

Из (6.22) и (6.23) находим $N_{\text{риз}} = -0,24575EJ\alpha$; $N_{\text{см}} = -1,58362EJ\alpha$.

По полученным значениям строим эпюру N' (рис. 6.12).

Проверки правильности построенных эпюр:

•Статическая проверка.

Для заданной рамы покажем все реактивные усилия, взятые с эпюр Q' , N' и M' (рис. 6.13).

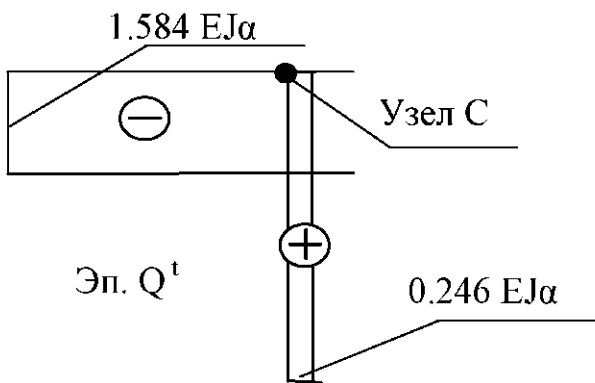


Рис. 6.10

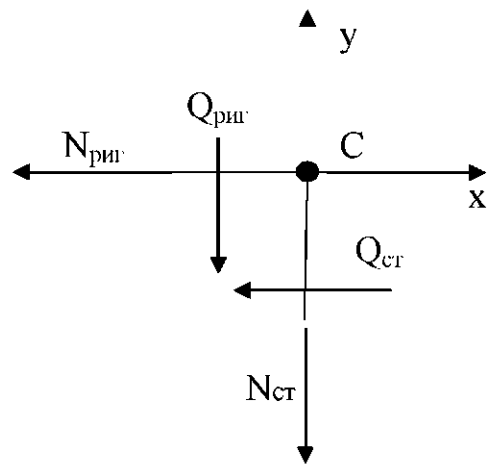


Рис. 6.11

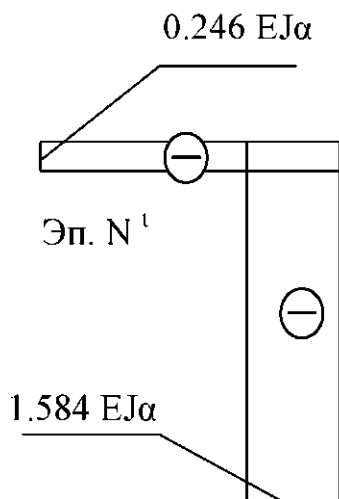


Рис. 6.12

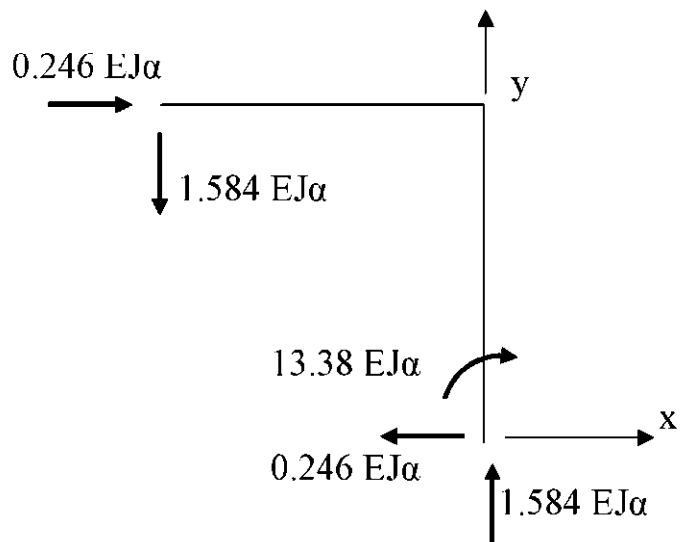


Рис. 6.13

Составим уравнения равновесия для рамы:

$$\sum x = -\frac{2,4575EJ\alpha\Delta t}{\ell^2} + \frac{2,4575EJ\alpha\Delta t}{\ell^2} = 0;$$

$$\sum y = -\frac{15,8362EJ\alpha\Delta t}{\ell^2} + \frac{15,8362EJ\alpha\Delta t}{\ell^2} = 0;$$

$$\sum m_A = -\frac{13,3787EJ\alpha\Delta t}{\ell} + \frac{2,4575EJ\alpha\Delta t}{\ell^2} \cdot \ell - \frac{-15,8362EJ\alpha\Delta t}{\ell^2} \cdot \ell = 0.$$

Статическая проверка выполнена и подтвердила правильность построенных эпюр.

• Деформационная проверка.

Результат перемножения эпюр M^t на единичную эпюру в основной системе (при воздействии температуры) равняется Δ_{it} , где Δ_{it} – температурное перемещение в направлении X_i в основной системе.

$$\sum \frac{\partial n.M^t \cdot \partial n.\bar{M}_1}{EJ} = -\Delta_{1t} \quad \sum \frac{\partial n.M^t \cdot \partial n.\bar{M}_2}{EJ} = -\Delta_{2t}.$$

Проверим эти условия:

$$-\frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{EJ\alpha\Delta t}{\ell} \cdot \ell \cdot \frac{2}{3} \cdot \ell + \frac{1}{2EJ} \cdot \ell \cdot \ell \cdot \frac{14,6074EJ\alpha\Delta t}{\ell} = -12,5\alpha\Delta t\ell;$$

$$-\Delta_{1t} = -12,5EJ\alpha\Delta t\ell;$$

$$-\frac{\ell}{2EJ} \cdot \frac{\ell}{6} \cdot \left(2 \cdot \frac{13,3787EJ\alpha\Delta t}{\ell} \cdot \ell + \frac{15,8362EJ\alpha\Delta t}{\ell} \cdot \ell \right) = -3,5094EJ\Delta t\ell\alpha;$$

$$-\Delta_{2t} = -3,5EJ\alpha\Delta t \cdot \ell.$$

Выполненная деформационная проверка подтверждает правильность построенных эпюр.

6.7. Расчёт статически неопределимой рамы на осадку опор

Опорные крепления любой строительной конструкции могут перемещаться. Чаще всего это может проявляться при осадке фундаментов. От этих перемещений статически неопределимая система деформируется и в её элементах возникают внутренние усилия. Поэтому необходимо производить расчёт таких систем с учётом перемещений их опорных связей.

Канонические уравнения для статически неопределимых систем, рассчитываемых методом сил, аналогично расчёту на температурное воздействие имеют вид

$$\begin{cases} X_1 \cdot \delta_{11} + \dots + X_i \cdot \delta_{1i} + \dots + X_n \cdot \delta_{1n} + \Delta_{1\Delta} = 0; \\ \dots \\ X_1 \cdot \delta_{i1} + \dots + X_i \cdot \delta_{ii} + \dots + X_n \cdot \delta_{in} + \Delta_{i\Delta} = 0; \\ \dots \\ X_1 \cdot \delta_{n1} + \dots + X_i \cdot \delta_{in} + \dots + X_n \cdot \delta_{nn} + \Delta_{n\Delta} = 0. \end{cases} \quad (6.24)$$

Коэффициенты при неизвестных в (6.24) определяются так же, как и при обычном расчёте, а свободные члены $\Delta_{i\Delta}$, представляющие собой перемещения от осадки опорных связей, определяют по полученному в разделе 5 выражению

$$\Delta_{i\Delta} = \sum_{i=1}^k R_i \cdot c_i, \quad (6.25)$$

где R_i – реактивное усилие в опорной связи от действия на основную систему единичного силового фактора; c_i – осадка рассматриваемой опорной связи.

Рассмотрим пример расчёта статически неопределимой рамы на смещение опор (рис. 6.14). Левая опора рамы сместилась в вертикальном направлении на величину c . Построим эпюры внутренних усилий при смещении этой опоры. Степень статической неопределимости рассматриваемой рамы и её основная система метода сил определены в предыдущем примере.

Канонические уравнения метода сил запишутся в виде

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_{1\Delta} + \delta_{12} \cdot X_{2\Delta} + \Delta_{1\Delta} = 0; \\ \delta_{21} \cdot X_{1\Delta} + \delta_{22} \cdot X_{2\Delta} + \Delta_{2\Delta} = 0. \end{cases} \quad (6.26)$$

В данном примере найденные по выражению (6.25) $\Delta_{1\Delta} = c$; $\Delta_{2\Delta} = 0$.
Если подставить найденные перемещения в канонические уравнения метода сил и решить эту систему, то окажется, что

$$X_{1\Delta} = \frac{24}{11} \cdot \frac{EJ}{\ell^3} \cdot c; \quad X_{2\Delta} = \frac{36}{11} \cdot \frac{EJ}{\ell^3} \cdot c.$$

Итоговая эпюра изгибающих моментов от осадки опор в заданной системе может быть построена по известному выражению

$$\mathcal{E}n.M^{\Delta} = \mathcal{E}n.\bar{M}_1 \cdot X_{1\Delta} + \mathcal{E}n.\bar{M}_2 \cdot X_{2\Delta}. \quad (6.27)$$

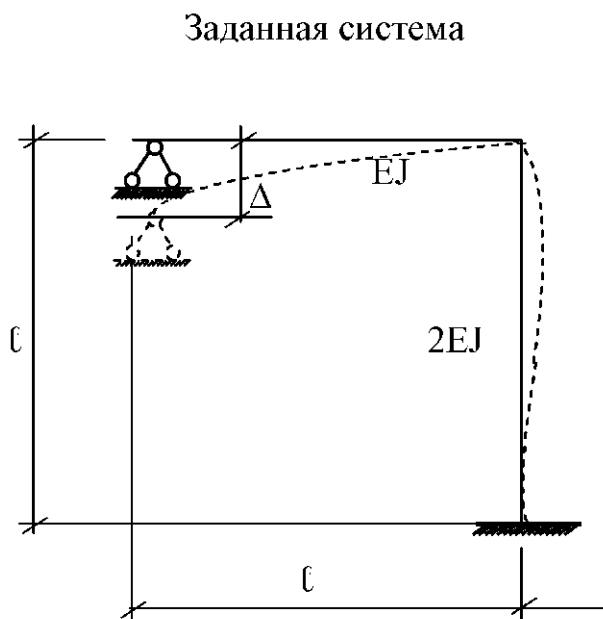


Рис. 6.14

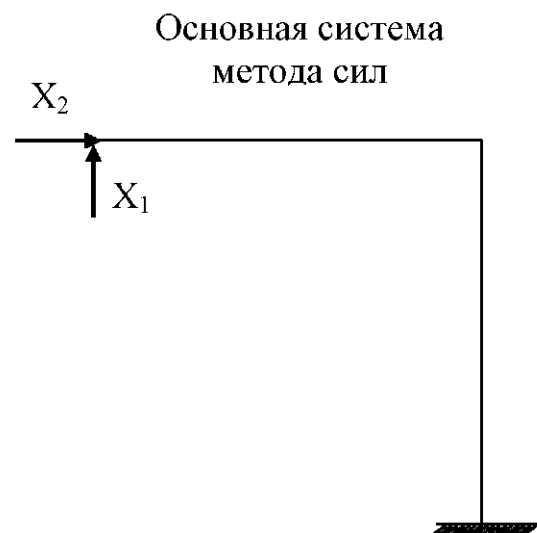


Рис. 6.15

На рис. 6.16 показано построение итоговой эпюры моментов в заданной системе от смещения опоры.

По итоговой эпюре моментов M^{Δ} строим итоговую эпюру поперечных сил $Q_{итог}^{\Delta}$ в соответствии с выражением

$$Q^{\Delta} = \frac{dM^{\Delta}}{d\ell} = \operatorname{tg}\alpha. \quad (6.28)$$

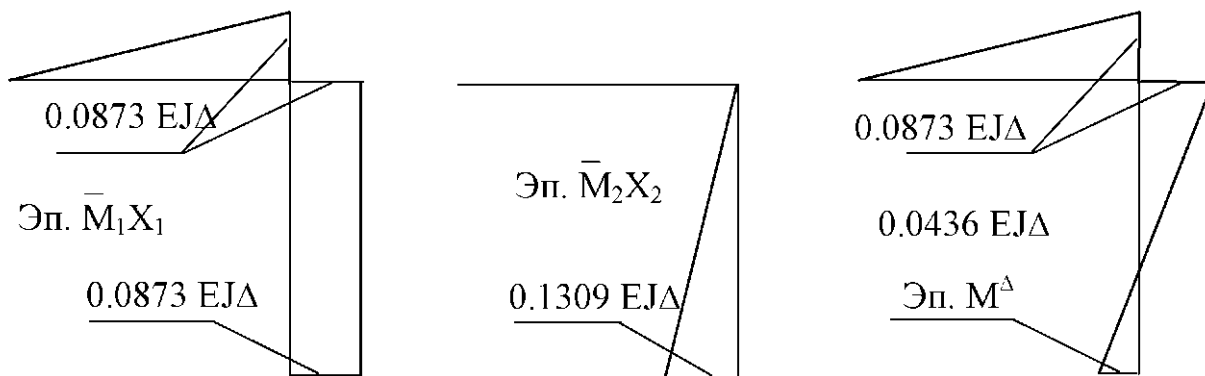


Рис. 6.16

Тогда

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = Q^{pic} = -\frac{24EJ}{11\ell^3} \cdot c;$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = Q^{cm} = -\frac{36}{11} \cdot \frac{EJ}{\ell^3} \cdot c.$$

На рис. 6.17 показана эпюра поперечных сил Q^Δ в заданной системе от осадки опор.

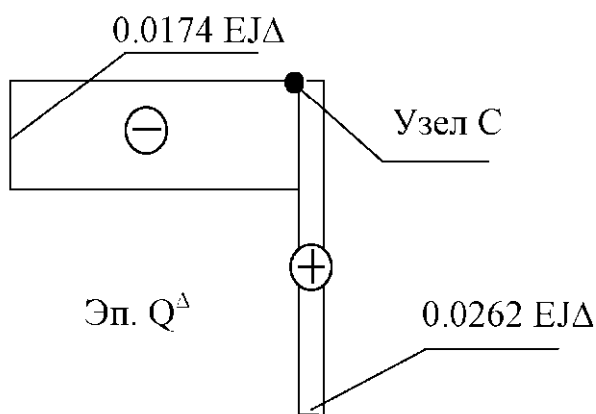


Рис. 6.17

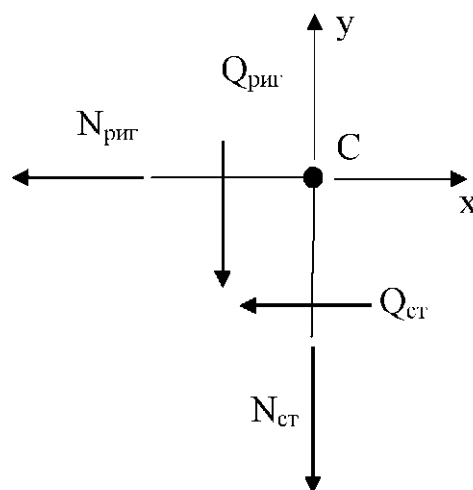


Рис. 6.18

Для построения эпюры продольных сил вырежем узел C на эпюре

Q^Δ и рассмотрим его равновесие (рис. 6.18).

$$\sum x = -\frac{36 EJc}{11 \ell^3} - N_{риз} = 0; \quad \sum y = -\frac{24 EJc}{\ell^3} - N_{см} = 0. \quad (6.29)$$

Из уравнений равновесия (6.29) находим

$$N_{риз} = -\frac{36 EJc}{11 \ell^3} \text{ — продольная сила в ригеле;}$$

$$N_{см} = -\frac{24 EJc}{\ell^3} \text{ — продольная сила в стойке.}$$

По полученным значениям строим эпюру продольных сил N^Δ в заданной системе от осадки опор (рис. 6.19). Проведём статическую проверку правильности построенных эпюр. На рис. 6.20 показана схема рамы с опорными реакциями, возникшими в ней от осадки опор. Составляем уравнения равновесия, записав суммы проекций сил, действующих на раму, соответственно на оси x и y .

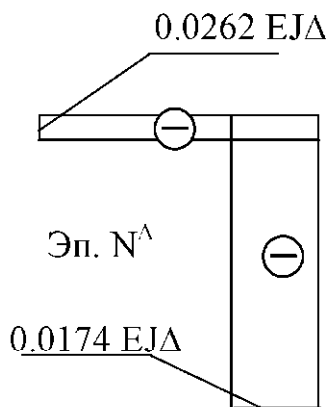


Рис. 6.19

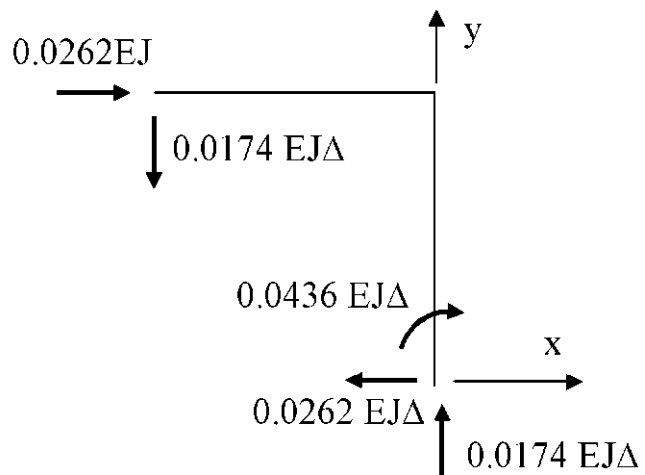


Рис. 6.20

$$\sum x = -\frac{36 EJc}{11 \ell^3} - \frac{36 EJc}{11 \ell^3} = 0; \quad \sum y = -\frac{24 EJc}{11 \ell^3} + \frac{24 EJc}{11 \ell^3} = 0;$$

$$\sum m = -\frac{36 EJc}{11 \ell^3} \cdot \ell - \frac{24 EJc}{11 \ell^3} \cdot \ell - \frac{12 EJc}{11 \ell^2} = 0.$$

Уравнения равновесия выполняются, что свидетельствует о правильности выполненных расчётов.

7. РАСЧЁТ НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛОК

7.1. Уравнение трех моментов

Неразрезной называется статически неопределимая балка, прикреплённая к земле более чем тремя простыми кинематическими связями.

При расчёте неразрезных балок опоры принято нумеровать слева направо. На рис. 7.1 показана многопролётная неразрезная балка и её основная система, выбранная в соответствии с методом сил.

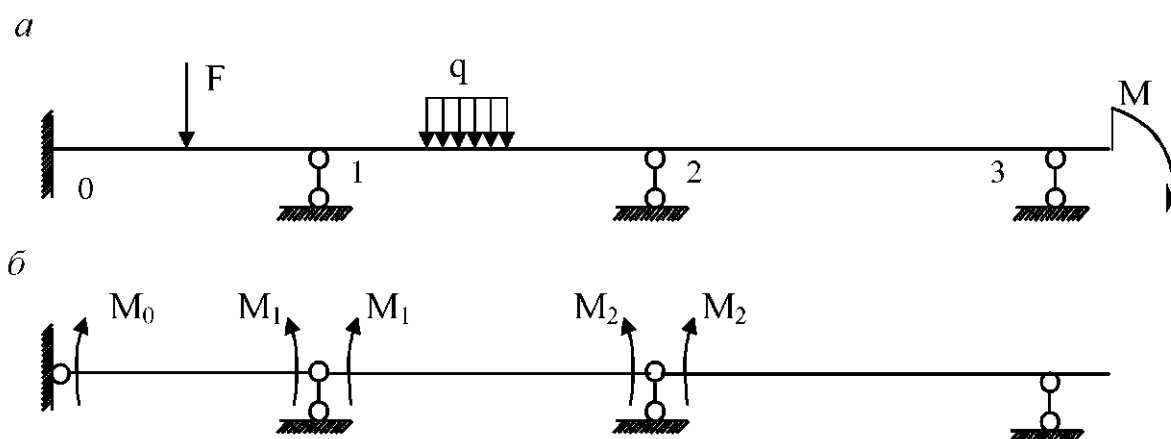


Рис. 7.1

Степень статической неопределимости для неразрезных балок можно определять несколькими способами. Наиболее рациональным из них является способ, который заключается в том, что считают общее число простых кинематических связей, которыми балка прикреплена к земле. Из этого числа вычитают цифру 3, означающую минимально необходимое число простых кинематических связей для жёсткого прикрепления балки к земле. Полученное таким образом число представляет собой степень статической неопределимости рассматриваемой неразрезной балки. Так, показанная на рис. 7.1, *a* балка прикреплена к земле шестью простыми кинематическими связями. Значит, степень её статической неопределимости равна трём.

Если рассчитывать неразрезную балку методом сил, то наиболее рациональной основной системой для неё является такая, в которой в надпорные сечения неразрезной балки введены шарниры, высвобождающие каждый одну степень свободы (рис. 7.1, *б*), давая воз-

возможность углового перемещения φ надпорных сечений балки.

На рис. 7.2 построены единичные эпюры моментов для неразрезной три раза статически неопределимой балки.

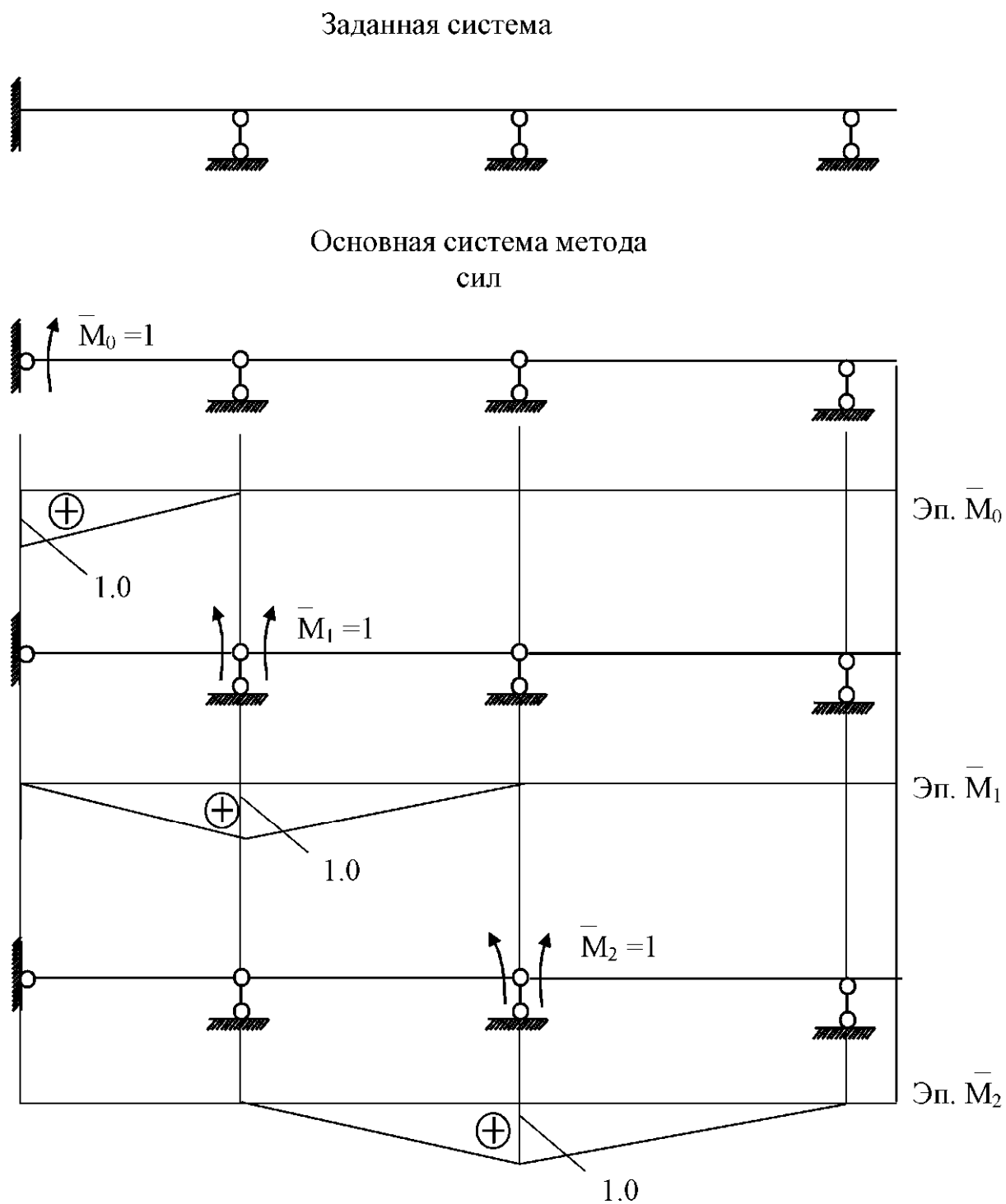


Рис. 7.2

Сопоставляя эти эпюры, можно сделать вывод о том, что в каждом

из канонических уравнений метода сил будут иметь место только три коэффициента при неизвестных. Выделим из рассматриваемой неразрезной балки (рис. 7.3), имеющей по всей длине жёсткость $EJ = \text{const}$, два сопряжённых друг с другом пролёта.

Определяем угол поворота φ_n (см. рис. 7.3) на n опоре в основной системе:

$$\varphi_n = \delta_{n,n-1} \cdot M_{n-1} + \delta_{n,n} \cdot M_n + \delta_{n,n+1} \cdot M_{n+1} + \Delta_{nF} = 0. \quad (7.1)$$

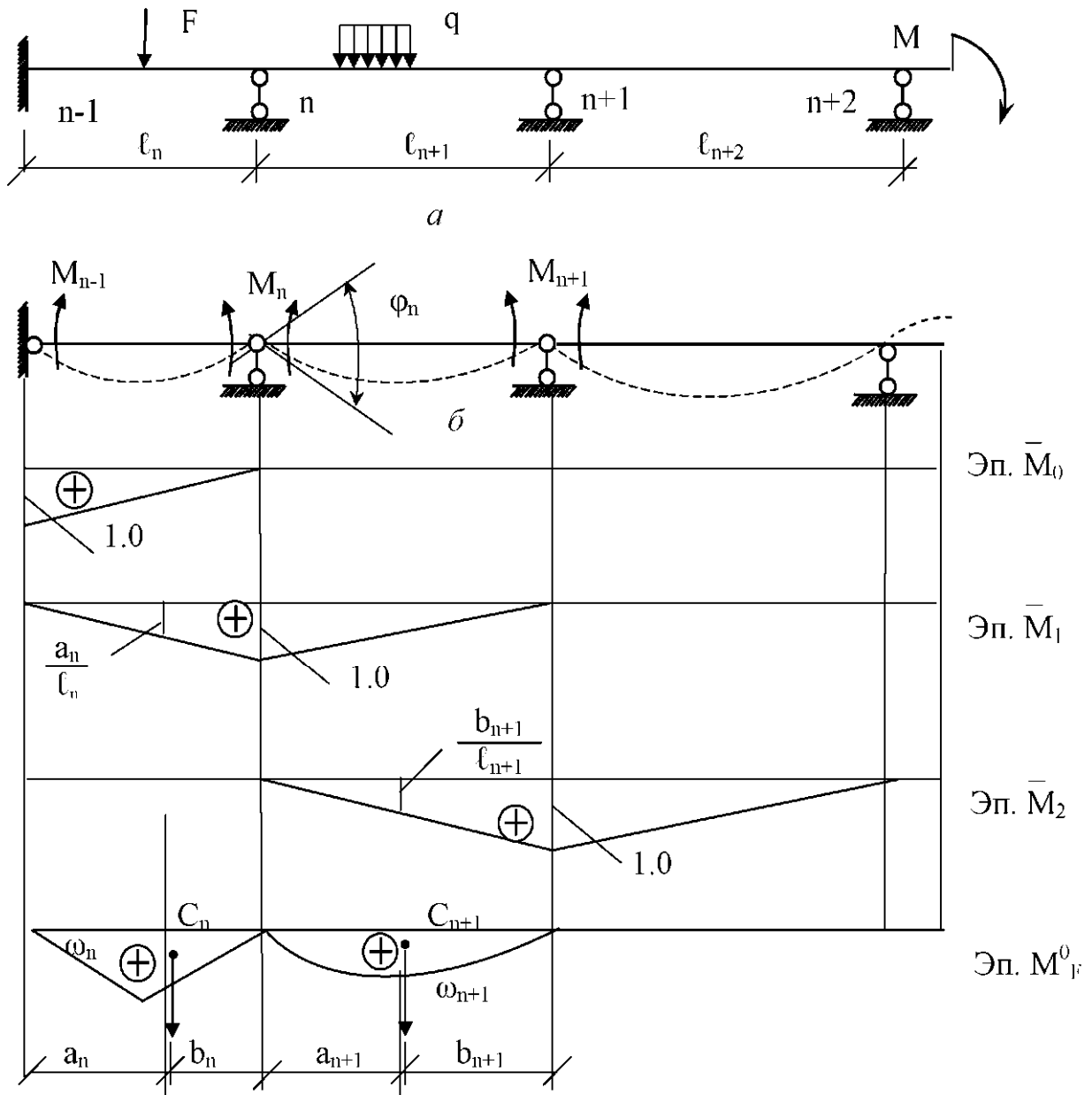


Рис. 7.3

Перемножением соответствующих единичных эпюр определим коэффициенты при неизвестных.

$$\delta_{n,n-1} = \sum \frac{\partial n \bar{M}_n \cdot \partial n \bar{M}_{n-1}}{EJ} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ell_n \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{\ell_n}{6EJ}. \quad (7.2)$$

$$\delta_{n,n} = \frac{\partial n \bar{M}_n^2}{EJ} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ell_n \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ell_{n+1} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{6EJ} (\ell_n + \ell_{n+1}). \quad (7.3)$$

$$\delta_{n,n+1} = \sum \frac{\partial n \bar{M}_n \cdot \partial n M_{n+1}}{EJ} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ell_{n+1} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{\ell_{n+1}}{6EJ}. \quad (7.4)$$

При определении грузового перемещения Δ_{nF} на грузовой эпюре M_F^o приняты обозначения: ω_n и ω_{n+1} – площади грузовых эпюр моментов (метода сил) соответственно для пролётов ℓ_n и ℓ_{n+1} ; a_n и b_{n+1} – расстояния от центра тяжести этих эпюр (см. рис. 7.3) соответственно до опор $(n-1)$ и $(n+1)$.

$$\Delta_{nF} = \sum \frac{\partial n M_F^o \cdot \partial n \bar{M}_n}{EJ} = \frac{1}{EJ} \cdot \omega_n \cdot \frac{a_n}{\ell_n} + \frac{1}{EJ} \cdot \omega_{n+1} \cdot \frac{b_{n+1}}{\ell_{n+1}}. \quad (7.5)$$

Подставим найденные перемещения в (7.1), перенося грузовое перемещение в правую часть уравнения и сокращая все слагаемые на изгибную жёсткость EJ :

$$\frac{\ell_n}{6} \cdot M_{n-1} + \frac{2(\ell_n + \ell_{n+1})}{6} \cdot M_n + \frac{\ell_{n+1}}{6} \cdot M_{n+1} = - \left(\frac{a_n \cdot \omega_n}{\ell_n} + \frac{b_{n+1} \cdot \omega_{n+1}}{\ell_{n+1}} \right). \quad (7.6)$$

Следует обратить внимание на правую часть выражения (7.6). По сути, она представляет собой сумму двух условных (фиктивных) опорных реакций, полученных от загрузки условной нагрузкой, описанной по закону построенных грузовых эпюр M_F^o . Обозначив $B_n^\phi = \frac{a_n \cdot \omega_n}{\ell_n}$ и $A_{n+1}^\phi = \frac{b_{n+1} \cdot \omega_{n+1}}{\ell_{n+1}}$, а их сумму $(B_n^\phi + A_{n+1}^\phi)$ за R_n^ϕ и подставив их в выражение (7.6), получим уравнение, которое в строительной механике носит название *уравнения трёх моментов*.

$$\ell_n \cdot M_{n-1} + 2(\ell_{n+1} + \ell_n) \cdot M_n + \ell_{n+1} \cdot M_{n+1} = -6R_n^\phi. \quad (7.7)$$

При расчёте многопролётных неразрезных балок на статическую нагрузку для каждой промежуточной опоры записывают уравнение трёх моментов. Таких уравнений записывают столько, сколько раз является статически неопределимой рассчитываемая балка. В результате решения полученной таким образом системы алгебраических уравнений находят значения опорных моментов. Строят эпюру опорных моментов, которую геометрически складывают с грузовой эпюрой M_p^o . В результате сложения получают эпюру моментов в заданной системе.

В прил. 2 приведены значения фиктивных опорных реакций A_n^ϕ и B_n^ϕ для наиболее характерных случаев загрузки однопролётных балок.

7.2. Определение моментных фокусных отношений

Рассмотрим некоторый участок неразрезной балки (рис. 7.4) с загруженным только одним пролётом и с построенной для этого случая эпюрой моментов. Если каким-то образом изменить величину силы F загруженного пролёта, то соответственно изменятся и ординаты этой эпюры. Но форма эпюры никак не изменится, а в незагруженных пролётах останутся неизменными положения нулевых точек, которые называются *фокусными точками*. Точки, расположенные правее загруженного пролёта, называются правыми, а левее – левыми фокусами.

Отношения опорных моментов незагруженного пролёта называются моментными фокусными отношениями. Различают левые k_n моментные фокусные отношения, представляющие собой отношение последующего опорного момента к предыдущему, и правые k'_n , представляющие собой отношение предыдущего опорного момента к последующему.

Так, для пролёта ℓ_n при расположении загруженного пролёта правее рассматриваемого $k_n = -\frac{M_n}{M_{n-1}}$. Если загруженный пролёт расположен левее рассматриваемого, то в нём будет иметь место правое

фокусное отношение $k'_n = -\frac{M_{n-1}}{M_n}$. Таким образом, в каждом незагруженном пролёте имеются два моментных фокусных отношения, с помощью которых можно определять моменты на опорах незагруженных пролётов.

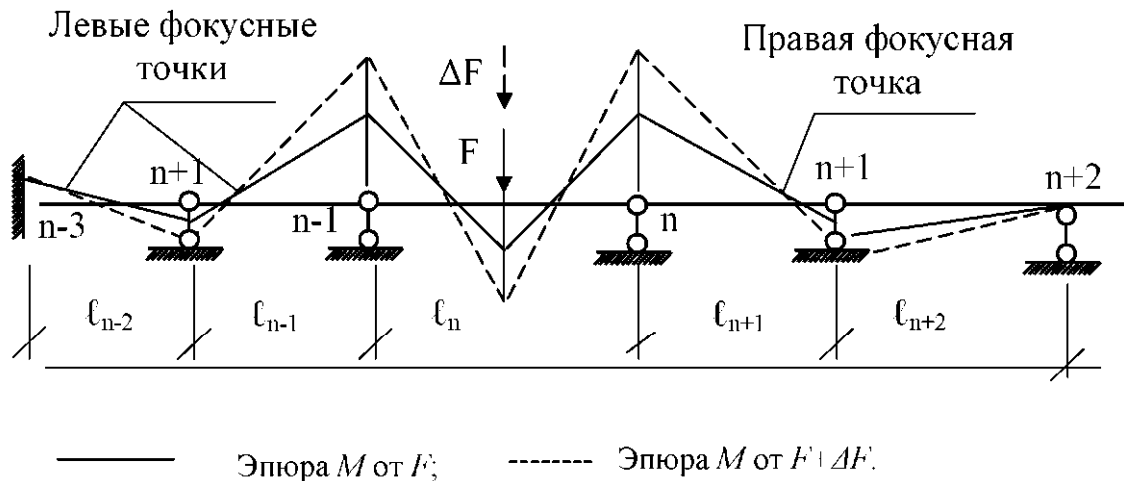


Рис. 7.4

Для вывода формулы определения моментных фокусных отношений рассмотрим участок неразрезной балки (рис. 7.5) при расположении загруженного пролёта правее выделенного участка.

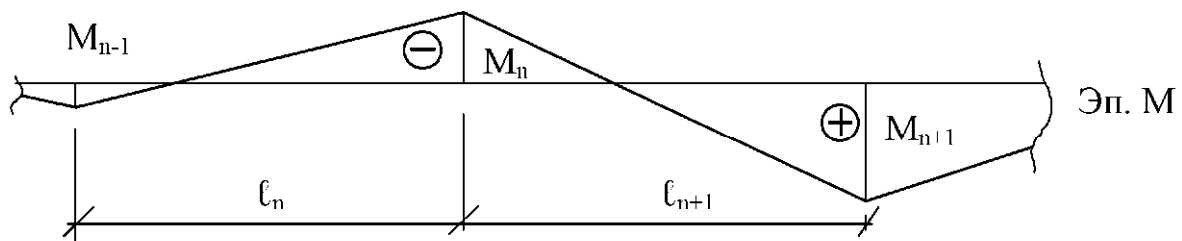


Рис. 7.5

Запишем уравнение трёх моментов для опоры n и приравняем его к нулю (7.8). Равенство нулю выражения (7.8) связано с отсутствием на сопряжённых рассматриваемых пролётах внешней нагрузки.

$$M_{n-1}\ell_{n-1} + 2M_n(\ell_{n-1} + \ell_n) + M_{n+1}\ell_n = 0. \quad (7.8)$$

Выразим в (7.8) опорные моменты M_{n-1} и M_{n+1} через опорный

момент M_n , используя для этого левые моментные фокусные отношения:

$$\begin{cases} k_{n+1} = -\frac{M_{n+1}}{M_n} \Rightarrow M_{n+1} = -k_{n+1} \cdot M_n; \\ k_n = -\frac{M_n}{M_{n-1}} \Rightarrow M_{n-1} = -\frac{M_n}{k_n}. \end{cases} \quad (7.9)$$

Подставим соотношения (7.9) в выражение (7.8).

$$-\frac{M_n}{k_n} \ell_n + 2M_n(\ell_{n+1} + \ell_n) - k_{n+1} M_n \ell_n = 0. \quad (7.10)$$

Сокращая выражение (7.10) на величину M_n и решая его относительно левого фокусного отношения k_{n+1} , получим

$$k_{n+1} = 2 + \frac{\ell_n}{\ell_{n+1}} \left(2 - \frac{1}{k_n} \right) - \text{левое фокусное отношение.} \quad (7.11)$$

Проводя аналогичные рассуждения при расположении загруженного пролёта левее рассматриваемого, получим

$$k'_n = 2 + \frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} \left(2 - \frac{1}{k'_{n+1}} \right) - \text{правое фокусное отношение.} \quad (7.12)$$

Анализ структуры полученных формул говорит о том, что они являются рекуррентными, т.е. каждое последующее значение фокусного отношения определяется через предыдущее значение для левых фокусных отношений, а наоборот – для правых. Для определения этих значений рассмотрим три случая закрепления крайних пролётов.

При шарнирном опирании крайнего (например, левого) пролёта (рис. 7.6) левое фокусное отношение, согласно его определению, $k_n = -\frac{M_n}{M_{n-1}}$. Но так как при шарнирном опирании крайний опорный момент $M_{n-1} = 0$, то в этом случае $k_n = \infty$.

Если крайний (например, левый) пролёт неразрезной балки имеет

консоль, то, используя предыдущее рассуждение (рис. 7.7), можно заключить, что левое фокусное отношение $k_n = \infty$.

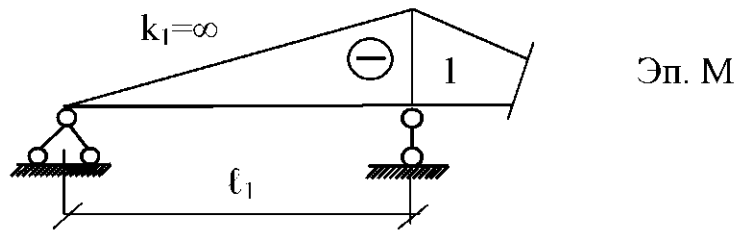


Рис. 7.6

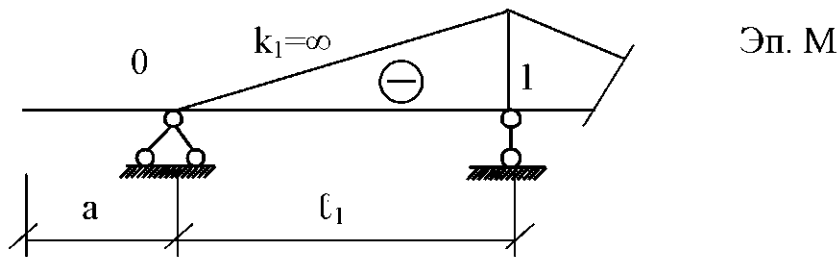


Рис. 7.7

В случае жёсткого защемления крайнего (например, левого) пролёта неразрезной балки (рис. 7.8) для определения значения фокусного отношения в месте этого защемления в левую сторону ставят условный пролёт $\ell_{n-1} = 0$, имеющий шарнирное опирание. Для этого случая было показано, что $k_{n-1} = \infty$. Тогда, подставляя это значение в (7.11), получаем значение $k_n = 2 + \frac{0}{\ell_n} \left(2 - \frac{1}{\infty} \right) = 2$.

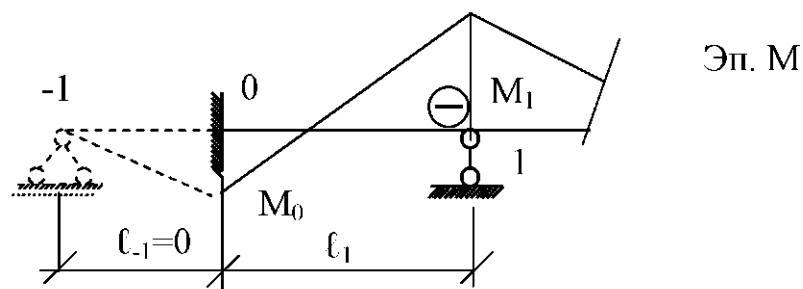


Рис. 7.8

Аналогичными будут значения правых фокусных отношений, если рассматривать такие же соответственно закрепления крайних правых пролётов неразрезной балки: $k'_n = \infty$ и $k'_n = 2$.

Пример. Определить фокусные отношения в неразрезной балке (рис. 7.9).

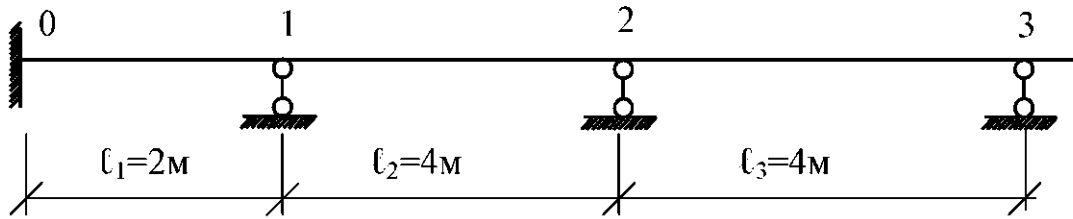


Рис. 7.9

Фокусные отношения определим по формулам (7.11) и (7.12).

Левые: $k_1 = 2; k_2 = 2 + \frac{\ell_1}{\ell_2} \left(2 - \frac{1}{k_1} \right) = 2 + \frac{2}{4} \left(2 - \frac{1}{2} \right) = 2,75;$

$$k_3 = 2 + \frac{\ell_2}{\ell_3} \left(2 - \frac{1}{k_2} \right) = 2 + \frac{4}{4} \left(2 - \frac{1}{2,75} \right) = 3,64.$$

Правые: $k'_3 = \infty; k'_2 = 2 + \frac{\ell_3}{\ell_2} \left(2 - \frac{1}{k'_3} \right) = 2 + \frac{4}{4} \left(2 - \frac{1}{\infty} \right) = 4;$

$$k'_1 = 2 + \frac{\ell_2}{\ell_3} \left(2 - \frac{1}{k'_2} \right) = 2 + \frac{4}{2} \left(2 - \frac{1}{4} \right) = 5,5.$$

7.3. Определение моментов на опорах загруженного пролёта

При расчёте неразрезных балок, прежде чем воспользоваться моментными фокусными отношениями, необходимо найти значения моментов на опорах загруженных пролётов.

Пусть загруженным является только один пролёт ℓ_n . Запишем уравнения трёх моментов соответственно для левой $(n - 1)$ и правой n опор.

$$\begin{cases} M_{n-2}\ell_{n-1} + 2M_{n-1}(\ell_{n-1} + \ell_n) + M_n\ell_n = -6R_{n-1}^\phi; \\ M_{n-1}\ell_n + 2M_n(\ell_n + \ell_{n+1}) + M_{n+1}\ell_{n+1} = -6R_n^\phi. \end{cases} \quad (7.13)$$

В первом уравнении системы (7.13) выразим опорный момент M_{n-2} через опорный момент M_{n-1} , используя для этого левое фокус-

ное отношение k_{n-1} . Во втором уравнении этой же системы опорный момент M_{n+1} выразим через момент M_n , используя для этого правое фокусное отношение k'_{n+1} :

$$M_{n-2} = -\frac{M_{n-1}}{k_{n-1}}; \quad M_{n+1} = -\frac{M_n}{k'_{n+1}}.$$

В последних соотношениях, используя формулы (7.11) и (7.12), заменим левое k_{n-1} и правое k'_{n+1} фокусные отношения на фокусные отношения k_n и k'_n соответственно. Кроме того, учитывая, что загруженным является только пролёт ℓ_n , $R_{n-1}^\phi = A_n^\phi$; $R_n^\phi = B_n^\phi$. Подставляя эти данные в систему уравнений (7.13) и решая её относительно опорных моментов M_n и M_{n-1} , получим формулы для определения левых M_{n-1} и правых M_n моментов на опорах загруженного пролёта.

$$M_{n-1} = -\frac{6}{\ell_n} \cdot \frac{A_n^\phi \cdot k'_n - B_n^\phi}{k_n \cdot k'_n - 1} \quad \text{– левый опорный момент. (7.14)}$$

$$M_n = -\frac{6}{\ell_n} \cdot \frac{B_n^\phi \cdot k_n - A_n^\phi}{k_n \cdot k'_n - 1} \quad \text{– правый опорный момент. (7.15)}$$

Зная значения опорных моментов в загруженном пролёте, через соответствующие моментные фокусные отношения можно определить моменты на опорах незагруженных пролётов.

7.4. Определение изгибающих моментов и поперечных сил в заданной системе неразрезной балки

Изгибающие моменты в заданной системе неразрезной балки определяем по известному выражению

$$M = M_{on} + M_o, \quad (7.16)$$

где M_{on} – значение опорных изгибающих моментов; M_o – значение изгибающих моментов в основной системе (см. рис. 7.3) (в статически определимых простых балках).

Поперечные силы определяем по известной из теории изгиба

дифференциальной зависимости между M и Q :

$$Q = \frac{dM}{ds} = \operatorname{tg}\alpha, \quad (7.17)$$

где α – угол наклона эпюры M к оси балки.

Анализируя изложенное, можно сформулировать алгоритм расчёта многопролётных неразрезных балок методом моментных фокусных отношений на статическую нагрузку:

1. По формулам (7.11) и (7.12) находят значения моментных фокусных отношений. В каждом пролёте имеются два моментных фокусных отношения: одно левое k_n , другое правое k'_n .

2. Поочерёдно в соответствии с принципом суперпозиции загружают каждый пролёт. При этом сначала находят для загружаемого пролёта значения фиктивных опорных реакций A_n^ϕ и B_n^ϕ соответственно. После этого по формулам (7.14) и (7.15) находят моменты на опорах загруженного пролёта. Далее, используя моментные фокусные отношения, находят значения опорных моментов на опорах незагруженных пролётов.

3. Суммируя найденные значения опорных моментов, строят эпюру опорных моментов.

4. Построенную эпюру опорных моментов складывают с грузовыми эпюрами для каждого пролёта и получают таким образом эпюру моментов в заданной системе.

5. Контролем правильности построенной эпюры моментов служит известная из предыдущего раздела настоящего курса деформационная проверка метода сил.

6. По построенной эпюре моментов, используя известное выражение $Q_x = Q_x^o + \frac{M_{np} - M_{лев}}{\ell}$, строят эпюру поперечных сил, контролем правильности которой являются её дифференциальная зависимость с эпюрой моментов и статическая проверка.

7. Правильность построения эпюры Q_x контролируется статической проверкой, когда рассматривается равновесие всех сил, возникающих в зоне каждой опоры неразрезной балки.

Для проведения статической проверки мысленно делают два сечения: слева и справа у рассматриваемой опоры, заменяя действие отброшенных частей соответствующими поперечными силами, сумма

проекций которых на вертикальную ось должна равняться опорной реакции.

7.5. Линии влияния опорных моментов

Как известно, расчёт любого сооружения на подвижную нагрузку предполагает построение линий влияния усилий. В связи с тем, что неразрезная балка является статически неопределимой системой, сначала нужно раскрыть эту статическую неопределимость, то есть построить линии влияния «лишних» неизвестных. В настоящем подразделе показано, что для неразрезной балки «лишними» неизвестными являются опорные моменты.

Для построения линий влияния опорных моментов подвижную силу $\bar{F} = 1$ передвигают поочерёдно по всем пролётам неразрезной балки и выражают опорные моменты в них как функции от координаты положения этой подвижной силы $\bar{F} = 1$.

Для определения опорных моментов используем формулы (7.14) и (7.15), в которые подставим значения фиктивных опорных реакций (7.16) и (7.17), полученных при фиксированном (рис. 7.10) положении силы $\bar{F} = 1$ в пролёте ℓ_n .

$$A_n^\phi = \frac{\ell_n^2}{6} \cdot \bar{F}uv(1+v); \quad (7.18)$$

$$B_n^\phi = \frac{\ell_n^2}{6} \cdot \bar{F}uv(1+u). \quad (7.19)$$

Учитывая, что сила $\bar{F} = 1$, получим выражения для определения опорных моментов при передвижении подвижной единичной силы по пролёту. Движение силы $\bar{F} = 1$ по пролёту описывается изменением параметра u (или v), фиксирующего положение этой силы в пролёте:

$$M_{n-1} = -\frac{6}{\ell_n} \cdot \frac{\left[\frac{\ell_n^2}{6} uv(1+v) \cdot k'_n - \frac{\ell_n^2}{6} uv(1+u) \right]}{k_n \cdot k'_n - 1};$$

$$M_n = -\frac{6}{\ell_n} \cdot \frac{\left[\frac{\ell_n^2}{6} uv(1+u) \cdot k_n - \frac{\ell_n^2}{6} uv(1+v) \right]}{k_n \cdot k'_n - 1}.$$

После арифметических преобразований и введения функций, опи-

сывающих положение единичной силы в пролёте $\alpha(u) = u\upsilon(1 + \upsilon) = u(1 - u)(2 - u)$ и $\beta(u) = u\upsilon(1 + u) = u(1 - u)^2$, учтя то, что $u = 1 - \upsilon$, получают формулы для построения линий влияния опорных моментов:

$$M_{n-1} = -\frac{\ell_n}{k_n k'_n - 1} \cdot [\alpha(u)k'_n - \beta(u)] - \text{линия влияния левого опорного момента.} \quad (7.20)$$

$$M_n = -\frac{\ell_n}{k_n k'_n - 1} \cdot [\beta(u)k_n - \alpha(u)] - \text{линия влияния правого опорного момента.} \quad (7.21)$$

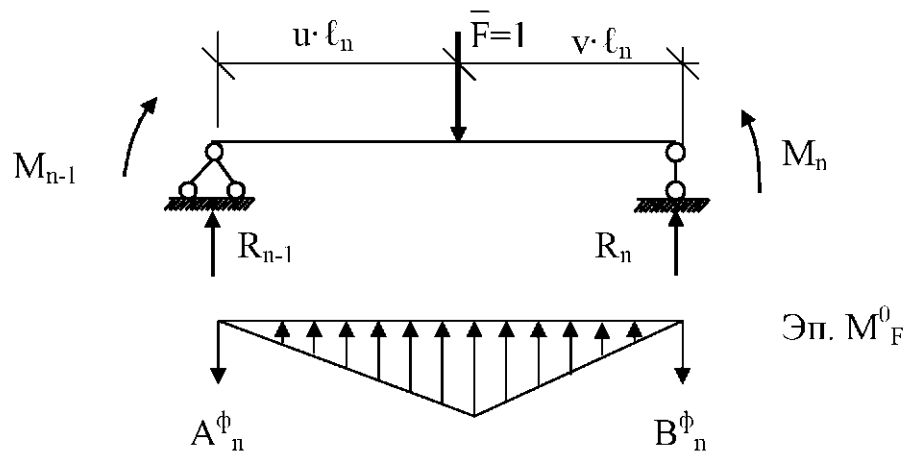


Рис. 7.10

В табл. 7.1 представлены значения функций $\alpha(u)$ и $\beta(u)$ для различных значений u . Изменяя u , тем самым перемещая груз $\bar{F}=1$ в n -м пролёте, по данным табл. 7.1 находят значения $\alpha(u)$, $\beta(u)$.

Таблица 7.1

u	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$\alpha(u)$	0	0,288	0,384	0,336	0,192	0
$\beta(u)$	0	0,192	0,336	0,384	0,288	0

Подставляя $\alpha(u)$, $\beta(u)$ в (7.20) и (7.21), находим значения ординат опорных моментов в точках разбиения пролёта (0,1,2,3,4,5) и строим л.в. M_{n-1} , л.в. M_n (рис. 7.11) для одного пролёта.

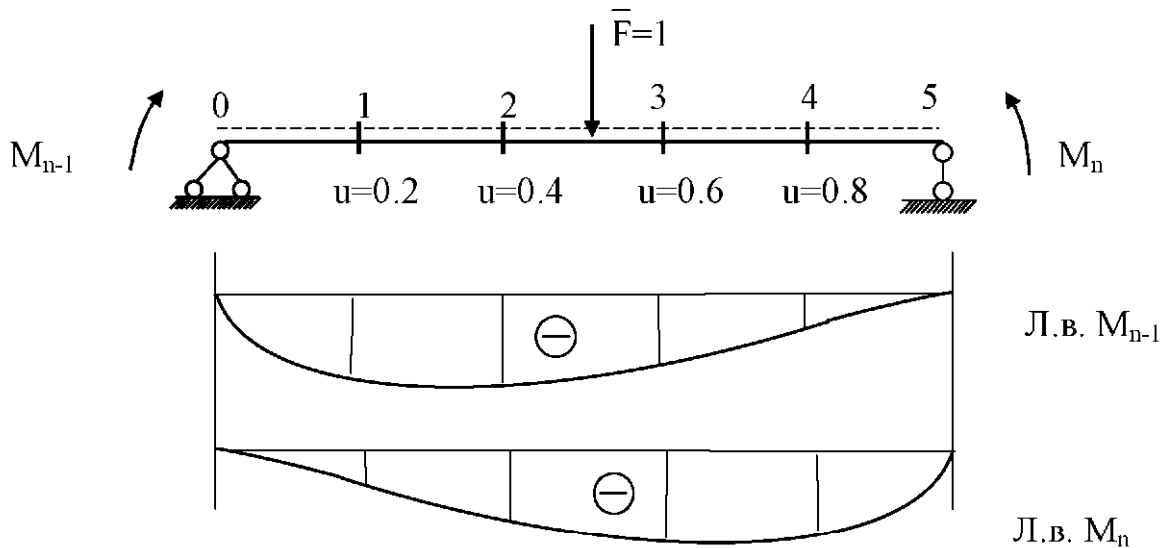


Рис. 7.11

7.6. Линии влияния моментов для сечений, расположенных в пролётах неразрезной балки

После построения линий влияния опорных моментов (раскрытие статической неопределённости системы) можно приступить к построению линий влияния внутренних усилий в сечениях неразрезной балки.

Для построения линии влияния изгибающего момента M рассмотрим сечение k в n -м пролёте неразрезной балки (рис. 7.12). Построим линию влияния изгибающего момента M_k в сечении k , расположенного на расстоянии a от левой опоры A . Для определения опорной реакции R_A , возникающей от сил, характер действия которых на балку показан на рис. 7.13, составим уравнение моментов относительно опоры B :

$$\sum m_B = R_A \ell_n + M_{n-1} - M_n = 0. \quad (7.22)$$

Из этого выражения находим, что $R_A = \frac{M_n - M_{n-1}}{\ell_n}$.

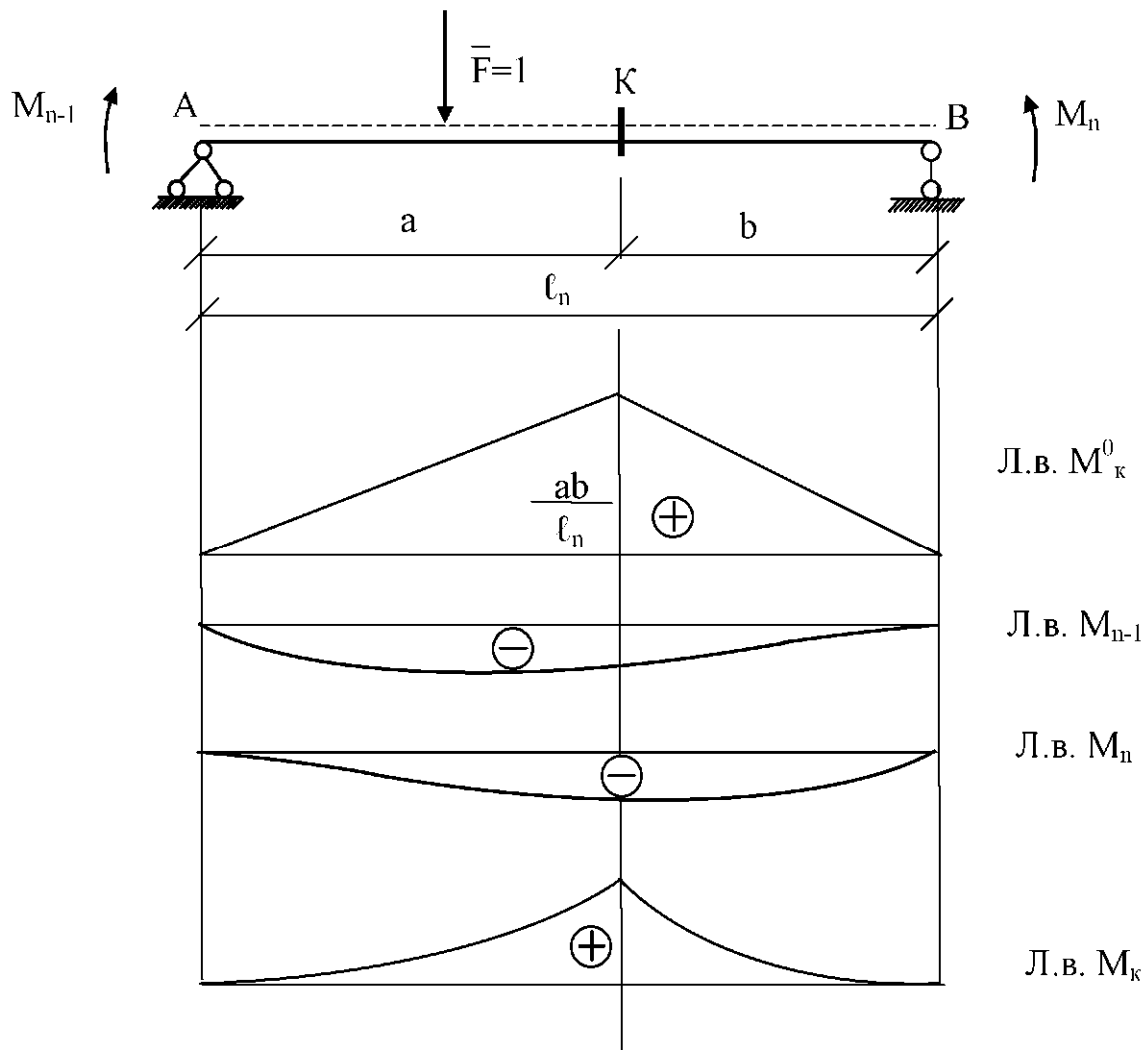


Рис. 7.12

Тогда, если рассматривать равновесие левой до сечения k части пролёта, изгибающий момент в сечении k от действия M_K^{on} опорных моментов может быть найден из выражения

$$M_K^{on} = R_A \cdot a + M_{n-1}. \quad (7.23)$$

Подставим в это выражение формулу для определения R_A :

$$M_K^{on} = \frac{M_n - M_{n-1}}{\ell_n} \cdot a + M_n \Rightarrow M_K^{on} = M_{n-1} \frac{b}{\ell_n} + M_n \frac{a}{\ell_n}. \quad (7.24)$$

Полный изгибающий момент M_k в сечении k в соответствии с принципом суперпозиции будет равен сумме найденного момента M_k^{on} от действия найденных значений опорных моментов и так называемого балочного момента M_k^o , возникающего в сечении k от действия вертикальных нагрузок при рассмотрении пролёта неразрезной балки как однопролётной статически определимой двухопорной балки. Тогда формула для определения изгибающего момента в сечении k в пролёте неразрезной балки примет вид

$$M_k = M_k^o + M_k^{on} = M_k^o + M_{n-1} \frac{b}{\ell_n} + M_n \frac{a}{\ell_n}. \quad (7.25)$$

Для построения л.в. M_k изгибающего момента в сечении k формула (7.25) принимает вид

$$Л.в. M_k = Л.в. M_k^o + Л.в. M_{n-1} \cdot \frac{b}{\ell_n} + Л.в. M_n \cdot \frac{a}{\ell_n}. \quad (7.26)$$

Линия влияния M_k показана на рис. 7.12.

7.7. Линии влияния поперечных сил

Построение линии влияния Q_k осуществляют на основе известного выражения, которое применительно к построению линии влияния принимает вид

$$Л.в. Q_k = Л.в. Q_k^o + \frac{Л.в. M_n}{\ell_n} - \frac{Л.в. M_{n-1}}{\ell_n}. \quad (7.27)$$

На рис. 7.13 показано построение линии влияния поперечной силы Q_k в сечении k , выполненное для пролёта неразрезной балки на основании выражения (7.27).

7.8. Линии влияния опорных реакций

Рассмотрим n -ю опору неразрезной балки, фрагмент которой показан на рис. 7.14.

Опорную реакцию в заданной системе, аналогично случаю определения M_K , определяем из выражения

$$R_n = R_n^o + R_n^{on}. \quad (7.28)$$

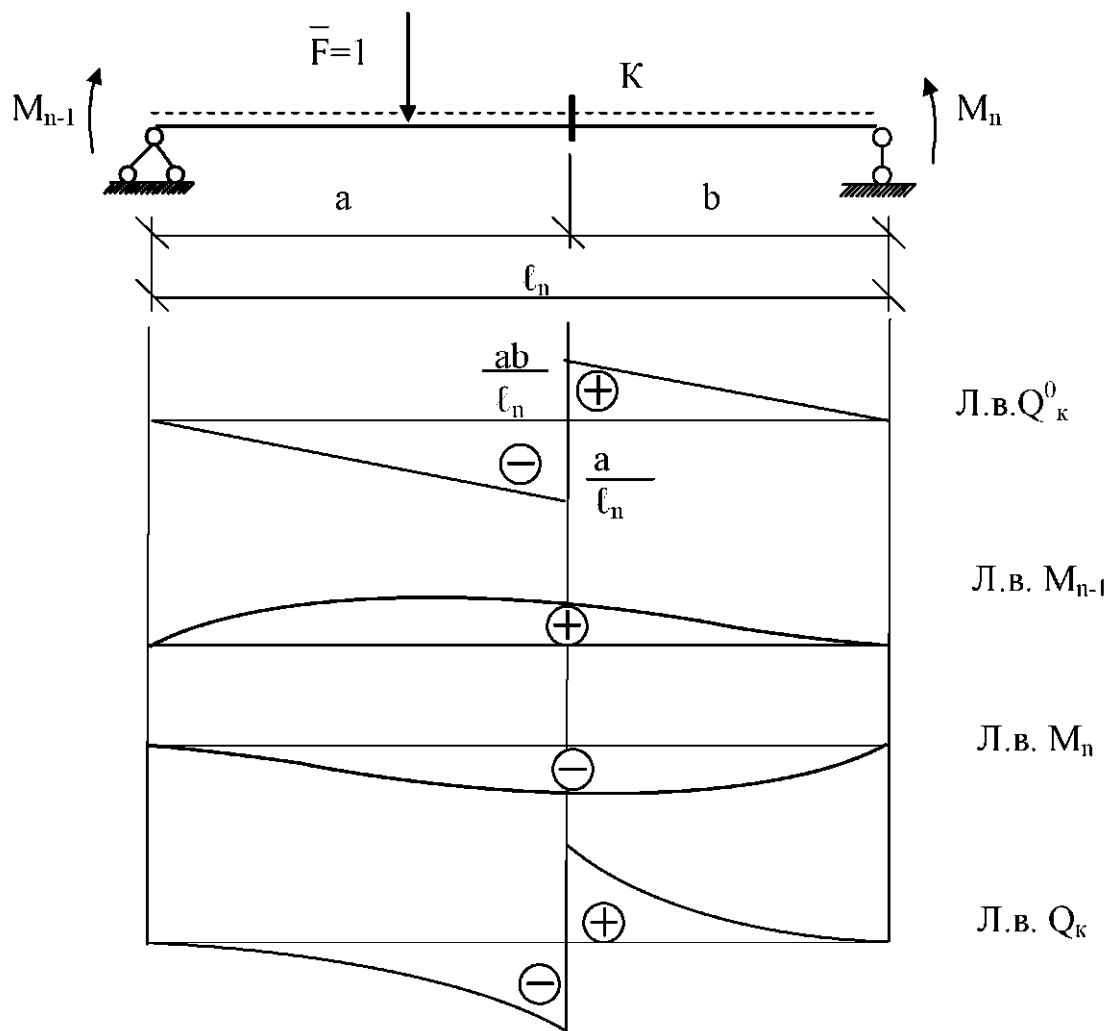


Рис. 7.13

Рассмотрим эпюру M^{on} (см. рис. 7.14). Определим поперечные силы левее и правее опоры n :

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = Q_n = \frac{M_n - M_{n-1}}{\ell_n}; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = Q_{n+1} = \frac{M_{n+1} - M_n}{\ell_{n+1}}.$$

Рассмотрим равновесие опоры n (рис. 7.15).
Из условия равновесия получаем

$$R_n^{on} = Q_{n+1} - Q_n. \quad (7.29)$$

Подставляя в (7.29) формулы для определения Q_n и Q_{n-1} , получим выражение

$$R_n^{on} = \frac{M_{n+1} - M_n}{l_{n+1}} - \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n} = \frac{M_{n+1}}{l_{n+1}} - \left(\frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_{n+1}} \right) M_n + \frac{M_{n-1}}{l_n}. \quad (7.30)$$

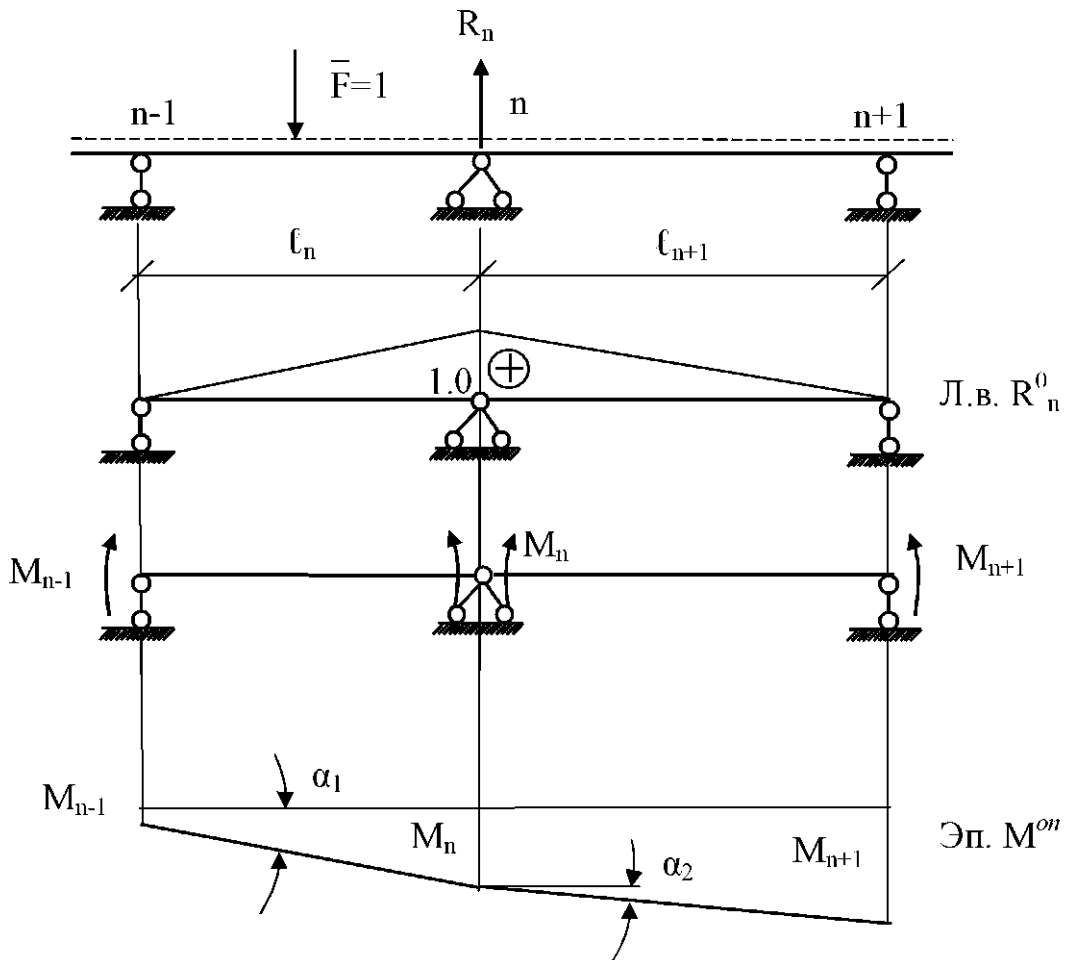


Рис. 7.14

Для построения линий влияния формула (7.30) преобразуется в следующее выражение:

$$Л.в. R_n = Л.в. R_n^o + \frac{Л.в. M_{n+1}}{\ell_n} - \left(\frac{1}{\ell_n} + \frac{1}{\ell_{n+1}} \right) Л.в. M_n + \frac{Л.в. M_{n-1}}{\ell_n}. \quad (7.31)$$

Формы линий влияния опорных моментов, внутренних усилий и опорной реакции для неразрезной балки приведены на рис. 7.16.

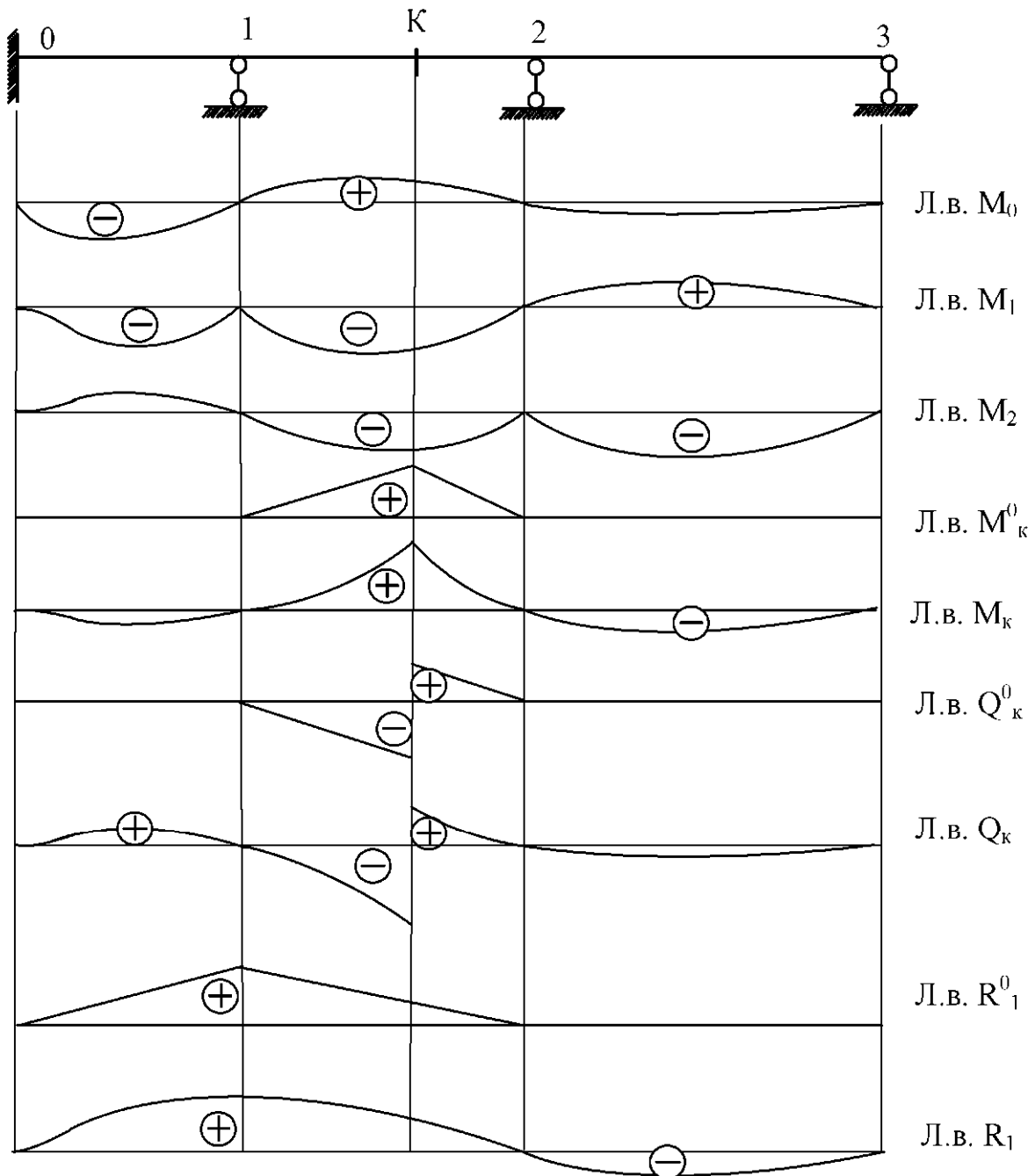


Рис. 7.15

7.9. Понятие об огибающих эпюрах

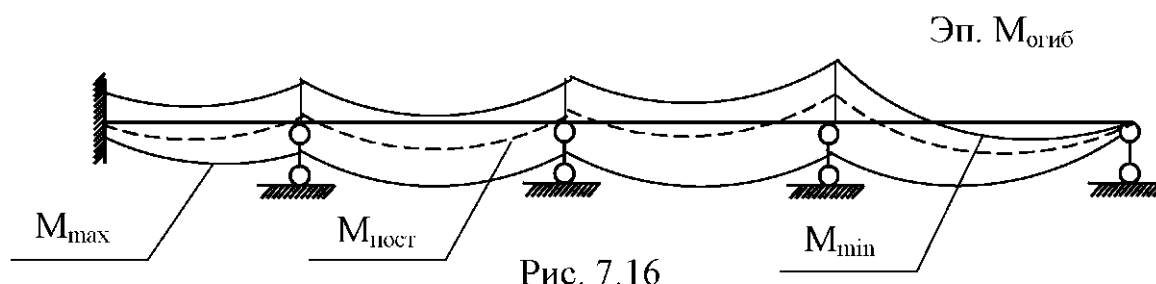
При расчёте стержневых конструкций, используемых в транспортных сооружениях преобладающей чаще всего является подвижная нагрузка (автомобили, поезда и др.). Очевидно, что в одном и том же поперечном сечении элемента конструкции при различном положении на сооружении подвижной системы нагрузок будут возникать различные по величине и направлению внутренние усилия. Естественно, что эти усилия будут формироваться от двух составляющих нагрузок – постоянной (как правило, собственный вес элемента конструкции) и временной, называемой подвижной.

Для правильного конструирования таких сооружений инженеру-конструктору необходимо знать наибольшее и наименьшее (экстремальные) значения внутреннего усилия в каждом поперечном сечении элемента конструкции. Линии, соединяющие значения экстремальных усилий, называются *огibaющей эпюрой*.

Согласно сказанному, ординаты огibaющих эпюр внутренних усилий определяют в соответствии с формулами:

$$\begin{aligned} S_{\max} &= S_{\text{пост}} + S_{\text{времен}}^{\max}; \\ S_{\min} &= S_{\text{пост}} + S_{\text{времен}}^{\min}. \end{aligned} \quad (7.32)$$

В этих формулах $S_{\text{пост}}$ – усилие в поперечном сечении элемента конструкции от действия постоянной нагрузки; $S_{\text{времен}}^{\max}$ и $S_{\text{времен}}^{\min}$ – наибольшее и наименьшее значения в том же поперечном сечении элемента от действия временной подвижной нагрузки. Наиболее рационально находить значения $S_{\text{времен}}^{\max}$ и $S_{\text{времен}}^{\min}$, а также $S_{\text{пост}}$ путём соответствующего загрузения линии влияния искомого усилия как постоянной нагрузкой, так и подвижной, располагая её над наибольшими положительными ординатами линии влияния $S_{\text{времен}}^{\max}$ и над наибольшими отрицательными ординатами той же линии влияния $S_{\text{времен}}^{\min}$. На рис. 7.16 показана огibaющая эпюра моментов для неразрезной балки.



8. РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

8.1. Основы метода

Метод перемещений в строительной механике является во многом основополагающим для большинства современных методов (метод конечных элементов и др.) раскрытия статической неопределённости сложных стержневых конструкций.

В методе сил за неизвестные принимают усилия X_i в устранённых связях, а дополнительными уравнениями являются условия совместности основной и заданной систем, записываемых в виде уравнений, описывающих равенство перемещений в направлении этих устранённых связей.

В методе перемещений, наоборот, неизвестные выбирают в виде перемещений Z_i , а дополнительными уравнениями являются условия совместности основной и заданной систем, записанных в виде статических уравнений.

Основная система в методе сил обычно выбирается статически определимой.

В методе перемещений основная система всегда статически неопределимая.

Метод перемещений имеет преимущество перед методом сил в том, что для сложных конструкций количество неизвестных в методе перемещений меньше, чем в методе сил. Другим преимуществом метода перемещений перед методом сил является то, что в методе перемещений для любой заданной системы возможен только один вариант основной системы, тогда как в методе сил для заданной системы можно выбрать несколько вариантов основной системы.

При расчёте рамных систем методом перемещений принимают следующие допущения:

а) деформациями стержней, работающих на изгиб от продольных и поперечных сил, пренебрегают;

б) ввиду малости перемещений отрезки, соединяющие концы любого деформированного стержня, принимают равными длине самих стержней;

в) сближение концов стержня при его изгибе как от внешней нагрузки, так и от смещения узлов рамы не учитывают.

За неизвестные в методе перемещений принимают (рис. 8.1) перемещения Z – углы поворота жестких узлов рамы и линейные смещения узлов рамы.

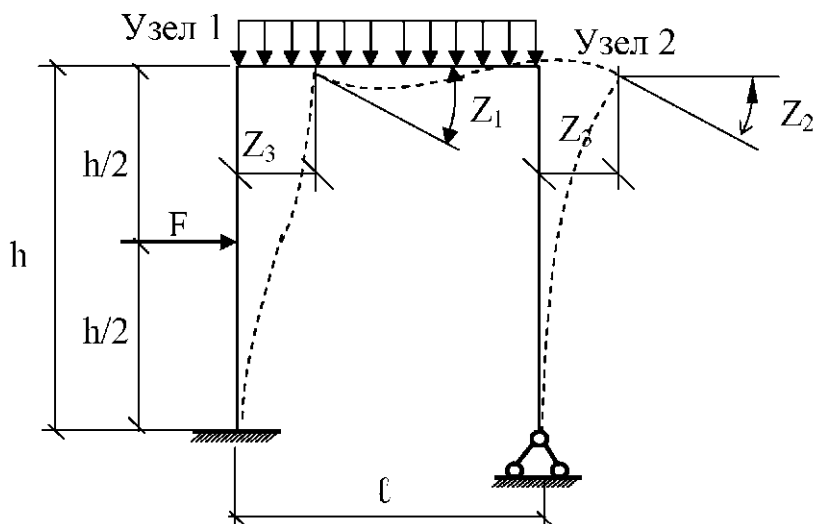


Рис. 8.1

8.2. Выбор основной системы

Основную систему в методе перемещений выбирают из заданной путём введения во все жёсткие узлы условных жёстких заделок. В направлении возможных линейных подвижек элементов заданной системы ставят условные простые кинематические связи, препятствующие линейным подвижкам этих элементов. Следует отметить, что условные жёсткие заделки предотвращают только угловые перемещения, но не препятствуют линейным перемещениям этих узлов.

В методе перемещений заданная стержневая система превращается в совокупность однопролётных статически неопределимых стержней, известные решения которых используются при расчёте рассматриваемых заданных систем.

В методе перемещений имеет место не статическая, как в методе сил, а кинематическая неопределимость заданной системы. Кинематическую неопределимость n определяют по выражению

$$n = n_y + n_d, \quad (8.1)$$

где n_y – число жестких узлов, в которые необходимо ввести условные жёсткие заделки, устраняющие возможные повороты узлов; n_d – число простых кинематических связей, которые необходимо ввести в заданную систему, чтобы устранить возможные линейные подвижки элементов рамы.

Пример. Определить степень кинематической неопределенности рамы, показанной на рис. 8.1.

- $n_y = 2$, т.к. рассматриваемая рама имеет два жёстких узла, обозначенных на схеме цифрами 1 и 2;

- для определения n_d во все узлы заданной рамы вводят шарниры (рис. 8.2), тем самым превращая заданную схему рамы в геометрически изменяемую систему.

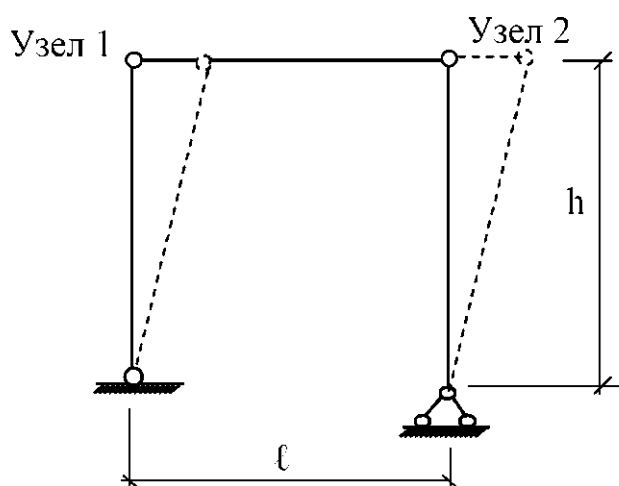


Рис. 8.2

В дальнейшем исследование такой системы сводится к определению того количества простых кинематических связей, которые необходимо поставить в неё для того, чтобы превратить её в геометрически неизменяемую систему. Для этого по формуле $n_d = 3D - 2Ш - C_0$ из первого раздела настоящего курса определяем

$$n_d = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 4 - 6 = 1. \quad (8.2)$$

Из (8.2) очевидно, что заданная на рис. 8.1 система имеет одну линейную подвижку.

Таким образом, согласно выражению (8.1), степень кинематической неопределённости рассматриваемой рамы будет равна

$$n = n_v + n_f = 2 + 1 = 3. \quad (8.3)$$

При выборе основной системы метода перемещений в жёсткие узлы 1 и 2 заданной системы вводим условные защемления, устраняющие поворот примыкающих к этому узлу поперечных сечений стержней. Затем в направлении возможной линейной подвижки вводим одну условную простую кинематическую связь 3, которая устраняет возможное линейное смещение горизонтального элемента рамы (ригеля). На рис. 8.3 показана выбранная из заданной (см. рис. 8.1) основная система.

Из анализа основной системы видно, что она представляет собой набор однопролётных статически неопределимых балок. Как правило, такими балками являются балки двух типов – защемлённые с обеих сторон и балки, защемлённые с одной стороны и шарнирно опёртые с другой. Исходя из этого, основную систему метода перемещений в обобщённом виде можно представить как систему, состоящую из набора определённого количества конечных элементов. Однажды рассчитав эти статически неопределимые балки от действия различного вида внешней нагрузки и перемещений, их можно использовать для расчёта любых статически неопределимых стержневых систем методом перемещений. В прил. 2 приведены данные расчёта часто встречающихся в инженерной практике статически неопределимых балок.

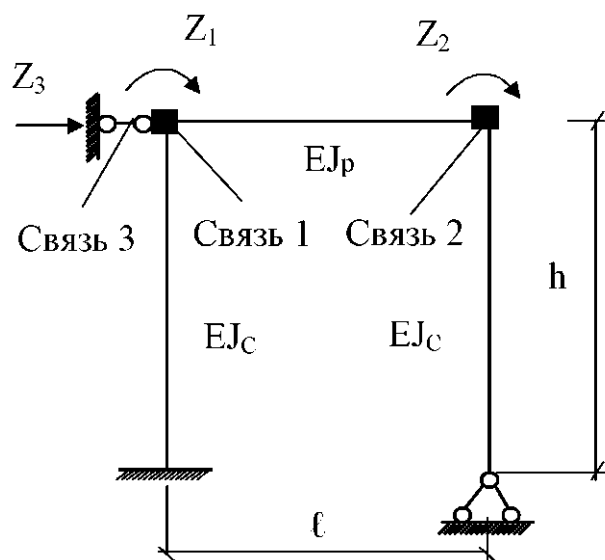


Рис. 8.3

8.3. Канонические уравнения метода перемещений

В каждой условно введенной связи основной системы возникают реактивные усилия как от действия внешней нагрузки, так и от смещения связей. В заделках возникают реактивные моменты, а в линейных связях – реактивные усилия.

Условия эквивалентности заданной и основной систем в методе перемещений записывают в виде системы канонических уравнений

$$\begin{cases} r_{11} \cdot Z_1 + \dots + r_{1i} \cdot Z_i + \dots + r_{1n} \cdot Z_n + R_{1F} = 0; \\ \dots \\ r_{i1} \cdot Z_1 + \dots + r_{ii} \cdot Z_i + \dots + r_{in} \cdot Z_n + R_{iF} = 0; \\ \dots \\ r_{n1} \cdot Z_1 + \dots + r_{ni} \cdot Z_i + \dots + r_{nn} \cdot Z_n + R_{nF} = 0. \end{cases} \quad (8.4)$$

Канонические уравнения метода перемещений (8.4) описывают реактивные усилия в условных связях и заделках основной системы как от перемещений этих связей и заделок, так и от заданной внешней нагрузки.

Физический смысл коэффициентов при неизвестных перемещениях Z_i заключается в том, что r_{ij} представляет собой реактивное усилие в i -й условной заделке или связи в основной системе от перемещения j -й условной заделки или связи на единицу.

Физический смысл свободного члена R_{iF} системы канонических уравнений метода перемещений заключается в том, что он представляет собой реактивное усилие в i -й условной связи или заделке от внешней нагрузки.

Равенство нулю каждого из уравнений означает, что в заданной системе нет ни заделок, ни связей, т.к. они являются условными.

Система канонических уравнений метода перемещений в матричной форме имеет следующий вид:

$$\vec{r}_{ij} \cdot \vec{Z}_i + \vec{R}_{iF} = 0, \quad (8.5)$$

где \vec{r}_{ij} – матрица реакций; \vec{R}_{iF} – вектор реакций от внешней нагрузки; \vec{Z}_i – вектор искомых перемещений.

В матрице реакций различают «главные» реакции $r_{11}, r_{22}, \dots, r_{nn}$, имеющие индексы $i = j$, и побочные реакции $r_{12}, r_{13}, \dots, r_{1n}$ и т.д., у которых $i \neq j$.

$$\bar{r}_{ij} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix}; \quad \bar{R}_{iF} = \begin{bmatrix} R_{1F} \\ R_{2F} \\ \dots \\ R_{nF} \end{bmatrix}; \quad \bar{Z}_i = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \dots \\ Z_n \end{bmatrix}. \quad (8.6)$$

«Главные» реакции всегда положительны. Побочные реакции могут иметь любой знак и обладают свойством взаимности, т.е. $r_{ij} = r_{ji}$.

Матрица жёсткости \bar{r}_{ij} обладает рядом свойств:

- 1) определитель этой матрицы всегда положителен;
- 2) матрица \bar{r}_{ij} всегда симметрична относительно главной диагонали;
- 3) произведение двух «главных» реакций всегда больше квадрата соответствующего побочного перемещения $r_{ii}r_{jj} > r_{ij}^2$.

Для определения значений элементов r_{ij} матрицы реакций строят эпюры моментов \bar{M}_i от перемещений $Z_i = 1$ условных заделок и связей. На рис. 8.4 показаны такие эпюры, построенные для основной системы, изображённой на рис. 8.3. Значения ординат эпюр \bar{M}_i взяты из прил. 2.

В строительной механике имеются два метода определения значений элементов r_{ij} матрицы реакций: 1) кинематический, который основан на правиле П.Верещагина (аналогично определению перемещений) путём перемножения эпюр; 2) статический, использующий уравнения равновесия.

Наиболее рациональным методом определения реактивных усилий r_{ij} является статический метод. В соответствии с этим методом используют два уравнения статики – либо уравнение моментов $\sum M = 0$, либо сумму проекций на ту или иную ось, например $\sum y = 0$, сил, действующих на рассматриваемую часть основной системы метода перемещений.

Рассмотрим в качестве примера определение реактивных усилий r_{ij} по эпюрам, показанным на рис. 8.4.

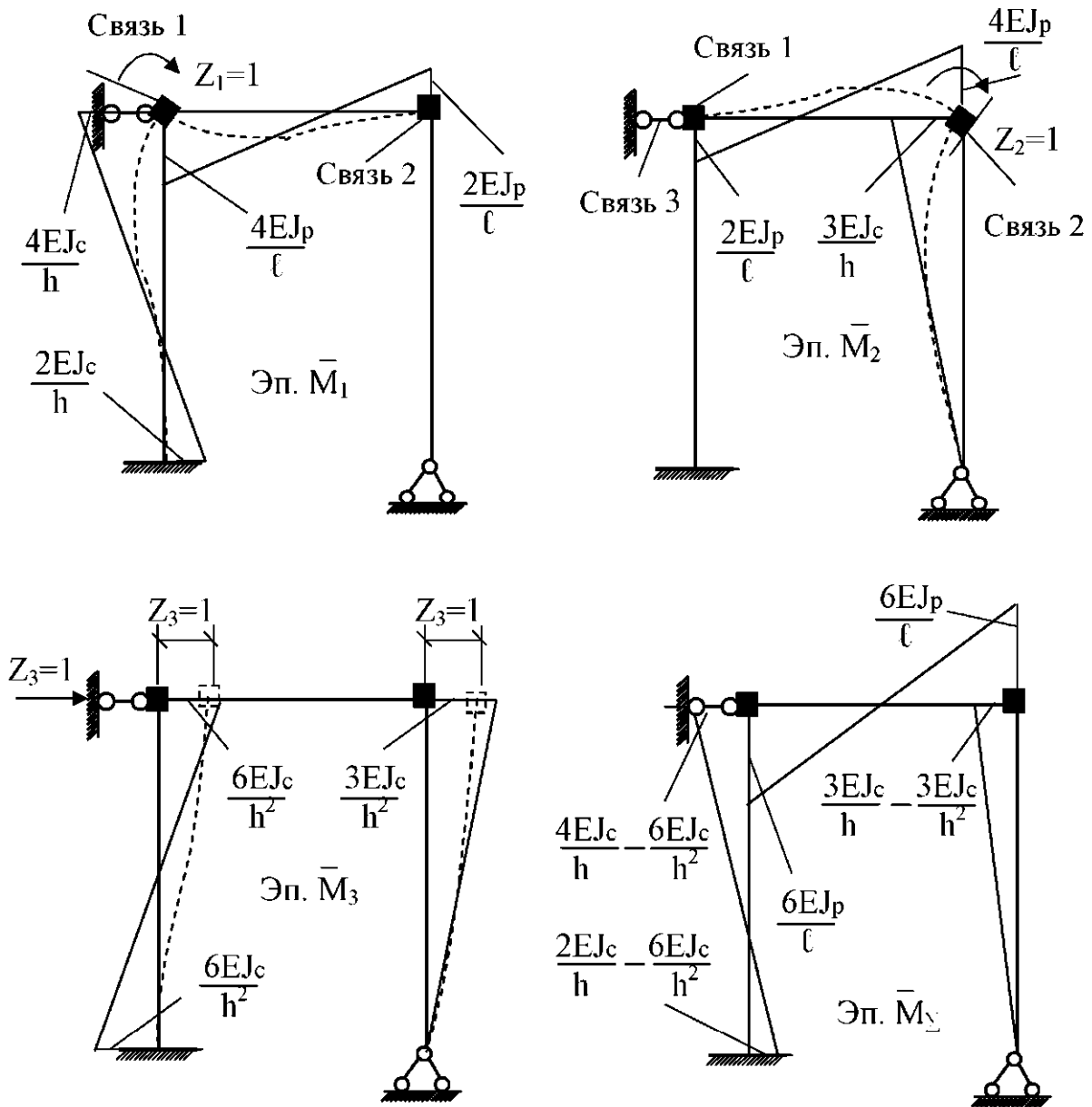


Рис. 8.4

Для определения, например, реактивного усилия r_{11} , которым является изгибающий момент в условной заделке I от поворота этой заделки на *единицу*, мысленно вырежем на эюре \bar{M}_1 узел I (рис. 8.5, *a*). Реактивный момент r_{11} направлен в сторону заданного перемещения Z_1 . Рассматривая равновесие этого узла, запишем

$$\sum M = r_{11} - \frac{4EJ_p}{\ell} - \frac{4EJ_c}{h} = 0 \Rightarrow r_{11} = \frac{4EJ_p}{\ell} + \frac{4EJ_c}{h}.$$

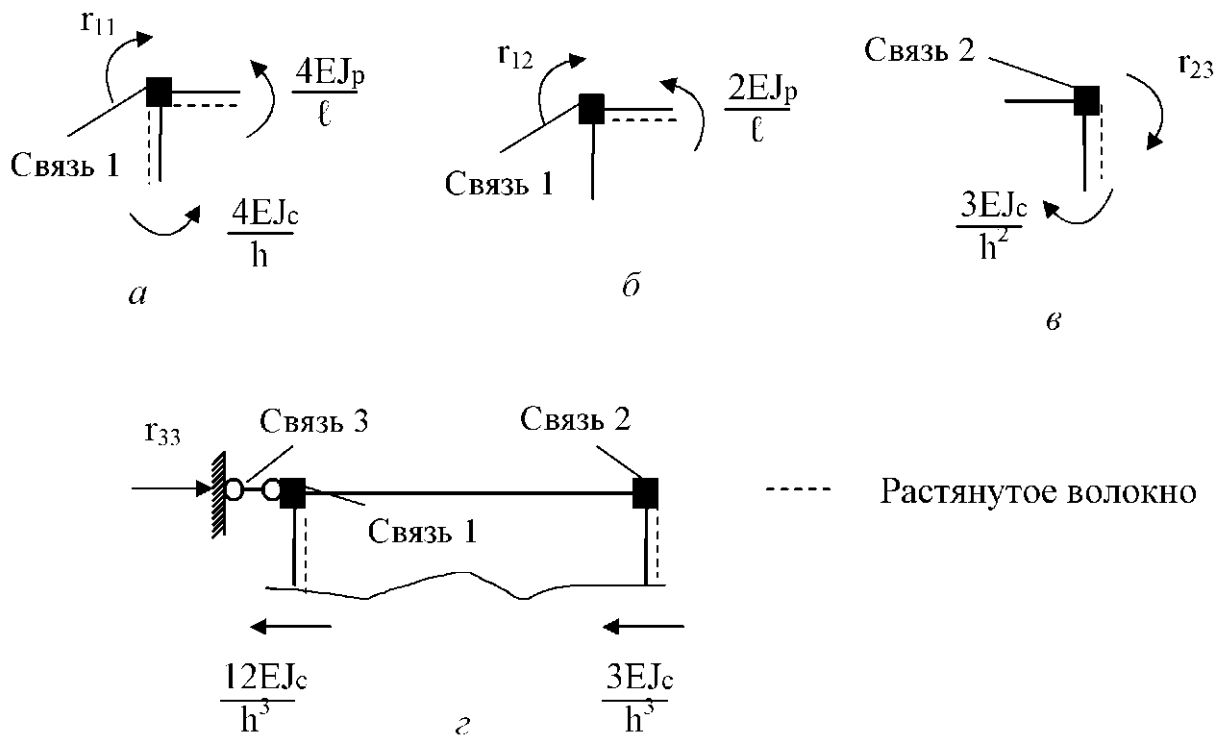


Рис. 8.5

Реактивное усилие r_{12} представляет изгибающий момент, возникающий в условной заделке 1 от поворота условной заделки 2 на единицу.

В соответствии с этим на эпюре \bar{M}_2 мысленно вырежем узел 1 (см. рис. 8.5) и снова составим уравнение равновесия:

$$\sum M = r_{12} - \frac{2EJ_p}{\ell} = 0 \Rightarrow r_{12} = \frac{2EJ_p}{\ell}.$$

Проводя аналогичные рассуждения, нетрудно найти реактивное усилие (см. рис. 8.5, в) $r_{23} = -\frac{3EJ_c}{h^2}$. В случае, если реактивным усилием является продольное усилие в условной связи (в данном случае это условная связь 3) уравнение равновесия представляет собой $\sum x = 0$. Для того чтобы составить это уравнение на эпюре (эпюра \bar{M}_3), построенной от линейного перемещения условной связи 3, мысленно делают сечение и рассматривают равновесие (рис. 8.5, z) оставшейся части рамы.

В рассматриваемом примере $\sum x = r_{33} - \frac{12EJ_c}{h^3} - \frac{3EJ_c}{h^3} = 0 \Rightarrow$

$$r_{33} = \frac{15EJ_c}{h^3}.$$

Для оценки правильности вычисления коэффициентов r_{ij} строят суммарную единичную эпюру \bar{M}_Σ (см. рис. 8.4).

Произведение этой эпюры самой на себя должно давать сумму всех коэффициентов при неизвестных.

$$\frac{\partial n \bar{M}_\Sigma \cdot \partial n \bar{M}_\Sigma}{EJ} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij}. \quad (8.7)$$

В случае невыполнения равенства (8.7) проводят построчную проверку.

$$\begin{aligned} \sum \frac{\partial n \bar{M}_\Sigma \cdot \partial n \bar{M}_1}{EJ} &= r_{11} + r_{12} + \dots + r_{1n}; \\ \sum \frac{\partial n \bar{M}_\Sigma \cdot \partial n \bar{M}_2}{EJ} &= r_{21} + r_{22} + \dots + r_{2n}; \\ &\dots\dots\dots \\ \sum \frac{\partial n \bar{M}_\Sigma \cdot \partial n \bar{M}_n}{EJ} &= r_{n1} + r_{n2} + \dots + r_{nn}. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Для определения свободных членов R_{iF} системы канонических уравнений (8.4) метода перемещений в основной системе строят так называемую грузовую эпюру M_F^0 , показанную на рис. 8.6.

При построении этой эпюры используют стандартные решения из прил. 3. Значения R_{iF} находят, используя те же методы, которые используются для определения коэффициентов r_{ij} . Так, для определения значения реактивного усилия R_{1F} мысленно вырезают узел 1, а усилия R_{2F} – узел 2. Из уравнений равновесия находят соответственно $R_{1F} = \frac{Fh_c}{8} - \frac{q\ell^2}{12}$ и $R_{2F} = \frac{q\ell^2}{12}$. Реактивное усилие R_{3F} , которым в данной задаче является продольное усилие в условной связи 1, определяют, мысленно делая сечение на эпюре M_F^0 по стойкам близко к ригелю. Из суммы проекций на горизонтальную ось можно найти

$$R_{3F} = -\frac{F}{2}.$$

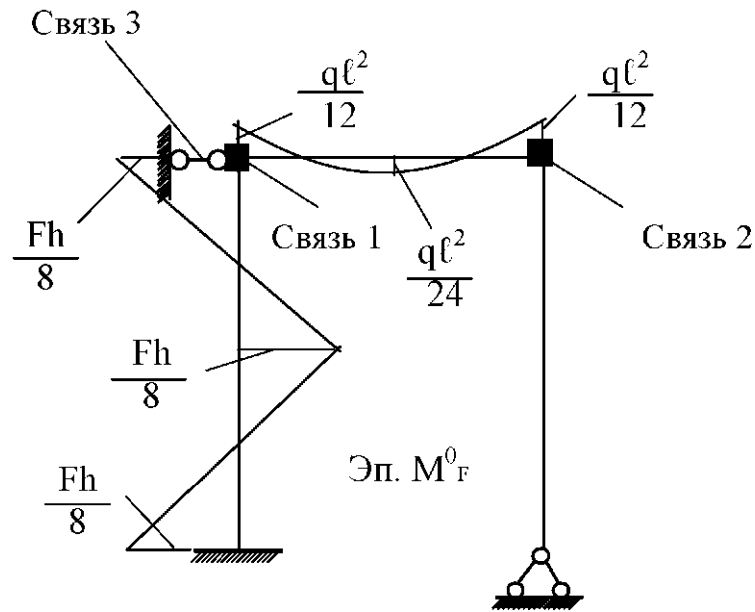


Рис. 8.6

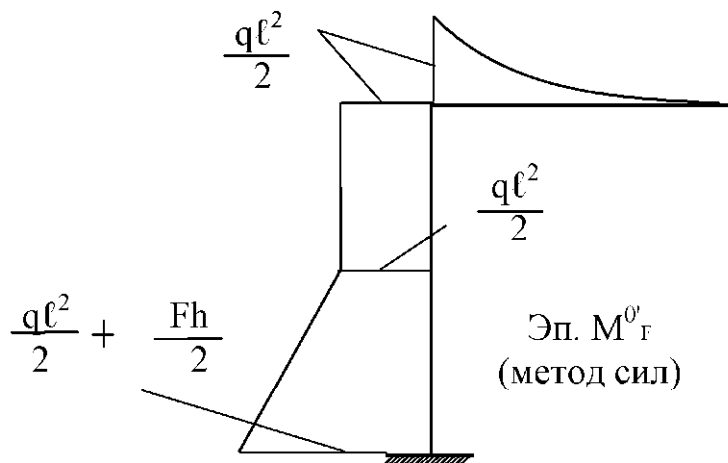


Рис. 8.7

Проверка правильности определения значений R_{iF} осуществляется в соответствии с выражением

$$\sum \frac{\text{Эп. } \bar{M}_\Sigma \cdot \text{Эп. } M_F^0 (\text{мет. сил})}{EJ} = -\sum_{i=1}^n R_{iF}, \quad (8.9)$$

где $\text{Эп. } M_F^0$ – эпюра изгибающих моментов (рис. 8.7) от внешней

нагрузки, построенная в любой статически определяемой системе, являющейся основной системой метода сил рассчитываемой заданной системы.

8.4. Решение системы канонических уравнений и построение эпюр внутренних усилий

Найденные значения коэффициентов при неизвестных r_{ij} и свободных членов R_{iF} подставляют в систему (8.4) канонических уравнений метода перемещений и решают любым известным в линейной алгебре способом.

В результате решения системы канонических уравнений метода перемещений находят значения Z_i искомых перемещений. Нахождение искомых значений перемещений Z_i означает, что заданная к расчёту (заданная система) стержневая конструкция становится кинематически определимой.

Все внутренние усилия, возникающие в поперечных сечениях стержней от найденных перемещений Z_i и от заданной внешней нагрузки, могут быть в соответствии с принципом суперпозиции определены из выражения

$$M = \sum_{i=1}^n \bar{M}_i \cdot Z_i + M_F^o. \quad (8.10)$$

Необходимым контролем правильности построения эпюры M является условие равновесия изгибающих моментов в жёстких узлах рассчитываемой конструкции. В основной системе метода перемещений единичные \bar{M}_i и грузовая M_F^o эпюры являются неуравновешенными. Но единичные эпюры \bar{M}_i , будучи каждая умноженная на соответствующее ей перемещение Z_i и сложенные друг с другом и грузовой эпюрой M_F^o , обязательно должны в итоге давать эпюру моментов M с уравновешенными в жёстких узлах моментами. Отмеченное условие правильности построения итоговой эпюры моментов M является необходимым, но недостаточным. Достаточным условием правильности построения эпюры M является проведение деформационной проверки, суть которой изложена в разделе 6 настоящего курса. При этом не имеет значения, с использованием какого метода – метода сил или метода перемещений – построена итоговая эпюра моментов M . По-

этому для проведения деформационной проверки из заданной рассчитываемой системы выбирают любую основную систему *метода сил*, в которой строят любую эпюру моментов \bar{M}_i от действия неизвестной силы $X_i = 1$. Соблюдение условия $\frac{\text{Эп.}M \cdot \text{Эп.}\bar{M}_i (\text{мет.сил})}{EJ} = 0$ свидетельствует о правильности построения эпюры M .

Построение эпюр поперечных Q и продольных N сил осуществляют точно так же, как это делается (см. раздел 6 настоящего курса) при решении статически неопределимых задач методом сил.

9. ОСНОВЫ ДИНАМИКИ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

9.1. Основные понятия

В предыдущих разделах был рассмотрен расчёт стержневых систем при действии на них статических нагрузок. Однако в практике создания и эксплуатации транспортных сооружений большинство нагрузок являются такими, которые во времени изменяют и свою величину, и направление действия.

Нагрузки, которые являются функциями от времени, называются динамическими. Динамические нагрузки при действии на элементы конструкции вызывают их колебания. Поэтому в колеблющихся элементах конструкции появляются инерционные силы, вызывающие возникновение в поперечных сечениях колеблющихся элементов сооружений дополнительные внутренние усилия.

Автопоезда, движущиеся по дорогам, мостам, передают нагрузки, изменяющиеся во времени. Транспортные конструкции в процессе действия на них динамических нагрузок испытывают колебательный процесс, вызывающий появление в конструкциях значительных инерционных сил. Особенно опасны колебания при резонансе, когда напряжения и деформации могут достигать бесконечности, т.е. наступает разрушение конструкции. Инженер должен уметь применять меры, направленные на уменьшение эффекта динамических воздействий.

В практике расчётов всё многообразие динамических нагрузок условно подразделяют на пять видов:

1. *Вибрационная* нагрузка, изменяющаяся во времени по какому-либо закону – синуса, косинуса и др.). Как правило, вибрационные нагрузки создаются вращением неуравновешенных масс. Например, вращение коленчатого вала автомобиля.

2. *Ударная* нагрузка, время действия которой составляет десятые доли секунды. Характерным примером создания ударной нагрузки является работа копра при забивке свай.

3. *Импульсная* нагрузка, время действия которой составляет сотые доли секунды. Характерным примером импульсной нагрузки является удар железнодорожного колеса при движении поезда о стык рельс.

4. *Подвижная* нагрузка, к которой относят автомобили, железнодорожные поезда, поезда метрополитена.

5. *Сейсмическая* нагрузка, характерная хаотичным изменением во времени и своей величины, и направления.

В настоящем курсе рассматривается действие только вибрационной нагрузки.

9.2. Определение числа степеней свободы

В динамике сооружений *число степеней свободы равно числу независимых геометрических параметров, определяющих положение колеблющихся масс в любой момент времени*. Из приведённого определения числа степеней свободы очевидно, что в динамике сооружений, в отличие от статики, появляется ещё одна координата – время.

Определение числа степеней свободы удобно проводить путём наложения связей. Минимальное число связей, устраняющих возможные перемещения масс, будет равно числу степеней свободы системы. При определении числа степеней свободы можно вводить допущения, упрощающие их нахождение.

Рассмотрим пример определения числа степеней свободы для простой балки, несущей массу m . Число степеней свободы такой балки равно 1 (рис. 9.1), так как масса m может колебаться только в вертикальном направлении.

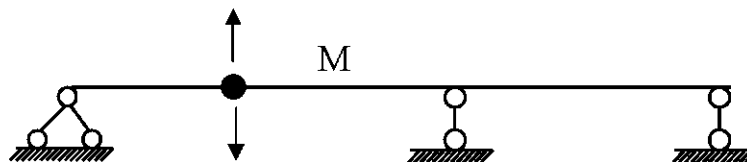


Рис. 9.1

Перемещением массы по горизонтали пренебрегаем. Пренебрегаем также вращением массы. Массу закрепляем одной вертикальной связью, устраняющей возможное вертикальное перемещение массы.

Если на балке расположено n колеблющихся масс (рис. 9.2), то число степеней свободы такой балки равно n .

Рассмотрим раму, на стойке которой прикреплена колеблющаяся масса m (рис. 9.3). Учитывая, что изгибная жёсткость EJ ригеля есть конечная величина, масса m может колебаться как в горизонтальном, так и вертикальном направлениях. Число степеней свободы рассматриваемой системы равно 2.

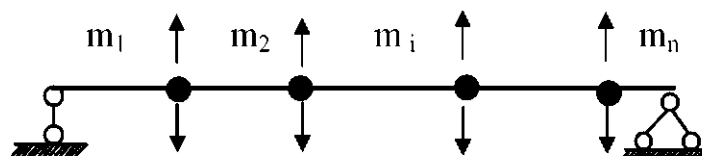


Рис. 9.2

Рассмотрим раму, на стойке которой прикреплена колеблющаяся масса m (рис. 9.3). Учитывая, что изгибная жёсткость EJ ригеля есть конечная величина, масса m может колебаться как в горизонтальном, так и вертикальном направлениях. Число степеней свободы рассматриваемой системы равно 2.



Рис. 9.3

Из приведенного примера очевидно, что число степеней свободы и число колеблющихся масс не всегда могут совпадать.

9.3. Собственные колебания систем с одной степенью свободы без учёта сил сопротивления внешней среды

Рассмотрим невесомую балку, весом которой по сравнению с массой m пренебрегаем (рис. 9.4).

Рассмотрим положение массы m в момент времени t . Отклонение массы обозначим $y(t)$. В отклонённом положении на массу m действует сила инерции J , равная, как известно из курса физики, произведению массы на ускорение.

$$J(t) = -m \frac{d^2 y}{dt^2}. \quad (9.1)$$

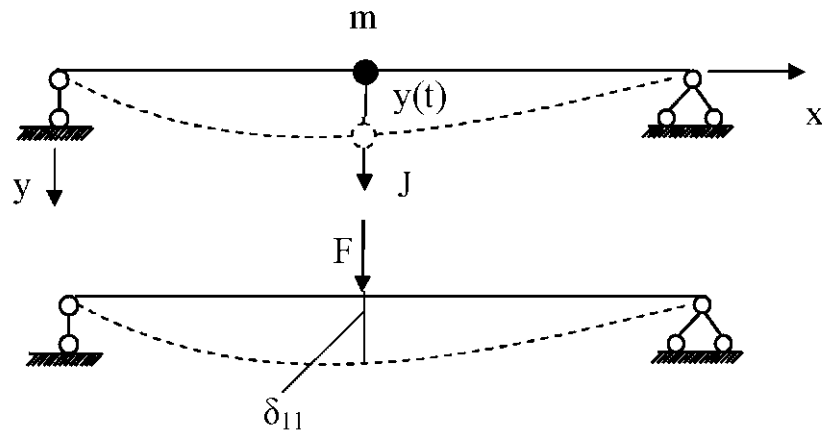


Рис. 9.4

Перемещение массы определяем через единичное перемещение в соответствии с выражением

$$y(t) = J(t) \cdot \delta_{11}. \quad (9.2)$$

Перемещение δ_{11} в (9.2) представляет собой перемещение, найденное от действия силы $F=1$, приложенной в точке прикрепления массы m .

С учетом (9.1) выражение (9.2) принимает вид

$$y(t) = -m \frac{d^2 y}{dt^2} \cdot \delta_{11}. \quad (9.3)$$

Переносим все слагаемые в левую часть уравнения (9.3), получим дифференциальное однородное уравнение, описывающее собственные колебания системы с одной степенью свободы без учёта сил сопротивления внешней среды:

$$y(t) + m\delta_{11} \frac{d^2 y}{dt^2} = 0. \quad (9.4)$$

Для приведения этого уравнения к стандартному виду разделим все слагаемые в (9.4) на произведение $m\delta_{11}$.

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{1}{m\delta_{11}} \cdot y = 0. \quad (9.5)$$

Обозначим в (9.5) $\omega^2 = \frac{1}{m\delta_{11}}$. Тогда дифференциальное уравнение (9.5) принимает стандартный вид

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0. \quad (9.6)$$

Получили уравнение, описывающее собственные колебания системы с одной степенью свободы. Параметр ω – собственная частота колебаний.

В математике получено решение уравнения (9.6), которое имеет следующий вид:

$$y = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t, \quad (9.7)$$

где A_1, A_2 – постоянные интегрирования.

Для определения A_1, A_2 используем начальные условия, имеющие место в момент времени $t=0$. При $t=0$ начальный прогиб $y = y_0$, начальная скорость $v = v_0$. Подставим в (9.7) $t=0$.

$$y = A_1 \cdot \sin 0 + A_2 \cdot \cos 0 = y_0. \quad (9.8)$$

Из (9.8) находим, что $A_2 = y_0$. Для определения постоянного интегрирования A_1 необходимо взять первую производную по времени от выражения (9.7), т.е. найти выражение, по которому в процессе колебания изменяется скорость перемещения колеблющейся массы.

$$\frac{dy}{dt} = v = \omega A_1 \cos \omega t - \omega A_2 \sin \omega t. \quad (9.9)$$

Подставляя в (9.9) $t=0$, получим

$$v = \omega A_1 \cos 0 - \omega A_2 \sin 0 = v_0. \quad (9.10)$$

Из (9.10) найдём, что $A_1 = \frac{v_0}{\omega}$. С учётом найденных значений постоянных интегрирования решение дифференциального уравнения (9.7) принимает окончательный вид

$$y = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + y_0 \cos \omega t. \quad (9.11)$$

Получили закон перемещения массы. Предположим, что колеблющаяся масса m находится в покое и мы её вывели из равновесия, придав ей начальную скорость v_0 . Тогда $y = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$. Если в начальный момент времени балка уже была изогнута (см. рис. 9.4) и она стала совершать колебания, то начальная скорость колебаний при этом $v_0 = 0$. Тогда уравнение колебаний примет вид $y = y_0 \cos \omega t$. Оба эти закона одинаковы по своему характеру, только смещены по фазе. Для анализа колебаний примем закон $y = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$ и построим его график (рис. 9.5) согласно данным, приведённым в табл. 9.1.

Таблица 9.1

	0	$\frac{\pi}{2\omega}$	$\frac{\pi}{\omega}$	$\frac{3\pi}{2\omega}$	$\frac{2\pi}{\omega}$
	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

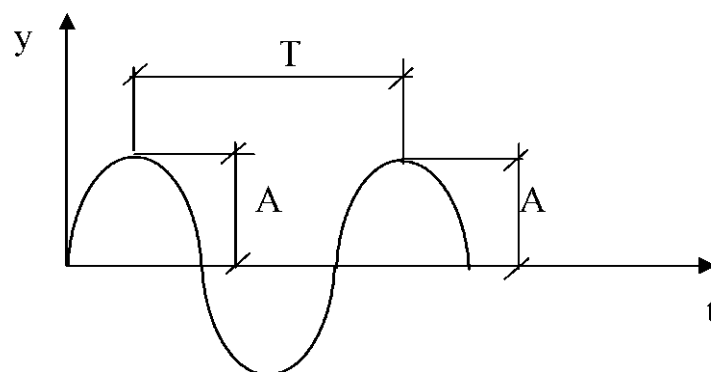


Рис. 9.5

Из анализа графика (см. рис. 9.5) очевидно, что все циклы колебаний одинаковые. Наибольшее отклонение массы от положения статического равновесия равно постоянной величине, которая носит название *амплитуды колебаний* $A = \frac{v_0}{\omega}$. Удвоенная величина амплитуды колебаний составляет размах колеблющейся точки. Время T , за которое балка совершает полный цикл колебаний, называется *периодом колебаний*. Из анализа графика (см. рис. 9.5) можно записать, что $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Число полных циклов колебаний в единицу времени называется *частотой колебаний*; если взять за единицу времени 2π с, то частота собственных (свободных) колебаний $\omega = \frac{2\pi}{T}$ с⁻¹. Учитывая, что $\omega^2 = \frac{1}{m\delta_{11}}$, частота собственных колебаний может быть определена из выражения

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}}. \quad (9.12)$$

9.4. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы

Рассмотрим балку (рис. 9.6) с массой m . К массе приложена $F(t)$ – возмущающая сила, создающая вынужденные колебания и изменяющаяся по гармоническому закону $F(t) = F_0 \cos \theta t$. Частота возмущающей силы обозначена символом θ , а амплитудное значение возмущающей силы – F_0 .

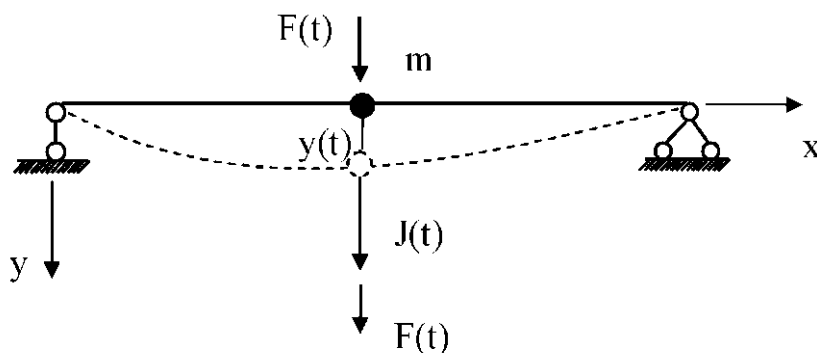


Рис. 9.6

Рассмотрим положение массы m в момент времени t . Отклонение массы обозначим $y(t)$. В отклонённом положении на массу действуют силы: $F(t)$ – возмущающая сила; $J(t)$ – сила инерции. θ – частота возмущающей силы; F_0 – амплитуда силы $F(t)$.

Силами сопротивления, которые возникают при колебаниях, пренебрегаем. Перемещение массы в любой момент времени через единичное перемещение определяем по выражению

$$y(t) = [F(t) + J(t)]\delta_{11}. \quad (9.13)$$

Подставим в (9.13) вместо инерционной силы $J(t)$ выражение, представленное формулой (9.1)

$$y(t) = \left[F(t) - m \frac{d^2 y}{dt^2} \right] \delta_{11}. \quad (9.14)$$

После раскрытия скобок в уравнении (9.14) и деления всех слагаемых на произведение массы и единичного перемещения получаем

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{1}{m\delta_{11}} y(t) = \frac{1}{m} F(t). \quad (9.15)$$

Обозначим в (9.15) $\omega = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}}$ – собственная частота колебаний.

Уравнение (9.15) принимает вид

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = \frac{1}{m} F_0 \cos \theta t. \quad (9.16)$$

Как известно, полное решение дифференциального уравнения (9.16) представляют в виде $y = y_0 + y_2$. Общее y_0 решение представляет собой решение однородного дифференциального уравнения. Частное y_2 решение уравнения (9.16) ищем в виде $y_2 = C \cos \theta t$; $\frac{d^2 y_2}{dt^2} = -C\theta^2 \cos \theta t$. С учётом изложенного уравнение (9.16) примет следующий вид:

$$-C\theta^2 \cos\theta t + \omega^2 C \cdot \cos\theta t = \frac{1}{m} F_0 \cos\theta t. \quad (9.17)$$

Из уравнения (9.17) следует, что постоянная интегрирования C может быть найдена из выражения

$$C = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \theta^2)} = \frac{F_0}{m\omega^2 \left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)}. \quad (9.18)$$

С учетом $\omega^2 = \frac{1}{m\delta_{11}}$ постоянная интегрирования C получается равной

$$C = \frac{F_0 \delta_{11}}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}} = \frac{y_{cm}}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}}. \quad (9.19)$$

В (9.19) $y_{cm} = F_0 \delta_{11}$. Замечаем, что амплитуда вынужденных колебаний от силы, изменяющейся по гармоническому закону, больше, чем прогиб от силы, приложенной статически. Обозначим $\mu = \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}}$

– динамический коэффициент. График изменения динамического коэффициента μ в зависимости от отношения $\frac{\theta}{\omega}$ показан на рис. 9.7.

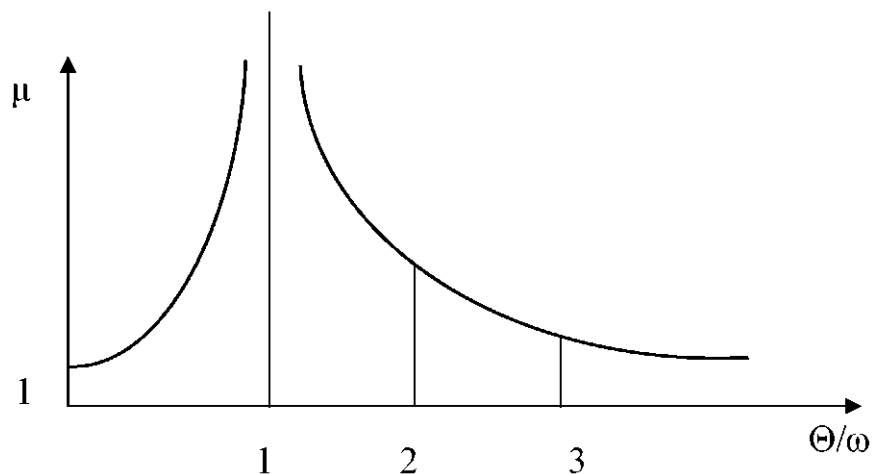


Рис. 9.7

При $\frac{\theta}{\omega} = 1$ коэффициент μ равен ∞ , что означает бесконечно большие прогибы в конструкции, а это равносильно ее разрушению. Явление, при котором частота собственных колебаний ω совпадает с частотой возмущающей силы θ , называется *резонансом*. Резонанс опасен для конструкций, поэтому надо стремиться к тому, чтобы частоты ω и θ не совпадали.

Полное решение дифференциального уравнения (9.16) для вынужденных колебаний имеет вид

$$y = y_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + \mu y_{cm} \cdot \cos \theta t. \quad (9.20)$$

Анализируя выражение (9.20), отмечаем, что первые два слагаемые описывают собственные колебания и быстро затухают. Третье слагаемое описывает вынужденные колебания, которые остаются и имеют ту же частоту, что и возмущающая сила $F(t)$.

9.5. Собственные колебания системы с конечным числом степеней свободы

Рассмотрим балку (рис. 9.8) с n сосредоточенными массами, которые совершают собственные колебания в вертикальной плоскости. Вращения, горизонтальные смещения масс и силы сопротивления внешней среды при анализе колебательного процесса не учитываются.

Число степеней свободы такой системы равно n . К каждой из масс приложены силы инерции J_1, J_2, \dots, J_n . В этом случае имеют место собственные колебания системы с n степенями свободы.

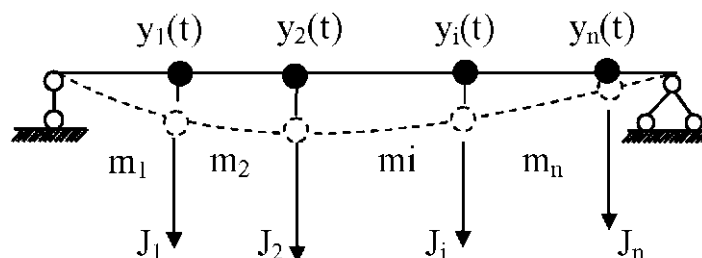


Рис. 9.8

Обозначим отклонение масс y_1, y_2, \dots, y_n , а амплитуды колебаний – A_1, A_2, \dots, A_n .

Уравнения движения масс примем в виде, описанном выражениями

$$\begin{aligned} y_1 &= A_1 \sin(\omega t + \nu); \\ y_2 &= A_2 \sin(\omega t + \nu); \\ \dots\dots\dots \\ y_n &= A_n \sin(\omega t + \nu). \end{aligned} \quad (9.21)$$

В соответствии с принятым законом колебаний (9.21) определим силы инерции:

$$\begin{aligned} J_1 &= -m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = m_1 \omega^2 A_1 \sin(\omega t + \nu) = m_1 \omega^2 y_1; \\ J_2 &= -m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} = m_2 \omega^2 A_2 \sin(\omega t + \nu) = m_2 \omega^2 y_2; \\ \dots\dots\dots \\ J_n &= -m_n \frac{d^2 y_n}{dt^2} = m_n \omega^2 A_n \sin(\omega t + \nu) = m_n \omega^2 y_n. \end{aligned} \quad (9.22)$$

Найдем перемещения точек прикрепления каждой из масс от всех инерционных сил:

$$\begin{aligned} y_1 &= \delta_{11} m_1 \omega^2 y_1 + \delta_{12} m_2 \omega^2 y_2 + \dots + \delta_{1n} m_n \omega^2 y_n; \\ y_2 &= \delta_{21} m_1 \omega^2 y_1 + \delta_{22} m_2 \omega^2 y_2 + \dots + \delta_{2n} m_n \omega^2 y_n; \\ \dots\dots\dots \\ y_n &= \delta_{n1} m_1 \omega^2 y_1 + \delta_{n2} m_2 \omega^2 y_2 + \dots + \delta_{nn} m_n \omega^2 y_n. \end{aligned} \quad (9.23)$$

Разделим в (9.23) все слагаемые на ω^2 и, обозначая $\frac{1}{\omega^2} = \lambda$ (собственное число), перенося все слагаемые в одну сторону, получим систему линейных однородных алгебраических уравнений, неизвестными в которых являются перемещения у точек прикрепления масс.

В (9.26) J_1, J_2, \dots, J_n – инерционные силы; δ_{ij} – перемещение в направлении i -й массы от действия силы $F = 1$, приложенной в точке прикрепления j -й массы; δ_{iF} – перемещение i -й массы от действия силы $F(t) = 1$. Движение масс во времени будет происходить по тому же закону, по которому меняется внешняя возмущающая сила: $y_1 = A_1 \cos \theta t; y_2 = A_2 \cos \theta t; \dots; y_n = A_n \cos \theta t$.

Силы инерции, приложенные к каждой из масс, имеют вид

$$\begin{aligned} J_1 &= -m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = m_1 \theta^2 A_1 \cos \theta t = m_1 \theta^2 y_1; \\ J_2 &= -m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} = m_2 \theta^2 A_2 \cos \theta t = m_2 \theta^2 y_2; \\ &\dots \dots \dots (9.27) \\ J_n &= -m_n \frac{d^2 y_n}{dt^2} = m_n \theta^2 A_n \cos \theta t = m_n \theta^2 y_n. \end{aligned}$$

Подставляем (9.27) в систему (9.26) и, сокращая на $\cos \theta t$, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \delta_{11}^* J_1 + \delta_{12} J_2 + \dots + \delta_{1n} J_n + F_0 \delta_{1F} = 0; \\ \delta_{21} J_1 + \delta_{22}^* J_2 + \dots + \delta_{2n} J_n + F_0 \delta_{2F} = 0; \\ \dots \dots \dots \\ \delta_{n1} J_1 + \delta_{n2} J_2 + \dots + \delta_{nn}^* J_n + F_0 \delta_{nF} = 0. \end{cases} \quad (9.28)$$

В уравнениях (9.28) главные диагональные коэффициенты равны:

$$\delta_{11}^* = \left(\delta_{11} - \frac{1}{m_1 \theta^2} \right); \quad \delta_{22}^* = \left(\delta_{22} - \frac{1}{m_2 \theta^2} \right); \quad \dots; \quad \delta_{nn}^* = \left(\delta_{nn} - \frac{1}{m_n \theta^2} \right).$$

Следует отметить, что эти коэффициенты в отличие от главных диагональных систем канонических уравнений метода сил и метода перемещений могут быть отрицательными. Решая систему (9.28), находим амплитудные значения инерционных сил J_1, \dots, J_n . Силы инерции будут меняться по такому же гармоническому закону, как и возмущающая сила $F(t)$: $J_1(t) = J_1 \cos \theta t; J_2(t) = J_2 \cos \theta t; \dots; J_n(t) = J_n \cos \theta t$.

Определив инерционные силы, можно определить изгибающие моменты (динамические), которые возникают в поперечных сечениях рассматриваемой конструкции в состоянии наибольших отклонений масс от положения равновесия. В соответствии с этим можно записать

$$M_{\text{дин}} = M_{F_i} + \sum \bar{M}_i \cdot J_i. \quad (9.29)$$

где M_{F_i} – изгибающий момент от действия амплитудного F_0 значения возмущающей силы $F(t)$; \bar{M}_i – изгибающий момент от действия силы $F=1$, приложенной к точке прикрепления i -й массы.

Определив $M_{\text{дин}}$, можно найти $Q_{\text{дин}}$, используя для этого известную из сопротивления материалов дифференциальную зависимость $Q_{\text{дин}} = \frac{dM_{\text{дин}}}{dS} = \text{tg}\alpha$, где α – угол наклона $M_{\text{дин}}$ с осью балки (рамы).

Вырезая узлы на эпюре $Q_{\text{дин}}$, определяем $N_{\text{дин}}$.

9.7. Расчет рамы на динамическое действие нагрузки

Рассмотрим статически определимую раму (рис. 9.11), на горизонтальном элементе которой находятся колеблющиеся массы.

Исходные данные: $\ell = 6$ м; $h = 4$ м; $m_1 = 4 \frac{\text{кН} \cdot \text{с}^2}{\text{м}}$;
 $m_2 = 3 \frac{\text{кН} \cdot \text{с}^2}{\text{м}}$; $F_0 = 30$ кН; $EJ = 7000$ кН · м².

Порядок расчёта:

1. Определение числа степеней свободы: каждая из масс m_1 и m_2 может перемещаться только в вертикальном направлении, следовательно, число степеней свободы рассчитываемой рамы равно 2.

2. Построение единичных и грузовой эпюр.

В точке приложения массы m_1 прикладываем $F = 1$ и строим эпюру \bar{M}_1 , изображённую на рис. 9.12.

В точке приложения массы m_2 прикладываем $F = 1$ и строим эпюру \bar{M}_2 , изображённую на рис. 9.13.

В точке действия возмущающей силы прикладываем амплитудное значение этой силы F_0 и строим эпюру M_F , изображённую на рис. 9.14.

3. Определение коэффициентов δ_{iK} , Δ_{iF} :

$$\delta_{12} = \sum \frac{\partial n \cdot \bar{M}_1 \cdot \partial n \cdot \bar{M}_2}{EJ} = \frac{1}{2EJ} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{EJ} \cdot 6 \cdot 3 \cdot 3 + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{6+3}{2} \cdot 3 \cdot 3 +$$

$$+ \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{128,5}{EJ};$$

$$\delta_{22} = \sum \frac{\partial n \cdot \bar{M}_2 \cdot \partial n \cdot \bar{M}_2}{EY} = \frac{1}{2EJ} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{EJ} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 3 +$$

$$+ \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{75}{EJ};$$

$$\delta_{11} = \sum \frac{\partial n \cdot \bar{M}_1 \cdot \partial n \cdot \bar{M}_2}{EJ} = \frac{1}{2EJ} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{EJ} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 6 + \frac{1}{2EJ} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 +$$

$$+ \frac{3}{6EJ} (2 \cdot 6 \cdot 6 + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 6) = \frac{246}{EJ};$$

$$\Delta_{1F} = \sum \frac{\partial n \cdot M_F \cdot \partial n \cdot \bar{M}_1}{EJ} = -\frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 30 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 - \frac{1}{EJ} \cdot \frac{2}{6} (2 \cdot 30 \cdot 3 + 30 \cdot 6) = -\frac{240}{EJ};$$

$$\Delta_{2F} = \sum \frac{\partial n \cdot M_F \cdot \partial n \cdot \bar{M}_2}{EJ} = -\frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 30 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5 -$$

$$- \frac{1}{EJ} \cdot \frac{2}{6} (2 \cdot 30 \cdot 1,5 + 30 \cdot 3) = -\frac{120}{EJ}.$$

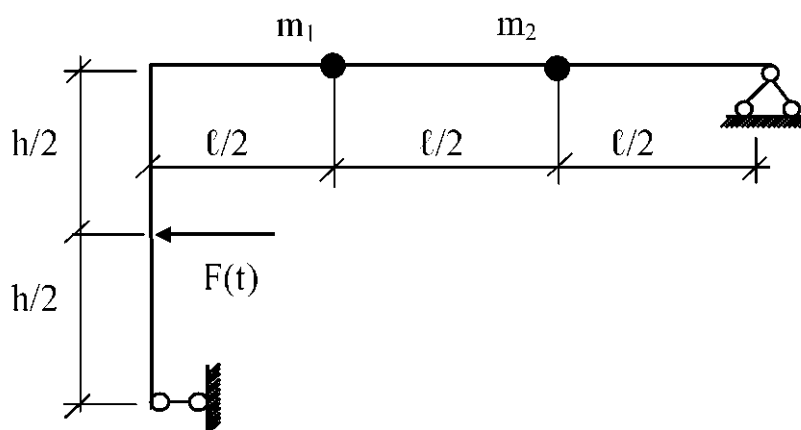


Рис. 9.11

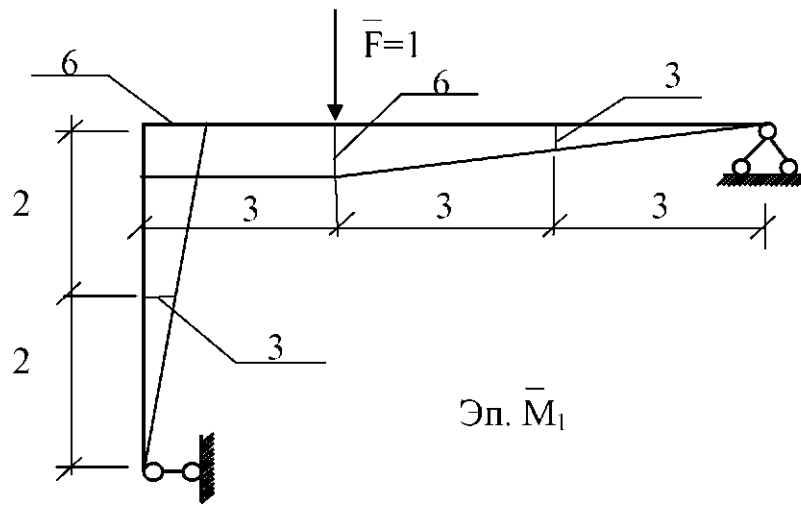


Рис. 9.12

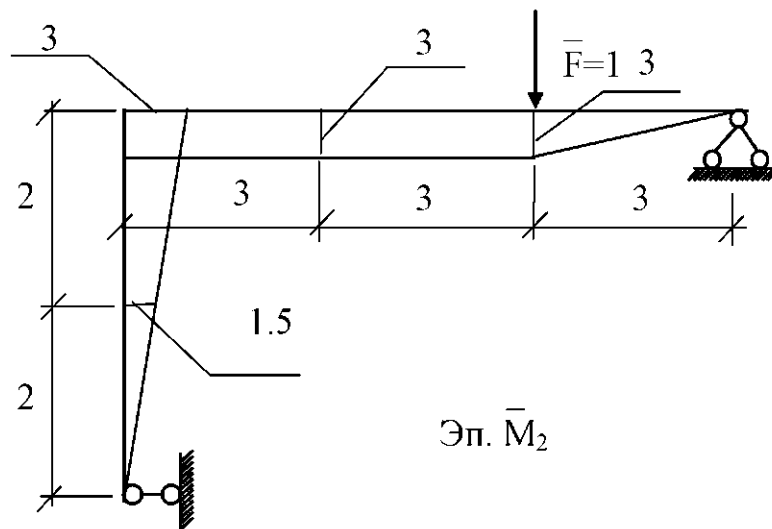


Рис. 9.13

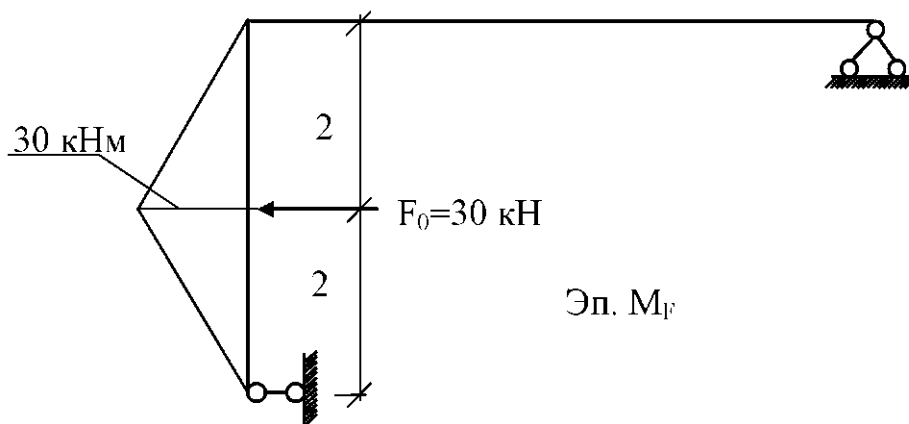


Рис. 9.14

4. Определение собственных частот.

Составляем вековое уравнение для определения собственных чисел, которое для данной задачи имеет вид определителя второго порядка (число степеней свободы равно 2).

$$\begin{vmatrix} \delta_{11}m_1 - \lambda & \delta_{12}m_2 \\ m_1\delta_{21} & \delta_{22}m_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскроем определитель и получим алгебраическое уравнение второго порядка относительно искомого параметра λ .

$$\begin{aligned} (\delta_{11}m_1 - \lambda)(\delta_{22}m_2 - \lambda) - \delta_{12}^2m_1m_2 &= 0; \\ \delta_{11}\delta_{22}m_1m_2 - \lambda\delta_{22}m_2 - \lambda\delta_{11}m_1 + \lambda^2 - \delta_{12}^2m_1m_2 &= 0; \\ \lambda^2 - (\delta_{22}m_2 + \delta_{11}m_1)\lambda + \delta_{11}\delta_{22}m_1m_2 - \delta_{12}^2m_1m_2 &= 0. \end{aligned}$$

Подставим в последнее уравнение значения перемещений δ и решим его:

$$\lambda^2 - \left(\frac{75}{EJ} \cdot 3 + \frac{246}{EJ} \cdot 4 \right) \lambda + \frac{75}{EJ} \cdot \frac{246}{EJ} \cdot 4 - \frac{128,5^2}{(EJ)^2} = 0;$$

$$\lambda^2 - \frac{1209}{EY} \lambda + \frac{204887,75}{(EY)^2} = 0;$$

$$\lambda_{12} = \frac{1209 \pm \sqrt{642130}}{EJ \cdot 2} = \frac{1209 \pm 801,33}{2EJ}.$$

Корнями уравнения являются найденные значения λ .

$$\lambda_1 = \frac{1005,16}{EY}; \quad \lambda_2 = \frac{407,67}{EY}.$$

По найденным значениям λ найдём искомые частоты собственных колебаний.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}} = \sqrt{\frac{EJ}{1005,16}} = \frac{\sqrt{EJ}}{31,7} = 0,0315 \text{ c}^{-1} \cdot \sqrt{EJ};$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{\lambda_2}} = \sqrt{\frac{EJ}{407,67}} = \frac{\sqrt{EJ}}{20,19} = 0,0495 \text{ c}^{-1} \cdot \sqrt{EJ}.$$

5. Определение инерционных сил.

Частоту θ возмущающей силы примем равной $0,3\omega_{\min}$. Тогда частота вынужденных колебаний $\theta = 0,3\omega_1 = 0,00945\sqrt{EJ}$.

Составим систему уравнений для определения инерционных сил J_1 и J_2 , которая в данном случае принимает вид

$$\begin{cases} \delta_{11}^* \cdot J_1 + \delta_{12} \cdot J_2 + \Delta_{1F_i} = 0; \\ \delta_{21} \cdot J_1 + \delta_{22}^* \cdot J_2 + \Delta_{2F_i} = 0. \end{cases}$$

$$\delta_{11}^* = \delta_{11} - \frac{1}{m_1 \Theta^2} = \frac{246}{EJ} - \frac{1}{4 \cdot EJ(0,00945)^2} = -\frac{2583,33}{EJ}.$$

$$\delta_{22}^* = \delta_{22} - \frac{1}{m_2 \Theta^2} = \frac{75}{EJ} - \frac{1}{3 \cdot EJ(0,00945)^2} = -\frac{3697,44}{EJ}.$$

После подстановки найденных параметров в систему уравнений инерционных сил находим их значения.

$$\begin{cases} -\frac{397,44}{EJ} J_1 + \frac{128,5}{EJ} J_2 - \frac{240}{EJ} = 0; \\ \frac{128,5}{EJ} J_1 - \frac{3697,44}{EJ} J_2 - \frac{120}{EJ} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3697J_1 + 128,5J_2 - 240 = 0; \\ 128,5J_1 - 3697,44J_2 - 120 = 0. \end{cases}$$

$$J_1 = -0,074 \text{ кН}; \quad J_2 = -0,035 \text{ кН}.$$

6. Построение динамических эпюр внутренних усилий $M_{\text{дин}}$, $Q_{\text{дин}}$, $N_{\text{дин}}$.

Динамическую эпюру $M_{\text{дин}}$ построим в соответствии с выражением

$$\text{Эп} M_{\text{дин}} = \text{Эп} \bar{M}_1 \cdot J_1 + \text{Эп} \bar{M}_2 \cdot J_2 + \text{Эп} M_{F_i}.$$

На рис. 9.15 и 9.16 приведены результаты произведения единичных эпюр на соответствующие им инерционные силы, а на рис. 9.17 показана итоговая эпюра $M_{\text{ит}}$.

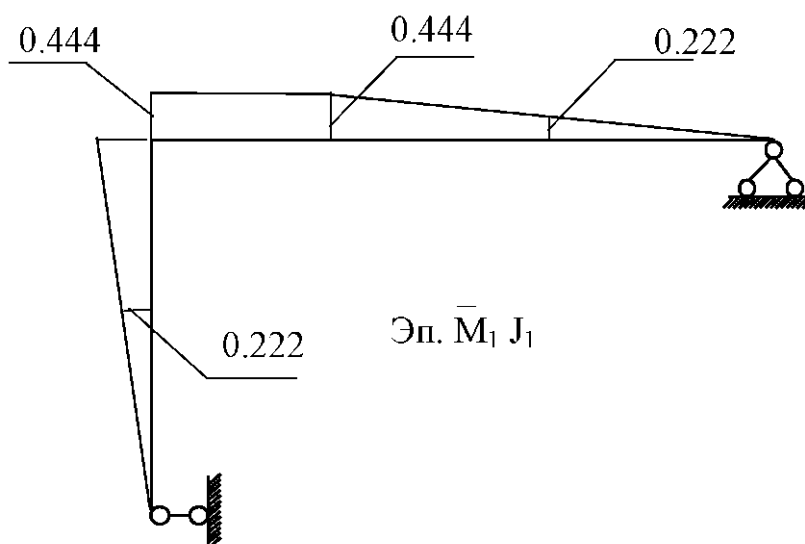


Рис. 9.15

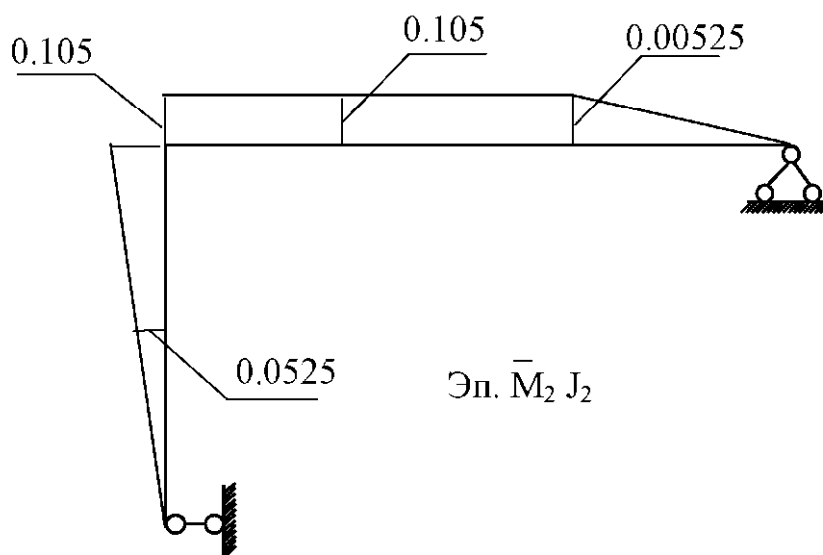


Рис. 9.16

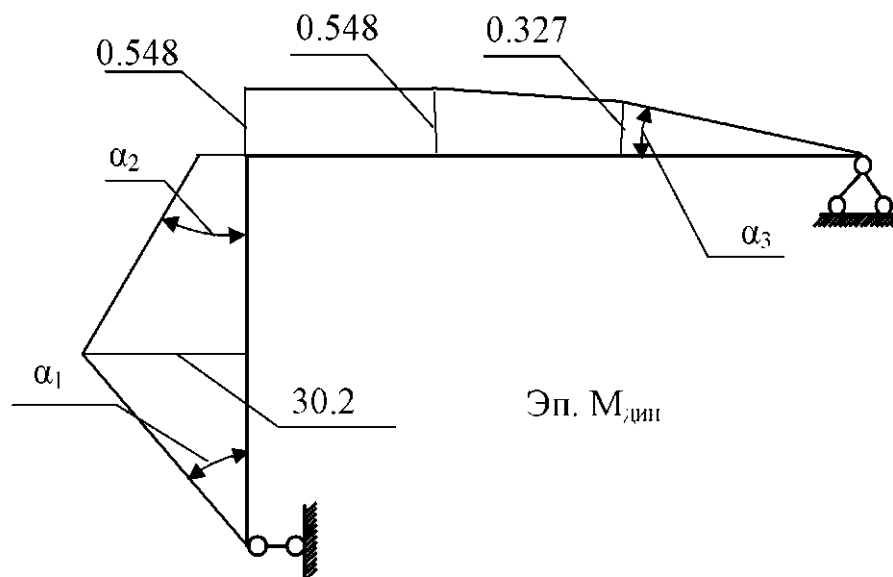


Рис. 9.17

По полученным значениям $M_{дин}$ строим эпюру $Q_{дин}$.

$$Q_{дин} = \frac{dM_{дин}}{ds} = \operatorname{tg}\alpha;$$

$$Q_1 = \operatorname{tg}\alpha_1 = -15,137 \text{ кН};$$

$$Q_3 = \operatorname{tg}\alpha_3 = 0,074 \text{ кН};$$

$$Q_2 = \operatorname{tg}\alpha_2 = 14,862 \text{ кН};$$

$$Q_4 = \operatorname{tg}\alpha_4 = 0,109 \text{ кН}.$$

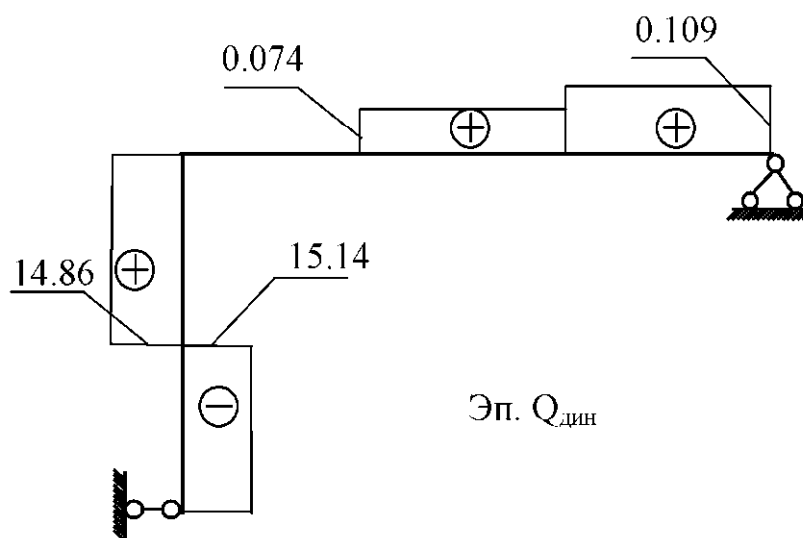


Рис. 9.18

По построенной эпюре $Q_{дин}$, показанной на рис. 9.18, используя метод вырезания узлов на эп. $Q_{дин}$, строим эпюру $N_{дин}$ (рис. 9.20).

Вырезаем узел C так, как это показано на рис. 9.19.

Из суммы проекций на оси x и y находим

$$N_{риг} = -14,86 \text{ кН.}$$

$$N_{ст} = 0.$$

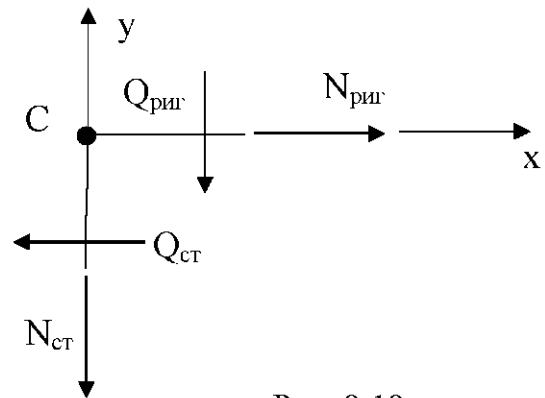


Рис. 9.19

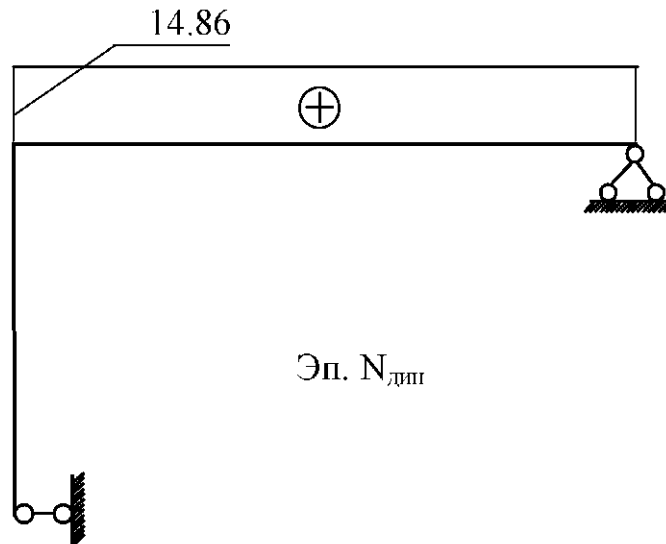


Рис. 9.20

По этим данным строим эпюру $N_{дшт}$, показанную на рис. 9.20.

7. Статическая проверка правильности построения эпюр.

Составим уравнения равновесия, спроецировав все силы, действующие на рассчитываемую раму, на оси x и y соответственно, и уравнение моментов.

$$\Sigma_x = 15,137 + 14,862 - 30 = 0;$$

$$\Sigma_y = 0,109 - 0,074 - 0,035 = 0;$$

$$\Sigma_{m,A} = -30 \cdot 2 + 0,074 \cdot 3 + 0,035 \cdot 6 - 0,109 \cdot 9 + 14,862 \cdot 4 = 0.$$

Равенство нулю последнего выражения означает, что статическая проверка выполняется.

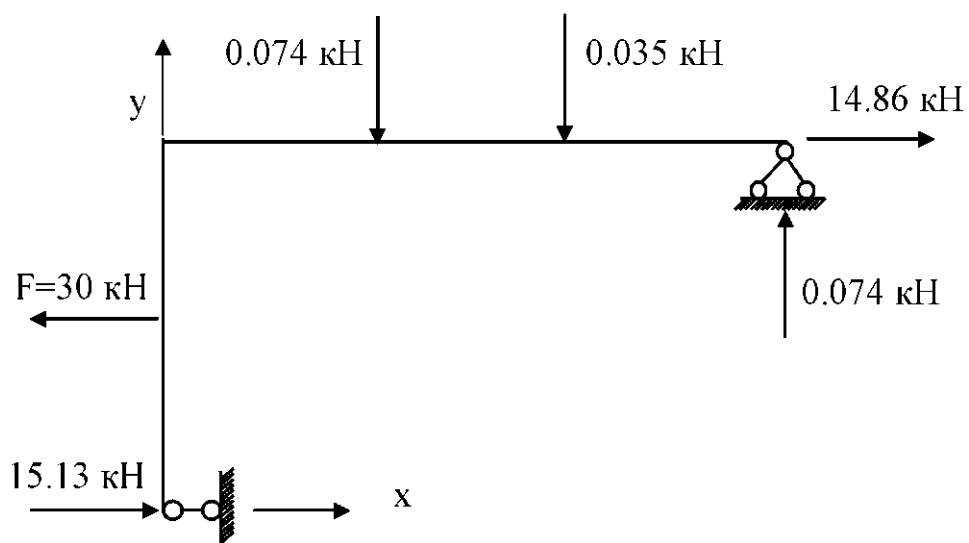


Рис. 9.21

10. УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

10.1. Основные понятия

Под устойчивостью понимают способность элементов конструкций сохранять первоначальное положение равновесия при действии на них сжимающих нагрузок. Устойчивость является необходимым условием для каждой инженерной конструкции. Когда первоначальная форма равновесия становится неустойчивой, происходит потеря устойчивости конструкции. Потеря устойчивости может привести к разрушению как отдельного элемента, так и конструкции в целом.

Физическим признаком устойчивости формы равновесия служит поведение нагруженной конструкции при её отклонении от положения равновесия на некоторую малую величину. Равновесие конструкции устойчиво, если после устранения причин, вызвавших её отклонение, она возвращается в исходное положение. Если после устранения причин конструкция не возвращается в первоначальное положение, то её первоначальное положение равновесия неустойчиво. *Наименьшая сжимающая нагрузка, при которой происходит потеря устойчивости конструкции, называется критической силой $F_{кр}$.*

Основы устойчивости упругих систем были разработаны Л. Эйлером (1744 г.). Им впервые решена задача об устойчивости стержня, сжатого силой F (рис. 10.1).

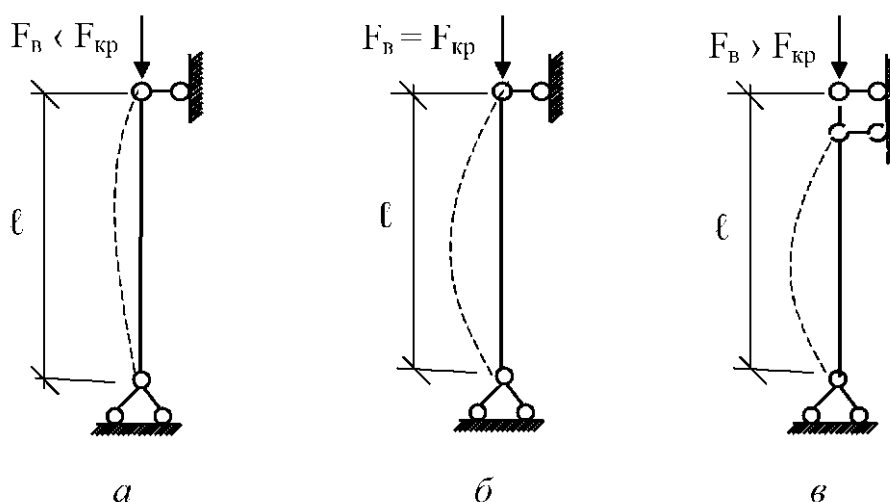


Рис. 10.1

Для сжатого силой F стержня при $F < F_{кр}$ устойчива прямолинейная первоначальная форма равновесия (рис. 10.1, *а*). Это состояние характеризуется тем, что стержень, отклонённый на малую величину от начального положения равновесия, возвращается в первоначальное положение после устранения возмущений.

При сжимающей силе $F = F_{кр}$ (рис. 10, *б*) происходят разветвления форм равновесия, т. е. возможны две формы равновесия – прямолинейная и криволинейная. В этом случае стержень испытывает состояние, когда бесконечно малое превышение силы F приводит к потере устойчивости. При $F > F_{кр}$ (рис. 10, *в*) устойчивыми становятся криволинейные формы равновесия, что ведёт к разрушению стержня.

На рис. 10.1 пунктиром показаны неустойчивые формы равновесия. Основной задачей исследования устойчивости конструкций является определение критических нагрузок. Критические нагрузки определяются статическими, энергетическими и динамическими методами.

Статический метод. Исследуют равновесие систем в отклонённом состоянии. Получают уравнения, описывающие перемещения систем в отклонённом положении, и определяют величину сжимающей силы, при которой возможно появление новых форм равновесия. Минимальная величина этой нагрузки и будет являться критической силой. Для исследований используют любые методы раскрытия статической неопределённости.

Энергетический метод. Этот метод основан на определении критической нагрузки из условия равенства нулю приращения полной энергии системы при переходе её в новое неустойчивое положение равновесия. Если потенциальная энергия системы при этом возрастает, то первоначальное положение равновесия устойчиво.

Динамический метод. Этот метод основан на использовании колебаний систем. Если колебания системы происходят с уменьшением амплитуды колебаний, то первоначальное положение системы устойчиво. При достижении нагрузкой критического значения внешнее возбуждение приводит к неограниченному росту амплитуд колебаний.

10.2. Определение усилий в сжато-изогнутых стержнях при смещении их опорных закреплений

При исследовании устойчивости стержневых систем необходимо определить концевые усилия в стержнях при смещениях их опорных закреплений. Рассмотрим стержень длиной ℓ , жёсткостью EJ_z , сжатый силой F (рис. 10.2).

Предположим, что в результате потери устойчивости стержня, сжатого силой F , левый край его сместился на величину y_0 , а поперечное сечение повернулось на угол φ_0 . В переместившемся опорном сечении стержня возникли усилия M_0 (изгибающий момент) и Q_0 (поперечная сила). Направления Q_0 и M_0 выбираем в соответствии с принятыми направлениями для поперечной силы и изгибающего момента.

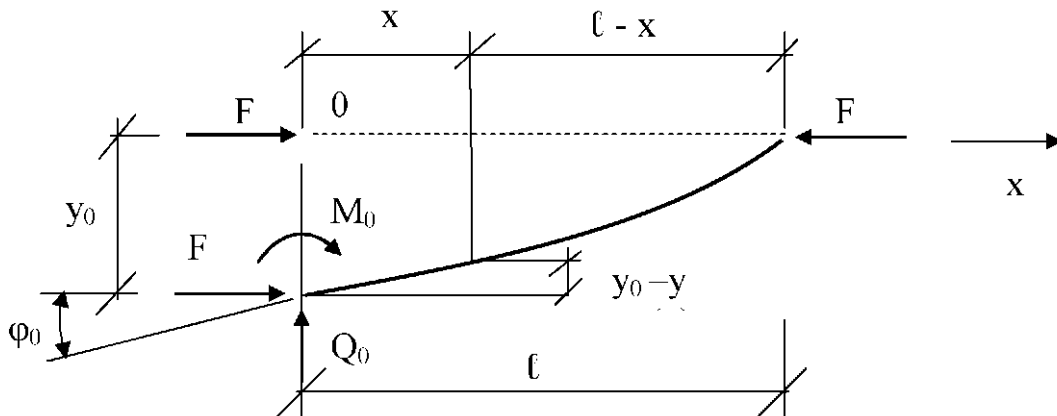


Рис. 10.2

В произвольном сечении x стержня значение изгибающего момента определяется выражением

$$M(x) = M_0 + Q_0 \cdot x - F(y - y_0). \quad (10.1)$$

Из теории изгиба, рассмотренного в курсе сопротивления материалов, уравнение изогнутой оси стержня записывается

$$EJ_z \cdot y''(x) = -M(x). \quad (10.2)$$

Из равенства выражений (10.1) и (10.2) получаем

$$y''(x) = -\frac{M_0 + Q_0x - F(y_0 - y)}{EJ_z}. \quad (10.3)$$

Обозначим в (10.3) $\frac{F}{EJ_z} = k^2$. Тогда уравнение изогнутой оси стержня принимает вид

$$y''(x) + k^2 y(x) = -\frac{(M_0 + Q_0x - Fy_0)}{EJ_z}. \quad (10.4)$$

Решением неоднородного дифференциального уравнения (10.4) второго порядка является функция

$$y(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx - \frac{(M_0 + Q_0x - Fy_0)}{k^2 EJ_z}. \quad (10.5)$$

Функция (10.5) представляет собой уравнение изогнутой оси сжатого стержня. Согласно известной дифференциальной зависимости, получим выражение для угла поворота:

$$\varphi(x) = y'(x) = kC_1 \cos kx - kC_2 \sin kx - \frac{Q_0}{k^2 EJ_z}. \quad (10.6)$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 используем граничные условия: при $x = 0$ $y = y_0$, а $y' = y'_0$. Подставим эти условия в (10.5) и (10.6), получаем $y_0 = C_2 - \frac{M_0 - Fy_0}{k^2 EJ_z}$ и соответственно

$$y'_0 = kC_1 - \frac{Q_0}{k^2 EJ_z}. \quad \text{Отсюда постоянные интегрирования } C_2 = \frac{M_0}{k^2 EJ_z} \text{ и}$$

$$C_1 = \frac{y'_0}{k} + \frac{Q_0}{k^3 EJ_z}.$$

После подстановки найденных значений постоянных интегрирования в (10.5) и (10.6) выражения для $y(x)$ и $y'(x)$ принимают вид, соответствующий выражениям (10.7) и (10.8).

$$y(x) = \frac{y_0 + y'_0 \sin kx}{k} - \frac{M_0(1 - \cos kx)}{k^2 EJ_z} - \frac{Q_0(kx - \sin kx)}{k^3 EJ_z}. \quad (10.7)$$

$$y'(x) = y'_0 \cos kx - \frac{M_0 \sin kx}{kEJ_z} - \frac{Q_0(1 - \cos kx)}{k^2 EJ_z}. \quad (10.8)$$

Продифференцировав по длине стержня, получим выражения для определения внутренних силовых факторов.

$$M_z(x) = -EJy''(x) = kEJy'_0 \sin kx + M_0 \cos kx + \frac{Q_0 \sin kx}{k}. \quad (10.9)$$

$$Q_y(x) = k^2 EJy'_0 \cos kx - kM_0 \sin kx + Q_0 \cos kx. \quad (10.10)$$

10.3. Определение изгибающих моментов и поперечных сил в опорных сечениях

Полученные выражения можно использовать для определения усилий в приопорных сечениях стержня при единичных смещениях этих сечений. Для стержня (рис. 10.3), защемлённого с обеих сторон, при повороте левой заделки на угол $y'_0 = 1$ имеют место следующие краевые условия – при $x = 0$ прогиб $y = 0$ и угол поворота $y'_0 = 1$, а при $x = \ell$ прогиб опоры $y_\ell = 0$ и угол поворота $y'_\ell = 0$.

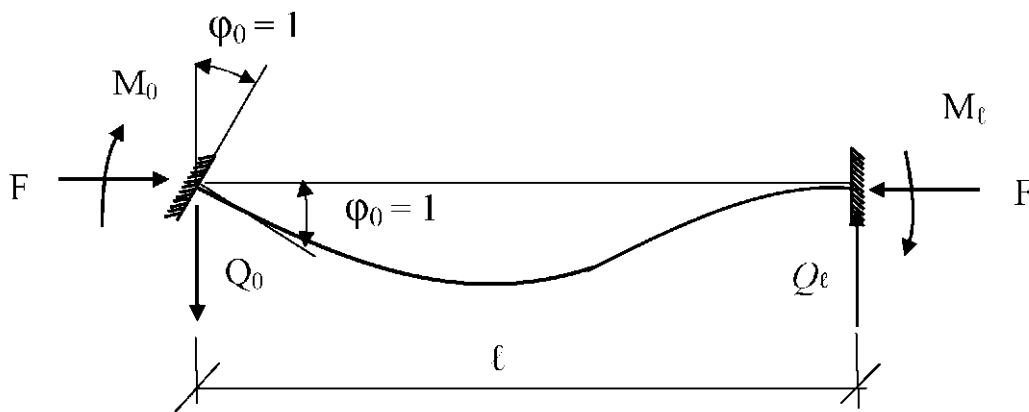


Рис. 10.3

Подставляя эти условия в (10.9) и (10.10), получаем

$$M_0 = \frac{4EJ}{\ell} \frac{kl(\operatorname{tg}kl - kl)}{8\operatorname{tg}kl \left(\operatorname{tg} \frac{kl}{2} - \frac{kl}{2} \right)}. \quad (10.11)$$

$$Q_0 = -\frac{6EJ}{\ell^2} \frac{(kl)^2 \operatorname{tg} \frac{kl}{2}}{12 \left(\operatorname{tg} \frac{kl}{2} - \frac{kl}{2} \right)}. \quad (10.12)$$

Используя найденные значения начальных параметров (10.11) и (10.12), находим значение изгибающего момента при $x = \ell$.

$$M_\ell = \frac{2EJ}{\ell} \frac{kl(kl - \sin kl)}{4\sin kl \left(\operatorname{tg} \frac{kl}{2} - \frac{kl}{2} \right)}. \quad (10.13)$$

Изгибающие моменты и поперечные силы, возникающие в опорных сечениях при других перемещениях опорных закреплений, приведены в прил. 3.

10.4. Расчёт статически неопределимых рам на устойчивость методом перемещений

Как и любой расчёт, расчёт статически неопределимых систем на устойчивость начинается с принятия ряда допущений, позволяющих с достаточной точностью при выполнении инженерных расчётов определить величину критической силы, при которой происходит потеря устойчивости. Определение потери устойчивости рам выполняют в случаях, когда в стержнях до потери устойчивости возникают только продольные силы. Это возможно, когда рама нагружена только узловой нагрузкой. Если рама нагружена силами, приложенными вне узлов, то такая нагрузка заменяется узловой нагрузкой.

В этом случае критические силы определяются приближённо и находятся лишь наибольшие значения продольных сил. Для расчёта рам на устойчивость применяют метод сил и метод перемещений.

Рассмотрим особенности расчёта статически неопределимых рам на устойчивость методом перемещений. Как и при обычном расчёте, сначала определяют по известной формуле $n = n_y + n_d$ степень кинематической неопределимости. Затем в соответствии с заданной систе-

$$\begin{vmatrix} r_{11} & \dots & r_{1i} & \dots & r_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{i1} & \dots & r_{ii} & \dots & r_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & \dots & r_{ni} & \dots & r_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (10.15)$$

В результате раскрытия определителя (10.15) получается алгебраическое трансцендентное уравнение относительно неизвестных функций, зависящих от искомого параметра v . Эти функции представлены следующими выражениями:

$$\varphi_1(v) = \frac{v^2 \operatorname{tg} v}{3(\operatorname{tg} v - v)}; \quad \varphi_2(v) = \frac{v(\operatorname{tg} v - v)}{8 \operatorname{tg} v \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2} \right)}; \quad \eta_2(v) = \eta_1 \left(\frac{v}{2} \right);$$

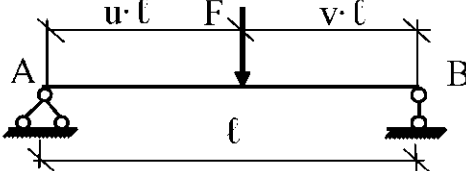
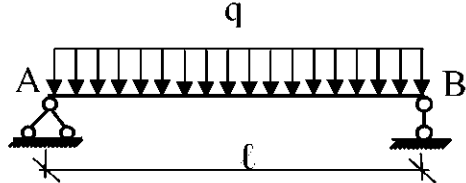
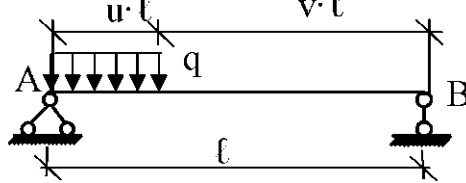
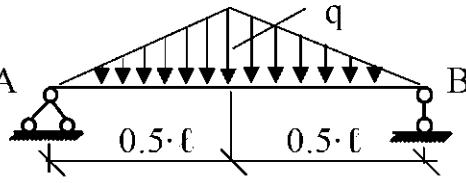
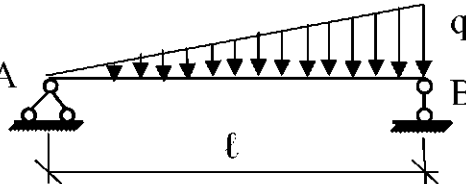
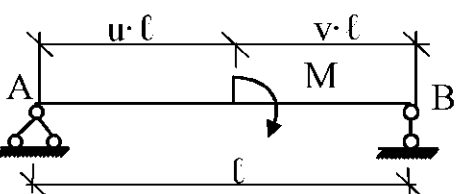
$$\varphi_3(v) = \frac{v(v - \sin v)}{4 \sin v \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2} \right)}; \quad \varphi_4(v) = \varphi_1 \left(\frac{v}{2} \right); \quad \eta_1(v) = \frac{v^3}{3(\operatorname{tg} v - v)}.$$

Полученное алгебраическое уравнение решают методом подбора, задаваясь значением параметра v . По заданному начальному значению v по прил. 4 или по приведённым только что формулам находят значения функций, входящих в решаемое алгебраическое уравнение. Удобно строить график, по оси ординат которого откладывают результат решения этого уравнения, а по оси абсцисс – величину того значения v , при котором получен этот результат. Искомым является то значение параметра v , при котором решаемое алгебраическое уравнение оказывается равным нулю. Тогда при найденном значении

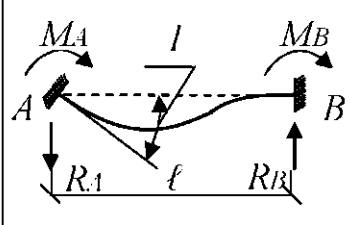
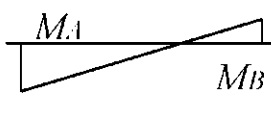
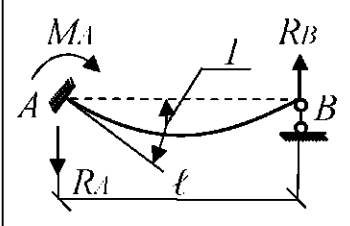
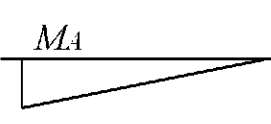
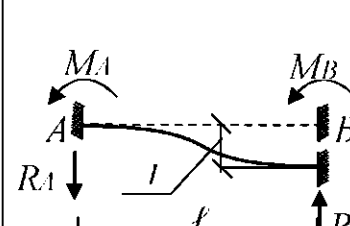
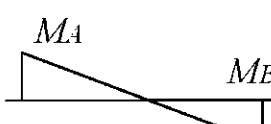
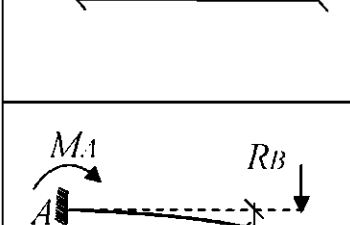
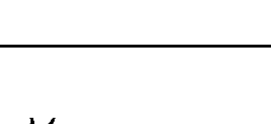
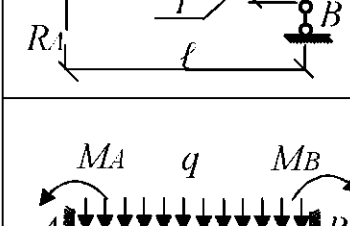
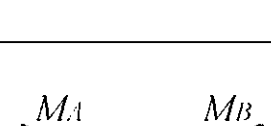
v из выражения $v = \ell \sqrt{\frac{F_{kp}}{EJ}}$ находят величину критической силы.

Если на рассматриваемую статически неопределимую систему действуют несколько сжимающих сил, необходимо знать величины соотношений между ними. Исходя из таких соотношений находят параметры уравнения устойчивости и проводят его решение точно так же, как и при действии на систему только одной сжимающей силы.

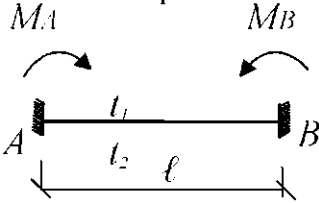
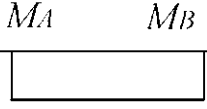
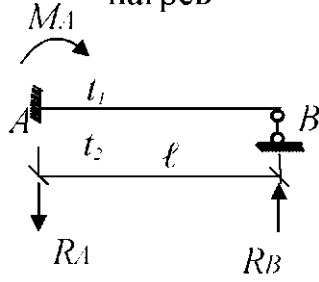
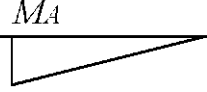
Приложение 1

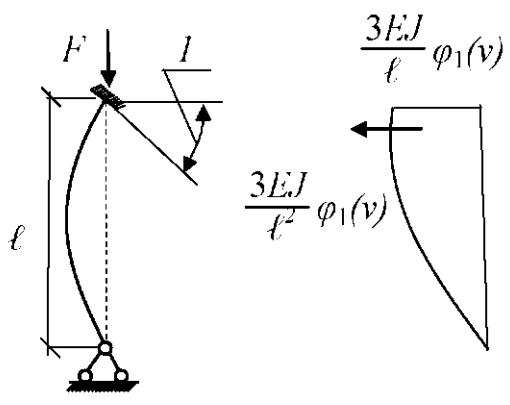
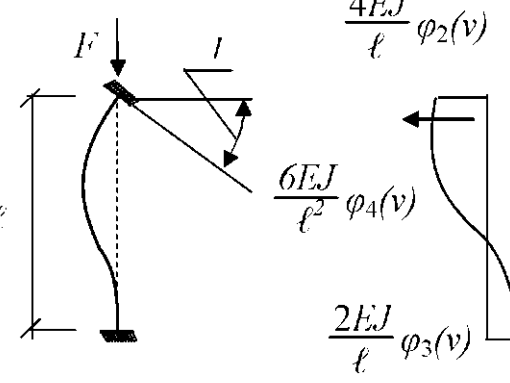
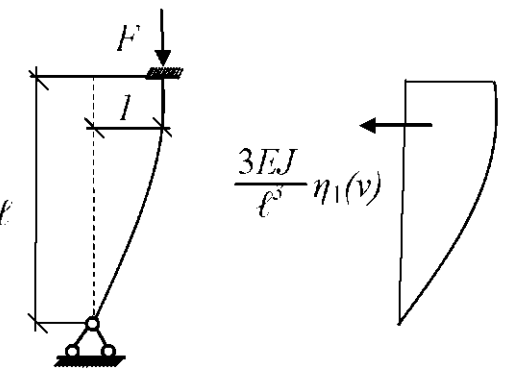
Схемы нагрузки	$6A^\phi$	$6B^\phi$
	$F\ell^2vu(1+v).$ При $u = v = 0,5$ $\frac{3}{8}F\ell^2$	$F\ell^2vu(1+u).$ При $u = v = 0,5$ $\frac{3}{8}F\ell^2$
	$\frac{q\ell^3}{4}$	$\frac{q\ell^3}{4}$
	$\frac{q\ell^3}{4}u^2(2-u)^2$	$\frac{q\ell^3}{4}u^2(2-u^2)$
	$\frac{q\ell^3}{4} \cdot \frac{5}{8}$	$\frac{q\ell^3}{4} \cdot \frac{5}{8}$
	$\frac{q\ell^3}{4} \cdot \frac{7}{15}$	$\frac{q\ell^3}{4} \cdot \frac{8}{15}$
	$-m\ell(1-3v^2).$ При $u = v = 0,5$ $-\frac{m\ell}{4}$	$m\ell(1-3u^2).$ При $u = v = 0,5$ $\frac{m\ell}{4}$

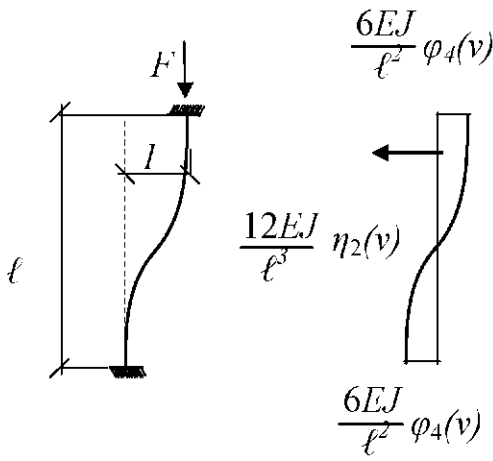
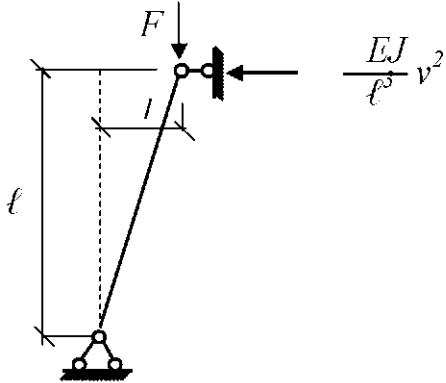
Приложение 2

Схема балки	Эпюра изгибающих моментов	Значения опорных моментов	Значения опорных реакций
1	2	3	4
		$M_A = \frac{4EJ}{l} = 4i;$ $M_B = \frac{2EJ}{l} = 2i$	$R_A = \frac{6EJ}{l^2} = \frac{6i}{l};$ $R_B = \frac{6EJ}{l^2} = \frac{6i}{l}$
		$M_A = \frac{3EJ}{l} = 3i$	$R_A = \frac{3EJ}{l^2} = \frac{3i}{l};$ $R_B = \frac{3EJ}{l^2} = \frac{3i}{l}$
		$M_A = \frac{6EJ}{l^2} = \frac{6i}{l};$ $M_B = \frac{6EJ}{l^2} = \frac{6i}{l}$	$R_A = \frac{12EJ}{l^3} = \frac{12i}{l^2};$ $R_B = \frac{12EJ}{l^3} = \frac{12i}{l^2}$
		$M_A = \frac{3EJ}{l^2} = \frac{3i}{l}$	$R_A = \frac{3EJ}{l^3} = \frac{3i}{l^2};$ $R_B = \frac{3EJ}{l^3} = \frac{3i}{l^2}$
		$M_A = \frac{q\ell^2}{12};$ $M_B = \frac{q\ell^2}{12}$	$R_A = \frac{q\ell}{2};$ $R_B = \frac{q\ell}{2}$

1	2	3	4
		$M_A = \frac{q\ell^2}{8}$	$R_A = \frac{5}{8}q\ell;$ $R_B = \frac{3}{8}q\ell$
		$M_A = \frac{Fab^2}{\ell^2};$ $M_B = \frac{Fa^2b}{\ell^2}$	$R_A = \frac{Fb^2}{\ell^2} \left(1 + \frac{2a}{\ell}\right);$ $R_B = \frac{Fa^2}{\ell^2} \left(1 + \frac{2b}{\ell}\right)$
		$M_A = \frac{Fb(\ell^2 - b^2)}{2\ell^2}$	$R_A = \frac{Fb}{2\ell^3} (3\ell^2 - b^2);$ $R_B = \frac{Fa^2(3\ell - a)}{2\ell^3}$
		$M_A = \frac{mb}{\ell^2} (2\ell - 3b);$ $M_B = \frac{ma}{\ell^2} (2\ell - 3a)$	$R_A = \frac{6ab}{\ell^3} m;$ $R_B = \frac{6ab}{\ell^3} m$
		$M_A = \frac{m}{2\ell^2} (\ell^2 - 3b^2)$	$R_A = \frac{3m}{2\ell^3} (\ell^2 - b^2);$ $R_B = \frac{3m}{2\ell^3} (\ell^2 - b^2)$

1	2	3	4
<p>Неравномерный нагрев</p> 		$M_A = -M_B = \frac{EJ}{h} \alpha t'$ <p>где h – высота поперечного сечения; α – температурный коэффициент линейного расширения; $t' = t_1 - t_2$; $t_1 > t_2$</p>	$R_A = R_B = 0$
<p>Неравномерный нагрев</p> 		$M_A = -M_B = \frac{3EJ\alpha t'}{2h}$ <p>где h – высота поперечного сечения; α – температурный коэффициент линейного расширения; $t' = t_1 - t_2$; $t_1 > t_2$</p>	$R_A = -R_B = -\frac{3EJ\alpha t'}{2h\ell}$

Схемы стержня и эпюры M	Функции
<p style="text-align: center;">1</p> 	<p style="text-align: center;">2</p> $\varphi_1(v) = \frac{4}{3} \varphi_2(v) - \frac{1}{3} \frac{\varphi_3^2(v)}{\varphi_2(v)}$
	$\varphi_2(v) = \frac{v(\operatorname{tg} v - v)}{8 \operatorname{tg} v \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2} \right)};$ $\varphi_3(v) = \frac{v(v - \sin v)}{4 \sin v \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2} \right)};$ $\varphi_4(v) = \frac{4\varphi_2(v) + 2\varphi_3(v)}{6}$
	$\varphi_1(v) = \frac{4}{3} \varphi_2(v) - \frac{1}{3} \frac{\varphi_3^2(v)}{\varphi_2(v)};$ $\eta_1(v) = 4\eta_2(v) - 3 \frac{\varphi_4^2(v)}{\varphi_2(v)}$

1	2
	$\eta_2(v) = \frac{8\varphi_2(v) + 4\varphi_3(v) - v^2}{12};$ $\varphi_4(v) = \frac{4\varphi_2(v) + 2\varphi_3(v)}{12}$
	$n = \sqrt{\frac{F_{кр}}{EJ}};$ $v = n\ell = \ell \sqrt{\frac{F_{кр}}{EJ}}$

Приложение 4

ν	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
0.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.25	0.9958	0.9979	1.0010	0.9990	0.9750	0.9937
0.50	0.9832	0.9916	1.0042	0.9958	0.8999	0.9750
0.75	0.9619	0.9811	1.0095	0.9905	0.7743	0.9437
1.00	0.9313	0.9662	1.0172	0.9832	0.5980	0.8999
1.25	0.8908	0.9469	1.0274	0.9737	0.3700	0.8435
1.50	0.8393	0.9226	1.0403	0.9619	0.0893	0.7743
1.75	0.7751	0.8936	1.0563	0.9478	-0.2457	0.6926
2.00	0.6961	0.8590	1.0760	0.9313	-0.6372	0.5980
2.25	0.5991	0.8187	1.0998	0.9194	-1.0884	0.4906
2.50	0.4793	0.7720	1.1286	0.8908	-1.6040	0.3700
2.75	0.3291	0.7181	1.1634	0.8665	-2.1917	0.2364
3.00	0.1361	0.6560	1.2058	0.8393	-2.8639	0.0893
3.25	-0.1220	0.5846	1.2574	0.8089	-3.6428	-0.0713
3.50	-0.4894	0.5021	1.3212	0.7751	-4.5727	-0.2457
3.75	-1.0693	0.4061	1.4008	0.7377	-5.7568	-0.4341
4.00	-2.1726	0.2933	1.5018	0.6961	-7.5060	-0.6372
4.25	-5.3838	0.1587	1.6327	0.6501	-11.4050	-0.8550
4.50	+227.80	-0.0048	1.8070	0.5991	+221.05	-1.0884
4.75	6.601	-0.2097	2.0468	0.5425	-1.822	-1.3377
5.00	3.362	-0.4772	2.3924	0.4793	-4.973	-1.6040
5.25	2.152	-0.8488	2.9232	0.4086	-6.935	-1.8882
5.50	1.545	-1.4181	3.8234	0.3291	-8.532	-2.1917
5.75	1.029	-2.4526	5.6223	0.2390	-9.981	-2.5162
6.00	0.551	-5.1594	10.727	0.1361	-11.44	-2.8639
6.25	0.1702	-47.067	94.186	0.0172	-12.64	-3.2380

Библиографический список

1. Строительная механика: учеб. для вузов /под ред. А.В. Даркова. – М.: Высшая школа, 1984. – 567 с.
2. Строительная механика. Стержневые системы: учеб. для вузов /под ред. А.Ф.Смирнова. – М.: Стройиздат, 1981. – 512 с.
3. *Снитко Н.К.* Строительная механика: учеб. для вузов/ Н.К. Снитко. – М.: Высшая школа, 1984. – 567 с.
4. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики (статика стержневых систем): учеб. пособие для студентов вузов/ под ред. Г. Клейна.– М.: Высшая школа, 1980. – 383 с.
5. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений: учеб. для вузов/ под ред. А.Ф. Смирнова. – М.: Стройиздат, 1984. – 512 с.
6. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики (основы теории устойчивости, динамики сооружений и расчета пространственных систем): учеб. пособие для студентов вузов/ под ред. Г. Клейна.– М.: Высшая школа, 1972. – 320с.
7. Строительная механика: учеб. для вузов / под ред. А.Ф. Смирнова. – М.: Стройиздат, 1981. – 208 с.
8. *Киселёв В.А.* Строительная механика. Специальный курс: учеб. для вузов / В.А. Киселёв. – М.: Стройиздат, 1969. – 431 с.
9. *Рабинович И.М.* Курс строительной механики стержневых систем: учеб. для строительных вузов/ И.М. Рабинович. – М.: Гос. изд-во лит-ры по строительству и архитектуре, 1951. – Ч. II – 544 с.
10. *Дарков А.В.* Строительная механика/А.В. Дарков, Н.М. Шапошников. – СПб.: Изд-во «Лань»2004. – 656 с.
11. *Кадисов Г.М.* Динамика и устойчивость сооружений: учебное пособие/ Г.М. Кадисов. – М., 2007. – 272 с.
12. Строительная механика. Основы теории с примерами расчётов: учебник / А.Е. Саргсян, А.Т. Демченко, Н.В. Дворянчиков, Г.А. Джинчелашвили. – 2-е изд., исп. и доп. – М.: Высш. школа, 2000. – 416 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
1. Кинематический анализ стержневых конструкций	4
1.1. Степень свободы в статике сооружений	4
1.2. Опоры	5
1.3. Геометрический анализ изменяемости стержневых систем ..	7
2. Расчёт многопролётных статически определимых балок	10
2.1. Расчёт многопролётных статически определимых балок на действие статической нагрузки	10
2.2. Расчёт стержневых конструкций на действие подвижной нагрузки.....	12
2.3. Линии влияния опорных реакций.....	12
2.4. Линии влияния внутренних усилий.....	14
2.5. Линии влияния усилий в сечениях многопролётных статически определимых балок.....	18
2.6. Определение усилий с помощью линий влияния.....	19
2.7. Кинематический способ построения линий влияния.....	21
2.8. Определение расчётного положения подвижной системы нагрузок	24
2.9. Узловая передача нагрузки	27
2.10. Определение усилий в матричной форме.....	28
3. Расчёт распорных систем	33
3.1. Общие сведения	33
3.2. Расчёт трёхшарнирной арки на статическую нагрузку.....	34
3.3. Расчёт трёхшарнирной арки на подвижную нагрузку	37
3.4. Определение напряжений в сечениях арки.....	46
3.5. Рациональное очертание оси арки.....	49
4. Плоские статически определимые балочные фермы	52
4.1. Понятие о ферме.....	52
4.2. Линии влияния усилий в стержнях ферм.....	53
4.3. Загружение линий влияния усилий в стержнях ферм.....	59
5. Определение перемещений в упругих системах	60
5.1. Основные понятия и обозначения	60
5.2. Действительная работа внешних сил.....	62

5.3. Обобщённые силы и обобщённые перемещения.....	62
5.4. Действительная работа внутренних сил.....	63
5.5. Возможная работа внешних сил.....	68
5.6. Возможная работа внутренних сил.....	70
5.7. Определение перемещений. Интеграл Мора.....	72
5.8. Правило П.Верещагина.....	75
5.9. Определение перемещений от действия температуры.....	78
5.10. Определение перемещений от осадки опор.....	80
6. Расчёт статически неопределимых систем	
методом сил.....	81
6.1. Понятие о статической неопределимости.....	81
6.2. Основная система метода сил.....	82
6.3. Канонические уравнения метода сил.....	84
6.4. Определение коэффициентов канонических уравнений.....	85
6.5. Построение эпюр внутренних усилий в заданной системе ...	87
6.6. Расчёт статически неопределимых рам методом сил на температурные воздействия.....	88
6.7. Расчёт статически неопределимой рамы на осадку опор.....	95
7. Расчёт неразрезных балок.....	100
7.1. Уравнения трёх моментов.....	100
7.2. Определение моментных фокусных отношений.....	104
7.3. Определение моментов на опорах загруженного пролёта ...	108
7.4. Определение изгибающих моментов и поперечных сил в заданной системе неразрезной балки.....	109
7.5. Линии влияния опорных моментов.....	110
7.6. Линии влияния моментов для сечений, расположенных в пролётах неразрезной балки.....	113
7.7. Линии влияния поперечных сил.....	115
7.8. Линии влияния опорных реакций.....	115
7.9. Понятие об огибающих эпюрах.....	118
8. Расчёт статически неопределимых систем методом	
перемещений.....	120
8.1. Основы метода.....	120
8.2. Выбор основной системы.....	121
8.3. Канонические уравнения метода перемещений.....	124

8.4. Решение системы канонических уравнений и построение эпюр внутренних усилий.....	130
9. Основы динамики стержневых систем.....	132
9.1. Основные понятия.....	132
9.2. Определение числа степеней свободы.....	133
9.3. Собственные колебания систем с одной степенью свободы без учёта сил сопротивления внешней среды.....	134
9.4. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы.....	138
9.5. Собственные колебания системы с конечным числом степеней свободы.....	141
9.6. Вынужденные колебания систем с n степенями свободы....	144
9.7. Расчёт рамы на динамическое действие нагрузки	146
10. Устойчивость стержневых систем.....	155
10.1. Основные понятия.....	155
10.2. Определение усилий в сжато-изогнутых стержнях при смещении их опорных закреплений.....	157
10.3. Определение изгибающих моментов и поперечных сил в опорных сечениях.....	159
10.4. Расчёт статически неопределимых рам на устойчивость методом перемещений.....	160
Приложение 1.....	163
Приложение 2.....	164
Приложение 3.....	167
Приложение 4.....	169
Библиографический список.....	170