

**ОПД.Р.03 СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА**  
**ОСНОВЫ ТЕОРИИ С ПРИМЕРАМИ РАСЧЕТОВ**  
Учебное пособие

В учебном пособии даются классические методы расчета статически определимых и неопределимых стержневых систем, основанные на понятии линейно-деформируемого твердого тела, метод предельного равновесия для определения предельной нагрузки с использованием идеальной упруго-пластической диаграммы деформирования материала. Отражены современные автоматизированные технологии расчета строительных конструкций, основанные на методе конечных элементов.

Пособие может быть полезно студентам строительных специальностей, а также преподавателям строительной механики и сопротивления материалов.

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	5
Часть 1. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ .....	13
1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ВНУТРЕННИХ СИЛ В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ.....	13
1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ .....	27
Часть 2. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ .....	36
2.1. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ .....	36
2.2. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ.....	44
2.3. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ СМЕШАННЫМ МЕТОДОМ.....	59
Часть 3. РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ.....	65
3.1. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ПРОЧНОСТИ КОНСТРУКЦИЙ .....	65
3.2. ПРИМЕР РАСЧЕТА ПРОСТЕЙШЕЙ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ СИСТЕМЫ МЕТОДОМ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ .....	67
3.3. КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ .....	68
3.4. УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЯ, ПОНЯТИЕ О ПЛАСТИЧЕСКОМ ШАРНИРЕ .....	70
3.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ НАГРУЗКИ В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛКАХ И РАМАХ .....	72
3.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ НАГРУЗКИ В СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛКАХ И РАМАХ.....	73
Часть 4. РАСЧЕТ КОНСТРУКЦИЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.	76
4.1. ОСНОВЫ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.....	76

4.2. СТРУКТУРА ПОЛНОЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА .....	78
4.3. МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ И ВЕКТОРЫ НАГРУЗКИ НЕКОТОРЫХ ПРОСТЕЙШИХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЛОКАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ .....	80
4.4. ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЦ ЖЕСТКОСТИ И ВЕКТОРОВ НАГРУЗКИ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ГЛОБАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ .....	89
4.5. ФОРМИРОВАНИЕ МАТРИЦ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УЗЛОВЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ .....	90
4.6. ФОРМИРОВАНИЕ МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ И ВЕКТОРА НАГРУЗКИ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ МОДЕЛИ КОНСТРУКЦИИ .....	95
4.7. УЧЕТ УСЛОВИЙ ЗАКРЕПЛЕНИЯ КОНСТРУКЦИИ В МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ .....	100
4.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ .....	102
4.9. ПОДГОТОВКА ИСХОДНЫХ ДАННЫХ ДЛЯ РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ .....	104
4.10. БЛОК-СХЕМА ТИПОВОЙ ПРОГРАММЫ ДЛЯ РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ .....	107
Литература .....	108

## ВВЕДЕНИЕ

### ПРЕДМЕТ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Любая конструкция или сооружение должны быть прочными, жесткими и устойчивыми, т.е. они не должны разрушаться от действия внешних сил и иметь необходимый запас прочности; в них недопустимы перемещения, нарушающую их нормальную эксплуатацию; кроме того, должна быть исключена возможная потеря устойчивости заданной формы равновесия. Строительная механика занимается разработкой методов статических и динамических расчетов конструкций и сооружений на прочность, жесткость и устойчивость. Статика сооружений изучает их работу при статическом действии нагрузки - медленном ее изменении в определенном интервале времени. При динамическом действии нагрузки, быстро меняющейся во времени, учитываются динамические эффекты нагрузки и вводятся в рассмотрение силы инерции.

### ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

В классическом курсе строительной механики рассматриваются в основном стержневые системы. Основная задача строительной механики состоит в определении обобщенных внутренних сил в поперечных сечениях стержней от заданных внешних воздействий. В дальнейшем будут рассматриваться только плоские стержневые системы. В поперечных сечениях стержней таких систем в общем случае возникают три обобщенные внутренние силы: продольная сила  $N$ ; поперечная сила  $Q$ ; изгибающий момент  $M$  (рис. 0.1).

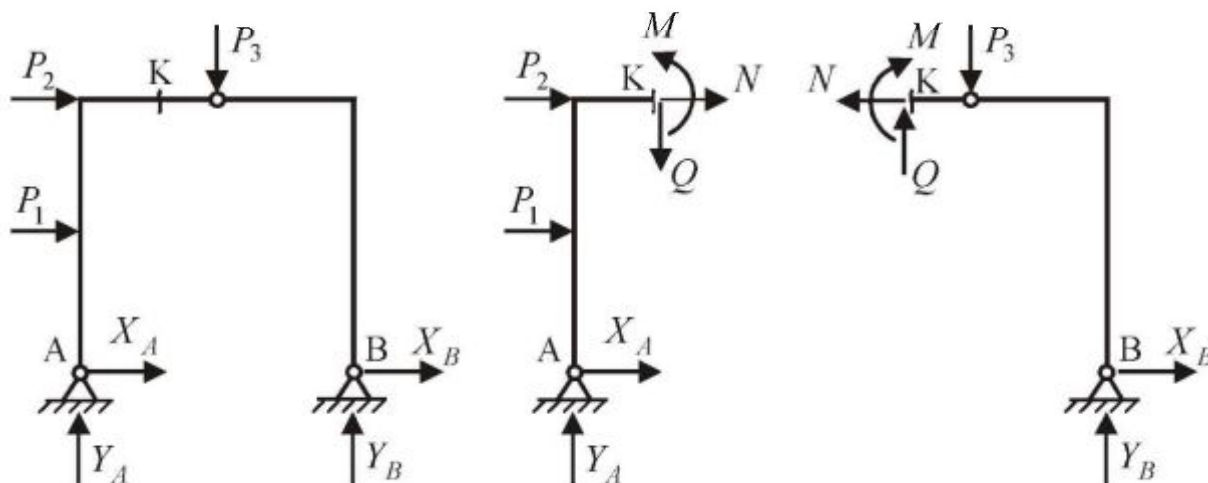


Рис. 0.1. Положительные направления обобщенных внутренних сил  $N$ ,  $Q$ ,  $M$



#### Правила знаков для $N$ , $Q$ , $M$ :

- а)  $N > 0$  растягивает ось стержня;
- б)  $Q > 0$  стремится вращать любую часть конструкции по часовой стрелке;
- в)  $M > 0$  растягивает нижнюю сторону стержня (для вертикальных стержней - правую сторону).

По известным внутренним силам  $N$ ,  $Q$ ,  $M$ , используя формулы сопротивления материалов, можно определить нормальные  $\sigma$  и касательные напряжения  $\tau$ , необходимые при прочностном расчете конструкции. Наличие  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  позволяет также определить перемещения характерных точек конструкции, необходимые для ее расчета на жесткость.

### ПОНЯТИЕ О РАСЧЕТНОЙ СХЕМЕ КОНСТРУКЦИИ

Реальная строительная конструкция представляет сложную совокупность различных по назначению и виду элементов, а нагрузка, действующая на конструкцию, представляет сложную систему сил. Определение напряженно-деформированного состояния конструкции с учетом всех ее конструктивных и силовых особенностей в большинстве случаев представляет практически невыполнимую задачу. Поэтому при расчете любой конструкции всегда необходимо переходить к некоторой упрощенной модели, учитывающей только основные конструктивные и силовые свойства реальной конструкции, и вместе с тем дающую необходимую для практики точность расчета. Такая упрощенная модель называется расчетной схемой (РС) конструкции.

Выбор РС - сложный и многогранный вопрос, зависящий не только от вида конструкции, но и от нагрузки, действующей на нее, требуемой точности, цели расчета (проектировочного или проверочного), соотношения жесткостей элементов конструкции, имеющихся в распоряжении вычислительных средств и т.д. Учет большого числа факторов, влияющих на конечный результат, не всегда целесообразен, так как увеличивает трудоемкость расчета. В то же время чрезмерное упрощение реальной конструкции может привести к неудовлетворительным результатам. Поэтому удачный выбор РС представляет достаточно сложный и ответственный этап расчета конструкции.

На рис. 0.2 показан пример расчетной схемы фермы, в которой все стержни соединяются шарнирами (в действительности соединение стержней в узлах жесткое), а силы приложены в узлах. Тогда в каждом стержне фермы из трех обобщенных внутренних сил  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  будет иметься только продольная сила  $N$ , что существенно упрощает расчет фермы.

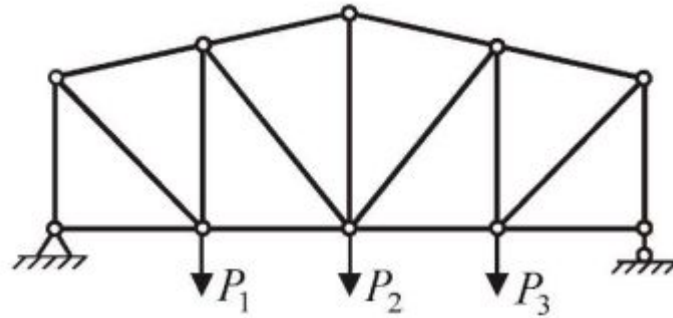


Рис. 0.2. Расчетная схема фермы

### ГЕОМЕТРИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЕМЫЕ И НЕИЗМЕНЯЕМЫЕ СИСТЕМЫ

Любая конструкция и сооружение должны быть геометрически неизменяемыми, т.е. они должны сохранять геометрическую форму, заданную при изготовлении (возведении). Изменяемые системы в качестве конструкций и сооружений недопустимы, т.к. они меняют форму, получая перемещения без деформации их элементов. Примером простейшей геометрически неизменяемой системы (ГНС) является шарнирный треугольник (рис. 0.3а). Шарнирный четырехугольник (рис. 0.3б) - пример геометрически изменяемой системы (ГИС).

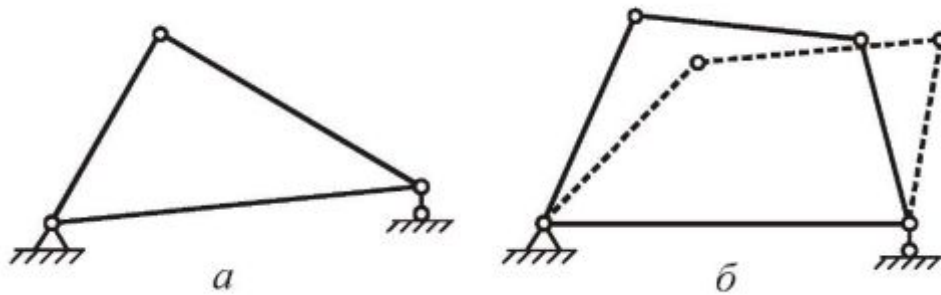


Рис. 0.3.

Критерием, по которому можно судить о геометрической неизменяемости или изменяемости системы, является ее число степеней свободы  $W$  (число независимых геометрических параметров, определяющих положение всех элементов системы). На рис. 0.4 показаны простейшие объекты: материальная точка  $A$  в плоскости и линейный объект  $AB$  в плоскости (диск), которые соответственно имеют  $W = 2$  и  $W = 3$ .

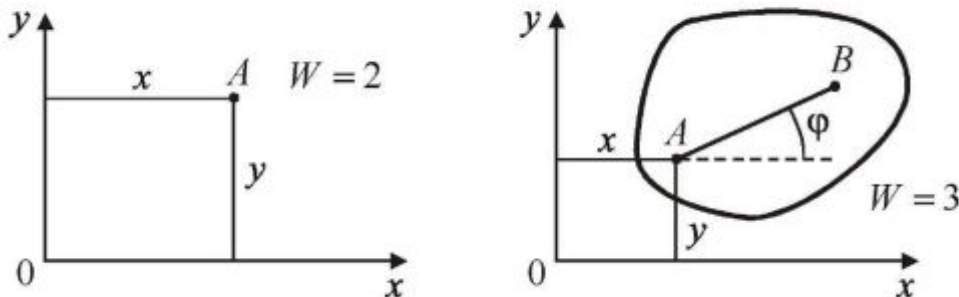


Рис. 0.4.

Опорный стержень отнимает у любого материального объекта одну степень свободы (рис. 0.5).

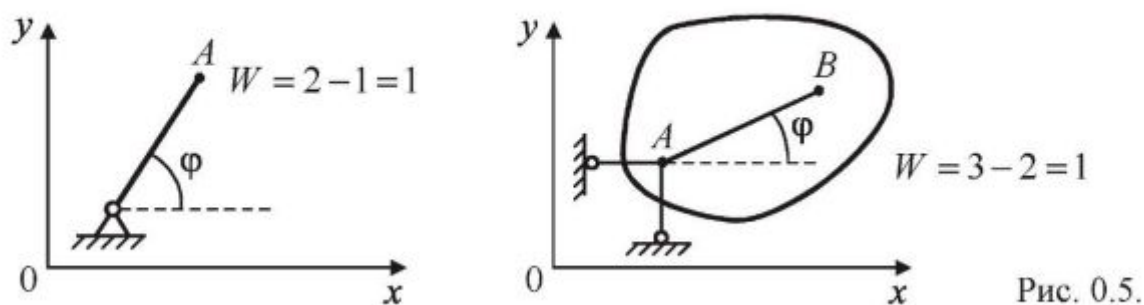


Рис. 0.5.

Жесткая заделка в плоскости отнимает у тела три степени свободы (рис. 0.6).

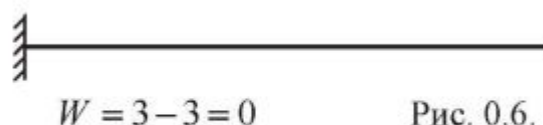


Рис. 0.6.

Для произвольной плоской системы, составленной из жестких дисков, соединенными между собой шарнирами и прикрепленными к “земле” опорными связями, число степеней свободы определяется по формуле

$$W = 3D - 2Ш - C_0,$$

где  $D$  - число жестких дисков;  $Ш$  - число простых (соединяющих два диска) шарниров, если шарнир соединяет число дисков  $n > 2$ , то в этом случае  $Ш = n - 1$ ;  $C_0$  - число элементарных опорных связей. На рис. 0.7 приведены три типа опорных связей в плоскости и соответствующие им значения  $C_0$ .

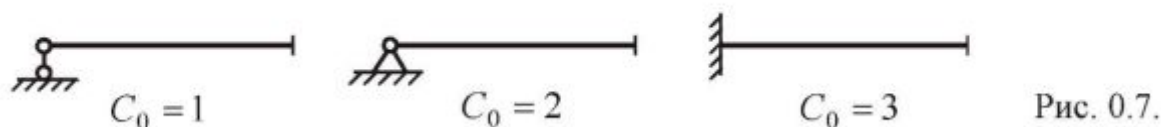


Рис. 0.7.

При определении  $W$  ферм удобнее пользоваться формулами:

$$W = 2 \cdot Y - C - C_0 \quad \text{- для плоских ферм;}$$

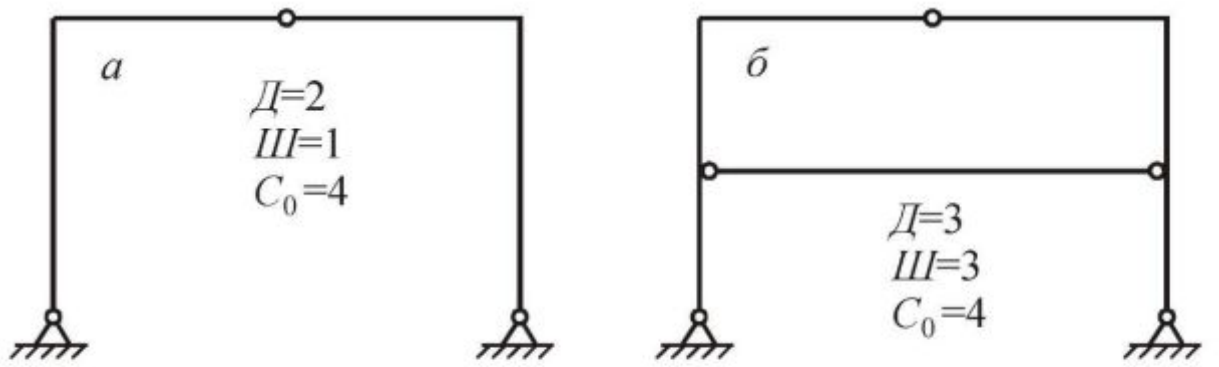
$$W = 3 \cdot Y - C - C_0 \quad \text{- для пространственных ферм.}$$

Здесь  $Y$  - число узлов;  $C$  - число стержней фермы;  $C_0$  - число элементарных опорных связей.

На рис. 0.8 показаны некоторые плоские системы и определены значения числа степеней свободы  $W$  этих систем. На основании анализа приведенных результатов видно, что при  $W \leq 0$  система может быть неизменяемой (рис. 0.8а, 0.8б), но может быть и изменяемой (рис. 0.8в, 0.8д). Поэтому условие  $W \leq 0$  не является достаточным условием геометрической неизменяемости системы, а только лишь необходимым. При  $W \leq 0$  заключение о неизменяемости или изменяемости системы возможно только после анализа ее структуры: любая сложная геометрически неизменяемая система должна получаться последовательным соединением ее частей в соответствии с принципами образования простейших геометрически неизменяемых систем. При  $W > 0$  система всегда является геометрически изменяемой (рис. 0.8г).

На рис. 0.9 показаны принципы образования простейших геометрически неизменяемых систем (точки  $A, B, C$  не должны располагаться на одной прямой).

Геометрически неизменяемые системы, в которых  $W = 0$ , являются статически определимыми. Для определения реакций опор и обобщенных внутренних сил в таких системах достаточно использовать только лишь уравнения равновесия.



$$D=2$$

$$III=1$$

$$C_0=4$$

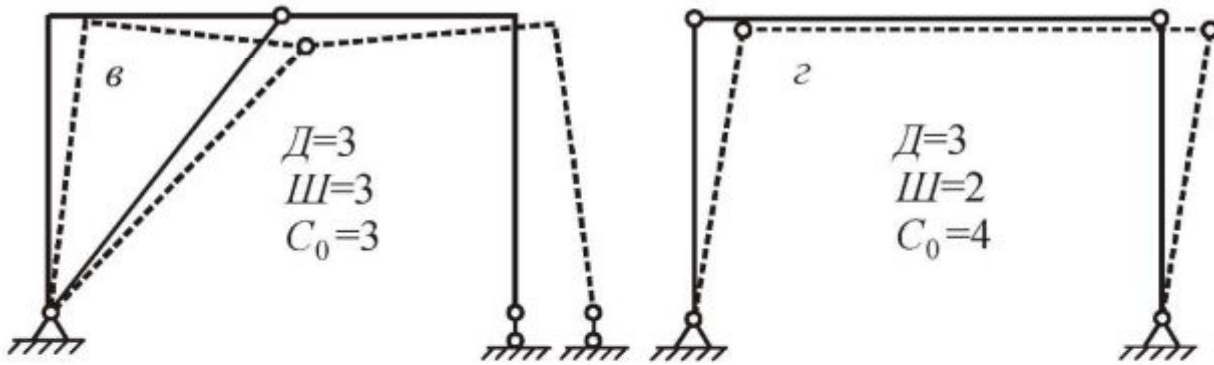
$$W = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 4 = 0$$

$$D=3$$

$$III=3$$

$$C_0=4$$

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 4 = -1$$



$$D=3$$

$$III=3$$

$$C_0=3$$

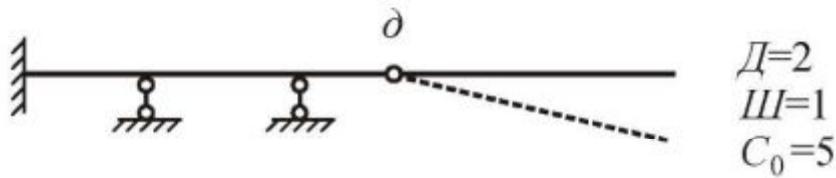
$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 3 = 0$$

$$D=3$$

$$III=2$$

$$C_0=4$$

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 4 = 1$$



$$D=2$$

$$III=1$$

$$C_0=5$$

$$W = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 5 = -1$$

Рис. 0.8.

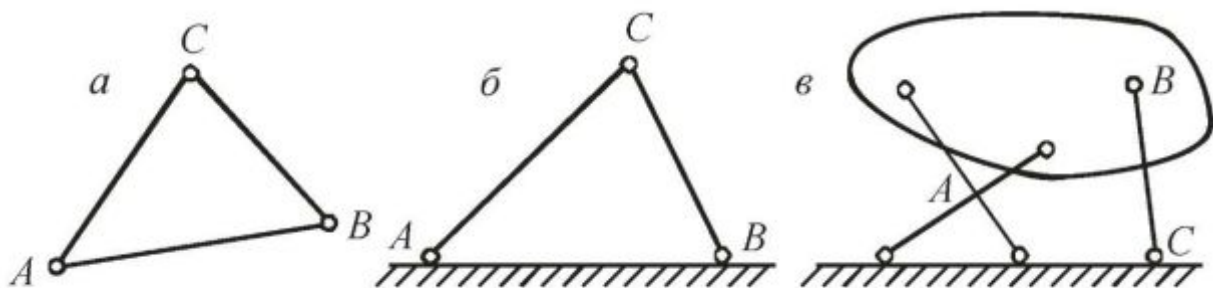


Рис. 0.9.

Геометрически неизменяемые системы, в которых  $W < 0$ , являются статически неопределимыми. В таких системах число элементарных связей превышает число независимых уравнений равновесия на величину “ $-W$ ”, которая называется степенью статической неопределимости (ССН) системы. Для расчета таких систем кроме уравнений равновесия необходимо использовать еще дополнительные уравнения, вытекающие из условий совместности перемещений некоторых точек системы и налагаемых на них связей.

На рис. 0.10 показаны примеры статически определимой и статически неопределимой систем.



Рис. 0.10.

Имеются системы, которые являются изменяемыми только в каком-то одном положении, а при небольшом отклонении от этого положения становятся неизменяемыми. Такие системы являются мгновенно изменяемыми и в качестве конструкций не используются, т.к. в них могут возникать неопределенно большие реакции и внутренние силы. Простейшие мгновенно изменяемые системы показаны на рис. 0.11.



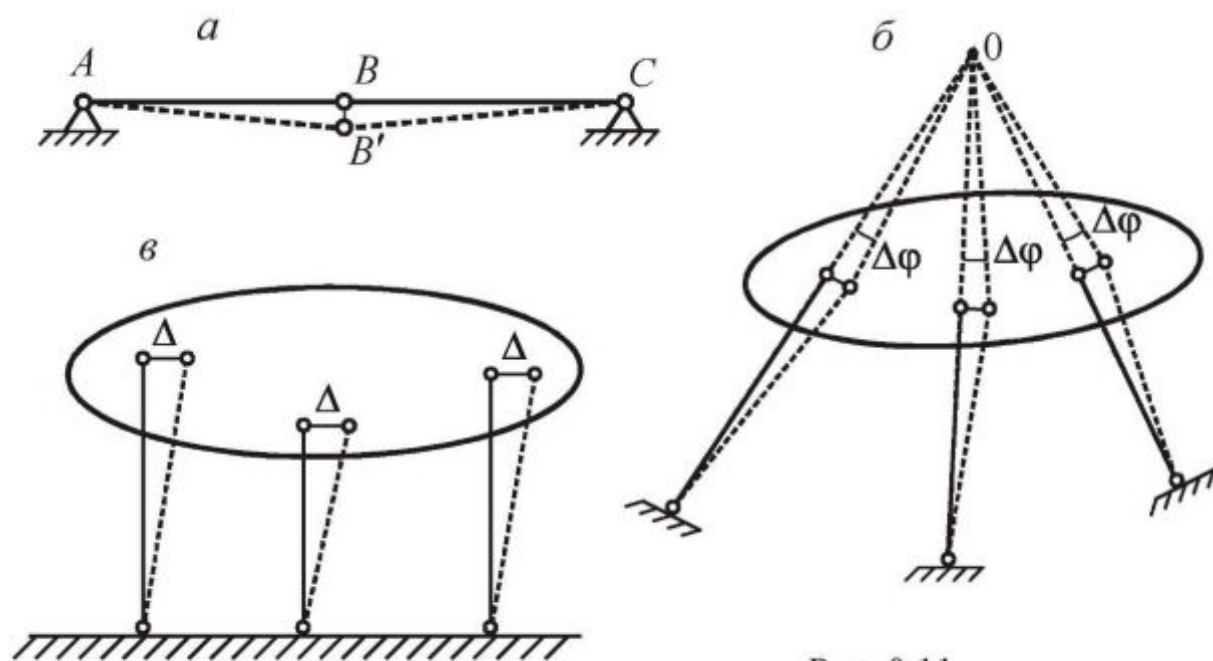


Рис. 0.11.

## Часть 1. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

### 1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ВНУТРЕННИХ СИЛ В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ

#### ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОБОБЩЕННЫХ ВНУТРЕННИХ СИЛ В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ

Для определения обобщенных внутренних сил  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  во всех статически определимых системах можно применить способ сечений. Суть данного способа состоит в следующем:

- а) в интересующем месте конструкции проводится сквозное сечение, перпендикулярное осям стержней;
- б) составляются уравнения равновесия для части конструкции, расположенной с какой-либо стороны от проведенного сечения с учетом обобщенных внутренних сил  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  в этом сечении (последние необходимо прикладывать в положительных направлениях согласно правилам, изложенным в параграфе 0.2).
- в) из уравнений равновесия определяются обобщенные внутренние силы  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  в сечении.

Пример: Определить обобщенные внутренние силы  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  в сечении “к” плоской статически определимой рамы (рис. 1.1).

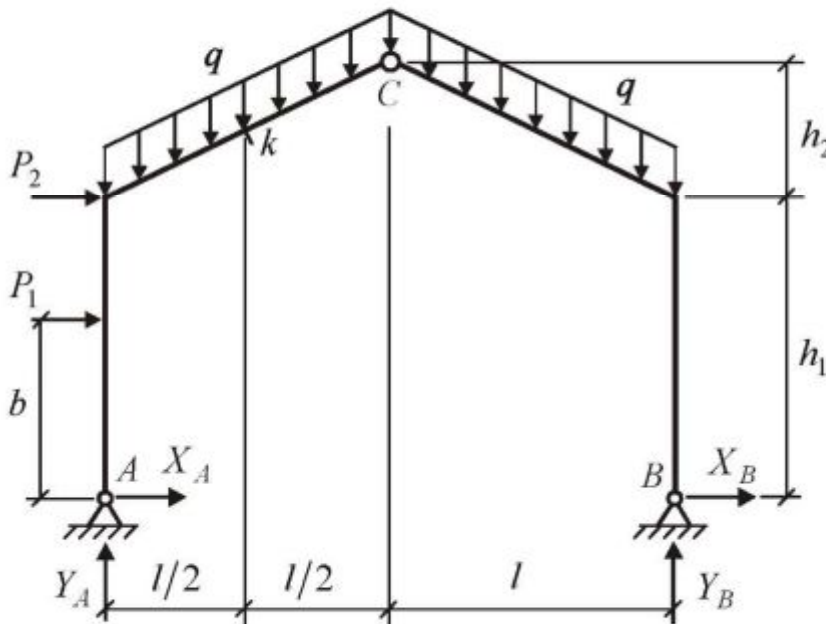


Рис. 1.1.

$$\begin{aligned} P_1 &= 8 \text{ кН}; \\ P_2 &= 10 \text{ кН}; \\ q &= 4 \text{ кН/м}; \\ l &= 4,0 \text{ м}; \\ h_1 &= 4,2 \text{ м}; \\ h_2 &= 2,0 \text{ м}; \\ b &= 2,5 \text{ м}. \end{aligned}$$

Для определения обобщенных внутренних сил  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  в сечении

“к” достаточно найти реакции только левой опоры, составляя для этого два уравнения равновесия:



$$\sum M_B = q \cdot 2l \cdot l - P_1 \cdot b - P_2 \cdot h_1 - Y_A = 0;$$

$$\sum M_C^{\text{ЛЕВ.}} = ql \cdot \frac{l}{2} + P_1 \cdot (h_1 + h_2 - b) + P_2 \cdot h_2 - Y_A \cdot \frac{l}{2} + X_A \cdot (h_1 + h_2) = 0.$$

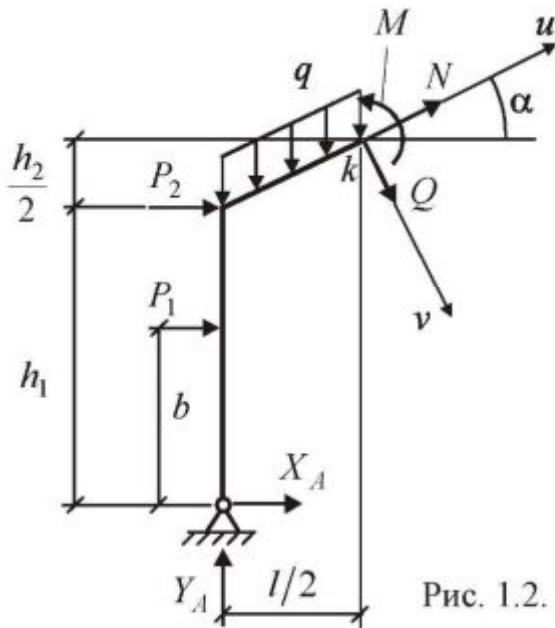


Рис. 1.2.

Из этих уравнений получаем  
 $Y_A = 8,25 \text{ кН}$ ,  $X_A = -10,5 \text{ кН}$ .

Составляем три уравнения равновесия для части рамы, расположенной слева от сечения "k" (рис. 1.2):

$$\begin{aligned} \sum U &= (X_A + P_1 + P_2) \cos \alpha + \\ &+ (Y_A - ql/2) \sin \alpha + N = 0; \\ \sum V &= (X_A + P_1 + P_2) \sin \alpha - \\ &- (Y_A - ql/2) \cos \alpha + Q = 0; \\ \sum M_k &= X_A (h_1 + h_2/2) - Y_A l/2 + \\ &+ P_1 (h_1 + h_2/2 - b) + P_2 h_2/2 + \\ &+ ql^2/8 + M = 0. \end{aligned}$$

Значения  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$  определяются через  $\text{tg} \alpha$ :  $\text{tg} \alpha = h_2/l = 0,5$ ;  $\alpha = 26,57^\circ$ ;  
 $\sin \alpha = 0,447$ ;  $\cos \alpha = 0,894$ . Из этих

уравнений получаем выражения для определения  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  в сечении "k":

$$N = -(X_A + P_1 + P_2) \cos \alpha - (Y_A - ql/2) \sin \alpha;$$

$$Q = -(X_A + P_1 + P_2) \sin \alpha + (Y_A - ql/2) \cos \alpha;$$

$$M = -X_A (h_1 + h_2/2) + Y_A l/2 - P_1 (h_1 + h_2/2 - b) - P_2 h_2/2 - ql^2/8.$$

Вычисления дают:  $N = -6,817 \text{ кН}$ ;  $Q = -3,129 \text{ кН}$ ;  $M = 31,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

Анализ полученных выше выражений позволяет сформулировать правила знаков для прямого получения  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  от действия внешних сил (без составления уравнений равновесия отсеченной части конструкции): а) если сила растягивает стержень в заданном сечении, то она дает в нем  $N > 0$ ; б) если сила стремится вращать часть конструкции вокруг сечения по ходу часовой стрелки, то она дает в этом сечении  $Q > 0$ ; в) если сила растягивает стержень в сечении с нижней стороны (для горизонтальных стержней) или с правой стороны (для вертикальных стержней), то она дает в нем  $M > 0$ .

В дальнейшем при составлении выражений для  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  в заданном сечении будут везде использоваться приведенные выше правила. В заключении параграфа следует заметить, при расчете конструкции значения  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  определяются не в каком-либо одном сечении, а по длине всех стержней конструкции в виде соответствующих графиков, называемых эпюрами  $N$ ,  $Q$ ,  $M$ . Необходимость построения таких эпюр обусловлена не только расчетом конструкций на прочность, но и, как будет показано ниже, расчетом ее на жесткость.

### РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК

В поперечных сечениях балок при действии нагрузки перпендикулярной их оси возникают поперечная сила  $Q$  и изгибающий момент  $M$ . Распределение  $Q$  и  $M$  по длине балки изображается в виде соответствующих эпюр. Правильность построения эпюр  $Q$  и  $M$  можно проверять с помощью основных дифференциальных зависимостей при изгибе. Для получения этих зависимостей рассмотрим произвольную балку (рис. 1.3а) и составим уравнения равновесия ее бесконечно малого элемента  $dx$  (рис. 1.3б).

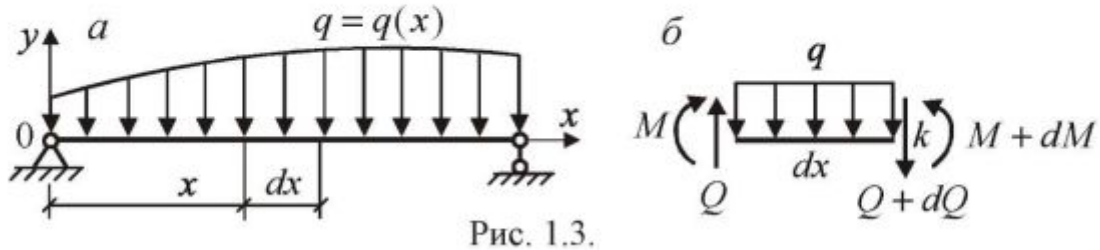


Рис. 1.3.

$$\sum Y = Q - qdx - Q - dQ = 0; \quad \sum M_k = -M - Qdx + qdx \frac{dx}{2} + M + dM = 0.$$

Из этих уравнений получаем дифференциальные зависимости:

$$\frac{dQ}{dx} = -q; \quad \frac{dM}{dx} = Q.$$

Согласно данным зависимостям на участках с  $q = 0$   $Q = \text{const}$ , а  $M$  меняется линейно. Причем, если  $Q > 0$ , то  $M$  линейно возрастает (рис. 1.4). Положительные ординаты эпюры  $M$  откладываются с нижней стороны участка. Если на участке  $q = \text{const}$ , то  $Q$  линейно убывает (при направлении  $q$  вниз), а эпюра  $M$  - квадратная парабола. Способ построения такой параболы показан на рис. 1.5. Причем, если есть точка, в которой  $Q = 0$ , то эпюра  $M$  в этой точке имеет экстремум.

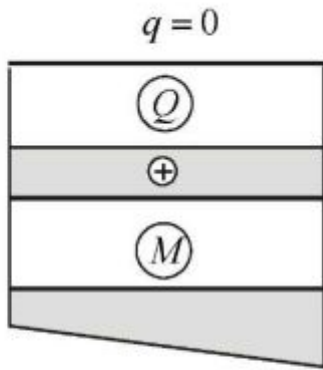


Рис. 1.4.

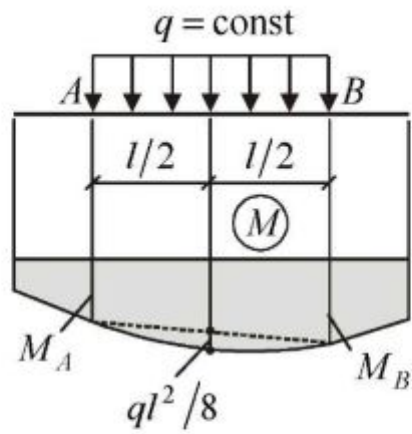


Рис. 1.5.

Рассмотрим пример построения эюр  $Q$  и  $M$  в статически определимой шарнирной балке (рис. 1.6а). Предварительно определим реакции опор и силы взаимодействия между частями балки (рис. 1.6б), составляя для каждой части по два уравнения равновесия.

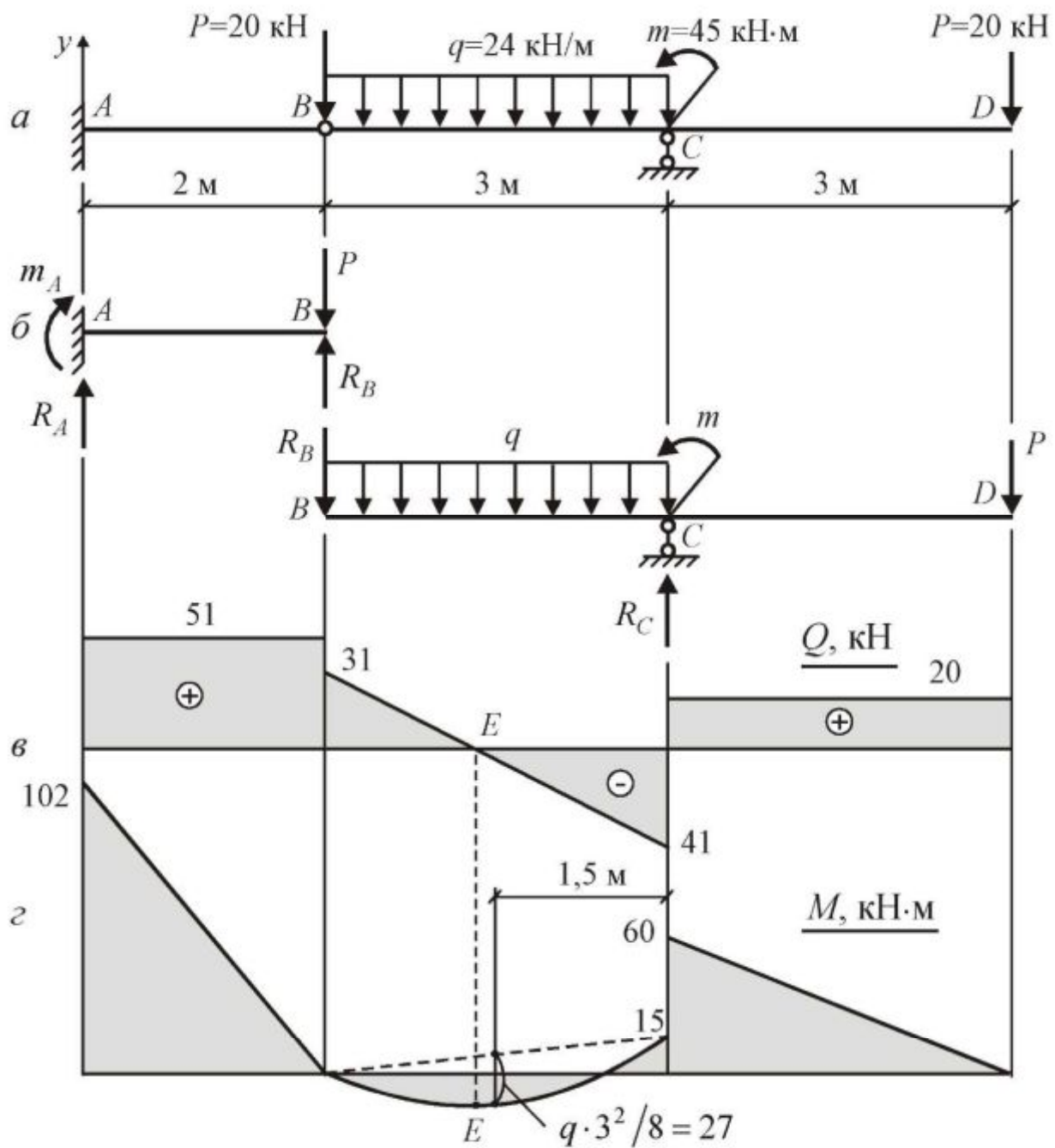


Рис. 1.6.

Для части BCD:

$$\sum M_C = R_B \cdot 3 + q \cdot 3 \cdot 1,5 + m - P \cdot 3 = 0; \quad R_B = -31 \text{ кН};$$

$$\sum Y = -R_B - q \cdot 3 + R_C - P = 0; \quad R_C = 61 \text{ кН}.$$

Для части AB:

$$\sum Y = R_A - P + R_B = 0; \quad R_A = 51 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = -m_A - P \cdot 2 + R_B \cdot 2 = 0; \quad m_A = -102 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$



Определяем  $Q$  и  $M$  на каждом участке балки (рис. 1.6б). Направление движения по каждому участку определяется расположением букв в обозначении участка: первая буква - начало участка, вторая - конец участка. Знаки  $Q$  и  $M$  определяются по правилам, изложенным в параграфе 1.1.

Участок АВ:  $Q = R_A = 51 \text{ кН}$ ;  $M_A = m_A = -102 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;  $M_B = 0$ .

Участок ВС:  $Q_B = -R_B = 31 \text{ кН}$ ;  $Q_C = -R_B - q \cdot 3 = -41 \text{ кН}$ ;  
 $M_B = 0$ ;  $M_C = -R_B \cdot 3 - q \cdot 3 \cdot 1,5 = -15 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

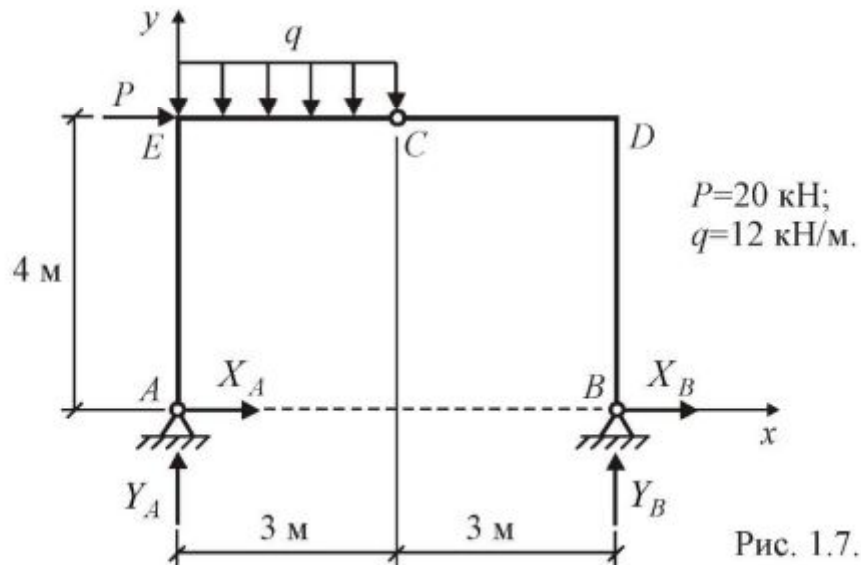
Участок DC:  $Q = P = 20 \text{ кН}$ ;  $M_D = 0$ ;  $M_C = -P \cdot 3 = -60 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

По полученным результатам строим эпюры  $Q$  и  $M$  (рис. 1.6в, 1.6г). Парабола эпюры  $M$  на участке ВС строится способом, показанным на рис. 1.5. В точке Е участка ВС  $Q = 0$ , а эпюра  $M$  соответственно имеет экстремум.

### РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ РАМ

В поперечных сечениях стержней рам в общем случае возникают три обобщенные внутренние силы:  $N$ ;  $Q$ ;  $M$ . Расчет рамы начинается с определения реакций опор. Если рама состоит из нескольких частей, то определяются также силы взаимодействия между этими частями.

Рассмотрим пример построения эпюр  $N$ ,  $Q$  и  $M$  в статически определимой раме, составленной из двух частей (рис. 1.7). При расположении опор А и В на одном уровне сначала целесообразно определить вертикальные реакции этих опор из двух уравнений равновесия, составленных для всей рамы:



$$\sum M_A = -P \cdot 4 - q \cdot 3 \cdot 1,5 + Y_B \cdot 6 = 0; \quad Y_B = 22,333 \text{ кН};$$

$$\sum Y = Y_A - q \cdot 3 + Y_B = 0; \quad Y_A = 13,667 \text{ кН}.$$

Для определения реакции  $X_B$  и сил в шарнире  $C$  расчленим раму на две части (рис. 1.8) и рассмотрим равновесие правой части:

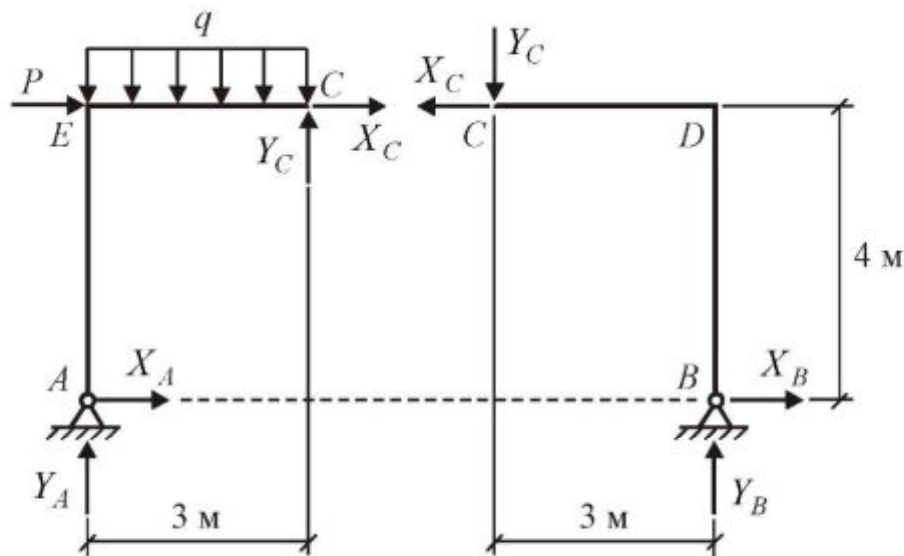


Рис. 1.8.

$$\sum M_C = Y_B \cdot 3 + X_B \cdot 4 = 0; \quad X_B = -16,75 \text{ кН};$$

$$\sum Y = Y_B - Y_C = 0; \quad Y_C = 22,333 \text{ кН};$$

$$\sum X = -X_C + X_B = 0; \quad X_C = -16,75 \text{ кН}.$$

Реакция  $X_A$  определяется из уравнения равновесия для всей системы:

$$\sum X = X_A + P + X_B = 0; \quad X_A = -3,25 \text{ кН}.$$

Определяем  $N$ ,  $Q$  и  $M$  на каждом участке рамы (рис. 1.8). При записи участков первая буква означает снова начало участка, вторая - конец участка. Знаки  $N$ ,  $Q$  и  $M$  определяются по правилам, изложенным в параграфе 1.1.

$$\text{Участок AE: } N = -Y_A = -13,67 \text{ кН}; \quad Q = -X_A = 3,25 \text{ кН};$$

$$M_A = 0; \quad M_E = -X_A \cdot 4 = 13 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$\text{Участок CE: } N = X_C = -16,75 \text{ кН}; \quad Q_C = -Y_C = 22,333 \text{ кН};$$

$$Q_E = -Y_C + q \cdot 3 = 13,667 \text{ кН}; \quad M_C = 0;$$

$$M_E = Y_C \cdot 3 - q \cdot 3 \cdot 1,5 = 13 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$\text{Участок CD: } N = X_C = -16,75 \text{ кН}; \quad Q = -Y_C = -22,333 \text{ кН};$$

$$M_C = 0; \quad M_D = -Y_C \cdot 3 = -67 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$\text{Участок BD: } N = -Y_B = -22,333 \text{ кН}; \quad Q = -X_B = 16,75 \text{ кН};$$

$$M_B = 0; \quad M_D = -X_B \cdot 4 = 67 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

По полученным результатам строим эпюры  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  (рис. 1.9). Правильность построения эпюр проверяется с помощью зависимостей  $dQ/dx = -q$ ;  $dM/dx = Q$ , а также проверкой равновесия узлов. Внутренние силы  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  в сечениях вокруг узлов удобнее прикладывать в действительных направлениях (рис. 1.10).

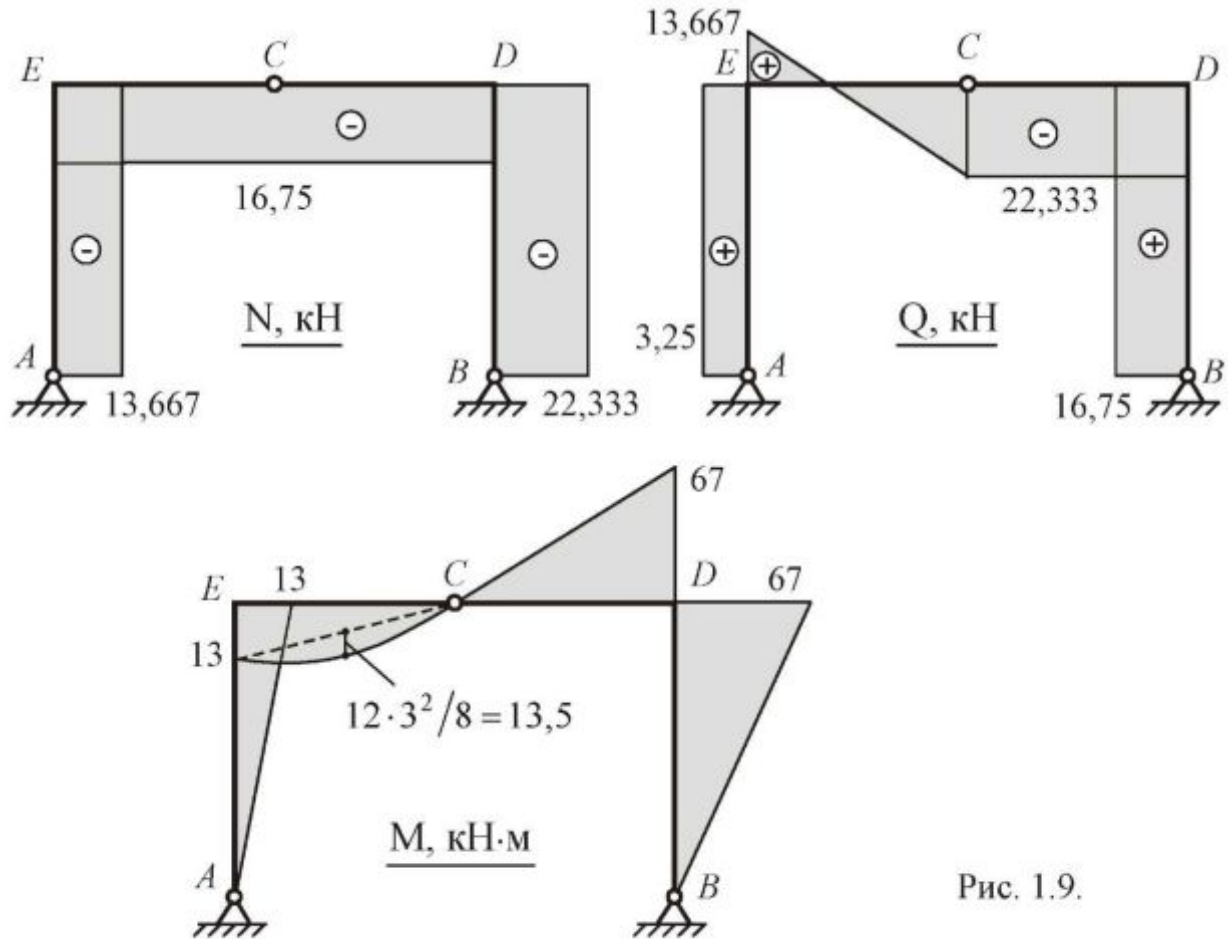


Рис. 1.9.

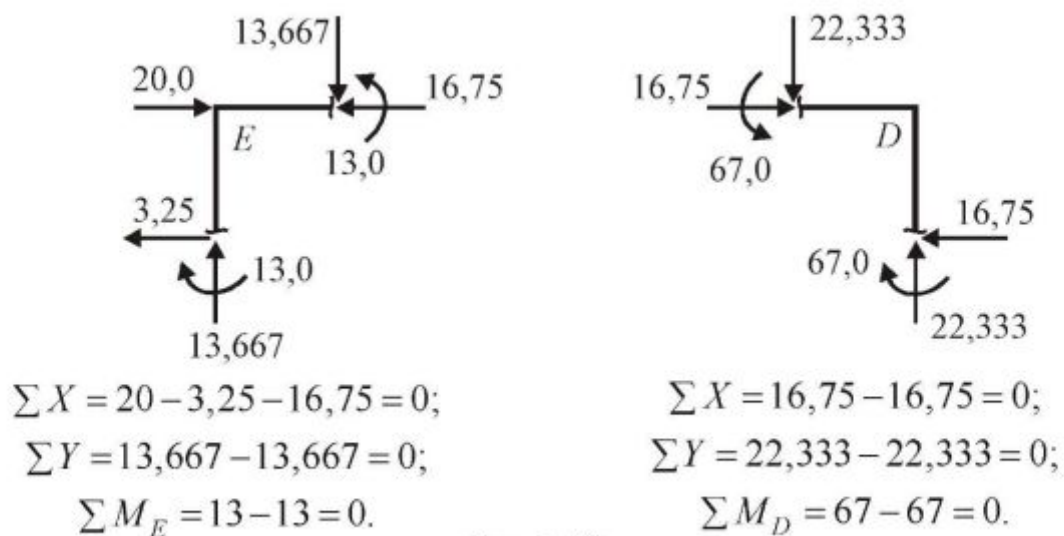


Рис. 1.10.

## РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ ФЕРМ

В поперечных сечениях стержней ферм при действии нагрузки, приложенной в их узлах, возникают только продольные силы  $N$ . Для определения этих сил используются два основных способа.

### а) Способ вырезания узлов.

Суть данного способа заключается в вырезании узлов фермы и составлении уравнений равновесия этих узлов. Узлы фермы должны вырезаться в такой последовательности, чтобы в каждом из них действовало не более двух неизвестных сил для плоских ферм и не более трех неизвестных сил для пространственных ферм. Предполагается, что все стержни фермы растянуты. Поэтому силы в стержнях направляются от узлов фермы. Перед вырезанием узлов необходимо определить реакции опор из уравнений равновесия, составленных для всей фермы.

### Пример (рис. 1.11).

Дано:  $P_1 = 10 \text{ кН}$ ;  $P_2 = 18 \text{ кН}$ ;  $P_3 = 20 \text{ кН}$ ;  $d = 4 \text{ м}$ ;  $h = 5 \text{ м}$ .

Определить:  $X_A$ ;  $Y_A$ ;  $R_B$ ;  $N_1 \div N_9$ .

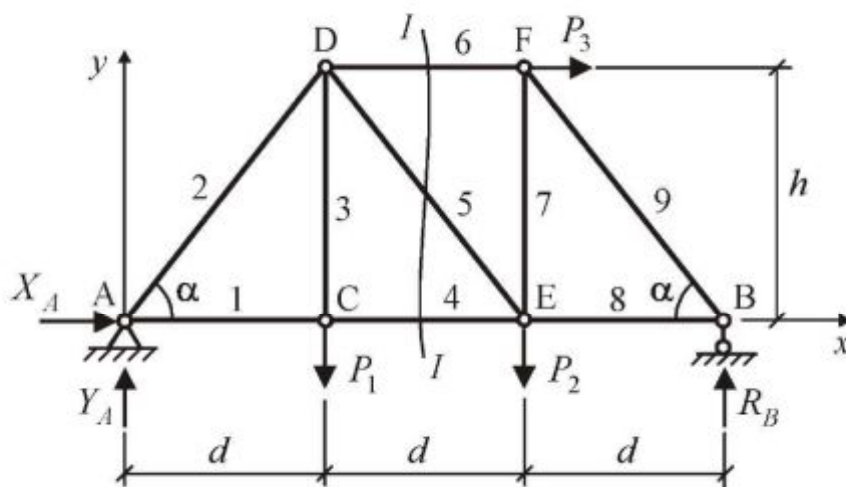


Рис. 1.11.

### Решение.

Реакции опор определяются из уравнений равновесия, составленных для всей фермы:

$$\sum M_A = -P_1 \cdot d - P_2 \cdot 2d - P_3 \cdot h + R_B \cdot 3d = 0; \quad R_B = 23,667 \text{ кН};$$

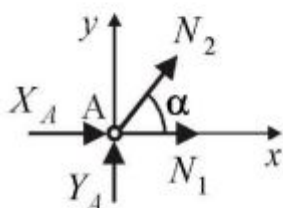
$$\sum Y = Y_A - P_1 - P_2 + R_B = 0; \quad Y_A = 4,333 \text{ кН};$$

$$\sum X = X_A + P_3 = 0; \quad X_A = -20 \text{ кН}.$$



Далее вырезаем последовательно узлы и составляем уравнения равновесия сил, действующих в этих узлах.

Узел А.

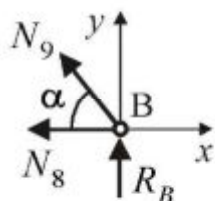


$$\sin \alpha = h / \sqrt{h^2 + d^2} = 0,781;$$

$$\cos \alpha = d / \sqrt{h^2 + d^2} = 0,625.$$

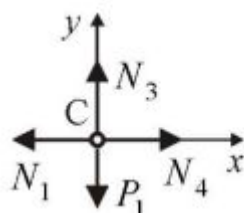
$$\left. \begin{aligned} \sum X = N_1 + N_2 \cos \alpha + X_A = 0; \\ \sum Y = Y_A + N_2 \sin \alpha = 0. \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} N_1 &= 23,467 \text{ кН}; \\ N_2 &= -5,549 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Узел В.



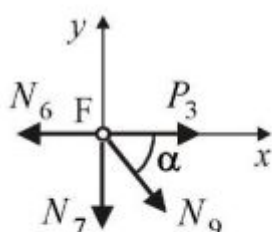
$$\left. \begin{aligned} \sum X = -N_8 - N_9 \cos \alpha = 0; \\ \sum Y = R_B + N_9 \sin \alpha = 0. \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} N_8 &= 18,933 \text{ кН}; \\ N_9 &= -30,308 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Узел С.



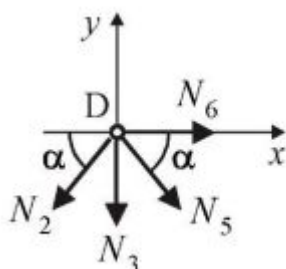
$$\left. \begin{aligned} \sum X = N_4 - N_1 = 0; \\ \sum Y = N_3 - P_1 = 0. \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} N_3 &= 10 \text{ кН}; \\ N_4 &= 23,467 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Узел F.



$$\left. \begin{aligned} \sum X = P_3 + N_9 \cos \alpha - N_6 = 0; \\ \sum Y = -N_7 - N_9 \sin \alpha = 0. \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} N_6 &= 1,067 \text{ кН}; \\ N_7 &= 23,667 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Узел D.



$$\sum X = N_6 + N_5 \cos \alpha - N_2 \cos \alpha = 0;$$

$$N_5 = -7,257 \text{ кН}.$$

Общее число уравнений равновесия вместе с тремя уравнениями, составленными для всей фермы, должно быть равно  $2 \cdot U$ , где  $U$  - число узлов фермы. Поэтому при вырезании всегда остаются незадействованными три уравнения равновесия (в данном случае одно уравнение для узла D и два уравнения для узла E), которые можно использовать в качестве проверочных уравнений.

б) Способ сквозных сечений.

Суть данного способа заключается в составлении уравнений равновесия для части фермы, расположенной с какой-либо стороны от сквозного сечения, проведенного через интересующие стержни фермы. Сечение должно разрезать не более трех стержней.

Определим данным способом силы в стержнях 4, 5, 6 прежней фермы (рис. 1.11). Для этого проведем через данные стержни сквозное сечение  $I-I$  и рассмотрим равновесие части фермы, расположенной с левой стороны от проведенного сечения (рис. 1.12). Каждую из сил  $N_4, N_5, N_6$  можно определить независимо от двух других сил:

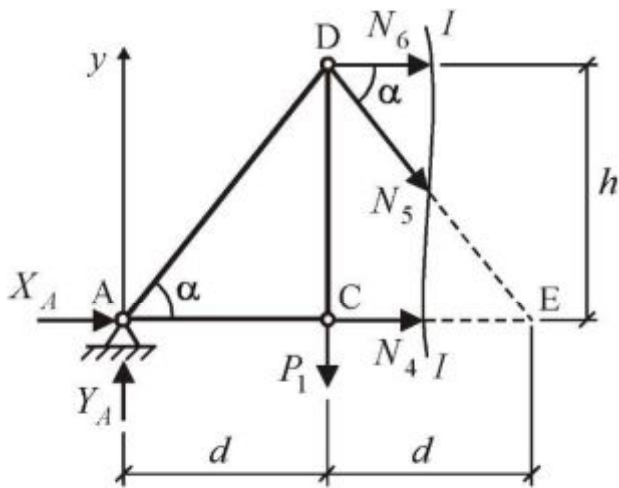


Рис. 1.12.

$$\sum M_D = X_A h - Y_A d + N_4 h = 0;$$

$$N_4 = 23,467 \text{ кН};$$

$$\sum Y = Y_A - P_1 - N_5 \sin \alpha = 0;$$

$$N_5 = -7,257 \text{ кН};$$

$$\sum M_E = -Y_A 2d + P_1 d - N_6 h = 0;$$

$$N_6 = 1,067 \text{ кН}.$$

Полученные значения  $N_4, N_5, N_6$  совпадают с теми, что были найдены ранее способом вырезания узлов.

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ АРОК

В поперечных сечениях арок возникают три внутренние силы:  $N$ ;  $Q$ ;  $M$ . Рассмотрим процедуру определения этих сил на примере трехшарнирной арки (рис. 1.13). Исходные данные:  $l = 20 \text{ м}$ ;  $f = 8 \text{ м}$ ;  $q = 10 \text{ кН/м}$ ;  $P = 25 \text{ кН}$ .

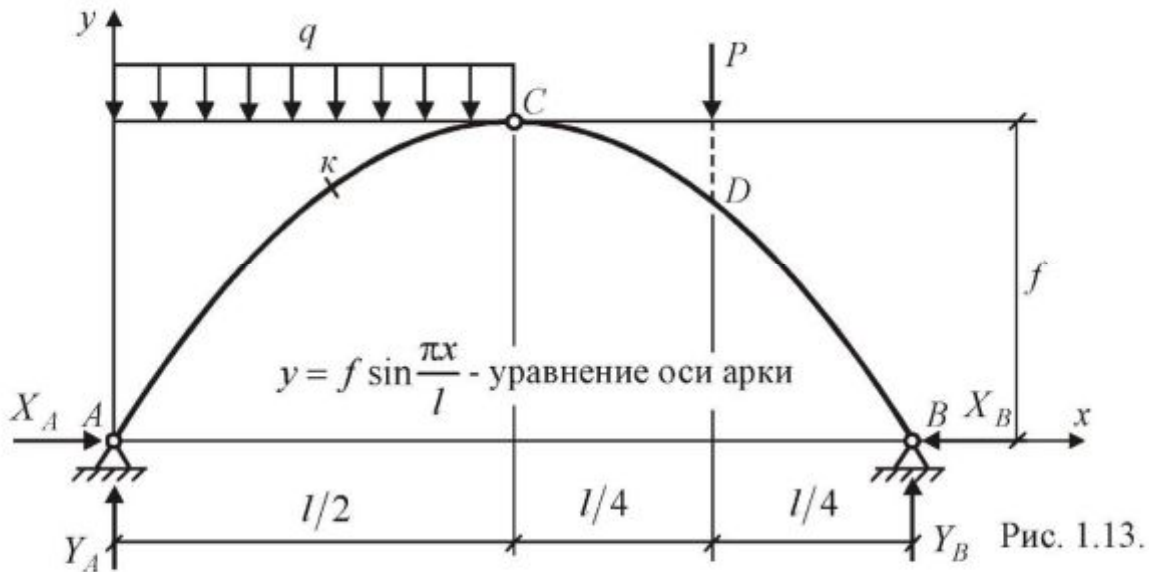
Определяем реакции опор:

$$\sum M_A = -\frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{4} - P \cdot \frac{3}{4}l + Y_B \cdot l = 0; \quad Y_B = 43,75 \text{ кН};$$

$$\sum Y = Y_A + Y_B - \frac{ql}{2} - P = 0; \quad Y_A = 81,25 \text{ кН};$$

$$\sum M_C^{\text{прав.}} = -P \cdot \frac{l}{4} + Y_B \cdot \frac{l}{2} - X_B \cdot f = 0; \quad X_B = 39,0625 \text{ кН};$$

$$\sum X = X_A - X_B = 0; \quad X_B = 39,0625 \text{ кН}.$$



Внутренние силы  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  на участке  $AC$  ( $0 \leq x \leq l/2$ ) определяем способом сечений, составляя три уравнения равновесия для части, расположенной с левой стороны от проведенного сечения (рис. 1.14):

$$\sum U = N + (Y_A - qx) \sin \varphi + X_A \cos \varphi = 0;$$

$$\sum V = Q - (Y_A - qx) \cos \varphi \sin \varphi + X_A \sin \varphi = 0;$$

$$\sum M_k = M + qx^2/2 + X_A y - Y_A x = 0.$$

Из этих уравнений получаем

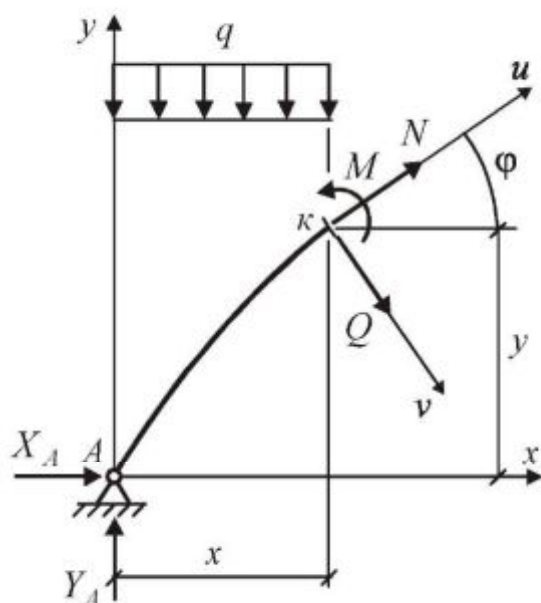


Рис. 1.14.

$$N = -X_A \cos \varphi - (Y_A - qx) \sin \varphi;$$

$$Q = -X_A \sin \varphi + (Y_A - qx) \cos \varphi;$$

$$M = -X_A y + Y_A x - qx^2 / 2.$$

На остальных участках выражения для  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  можно записать, используя соответствующие выражения на предыдущем участке. При этом следует рассматривать всегда часть арки, расположенную слева от текущего сечения, а начало отсчета брать в точке  $A$ .

Участок  $CD$ :

$$N = -X_A \cos \varphi - (Y_A - ql/2) \sin \varphi;$$

$$Q = -X_A \sin \varphi + (Y_A - ql/2) \cos \varphi;$$

$$M = -X_A y + Y_A x - \frac{ql}{2}(x - l/4).$$

Участок  $DB$ :

$$N = -X_A \cos \varphi - (Y_A - ql/2 - P) \sin \varphi; \quad Q = -X_A \sin \varphi + (Y_A - ql/2 - P) \cos \varphi;$$

$$M = -X_A y + Y_A x - 0,5ql(x - l/4) - P(x - 3l/4).$$

Функции  $\sin \varphi$ ,  $\cos \varphi$  определяются по уравнению оси арки:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{\pi f}{l} \cos \frac{\pi x}{l}; \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}; \quad \sin \varphi = \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \varphi.$$

Результаты расчета приведены в таблице 1.1 и на рис. 1.15.

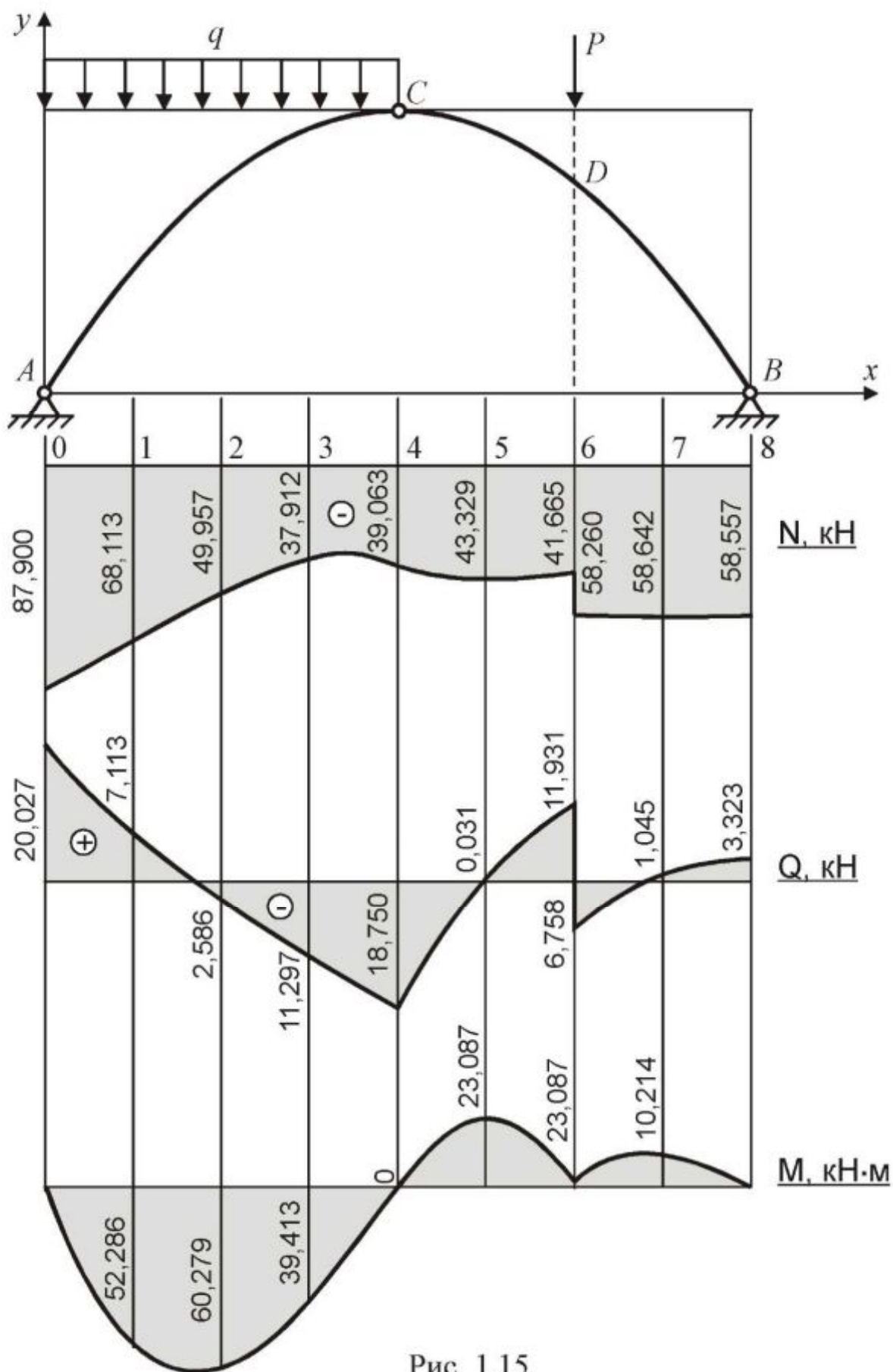


Рис. 1.15.

Таблица 1.1.

№	$x$	$y$	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$N$	$Q$	$M$
-	м	м	-	-	кН	кН	кН м
0	0,0	0,0	0,782	0,623	-87,900	20,027	0,0
1	2,5	3,061	0,758	0,653	-68,113	7,113	52,286
2	5,0	5,657	0,664	0,748	-49,957	-2,586	60,279
3	7,5	7,391	0,433	0,901	-37,912	-11,297	39,413
4	10,0	8,0	0,0	1,0	-39,063	-18,750	0,0
5	12,5	7,391	-0,433	0,901	-43,329	0,031	-23,087
6	15,0	5,657	-0,664	0,748	-41,655/-58,260	11,931/-6,758	-2,221
7	17,5	3,061	-0,758	0,653	-58,642	1,045	-10,214
8	20,0	0,0	-0,782	0,623	-58,557	3,323	0,0

## 1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ

### ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

Любая конструкция при действии внешних сил деформируется. Для проверки жесткости конструкции необходимо определять перемещения, обусловленные деформациями ее элементов.

В основе классических методов строительной механики лежит понятие линейно-деформируемой упругой системы (конструкции). Перемещения в такой системе линейно зависят от внешних обобщенных сил  $P_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ):

$$\Delta_k = \sum_{i=1}^n \delta_{ki} P_i. \quad (1.2.1)$$

Здесь  $\Delta_k$  - перемещение точки "k" системы по определенному направлению от внешних сил  $P_i$  ( $i = \overline{1, n}$ );  $\delta_{ki}$  - то же от силы  $P_i = 1$ .

В процессе деформирования упругой системы внешние и внутренние силы системы совершают работу. При статическом действии внешних сил их работа вычисляется по формуле

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i \Delta_i. \quad (1.2.2)$$

Далее будут рассматриваться только плоские стержневые системы, нагруженные в их плоскости. В стержнях таких систем в общем случае действуют, как известно, три внутренние силы: продольная сила  $N$ ; поперечная сила  $Q$  и изгибающий момент  $M$ . Их работа определяется по формуле



$$W = -\frac{1}{2} \sum \int \frac{N^2 ds}{EF} - \frac{1}{2} \sum \int \frac{Q^2 ds}{GF} - \frac{1}{2} \sum \int \frac{M^2 ds}{EI}. \quad (1.2.3)$$

Здесь  $EF, GF, EI$  - жесткости стержней соответственно при растяжении-сжатии, сдвиге и изгибе;  $ds$  - дифференциал локальной координаты  $s$  на каждом участке конструкции; суммы берутся по всем участкам конструкции.

Потенциальная энергия деформации  $U$  любой упругой системы равна работе  $W$  внутренних сил, взятой с обратным знаком:  $U = -W$ . Для плоской стержневой системы из формулы (1.2.3) следует:

$$U = \frac{1}{2} \sum \int \frac{N^2 ds}{EF} + \frac{1}{2} \sum \int \frac{Q^2 ds}{GF} + \frac{1}{2} \sum \int \frac{M^2 ds}{EI}. \quad (1.2.4)$$

Выражение для  $U$  нелинейно зависит от внутренних сил  $N, Q, M$ . Поэтому к нему нельзя применить принцип независимости действия сил, т. е. потенциальная энергия деформации  $U$  от внешних сил  $P_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) не равна сумме  $U_i$  от каждой силы в отдельности.

Практика расчетов стержневых систем показала, что в таких конструкциях, как балки, рамы и арки, перемещения в основном обусловлены изгибом стержней. Для таких конструкций в формуле (1.2.4) можно учитывать только последнее слагаемое:

$$U = \frac{1}{2} \sum \int \frac{M^2 ds}{EI}. \quad (1.2.5)$$

Для ферм следует брать слагаемое, содержащее продольные силы  $N$  ( $Q$  и  $M$  в стержнях ферм согласно общепринятой расчетной схеме считаются равными нулю):

$$U = \frac{1}{2} \sum \int \frac{N^2 ds}{EF} = \frac{1}{2} \sum \frac{N^2 l}{EF}. \quad (1.2.6)$$

Здесь  $l$  - длина стержня. Сумма берется по всем стержням фермы. Второе слагаемое формулы (1.2.4) (вместе с третьим слагаемым) следует учитывать только при весьма коротких стержнях конструкции:  $l/h < 3$ ;  $h$  - высота поперечного сечения стержня.

### ТЕОРЕМА КАСТИЛИАНО

Формулировка теоремы. Частная производная от потенциальной энергии деформации  $U$  упругой системы по некоторой внешней обобщенной силе  $P_k$  равна обобщенному перемещению  $\Delta_k$  в направлении этой силы:

$$\Delta_k = \partial U / \partial P_k. \quad (1.2.7)$$

Доказательство теоремы. Пусть  $U$  - потенциальная энергия деформации системы от внешних обобщенных сил  $P_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ), представленная как функция этих сил:  $U = U(P_1, P_2, \dots, P_n)$ . Зададим некоторой силе  $P_k$  бесконечно малое приращение  $dP_k$  и найдем потенциальную энергию деформации системы с учетом этого приращения:

$$U_1 = U + \frac{\partial U}{\partial P_k} dP_k. \quad (1.2.8)$$

Изменим порядок приложения сил. Сначала к системе приложим только силу  $dP_k$  и найдем потенциальную энергию деформации от этой силы:

$$U_2 = \frac{1}{2} dP_k d\Delta_k. \quad (1.2.9)$$

Здесь  $d\Delta_k$  - бесконечно малое перемещение от силы  $dP_k$  в направлении этой силы. Затем приложим к системе все остальные силы  $P_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ). Потенциальная энергия деформации системы после этого будет такой:

$$U_3 = U + \frac{1}{2} dP_k d\Delta_k + dP_k \Delta_k. \quad (1.2.10)$$

Последнее слагаемое в (1.2.10) представляет работу силы  $dP_k$  на перемещении  $\Delta_k$  от сил  $P_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ). Так как  $U_3 = U_1$ , то

$$U + \frac{1}{2} dP_k d\Delta_k + dP_k \Delta_k = U + \frac{\partial U}{\partial P_k} dP_k. \quad (1.2.11)$$

Из выражения (1.2.11) после отбрасывания слагаемого  $dP_k d\Delta_k / 2$ , имеющего второй порядок малости, следует:

$$\Delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}, \quad (1.2.12)$$

что и требовалось доказать.

Теорема Кастилиано позволяет определить перемещение  $\Delta_k$  в направлении любой имеющейся силы  $P_k$ . Если же в направлении искомого перемещения  $\Delta_k$  силы  $P_k$  нет, то необходимо в направлении  $\Delta_k$  добавить некоторую фиктивную силу  $F$  и определить  $U$  с учетом этой силы. Далее по теореме Кастилиано определяется  $\Delta_k$ , после чего полагается  $F = 0$ :



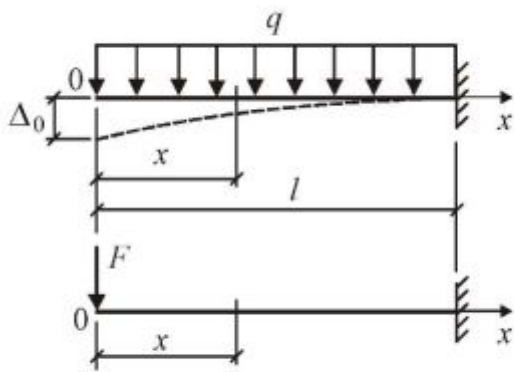


Рис. 1.16.

$$\Delta_k = \left. \frac{\partial U}{\partial F} \right|_{F=0} \quad (1.2.13)$$

Найдем прогиб  $\Delta_0$  свободного конца консольной балки от распределенной нагрузки  $q$  (рис. 1.16) при постоянной жесткости  $EI$ . Так как в направлении  $\Delta_0$  сосредоточенной силы нет, то прикладываем в этом направлении фиктивную силу  $F$  и находим потенциальную энергию деформации балки с учетом этой силы:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2 dx}{EI} = \frac{1}{2EI} \int_0^l (-Fx - qx^2/2)^2 dx \\ &= \frac{1}{2EI} \int_0^l (F^2 x^2 + Fqx^3 + q^2 x^4/4) dx = \frac{1}{2EI} (F^2 l^3/3 + Fl^4/4 + ql^5/20) \end{aligned}$$

По теореме Кастилиано получаем

$$\Delta_0 = \left. \frac{\partial U}{\partial F} \right|_{F=0} = \frac{1}{2EI} (2Fl^3/3 + ql^4/4) \Big|_{F=0} = \frac{ql^4}{8EI}$$

#### ФОРМУЛА МОРА

С помощью теоремы Кастилиано можно получить удобную в практическом использовании формулу для вычисления перемещений в стержневых системах, называемую формулой Мора. Ранее отмечалось, что в таких конструкциях, как балки, рамы и арки, перемещения в основном обусловлены изгибом стержней. В этом случае потенциальную энергию деформации  $U$  можно определять только с учетом изгибающих моментов  $M$ :

$$U = \frac{1}{2} \sum_s \int \frac{M^2 ds}{EI} \quad (1.2.14)$$

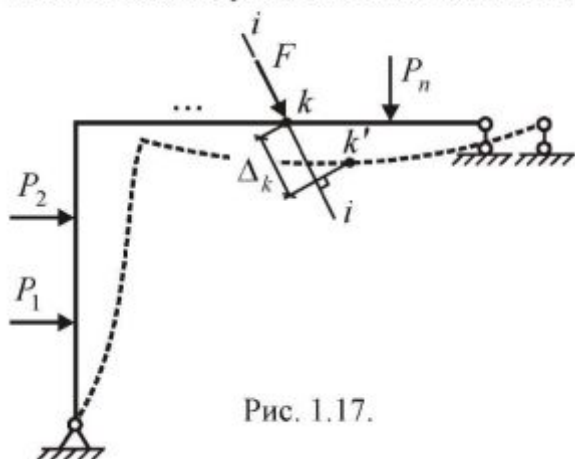


Рис. 1.17.

Требуется определить перемещение некоторой точки "k" конструкции по направлению  $i-i$  от заданной нагрузки (рис. 1.17). Для этого в направлении искомого перемещения  $\Delta_k$  добавим фиктивную силу  $F$  и определим потенциальную энергию деформации конструкции с учетом данной силы:

$$\hat{U} = \frac{1}{2} \sum_s \int \frac{(M + M_F)^2 ds}{EI}. \quad (1.2.15)$$

Здесь  $M_F$  - изгибающие моменты в стержнях конструкции от силы  $F$ . В упругой конструкции моменты  $M_F$  линейно зависят от силы  $F$ :  $M_F = \bar{M} \cdot F$ , где  $\bar{M}$  - изгибающие моменты от силы  $F=1$ . Выражение (1.2.15) после этого примет вид

$$\hat{U} = \frac{1}{2} \sum_s \int \frac{(M + \bar{M} \cdot F)^2 ds}{EI}. \quad (1.2.16)$$

По теореме Кастилиано

$$\Delta_k = \left. \frac{\partial \hat{U}}{\partial F} \right|_{F=0} = \frac{1}{2} \sum_s \int \frac{2(M + \bar{M} \cdot F) \bar{M} ds}{EI} \Big|_{F=0}. \quad (1.2.17)$$

Это дает формулу Мора

$$\Delta_k = \sum_s \int \frac{M \bar{M}}{EI} ds. \quad (1.2.18)$$

Для нахождения перемещения  $\Delta_k$  по данной формуле необходимо:

- а) определить функции  $M = M(s)$  на каждом участке конструкции от заданной нагрузки;
- б) определить функции  $\bar{M} = \bar{M}(s)$  на каждом участке конструкции от силы  $F=1$  в направлении искомого перемещения  $\Delta_k$ ;
- в) вычислить интегралы Мора  $\int \frac{M \bar{M} ds}{EI}$  по участкам конструкции;
- г) просуммировать полученные интегралы.

Примечание. По формуле Мора можно определять как линейные перемещения, так и углы поворота поперечных сечений стержней конструкции. В последнем случае изгибающие моменты  $\bar{M}$  находятся от момента  $m=1$ , приложенного в сечении, где определяется угол поворота.

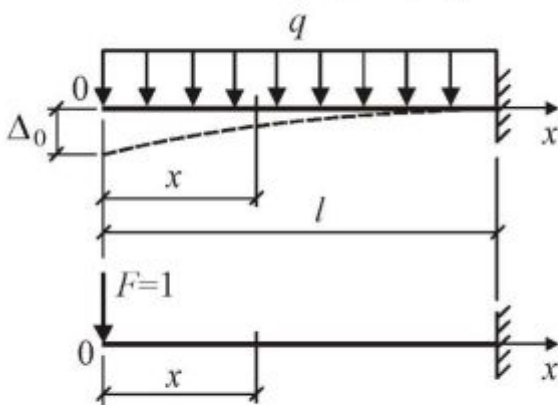


Рис. 1.18.

Применим формулу Мора для определения прогиба  $\Delta_0$  прежней балки (рис. 1.18). Изгибающие моменты  $M$  и  $\bar{M}$  необходимо представить как функции координаты  $x$  произвольного сечения балки:  $M = -qx^2/2$ ;  $\bar{M} = -1 \cdot x = -x$ . Определяем прогиб  $\Delta_0$ :

$$\Delta_0 = \int_0^l \frac{M \bar{M}}{EI} dx = \frac{q}{2EI} \int_0^l x^3 dx = \frac{ql^4}{8EI}.$$

Полученный результат совпадает с тем,

что был найден по теореме Кастилиано.

## ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ МОРА ПО ПРАВИЛУ ВЕРЕЩАГИНА

Правило Верещагина применяется для вычисления интегралов Мора на прямолинейных участках конструкции, имеющих постоянную жесткость  $EI$ . Рассмотрим прямолинейный участок АВ (рис. 1.19). Изгибающий момент  $\overline{M}$  на таком участке является линейной функцией локальной координаты  $x$ :  $\overline{M} = ax + b$ , где  $a$  и  $b$  - некоторые постоянные. Вычислим интеграл Мора:

$$\int_0^l M \overline{M} dx = \int_0^l M (ax + b) dx = a \int_0^l Mx dx + b \int_0^l M dx = a \int_0^l Mx dx + b \int_0^l M dx. \quad (1.2.19)$$

Определенные интегралы в правой части данного выражения имеют известный геометрический смысл:

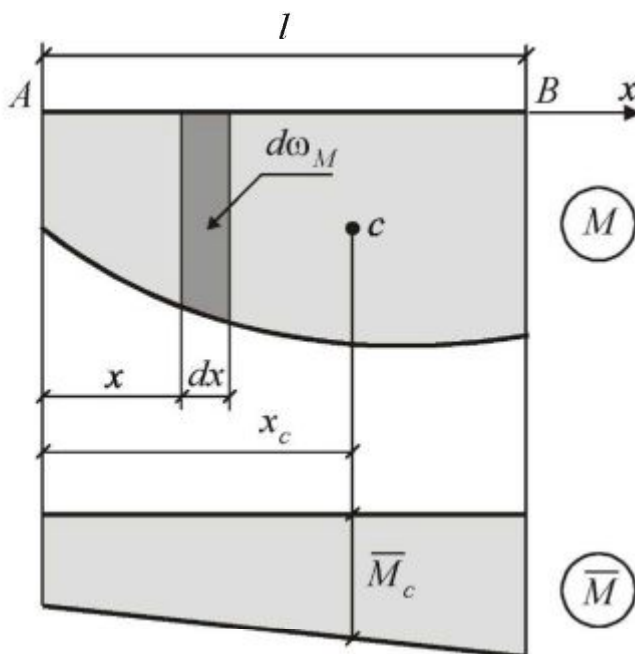


Рис. 1.19.

$\int_0^l M dx = \omega_M$  - площадь эпюры

$M$  на участке АВ;

$\int_0^l Mx dx = \int_0^l x d\omega_M = \omega_M \cdot x_c$  -

статический момент площади  $\omega_M$  относительно начала участка АВ ( $x_c$  - абсцисса центра тяжести эпюры  $M$ ). С учетом этого получаем

$$\begin{aligned} \int_0^l M \overline{M} dx &= a \omega_M \cdot x_c + b \omega_M = \\ &= \omega_M (ax_c + b). \end{aligned}$$

Так как  $ax + b = \overline{M}$ , то  $ax_c + b = \overline{M}_c$  - ордината эпюры  $\overline{M}$  под центром тяжести эпюры  $M$ . Таким образом, получаем

правило Верещагина для вычисления интегралов Мора:

$$\int_0^l M \overline{M} dx = \omega_M \cdot \overline{M}_c. \quad (1.2.20)$$

Из выражения (1.2.20) видно, что для вычисления интеграла Мора по правилу Верещагина необходимо иметь площадь эпюры  $M$  и положение ее центра тяжести. Эти данные легко определяются только для некоторых простых эпюр. Если эпюра  $M$  является сложной, то ее можно разбить на несколько простых эпюр так (рис. 1.20), чтобы площадь и положение центра тяжести каждой из них легко определялись. Тогда правило Верещагина можно применить к каждой простой эпюре, и затем просуммировать полученные результаты.

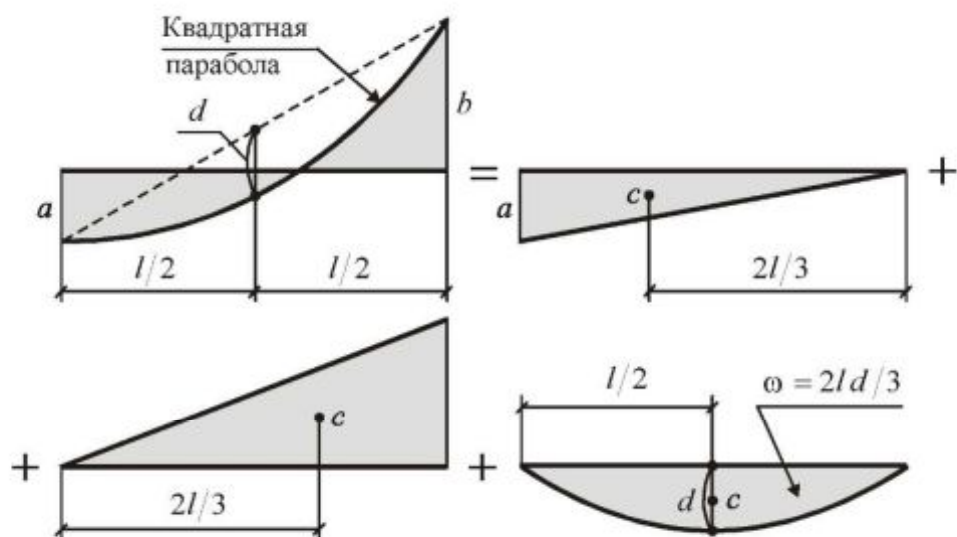


Рис. 1.20.  
СПРАВОЧНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ  
ИНТЕГРАЛОВ МОРА

С помощью правила Верещагина или путем непосредственного интегрирования можно получить формулы для вычисления интегралов Мора от произведения часто встречающихся эпюр  $M$  и  $\bar{M}$ . Ниже приведены четыре основные справочные формулы (рис. 1.21).



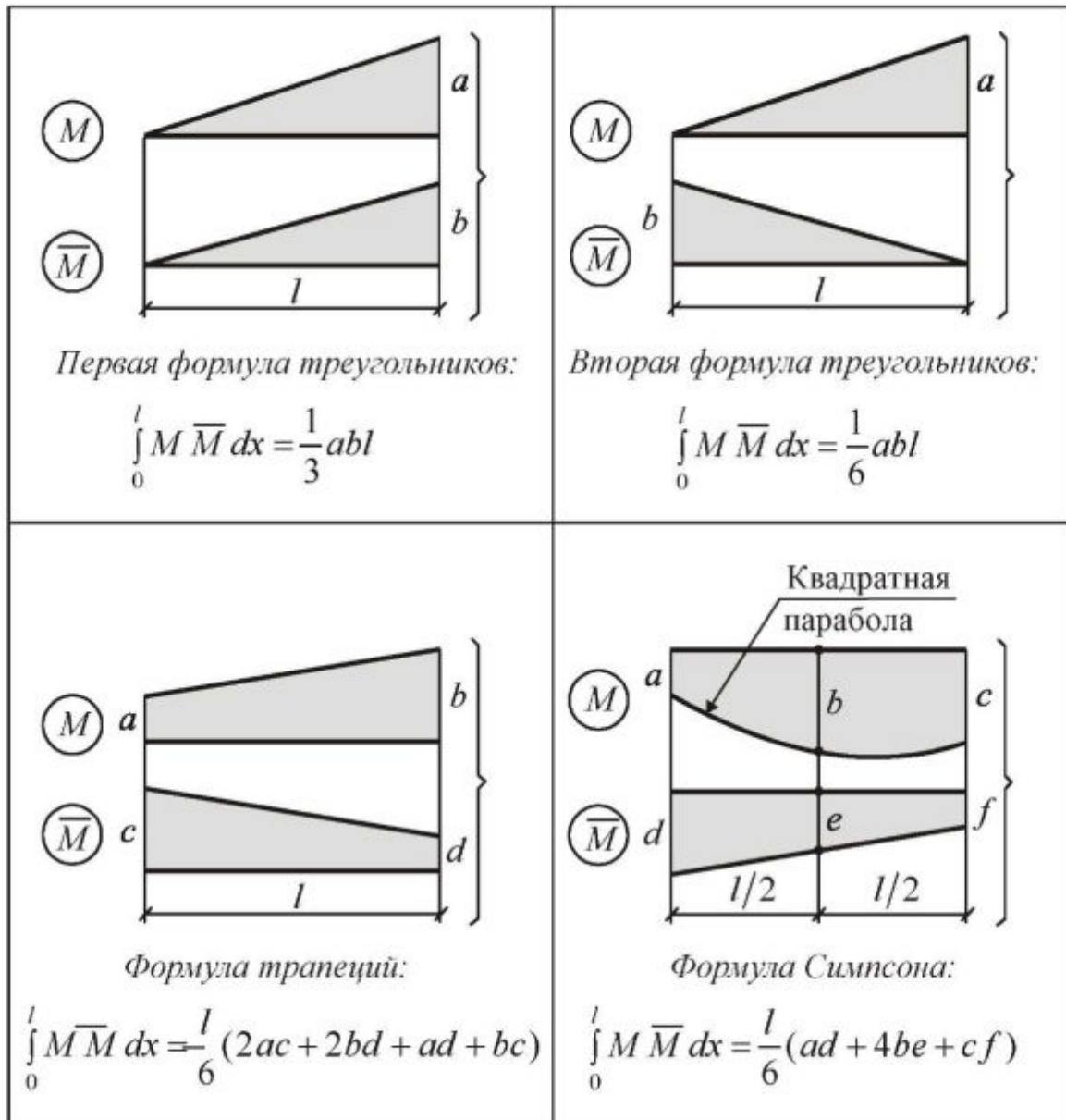


Рис. 1.21.

Пример. Определить прогиб  $\Delta_E$  статически определимой балки (рис. 1.22a). Исходные данные:  $P = 24 \text{ кН}$ ;  $q = 9 \text{ кН/м}$ ;  $EI = \text{const}$ .

Решение.

Определяем реакции опор:

$$\sum M_D = -R_A \cdot 10 + P \cdot 7 + q \cdot 4 \cdot 2 - P \cdot 2 = 0; \quad R_A = 19,2 \text{ кН};$$

$$\sum Y = R_A - 2P - q \cdot 4 + R_D = 0; \quad R_D = 64,8 \text{ кН}.$$

Находим изгибающие моменты на участках балки.

Участок АВ:  $M_A = 0$ ;  $M_B = R_A \cdot 3 = 57,6 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

Участок ВС:  $M_B = 57,6 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ;  $M_C = R_A \cdot 6 - P \cdot 3 = 43,2 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

Участок ED:  $M_E = 0$ ;  $M_D = -P \cdot 2 = -48,0 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

Участок DC:  $M_D = -48,0 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ;  $M_C = -P \cdot 6 + R_D \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 2 = 43,2 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

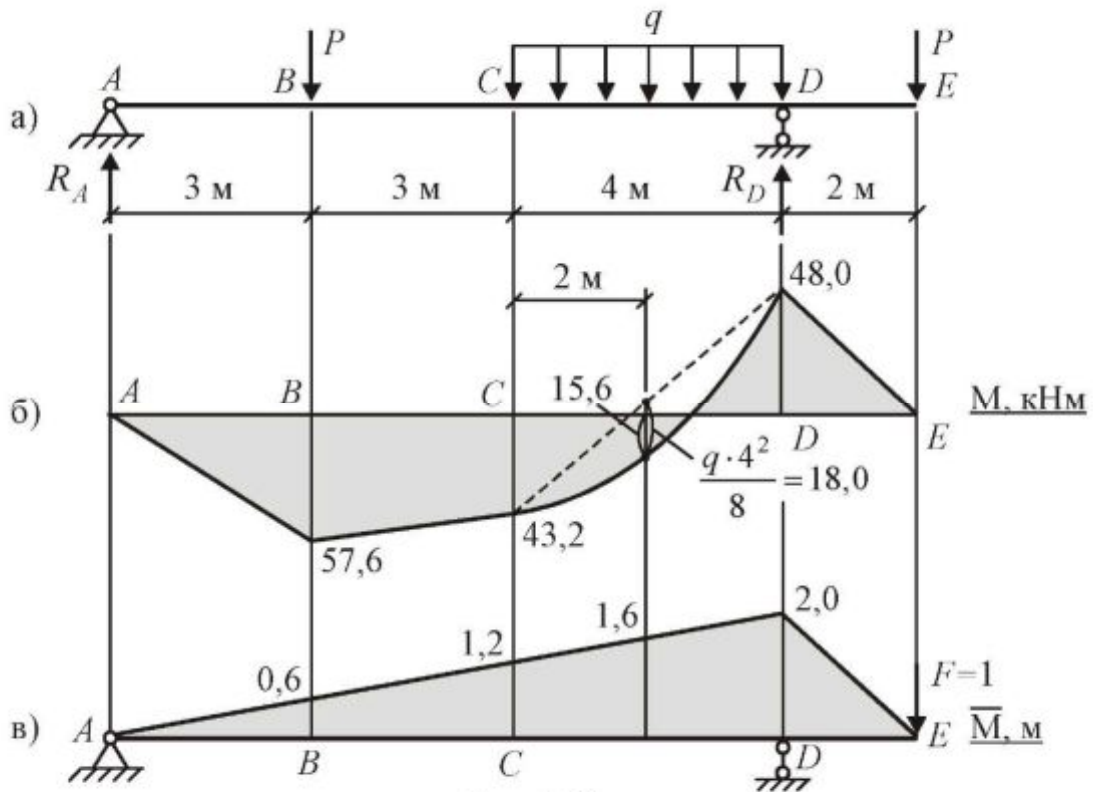


Рис. 1.22.

По полученным результатам строим эпюру  $M$  (рис. 1.22б). Для определения  $\Delta_E$  прикладываем в точке E силу  $F = 1$  и строим от нее эпюру  $\bar{M}$  (рис. 1.22в) при движении с правого конца балки (в этом случае реакции опор от силы  $F = 1$  можно не определять). Определяем  $\Delta_E$ , вычисляя интегралы Мора на участках балки по приведенным выше справочным формулам:

$$\Delta_E = \sum \int_s \frac{M \bar{M}}{EI} ds = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{1}{3} \cdot 57,6 \cdot 0,6 \cdot 3 - \frac{3}{6} (2 \cdot 57,6 \cdot 0,6 + 2 \cdot 43,2 \cdot 1,2 + 57,6 \cdot 1,2 + 43,2 \cdot 0,6) + \frac{4}{6} (-43,2 \cdot 1,2 - 4 \cdot 15,6 \cdot 1,6 + 48 \cdot 2) + \frac{1}{3} \cdot 48 \cdot 2 \cdot 2 \right] = -\frac{141,6}{EI}.$$

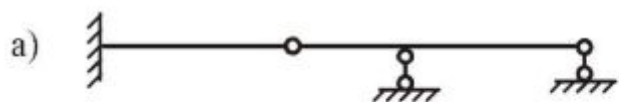
Знак “-“ в результате означает, что точка E балки перемещается противоположно силе  $F = 1$ , т.е. вверх.

## Часть 2. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

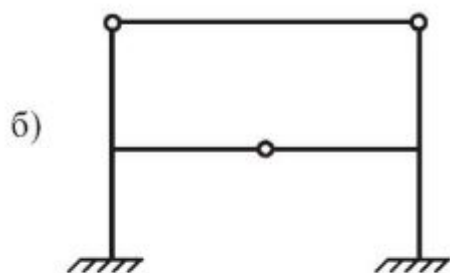
### 2.1. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ

#### СТЕПЕНЬ СТАТИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛИМОСТИ ПЛОСКОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

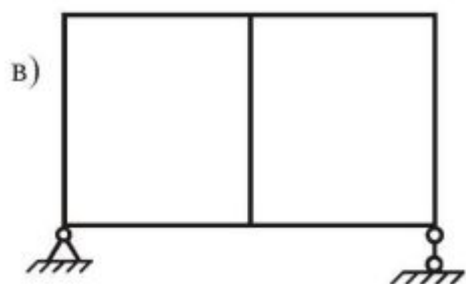
Статически неопределимыми называются системы, которые имеют лишние (с точки зрения обеспечения геометрической неизменяемости) связи. Степень статической неопределимости ( $ССН$ ) связана с числом степеней свободы системы простым соотношением:  $ССН = -W$ . Для плоских рам, имеющих замкнутые бесшарнирные контуры,  $ССН$  увеличивается на  $3K$ , где  $K$  - число таких контуров:  $ССН = -W + 3K$ . На рис. 2.1 приведены примеры определения  $ССН$  некоторых плоских стержневых систем.



$$\begin{aligned} W &= 3D - 2Ш - C_0 = \\ &= 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 5 = -1; \\ ССН &= -W = 1. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} W &= 3D - 2Ш - C_0 = \\ &= 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 6 = -3; \\ ССН &= -W = 3. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} W &= 3D - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 0 - 3 = 0; \\ K &= 2; \\ ССН &= -W + 3K = 6. \end{aligned}$$

Рис. 2.1.

## ОСНОВНАЯ СИСТЕМА МЕТОДА СИЛ

В методе сил любая статически неопределимая система рассчитывается с помощью соответствующей статически определимой системы, полученной из заданной системы путем отбрасывания лишних связей и замены их неизвестными силами (реакциями)  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ( $n = CCH$ ). Полученная таким образом статически определимая система называется основной системой (ОС) метода сил. Из заданной статически неопределимой системы можно получить несколько вариантов ОС, отбрасывая различным образом лишние связи (рис. 2.2). Наиболее рациональной из всех возможных ОС является такая, в которой реакции опор и внутренние обобщенные силы определяются как можно проще (рис. 2б, 2в).

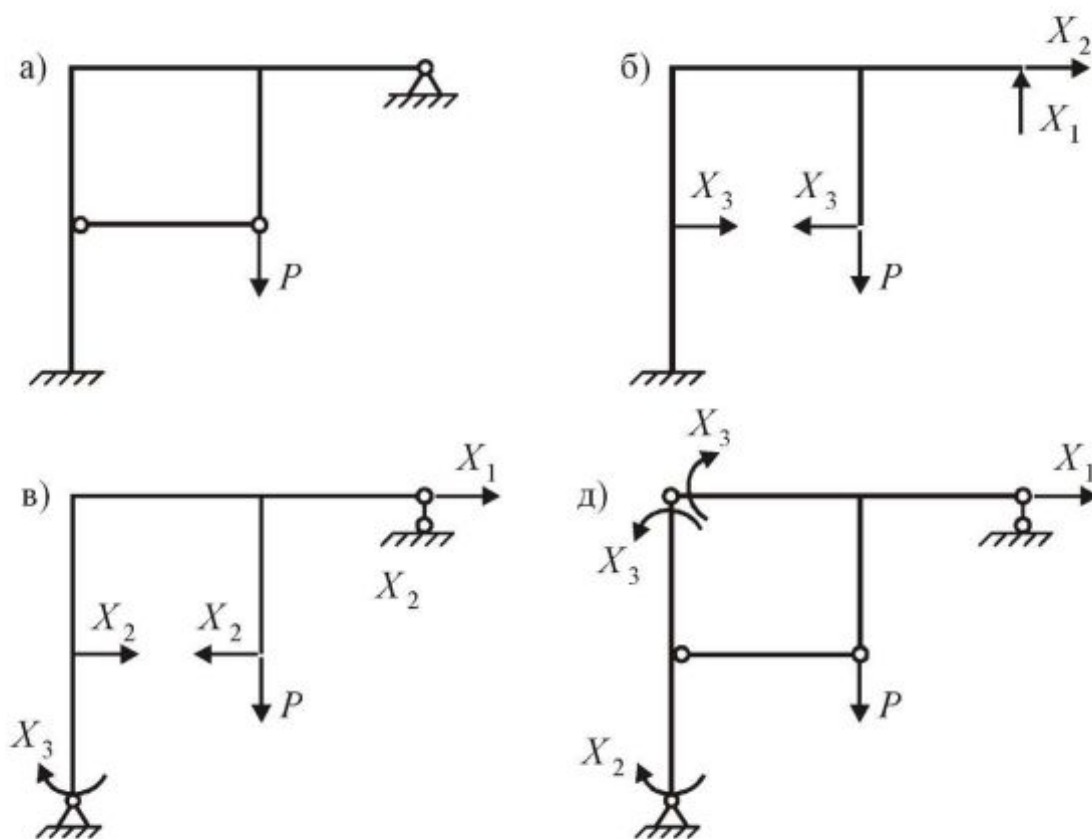


Рис. 2.2.



## КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ МЕТОДА СИЛ

Неизвестные силы  $X_1, X_2, \dots, X_n$  определяются из условия отсутствия перемещений (абсолютных или относительных) в ОС в направлениях этих сил. Эти условия записываются в виде канонических уравнений метода сил. Рассмотрим получение данных уравнений на примере системы, имеющей  $ССН = 2$  (рис. 2.3а). Будем считать, что перемещения в системе возрастают прямо пропорционально заданной нагрузке. Такие системы принято называть линейно-деформируемыми. Тогда исходное состояние ОС (рис. 2.3б) можно разложить на три независимых состояния: состояние от силы  $X_1$  (рис. 2.3в); состояние от силы  $X_2$  (рис. 2.3г) и состояние от заданной нагрузки (рис. 2.3д). От силы  $X_1$  в направлениях  $X_1$  и  $X_2$  в ОС возникают соответственно перемещения  $\Delta_{1X_1}$  и  $\Delta_{2X_1}$ . От силы  $X_2$  в этих же направлениях получаются соответственно перемещения  $\Delta_{1X_2}$  и  $\Delta_{2X_2}$ . От нагрузки в направлениях сил  $X_1$  и  $X_2$  в ОС возникают соответственно перемещения  $\Delta_{1P}$  и  $\Delta_{2P}$ .

Алгебраическая сумма отмеченных перемещений в ОС в направлении каждой из неизвестных сил  $X_1$  и  $X_2$  должна быть равна нулю:

$$\Delta_{1X_1} + \Delta_{1X_2} + \Delta_{1P} = 0; \quad \Delta_{2X_1} + \Delta_{2X_2} + \Delta_{2P} = 0.$$

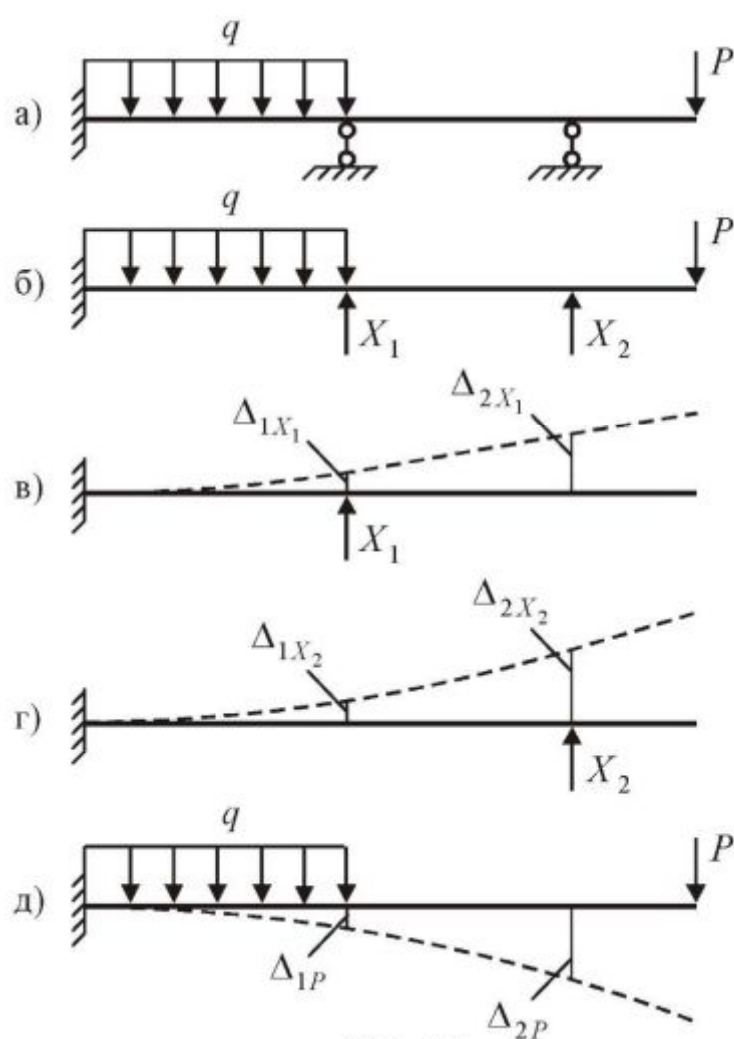


Рис. 2.3.

Перемещения в ОС от сил  $X_1$  и  $X_2$  пропорциональны этим силам:

$$\Delta_{1X_1} = \delta_{11}X_1; \quad \Delta_{1X_2} = \delta_{12}X_2;$$

$$\Delta_{2X_1} = \delta_{21}X_1; \quad \Delta_{2X_2} = \delta_{22}X_2.$$

Каждый коэффициент  $\delta_{ij}$  ( $i, j = 1; 2$ ) по физическому смыслу представляет перемещение в ОС в направлении силы  $X_i$  от силы  $X_j = 1$  и называется коэффициентом податливости. Подставляя данные выражения в предыдущие равенства, получаем канонические уравнения метода сил для системы, имеющей  $ССН = 2$ :

$$\begin{aligned}\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} &= 0.\end{aligned}$$

При  $CSH = n$  получаем соответственно  $n$  таких уравнений, содержащих  $n$  неизвестных сил:

$$\begin{aligned}\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1P} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2P} &= 0; \\ \dots & \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nP} &= 0.\end{aligned}$$

Данные уравнения можно представить в матричной форме:

$$[\delta]\{X\} + \{\Delta_P\} = \{0\}.$$

Здесь

$$[\delta] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix}, \quad \{X\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{Bmatrix}, \quad \{\Delta_P\} = \begin{Bmatrix} \Delta_{1P} \\ \Delta_{2P} \\ \dots \\ \Delta_{nP} \end{Bmatrix}$$

представляют соответственно матрицу податливости, вектор неизвестных сил и вектор свободных членов канонических уравнений.

Свойства матрицы податливости. Матрица  $[\delta]$  всегда является симметричной ( $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ ) и положительно определенной ( $\delta_{ii} > 0$ ).

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРИ НЕИЗВЕСТНЫХ И СВОБОДНЫХ ЧЛЕНОВ КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Коэффициенты при неизвестных (коэффициенты податливости)  $\delta_{ij}$  и свободные члены  $\Delta_{iP}$  канонических уравнений по физическому смыслу представляют перемещения в ОС в направлениях неизвестных сил  $X_j$ . Поэтому их можно определить по формуле Мора. Для систем, в которых перемещения обусловлены в основном деформациями изгиба (балки, рамы, арки)

$$\delta_{ij} = \sum \int_0^l \frac{M_i M_j}{EI} ds; \quad \Delta_{iP} = \sum \int_0^l \frac{M_i M_P}{EI} ds.$$

Здесь  $M_i$ ,  $M_j$ ,  $M_P$  - изгибающие моменты в ОС соответственно от сил  $X_i = 1$ ,  $X_j = 1$  и заданной нагрузки, изображаемые в виде соответствующих эпюр. При расчете методом сил статически неопределимых ферм  $\delta_{ij}$  и  $\Delta_{iP}$  определяются по формулам

$$\delta_{ij} = \sum_k \frac{N_k^{(i)} N_k^{(j)} I_k}{EF_k}; \quad \Delta_{iP} = \sum_k \frac{N_k^{(i)} N_k^{(P)} I_k}{EF_k},$$

где  $N_k^{(i)}$ ,  $N_k^{(j)}$ ,  $N_k^{(P)}$  - продольные силы в стержнях ОС соответственно от сил  $X_i = 1$ ,  $X_j = 1$  и заданной нагрузки ( $k$  - номер стержня);  $EF_k, l_k$  - продольные жесткости и длины стержней ОС.

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ВНУТРЕННИХ СИЛ В ЗАДАННОЙ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ СИСТЕМЕ

После определения сил  $X_i$  из канонических уравнений ОС становится эквивалентной заданной статически неопределимой системе. Поэтому для определения обобщенных внутренних сил  $N, Q, M$  (построения эпюр  $N, Q, M$ ) в заданной системе можно по-прежнему воспользоваться ОС при совместном действии заданной нагрузки и найденных сил  $X_i$ . Методика определения  $N, Q, M$  в ОС такая же, как в любой статически определимой системе.

Верность расчета контролируется проверкой равновесия внешних и внутренних обобщенных сил в узлах конструкции, а также с помощью кинематической проверки. Смысл последней состоит в проверке отсутствия перемещений в заданной системе в направлениях сил  $X_i$ , действовавших в ОС:

$$\Delta_i = \sum \int_0^l \frac{M_i M}{EI} ds \approx 0 \quad (i = \overline{1, n}).$$

Пример расчета статически неопределимой рамы (рис. 2.4) методом сил.

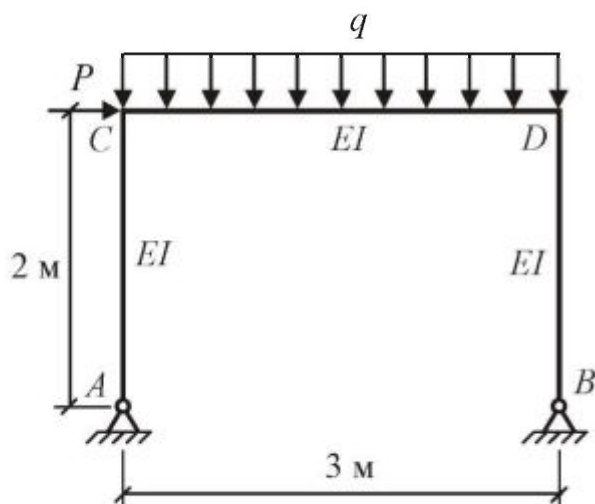


Рис. 2.4.

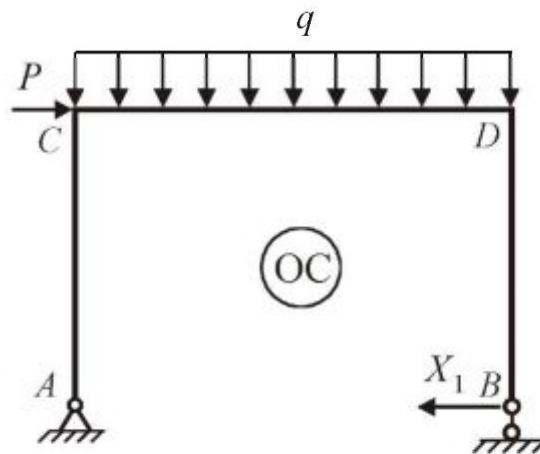


Рис. 2.5.

Дано:  $q = 16 \text{ кН/м}$ ;  $P = 30 \text{ кН}$ .

Построить эпюры  $N$ ,  $Q$ ,  $M$ .

### 1. Определение ССН и выбор ОС

$$ССН = -W = -(3Д - 2Ш - C_0) = -(3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 4) = 1.$$

Выбираем ОС, отбрасывая одну лишнюю связь и заменяя ее неизвестной силой  $X_1$  (рис. 2.5), определяемой из канонического уравнения

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

### 2. Построение эпюр $M_1$ , $M_P$ в ОС

Эпюры  $M_1$  и  $M_P$  (рис. 2.6, рис. 2.8) строятся в ОС соответственно от силы  $X_1 = 1$  и нагрузки. Для построения данных эпюр в выбранной ОС достаточно определить в обоих состояниях только реакцию  $X_A$  (рис. 2.6, рис. 2.7).

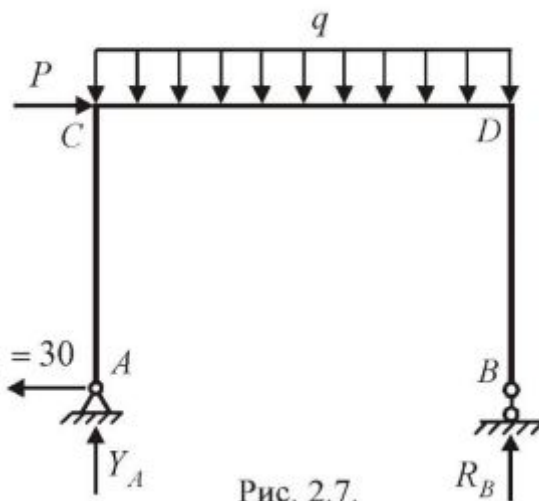
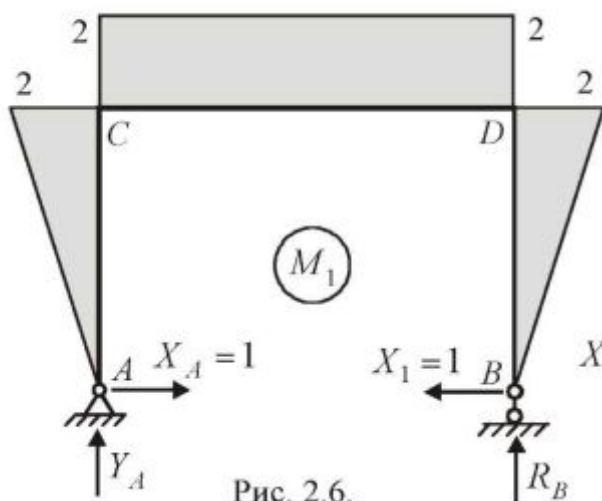
### 3. Определение $\delta_{11}$ , $\Delta_{1P}$ и силы $X_1$

Значения  $\delta_{11}$ ,  $\Delta_{1P}$  определяются по формуле Мора. Интегралы Мора на каждом участке находятся по справочным формулам перемножения эпюр или по правилу Верещагина.

$$\delta_{11} = \sum \int_0^l \frac{M_1 M_1}{EI} ds = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 \right] = \frac{17,333}{EI};$$

$$\Delta_{1P} = \sum \int_0^l \frac{M_1 M_P}{EI} ds = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 60 \cdot 2 - \frac{3}{6} (2 \cdot 60 + 4 \cdot 2 \cdot 48 + 2 \cdot 0) \right] =$$

$$-\frac{332}{EI}; \quad X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{332}{17,333} = 19,154 \text{ кН}.$$





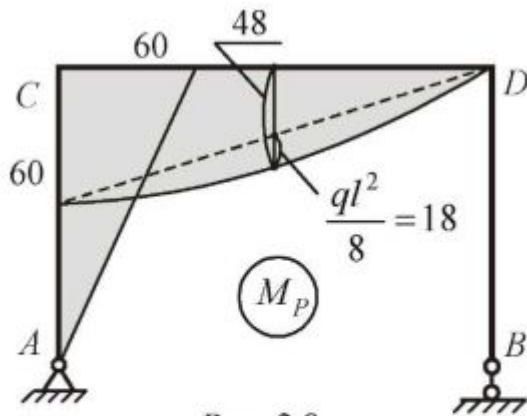


Рис. 2.8.

#### 4. Построение эпюр $N$ , $Q$ , $M$

Эпюры  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  в заданной статически неопределимой системе строятся с помощью ОС. Для этого сначала определяются реакции опор, возникающие в ОС при совместном действии нагрузки и силы  $X_1$  (рис. 2.9а):

$$\sum M_A = -P \cdot 2 - q \cdot 3 \cdot 1,5 + R_B \cdot 3 = 0; R_B = 44 \text{ кН};$$

$$\sum X = P - X_A - X_1 = 0; X_A = 10,846 \text{ кН};$$

$$\sum Y = Y_A - q \cdot 3 + R_B = 0; Y_A = 4 \text{ кН}.$$

Далее определяются значения  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  на участках рамы.

Участок AC:  $N = -Y_A = -4 \text{ кН}; Q = X_A = 10,846 \text{ кН};$

$$M_A = 0; M_C = X_A \cdot 2 = 21,692 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок CD:  $N = X_A - P = -19,154 \text{ кН}; Q_C = Y_A = 4 \text{ кН};$

$$Q_D = Y_A - q \cdot 3 = -44 \text{ кН}; M_C = X_A \cdot 2 = 21,692 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_D = X_A \cdot 2 + Y_A \cdot 3 - q \cdot 3 \cdot 1,5 = -38,308 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок BD:  $N = -R_B = -44 \text{ кН}; Q = X_1 = 19,154 \text{ кН};$

$$M_B = 0; M_D = X_1 \cdot 2 = 38,308 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

По полученным результатам строятся эпюры  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  (рис. 2.9б, 2.9в, 2.9г).

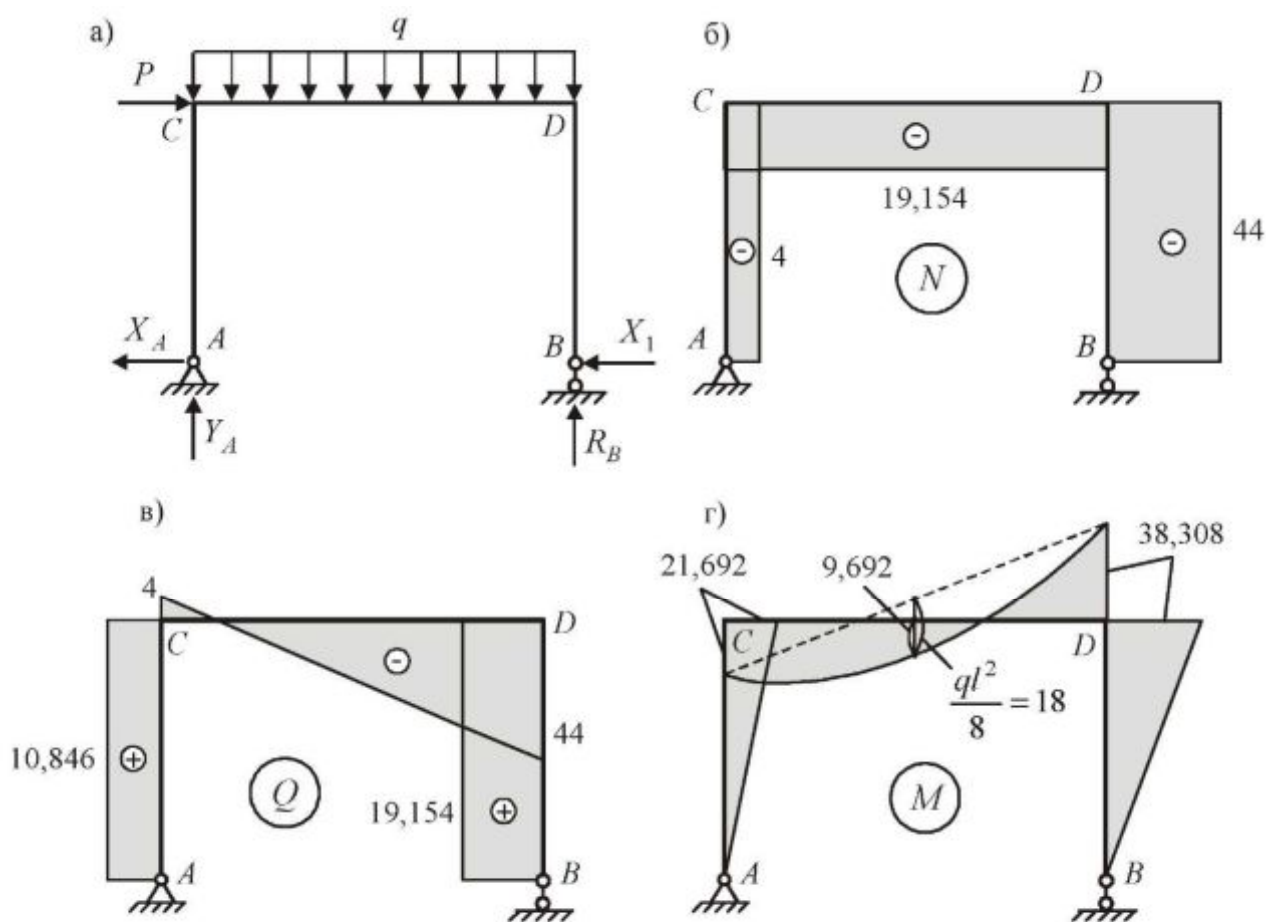


Рис. 2.9.

### 5. Проверка равновесия узлов

Равновесие изгибающих моментов в узлах С и D рамы следует непосредственно из эпюры М (рис. 2.9г). Поэтому достаточно проверить лишь равновесие горизонтальных и вертикальных сил в данных узлах (рис. 2.10). Направления  $N$  и  $Q$  при этом берутся действительными.

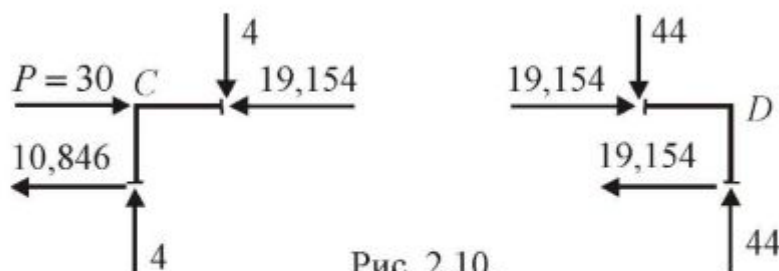


Рис. 2.10.

Для узла С:

$$\sum X = 30 - 10,846 - 19,154 = 0;$$

$$\sum Y = 4 - 4 = 0.$$

Для узла D:

$$\sum X = 19,154 - 19,154 = 0;$$

$$\sum Y = 44 - 44 = 0.$$

Узлы С и D находятся в равновесии.

## 6. Кинематическая проверка

$$\Delta_1 = \sum \int_0^l \frac{M_1 M}{EI} ds = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 21,692 \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 38,308 \cdot 2 + \right. \\ \left. + \frac{3}{6} (-2 \cdot 21,692 - 4 \cdot 2 \cdot 9,692 + 2 \cdot 38,308) \right] = \frac{2,7 \cdot 10^{-3}}{EI} \approx 0.$$

## 2.2. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

### СТЕПЕНЬ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛИМОСТИ ПЛОСКОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

В методе перемещений неизвестными параметрами являются обобщенные перемещения узлов конструкции: в шарнирных узлах определяются линейные перемещения; в жестких узлах кроме линейных перемещений определяются также их углы поворота. Степенью кинематической неопределимости (СКН) называется общее число неизвестных углов поворота и независимых линейных перемещений узлов конструкции. Для плоских стержневых систем СКН определяется по формуле  $СКН = n_v + n_{\text{л}}$ , где  $n_v$  - число жестких узлов;  $n_{\text{л}}$  - число независимых линейных перемещений всех узлов системы.

На рис. 2.11 показана плоская рама с неизвестными обобщенными перемещениями  $u_1, v_1, \varphi_1, u_2, v_2, \varphi_2, u_3, v_3$ , для которой  $n_v = 2$ ;  $n_{\text{л}} = 6$ . Таким образом  $СКН = 8$ , что представляет достаточно большую величину.

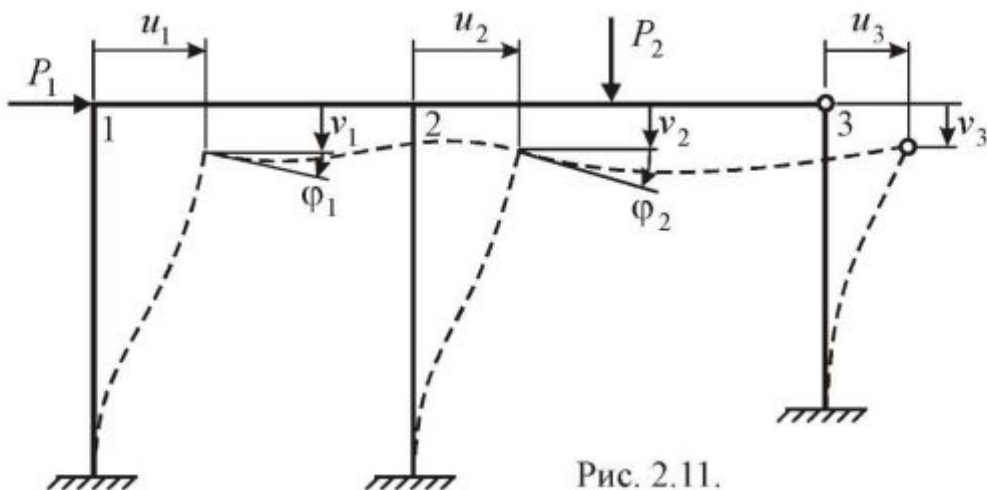


Рис. 2.11.



С целью уменьшения СКН при расчете рам в методе перемещений вводятся два допущения, несущественно влияющие на результаты расчета: 1) считается, что в продольном направлении стержни являются абсолютно жесткими ( $EF = \infty$ ); 2) считается, что проекция изогнутого стержня на его недеформированную ось равна начальной длине стержня. Первое из этих допущений уже принималось ранее при определении перемещений в рамах, а второе допущение обусловлено малостью перемещений по сравнению с размерами конструкции (принцип геометрической неизменяемости системы).

С учетом данных допущений для рассмотренной рамы имеем:  $v_1 = v_2 = v_3 = 0$ ;  $u_1 = u_2 = u_3 = u$ . Таким образом  $n_{II} = 1$ , а СКН=3, что существенно меньше по сравнению с начальным результатом.

### ОСНОВНАЯ СИСТЕМА МЕТОДА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Основная система (ОС) метода перемещений получается из заданной системы путем введения в нее дополнительных связей: в жестких узлах вводятся заделки, препятствующие повороту данных узлов; кроме того, вводятся опорные стержни, препятствующие независимым линейным перемещениям узлов. Число заделок равно  $n_y$ , число дополнительных опорных стержней равно  $n_{II}$ . По направлениям дополнительных связей указываются неизвестные обобщенные перемещения узлов, которые далее будут обозначаться как  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  ( $n = СКН$ ). В отличие от метода сил, в методе перемещений из заданной системы можно получить только одну ОС. На рис. 2.12 приведены примеры получения ОС метода перемещений.

### КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ МЕТОДА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Неизвестные перемещения  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  определяются из условий отсутствия реакций дополнительных связей в ОС, возникающих совместно от этих перемещений и заданной нагрузки. Эти условия записываются в виде канонических уравнений метода перемещений. Рассмотрим получение данных уравнений на примере системы, имеющей  $СКН = 2$  (рис. 2.13).

На рис. 2.14а показана ОС с неизвестными перемещениями  $Z_1, Z_2$  и заданной нагрузкой. Заданная система, как и прежде, считается линейно-деформируемой. Тогда исходное состояние ОС можно разложить на три независимых состояния: состояние от перемещения  $Z_1$  (рис. 2.14б); состояние от перемещения  $Z_2$  (рис. 2.14в) и состояние от нагрузки (рис. 2.14г). В каждом из этих состояний элементы ОС определенным образом деформируются и поэтому в узлах, где введены дополнительные связи, возникают реакции данных связей: от перемещения  $Z_1$  - реакции  $R_{1Z_1}, R_{2Z_1}$ ; от перемещения  $Z_2$  - реакции  $R_{1Z_2}, R_{2Z_2}$  и от нагрузки - реакции  $R_{1P}, R_{2P}$ . Положительные направления отмеченных реакций совпадают с направлениями соответствующих неизвестных перемещений  $Z_1, Z_2$ .

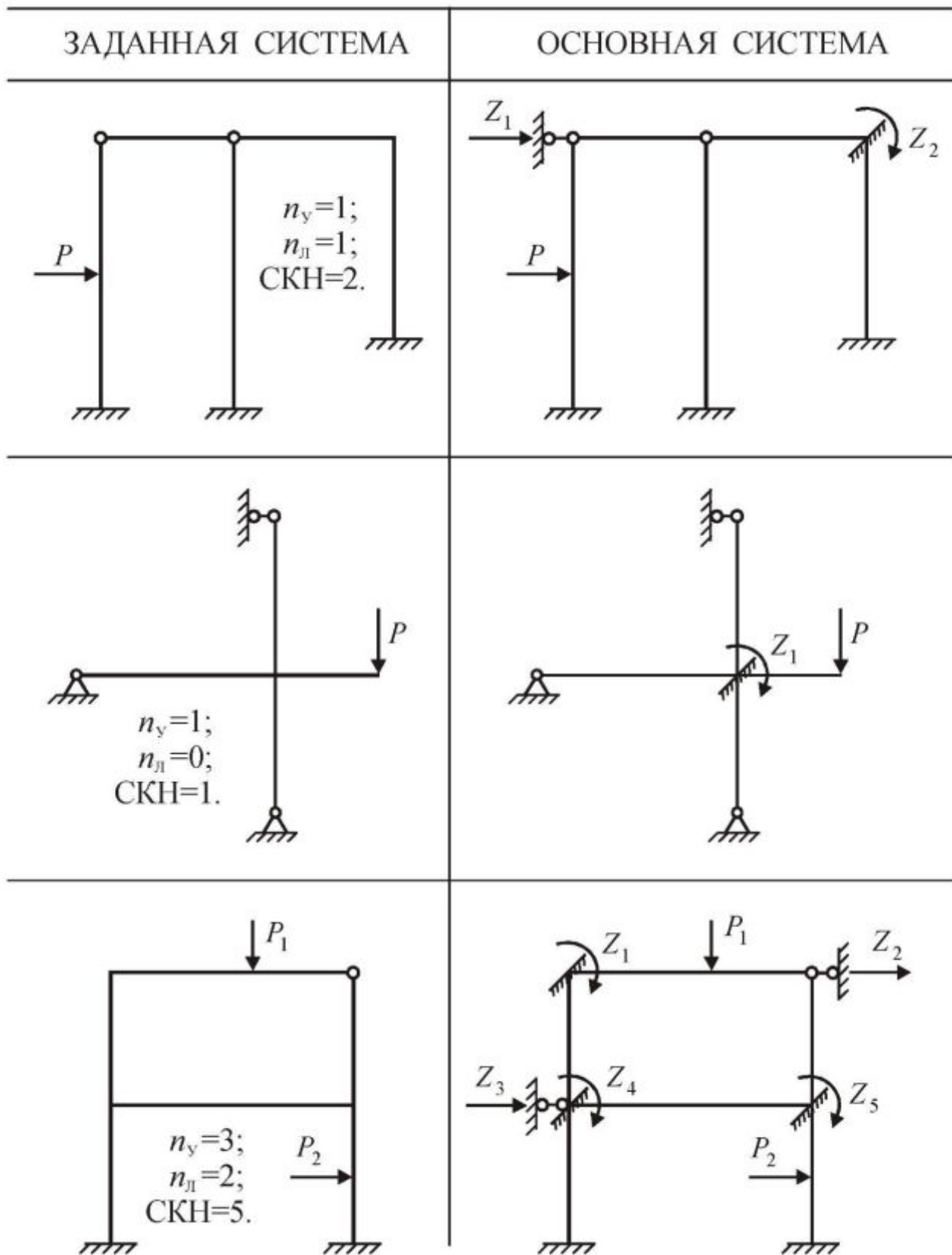


Рис. 2.12.

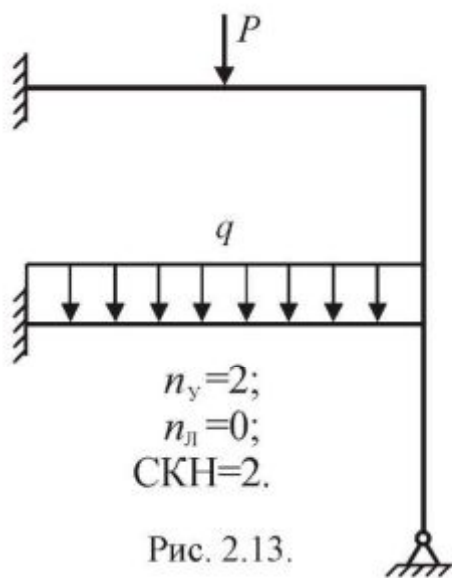


Рис. 2.13.

Чтобы ОС была эквивалентной заданной системе, алгебраическая сумма реакций дополнительных связей в направлении каждого неизвестного перемещения должна быть равна нулю (в заданной системе дополнительные связи отсутствуют):

$$R_{1Z_1} + R_{1Z_2} + R_{1P} = 0; \quad R_{2Z_1} + R_{2Z_2} + R_{2P} = 0.$$

В линейно-деформируемой системе реакции дополнительных связей от перемещений  $Z_1$   $Z_2$  прямо пропорциональны этим перемещениям:  $R_{1Z_1} = k_{11}Z_1$ ;  $R_{1Z_2} = k_{12}Z_2$ ;  $R_{2Z_1} = k_{21}Z_1$ ;

$R_{2Z_2} = k_{22}Z_2$ . Каждый коэффициент пропорциональности  $k_{ij}$  ( $i, j = 1; 2$ ) есть реакция

дополнительной связи в направлении перемещения  $Z_i$  от перемещения  $Z_j = 1$ . Поэтому коэффициенты  $k_{ij}$  называются коэффициентами жесткости.

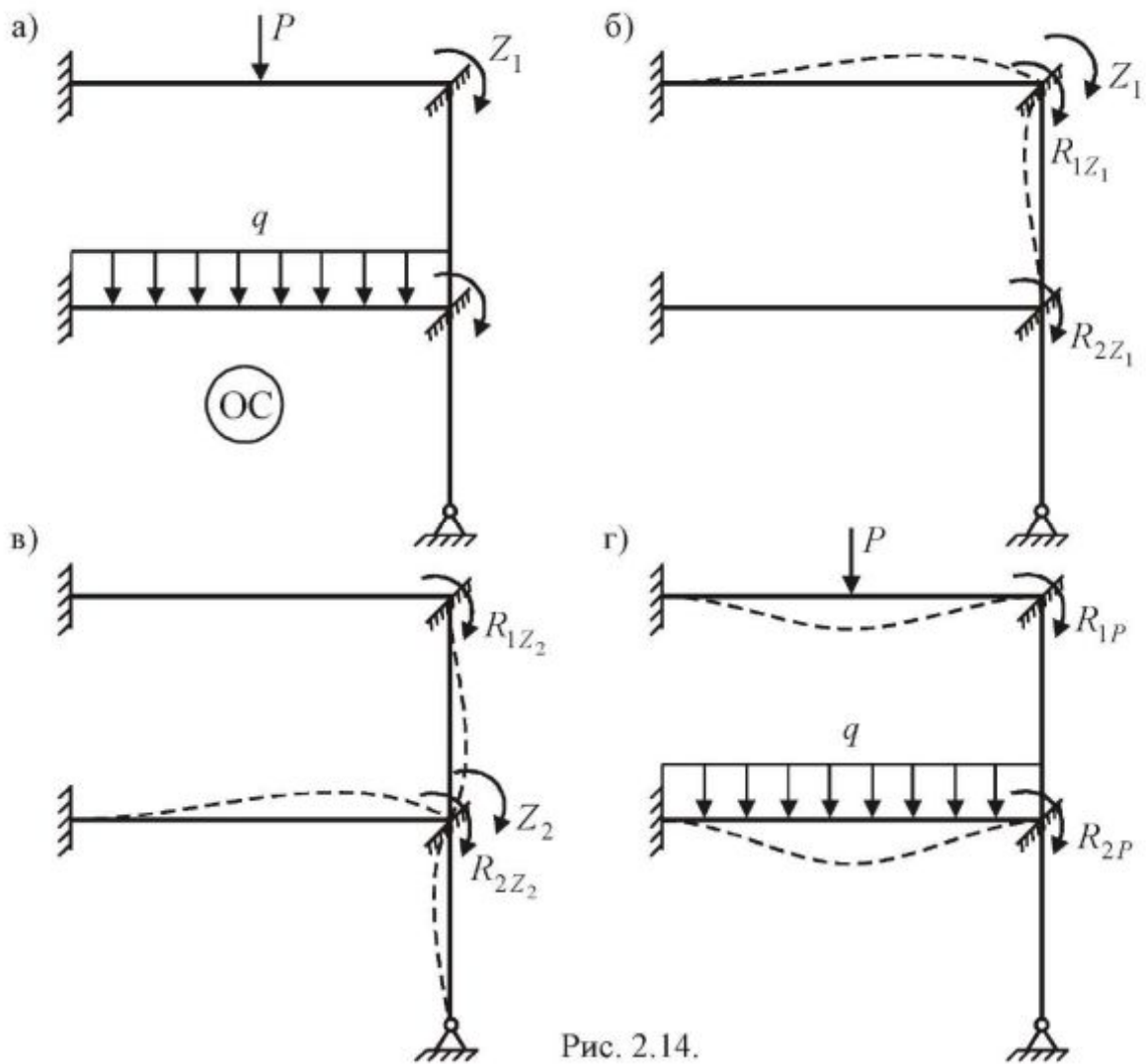


Рис. 2.14.

Подставляя последние соотношения в предыдущие равенства, получаем канонические уравнения для случая  $СКН = 2$ :

$$k_{11}Z_1 + k_{12}Z_2 + R_{1P} = 0;$$

$$k_{21}Z_1 + k_{22}Z_2 + R_{2P} = 0.$$

Данные уравнения можно обобщить на случай  $СКН = n$ :

$$k_{11}Z_1 + k_{12}Z_2 + \dots + k_{1n}Z_n + R_{1P} = 0;$$

$$k_{21}Z_1 + k_{22}Z_2 + \dots + k_{2n}Z_n + R_{2P} = 0;$$

.....

$$k_{n1}Z_1 + k_{n2}Z_2 + \dots + k_{nn}Z_n + R_{nP} = 0$$

или в матричной форме:

$$[k]\{Z\} + \{R_P\} = \{0\}.$$

Здесь

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix}; \quad \{Z\} = \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \dots \\ Z_n \end{Bmatrix}; \quad \{R_P\} = \begin{Bmatrix} R_{1P} \\ R_{2P} \\ \dots \\ R_{nP} \end{Bmatrix}$$

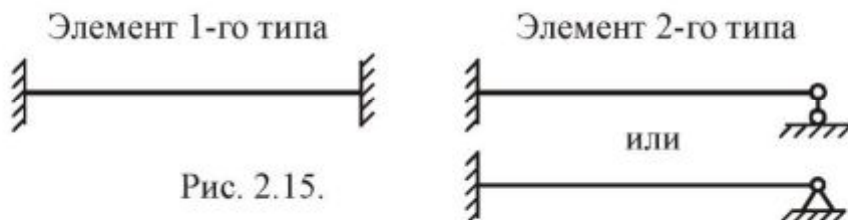
представляют соответственно матрицу жесткости, вектор неизвестных перемещений и вектор свободных членов канонических уравнений.

Свойства матрицы жесткости. Матрица  $[k]$  всегда является симметричной ( $k_{ij} = k_{ji}$ ) и положительно определенной ( $k_{ii} > 0$ ).

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРИ НЕИЗВЕСТНЫХ И СВОБОДНЫХ ЧЛЕНОВ КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Коэффициенты при неизвестных (коэффициенты жесткости)  $k_{ij}$  и свободные члены  $R_{iP}$  канонических уравнений по физическому смыслу представляют реакции дополнительных связей в ОС в направлениях неизвестных перемещений  $Z_i$ . Поэтому их можно определить из равновесия узлов или частей ОС, содержащих дополнительные связи. С этой целью в ОС строятся эпюры  $M_i$  от перемещений  $Z_i = 1$  и эпюра  $M_P$  от нагрузки.

Дополнительные связи делят ОС на типовые элементы - однопролетные статически неопределимые балки. При расчете плоских рам встречаются элементы двух типов (рис. 2.15).



Эпюры изгибающих моментов от единичных перемещений и нагрузки в указанных типовых элементах берутся из справочных данных (см. таблицу 2.1). Направления реакций в справочных данных указаны действительными.

Пример определения  $k_{ij}$  и  $R_{iP}$  для плоской рамы (рис. 2.16а).

$$q = 5 \text{ кН/м}; \quad P = 16 \text{ кН.}$$

В заданной раме  $n_y = 1; n_{\pi} = 1$ . Отсюда  $СКН = 2$ . Основная система (рис. 2.16б) содержит два неизвестных перемещения, определяемые из канонических уравнений

$$k_{11}Z_1 + k_{12}Z_2 + R_{1P} = 0; \quad k_{21}Z_1 + k_{22}Z_2 + R_{2P} = 0.$$



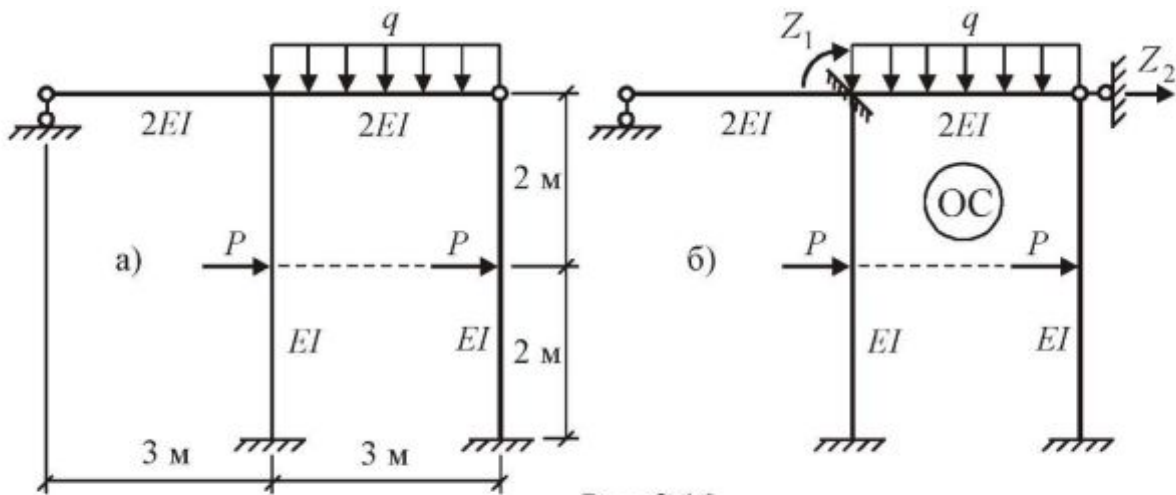


Рис. 2.16.

Для определения коэффициентов при неизвестных  $k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22}$  и свободных членов  $R_{1P}, R_{2P}$  этих уравнений строим в ОС эпюры  $M_1, M_2, M_P$  (рис. 2.17а, 2.17б, 2.17в) соответственно от перемещений  $Z_1 = 1, Z_2 = 1$  и заданной нагрузки с использованием справочных данных, приведенных в таблице 2.1. Коэффициенты жесткости  $k_{11}, k_{12}$  и реакция  $R_{1P}$  определяются согласно их физическому смыслу из равновесия моментов в узле, содержащем первую дополнительную связь (рис. 2.18). Для определения  $k_{21}, k_{22}$  и  $R_{2P}$  рассматривается равновесие сил в части ОС, содержащей вторую дополнительную связь (рис. 2.18). Необходимые для этого поперечные силы в поперечных сечениях стоек проще всего определять как производные от изгибающих моментов. Направления этих сил можно определить по правилу: если в каком-либо сечении ось стержня стремится поворачиваться при совмещении с касательной к эпюре моментов по часовой стрелке, то в этом сечении  $Q > 0$ . Если поперечная сила в сечении стержня определяется от действия нагрузки на данном стержне, то она направляется по этой нагрузке.

По рис. 2.18 получаем:  $k_{11} = 5EI; k_{12} = -0,375EI; R_{1P} = 8 - 5,625 = 2,375;$   
 $k_{21} = -0,375EI = k_{12}; k_{22} = (0,1875 + 0,046875)EI = 0,234375EI; R_{2P} = -13.$



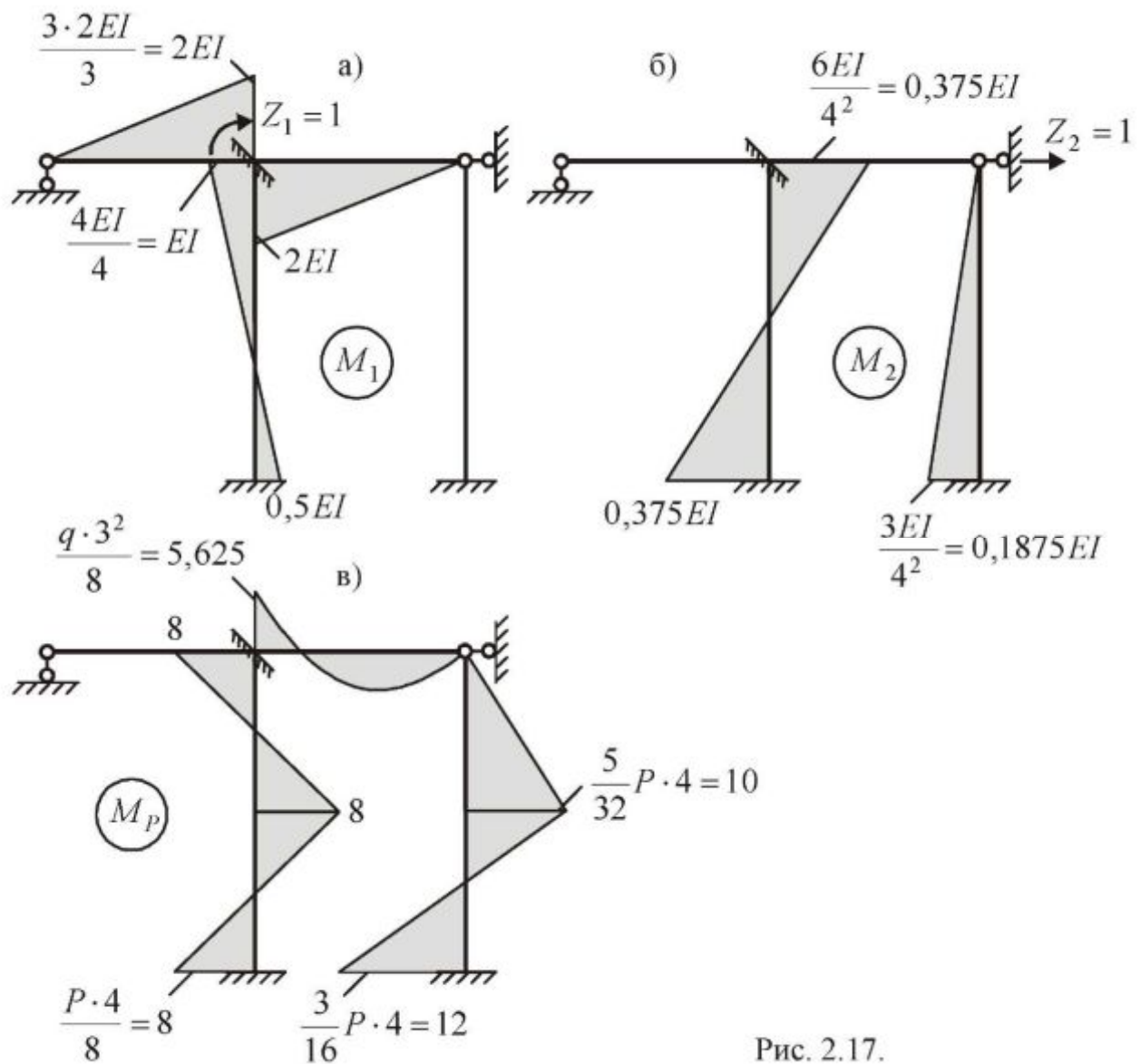


Рис. 2.17.

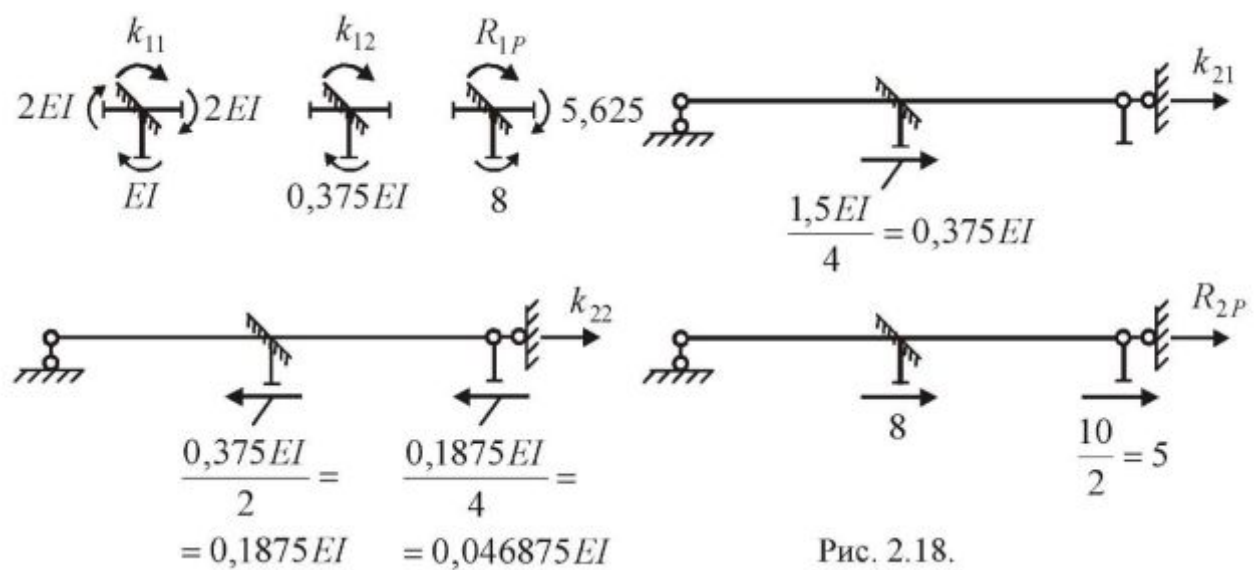
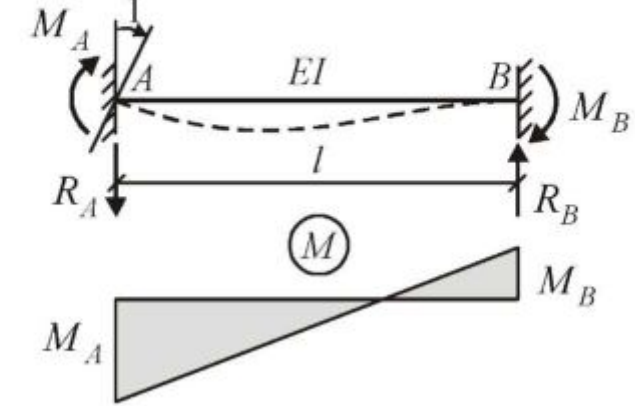
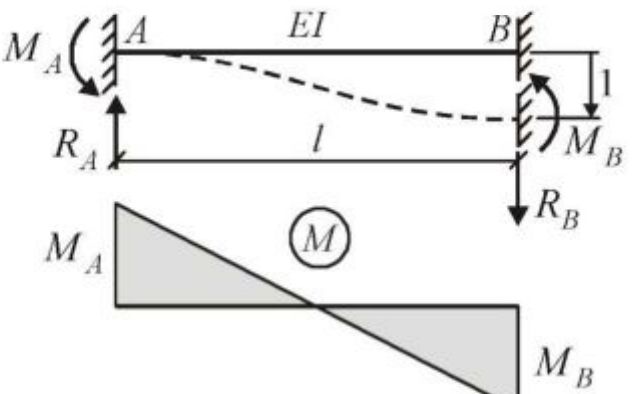
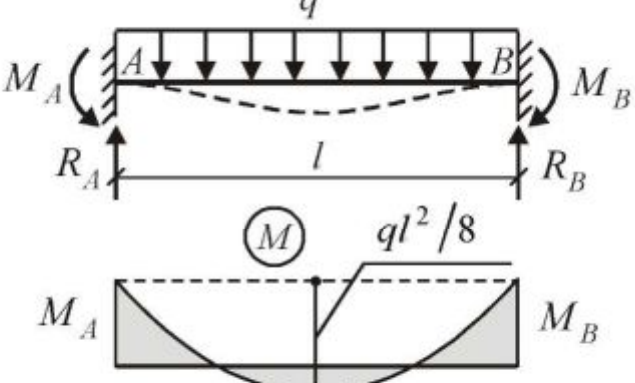
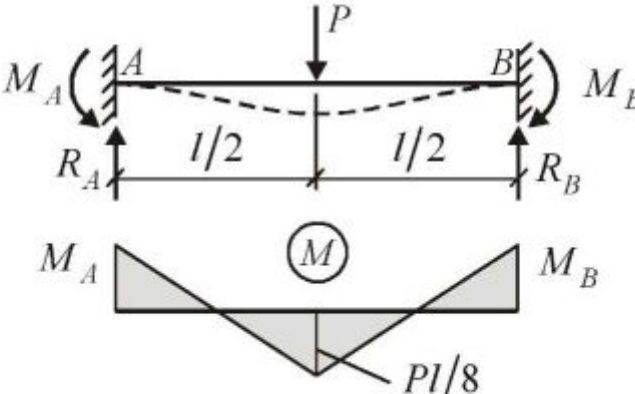
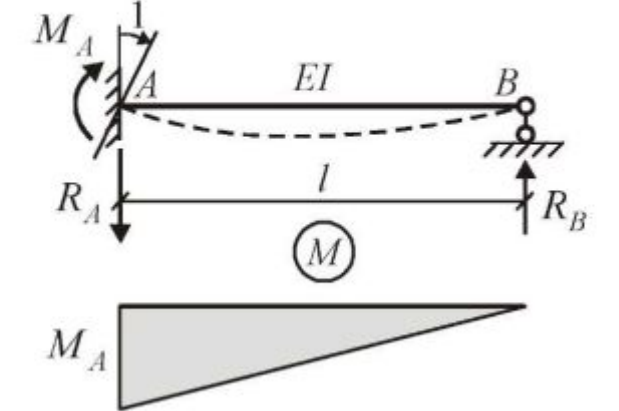
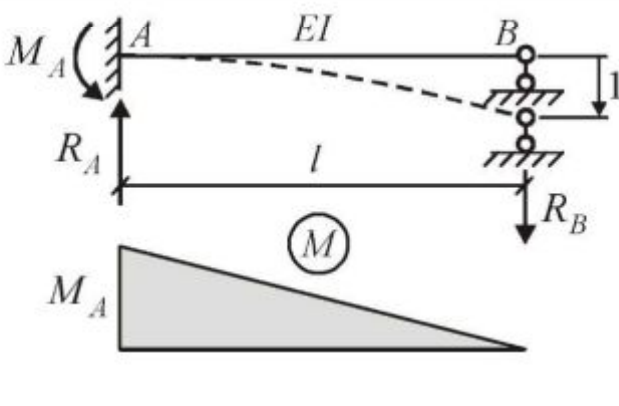
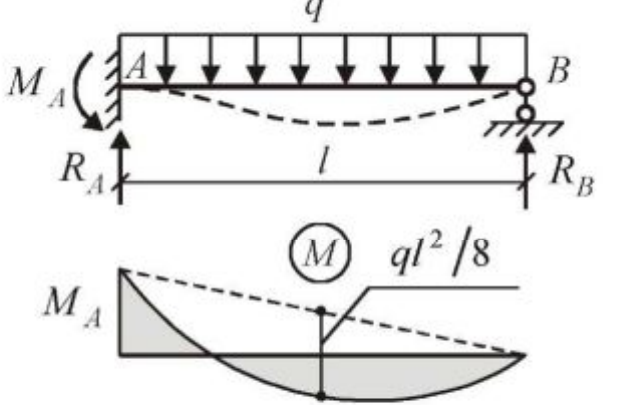
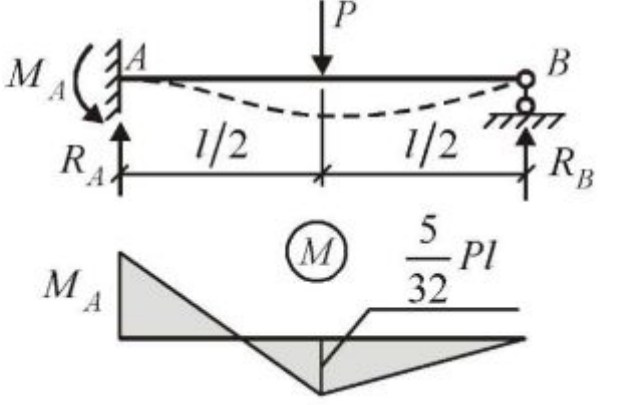


Рис. 2.18.

Таблица 2.1. Справочные данные для типовых элементов.

№ п.п.	Типовой элемент и эпюра изгибающих моментов	Реакции
1		$M_A = \frac{4EI}{l}; \quad M_B = \frac{2EI}{l};$ $R_A = R_B = \frac{6EI}{l^2}.$
2		$M_A = M_B = \frac{6EI}{l^2};$ $R_A = R_B = \frac{12EI}{l^3}.$
3		$M_A = M_B = \frac{ql^2}{8};$ $R_A = R_B = \frac{ql}{2}.$
4		$M_A = M_B = \frac{Pl}{8};$ $R_A = R_B = \frac{P}{2}.$

Продолжение таблицы 2.1.

№ п.п.	Типовой элемент и эпюра изгибающих моментов	Реакции
5		$M_A = \frac{3EI}{l};$ $R_A = R_B = \frac{3EI}{l^2}.$
6		$M_A = \frac{3EI}{l^2};$ $R_A = R_B = \frac{3EI}{l^3}.$
7		$M_A = \frac{ql^2}{8};$ $R_A = \frac{5}{8}ql; \quad R_B = \frac{3}{8}ql.$
8		$M_A = \frac{3}{16}Pl;$ $R_A = \frac{11}{16}P; \quad R_B = \frac{5}{16}P.$

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ВНУТРЕННИХ СИЛ В ЗАДАННОЙ СИСТЕМЕ

После определения из канонических уравнений перемещений  $z_1, z_2, \dots, z_n$  сначала строится эпюра  $M$ . Для этого используется известный принцип суперпозиции:  $M = M_1 z_1 + M_2 z_2 + \dots + M_n z_n + M_P$ . Поперечные силы  $Q$  можно

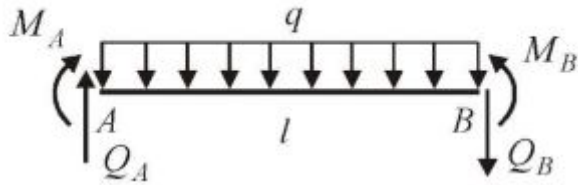


Рис. 2.19.

определить из равновесия участков конструкции. Рассмотрим один такой участок, на котором действует постоянная распределенная нагрузка  $q$  (рис. 2.19). Направление  $q$  вниз считается положительным.

Изгибающие моменты

$M_A, M_B$  по краям участка находятся по эпюре  $M$  (рис. 2.19 эти моменты и изображены в положительных направлениях). Так как  $q = const$ , то достаточно определить значения  $Q$  по краям участка, составляя для этого два уравнения равновесия:

$$\sum M_B = -M_A - Q_A l + \frac{ql^2}{2} + M_B = 0; \quad \sum M_A = -M_A - \frac{ql^2}{2} - Q_B l + M_B = 0.$$

Из этих уравнений получаем поперечные силы  $Q_A, Q_B$  (на рис. 2.19 направления этих сил являются положительными):

$$Q_A = \frac{M_B - M_A}{l} + \frac{ql}{2}; \quad Q_B = \frac{M_B - M_A}{l} - \frac{ql}{2}.$$

Моменты  $M_A, M_B$  следует подставлять в эти формулы с учетом их знаков. При  $q = 0$  формулы для  $Q_A, Q_B$  дают на участке  $AB$   $Q = const$ . Данные формулы справедливы и для вертикальных участков, если рис. 2.19 повернуть на  $90^\circ$  против хода часовой стрелки.

Продольные силы  $N$  в стержнях определяются по известным поперечным силам  $Q$  из равновесия узлов конструкции. Правильность построения эпюр  $M, Q, N$  проверяется составлением уравнений равновесия для всей конструкции. Необходимые для этого реакции опор и их действительные направления можно определить непосредственно по эпюрам  $M, Q, N$ .

Пример расчета статически неопределимой рамы (рис.2.20) методом перемещений.

Дано:  $q = 12 \text{ кН/м}$ ;  $P = 20 \text{ кН}$ . Построить эпюры  $M, Q, N$ .

1. *Определение СКН и получение ОС*

В заданной раме  $n_y = 1$ ;  $n_{\text{л}} = 0$ . Отсюда  $СКН = 1$ . Основная система (рис. 2.21) получается из заданной путем введения одной дополнительной связи - заделки в жестком узле конструкции. Неизвестное обобщенное перемещение (угол поворота данного узла)  $Z_1$  определяется из канонического уравнения

$$k_{11}Z_1 + R_{1P} = 0.$$

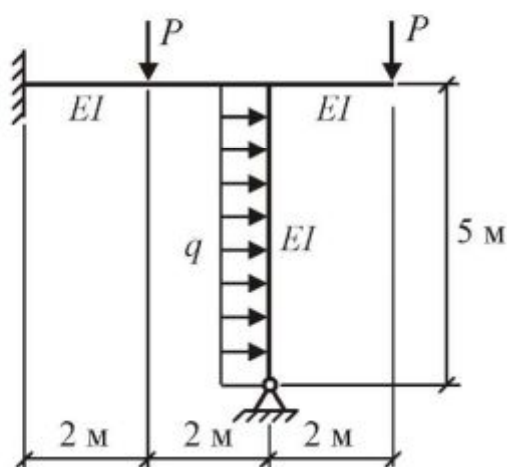


Рис. 2.20.

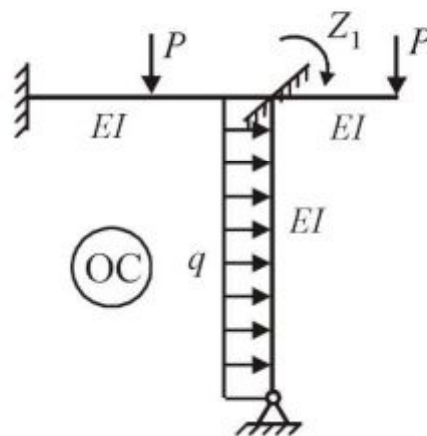


Рис. 2.21.

2. *Построение эпюр  $M_1, M_P$  в ОС*

Эпюры  $M_1$  и  $M_P$  (рис. 2.22, рис. 2.23) строятся в ОС соответственно от перемещения  $Z_1 = 1$  и нагрузки по справочным данным для типовых элементов метода перемещений (табл. 2.1).



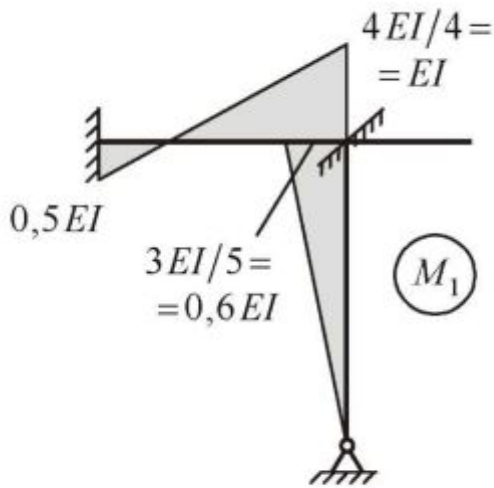


Рис. 2.22.

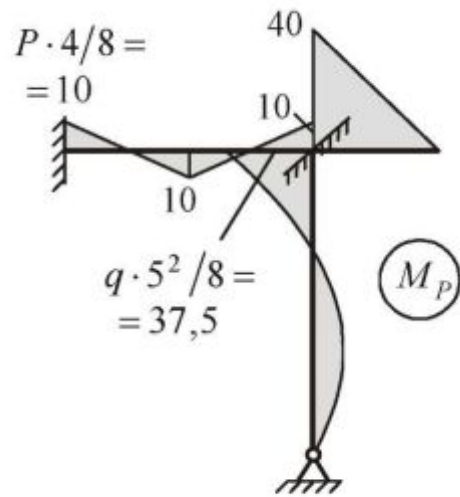


Рис. 2.23.

### 3. Определение $k_{11}$ , $R_{1P}$ и перемещения $Z_1$

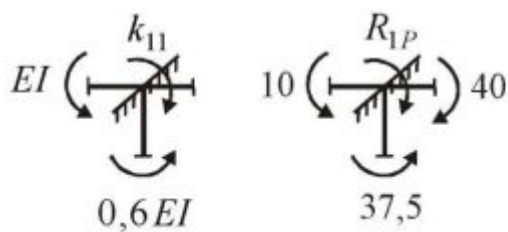


Рис. 2.24.

Коэффициент  $k_{11}$  и свободный член  $R_{1P}$  канонического уравнения представляют реакции дополнительной связи в направлении  $Z_1$  соответственно от перемещения  $Z_1 = 1$  и заданной нагрузки. Поэтому их можно определить из равновесия внешних и внутренних моментов в узле ОС, содержащем дополнительную связь

(рис. 2.24):  $k_{11} = EI + 0,6EI = 1,6EI$ ;  $R_{1P} = 10 + 37,5 - 40 = 7,5$ . Перемещение  $Z_1$  определяется из канонического уравнения:  $Z_1 = -R_{1P}/k_{11} = -4,688/EI$ .

#### 4. Построение эюр $M, Q, N$ в заданной системе

Эюра  $M$  (рис. 2.25а) строится по принципу суперпозиции:  
 $M = M_1 Z_1 + M_P$ .

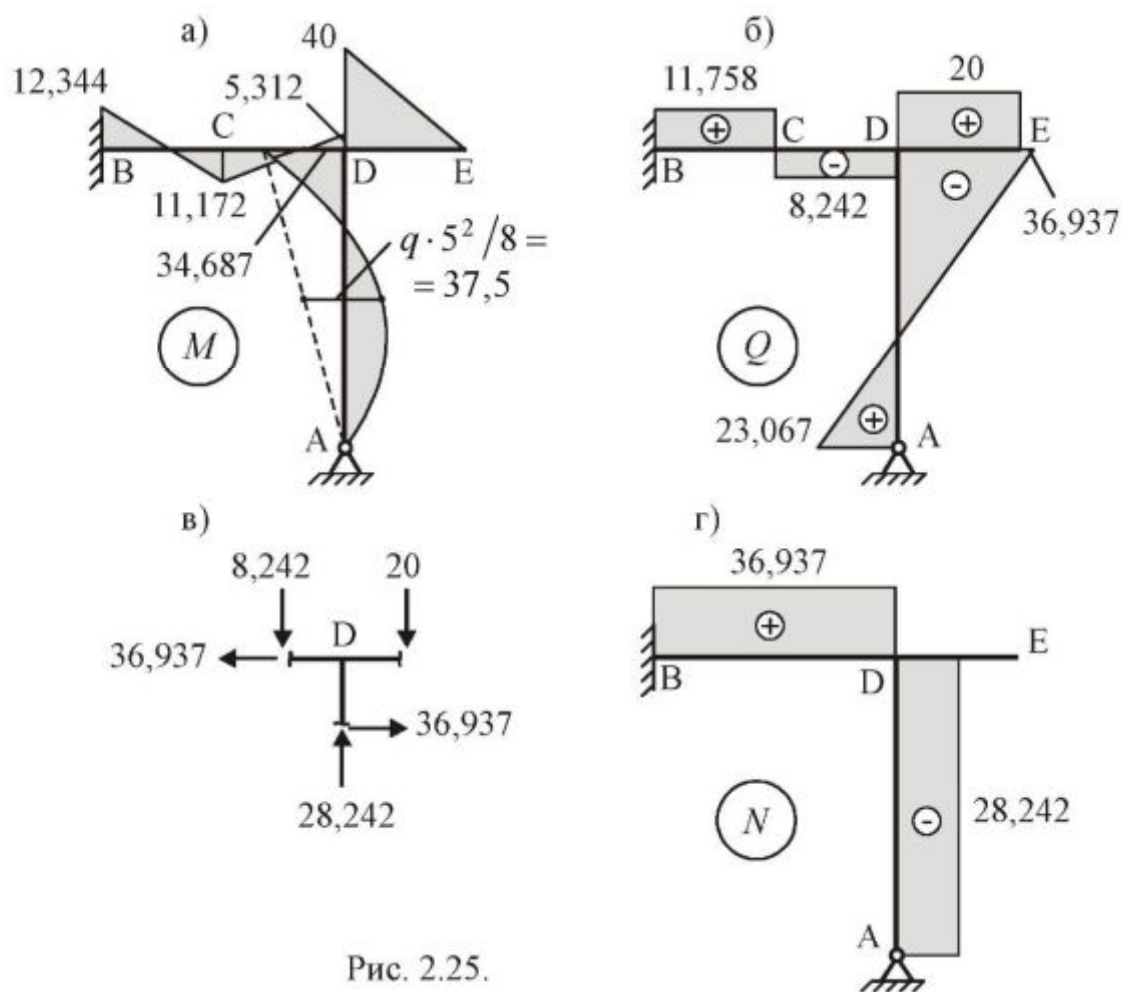


Рис. 2.25.

Поперечные силы на участках конструкции определяются по известным изгибающим моментам с использованием полученных выше формул:

$$\text{Участок BC: } Q = \frac{M_C - M_B}{2} = \frac{11,172 - (-12,344)}{2} = 11,758 \text{ кН.}$$

$$\text{Участок CD: } Q = \frac{M_B - M_C}{2} = \frac{-5,312 - 11,172}{2} = -8,242 \text{ кН.}$$

$$\text{Участок DE: } Q = \frac{M_E - M_D}{2} = \frac{0 - (-40)}{2} = 20 \text{ кН.}$$

$$\text{Участок AD: } Q_A = \frac{M_D - M_A}{5} + \frac{q \cdot 5}{2} = \frac{-34,687 - 0}{5} + \frac{12 \cdot 5}{2} = 23,063 \text{ кН;}$$

$$Q_D = \frac{M_D - M_A}{5} - \frac{q \cdot 5}{2} = \frac{-34,687 - 0}{5} - \frac{12 \cdot 5}{2} = -36,937 \text{ кН.}$$

По полученным результатам строится эпюра  $Q$  (рис. 25б). Продольные

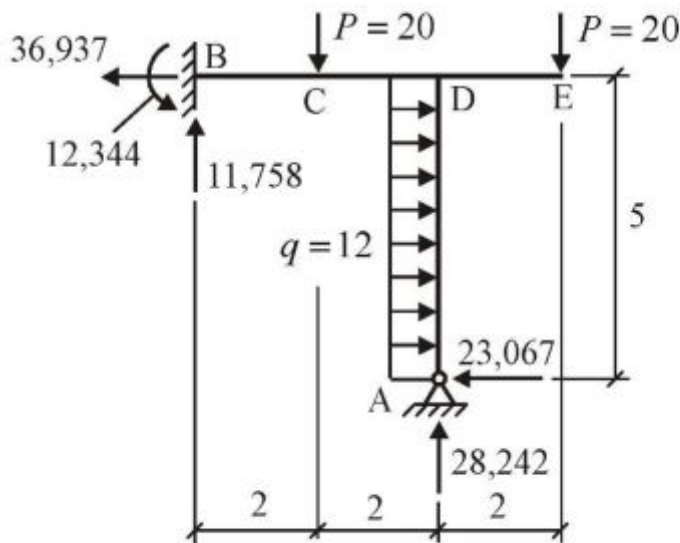


Рис. 2.26.

силы  $N$  в стержнях определяются по известным поперечным силам  $Q$  из равновесия узла D рамы (рис. 25в). Направления  $Q$  и  $N$  в сечениях вокруг узла берутся действительными. Эпюра  $N$  показана на рис. 25г. Правильность расчета проверяется с помощью уравнений равновесия для всей конструкции (рис. 2.26). Необходимые для этого реакции опор и их действительные направления определяются непосредственно по эпюрам  $M, Q, N$ .

$$\sum X = 12 \cdot 5 - 36,937 - 23,067 = 0; \quad \sum Y = 28,242 + 11,758 - 20 - 20 = 0;$$

$$\begin{aligned} \sum M_A = & -12 \cdot 5 \cdot 2,5 - 20 \cdot 2 + 20 \cdot 2 - 11,758 \cdot 4 + \\ & + 36,937 \cdot 5 + 12,344 = -0,003 \approx 0. \end{aligned}$$

### 2.3. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ СМЕШАННЫМ МЕТОДОМ

В смешанном методе неизвестными параметрами являются силы и перемещения. Основная система (ОС) смешанного метода получается из заданной системы путем отбрасывания связей в одной ее части и введения дополнительных связей в другой части. Отброшенные связи заменяются неизвестными силами  $X_i$ , в направлениях дополнительных связей указываются неизвестные перемещения  $Z_j$ . Канонические уравнения смешанного метода строятся исходя из их физического смысла: отсутствия перемещений в ОС в направлениях неизвестных сил  $X_i$  и отсутствия реакций дополнительных связей в направлениях неизвестных перемещений  $Z_j$ .

Пример расчета статически неопределимой рамы (рис.2.27) смешанным методом.

Дано:  $q = 12 \text{ кН/м}$ ;  $P = 20 \text{ кН}$ . Построить эпюры  $M, Q, N$ .

1. Выбор ОС

Минимальное количество неизвестных параметров (сил и перемещений) при выборе ОС получается путем отбрасывания опорного стержня и замены его неизвестной силой  $X_1$ , и введения дополнительной связи (заделки), по направлению которой определяется обобщенное перемещение (угол поворота узла)  $Z_2$  (рис. 2.28). Неизвестные  $X_1$  и  $Z_2$  определяются из канонических уравнений

$$\delta_{11}X_1 + \delta'_{12}Z_2 + \Delta_{1P} = 0; \quad k'_{21}X_1 + k_{22}Z_2 + R_{2P} = 0.$$

Штрихами в канонических уравнениях обозначены смешанные коэффициенты, связанные между собою равенством  $\delta'_{12} = -k'_{21}$  и определяемые, исходя из их физического смысла:  $\delta'_{12}$  - перемещение в ОС в направлении силы  $X_1$  от перемещения  $Z_2 = 1$ ;  $k'_{21}$  - реакция дополнительной связи в ОС в направлении перемещения  $Z_2$  от силы  $X_1 = 1$ . Остальные коэффициенты и свободные члены уравнений имеют тот же смысл, что в методе сил (первое уравнение) и в методе перемещений (второе уравнение).

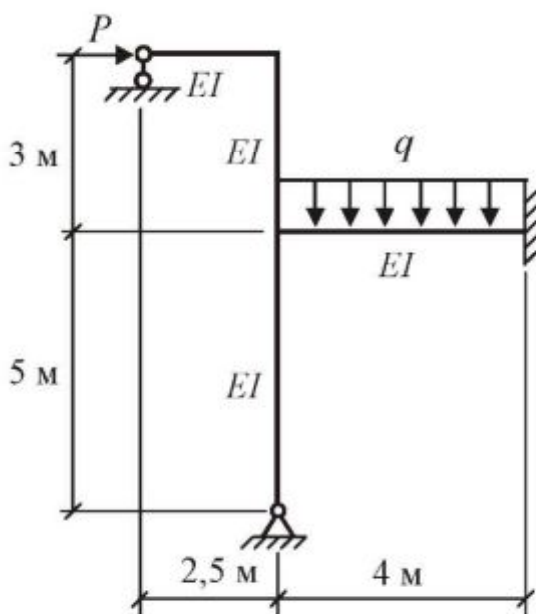


Рис. 2.27.

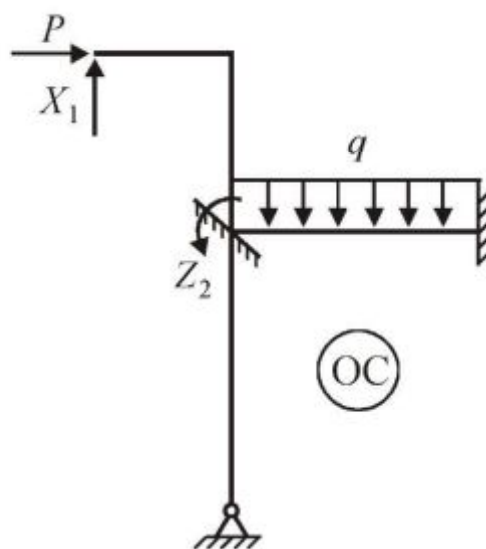


Рис. 2.28.



## 2. Построение эюр $M_1, M_2, M_P$ в ОС

Эюры  $M_1, M_2, M_P$  (рис. 2.29) строятся в ОС соответственно от силы  $X_1=1$ , перемещения  $Z_2=1$  и нагрузки. Последние две эюры строятся по справочным данным для типовых элементов метода перемещений (табл. 2.1).

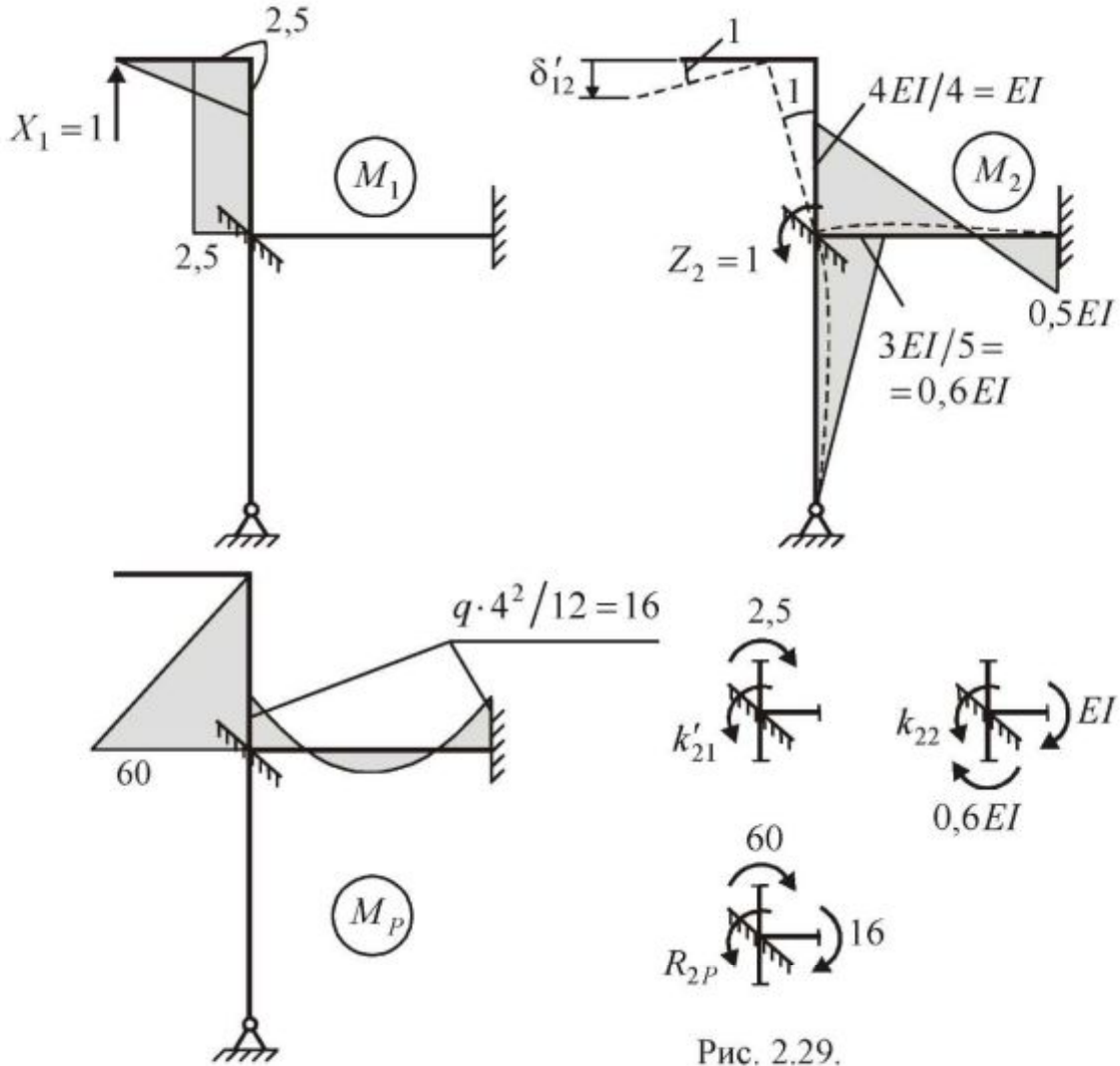


Рис. 2.29.

## 3. Определение коэффициентов при неизвестных и свободных членах канонических уравнений

Значения  $\delta_{11}, \Delta_{1P}$  определяются по формуле Мора. Интегралы Мора на каждом участке находятся по справочным формулам перемножения эюр или по правилу Верещагина.

$$\delta_{11} = \sum \int_0^l \frac{M_1 M_1}{EI} ds = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{3} \cdot 2,5 \cdot 2,5 \cdot 2,5 + 2,5 \cdot 3 \cdot 2,5 \right) = \frac{23,958}{EI};$$

$$\Delta_{1P} = \sum \int_0^l \frac{M_1 M_P}{EI} ds = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 3 \cdot 2,5 = \frac{225}{EI}.$$



Коэффициент  $\delta'_{12}$  находится из геометрических соображений (см. эпюру  $M_2$ ):  $\delta'_{12} = -1 \cdot 2,5 = -2,5$ . Значения  $k'_{21}$ ,  $k_{22}$ ,  $R_{2P}$  находятся из равновесия внешних и внутренних моментов в узле, содержащем дополнительную связь (рис.2.29):  $k'_{21} = 2,5$ ;  $k_{22} = 1,6EI$ ;  $R_{2P} = 76$ .

Подставляя найденные значения в канонические уравнения и решая последние, получаем:  $X_1 = -12,337$ ;  $Z_2 = -28,224/EI$ .

#### 4. Построение эпюр $M$ , $Q$ , $N$ в заданной системе

Эпюра  $M$  (рис. 2.30) строится по принципу суперпозиции:  $M = M_1X_1 + M_2Z_2 + M_P$  (эпюры  $M_1X_1$ ,  $M_2Z_2$  строятся отдельно).

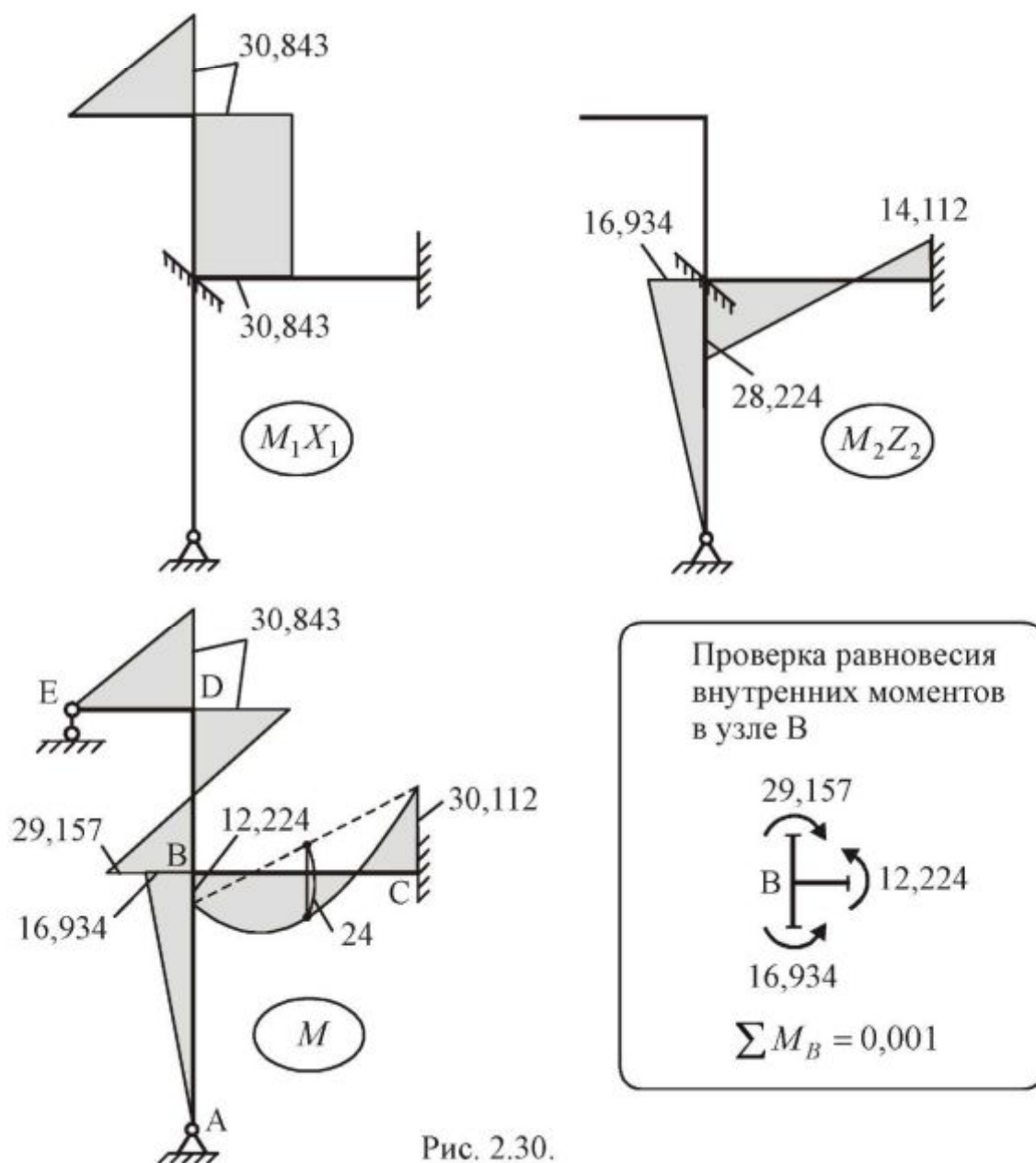


Рис. 2.30.

Находим поперечные силы на участках конструкции.

$$\text{Участок AB: } Q = \frac{M_B - M_A}{5} = \frac{-16,934 - 0}{5} = -3,387 \text{ кН.}$$

$$\text{Участок BD: } Q = \frac{M_D - M_B}{3} = \frac{30,843 - (-29,157)}{3} = 20,0 \text{ кН.}$$

$$\text{Участок ED: } Q = \frac{M_D - M_E}{2,5} = \frac{-30,843 - 0}{2,5} = -12,337 \text{ кН.}$$

Участок BC:

$$Q_B = \frac{M_C - M_B}{4} + \frac{q \cdot 4}{2} = \frac{-30,112 - 12,224}{4} + \frac{12 \cdot 4}{2} = 13,416 \text{ кН;}$$

$$Q_C = \frac{M_C - M_B}{4} - \frac{q \cdot 4}{2} = \frac{-30,112 - 12,224}{4} - \frac{12 \cdot 4}{2} = -34,584 \text{ кН.}$$

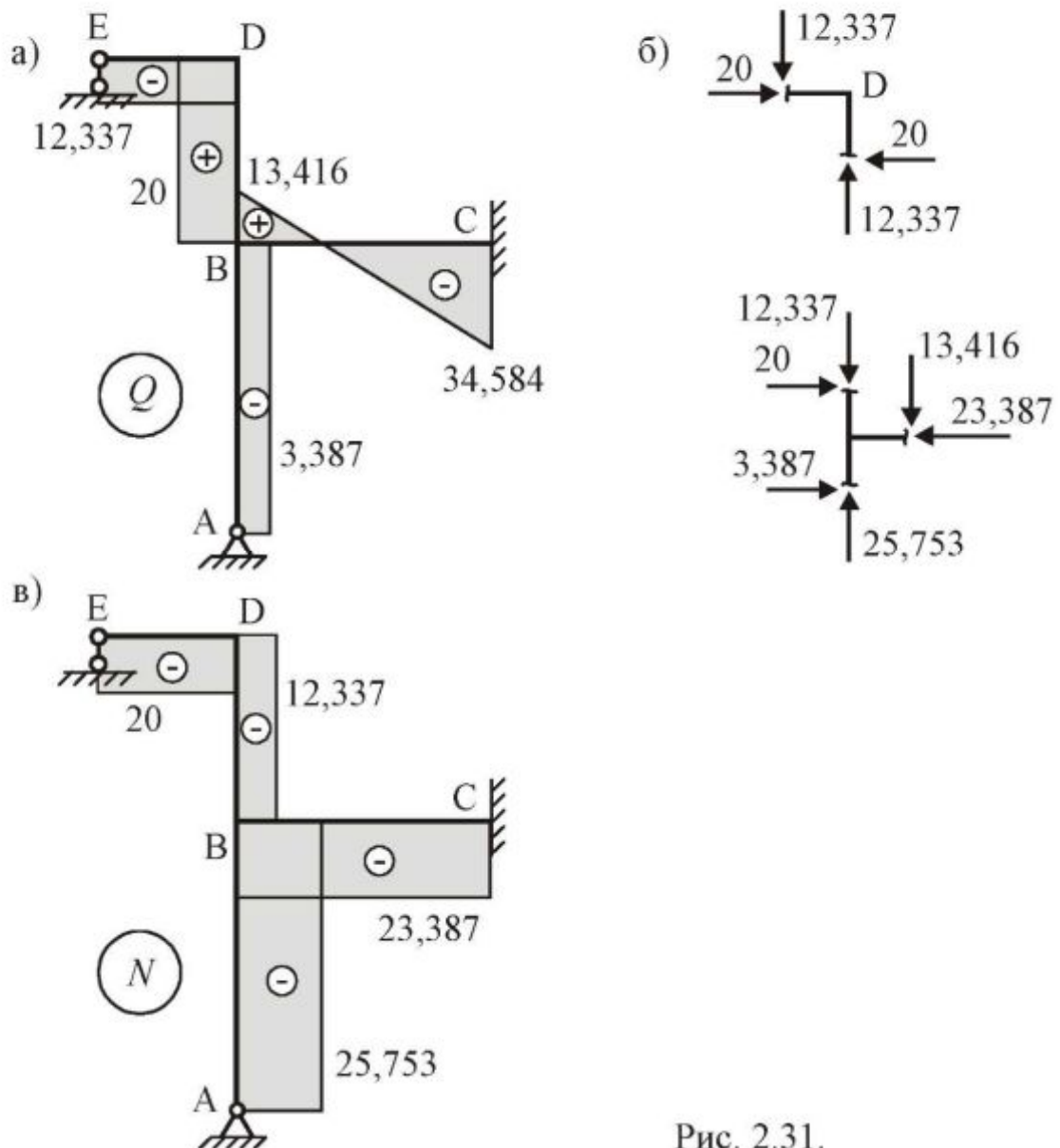


Рис. 2.31.

По полученным результатам строим эпюру  $Q$  (рис. 2.31а). Продольные силы  $N$  (и их действительные направления) определяются из равновесия узлов конструкции (рис. 2.31б). Направления данных сил к узлам конструкции означает сжатие соответствующих участков конструкции. Эпюра  $N$  показана на рис. 2.31в.

## Часть 3. РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ

### 3.1. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ПРОЧНОСТИ КОНСТРУКЦИЙ

В настоящее время в строительстве используются два основных метода оценки прочности конструкций:

а) По допускаемым напряжениям

Условие прочности конструкции в этом методе имеет вид

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma].$$

Здесь  $\sigma_{\max}$  - максимальное нормальное напряжение (при одноосном напряженном состоянии), если напряженное состояние конструкции является сложным, то вместо напряжения  $\sigma_{\max}$  берется максимальное эквивалентное напряжение, определяемое по какой-либо теории прочности;  $[\sigma]$  - допускаемое напряжение, определяемое по формуле

$$[\sigma] = \sigma_{\text{оп}} / n,$$

где  $\sigma_{\text{оп}}$  - опасное напряжение: для хрупких материалов (кирпич, бетон, чугун, высокоуглеродистые стали)  $\sigma_{\text{оп}} = \sigma_{\text{в}}$  ( $\sigma_{\text{в}}$  - предел прочности материала); для пластичных материалов (малоуглеродистая сталь, цветные металлы и некоторые их сплавы)  $\sigma_{\text{оп}} = \sigma_{\text{т}}$  ( $\sigma_{\text{т}}$  - предел текучести материала);  $n$  - нормативный коэффициент запаса, регламентируемый строительными нормами и правилами.

Данный метод, как видно из представленного выше, не допускает появление в конструкции пластических деформаций (в случае пластичного материала) и ведет к неоправданному перерасходу материала. Особенно это можно отнести к расчету статически неопределимых систем, где появление пластических деформаций в каком-либо одном и даже нескольких элементах конструкции еще не означает разрушения всей конструкции, поскольку в ней имеются лишние связи.

а) По предельному равновесию

Условие прочности конструкции в этом случае имеет вид

$$P \leq P_{\text{пр}} / n,$$

где  $P$  - эксплуатационная нагрузка (в случае действия системы сил под  $P$  понимается параметр нагрузки, пропорционально которому меняются все силы системы);  $P_{\text{пр}}$  - предельная нагрузка (параметр нагрузки), при которой конструкция находится в состоянии предельного равновесия (при  $P > P_{\text{пр}}$  происходит быстрый рост перемещений - потеря несущей способности конструкции);  $n$  - нормативный коэффициент запаса, выбираемый, как и прежде.

Расчет методом предельного равновесия рекомендуется для статически неопределимых конструкций, изготовленных из пластичных материалов, в которых возможно появление пластических деформаций. Основная задача при расчете конструкций по данному методу состоит в определении предельной нагрузки  $P_{\text{пр}}$ . Однако следует заметить, что определение  $P_{\text{пр}}$  с использованием реальной диаграммы  $\sigma - \varepsilon$  представляет весьма трудоемкую и сложную задачу. Такая задача, как правило, решается методом шагового нагружения с отслеживанием  $\varepsilon$  и  $\sigma$  на каждом шаге нагружения. С целью приближенного определения

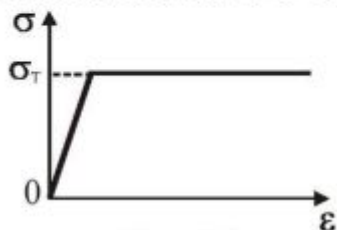


Рис. 3.1.

ределения нижней границы  $P_{\text{пр}}$  в стержневых системах, можно использовать идеальную упруго-пластическую диаграмму  $\sigma - \varepsilon$  (рис. 3.1), состоящую из двух участков: идеально упругого, на котором выполняется закон Гука, и идеально пластичного, на котором  $\sigma = \sigma_{\text{т}}$ .



### 3.2. ПРИМЕР РАСЧЕТА ПРОСТЕЙШЕЙ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ СИСТЕМЫ МЕТОДОМ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ

Рассматривается один раз статически неопределимая система - балка, подвешенная на трех стержнях (рис. 3.2). Жесткость на изгиб балки считается бесконечной ( $EI = \infty$ ). Длины стержней выражены через общую длину  $l$ :

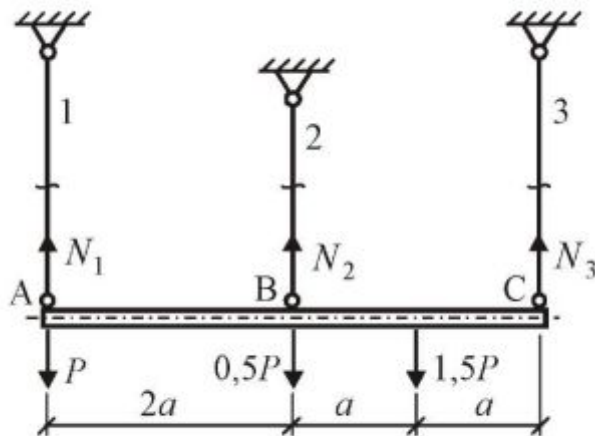


Рис. 3.2.

$l_1 = l_3 = l; l_2 = 0,8l$ . Площади поперечных сечений стержней выражаются через заданную общую площадь  $F$ :  $F_1 = F; F_2 = 1,6F; F_3 = 2F$ . Балка нагружена тремя силами, выраженными через общую силу  $P$ . От этих сил в стержнях 1, 2, 3 возникают соответственно продольные силы  $N_1, N_2, N_3$ . Диаграмма  $\sigma - \varepsilon$  материала берется согласно рис. 3.1. Требуется определить предельную нагрузку (силу)  $P_{пр}$ .

Из рисунка 3.2 видно, что предельное состояние (разрушение) системы наступает при условии  $\sigma = \sigma_T$  в каких-либо двух стержнях. С целью определения номеров этих стержней сначала определим силы  $N_1, N_2, N_3$  в стержнях при условии, что материал всех стержней работает в упругой области диаграммы  $\sigma - \varepsilon$ . Для определения этих сил можно составить два уравнения равновесия и уравнение совместности перемещений точек  $A, B$  и  $C$  (рис. 3.3):

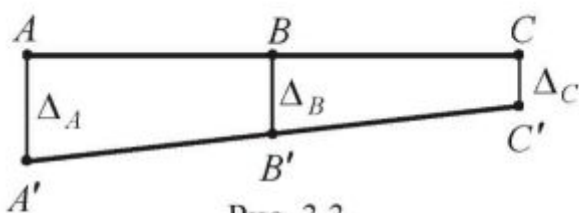


Рис. 3.3.

$$\sum Y = N_1 + N_2 + N_3 - 3P = 0;$$

$$\sum M_A = N_2 \cdot 2a + N_3 \cdot 4a - 0,5P \cdot 2a - 1,5P \cdot 3a = 0;$$

$$2\Delta_B - \Delta_A - \Delta_C = 0.$$

Перемещения  $\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C$  (удлинения стержней 1, 2, 3) по закону Гука

пропорциональны силам  $N_1, N_2, N_3$ :

$$\Delta_A = \frac{N_1 l_1}{EF_1} = \frac{N_1 l}{EF}; \Delta_B = \frac{N_2 l_2}{EF_2} = \frac{N_2 \cdot 0,8l}{1,6EF} = 0,5 \frac{N_2 l}{EF};$$

$$\Delta_C = \frac{N_3 l_3}{EF_3} = \frac{N_3 l}{2EF} = 0,5 \frac{N_3 l}{EF}.$$

С учетом данного условия получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$N_1 + N_2 + N_3 = 3P; \quad 2N_2 + 4N_3 = 5,5P; \quad -N_1 + N_2 - 0,5N_3 = 0,$$

из которой определяются силы  $N_1, N_2, N_3$ :  $N_1 = 0,964P$ ;  $N_2 = 1,321P$ ;  $N_3 = 0,714P$ . Это дает напряжения в стержнях:

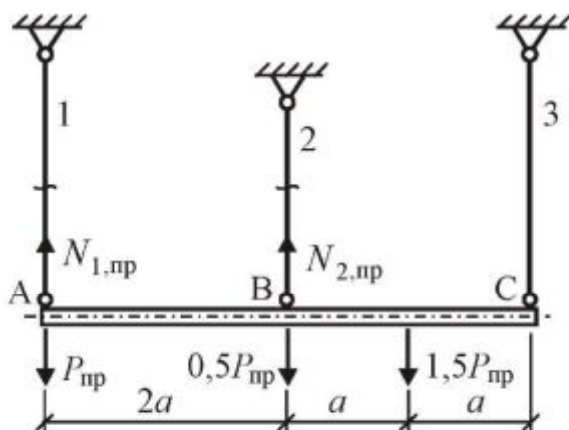


Рис. 3.4.

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{0,964P}{F};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{1,321P}{1,6F} = \frac{0,826P}{F};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{F_3} = \frac{0,714P}{2F} = \frac{0,357P}{F}.$$

Полученные результаты показывают, что при возрастании нагрузки предельное состояние  $\sigma = \sigma_T$  сначала реализуется в стержне 1, затем в стержне 2, после чего согласно приня-

той диаграмме  $\sigma - \varepsilon$  (рис. 3.1) наступает потеря несущей способности (разрушение) системы. Предельная нагрузка определяется из суммы моментов сил относительно точки С (рис. 3.4):

$$\sum M_C = P_{пр} \cdot 4a + 0,5P_{пр} \cdot 2a + 1,5P_{пр} \cdot a - N_{1,пр} \cdot 4a - N_{2,пр} \cdot 2a = 0.$$

Подставляя в это уравнение  $N_{1,пр} = \sigma_T F_1 = \sigma_T F$ ,  $N_{2,пр} = \sigma_T F_2 = 1,6\sigma_T F$  и решая его, получаем  $P_{пр} = 1,108 \sigma_T F$ .

### 3.3. КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ

Рассмотренный выше пример показывает, что процесс определения предельной нагрузки даже в простейших статически неопределимых системах представляет достаточно трудоемкую задачу. С целью уменьшения трудоемкости решения данной задачи рекомендуется использовать кинематическую теорему предельного равновесия: из всех возможных форм разрушения системы (конструкции) действительной формой является такая, при которой предельная нагрузка является минимальной.

Для иллюстрации данного подхода рассмотрим прежний пример. Так как предельное состояние системы наступает при условии  $\sigma = \sigma_T$  в каких-либо двух стержнях, то возможны 3 формы разрушения.

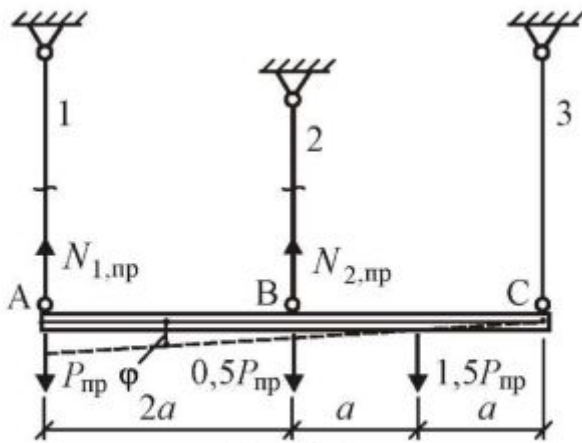


Рис. 3.5.

1-я форма разрушения - малый поворот балки относительно точки С (рис. 3.5). Состояние  $\sigma = \sigma_T$  наступает в стержнях 1, 2. Так как угол  $\varphi$  - величина малая, то для определения  $P_{пр}$  можно воспользоваться принципом возможных перемещений:

$$\begin{aligned} \sum \delta A = & P_{пр} \cdot 4a\varphi + 0,5P_{пр} \cdot 2a\varphi + \\ & + 1,5P_{пр} \cdot a\varphi - N_{1,пр} \cdot 4a\varphi - \\ & - N_{2,пр} \cdot 2a\varphi = 0. \end{aligned}$$

Подставляя сюда  $N_{1,пр} = \sigma_T F_1 = \sigma_T F$ ;  $N_{2,пр} = \sigma_T F_2 = 1,6\sigma_T F$ , получаем уравнение  $6,5P_{пр} - 7,2\sigma_T F = 0$ , из которого следует  $P_{пр} = 1,108 \sigma_T F$ .

2-я форма разрушения - малый поворот балки относительно точки А (рис. 3.6). Состояние  $\sigma = \sigma_T$  наступает в стержнях 2, 3. Для определения  $P_{пр}$  воспользуемся принципом возможных перемещений:

$$\sum \delta A = 0,5P_{пр} \cdot 2a\varphi + 1,5P_{пр} \cdot 3a\varphi - N_{2,пр} \cdot 2a\varphi - N_{3,пр} \cdot 4a\varphi = 0.$$

Подставляя сюда  $N_{2,пр} = \sigma_T F_2 = 1,6\sigma_T F$ ,  $N_{3,пр} = \sigma_T F_3 = 2\sigma_T F$ , получаем уравнение  $5,5P_{пр} - 11,2\sigma_T F = 0$ . Отсюда  $P_{пр} = 2,036 \sigma_T F$ .

3-я форма разрушения - малый поворот балки относительно точки В (рис. 3.7). Состояние  $\sigma = \sigma_T$  наступает в стержнях 1, 3. Составляем уравнение возможных работ:

$$\sum \delta A = P_{пр} \cdot 2a\varphi - 1,5P_{пр} \cdot a\varphi - N_{1,пр} \cdot 2a\varphi - N_{3,пр} \cdot 2a\varphi = 0.$$

Подставляя сюда  $N_{1,пр} = \sigma_T F_1 = \sigma_T F$ ,  $N_{3,пр} = \sigma_T F_3 = 2\sigma_T F$ , получаем уравнение  $0,5P_{пр} - 6\sigma_T F = 0$ . Отсюда  $P_{пр} = 12\sigma_T F$ .

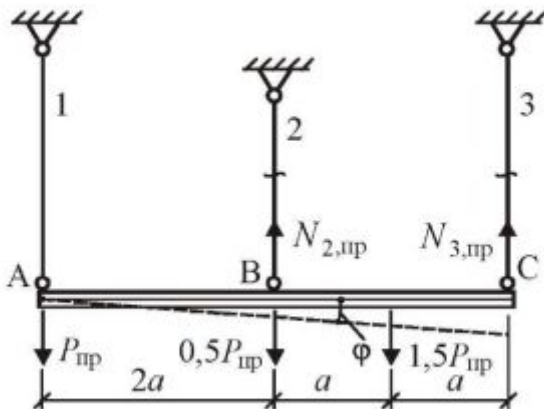


Рис. 3.6.

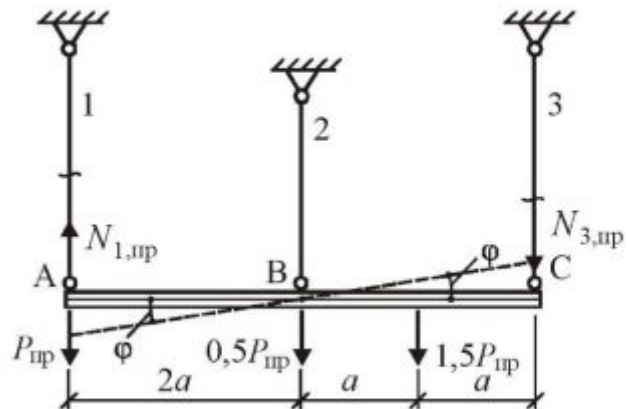


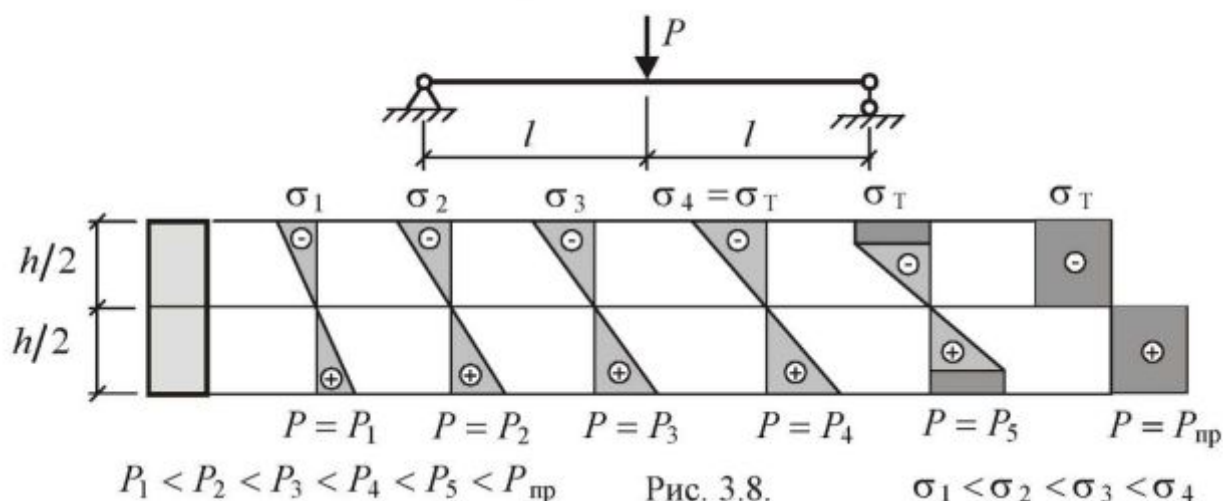
Рис. 3.7.



В соответствии с кинематической теоремой предельного равновесия из трех значений  $P_{пр}$  выбираем наименьшее значение  $P_{пр} = 1,108 \sigma_T F$ , соответствующее 1-ой форме разрушения (рис. 3.5).

### 3.4. УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЯ, ПОНЯТИЕ О ПЛАСТИЧЕСКОМ ШАРНИРЕ

Рассмотрим данный вопрос на примере балки, нагруженной в середине возрастающей силой  $P$  (рис. 3.8). Наибольший изгибающий момент получается в месте действия данной силы. Поэтому при возрастании силы  $P$  пластические деформации в первую очередь будут возникать в сечении, где приложена данная сила (сечение считается, к примеру, прямоугольным). Задача состоит в определении предельной силы  $P_{пр}$ , при которой данное сечение прекращает сопротивляться дальнейшему росту нагрузки. Диаграмма  $\sigma - \varepsilon$  материала балки считается при этом идеальной упруго-пластической (рис. 3.1).



Проследим за изменением нормальных напряжений  $\sigma$  в сечении А-А при возрастании силы  $P$ . Наибольшие напряжения возникают в крайних волокнах балки (рис. 3.8). По мере возрастания силы  $P$  эти напряжения растут до значения  $\sigma_T$ , после чего появляется область пластических деформаций, растущая внутрь сечения. Состояние, при котором эта область занимает все поперечное сечение балки, очевидно, является предельным. Разрушение происходит поворотом частей балки относительно друг друга. Такое состояние можно смоделировать введением так называемого пластического шарнира в среднем сечении балки, считая, что части балки, расположенные слева и справа от пластического шарнира, поворачиваются относительно друг друга как абсолютно твердые тела (рис. 3.9). При этом в сечениях непосредственно возле пластического шарнира действуют предельные внутренние моменты  $M_{пр}$ . В начале разрушения углы поворота частей балки можно считать величинами малыми.

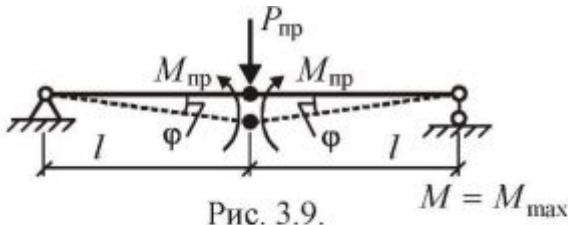


Рис. 3.9.

Тогда будет справедлив принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа):  $\delta A = P_{пр}l\varphi - 2M_{пр}\varphi = 0$ . Отсюда получаем  $P_{пр} = 2M_{пр}/l$ . Таким образом,

для определения  $P_{пр}$  необходимо иметь предельный момент  $M_{пр}$ , создаваемый в сечении напряжениями  $\sigma_T$  в состоянии предельного равновесия балки.

Рассмотрим поперечное сечение, находящееся полностью в пластическом состоянии (рис. 3.10). Напряжения  $\sigma_T$  на элементарных площадках  $dF_1$  и  $dF_2$  верхней ( $F_1$ ) и нижней ( $F_2$ ) частей сечения создают в нем элементарный момент

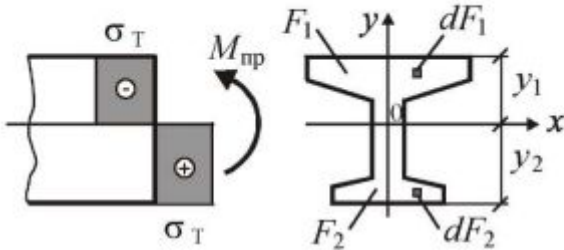


Рис. 3.10.

$$dM_{пр} = \sigma_T y_1 dF_1 + \sigma_T y_2 dF_2 = \sigma_T (y_1 dF_1 + y_2 dF_2).$$

Тогда полный момент  $M_{пр}$  в сечении определяется интегрированием слагаемых в скобках по  $F_1$  и  $F_2$ :

$$M_{пр} = \sigma_T \left( \int_{F_1} y_1 dF_1 + \int_{F_2} y_2 dF_2 \right) = \sigma_T (S_1 + S_2)$$

где  $S_1 = \int_{F_1} y_1 dF_1$ ,  $S_2 = \int_{F_2} y_2 dF_2$  -

статические моменты площадей  $F_1$ ,  $F_2$  относительно оси  $Ox$  (нейтральной линии) сечения.

Полученное выражение для  $M_{пр}$  можно представить в виде, аналогичном упругому решению задачи:  $M_{пр} = \sigma_T W_T$ , где  $W_T = S_1 + S_2$  - пластический момент сопротивления изгибу. Так как сечение находится в предельном состоянии, то  $W_T$  всегда меньше обычного момента сопротивления  $W_x$  при упругом изгибе. В качестве примера найдем  $W_T$  и  $W_x$  прямоугольного сечения (рис. 3.11).

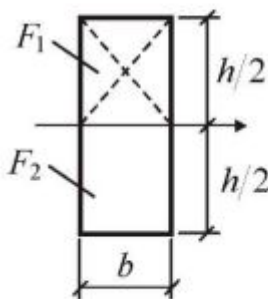


Рис. 3.11.

$$F_1 = F_2 = \frac{bh}{2}; \quad S_1 = S_2 = \frac{bh}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8};$$

$$W_T = S_1 + S_2 = \frac{bh^2}{4}; \quad W_x = \frac{bh^2}{6}.$$

Это дает отношение  $W_T/W_x = 1,5$ , означающее, что максимальная нагрузка для такого сечения в 1,5 выше той, которая будет при расчете по допускаемым напряжениям.



В заключении следует заметить, что положение нейтральной линии при пластическом изгибе в общем случае не совпадает с тем, которое имеет место при упругом изгибе. Это положение определяется из условия  $N_1 = N_2$ , где  $N_1 = \sigma_T F_1$ ;  $N_2 = \sigma_T F_2$  - равнодействующие напряжений  $\sigma_T$  на частях  $F_1$ ,  $F_2$  поперечного сечения, что в конечном итоге приводит к условию  $F_1 = F_2$ . При упругом изгибе положение нейтральной линии сечения, как известно из курса сопротивления материалов, находится из условия  $S_1 = S_2$ . В частном случае, когда  $Ox$  - ось симметрии сечения, оба условия ( $F_1 = F_2$  и  $S_1 = S_2$ ) дают одинаковый результат.

### 3.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ НАГРУЗКИ В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛКАХ И РАМАХ

Разрушение статически определимых балок и рам происходит с образованием одного пластического шарнира в сечении, где  $M = M_{\max}$ , что эквивалентно исчезновению одной связи, препятствующей относительно повороту сечений, расположенных непосредственно возле пластического шарнира.

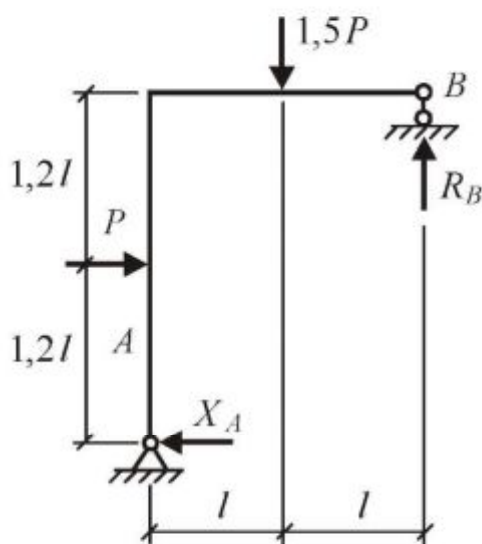


Рис. 3.12.

Влияние продольных сил в сечениях (при определении предельной нагрузки в рамах) не учитывается, т.к. нормальные напряжения в них в основном определяются изгибающими моментами. Предельная нагрузка определяется или из условия  $M_{\max} = M_{\text{пр}}$ , или с использованием принципа Лагранжа.

Пример (рис. 3.12).

Дано:  $l$ ;  $M_{\text{пр}} = \text{const}$ . Определить  $P_{\text{пр}}$ .

Используем условие  $M_{\max} = M_{\text{пр}}$ . Для

определения  $M_{\max}$  необходимо построить эпюру  $M$  при произвольной силе  $P$ .

С этой целью сначала определяем реакции  $X_A$ ,  $R_B$ :

$$\sum X = P - X_A = 0; \quad X_A = P;$$

$$\sum M_A = -P \cdot 1,2l - 1,5P \cdot l + R_B \cdot 2l = 0; \quad R_B = 1,35P.$$

Строим эпюру  $M$  (рис. 3.13), по которой определяем  $M_{\max} = 1,35Pl$ , а затем

из условия  $M_{\max} = M_{\text{пр}} = 1,35P_{\text{пр}}l$  находим предельную нагрузку:

$$P_{\text{пр}} = M_{\text{пр}} / 1,35l.$$

Проверим полученный результат, используя принцип Лагранжа. Рассмотрим форму разрушения рамы с образованием пластического шарнира в сечении с максимальным изгибающим моментом (рис. 3.14). Считая углы поворота  $\varphi$  частей рамы величинами малыми применим принцип Лагранжа:  $\delta A = P_{\text{пр}} 1,2l\varphi + 1,5P_{\text{пр}}l\varphi - 2M_{\text{пр}}\varphi = 0$ , что дает прежнее значение предельной нагрузки  $P_{\text{пр}} = M_{\text{пр}}/1,35l$ .

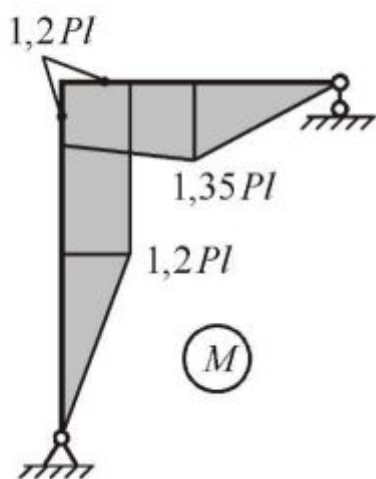


Рис. 3.13.

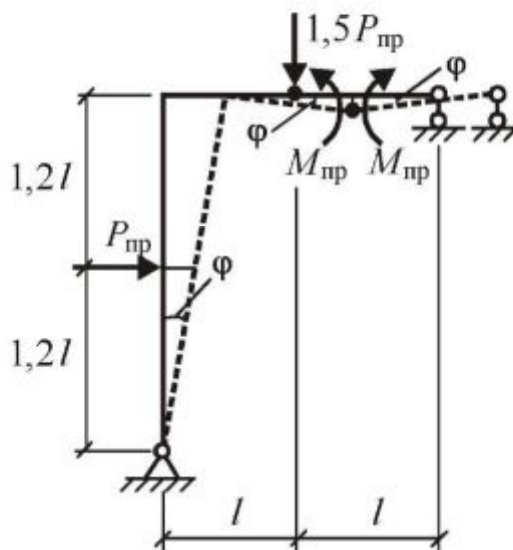


Рис. 3.14.

### 3.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ НАГРУЗКИ В СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛКАХ И РАМАХ

Разрушение статически неопределимых балок и рам происходит с образованием пластических шарниров, число которых на единицу превышает  $ССН$ :  $n_{\text{шн}} = ССН + 1$ . При  $n_{\text{шн}} = ССН + 1$  конструкция переходит в механизм с одной степенью свободы. Такое разрушение называется нормальным. В некоторых случаях возможно разрушение при условии  $n_{\text{шн}} < ССН + 1$ . Такое разрушение называется частичным. При  $n_{\text{шн}} > ССН + 1$  разрушение называется избыточным. Такое разрушение, обычно, реализуется при динамическом нагружении конструкции. В дальнейшем будем рассматривать только нормальное ( $n_{\text{шн}} = ССН + 1$ ) и частичное ( $n_{\text{шн}} < ССН + 1$ ) разрушения, которые имеют место при статическом нагружении конструкции. При этом закон нагружения будет считаться простым (все составляющие нагрузки пропорциональны одному параметру).

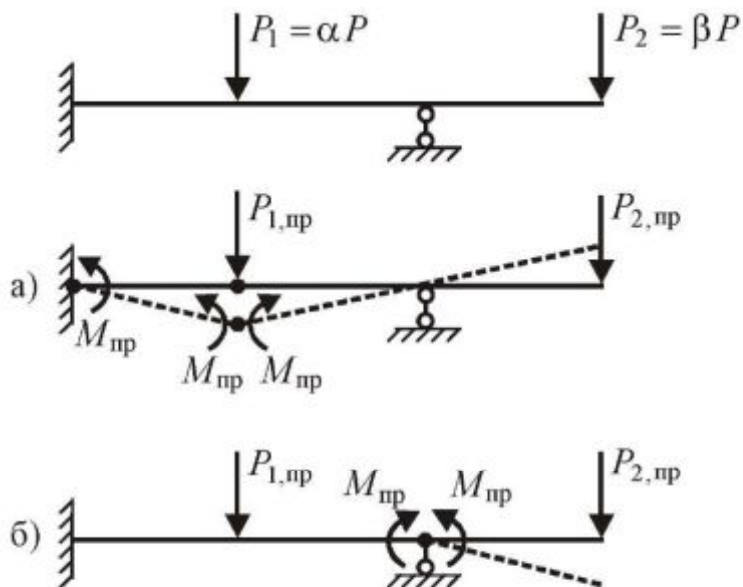


Рис. 3.15.

равновесия, данная в параграфе 3.3.

На рис. 3.15а, 3.15б показаны соответственно нормальное ( $n_{\text{мш}} = CCH + 1 = 1 + 1 = 2$ ) и частичное ( $n_{\text{мш}} < CCH + 1 = 1 + 1 = 2$ ) разрушения один раз статически неопределимой балки при действии статической нагрузки, пропорциональной силе  $P$  ( $\alpha, \beta$  - некоторые постоянные).

Для определения предельной нагрузки в статически неопределимых системах используется кинематическая теорема предельного

Пример (рис. 3.16а). Дано:  $l; h = 4l/3; M_{\text{пр}} = \text{const}$ .

Определить  $P_{\text{пр}}$ .

Рама имеет  $CCH = 3$ . Рассмотрим возможные формы разрушения рамы, считая перемещения и углы поворота ее частей величинами малыми.

Форма 1 (рис. 3.16б):  $n_{\text{мш}} = CCH + 1 = 4$  (нормальное разрушение).

$$\delta A = P_{\text{пр}} h \varphi - 4 M_{\text{пр}} \varphi = P_{\text{пр}} \frac{4}{3} l \varphi - 4 M_{\text{пр}} \varphi = 0; \quad P_{\text{пр}} = 3 \frac{M_{\text{пр}}}{l}.$$

Форма 2 (рис. 3.16в):  $n_{\text{мш}} = CCH + 1 = 4$  (нормальное разрушение).

$$\delta A = P_{\text{пр}} h \varphi + 1,5 P_{\text{пр}} l \varphi - 6 M_{\text{пр}} \varphi = P_{\text{пр}} \frac{4}{3} l \varphi + 1,5 P_{\text{пр}} l \varphi - 6 M_{\text{пр}} \varphi = 0;$$

$$P_{\text{пр}} = \frac{6 M_{\text{пр}}}{2,833 l} = 2,118 \frac{M_{\text{пр}}}{l}.$$

Форма 3 (рис. 3.16г):  $n_{\text{мш}} < CCH + 1 = 4$  (частичное разрушение).

$$\delta A = 1,5 P_{\text{пр}} l \varphi - 4 M_{\text{пр}} \varphi = 0; \quad P_{\text{пр}} = \frac{4 M_{\text{пр}}}{1,5 l} = 2,667 \frac{M_{\text{пр}}}{l}.$$

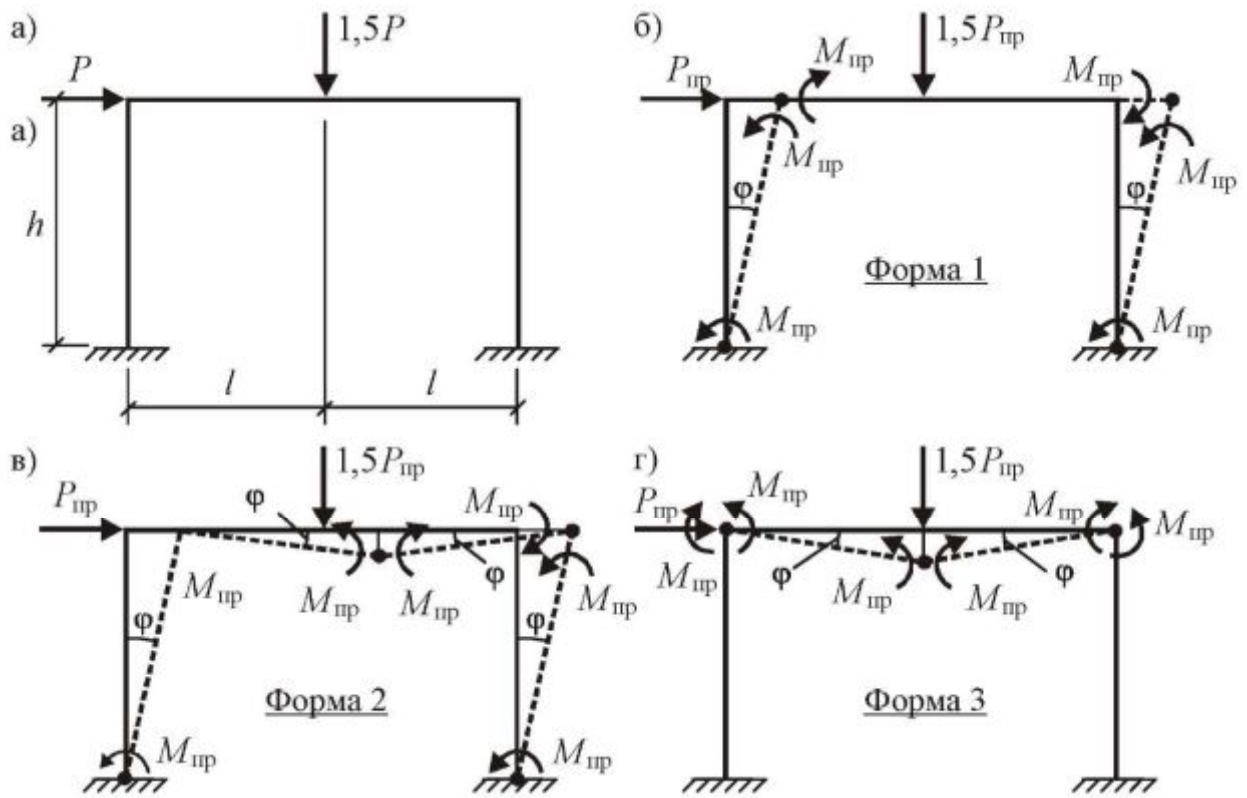


Рис. 3.16.

Согласно кинематической теореме предельного равновесия из трех возможных форм разрушения рамы действительной является форма 2, соответствующая наименьшему значению предельной нагрузки  $P_{пр} = 2,118 M_{пр}/l$ .



## Часть 4. РАСЧЕТ КОНСТРУКЦИЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

### МАТРИЧНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$[A]$  - прямоугольная или квадратная матрица;

$[A]^T$  - транспонированная по отношению к  $[A]$  матрица;

$[A]^{-1}$  - обратная по отношению к  $[A]$  матрица.

$\{A\}$  - матрица-столбец (вектор);  $\{A\}^T$  - матрица-строка;

### 4.1. ОСНОВЫ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В настоящее время метод конечных элементов (МКЭ) является основным инженерным методом расчета сложных строительных, авиационных, ракетно-космических, судовых и других конструкций. Это обусловлено инвариантностью метода по отношению к геометрии конструкции, условиям ее закрепления и нагружения, а также высокой степенью приспособленности к автоматизации основных этапов расчета конструкции. С математической точки зрения МКЭ является приближенным численным методом минимизации полной потенциальной энергии упругой системы (конструкции), что имеет место в состоянии ее равновесия. В МКЭ конструкция представляется набором типовых конечных элементов. Типы используемых конечных элементов (КЭ) зависят от вида напряженного состояния конструкции и ее геометрии (рис. 4.1).



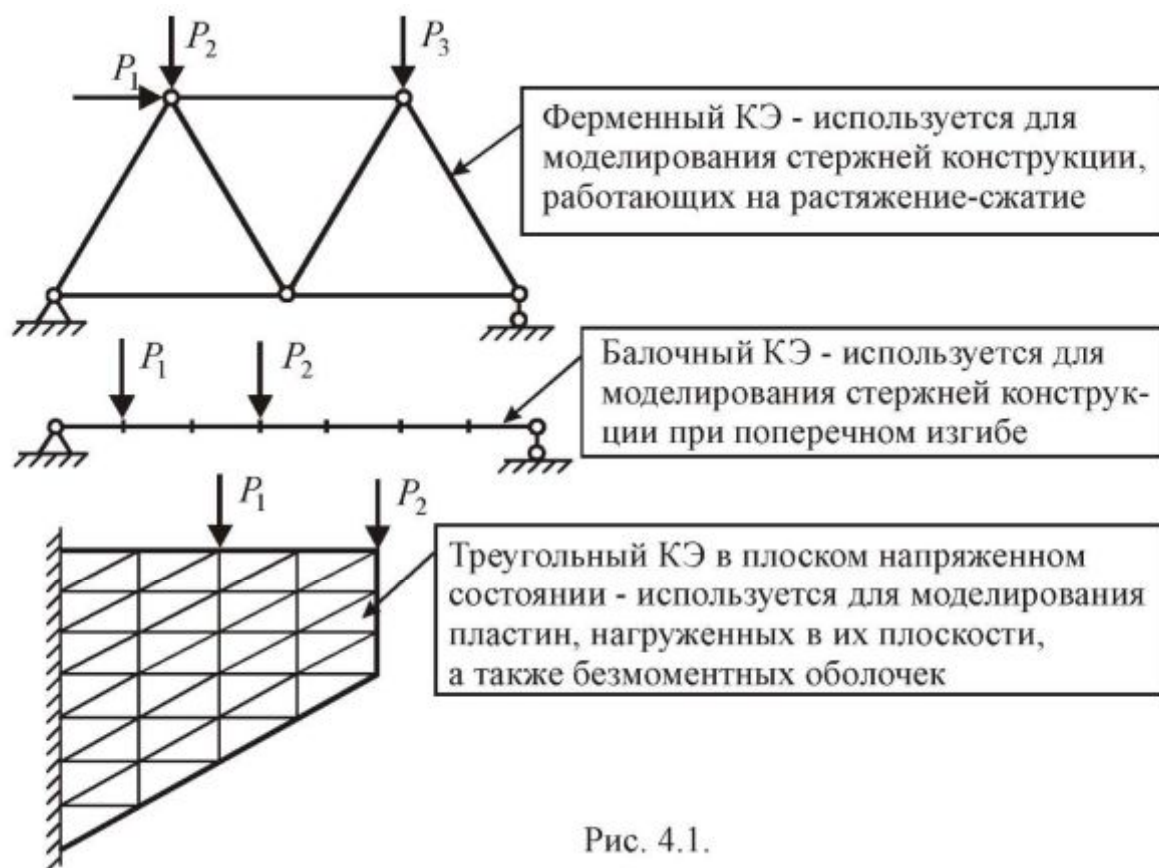


Рис. 4.1.

Основная процедура МКЭ состоит в представлении (аппроксимации) полей перемещений конечных элементов через перемещения их узлов с помощью

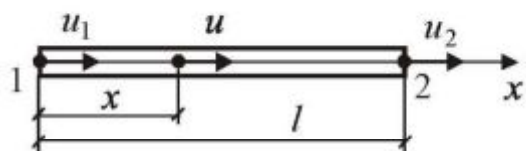


Рис. 4.2.

некоторых функций, называемых функциями распределения. Рассмотрим, к примеру, простейший КЭ - прямолинейный стержень при одноосном однородном напряженном состоянии (рис. 4.2). Перемещение  $u(x)$  произвольной точки КЭ мож-

но выразить через узловые перемещения  $u_1$  и  $u_2$  так, чтобы выполнялись условия  $u(0) = u_1$ ,  $u(l) = u_2$ :  $u(x) = u_1(1 - x/l) + u_2 x/l = u_1 N_1 + u_2 N_2$ . Отсюда следуют функции распределения  $N_1 = 1 - x/l$ ,  $N_2 = x/l$ . Данные функции удовлетворяют условиям: в узле 1  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = 0$ ; в узле 2  $N_1 = 0$ ,  $N_2 = 1$ .

Таким образом, полная потенциальная энергия  $\Pi$  конечно-элементной конструкции в конечном итоге может быть представлена как функция ее узловых перемещений  $\{r\}$ . В состоянии равновесия конструкции  $\Pi$  имеет минимальное значение. Необходимое условие этого записывается в виде вариационного уравнения Лагранжа  $\delta\Pi = 0$  (варьируемыми параметрами являются узловые перемещения  $\{r\}$ ), что приводит к системе линейных алгебраических уравнений

$$[K]\{r\} = \{P\}.$$

Здесь  $[K]$ ,  $\{P\}$  - соответственно матрица жесткости и вектор внешних узловых сил (вектор нагрузки) конечно-элементной модели конструкции. Смысл полученной системы уравнений состоит в равновесии внутренних (в левой части) и внешних (в правой части) узловых сил. После определения узловых перемещений  $\{r\}$  находятся деформации и напряжения во всех элементах конструкции.

#### 4.2. СТРУКТУРА ПОЛНОЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

Полная потенциальная энергия  $\Pi$  любого КЭ состоит из потенциальной энергии деформации  $U$  и потенциала внешних сил  $V$ :  $\Pi = U + V$ . Первое слагаемое определяется как работа обобщенных внутренних сил (напряжений) при деформировании КЭ, взятая со знаком “-”, второе слагаемое - есть работа внешних сил КЭ при переходе его из деформированного состояния в исходное (недеформированное) состояние.

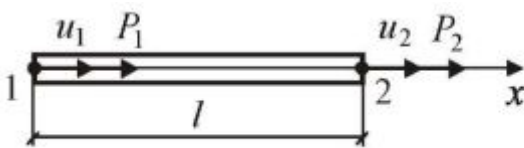


Рис. 4.3.

Здесь  $u_1$ ,  $P_1$ ,  $u_2$ ,  $P_2$  - соответственно перемещения и силы в узлах 1 и 2.  $l$  - длина элемента.  $x$  - координата элемента.

Рассмотрим данный вопрос на примере простейшего КЭ - прямолинейного стержня при одноосном однородном напряженном состоянии (рис. 4.3). Из курса сопротивления материалов известно, что при таком состоянии

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \sigma_x \varepsilon_x F dx = \frac{F}{2} \int_0^l \sigma_x \varepsilon_x dx. \quad (4.2.1)$$

Здесь  $F$  - площадь поперечного сечения КЭ, принимаемая постоянной по его длине. По закону Гука  $\sigma_x = E\varepsilon_x = E(u_2 - u_1)/l$ . С учетом этого выражение (4.2.1) примет вид

$$U = \frac{EF}{2l^2} \int_0^l (u_2 - u_1)^2 dx = \frac{EF}{2l} (u_2^2 - 2u_2u_1 + u_1^2). \quad (4.2.2)$$

Из выражения (4.2.2) видно, что  $U$  есть квадратичная форма узловых перемещений КЭ. Найдем потенциал внешних сил  $V$  (силы приведены к узлам 1, 2 КЭ):  $V = -P_1u_1 - P_2u_2$ . Выражение для  $V$  - линейная форма узловых перемещений КЭ. Полученная структура  $U$  и  $V$  типична для всех видов конечных элементов (различие будет состоять лишь в числе узловых перемещений).

Найдем полную потенциальную энергию КЭ:

$$\Pi = \frac{EF}{2l} (u_2^2 - 2u_2u_1 + u_1^2) - P_1u_1 - P_2u_2. \quad (4.2.3)$$

В состоянии равновесия КЭ

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial u_1} \delta u_1 + \frac{\partial\Pi}{\partial u_2} \delta u_2 = 0.$$

Т.к.  $u_1$  и  $u_2$  независимы, а  $\delta u_1 \neq 0$ ,  $\delta u_2 \neq 0$ , то должны выполняться условия

$$\frac{\partial\Pi}{\partial u_1} = \frac{EF}{2l}(-2u_2 + 2u_1) - P_1 = 0; \quad \frac{\partial\Pi}{\partial u_2} = \frac{EF}{2l}(2u_2 - 2u_1) - P_2 = 0,$$

что приводит к системе уравнений равновесия внутренних и внешних узловых сил КЭ:

$$\frac{EF}{l}(-u_2 + u_1) = P_1; \quad \frac{EF}{l}(u_2 - u_1) = P_2.$$

Полученную систему уравнений можно представить в матричной форме

$$[K]\{r\} = \{P\},$$

где

$$\{r\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \quad \{P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}, \quad [K] = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- соответственно вектор узловых перемещений, вектор нагрузки и матрица жесткости КЭ.

В справедливости матрицы  $[K]$  можно убедиться, определяя коэффициенты жесткости  $k_{ij}$  ( $i, j = 1; 2$ ) согласно их смыслу в методе перемещений:  $k_{ij}$

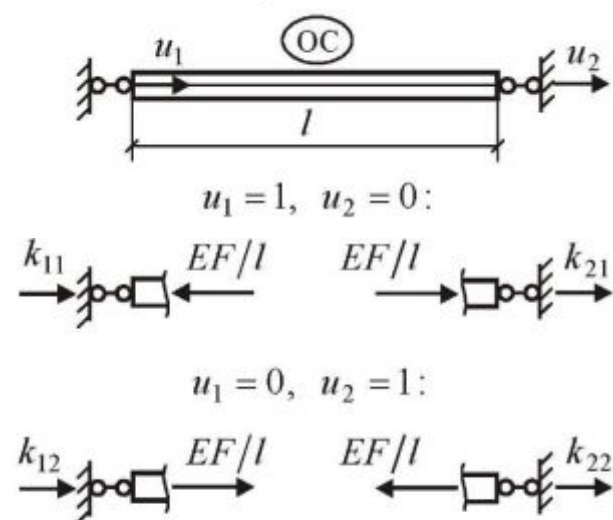


Рис. 4.4.

есть реакция  $i$ -ой дополнительной связи в основной системе (ОС) от перемещения  $u_j = 1$  (рис. 4.4). Это дает

$$k_{11} = k_{22} = EF/l, \\ k_{12} = k_{21} = -EF/l,$$

что соответствует полученным выше результатам (см. матрицу  $[K]$ ).

После введения матриц  $[K]$ ,  $\{r\}$  и  $\{P\}$  выражение (4.2.3) можно представить в матричной форме

$$\Pi = \frac{1}{2} \{r\}^T [K] \{r\} - \{r\}^T \{P\}, \quad (4.2.4)$$

характерной для всех типов конечных элементов и для конструкции в целом. Нетрудно проверить, что для рассматриваемого КЭ это дает прежний результат:

$$\Pi = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}^T \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} -$$



$$\begin{aligned}
-\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}^T \frac{EF}{l} \begin{Bmatrix} u_1 - u_2 \\ -u_1 + u_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \\
&= \frac{EF}{2l} [u_1(u_1 - u_2) + u_2(-u_1 + u_2)] - u_1 P_1 - u_2 P_2 = \\
&= \frac{EF}{2l} (u_1^2 - 2u_1 u_2 + u_2^2) - u_1 P_1 - u_2 P_2.
\end{aligned}$$

### 4.3. МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ И ВЕКТОРЫ НАГРУЗКИ НЕКОТОРЫХ ПРОСТЕЙШИХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЛОКАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

#### ФЕРМЕННЫЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ

Ферменный КЭ применяется для моделирования прямолинейных стержневой конструкции, работающих на растяжение-сжатие (рис. 4.5). Обозначения: 1;

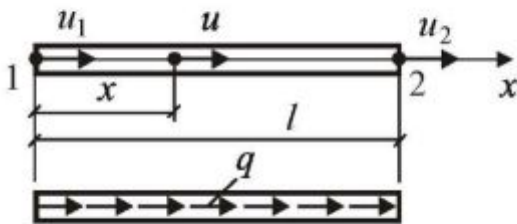


Рис. 4.5.

2 - локальные номера узлов КЭ;  $1x$  - локальная ось,  $u_1, u_2$  - узловые перемещения КЭ в локальной системе координат. Будем считать, что в пределах КЭ погонная нагрузка  $q = \text{const}$ , продольная жесткость  $EF = \text{const}$ .

Представим перемещение  $u$  произвольной точки КЭ в виде линейной

функции локальной координаты  $x$ :  $u = \alpha_0 + \alpha_1 x$ . Постоянные  $\alpha_0, \alpha_1$  определяются из условий:  $u(0) = u_1$ ;  $u(l) = u_2$ . Это дает систему уравнений  $u_1 = \alpha_0$ ,  $u_2 = \alpha_0 + \alpha_1 l$ , из которой следует:  $\alpha_0 = u_1$ ;  $\alpha_1 = (u_2 - u_1)/l$ . Подставляя  $\alpha_0, \alpha_1$  в выражение для  $u$ , получаем

$$u = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l} x = u_1 \left(1 - \frac{x}{l}\right) + u_2 \frac{x}{l} = u_1 N_1 + u_2 N_2 = \{N\}^T \{r\}. \quad (4.3.1)$$

Здесь  $\{r\} = \{u_1 \ u_2\}$ ,  $\{N\} = \{N_1 \ N_2\}$ . Функции распределения  $N_1, N_2$  имеют вид:  $N_1 = 1 - x/l$ ,  $N_2 = x/l$ .

Перейдем к определению полной потенциальной энергии КЭ.

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2}{EF} dx - \int_0^l u q dx. \quad (4.3.2)$$

Продольную силу  $N$  можно связать с перемещением  $u$  зависимостью

$$N = \sigma_x F = EF \varepsilon_x = EF u',$$

с учетом чего выражение (4.3.2) примет вид

$$\Pi = \frac{EF}{2} \int_0^l (u')^2 dx - q \int_0^l u dx.$$

Для элемента, находящегося в равновесии, справедливо вариационное уравнение Лагранжа

$$\delta \Pi = \frac{EF}{2} \int_0^l \delta u' \cdot 2u' dx - q \int_0^l \delta u dx = 0. \quad (4.3.3)$$

Примем во внимание аппроксимацию (4.3.1):  $\delta u = \{\delta r\}^T \{N\}$ ;  $u' = \{N'\}^T \{r\}$ ;  $\delta u' = \{\delta r\}^T \{N'\}$ . Подставляя эти выражения в (4.3.3), получаем

$$\delta \Pi = EF \{\delta r\}^T \int_0^l \{N'\} \{N'\}^T dx \{r\} - q \{\delta r\}^T \int_0^l \{N\} dx = 0.$$

Отсюда при  $\{\delta r\} \neq 0$  следует матричное уравнение  $[K]\{r\} = \{P\}$ , где  $[K] = EF \int_0^l \{N'\} \{N'\}^T dx$ ,  $\{P\} = q \int_0^l \{N\} dx$  - соответственно матрица жесткости и вектор нагрузки КЭ. Получим окончательные выражения для вычисления  $[K]$  и  $\{P\}$ :

$$[K] = EF \int_0^l \begin{Bmatrix} N'_1 \\ N'_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} N'_1 \\ N'_2 \end{Bmatrix}^T dx = EF \int_0^l \begin{Bmatrix} -1/l \\ 1/l \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1/l \\ 1/l \end{Bmatrix}^T dx = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = q \int_0^l \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} dx = q \int_0^l \begin{Bmatrix} 1-x/l \\ x/l \end{Bmatrix} dx = ql \begin{Bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ql/2 \\ ql/2 \end{Bmatrix}.$$

### БАЛОЧНЫЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ

Балочный КЭ (рис. 4.6) применяется для моделирования стержней конструкции, находящихся в состоянии поперечного изгиба. Для воспроизведения такого состояния в качестве узловых перемещений КЭ принимаются прогибы

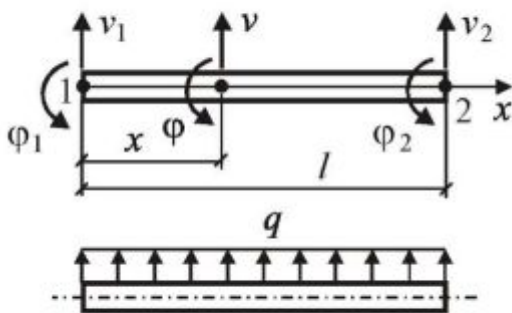


Рис. 4.6.

$v_1, v_2$  и углы поворота  $\varphi_1, \varphi_2$  его узлов. Будем считать, что в пределах КЭ погонная нагрузка  $q = \text{const}$ , жесткость на изгиб  $EI = \text{const}$  и справедлива гипотеза прямых нормалей, согласно которой  $\varphi = v'$ .

Представим прогиб  $v$  в пределах элемента в виде:  $v = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$ . Постоянные  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  определяются из условий:

$$v(0) = v_1; \quad v'(0) = \varphi_1; \quad v(l) = v_2; \quad v'(l) = \varphi_2,$$



что приводит к системе уравнений

$$v_1 = \alpha_0, \quad \varphi_1 = \alpha_1, \quad v_2 = \alpha_0 + \alpha_1 l + \alpha_2 l^2 + \alpha_3 l^3, \quad \varphi_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 l + 3\alpha_3 l^2.$$

Из этой системы следует:

$$\alpha_0 = v_1; \quad \alpha_1 = \varphi_1; \quad \alpha_2 = (-3v_1 - 2\varphi_1 l + 3v_2 - \varphi_2 l)/l^2;$$

$$\alpha_3 = (2v_1 + \varphi_1 l - 2v_2 + \varphi_2 l)/l^3.$$

Подставляя  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  в выражение для  $v$ , получаем

$$v = v_1 + \varphi_1 x + \frac{x^2}{l^2}(-3v_1 - 2\varphi_1 l + 3v_2 - \varphi_2 l) + \frac{x^3}{l^3}(2v_1 + \varphi_1 l - 2v_2 + \varphi_2 l) =$$

$$= v_1 \left(1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}\right) + \varphi_1 \left(x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right) + v_2 \left(\frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}\right) + \varphi_2 \left(-\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right) =$$

$$= \{N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4\}^T \{v_1 \ \varphi_1 \ v_2 \ \varphi_2\} = \{N\}^T \{r\}. \quad (4.3.4)$$

Здесь  $N_1, N_2, N_3, N_4$  - функции распределения:

$$N_1 = 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}; \quad N_2 = x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2};$$

$$N_3 = \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}; \quad N_4 = -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}.$$

Полная потенциальная энергия балочного КЭ определяется выражением

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx - \int_0^l v q dx.$$

Изгибающий момент  $M$  в каждой точке элемента пропорционален кривизне  $\chi = \varphi'$ :  $M = EI\chi = EI\varphi' = EIv''$ . С учетом этого получаем

$$\Pi = \frac{EI}{2} \int_0^l (v'')^2 dx - q \int_0^l v dx.$$

В состоянии равновесия конечного элемента  $\Pi = \Pi_{\min}$ . Необходимое условие этого записывается в виде вариационного уравнения Лагранжа

$$\delta \Pi = \frac{EI}{2} \int_0^l \delta v'' \cdot 2v'' dx - q \int_0^l \delta v dx = 0. \quad (4.3.5)$$

Согласно (4.3.4) имеем:  $v'' = \{N''\}^T \{r\}$ ;  $\delta v'' = \{\delta r\}^T \{N''\}$ ;  $\delta v = \{\delta r\}^T \{N\}$ . С учетом этого уравнение (4.3.5) принимает вид

$$\delta \Pi = EI \{\delta r\}^T \int_0^l \{N''\} \{N''\}^T dx \{r\} - q \{\delta r\}^T \int_0^l \{N\} dx = 0.$$

Отсюда при  $\{\delta r\} \neq 0$  следует матричное уравнение равновесия обобщенных внутренних (в левой части) и внешних (в правой части) узловых сил конечного элемента

$$[K]\{r\} = \{P\},$$

где  $[K] = EI \int_0^l \{N''\} \{N''\}^T dx$ ,  $\{P\} = q \int_0^l \{N\} dx$  - соответственно матрица жесткости и вектор нагрузки данного элемента.

Получим выражения для вычисления матрицы  $[K]$  и вектора  $\{P\}$ :

$$[K] = EI \int_0^l \begin{Bmatrix} N_1'' \\ N_2'' \\ N_3'' \\ N_4'' \end{Bmatrix} \{N_1'' \ N_2'' \ N_3'' \ N_4''\}^T dx =$$

$$EI \int_0^l \begin{bmatrix} N_1''N_1'' & N_1''N_2'' & N_1''N_3'' & N_1''N_4'' \\ N_2''N_1'' & N_2''N_2'' & N_2''N_3'' & N_2''N_4'' \\ N_3''N_1'' & N_3''N_2'' & N_3''N_3'' & N_3''N_4'' \\ N_4''N_1'' & N_4''N_2'' & N_4''N_3'' & N_4''N_4'' \end{bmatrix} dx; \{P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ M_1 \\ P_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = q \int_0^l \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} dx.$$

После нахождения определенных интегралов окончательно имеем:

$$[K] = EI \begin{bmatrix} 12/l^3 & 6/l^2 & -12/l^3 & 6/l^2 \\ 6/l^2 & 4/l & -6/l^2 & 2/l \\ -12/l^3 & -6/l^2 & 12/l^3 & -6/l^2 \\ 6/l^2 & 2/l & -6/l^2 & 4/l \end{bmatrix}; \{P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ M_1 \\ P_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ql/2 \\ ql^2/12 \\ ql/2 \\ -ql^2/12 \end{Bmatrix}.$$

Положительные направления внешних узловых сил  $P_1, M_1, P_2, M_2$  в векторе  $\{P\}$  совпадают с положительными направлениями соответствующих узловых перемещений КЭ (рис. 4.6).

### РАМНЫЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ

Рамный КЭ (рис. 4.7) применяется для моделирования стержневой конструкции, находящихся в состоянии растяжения-сжатия и поперечного изгиба. Для воспроизведения такого состояния в качестве узловых перемещений рамного КЭ принимаются продольные перемещения  $u_1, u_2$ , прогибы  $v_1, v_2$  и углы поворота (обобщенные перемещения)  $\varphi_1, \varphi_2$  его узлов. Порядок следования данных перемещений определяется вектором  $\{r\} = \{u_1 \ v_1 \ \varphi_1 \ u_2 \ v_2 \ \varphi_2\}$ . Считается, что в пределах элемента погонные нагрузки  $q_x, q_y$  и жесткости  $EF, EI$  постоянны по его длине.

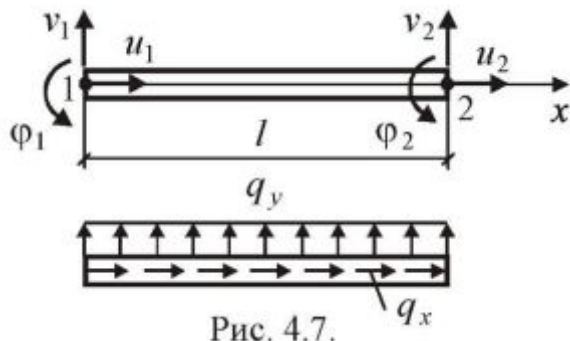


Рис. 4.7.

От перемещений  $u_1, u_2$  в поперечных сечениях элемента возникает только продольная сила  $N$ , от  $v_1, v_2, \varphi_1, \varphi_2$  - только поперечная сила  $Q$  и изгибающий момент  $M$ . Таким образом, состояния растяжения-сжатия и поперечного изгиба элемента являются независимыми. Это дает возможность сформировать матрицу жесткости  $[K]$  рамного КЭ из коэффициентов жесткости рассмотренных ранее ферменного и балочного элементов (расположение этих коэффициентов соответствует порядку следования узловых перемещений в векторе  $\{r\}$ , как показано сверху и справа от матрицы  $[K]$ ):

$$[K] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & v_1 & \varphi_1 & u_2 & v_2 & \varphi_2 \end{array} \\ \left[ \begin{array}{cccccc} EF/l & 0 & 0 & -EF/l & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/l^3 & 6EI/l^2 & 0 & -12EI/l^3 & 6EI/l^2 \\ 0 & 6EI/l^2 & 4EI/l & 0 & -6EI/l^2 & 2EI/l \\ -EF/l & 0 & 0 & EF/l & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/l^3 & -6EI/l^2 & 0 & 12EI/l^3 & -6EI/l^2 \\ 0 & 6EI/l^2 & 2EI/l & 0 & -6EI/l^2 & 4EI/l \end{array} \right] \begin{array}{l} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{array} \end{array}$$

Аналогично формируется вектор нагрузки рамного КЭ:

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ M_1 \\ P_{2x} \\ P_{2y} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_x l/2 \\ q_y l/2 \\ q_y l^2/12 \\ q_x l/2 \\ q_y l/2 \\ -q_y l^2/12 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}$$

Положительные направления и порядок следования внешних узловых сил в векторе  $\{P\}$  совпадают с положительными направлениями и порядком соответствующих узловых перемещений КЭ (рис. 4.7).

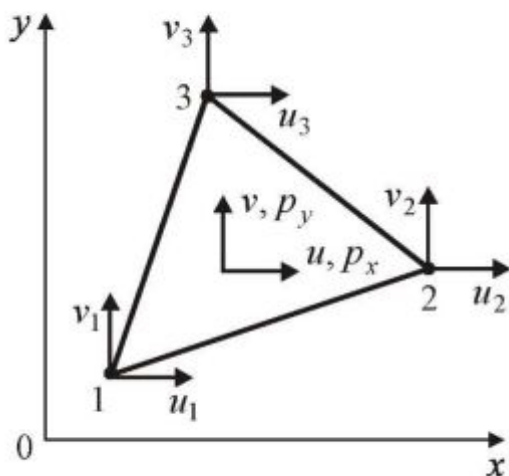


Рис. 4.8.

### ТРЕУГОЛЬНЫЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ПРИ ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Треугольный КЭ при плоском напряженном состоянии (ПНС) (рис. 4.8) используется для моделирования пластин, нагруженных в их плоскости, а также безмоментных оболочек. Считается, что в пределах элемента поверхностные силы

$\rho_x$ ,  $\rho_y$  и толщина  $h$  имеют постоянные значения.

Представим перемещение  $u$  произвольной точки элемента в виде  $u = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y$ . Постоянные  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  определяются из условий:  $u(x_i, y_i) = u_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Это дает систему уравнений

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}.$$

Для решения данной системы используем определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \overbrace{(x_2 y_3 - x_3 y_2)}^{a_1} + 1 \cdot \overbrace{(x_3 y_1 - x_1 y_3)}^{a_2} + 1 \cdot \overbrace{(x_1 y_2 - x_2 y_1)}^{a_3} =$$

$$= a_1 + a_2 + a_3 = 2S; \quad \Delta_0 = \begin{vmatrix} u_1 & x_1 & y_1 \\ u_2 & x_2 & y_2 \\ u_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = u_1 a_1 + u_2 a_2 + u_3 a_3;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & u_1 & y_1 \\ 1 & u_2 & y_2 \\ 1 & u_3 & y_3 \end{vmatrix} = u_1 \overbrace{(y_2 - y_3)}^{b_1} + u_2 \overbrace{(y_3 - y_1)}^{b_2} + u_3 \overbrace{(y_1 - y_2)}^{b_3} = u_1 b_1 + u_2 b_2 + u_3 b_3;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & u_1 \\ 1 & x_2 & u_2 \\ 1 & x_3 & u_3 \end{vmatrix} = u_1 \overbrace{(x_3 - x_2)}^{c_1} + u_2 \overbrace{(x_1 - x_3)}^{c_2} + u_3 \overbrace{(x_2 - x_1)}^{c_3} = u_1 c_1 + u_2 c_2 + u_3 c_3.$$

Отсюда получаем

$$\alpha_0 = \Delta_0 / \Delta = (u_1 a_1 + u_2 a_2 + u_3 a_3) / 2S; \quad \alpha_1 = \Delta_1 / \Delta = (u_1 b_1 + u_2 b_2 + u_3 b_3) / 2S;$$

$$\alpha_2 = \Delta_2 / \Delta = (u_1 c_1 + u_2 c_2 + u_3 c_3) / 2S.$$

Здесь  $S$  - площадь элемента ( $S > 0$ , если узлы 1, 2, 3 элемента следуют против хода часовой стрелки).

Подставляя  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  в выражение для  $u$ , получаем

$$u = \frac{1}{2S} [u_1 a_1 + u_2 a_2 + u_3 a_3 + (u_1 b_1 + u_2 b_2 + u_3 b_3)x + (u_1 c_1 + u_2 c_2 + u_3 c_3)y] =$$

$$= \frac{1}{2S} [u_1 (a_1 + b_1 x + c_1 y) + u_2 (a_2 + b_2 x + c_2 y) + u_3 (a_3 + b_3 x + c_3 y)] =$$

$$= u_1 N_1 + u_2 N_2 + u_3 N_3.$$

Здесь  $N_i = (a_i + b_i x + c_i y) / 2S$  ( $i = 1, 2, 3$ ) - функции распределения.

В аналогичном виде (через те же функции  $N_i$ ) можно представить перемещение  $v$ :  $v = v_1 N_1 + v_2 N_2 + v_3 N_3$ . Полученные выражения для перемещений  $u$  и  $v$  можно записать в виде одного матричного равенства:



$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N] \{r\}, \quad (4.3.6)$$

где

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}; \quad \{r\} = \{u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3\}$$

- соответственно матричная функция распределения и вектор узловых перемещений КЭ.

Перейдем к определению полной потенциальной энергии КЭ:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_S \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} h dS - \int_S \{u \ v\}^T \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} dS. \quad (4.3.7)$$

Здесь  $\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy}\}^T$ ,  $\{\sigma\} = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}\}$  - соответственно матрица-строка и матрица-столбец с компонентами деформированного и напряженного состояний в произвольной точке КЭ. Векторы  $\{\sigma\}$  и  $\{\varepsilon\}$  связаны физической зависимостью (обобщенным законом Гука)

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}, \quad (4.3.8)$$

где  $[D]$  - матрица упругих свойств материала, зависящая от типа материала и его напряженного состояния. Материал принимается изотропным, а напряженное состояние его, как отмечено выше, считается плоским. В этом случае

$$[D] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{bmatrix}.$$

С учетом (4.3.8) и постоянства  $h$ ,  $p_x$ ,  $p_y$  выражение (4.3.7) можно представить в виде

$$\Pi = \frac{h}{2} \int_S \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dS - \int_S \{u \ v\}^T dS \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix}.$$

Деформации  $\{\varepsilon\}$  определяются через перемещения  $u$ ,  $v$ :

$$\{\varepsilon\} = [A] \{u \ v\}.$$

Оператор  $[A]$  при плоском напряженном состоянии имеет вид

$$[A] = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix}.$$

Для перехода от перемещений  $u, v$  к узловым перемещениям  $\{r\}$  конечного элемента воспользуемся аппроксимацией (4.3.6):

$$\{\varepsilon\} = [A][N] \{r\} = [B] \{r\}.$$

Таким образом, полная потенциальная энергия  $\Pi$  в конечном итоге представляется как функция узловых перемещений КЭ:

$$\Pi = \frac{h}{2} \{r\}^T \int_S [B]^T [D][B] dS \{r\} - \{r\}^T \int_S [N]^T dS \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix}.$$

Отсюда получаем вариационное уравнение Лагранжа

$$\delta \Pi = h \{\delta r\}^T \int_S [B]^T [D][B] dS \{r\} - \{\delta r\}^T \int_S [N]^T dS \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} = 0,$$

из которого следует матричное уравнение равновесия внутренних и внешних узловых сил конечного элемента

$$[K] \{r\} = \{P\},$$

где  $[K]$ ,  $\{P\}$  - соответственно матрица жесткости и вектор нагрузки данного элемента:

$$[K] = h \int_S [B]^T [D][B] dS; \quad \{P\} = \int_S [N]^T dS \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix}.$$

Определим матрицу  $[B]$ :

$$\begin{aligned} [B] = [A][N] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что матрица  $[B]$  в пределах элемента постоянна. С учетом этого выражение для вычисления матрицы  $[K]$  окончательно будет таким:

$$[K] = [B]^T [D][B] hS.$$

Найдем вектор  $\{P\}$ :

$$\{P\} = \int_S [N]^T dS \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} = \int_S \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}^T dS \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix}.$$

Функции  $N_i$  ( $i=1,2,3$ ) линейно зависят от координат  $x, y$  и обладают свойствами: в узле 1  $N_1=1, N_2=N_3=0$ ; в узле 2  $N_2=1, N_1=N_3=0$ ; в узле 3  $N_3=1, N_1=N_2=0$ . Определенные интегралы  $\int_S N_i dS$  вычисляются исходя из их геометрического смысла: каждый интеграл  $\int_S N_i dS$  - есть объем пирамиды с единичной высотой и основанием  $S$  (рис. 4.9). Отсюда  $\int_S N_i dS = S \cdot 1/3 = S/3$  ( $i=1,2,3$ ). С учетом этого получаем окончательное выражение для вычисления вектора  $\{P\}$ :

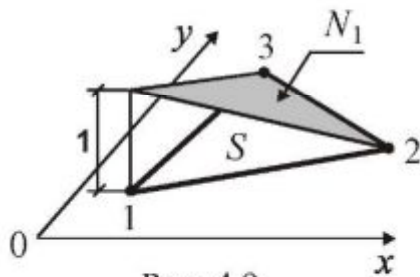


Рис. 4.9.

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{2x} \\ P_{2y} \\ P_{3x} \\ P_{3y} \end{Bmatrix} = \frac{S}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} = \frac{S}{3} \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_x \\ p_y \\ p_x \\ p_y \end{Bmatrix}.$$

#### 4.4. ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЦ ЖЕСТКОСТИ И ВЕКТОРОВ НАГРУЗКИ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ГЛОБАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

В составе конструкции конечные элементы могут располагаться произвольным образом. Поэтому перед включением матрицы жесткости и вектора нагрузки каждого КЭ в матричное уравнение равновесия конечно-элементной модели конструкции данные матрица и вектор должны быть преобразованы к единой для всех КЭ (глобальной) системе координат.

Далее будут использоваться обозначения:  $[\bar{K}], \{\bar{r}\}, \{\bar{P}\}$  - соответственно матрица жесткости, вектор узловых перемещений и вектор нагрузки КЭ в локальной системе координат;  $[K], \{r\}, \{P\}$  - то же в глобальной системе координат. Для определения  $[K]$  и  $\{P\}$  по имеющимся  $[\bar{K}]$  и  $\{\bar{P}\}$  воспользуемся свойством инвариантности полной потенциальной энергии КЭ по отношению к различным системам координат:  $\bar{\Pi} = \Pi$ .

Выражения для  $\bar{\Pi}$  и  $\Pi$  имеют вид

$$\bar{\Pi} = \frac{1}{2} \{\bar{r}\}^T [\bar{K}] \{\bar{r}\} - \{\bar{r}\}^T \{\bar{P}\} \quad (\text{в локальной системе координат});$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \{r\}^T [K] \{r\} - \{r\}^T \{P\} \quad (\text{в глобальной системе координат}).$$

Узловые перемещения  $\{\bar{r}\}$  и  $\{r\}$  конечного элемента можно связать соотношением  $\{\bar{r}\} = [L]\{r\}$ , где  $[L]$  - матрица преобразования, содержащая направляющие косинусы локальных осей элемента относительно глобальных осей координат. Подставляя данное соотношение в  $\bar{\Pi}$ , получаем выражение

$$\bar{\Pi} = \frac{1}{2} \{r\}^T [L]^T [\bar{K}] [L] \{r\} - \{r\}^T [L]^T \{\bar{P}\}.$$

Из условия  $\Pi = \bar{\Pi}$  получаем формулы для вычисления матрицы жесткости  $[K]$  и вектора нагрузки  $\{P\}$  элемента в глобальной системе координат:

$$[K] = [L]^T [\bar{K}] [L]; \{P\} = [L]^T \{\bar{P}\}.$$

## 4.5. ФОРМИРОВАНИЕ МАТРИЦ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УЗЛОВЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

### ФЕРМЕННЫЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ

Узловые перемещения ферменного КЭ (рис. 4.10) в локальной и глобальной системах координат связаны соотношениями

$$\bar{u}_1 = u_1 \cos \alpha + v_1 \cos \beta; \bar{u}_2 = u_2 \cos \alpha + v_2 \cos \beta.$$

Представляя данные соотношения в матричной форме

$$\{\bar{r}\} = [L]\{r\},$$

где

$$\{\bar{r}\} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix}; \{r\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix},$$

получаем матрицу преобразования узловых перемещений ферменного КЭ:

$$[L] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \cos \beta \end{bmatrix}.$$

Направляющие косинусы локальной

оси  $1\bar{x}$  вычисляются через глобальные координаты узлов конечного элемента:

$$\cos \alpha = \frac{x_2 - x_1}{l}; \cos \beta = \frac{y_2 - y_1}{l}, \quad (4.5.1)$$

где  $l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$  - длина элемента.

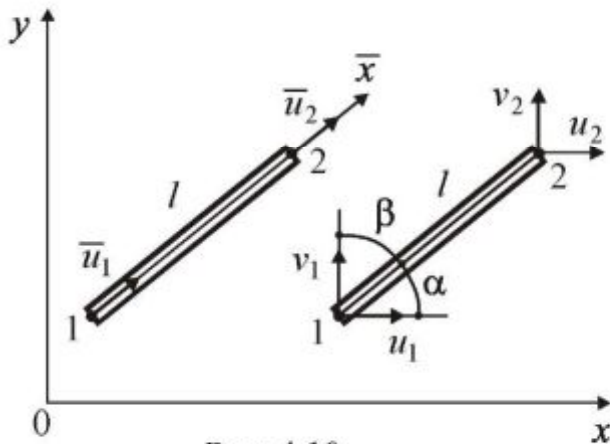


Рис. 4.10.

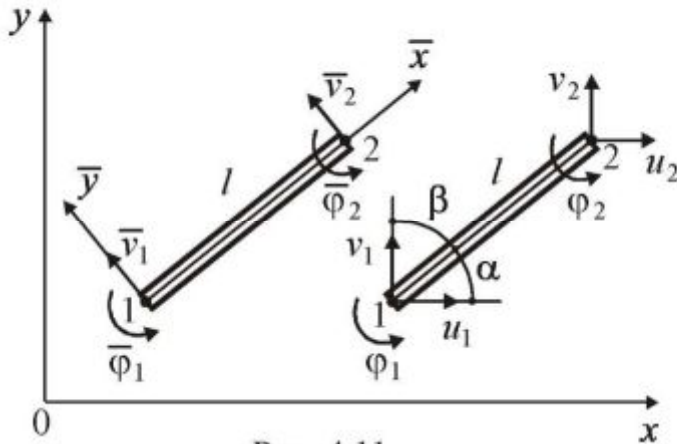
## БАЛОЧНЫЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ

Связь между узловыми перемещениями балочного КЭ (рис. 4.11) в локальной и глобальной системах координат будет такой:

$$\begin{aligned}\bar{v}_1 &= -u_1 \cos \beta + v_1 \cos \alpha; & \bar{\varphi}_1 &= \varphi_1; \\ \bar{v}_2 &= -u_2 \cos \beta + v_2 \cos \alpha; & \bar{\varphi}_2 &= \varphi_2.\end{aligned}$$

Данную связь можно представить в виде:

$$\{\bar{r}\} = [L]\{r\}$$



где

$$\{\bar{r}\} = \begin{Bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{\varphi}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\varphi}_2 \end{Bmatrix}, \quad \{r\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix};$$

Рис. 4.11.

$$[L] = \begin{bmatrix} -\cos \beta & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos \beta & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Здесь  $[L]$  - матрица преобразования узловых перемещений балочного КЭ. Направляющие косинусы локальной оси  $1\bar{x}$  вычисляются по формулам (4.5.1).



## РАМНЫЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ

Перемещения узлов рамного КЭ (рис. 4.12) в локальной и глобальной системах координат связаны зависимостями

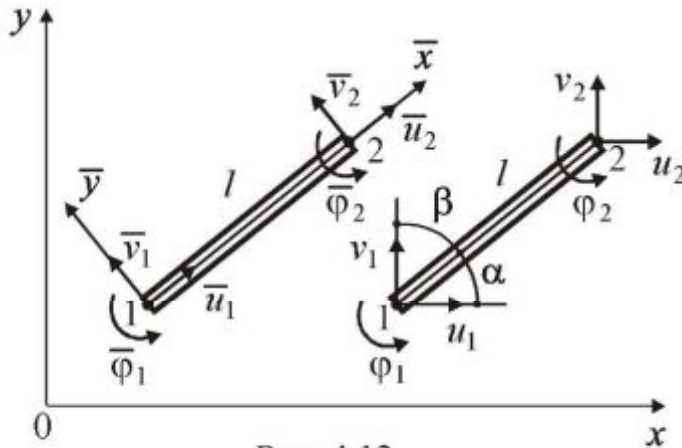


Рис. 4.12.

$$\bar{u}_1 = u_1 \cos \alpha + v_1 \cos \beta;$$

$$\bar{v}_1 = -u_1 \cos \beta + v_1 \cos \alpha;$$

$$\bar{\varphi}_1 = \varphi_1;$$

$$\bar{u}_2 = u_2 \cos \alpha + v_2 \cos \beta;$$

$$\bar{v}_2 = -u_2 \cos \beta + v_2 \cos \alpha;$$

$$\bar{\varphi}_2 = \varphi_2.$$

Вводя векторы

$$\{\bar{r}\} = \{\bar{u}_1 \ \bar{v}_1 \ \bar{\varphi}_1 \ \bar{u}_2 \ \bar{v}_2 \ \bar{\varphi}_2\},$$

$$\{r\} = \{u_1 \ v_1 \ \varphi_1 \ u_2 \ v_2 \ \varphi_2\}$$

и представляя данные зависимости в виде  $\{\bar{r}\} = [L]\{r\}$ , получаем матрицу преобразования  $[L]$ :

$$[L] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos \beta & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos \beta & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Значения  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  вычисляются по формулам (4.5.1).

## ТРЕУГОЛЬНЫЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ПРИ ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Выберем локальную ось  $1\bar{x}$  направленной по стороне 1-2 элемента (рис. 4.13). Вторая локальная ось  $1\bar{y}$  располагается в плоскости элемента. Связь между перемещениями любого узла  $i$  ( $i=1,2,3$ ) элемента в локальной и глобальной системах координат имеет вид

$$\bar{u}_i = t_{11}u_i + t_{12}v_i + t_{13}w_i, \quad \bar{v}_i = t_{21}u_i + t_{22}v_i + t_{23}w_i.$$

Здесь

$$t_{11} = \cos(\bar{x}, x), \quad t_{12} = \cos(\bar{x}, y), \quad t_{13} = \cos(\bar{x}, z),$$

$$t_{21} = \cos(\bar{y}, x), \quad t_{22} = \cos(\bar{y}, y), \quad t_{23} = \cos(\bar{y}, z)$$

- направляющие косинусы локальных осей  $1\bar{x}, 1\bar{y}$ .

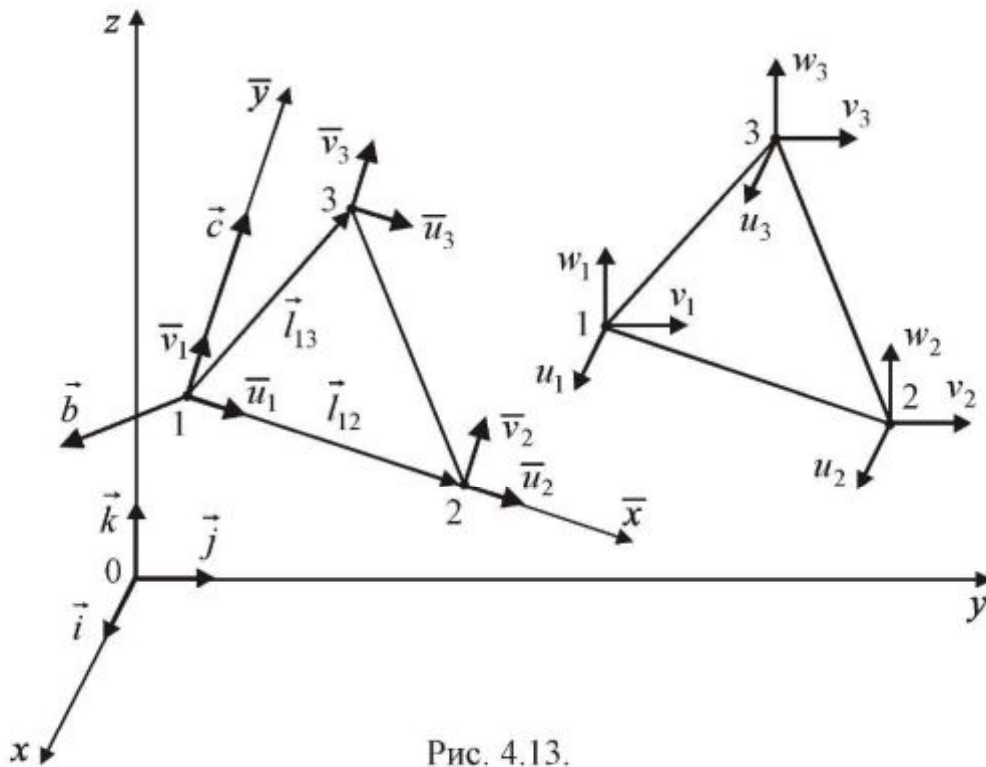


Рис. 4.13.

Выражения для  $\bar{u}_i, \bar{v}_i$  можно представить в матричной форме:

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \end{Bmatrix} = [t] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}, \quad (4.5.2)$$

где

$$[t] = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \end{bmatrix}.$$

Тогда связь между узловыми перемещениями  $\{\bar{r}\} = \{\bar{u}_1 \bar{v}_1 \bar{u}_2 \bar{v}_2 \bar{u}_3 \bar{v}_3\}$  и  $\{r\} = \{u_1 v_1 u_2 v_2 u_3 v_3\}$  в локальной и глобальной системах координат можно представить в виде

$$\{\bar{r}\} = [L]\{r\},$$

где  $[L]$  - матрица преобразования, формируемая из блоков  $[t]$ :

$$[L] = \begin{bmatrix} [t] & 0 & 0 \\ 0 & [t] & 0 \\ 0 & 0 & [t] \end{bmatrix}.$$

Перейдем к определению направляющих косинусов, входящих в матрицу  $[t]$ . Направляющие косинусы локальной оси  $1\bar{x}$  определяются непосредственно через глобальные координаты узлов 1, 2:

$$t_{11} = \frac{x_2 - x_1}{l_{12}}; \quad t_{12} = \frac{y_2 - y_1}{l_{12}}; \quad t_{13} = \frac{z_2 - z_1}{l_{12}}.$$

Здесь  $l_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$  - длина стороны 1-2 элемента.

Для определения направляющих косинусов локальной оси  $1\bar{y}$  введем векторы  $\vec{l}_{12}, \vec{l}_{13}$  (рис. 6.4) и найдем векторное произведение:

$$\vec{b} = \vec{l}_{12} \times \vec{l}_{13} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot b_x + \vec{j} \cdot b_y + \vec{k} \cdot b_z.$$

Здесь

$$b_x = (y_2 - y_1)(z_3 - z_1) - (y_3 - y_1)(z_2 - z_1),$$

$$b_y = (x_3 - x_1)(z_2 - z_1) - (x_2 - x_1)(z_3 - z_1),$$

$$b_z = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$$

- проекции вектора  $\vec{b}$  на глобальные оси  $0x, 0y, 0z$ . Вектор  $\vec{b}$  согласно определению векторного произведения направлен перпендикулярно векторам  $\vec{l}_{12}, \vec{l}_{13}$  так, чтобы при виде навстречу данному вектору вектор  $\vec{l}_{12}$  стремился поворачиваться при совмещении с вектором  $\vec{l}_{13}$  на наименьший угол между этими двумя векторами против хода часовой стрелки.

Далее найдем векторное произведение векторов  $\vec{b}$  и  $\vec{l}_{12}$ :

$$\vec{c} = \vec{b} \times \vec{l}_{12} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot c_x + \vec{j} \cdot c_y + \vec{k} \cdot c_z,$$

где

$$c_x = b_y(z_2 - z_1) - b_z(y_2 - y_1); \quad c_y = b_z(x_2 - x_1) - b_x(z_2 - z_1);$$

$$c_z = b_x(y_2 - y_1) - b_y(x_2 - x_1).$$

Согласно прежнему определению вектор  $\vec{c}$  получается направленным по локальной оси  $1\bar{y}$ . Поэтому направляющие косинусы данной оси совпадают с направляющими косинусами вектора  $\vec{c}$ :

$$t_{21} = c_x/c; \quad t_{22} = c_y/c; \quad t_{23} = c_z/c,$$

где  $c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}$  - длина вектора  $\vec{c}$ .

Локальные координаты узлов элемента, необходимые для формирования его матрицы жесткости  $[\bar{K}]$  в локальной системе координат, определяются через глобальные координаты  $x_i, y_i, z_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) данных узлов с использованием преобразования, аналогичного выражению (4.5.2):

$$\begin{Bmatrix} \bar{x}_i \\ \bar{y}_i \end{Bmatrix} = [t] \begin{Bmatrix} x_i - x_1 \\ y_i - y_1 \\ z_i - z_1 \end{Bmatrix}.$$

При  $i = 1$  получаем, как и должно быть,  $\bar{x}_1 = \bar{y}_1 = 0$ .

#### 4.6. ФОРМИРОВАНИЕ МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ И ВЕКТОРА НАГРУЗКИ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ МОДЕЛИ КОНСТРУКЦИИ

Узловые перемещения  $\{r\}$  конечно-элементной модели конструкции находятся из системы разрешающих уравнений  $[K]\{r\} = \{P\}$ . Физический смысл

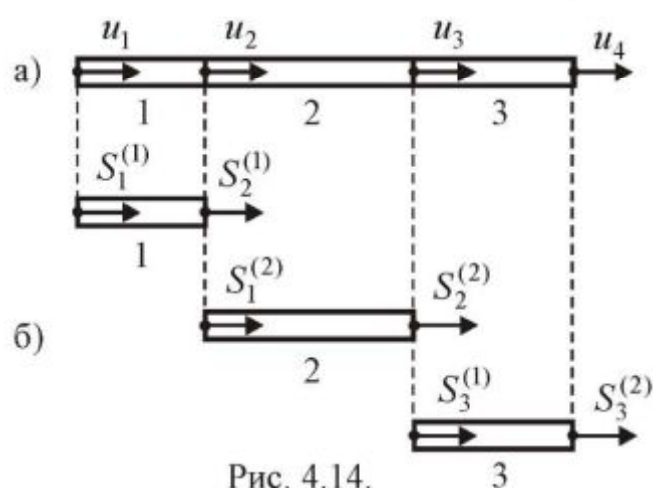


Рис. 4.14.

данной системы состоит, как известно, в равновесии внутренних и внешних узловых сил конструкции. Проследим процедуру формирования (сборки) матрицы  $[K]$  на простейшем примере: прямолинейном стержне, составленном из трех ферменных конечных элементов (рис. 4.14а).

Внутренние узловые силы в конечных элементах (рис. 4.14б) определяются путем умножения

матриц жесткости данных элементов на перемещения их узлов (нумерация данных сил в конечных элементах считается локальной, а нумерация узловых перемещений - глобальной):

$$\begin{Bmatrix} S_1^{(1)} \\ S_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} S_1^{(2)} \\ S_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} \\ k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} S_1^{(3)} \\ S_2^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(3)} & k_{12}^{(3)} \\ k_{21}^{(3)} & k_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}.$$

Внутренние узловые силы всего стержня составляются из узловых сил конечных элементов:

$$\begin{aligned} S_1 &= S_1^{(1)} = k_{11}^{(1)}u_1 + k_{12}^{(1)}u_2; \\ S_2 &= S_2^{(1)} + S_1^{(2)} = k_{21}^{(1)}u_1 + k_{22}^{(1)}u_2 + k_{11}^{(2)}u_2 + k_{12}^{(2)}u_3; \\ S_3 &= S_2^{(2)} + S_1^{(3)} = k_{21}^{(2)}u_2 + k_{22}^{(2)}u_3 + k_{11}^{(3)}u_3 + k_{12}^{(3)}u_4; \\ S_4 &= S_2^{(3)} = k_{21}^{(3)}u_3 + k_{22}^{(3)}u_4. \end{aligned}$$

Полученные выражения можно записать в матричной форме:



$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} + k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} & 0 \\ 0 & k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} + k_{11}^{(3)} & k_{12}^{(3)} \\ 0 & 0 & k_{21}^{(3)} & k_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = [K]\{r\}.$$

Отсюда видно, что матрица жесткости  $[K]$  всей конструкции составляется из соответствующих коэффициентов жесткости конечных элементов. При этом по направлениям перемещений, являющихся общими для смежных элементов, происходит сложение соответствующих этим перемещениям коэффициентов жесткости данных элементов. Описанная процедура формирования матрицы жесткости всей конструкции носит название метода прямой жесткости.

Аналогичным способом формируется вектор нагрузки  $\{P\}$  конечно-элементной модели стержня из внешних узловых сил отдельных элементов:

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} + P_1^{(2)} \\ P_2^{(2)} + P_1^{(3)} \\ P_2^{(3)} \end{Bmatrix}.$$

Рассмотрим плоскую раму, составленную из четырех конечных элементов (рис. 4.15). Цифрами 1, 2, 3, ..., 15 обозначены глобальные номера узловых перемещений конструкции, включая и нулевые перемещения, по направлениям которых имеются опорные связи (эти связи удобнее учитывать после формирования полной системы уравнений). Цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6 обозначены локальные номера узловых перемещений отдельных конечных элементов (рис. 4.16).

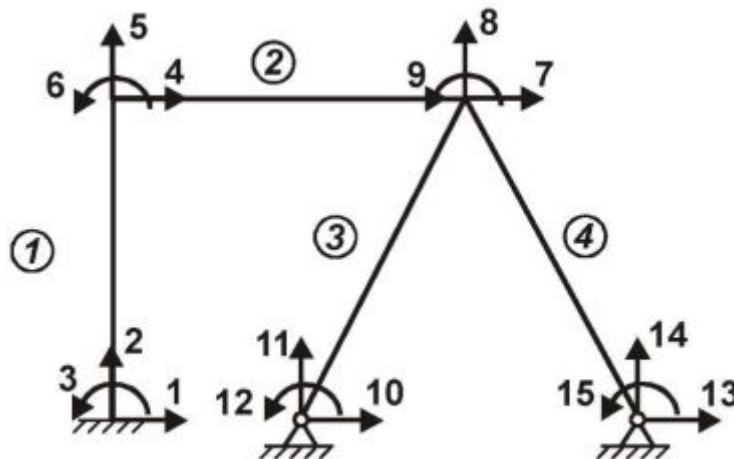


Рис. 4.15.



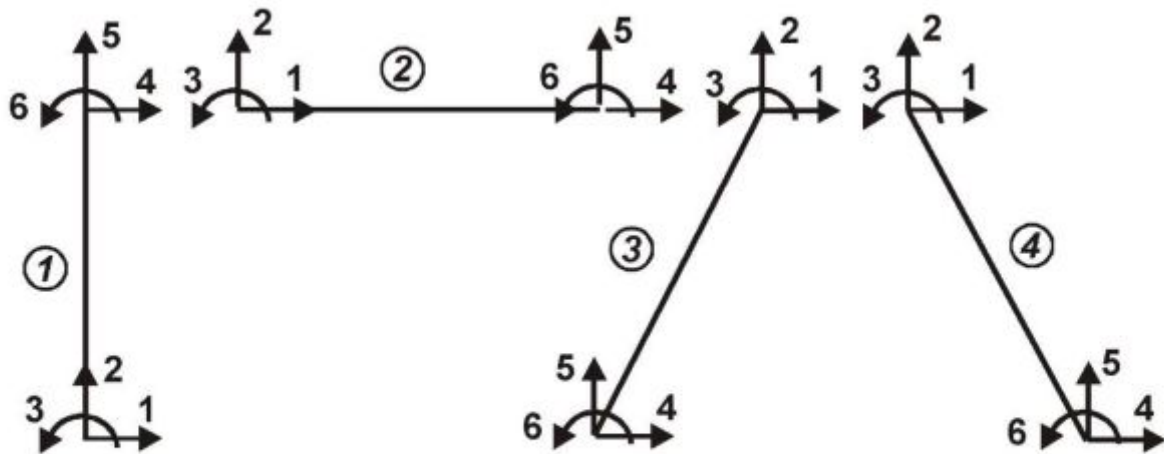


Рис. 4.16.

На рис. 4.17 показана схема сборки матрицы жесткости  $[K]$  рассматриваемой рамы. Сверху и справа перечислены глобальные номера узловых перемещений конечных элементов. Значками  $\blacksquare$ ,  $\blacktriangle$ ,  $\bullet$ ,  $\blacklozenge$  на схеме условно показаны коэффициенты жесткости соответственно первого, второго, третьего и четвертого конечных элементов. Положение этих коэффициентов в матрице  $[K]$  определяется парой глобальных индексов (глобальных номеров узловых перемещений) взамен пары соответствующих им локальных индексов. В ячейках матрицы  $[K]$ , где находятся несколько значков, коэффициенты жесткости конечных элементов, соответствующие этим значкам, складываются. Пустые ячейки матрицы  $[K]$  содержат нули.

Аналогично формируется вектор нагрузки  $\{P\}$  всей конструкции (рис. 4.18). С целью экономии места элементы вектора  $\{P\}$  расположены в массиве горизонтально. Значками  $\blacksquare$ ,  $\blacktriangle$ ,  $\bullet$ ,  $\blacklozenge$  снова показаны условно внешние узловые силы тех же конечных элементов.

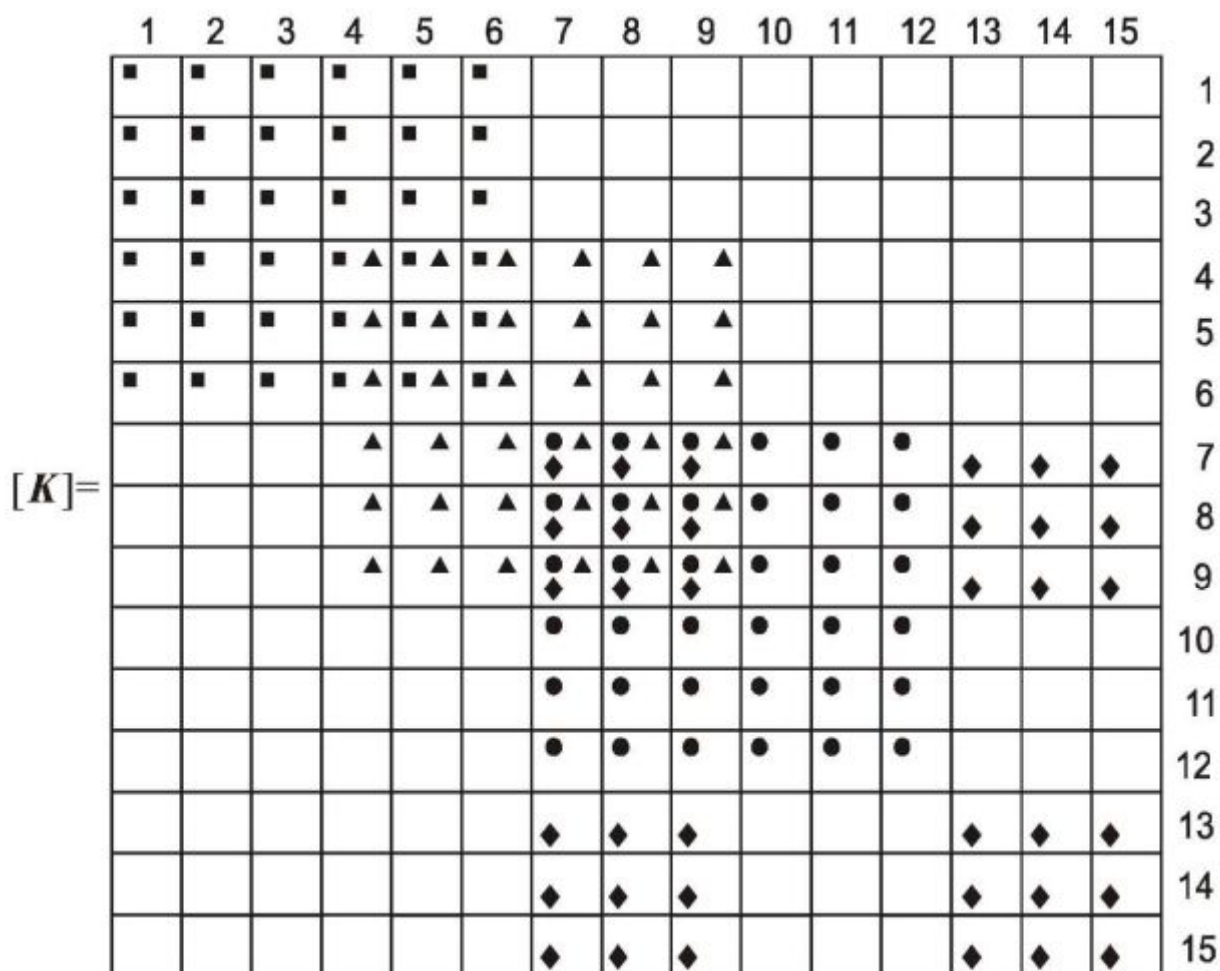


Рис. 4.17.

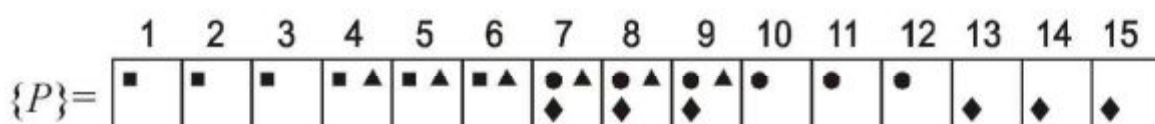


Рис. 4.18.

Рассмотренный выше процесс формирования матрицы жесткости  $[K]$  и вектора нагрузки  $\{P\}$  всей конструкции при большом количестве конечных элементов является весьма трудоемким и не исключает ошибок. Поэтому при расчете конструкций методом конечных элементов этот процесс осуществляется всегда автоматически. Управление сборкой матрицы  $[K]$  и вектора  $\{P\}$  производится с помощью матрицы индексов перемещений, устанавливающей соответствие между локальными и глобальными номерами узловых перемещений конечных элементов. Для рамы, показанной на рис. 4.15, матрица индексов перемещений имеет вид

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 7 & 8 & 9 & 13 & 14 & 15 \end{bmatrix}.$$

В строках матрицы  $[A]$  указаны глобальные номера узловых перемещений конечных элементов в порядке следования соответствующих им локальных номеров. Число строк в матрице  $[A]$  равно числу конечных элементов.

Сборка матрицы  $[K]$  и вектора  $\{P\}$  осуществляется в цикле по конечным элементам. Ниже приведен фрагмент программы на языке ПАСКАЛЬ, реализующий этот процесс.

```

for M:=1 to NE do
  begin
  .....
    for I:=1 to 6 do
      begin
        IG:=A[M,I];
        P[IG]:=P[IG]+PM[I];
        for J:=1 to 6 do
          begin
            JG:=A[M,J];
            K[IG,JG]:=K[IG,JG]+KM[I,J];
          end;
        end;
      end;
    end;
  end;

```

Многоточием обозначены пропущенные в цикле по конечным элементам операции, необходимые для формирования матрицы жесткости и вектора нагрузки текущего элемента. Обозначения в программе:

- M – номер текущего конечного элемента;
- NE – число конечных элементов;
- A – матрица индексов перемещений;
- I, J – локальные индексы узловых перемещений конечного элемента;
- IG, JG – соответствующие им глобальные индексы, выбираемые из матрицы A;
- K, P – соответственно матрица жесткости и вектор нагрузки конструкции;
- KM, PM – соответственно матрица жесткости и вектор нагрузки текущего конечного элемента с номером M.

После завершения цикла по конечным элементам к вектору нагрузки  $\{P\}$  добавляются еще сосредоточенные силы и моменты по направлениям соответствующих им узловых перемещений.

#### 4.7. УЧЕТ УСЛОВИЙ ЗАКРЕПЛЕНИЯ КОНСТРУКЦИИ В МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В предыдущем параграфе матрица жесткости  $[K]$  и вектор нагрузки  $\{P\}$  конечно-элементной модели конструкции формировались в предположении отсутствия опорных связей. Поэтому систему разрешающих уравнений

$$[K]\{r\} = \{P\} \quad (4.7.1)$$

необходимо далее преобразовать так, чтобы перемещения  $r_i$  ( $i = j, k, l, \dots$ ) по направлениям опорных связей при решении преобразованной системы были равны нулю (в случае абсолютно жестких опор). Для этого можно использовать три способа.

Первый способ заключается в удалении из системы (4.7.1) уравнений с номерами  $i = j, k, l, \dots$ , соответствующими номерам нулевых перемещений по направлениям опорных связей, что, очевидно, приводит к уменьшению порядка полученной системы уравнений. Но в этом случае естественным образом изменятся номера оставшихся (ненулевых) узловых перемещений конструкции, что создаст проблему дальнейшей идентификации узловых перемещений конечных элементов, необходимых для определения их напряженного состояния, с использованием прежней матрицы индексов перемещений. Поэтому описанный способ учета условий закрепления конструкции имеет в методе конечных элементов весьма ограниченное применение.

Второй способ заключается в обнулении строк и столбцов с номерами  $i = j, k, l, \dots$  матрицы  $[K]$  кроме диагональных элементов  $k_{ii}$ . В векторе  $\{P\}$  обнуляются соответствующие элементы  $P_i$ . В результате уравнения с номерами  $i$  системы (4.7.1) будут иметь вид  $k_{ii}r_i = 0$ , откуда следует  $r_i = 0$ . Данный способ можно использовать и для учета кинематических воздействий (заданных перемещений  $\Delta_i$  в направлениях опорных связей). В этом случае с матрицей  $[K]$  осуществляются прежние процедуры, а элементы  $P_i$  вектора  $\{P\}$  заменяются произведениями  $k_{ii}\Delta_i$ . В результате уравнения с номерами  $i$  системы (4.7.1) будут такими:  $k_{ii}r_i = k_{ii}\Delta_i$ . Отсюда следует требуемое условие  $r_i = \Delta_i$ . Преимущество данного способа перед предыдущим состоит в возможности использования прежней матрицы индексов перемещений при дальнейшем определении узловых перемещений конечных элементов, входящих в состав вектора перемещений  $\{r\}$  всей конструкции. Следует также отметить, что уравнения типа  $k_{ii}r_i = 0$  или  $k_{ii}r_i = k_{ii}\Delta_i$  решаются не отдельно, а совместно со всеми

уравнениями (4.7.1) с использованием какого-либо стандартного метода решения систем линейных алгебраических уравнений.

Третий способ состоит в умножении диагональных элементов  $k_{ii}$  матрицы  $[K]$  на параметр штрафа  $\alpha$ , выбираемый в диапазоне  $10^{10} \div 10^{12}$ . В результате уравнения с номерами  $i$  системы (4.7.1) будут такими:

$$k_{i1}r_1 + k_{i2}r_2 + \dots + k_{ii}\alpha r_i + \dots + k_{in}r_n = P_i. \quad (4.7.2)$$

Слагаемое с параметром  $\alpha$  в уравнении (4.7.2) примерно в  $10^{10} \div 10^{12}$  больше других слагаемых. Это приводит к тому, что перемещения  $r_i$  получаются практически равными нулю. При учете заданных перемещений  $\Delta_i$  элементы  $P_i$  вектора  $\{P\}$  заменяются произведениями  $k_{ii}\alpha \Delta_i$ . Тогда вместо (4.7.2) будем иметь:

$$k_{i1}r_1 + k_{i2}r_2 + \dots + k_{ii}\alpha r_i + \dots + k_{in}r_n = k_{ii}\alpha \Delta_i. \quad (4.7.3)$$

Это дает перемещения  $r_i$  близкие к заданным перемещениям  $\Delta_i$ . Погрешность выполнения условий  $r_i = 0$  или  $r_i = \Delta_i$  в данном способе имеет порядок  $\alpha^{-1} = 10^{-10} \div 10^{-12}$ , что вполне пригодно для инженерных расчетов. Описанный способ учета условий закрепления конструкции имеет такое же преимущество, как и второй, состоящее в сохранении начальных номеров узловых перемещений конструкции. Его рекомендуется использовать в том случае, когда все ненулевые элементы матрицы  $[K]$  расположены вблизи ее главной диагонали, образуя достаточно узкую ленту. Тогда (с целью экономии необходимого объема оперативной памяти компьютера) матрицу  $[K]$  можно формировать не в квадратном, а прямоугольном массиве: первый столбец массива содержит главную диагональ данной матрицы; следующие столбцы – ненулевые диагонали, расположенные выше или ниже главной диагонали. Кроме того, указанная схема формирования матрицы  $[K]$  позволяет использовать специальные эффективные методы решения систем линейных алгебраических уравнений, ориентированные на симметрию и ленточную структуру матрицы  $[K]$  (метод разложения Холесского, метод  $LDL^T$  - факторизации, профильный метод).



#### 4.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

После решения системы (4.7.1) с учетом условий закрепления конструкции можно определить узловые перемещения конечных элементов (они содержатся среди узловых перемещений  $\{r\}$  конструкции). Это дает возможность определить напряженное состояние данных элементов.

В стержневых элементах (ферменных, балочных и рамных) такое состояние определяется обобщенными внутренними узловыми силами  $N, Q, M$ . Положительные направления данных сил совпадают с положительными направлениями соответствующих узловых перемещений конечного элемента в локальной системе координат. Рассмотрим, к примеру, рамный элемент (рис. 4.19). Узловые перемещения элемента с некоторым номером  $m$  в локальной системе координат  $1\bar{x}\bar{y}$  и его узловые внутренние силы определяются соответственно векторами

$$\{\bar{r}\}_m = \{\bar{u}_1 \ \bar{v}_1 \ \bar{\varphi}_1 \ \bar{u}_2 \ \bar{v}_2 \ \bar{\varphi}_2\}, \quad \{S\}_m = \{N_1 \ Q_1 \ M_1 \ N_2 \ Q_2 \ M_2\}.$$

Вектор  $\{S\}_m$  определяется через вектор  $\{\bar{r}\}_m$  и матрицу жесткости элемента  $[\bar{K}]_m$  в локальной системе координат:

$$\{S\}_m = [\bar{K}]_m \{\bar{r}\}_m. \quad (4.8.1)$$

Выражение (4.7.1) следует непосредственно из физического смысла коэффициентов жесткости  $\bar{k}_{ij}$ , составляющих матрицу  $[\bar{K}]_m$ :  $\bar{k}_{ij}$  - есть внутренняя узловая сила в элементе в направлении  $i$ -го перемещения от единичного  $j$ -го перемещения в локальной системе координат.

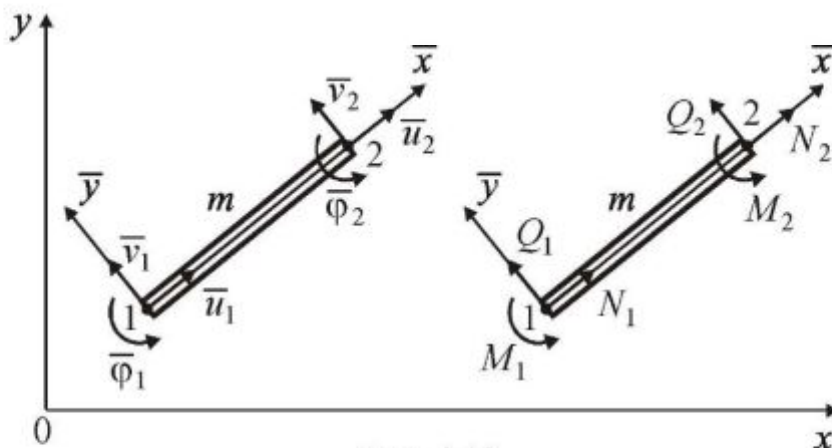


Рис. 4.19.

Вектор  $\{\bar{r}\}_m$  определяется с использованием преобразования

$$\{\bar{r}\}_m = [L]_m \{r\}_m, \quad (4.8.2)$$

где  $\{r\}_m$  - узловые перемещения элемента в глобальной системе координат;  $[L]_m$  - матрица преобразования. С учетом данного преобразования выражение (4.8.1) примет вид

$$\{S\}_m = [\bar{K}]_m [L]_m \{r\}_m. \quad (4.8.3)$$

Следует заметить, что произведение  $[\bar{K}]_m [L]_m$  уже фигурировало ранее при вычислении матрицы жесткости каждого конечного элемента в глобальной системе координат на этапе формирования матрицы жесткости  $[K]$  конструкции, где его можно записывать на жесткий диск, а затем считывать данное произведение в цикле по элементам при определении векторов  $\{S\}_m$ .

Напряженное состояние двумерных и трехмерных конечных элементов определяется вектором  $\{\sigma\}_m$  ( $m$  - номер элемента), содержащим нормальные и касательные напряжения. Рассмотрим, например, уже бывший треугольный конечный элемент, находящийся в плоском напряженном состоянии. Вектор  $\{\sigma\}_m$  содержит в этом случае два нормальных и одно касательное напряжение:  $\{\sigma\}_m = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}\}_m$ . Для вычисления данного вектора через узловые перемещения элемента в глобальной системе координат воспользуемся соотношениями

$$\{\sigma\}_m = [D]_m \{\varepsilon\}_m, \quad \{\varepsilon\}_m = [B]_m \{\bar{r}\}_m, \quad \{\bar{r}\}_m = [L]_m \{r\}_m. \quad (4.8.4)$$

Здесь  $[D]_m$  - матрица упругих свойств материала элемента;  $[B]_m$  - матрица связи деформаций с узловыми перемещениями  $\{\bar{r}\}_m$  элемента в локальной системе координат;  $[L]_m$  - матрица связи узловых перемещений  $\{r\}_m$  с узловыми перемещениями  $\{\bar{r}\}_m$ . В результате получаем формулу для вычисления напряжений  $\{\sigma\}_m$  непосредственно через узловые перемещения  $\{r\}_m$  конечного элемента:

$$\{\sigma\}_m = [D]_m [B]_m [L]_m \{r\}_m. \quad (4.8.5)$$

Для треугольного конечного элемента произведение  $[D]_m [B]_m [L]_m$  вычисляется на этапе формирования полной системы уравнений и записывается на жесткий диск, а затем считывается в цикле по элементам при определении напряжений  $\{\sigma\}_m$ .

#### 4.9. ПОДГОТОВКА ИСХОДНЫХ ДАННЫХ ДЛЯ РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

При изложении материала данного параграфа ограничимся плоскими стержневыми системами, нагруженными силами, лежащими в их плоскости. Исходные данные, необходимые для конечно-элементного расчета таких систем, можно разделить на две группы.

Первая группа данных содержит информацию о конечных элементах: номера узлов, между которыми располагаются элементы (топологическая информация); распределенные нагрузки  $q_x$  и  $q_y$ , действующие на конечные элементы (в простейшем случае эти нагрузки в пределах элементов можно считать постоянными); жесткости  $EF$  на растяжение-сжатие и жесткости  $EI$  на изгиб конечных элементов. Положительные направления  $q_x$ ,  $q_y$  совпадают с направлениями соответствующих осей глобальной системы координат  $Oxy$ .

Вторая группа данных содержит информацию об узлах конструкции: координаты  $x$ ,  $y$  узлов; описание опорных связей и шарниров; узловые внешние силы  $P_x$ ,  $P_y$  и моменты  $M$ . Положительные направления  $P_x$ ,  $P_y$  и  $M$  совпадают с положительными направлениями соответствующих узловых перемещений  $u$ ,  $v$ ,  $\varphi$ .

В качестве примера рассмотрена плоская рама (рис. 4.20) с пронумерованными узлами и конечными элементами. Шарнирный узел, соединяющий элементы 2, 3 рамы, представляется двумя узлами, имеющими одинаковые линейные перемещения и различные углы поворота (если шарнир соединяет более двух элементов, то число узлов в нем равно числу этих элементов). Стрелки  $u$ ,  $v$ ,  $\varphi$  означают положительные направления узловых перемещений в глобальной системе координат  $Oxy$ .

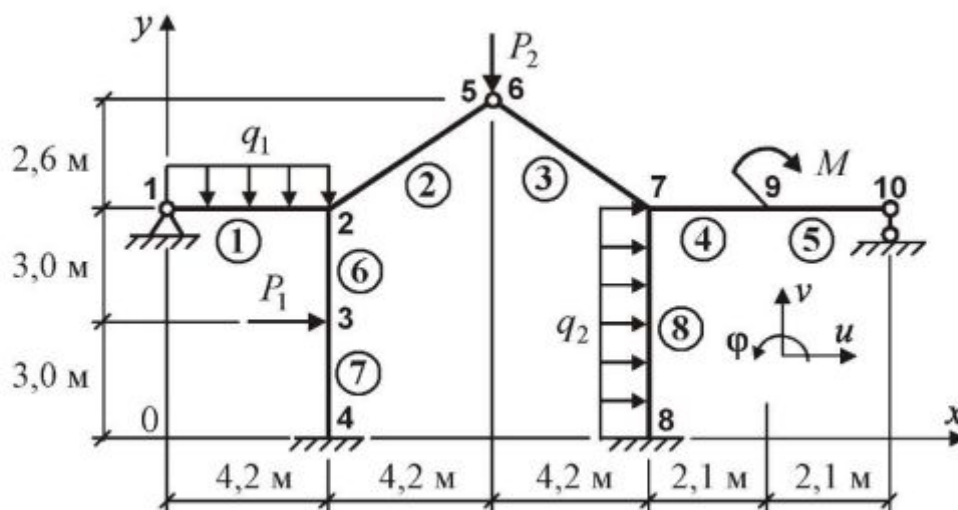


Рис. 4.20.

Нагрузка:  $q_1 = 10$  кН/м;  $q_2 = 24$  кН/м;  $P_1 = 60$  кН;  $P_2 = 54$  кН;  $M = 85$  кН·м.  
 Жесткости конечных элементов на растяжение-сжатие и изгиб (индекс “р” относится к ригелям – элементы 1, 2, 3, 4, 5; индекс “ст” относится к стойкам – элементы 6, 7, 8):  $EF_p = 578000$  кН;  $EI_p = 4060$  кН·м<sup>2</sup>;  $EF_{ст} = 696000$  кН;  $EI_{ст} = 6920$  кН·м<sup>2</sup>.

Исходные данные, необходимые для расчета показанной рамы методом конечных элементов, приведены в таблицах 4.1, 4.2. Цифры 1, 0 в столбцах таблицы 4.2, отмеченных обобщенными перемещениями  $u, v, \varphi$ , означают наличие или отсутствие опорной связи по направлению соответствующего перемещения. Числа 5, 5 в строке 6 таблицы 4.2 означают, что перемещения  $u$  и  $v$  узла 6 такие же, как и узла 5.

Таблица 4.1. Информация о конечных элементах.

Номер элемента	Узлы элемента		Распределенная нагрузка		Жесткости элементов	
			$q_x$	$q_y$	$EF$	$EI$
1	1	2	0	-10	578000	4060
2	2	5	0	0	578000	4060
3	6	7	0	0	578000	4060
4	7	9	0	0	578000	4060
5	9	10	0	0	578000	4060
6	2	3	0	0	696000	6920
7	3	4	0	0	696000	6920
8	7	8	24	0	696000	6920

Таблица 4.2. Информация об узлах.

Номер узла	Координаты узлов		Опорные связи по направлениям $u, v, \varphi$			Узловые внешние силы и моменты		
	$x$	$y$	$u$	$v$	$\varphi$	$P_x$	$P_y$	$M$
1	0,0	6,0	1	1	0	0	0	0
2	4,2	6,0	0	0	0	0	0	0
3	4,2	3,0	0	0	0	60	0	0
4	4,2	0,0	1	1	1	0	0	0
5	8,4	8,6	0	0	0	0	-54	0
6	8,4	8,6	5	5	0	0	0	0
7	12,6	6,0	0	0	0	0	0	0
8	12,6	0,0	1	1	1	0	0	0
9	14,7	6,0	0	0	0	0	0	-85
10	16,8	6,0	0	1	0	0	0	0



#### 4.10. БЛОК-СХЕМА ТИПОВОЙ ПРОГРАММЫ ДЛЯ РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В настоящее время существует множество конечно-элементных программ для расчета конструкций различного класса, в том числе и для расчета стержневых систем. Несмотря на большое разнообразие таких программ, их вычислительная часть содержит типичный набор процедур. На рис. 4.21 приведена блок-схема типовой программы расчета плоской стержневой системы, составленной из рамных конечных элементов.



Рис. 4.21.

### Обозначения, принятые в блок-схеме:

$m$  - номер конечного элемента;

$n$  - число конечных элементов;

$l_m, \cos \alpha_m, \cos \beta_m$  - длина и направляющие косинусы конечного элемента;

$[\bar{K}]_m, \{\bar{P}\}_m$  - соответственно матрица жесткости и вектор нагрузки конечного элемента в локальной системе координат;

$[L]_m$  - матрица преобразования узловых перемещений конечного элемента из глобальной системы координат в локальную;

$[K]_m, \{P\}_m$  - соответственно матрица жесткости и вектор нагрузки конечного элемента в глобальной системе координат;

$[K], \{r\}, \{P\}$  - соответственно матрица жесткости, вектор узловых перемещений и вектор нагрузки всей конструкции;

$\{r\}_m$  - вектор узловых перемещений конечного элемента в глобальной системе координат;

$\{S\}_m$  - вектор внутренних обобщенных узловых сил конечного элемента.

### Литература

1. Строительная механика: учеб. / А.Е. Саргсян [и др.]; под ред. А.Е. Саргсяна. - 2-е изд., испр. и доп. - М.: Высш. шк., 2000. - 416 с.
2. Леонтьев Н.Н. Основы строительной механики стержневых систем: учеб. / Н.Н. Леонтьев, Д.Н. Соболев, А.А. Амосов. - М.: Изд-во АСВ, 1996. - 541 с.
3. Дарков А.В. Строительная механика: учеб. / А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников. - 8-е изд., перераб. и доп. - М.: Высш. шк., 1986. - 607 с.
4. Смирнов В.А. Строительная механика: учеб. для вузов / В.А. Смирнов, С.А. Иванов, М.А. Тихонов. - М.: Стройиздат, 1984. - 208 с.
5. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики (статика стержневых систем): учеб. пособие / под ред. Г. К. Клейна. - 4-е изд., перераб. и доп. - М.: Высш. шк., 1980. - 384 с.
6. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике: Пер. с англ. - М.: Мир, 1975. - 541 с.
7. Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов: Пер. с англ. - М.: Мир, 1981. - 304 с.
8. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов: Пер. с англ. - М.: Мир, 1979. - 392 с.