

**ОПД.Р.03 СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА**  
**ИЗУЧЕНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ РАБОТЫ**  
**СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ КОНСТРУКЦИЙ**  
**И РЕГУЛИРОВАНИЕ УСИЛИЙ В НИХ**  
Методические указания к расчетно-графической работе

Даны необходимые теоретические сведения и общие рекомендации по методике расчетов, приведены примеры решения задач различных типов. Для обеспечения самостоятельной работы студентов в первую часть методических указаний включены: содержание индивидуального задания, варианты расчетных схем и исходных данных, контрольные вопросы по теме задания и приложением – таблицы метода перемещений с учетом деформации сдвига.

## О Г Л А В Л Е Н И Е

ВВЕДЕНИЕ .....	4
1. ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ .....	6
2. ИЗУЧЕНИЕ ВЛИЯНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ ДЕФОРМАЦИЙ ЭЛЕМЕНТОВ НА УСИЛИЯ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМАХ .....	8
2.1. Общие сведения .....	8
2.2. Расчет статически неопределимых конструкций с учетом деформации сдвига .....	12
2.3. Оценка влияния продольных деформаций на усилия и перемещения в комбинированных системах .....	29
2.4. Учет изгиба стержней ферм .....	46
3. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ .....	51
4. СОДЕРЖАНИЕ ИНДИВИДУАЛЬНОГО РАСЧЕТНОГО ЗАДАНИЯ .....	52
5. ВАРИАНТЫ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ .....	53
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Таблицы метода перемещений с учетом сдвига .....	59
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Об одном варианте формирования исходных матриц при определении перемещений с учетом сдвига .....	61
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА .....	61

## ВВЕДЕНИЕ

Цикл дисциплин теории сооружений открывает перед теми, кто его изучает, возможности не только понимать и объяснять рационально-логически особенности работы различных строительных конструкций, но и (что не менее важно для специалиста!) интуитивно ощущать «игру сил» в них – это умение вырабатывается по мере накопления знаний и опыта.

В этом смысле теория расчета статически неопределимых систем играет особую роль в формировании профессиональных представлений инженера-строителя о работе реальных сооружений – ведь подавляющее большинство современных несущих строительных конструкций принципиально следует рассматривать именно как системы статически неопределимые.

Понимание того, что происходит с конструкциями в процессе их деформирования при разнообразных воздействиях, позволяет обоснованно подходить к оценке их состояния, надежности и экономичности, целенаправленно вмешиваться в их работу, то есть осуществлять регулирование и управление поведением конструкций – при этом в ряде случаев удастся полезно использовать такие эффекты и свойства, которые традиционно считаются неблагоприятными. Ярким примером может служить отношение к факту *чувствительности статически неопределимых систем к кинематическим воздействиям* (смещениям связей), в том числе к осадкам опор. Известно, что, в отличие от систем статически определимых, где смещения связей (равно как и изменения температуры) не вызывают возникновения интегральных внутренних силовых факторов – изгибающих и крутящих моментов, продольных и поперечных сил и др. (перемещения и температурные деформации при этом, конечно, возникают, но они развиваются как свободные, нестесненные), *в системах с лишними связями усилия от упомянутых видов воздействий отличны от нуля*. Если это воздействия природного или техногенного происхождения, неподвластные нам в процессе эксплуатации сооружения, то они, как правило, выступают в качестве неблагоприятных факторов, «отнимая» у конструкций некоторую (иногда значительную) часть их несущей способности, что приводит к увеличению расхода материала.

Строго говоря, в природе вообще не существует статически определимых систем, есть лишь некоторые статически определимые (после введения гипотез и предположений) задачи определения конкретных силовых факторов. Рекомендуется осознать это обстоятельство – с ним, в частности, могут быть связаны дополнительные возможности регулирования состояния конструкций.

Но это же свойство статически неопределимых систем можно заставить служить на пользу делу – если, задавая *контролируемые* смещения внешних или внутренних связей либо искусственно создавая *начальные температурные поля* в процессе сборки и монтажа конструкций, «подправлять» усилия и напряжения, делая их распределение более равномерным и, следовательно, более выгодным с точки зрения материалоемкости.

Другой отличительной особенностью статически неопределимых систем, имеющей важное практическое значение, является зависимость значений силовых факторов в разных сечениях конструкции от соотношений и (при температурных и кинематических воздействиях) числовых значений жесткостей элементов системы при разных видах их деформаций (растяжении или сжатии, изгибе, сдвиге, кручении). Инженер, выполняющий расчет конструкции или оценивающий состояние находящегося в эксплуатации сооружения, должен ясно представлять, какие именно составляющие деформации существенно влияют на напряженно-деформированное состояние системы, а какими можно пренебречь с допустимой погрешностью. Например, априори понятно, что на распределении усилий в комбинированных системах (шпренгельных балках, рамах и арках с затяжками, вантовых конструкциях и т.п.) ошутимо сказываются продольные деформации очень гибких стержней, работающих на чистое растяжение без изгиба; в конструкциях с тонкостенными элементами и в ряде других случаев значительным может быть влияние сдвига и т.д. Но лишь выполнив решение некоторых типовых задач, можно убедиться раз и навсегда в том, что влияние этих факторов настолько велико, что пренебрежение ими может *радикально исказить* картину усилий и перемещений в системе.

В данных методических указаниях не ставилась цель дать детальную и исчерпывающую информацию об особенностях работы, принципах и методах регулирования напряженно-деформированного состояния разнообразных статически неопределимых конструкций во всем многообразии и сложности реальных условий их эксплуатации. Существует весьма обширная научная и учебно-методическая литература по обозначенным вопросам – малая ее часть включена в списки, приведенные в 1-й и 2-й частях, – ими можно воспользоваться на начальной стадии изучения вызвавшей интерес проблемы. Методические указания содержат необходимый минимум теоретических данных и примеры решения характерных задач, входящих в индивидуальное расчетное задание «Изучение особенностей работы статически неопределимых конструкций и регулирование усилий в них».

Это задание отличается от других, выполняемых по программе базового курса строительной механики, своей большей направленностью на инженерные проблемы, часто встречающиеся в реальном проектировании и эксплуатации строительных конструкций. Оно призвано помочь студентам осознать возможности применения методов теории сооружений к решению этих проблем и на некоторых конкретных задачах, доведенных до численных результатов, приобрести опыт, полезный как для освоения учебных курсов строительных конструкций, так и для последующей профессиональной инженерной деятельности.

Формулировки задач и расчетные схемы в значительной мере приближены к тем, с которыми приходится сталкиваться в инженерной практике. Конечно, угадываемые в схемах «портреты» реальных строительных конструкций воспринимаются как существенно упрощенные, но это сделано для того, чтобы сугубо арифметические, вычислительные процедуры не были излишне громоздкими и не заслонили бы собой содержательную часть расчета. Вместе с тем и основные размеры конструкций, и характеристики сечений элементов, и параметры воздействий в исходных данных заданий имеют реальные значения. Поэтому получаемые результаты могут истолковываться не только как качественные, – их можно рассматривать также как количественные оценки для типовых модельных задач, что позволяет впоследствии использовать их как некоторые аналоги-«прецеденты» в сходных ситуациях практических расчетов и проектирования строительных конструкций.

## **1. ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ**

Сначала нужно внимательно изучить содержание задания и определить, к какому типу относится поставленная задача, при этом имея в виду то, что некоторые задачи на регулирование усилий могут быть решены по разным методикам. Основные теоретические сведения приведены в начале каждого из тематических разделов.

Рассматриваемые во всех задачах конструкции статически неопределимы, поэтому для их расчета следует использовать известные методы, в первую очередь – классические методы сил, перемещений или смешанный. Поскольку все предлагаемые системы достаточно несложные (с невысокими степенями статической и кинематической неопределимости и сравнительно небольшим числом элементов), то можно выполнять расчет, по собственному усмотрению, в любой форме – обычной или матричной, «вручную» или с применением компьютера.

Но в любом случае имеет смысл, во-первых, избирать *рациональный* (с точки зрения числа основных неизвестных и общей трудоемкости) метод расчета и, во-вторых, для *симметричных систем* применять эффективные способы упрощения решения – такие, как группировка неизвестных или рассмотрение половины системы.

Нужно четко понимать, что в общем решении задачи применение того или иного метода расчета статически неопределимой системы играет сугубо служебную, вспомогательную роль, и этому не стоит придавать излишне большого значения (конечно, предполагается наличие необходимых навыков владения методами строительной механики).

**Основное внимание должно быть сосредоточено на:**

- содержательной части задачи, *ее постановке*;
- пониманию того, *что* предполагается получить в результате;
- оценке возможных *подходов и вариантов* построения решения;
- теоретическом обосновании и *принципиальной схеме решения*;
- *анализе* полученных результатов;
- практических *выводах*.

В данных методических указаниях приведены примеры решения всех типов задач, входящих в расчетное задание, с использованием разных методов расчета статически неопределимых систем. Для облегчения поиска нужного примера можно воспользоваться следующей справочной таблицей:

Содержание задачи		Рациональный метод решения	
		Метод сил	Метод перемещений
Изучение особенностей работы конструкций	Учет деформаций сдвига	Часть 1, задача 2.2.1, А	Часть 1, задача 2.2.1, Б
	Учет продольных деформаций элементов	Часть 1, задача 2.3.1 и часть 2, задача 1.2.1	Часть 1, задача 2.3.2 и часть 2, задача 1.2.2
Регулирование усилий	Изменением жесткостей элементов	Часть 2, задачи 1.5.1, А и 1.6	Часть 2, задача 1.5.1, Б
	Предварительным напряжением	Часть 2, задача 1.3.1, А	Часть 2, задача 1.3.1, Б
	Смещениями опор	Часть 2, задачи 1.4.1 и 1.6	Часть 2, задача 1.4.2

Советуем не ограничиваться изучением лишь тех примеров, которые непосредственно относятся к теме полученного студентом задания – знакомство с теоретическим материалом и решениями других задач будет полезно для формирования знаний и представлений, имеющих ценность для практической инженерной деятельности.

**Безусловно приветствуется проявление творческого подхода, инициативы, любознательности** при выполнении задания – это может проявляться в рассмотрении дополнительных вариантов решения (при изменении нагрузок, условий опирания, соединений элементов и др.), применении не только заданного, но и иных условий регулирования с последующим сопоставлением результатов, в выполнении оптимизации конструкции и т.д.

## 2. ИЗУЧЕНИЕ ВЛИЯНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ ДЕФОРМАЦИЙ ЭЛЕМЕНТОВ НА УСИЛИЯ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМАХ

### 2.1. Общие сведения

При любом воздействии на конструкцию – силовом, температурном, кинематическом и прочих – ее элементы испытывают деформацию, в которой присутствует в общем (пространственном) случае полный комплекс составляющих – растяжение-сжатие, поперечный изгиб (то есть изгиб с сопутствующим сдвигом) и кручение, причем изгиб является косым, а кручение может быть стесненным – с перемещением деформации сечений. В результате такой сложной деформации элементов возникают перемещения точек и сечений конструкции, которые могут быть определены **методом Максвелла – Мора** (если конструкция может рассматриваться как *линейно деформируемая стержневая система*) по формуле

$$\begin{aligned} \Delta_{i\Sigma} &= \Delta_{iF} + \Delta_{it} + \Delta_{ic} = \\ &= \sum_{j=1}^m \int_{l_j} \frac{M_{z,i} M_{z,F}}{EI_z} ds + \sum_{j=1}^m \int_{l_j} \frac{M_{y,i} M_{y,F}}{EI_y} ds + \sum_{j=1}^m \int_{l_j} \frac{N_i N_F}{EA} ds + \\ &+ \sum_{j=1}^m \int_{l_j} k_{\gamma} \frac{Q_{y,i} Q_{y,F}}{GA} ds + \sum_{j=1}^m \int_{l_j} k_{\tau} \frac{Q_{z,i} Q_{z,F}}{GA} ds + \sum_{j=1}^m \int_{l_j} \frac{M_{t,i} M_{t,F}}{GI_t} ds + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^{m_u} \frac{R_{j,i} R_{j,F}}{C_j} + \sum_{j=1}^m \int_{l_j} M_{z,i} \kappa_{z,t} ds + \sum_{j=1}^m \int_{l_j} M_{y,i} \kappa_{y,t} ds + \sum_{j=1}^m \int_{l_j} N_i \varepsilon_{o,t} ds - \\
& - \sum_{j=1}^{m_c} R_{(j),i} \Delta_{(j)}, \tag{2.1}
\end{aligned}$$

записанной без учета деформаций стесненного кручения (при необходимости дополнительные слагаемые аналогичной структуры, содержащие бимоменты  $B_\omega$ , изгибно-крутящие моменты  $M_\omega$  и секториальную жесткость сечения  $EI_\omega$ , могут быть добавлены в (2.1)).

Для плоских стержневых систем формула Максвелла – Мора упрощается и в случае только силового воздействия принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
\Delta_{iF} = & \sum_{j=1}^m \int_{l_j} \frac{M_i M_F}{EI} ds + \sum_{j=1}^m \int_{l_j} k_\tau \frac{Q_i Q_F}{GA} ds + \sum_{j=1}^m \int_{l_j} \frac{N_i N_F}{EA} ds + \\
& + \sum_{j=1}^{m_u} \frac{R_{j,i} R_{j,F}}{C_j}. \tag{2.2}
\end{aligned}$$

Формулы (2.1) и (2.2) аналитически выражают качественно очевидный факт: каждый вид простой деформации вносит свой вклад в полное перемещение.

В количественном измерении вклады различных видов деформаций могут значительно варьировать – это зависит как от типа конструкции, так и от особенностей воздействий. Например, для **балок и рам**, не имеющих затяжек, шпренгелей, подкосов и т.п., основную роль играет изгиб элементов, причем влияние присутствующего в поперечном изгибе сдвига (оцениваемое в формуле Максвелла – Мора слагаемыми, содержащими поперечные силы) обычно в несколько раз меньше, чем влияние собственно изгиба, определяемое слагаемыми с изгибающими моментами. В **фермах** главным (а при идеализированном представлении о работе стержней фермы – единственным) видом деформации элементов является растяжение-сжатие. Для **арок** вклады изгиба, сдвига и растяжения-сжатия в общем случае соизмеримы. В **комбинированных системах** часть стержней деформируется как преимущественно изгибаемые, а элементы типа вант, оттяжек, подвесок и т.п., конструктивно выполняемые часто в виде тросов, кабелей или очень гибких стержней, размеры сечений которых весьма малы в сравнении с их длинами, испытывают практически чистое растяжение-

сжатие, влияние которого на перемещения конструкции может сказываться очень сильно. Это в равной мере относится и к системам типа шпренгельных балок, арок и рам с затяжками, подкосами и прочими безызгибными элементами (особенно работающими на растяжение).

Не следует забывать о возможном влиянии на перемещения системы податливости ее связей – внешних (опор) и внутренних (соединений элементов). Это влияние может быть существенным, если осадки опор, обусловленные деформациями основания или конструкций, на которые опирается рассматриваемое сооружение, соизмеримы с перемещениями, обусловленными собственными деформациями системы, а также в случаях, когда соединения элементов не являются идеально жесткими или шарнирными. Если соответствующие опоры или соединения стержней могут рассматриваться как *упругоподатливые*, их деформативность учитывается последним слагаемым формулы ( 2.2 ) и таким же членом формулы ( 2.1 ).

Упомянутая выше необходимость учитывать не только *особенности самой конструкции*, но и *характер воздействий*, может быть проиллюстрирована на примере параболической симметричной арки.

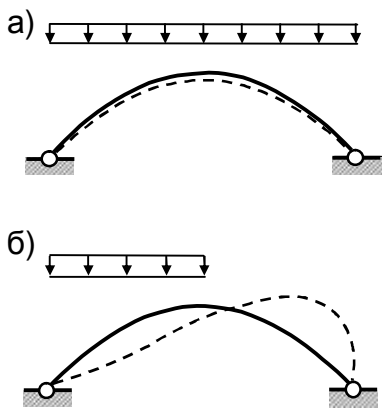


Рис. 2.1

Если приложить к ней вертикальную нагрузку, равномерно распределенную по всему пролету (рис. 2.1, а), то конструкция будет работать почти чисто на сжатие – реально возникающие изгибающие моменты и поперечные силы очень малы. Следовательно, главной причиной перемещений точек арки в этом случае является так называемое *обжатие* ее оси (укорочение за счет деформации сжатия), и при расчете по формуле ( 2.2 ) определяющий вклад даст слагаемое, содержащее продольные силы. Но если ту же арку загрузить равномерно распределенной нагрузкой асимметрично, например, по половине пролета (рис. 2.1, б), то она подвергнется существенному изгибу, что видно из показанной схемы деформаций.

Вследствие этого при определении перемещений основное значение будет иметь первое слагаемое формулы ( 2.2 ). Преобладающим может быть влияние изгиба

также в случае загрузки арки небольшим числом (1...4) сосредоточенных нагрузок даже при их симметричном расположении.

Таким образом, даже для одной и той же конструкции при разных воздействиях необходимость более или менее точного учета той или иной составляющей деформации может оцениваться по-разному.

Полное пренебрежение в расчете некоторым видом деформации элемента (формально это выражается в том, что жесткость сечения при этой деформации принимается бесконечно большой, вследствие чего соответствующий интеграл в формулах (2.1) или (2.2) обращается в нуль) приводит к занижению значения перемещения.

Следует особо отметить

<sup>1</sup> В некоторых зонах конструкции может получаться и *завышение* перемещений, но в тех местах, где перемещения наибольшие по абсолютной величине, их значения *занижаются* (равно как и в среднем по всей конструкции).

*принципиальную разницу в последствиях* необоснованного пренебрежения в расчетах теми или иными деформациями для статически определимых и неопределимых систем. Для первых из них это может привести к ошибочным (с недопустимыми погрешностями) значениям перемещений, но никак не скажется на правильности определения силовых факторов и, следовательно, не отразится на оценке прочности конструкции. В статически неопределимых системах силовые факторы невозможно найти без рассмотрения геометрической стороны задачи (использования условий совместности деформаций и перемещений).

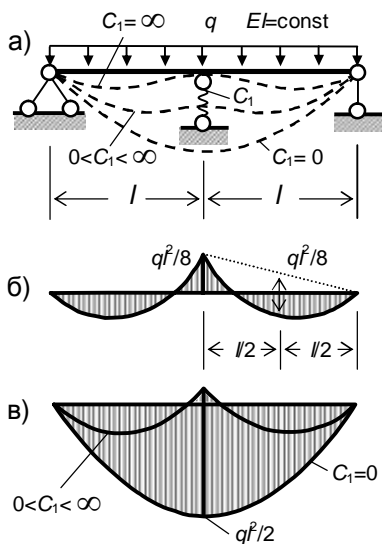


Рис. 2.2

И если в этих условиях перемещения определяются неправильно (без учета того, что следовало бы учитывать), это приводит к неверным значениям усилий в системе.

Например, для балки (рис. 2.2, а) со средней упругой опорой, имеющей конечную жесткость  $C_1$ , расчет в пренебрежении податливостью этой опоры (то есть при  $C_1 = \infty$ ) дает распределение изгибающих моментов, показанное на рис. 2.2, б. В действительности при разных реальных значениях  $C_1$  эпюры изгибающих моментов получаются такими, как на рис. 2.2, в – с уменьшением жесткости опоры увеличиваются положительные моменты, и при малых значениях  $C_1$  отрицательные момен-

ты вообще могут не возникать, а в предельном случае при  $C_1 \rightarrow 0$  (исчезающе малая жесткость опоры) балка работает как опертая по концам. Очевидно, что моменты, вычисленные без учета упругой осадки средней опоры, могут оказаться меньше истинных (во всяком случае, положительные – несомненно!). Если эти заниженные моменты использовать при подборе сечения балки по прочности, то возможные последствия такой ошибки легко предсказать.

Далее в этой главе рассматриваются вопросы учета и исследования зависимости усилий в статически неопределимых плоских стержневых системах от двух видов деформаций – сдвига при поперечном изгибе элементов и растяжения-сжатия гибких (тонких) стержней.

Из методических соображений в каждом из приводимых примеров изучается влияние лишь какого-либо одного из указанных видов деформаций. При выполнении расчетного задания студенты могут по собственной инициативе расширить постановку задачи и выполнить сравнительный анализ роли всех (или нескольких основных) видов деформаций, реализующихся в рассчитываемой конструкции – это потребует выполнения нескольких дополнительных перерасчетов, что не является проблемой, если привлечь на помощь компьютер.

## **2.2. Расчет статически неопределимых конструкций с учетом деформации сдвига**

Изгиб элементов конструкций редко бывает чистым – обычно он сопровождается сдвигом, в поперечных сечениях кроме нормальных напряжений  $\sigma$  действуют и касательные  $\tau$ . Напряжения  $\sigma$  и  $\tau$  связаны соответственно с интегральными внутренними силовыми факторами – изгибающим моментом  $M$  и поперечной силой  $Q$ . Их вклад в возникающие полные перемещения определяется для плоских стержневых систем первым и вторым членами формулы Максвелла – Мора ( 2.2 ). Традиционно считается, что влияние сдвига незначительно, и в большинстве обычных расчетов его не принимают во внимание. Вместе с тем достаточно легко убедиться в том, что даже в широко распространенных простых балочных системах пренебрегать сдвигом при определении перемещений (в частности, при проверке выполнения нормативных требований по прогибам конструкции) во многих случаях нельзя, так как погрешность может быть недопустимо большой.

В соответствии с формулой ( 2.2 ) перемещение, обусловленное только деформациями поперечного изгиба самой конструкции (то есть

без учета податливости опор и продольных деформаций элементов – полагаем  $C_j = \infty$  и  $EA = \infty$ ), можно представить в виде

$$\Delta_{iF} = \Delta_{iF,M} (1 + \alpha_Q), \quad (2.3)$$

где  $\Delta_{iF,M} = \sum_{j=1}^m \int_{l_j} \frac{M_i M_F}{EI} ds$  – часть полного перемещения, обусловленная изгибом (от действия моментов  $M$ );

$\alpha_Q = \Delta_{iF,Q} / \Delta_{iF,M}$  – относительная поправка за счет сдвига;

$\Delta_{iF,Q} = \sum_{j=1}^m \int_{l_j} k_\tau \frac{Q_i Q_F}{GA} ds$  – часть полного перемещения, обусловленная сдвигом (от действия поперечных

сил  $Q$ );  $k_\tau$  – коэффициент, отражающий неравномерность распределения касательных напряжений  $\tau$  по высоте сечения (формула для  $k_\tau$  приведена в приложении 1 на с. 59).

Так как в каждом конкретном случае входящие в подынтегральные выражения силовые факторы в единичном состоянии  $M_i$ ,  $Q_i$  и в грузовом состоянии  $M_F$ ,  $Q_F$  – известные функции, то коэффициент  $\alpha_Q$  можно записать так:

$$\alpha_Q = \beta_s k_\tau \cdot \frac{E}{G} \cdot \frac{l}{Al^2}, \quad (2.4)$$

где  $\beta_s$  – коэффициент, определяемый для каждой рассчитываемой системы индивидуально и зависящий от особенностей самой конструкции (ее геометрии, структуры и распределения жесткостей), характера нагрузки и от того, какое именно перемещение находится.

В общем случае величины  $k_\tau$ ,  $E$ ,  $G$ ,  $I$ ,  $A$ ,  $l$  нужно понимать как параметры, через которые выражаются однотипные с ними характеристики разных элементов и участков системы (в том числе и переменные вдоль осей стержней).

Если  $k_\tau$ ,  $E$ ,  $G$ ,  $I$ ,  $A$  постоянные и одинаковые для всех участков, то

$$\beta_s = l^2 \frac{\sum_{j=1}^m \int_{l_j} Q_i Q_F ds}{\sum_{j=1}^m \int_{l_j} M_i M_F ds}. \quad (2.5)$$

Рассмотрим модельную задачу – однопролетную балку постоянного сечения длиной  $l$ . Оценим влияние сдвига на наибольший прогиб балки  $v_{max} = \Delta_{IF}$ . Выполнив вычисление интегралов в выражении (2.5) для двух характерных видов нагрузок – равномерно распределенной по всей длине ( $q$ ) и сосредоточенной посередине пролета ( $F$ ) при разных способах закрепления концов балки, получаем значения коэффициента  $\beta_s$ , приведенные в таблице:

Закрепление концов балки	Нагрузки	
	$q$	$F$
Шарнирное	48/5	12
Жесткое	48	48

Заметим, что  $\beta_s$  в значительно меньшей степени зависит от характера нагрузки, чем от способа опирания балки – для *статически неопределимой системы* (при жестком защемлении обоих концов)  $\beta_s$  в 4...5 (!) раз больше, чем при *статически определимом шарнирном*.

Момент инерции сечения  $I$  можно выразить через площадь сечения  $A$  и его радиус инерции  $r$ :  $I = Ar^2$ , а  $r$  представить в отношении к высоте сечения  $h$  как  $r = \alpha_r h$ , тогда формулу для коэффициента влияния сдвига (2.4) получим в еще более удобном для анализа виде:

$$\alpha_Q = \beta_s \cdot \frac{E}{G} \cdot k_\tau \cdot \alpha_r^2 \cdot \left(\frac{h}{l}\right)^2, \quad (2.6)$$

что позволяет легко выявить основные факторы, от которых зависит поправка на сдвиг. Это:

- ◆ особенности системы и нагрузки, учитываемые коэффициентом  $\beta_s$ ;
- ◆ физические свойства материала, описываемые отношением модулей упругости – Юнга ( $E$ ) и сдвига ( $G$ );
- ◆ форма и относительные пропорции сечения – от них зависят коэффициент  $k_\tau$  и относительный радиус инерции сечения  $\alpha_r$ ;
- ◆ высота сечения балки в отношении к ее пролету («массивность» балки).

В следующей таблице приведены значения коэффициентов  $\alpha_r$  и  $k_\tau$  для некоторых распространенных типов сечений строительных конструкций (в т.ч. балок).

Тип сечения	$\alpha_r$	$k_\tau$
Прямоугольное однородное	$\sim 0,3$	6/5
Стальной прокатный двутавр	$\sim 0,4$	$A/A_w = 2,5 \dots 3$
Тонкостенный двутавр	$\sim 0,45$	$A/A_w = 3 \dots 5$

Здесь  $A_w$  – площадь сечения стенки двутавра.

Для балок с заземленными концами при вышеуказанных нагрузках и типах сечений  $\alpha_Q \approx 48(0,3 \dots 0,45)^2 k_\tau (E/G)(h/l)^2 \approx (4 \dots 10) k_\tau (E/G)(h/l)^2$ . Наконец, для стальных балок из прокатных двутавров, учитывая, что для однородных изотропных материалов, к которым относятся и строительные стали,  $E/G = 2(1+\nu) \approx 2,5$  ( $\nu = 0,2 \dots 0,3$  – коэффициент Пуассона), получим

$$\alpha_Q \approx 50(h/l)^2, \quad (2.7)$$

откуда видно, что с увеличением относительной высоты балки влияние сдвига сильно возрастает.

Обычно стальные строительные балки имеют  $h/l = 1/8 \dots 1/12$  – для этого интервала по (2.7) получается  $\alpha_Q = 0,78 \dots 0,35$ . Для шарнирно опертой балки значения  $\alpha_Q$  получаются меньше в 4 ... 5 раз, но и в этом случае поправки к перемещениям, вычисленным без учета влияния сдвига, составят 7 ... 20%, что, конечно, значительно превышает погрешность вычислений, допускаемую в расчетах конструкций.

Для более тонкостенных, чем прокатные двутавры, профилей сечений влияние деформации сдвига сказывается еще больше. Еще одной причиной увеличения сдвиговой податливости конструкции могут быть физические свойства материала, а именно – относительно низкое значение модуля сдвига в сравнении с модулем продольной упругости, что характерно для природно (древесина) или конструктивно (композиты, фанера и др.) анизотропных материалов. Некоторые особенности нагрузок также могут увеличивать роль сдвига – например, загрузка сосредоточенными силами вблизи от опор (на расстояниях порядка высоты поперечного сечения изгибаемого элемента) или несколькими близко расположенными друг к другу (на расстояниях того же порядка) примерно одинаковыми нагрузками, чередующимися по направлению. Конечно, в этих случаях речь идет о нагрузках, нормальных к осям элементов.

Таким образом, может оказаться необходимым учитывать в расчете деформации сдвига некоторого элемента конструкции, если выполняется одно или одновременно несколько следующих условий:

- ◆ сечение элемента – тонкостенное;
- ◆ материал – относительно низко модульный при сдвиге ( $E/G > 3 \dots 4$ );
- ◆ элемент достаточно «короткий, массивный» ( $h/l > 1/8$ );
- ◆ нагрузки таковы, что вызывают значительные поперечные силы при сравнительно небольших изгибающих моментах (ориентировочно: средние на грузовом участке  $|M/Q| \sim h$ ).

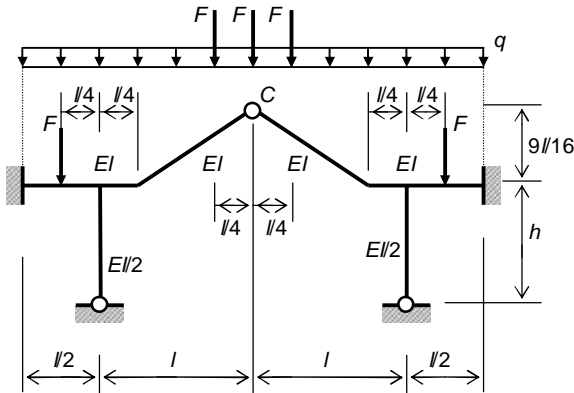
Если суммарная длина элементов или их участков, где нужно учитывать сдвиг, составляет небольшую часть от общей длины всех элементов системы, то пренебрежение сдвигом может и не вносить существенных искажений в описание напряженно-деформированного состояния в частях конструкции, достаточно удаленных от зон со значительным влиянием сдвига, но в самих этих зонах погрешности определения усилий и, особенно, перемещений могут быть большими.

Для учета влияния сдвига в расчете статически неопределимой системы следует:

- при использовании *метода сил* вычисление коэффициентов  $\delta_{ik}$  и свободных членов  $\Delta_{iF}$  канонических уравнений выполнять по формулам ( 2.1 ) или (2.2 ) с удержанием слагаемых, зависящих от поперечных сил (на участках, где это признано необходимым);
- при расчете *методом перемещений* применять для тех стержней, где нужно учитывать сдвиг, уточненные (с поправками на этот вид деформации) табличные данные для элементов основной системы метода перемещений – они даны в **приложении 1**.

### Задача 2.2.1

Для рамы, изображенной на рис. 2.3, требуется построить эпюры внутренних силовых факторов по результатам расчетов с учетом и без учета деформаций сдвига горизонтальных и наклонных стержней.



*Исходные данные:*

$$\begin{aligned}
 l &= 8 \text{ м}, \quad h = 6 \text{ м}, \\
 q &= 30 \text{ кН/м}, \\
 F &= 100 \text{ кН}, \\
 E &= 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \\
 \nu &= 0,25, \\
 I &= 50000 \text{ см}^4, \\
 A &= 100 \text{ см}^2, \\
 k_\tau &= 5.
 \end{aligned}$$

Рис. 2.3



**Анализ расчетной схемы** дает основание прогнозировать существенное влияние деформаций сдвига для рассматриваемой рамы из-за:

- наличия больших сосредоточенных нагрузок вблизи узлов;

- большого значения коэффициента  $k_\tau$ , свидетельствующего о том, что сечения ригелей – тонкостенные при достаточно большой относительной высоте горизонтальных стержней рамы ( $h_{el}/l_{el} \approx 1/8$ ).

Ориентировочно высота тонкостенного двутавра может быть найдена по формуле

$$h_{el} \approx \sqrt{(4I/A) / [1 - 2/(3k_\tau)]} .$$

Система имеет одинаковые степени статической и кинематической неопределенности:  $n_{st} = n_k = 6$ . Трудоемкость расчета можно уменьшить, если учесть симметрию рамы и нагрузки. Будем рассматривать половину рамы слева от оси симметрии. Поскольку при симметричном деформировании верхний узел рамы не может смещаться по горизонтали ( $u_c = 0$ ), то для компенсации влияния отбрасываемой правой половины в этом узле левой полурамы накладывается горизонтальная связь, обеспечивающая реализацию этого кинематического условия. Полученная таким образом расчетная модель половины рамы трижды статически и кинематически неопределима.

Наименьшее число основных неизвестных в ее расчете дает смешанный метод ( $n = 2$ ), основная система показана на рис. 2.4, канонические уравнения:

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12}' Z_2 + \Delta_{1F} = 0, \\ r_{21}' X_1 + r_{22} Z_2 + R_{2F} = 0 . \end{cases}$$

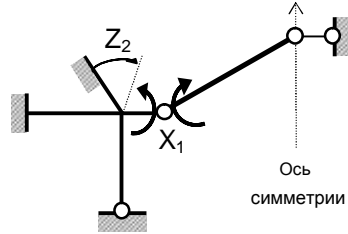


Рис. 2.4

По методам сил и перемещений количества основных неизвестных одинаковые. В этом случае метод перемещений рациональнее, но из методических соображений расчет далее выполняется в двух вариантах – методами сил и перемещений. Решение смешанным методом не вносит ничего принципиально нового, поэтому не рассматривается.

#### Вариант А. Расчет рамы методом перемещений

Основная система для половины рамы представлена на рис. 2.5. Канонические уравнения:

$$r \cdot Z + R_F = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{1F} \\ R_{2F} \\ R_{3F} \end{bmatrix} = 0 .$$

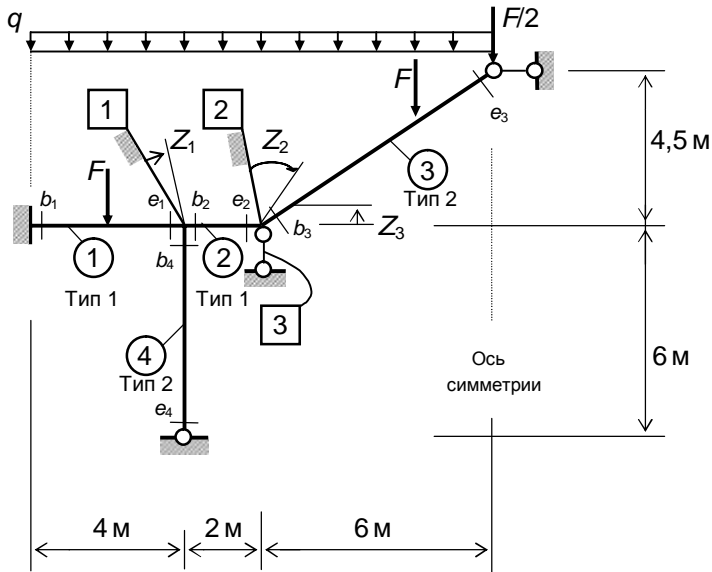


Рис. 2.5

Вычисляем необходимые для расчета характеристики элементов основной системы:

- погонные жесткости при изгибе  $i_j = EI_j/l_j$ :  $i_1 = EI/(4\text{м}) = 3i$ ,  
 $i_2 = EI/(2\text{м}) = 6i$ ,  $i_3 = EI/(7,5\text{м}) = 1,6i$ ,  $i_4 = (EI/2)/(6\text{м}) = i$ ;
- относительные характеристики сдвига  $\lambda_j = k_{\tau j}(E_j/G_j)I_j/(A_j l_j^2)$ :  
 так как сечения элементов 1, 2, 3 одинаковы, то для всех них  
 $k_{\tau j}(E_j/G_j)I_j/A_j = 0,625\text{ м}^2$  ( $j=1, 2, 3$ ), тогда  $\lambda_1 = 0,625\text{ м}^2/(4\text{ м})^2 = 0,0391$ ,  
 $\lambda_2 = 0,625\text{ м}^2/(2\text{ м})^2 = 0,1562$ ,  $\lambda_3 = 0,625\text{ м}^2/(7,5\text{ м})^2 = 0,0111$ ,  $\lambda_4 = 0$  (для  
 4-го элемента сдвиг не учитывается, то есть считается, что  $G_4 = \infty$ ).

С помощью таблиц приложения 1 строим эпюры изгибающих моментов в единичных состояниях основной системы (рис. 2.6) и определяем значения соответствующих поперечных сил  $Q_{j,k}$  (приведены под эпюрами  $M_k$ ). Заметим, что поперечные силы в концах сечений в единичных состояниях  $Q_{bj,k}$  и  $Q_{ej,k}$  – одинаковые и равны  $Q_{jk}$ .

В скобках курсивом даны значения усилий, вычисленные без учета влияния сдвига – в предположении  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ .

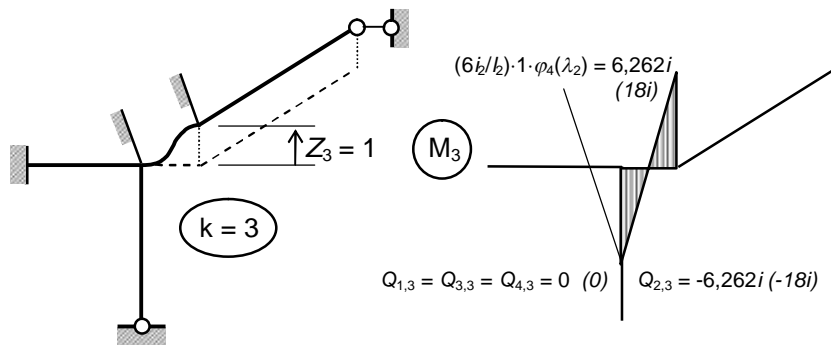
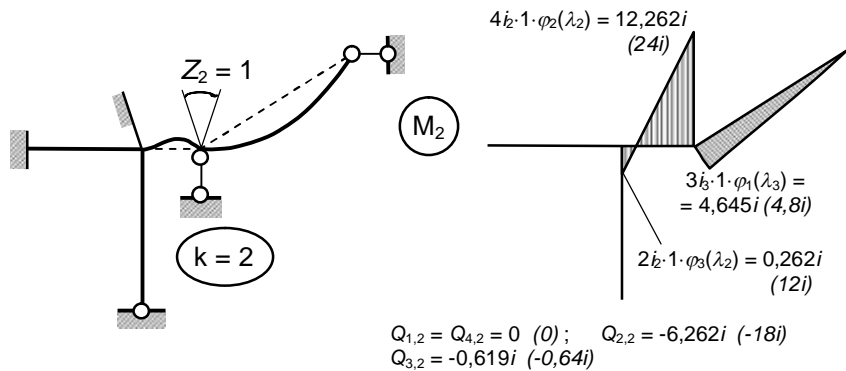
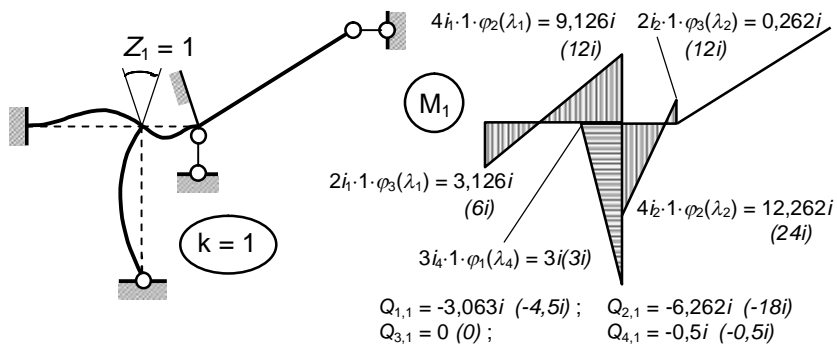


Рис. 2.6

При определении ординат эпюр  $M_k$  использованы следующие значения множителей-функций, вносящих поправку на сдвиг:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\lambda_3) &= 1/(1+3\lambda_3) = 0,9678; \quad \varphi_1(\lambda_4) = 1; \quad \varphi_2(\lambda_1) = (1+3\lambda_1)/(1+12\lambda_1) = 0,7605; \\ \varphi_2(\lambda_2) &= (1+3\lambda_2)/(1+12\lambda_2) = 0,5109; \quad \varphi_3(\lambda_1) = (1-6\lambda_1)/(1+12\lambda_1) = 0,5210; \\ \varphi_3(\lambda_2) &= (1-6\lambda_2)/(1+12\lambda_2) = 0,0218; \quad \varphi_4(\lambda_2) = 1/(1+12\lambda_2) = 0,3479. \end{aligned}$$

Рассматривая грузовое состояние основной системы (рис. 2.7), строим эпюры изгибающих моментов  $M_F$  и поперечных сил  $Q_F$ , при этом  $\alpha_1(\lambda_3) = \varphi_1(\lambda_3) = 0,9678$ .

Так как к элементу 3 приложены нагрузки, наклонные к его оси, в концевых сечениях  $b_3$  и  $e_3$  определяем также продольные силы, причем  $N_{e3,F}$  находим из условия равновесия  $\Sigma y = 0$  для узла  $C$  через нагрузку  $F/2$  и известную поперечную силу  $Q_{e3,F}$ , а  $N_{b3,F}$  – из условия равновесия всего стержня 3:  $N_{e3,F} = Q_{e3,F} \operatorname{ctg} \alpha - (F/2) \operatorname{cosec} \alpha = -211,92 \text{ кН} (-210,64 \text{ кН})$ ;  $N_{b3,F} = N_{e3,F} - (F + ql_{x3}) \sin \alpha = -379,92 \text{ кН} (-378,64 \text{ кН})$ .

Заметим, что аналогично вычисляются отличные от нуля продольные силы в этом элементе во втором единичном состоянии  $N_{b3,2} = N_{e3,2} = -0,825i (-0,853i)$ .

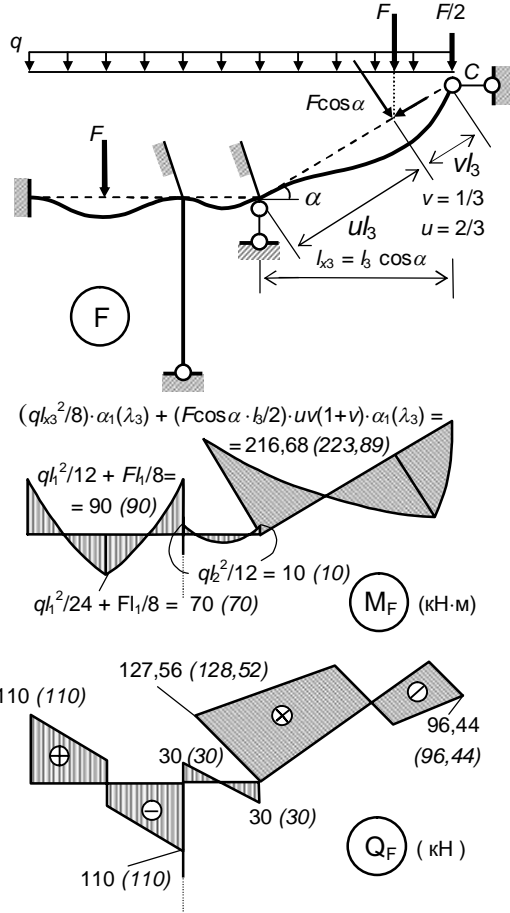


Рис. 2.7

Далее расчет выполняем в матричной форме с применением ЭВМ по следующей формуле для искомых усилий в концевых сечениях элементов:

$$S = S_F + S_0 Z = S_F - S_0 (a^T S_0)^{-1} (a^T S_F - c^T F_u), \quad (2.8)$$

в которой для определения единичных реакций  $r$  используется вариант  $r = a^T S_0$  – через концевые усилия  $S_0$  в единичных состояниях.

Если в используемой компьютерной программе предусмотрено формирование матриц жесткости элементов  $K_i$  с учетом сдвига, то можно реакции  $r$  вычислять через матрицу внутренней жесткости системы  $K$  по формуле  $r = a^T K a$ .

Расчет на ЭВМ осуществляется дважды – с учетом и без учета влияния сдвига. В первом случае исходные матрицы таковы:

Перемещения концевых сечений элементов в единичных состояниях  
от  $Z_1=1$   $Z_2=1$   $Z_3=1$

Усилия в концевых сечениях элементов в единичных состояниях  
от  $Z_1=1$   $Z_2=1$   $Z_3=1$

в грузовом состоянии

$a =$ (16*3)	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 \\ 0 & 0 & -0,6 \\ 0 & 0 & -0,8 \\ 0 & 0 & 0,6 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$S_0 = i_*$	$\begin{bmatrix} 3,126 & 0 & 0 \\ -3,063 & 0 & 0 \\ \hline 12,262 & 0,262 & 6,262 \\ -6,262 & -6,262 & -6,262 \\ 0,262 & 12,262 & 6,262 \\ \hline -6,262 & -6,262 & -6,262 \\ \hline 0 & 4,645 & 0 \\ 0 & -0,619 & 0 \\ 0 & -0,825 & 0 \\ 0 & -0,619 & 0 \\ 0 & -0,825 & 0 \\ \hline 3 & 0 & 0 \\ -0,5 & 0 & 0 \\ -0,5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$S_F =$	$\begin{bmatrix} -90 \\ 110 \\ 90 \\ -110 \\ \hline -10 \\ 30 \\ 10 \\ -30 \\ \hline -216,68 \\ 127,56 \\ -379,92 \\ -96,44 \\ -211,92 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{matrix} M_{b1} \\ Q_{b1} \\ M_{e1} \\ Q_{e1} \\ \hline M_{b2} \\ Q_{b2} \\ M_{e2} \\ Q_{e2} \\ \hline M_{b3} \\ Q_{b3} \\ N_{b3} \\ Q_{e3} \\ N_{e3} \\ \hline M_{b4} \\ Q_{b4} \\ Q_{e4} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \end{matrix}$
-----------------	--	-------------	---	---------	---	---	--

$c = [ 0 \quad 0 \quad 1 ] v_c$   
(1\*3) Вертикальное перемещение узла С в единичных состояниях

$F_u = [ -50 ] F_y$ ,  
(1\*1) Вертикальная нагрузка в узле С

В случае пренебрежения влиянием сдвига исходные матрицы  $a$ ,  $c$  и  $F_u$  остаются без изменений, а матрицы конечных усилий следующие:

$$S_0 = i_0 \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -4,5 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 \\ -4,5 & 0 & 0 \\ \hline 24 & 12 & 18 \\ -18 & -18 & -18 \\ 12 & 24 & 18 \\ -18 & -18 & -18 \\ \hline 0 & 4,8 & 0 \\ 0 & -0,64 & 0 \\ 0 & -0,853 & 0 \\ 0 & -0,64 & 0 \\ 0 & -0,853 & 0 \\ \hline 3 & 0 & 0 \\ -0,5 & 0 & 0 \\ -0,5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad S_F = \begin{bmatrix} -90 \\ 110 \\ 90 \\ -110 \\ \hline -10 \\ 30 \\ 10 \\ -30 \\ \hline -223,89 \\ 128,52 \\ -378,64 \\ -95,48 \\ -210,64 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### Результаты расчетов на ЭВМ:

с учетом сдвига		без учета сдвига	
$Z = i^{-1}$	$\begin{bmatrix} 40,65 \\ 76,15 \\ -174,29 \end{bmatrix}$	$Z = i^{-1}$	$\begin{bmatrix} 33,90 \\ 71,97 \\ -125,86 \end{bmatrix}$
$S =$	$\begin{bmatrix} 37,08 \\ -14,52 \\ 461,01 \\ -234,52 \\ -582,97 \\ 390,00 \\ -137,03 \\ 330,00 \\ \hline 137,03 \\ 80,42 \\ -442,74 \\ -143,58 \\ -274,74 \\ \hline 121,96 \\ -20,33 \\ -20,33 \end{bmatrix}$	$S =$	$\begin{bmatrix} 113,38 \\ -42,53 \\ 496,75 \\ -262,53 \\ -598,44 \\ 390,00 \\ -121,56 \\ 330,00 \\ \hline 121,56 \\ 82,46 \\ -440,03 \\ -141,54 \\ -272,03 \\ \hline 101,69 \\ -16,95 \\ -16,95 \end{bmatrix}$

Эпюры внутренних силовых факторов в раме для обоих случаев расчета представлены на рис. 2.8 (с учетом сдвига – сплошными линиями, без его учета – штриховыми).

**Анализ полученных результатов** показывает, что вычисленное без учета деформации сдвига вертикальное перемещение узлов рамы на 28% меньше истинного, угол поворота узла соединения ригеля со стойкой – на 17%. Пренебрежение сдвигом приводит к *завышению(!)* наибольшего изгибающего момента в элементе 1 на 7,2%, в элементе 2 на 2,6% (для самого большого момента во всей конструкции) – эти ошибки не опасны, так как при подборе сечений по прочности они будут создавать некоторый излишний запас (конечно, не оправданный экономически). Погрешность вычисления наибольшего момента в наклонном стержне, для которого влияние сдвига изначально можно было ожидать меньшим, чем для 1-го и 2-го элементов (стержень 3 значительно длиннее при таком же, как у них, сечении), составляет 2,2%, но уже в сторону *занижения*. И наконец, «неожиданно» сильно *заниженным* – на 17% – оказывается изгибающий момент в стойке – стержне значительно более гибком, чем остальные (об этом можно судить по значениям погонных жесткостей  $i_j$ ) и, казалось бы, не вызы-

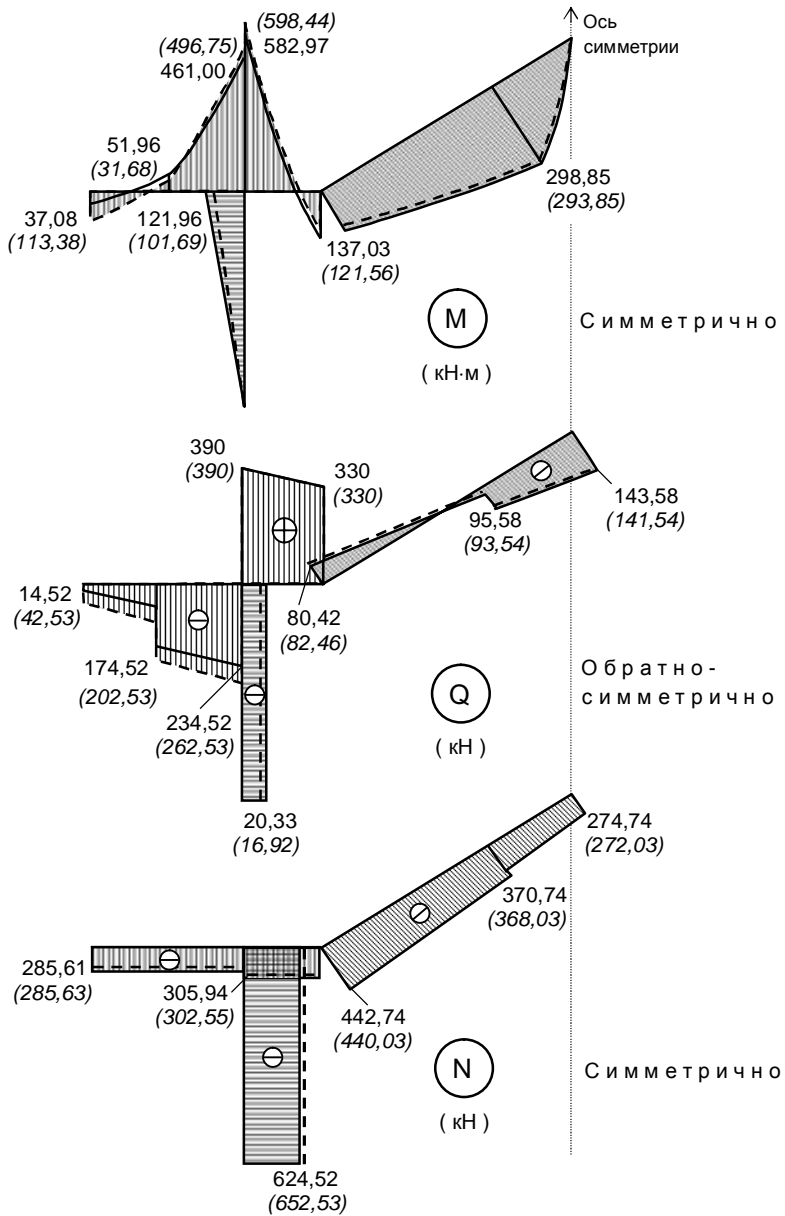


Рис. 2.8

вающем опасений по влиянию сдвига. Причиной тому дополнительная деформативность – за счет сдвига – смежных элементов (особенно 1-го), увеличивающая угол поворота узла (оценка  $Z_1$  дана выше), что приводит к более сильному изгибу стойки. Несмотря на то, что моменты в ней значительно меньше, чем в ригелях рамы, но при меньшем (судя по исходным данным) сечении они могут оказаться опасными, и столь большая ошибка в их определении может иметь тяжелые последствия.

Вариант Б. Расчет рамы методом сил

Рекомендуется предварительно вернуться к началу задачи 2.2.1 и изучить, если это не было сделано ранее, сравнение возможных вариантов решения, включая учет симметрии.

Для трижды статически неопределимой половины рассматриваемой симметричной рамы основная система выбрана путем удаления трех угловых связей (рис. 2.9, а).

Схема нумерации ее расчетных участков и сечений приведена на рис. 2.9, б. Для участков 1 ... 6 учитывается деформация изгиба, а для участков 7 ... 11, геометрически совпадающих соответственно с 1... 5, – сдвиг. На участках 1... 5, где приложена распределенная нагрузка, назначено по три расчетных сечения (концевые  $b_j$ ,  $e_j$  и посередине  $c_j$ ), на 6-м участке –

два ( $b_j$  и  $e_j$ ), а для участков сдвига 7...11 – по одному  $c_j$  посередине.

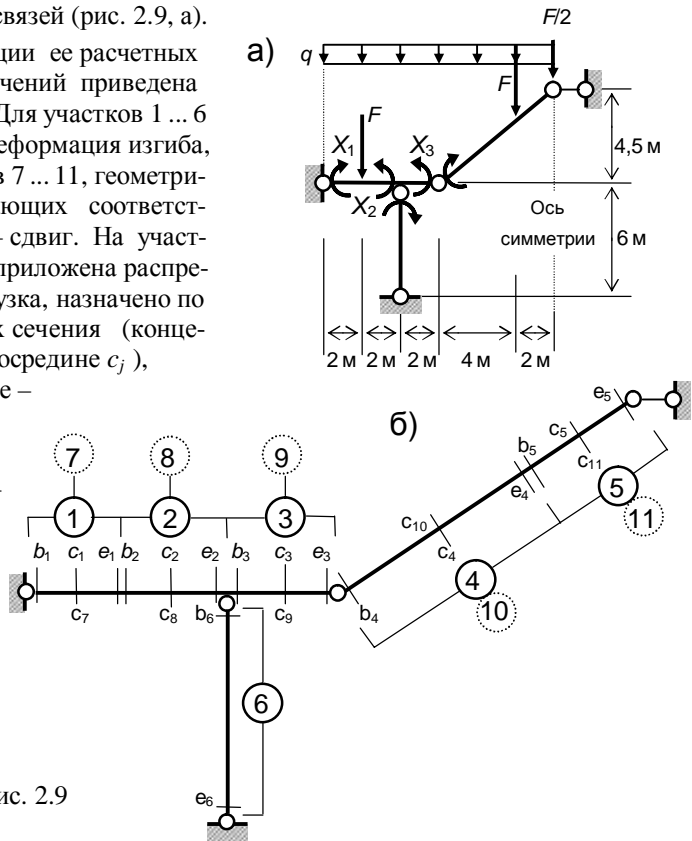


Рис. 2.9



Канонические уравнения:

$$\delta X + \Delta_F = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_{1F} \\ \Delta_{2F} \\ \Delta_{3F} \end{bmatrix} = 0.$$

Вычисление усилий в расчетных сечениях выполняем с применением ЭВМ по матричной формуле

$$S = L_F + LX = L_F - L(L^T B L)^{-1} L^T B L_F \quad (2.9)$$

дважды – с учетом и без учета влияния сдвига.

Для формирования исходных матриц усилий в расчетных сечениях основной системы  $L$  (от единичных основных неизвестных) и  $L_F$  (от заданной нагрузки) рассматриваем единичные (рис. 2.10) и грузовое (рис. 2.11) состояния основной системы.

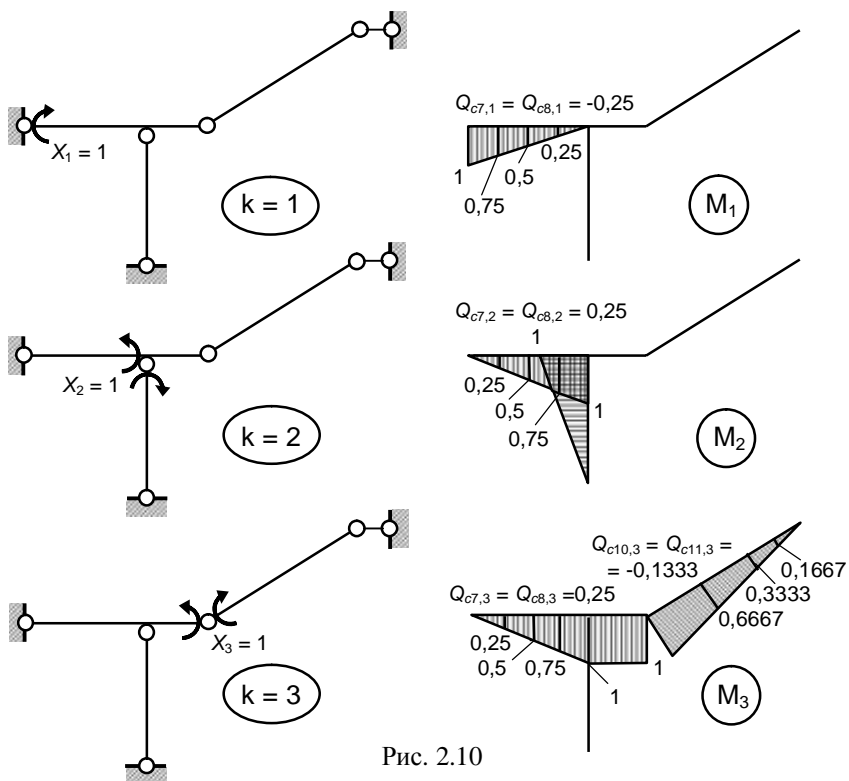


Рис. 2.10

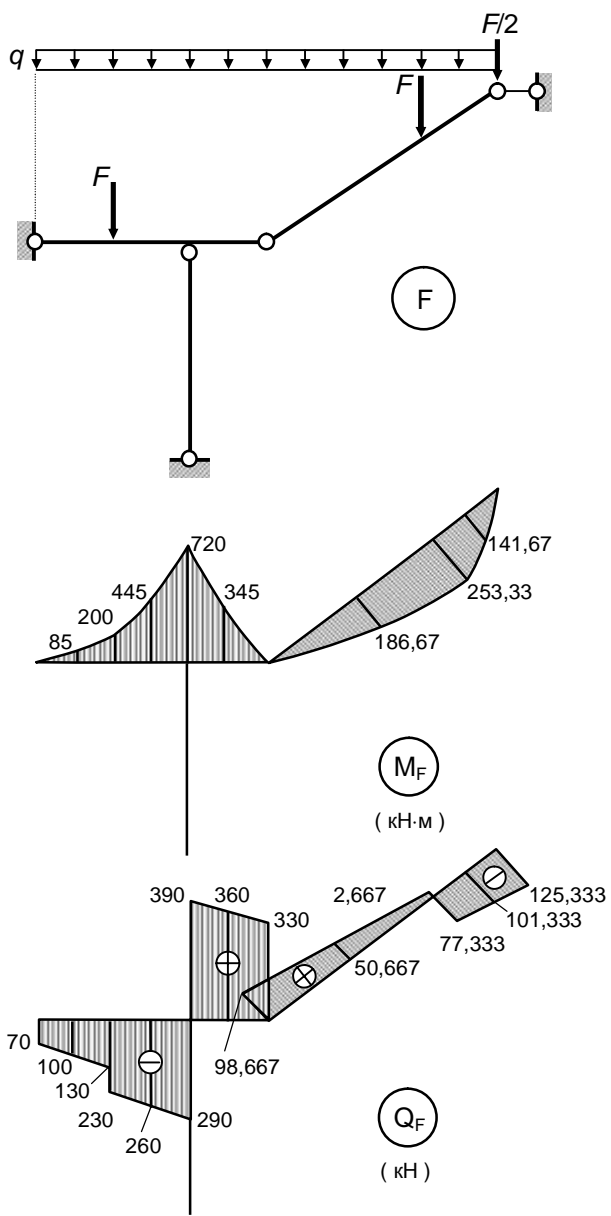


Рис. 2.11

Построив эпюры  $M_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ),  $M_F$ ,  $Q_F$  и вычислив в единичных состояниях поперечные силы  $Q_{cj,k}$  ( $j = 7, 8, \dots, 11$ ;  $k = 1, 2, 3$ ) в расчетных сечениях участков сдвига (их отличные от нуля значения приведены рядом с эпюрами  $M_k$ ), составляем матрицы  $L$  и  $L_F$ :

$$L = \begin{bmatrix} M \\ Q \end{bmatrix} = \begin{matrix} \text{от } X_1=1 & X_2=1 & X_3=1 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,75 & 0,25 & 0,25 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,25 & 0,75 & 0,75 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0,6667 \\ 0 & 0 & 0,3333 \\ 0 & 0 & 0,3333 \\ 0 & 0 & 0,1667 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0,25 & 0,25 & 0,25 \\ -0,25 & 0,25 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,1333 \\ 0 & 0 & -0,1333 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (22*3)$$

$$L_F = \begin{bmatrix} M_F \\ Q_F \end{bmatrix} = \begin{matrix} \text{Наименова-} & \text{NN} \\ \text{ния усилий} & \text{участков} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ -85 \\ -200 \\ -200 \\ -445 \\ -720 \\ -720 \\ -345 \\ 0 \\ 0 \\ 186,67 \\ 253,33 \\ 253,33 \\ 141,67 \\ 0 \\ 0 \\ -100 \\ -260 \\ 360 \\ 50,667 \\ -101,333 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (22*1)$$

Матрица внутренней податливости основной системы  $B$  имеет следующую блочную структуру:

$$B = [B_M \ B_Q] = [B_{M1} \ B_{M2} \ \dots \ B_{M6} \ B_{Q7} \ B_{Q8} \ \dots \ B_{Q11}] .$$

Матрицы податливости участков при изгибе  $B_{Mj}$  ( $j = 1, \dots, 6$ ) и при сдвиге  $B_{Qj}$  ( $j = 1, \dots, 11$ ) могут формироваться «вручную» или автоматически в ходе расчета на ЭВМ – в последнем случае в исходных данных должны быть указаны длины и относительные жесткости сечений всех участков (с 1-го по 11-й). Для принятой расчетной схемы:

- длины участков:  $l_1 = l_2 = l_3 = l_7 = l_8 = l_9 = 2 \text{ м}$ ,  $l_4 = l_{10} = 5 \text{ м}$ ,  
 $l_5 = l_{11} = 2,5 \text{ м}$ ,  $l_6 = 6 \text{ м}$ ;

- относительные жесткости  $c_j$ , выраженные через параметр  $C_0 = EI$  (при изгибе  $c_j = EI_j/C_0$ , при сдвиге  $c_j = (GA_j/k_{\tau,j})/C_0$ ):  $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = EI/C_0 = 1$ ,  $c_6 = (EI/2)/C_0 = 0,5$ ,  $c_7 = c_8 = c_9 = c_{10} = c_{11} = 1,6 \text{ м}^{-2}$  (ис-

пользованы заданные числовые значения  $A, I, k_\tau$  и  $\nu$ , при этом  $G/E = [2(1+\nu)]^{-1} = 0,4$ ).

Существуют и другие варианты формирования исходных матриц с учетом влияния сдвига – один из них описан в **приложении 2**.

Для расчета на ЭВМ без учета деформации сдвига в исходные данные вносятся изменения одним из следующих способов:

- 1) принимается  $G = \infty$ , тогда  $c_7 = \dots = c_{11} = \infty$ , но поскольку  $\infty$  нельзя ввести в компьютер как число, то можно задать  $c_7 = \dots = c_{11} = 10^4 \dots 10^5$ ;
- 2) длины участков сдвига формально приравняются нулю;
- 3) из исходных данных полностью исключается информация об участках сдвига.

В результате получены такие матрицы искомых усилий в расчетных сечениях:

	С учетом сдвига	Без учета сдвига																																														
$S =$	<table style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="padding: 2px 10px;">37,20</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">7,60</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">-52,01</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">-52,01</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">-241,61</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">-461,22</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">-583,23</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">-208,23</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">136,77</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">136,77</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">277,86</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">298,92</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">298,92</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">169,47</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">0,00</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">-122,01</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">0,00</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">-44,60</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">-204,60</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">360,00</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">32,43</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">-119,57</td></tr> </table>	37,20	7,60	-52,01	-52,01	-241,61	-461,22	-583,23	-208,23	136,77	136,77	277,86	298,92	298,92	169,47	0,00	-122,01	0,00	-44,60	-204,60	360,00	32,43	-119,57	<table style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="padding: 2px 10px;">113,38</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">55,84</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">-31,69</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">-31,69</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">-249,22</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">-496,76</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">-598,45</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">-223,45</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">121,55</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">121,55</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">267,71</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">293,84</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">293,84</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">161,93</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">0,00</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">101,69</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">0,00</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">-72,53</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">-232,53</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">360,00</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">34,46</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 10px;">-117,54</td></tr> </table>	113,38	55,84	-31,69	-31,69	-249,22	-496,76	-598,45	-223,45	121,55	121,55	267,71	293,84	293,84	161,93	0,00	101,69	0,00	-72,53	-232,53	360,00	34,46	-117,54	$S =$	
37,20																																																
7,60																																																
-52,01																																																
-52,01																																																
-241,61																																																
-461,22																																																
-583,23																																																
-208,23																																																
136,77																																																
136,77																																																
277,86																																																
298,92																																																
298,92																																																
169,47																																																
0,00																																																
-122,01																																																
0,00																																																
-44,60																																																
-204,60																																																
360,00																																																
32,43																																																
-119,57																																																
113,38																																																
55,84																																																
-31,69																																																
-31,69																																																
-249,22																																																
-496,76																																																
-598,45																																																
-223,45																																																
121,55																																																
121,55																																																
267,71																																																
293,84																																																
293,84																																																
161,93																																																
0,00																																																
101,69																																																
0,00																																																
-72,53																																																
-232,53																																																
360,00																																																
34,46																																																
-117,54																																																

Как и следовало ожидать, найденные значения изгибающих моментов в конечных сечениях элементов в трех первых значащих цифрах совпадают с вычисленными ранее методом перемещений в варианте А. Расхождения объясняются округлениями в исходных данных.

При построении эпюры поперечных сил конечные силы  $Q_{bj}$  и  $Q_{ej}$  на  $j$ -м участке сдвига можно определять с помощью приведенных в матрице  $S$  значений  $Q_{cj}$ :

$$Q_{bj}, Q_{ej} = Q_{cj} \pm q_{nj} l_j / 2,$$

где  $q_{nj} = q \sin^2 \beta_j$  ( $\beta_j$  – угол наклона оси  $j$ -го элемента к направлению нагрузки  $q$ ).

Продольные силы находятся из условий равновесия узлов.

Эпюры внутренних силовых факторов и анализ результатов расчета приведены на с. 22–24.

### 2.3. Оценка влияния продольных деформаций на усилия и перемещения в комбинированных системах

Деформации растяжения (сжатия) и соответствующие им напряжения и внутренние силовые факторы (продольные силы  $N$ ) реально возникают во всех стержневых элементах конструкций. Но для некоторых из них этот вид деформации является главным (стержни ферм, тросовые и другие гибкие конструктивные элементы – ванты, затяжки и т.п.), а для других (колонн и ригелей рам, балочных частей комбинированных систем) – сопутствующим основной деформации изгиба.

Для элементов с преобладающим изгибом оценку влияния их продольной податливости на общие перемещения системы можно дать аналогично тому, как это было сделано для сдвига в п.2.2:

$$\Delta_{iF} = \Delta_{iF,M} (1 + \alpha_N), \quad (2.10)$$

где  $\alpha_N$  – относительная поправка за счет влияния растяжения (сжатия):

$$\alpha_N = \Delta_{iF,N} / \Delta_{iF,M} = \eta_s \alpha_r^2 (h/l)^2; \quad (2.11)$$

$\eta_s$  – коэффициент, учитывающий особенности системы и нагрузки, в частности, при постоянных и одинаковых на всех участках жесткостях сечений при изгибе  $EI$  и растяжении (сжатии)  $EA$ :

$$\eta_s = l^2 \frac{\sum_{j=1}^m \int_{l_j} N_i N_F ds}{\sum_{j=1}^m \int_{l_j} M_i M_F ds}. \quad (2.12)$$

Формулы (2.11) и (2.12) можно применить для оценки влияния продольных деформаций некоторого элемента системы. Если это стержень рамной конструкции, работающий преимущественно на изгиб, то продольные силы в нем того же порядка, что и поперечные силы (в этом можно убедиться, рассматривая равновесие узлов рамы). Тогда коэффициент  $\eta_s$  будет близким по значению к коэффициенту  $\beta_s$ , что видно из сравнения (2.12) и (2.5). Учитывая это, из сопоставления (2.10) и (2.6) можно заключить, что  $\alpha_N$  меньше, чем  $\alpha_Q$ , в  $k_\tau E/G \approx 4 \dots 10$  раз в случае изотропного материала (нижняя граница относится к массивным сечениям типа прямоугольного, верхняя – к тонкостенным двутаврам).

Следовательно, для **рам** с достаточным основанием можно считать, что в общем вкладе, который вносит в некоторое перемещение конструкции  $\Delta_{iF}$  своей деформацией *сжато- или растянуто-изогнутый стержень*, влияние его удлинений (укорочений) обычно почти на порядок меньше, чем деформации сдвига. В расчетах большинства рам этим влиянием можно пренебречь.

К исключениям следует отнести многоэтажные рамы и случаи действия нагрузок вдоль осей стержней (или с небольшими эксцентриситетами).

В **комбинированных системах** учет продольной податливости *элементов рамно-балочных частей* может стать необходимым, если примыкающие к ним затяжки, ванты, шпренгели и т.п. наклонены к их осям под небольшими углами (меньше  $20 \dots 25^\circ$ ).

Для **арок** как конструкций, в значительной мере воспринимающих нагрузки за счет работы на сжатие, характерно более высокое, чем в рамах, влияние обжатия оси – это уже отмечалось выше в п.2.1. Продольные силы в арках обычно в несколько раз, а часто – на порядок и более – превосходят поперечные силы (речь идет о сопоставлении средних интегральных абсолютных величин), даже если арка не является близкой к безмоментной. В последнем случае влияние продольных деформаций, связанных с силами  $N$ , становится определяющим.

Пренебрегать обжатием оси допустимо лишь для достаточно высоких (так называемых *подъемистых*) арок со стрелами подъема более  $1/6 \dots 1/5$  пролета, и то лишь при существенно асимметричных нагрузках.

В отличие от сжато- или растянуто-изогнутых стержней, конструктивные элементы, предназначенные для работы *практически чисто на растяжение (сжатие)*, – такие, как затяжки, шпренгели, ванты, оттяжки, стойки и т.п., своими продольными деформациями в подавляющем большинстве случаев сильно влияют на распределение усилий и перемещений в статически неопределимых системах.

Это объясняется тем, что при том же порядке значений продольных сил, как и в соседних рамно-балочных элементах, эти стержни имеют значительно меньшие поперечные сечения, вследствие чего их абсолютные удлинения (укорочения) могут оказаться соизмеримыми с перемещениями, возникающими от изгиба других элементов. Поскольку обычно для растянутого элемента сечение подбирают из условия

прочности  $\sigma = N/A \leq R$  ( $R$  – расчетное сопротивление материала), то удлинение стержня в расчетном состоянии будет, по закону Гука,  $\Delta l = = Rl/E$  ( $l$  – длина). Очевидно, что чем длиннее растянутый элемент, тем сильнее его деформация влияет на перемещения (а в статически неопределимых системах – и на усилия) в конструкции. Рекомендуется обратить внимание на то, что применение более прочного материала (с увеличенным расчетным сопротивлением  $R$ ) приведет к увеличению деформаций и перемещений, так как модуль упругости  $E$  мало изменяется даже при существенном варьировании прочностных характеристик таких материалов, как строительные стали и др. Имеет значение и то, как располагается продольно деформируемый элемент в системе с кинематической точки зрения.

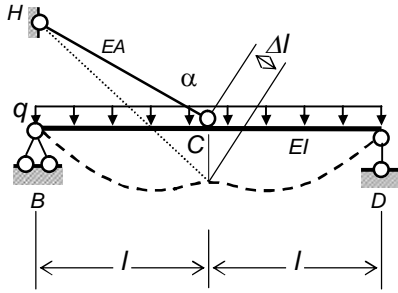


Рис. 2.12

Например, для комбинированной системы, изображенной на рис. 2.12, воздействие наклонного растянутого стержня на перемещения, изгибающие моменты и поперечные силы в балке принципиально аналогично тому, которое оказывает упругая опора в примере, показанном на рис. 2.2, но дополнительно в левой части

балки возникает продольная сила  $N_{BC} = -N_{CH} \cdot \cos \alpha$ . Перемещение середины балки по вертикали  $v_c = \Delta l / \sin \alpha$ , или, выразив  $\Delta l$  через  $R, E$  и  $l_{CH} = l_{BC} / \cos \alpha$ , получаем  $v_c = 2Rl / (E \sin 2\alpha)$ . При  $\alpha = 45^\circ$   $v_c = 2Rl / E$ , а при  $\alpha = 15^\circ$  – вдвое больше. Отсюда ясно, что в подобных ситуациях и для других видов комбинированных систем удлинения (укорочения) такого типа элементов при малых углах их наклона могут сказываться достаточно сильно.

балки возникает продольная сила  $N_{BC} = -N_{CH} \cdot \cos \alpha$ .

Перемещение середины балки по вертикали  $v_c = \Delta l / \sin \alpha$ , или, выразив  $\Delta l$  через  $R, E$  и  $l_{CH} = l_{BC} / \cos \alpha$ , получаем  $v_c = 2Rl / (E \sin 2\alpha)$ . При  $\alpha = 45^\circ$   $v_c = 2Rl / E$ , а при  $\alpha = 15^\circ$  – вдвое больше. Отсюда ясно, что в подобных ситуациях и для других видов комбинированных систем удлинения (укорочения) такого типа элементов при малых углах их наклона могут сказываться достаточно сильно.

### Задача 2.3.1

Выполнить расчеты комбинированной системы, изображенной на рис. 2.13, построить эпюры внутренних силовых факторов и дать анализ полученных результатов с учетом и без учета продольных деформаций безыгибно работающих элементов.

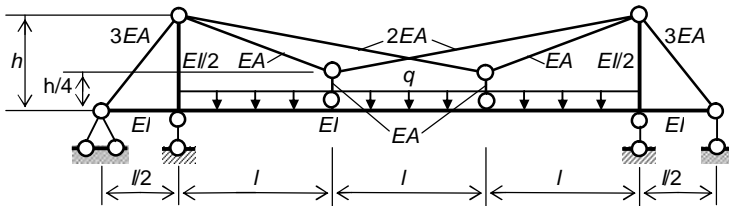


Рис. 2.13

Исходные данные:  $l = 12 \text{ м}$ ,  $h = 8 \text{ м}$ ,  $q = 40 \text{ кН/м}$ ,  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ,  
 $I = 10^5 \text{ см}^4$ ,  $A = 20 \text{ см}^2$ .

Система 6 раз статически неопределима. Степень кинематической неопределимости равна 12, если учитываются удлинения  $\Delta l$  стержней, работающих только на растяжение (сжатие), и уменьшается до 4, если продольными деформациями этих стержней пренебрегать. Во всех случаях балку и пилоны считаем продольно недеформируемыми.

Если принять во внимание симметрию системы и нагрузки и использовать группировку основных неизвестных, то число симметричных неизвестных по методу сил составит 3, а по методу перемещений – 6 и 2 соответственно с учетом и без учета продольных деформаций стержней. Таким образом, рациональным для расчета заданной системы является метод сил, даже несмотря на то, что в одном варианте метод перемещений дает меньше неизвестных (всего 2) – это не компенсирует дополнительной работы по выполнению расчета, совершенно независимого от того, что делается в другом варианте (с учетом  $\Delta l$ ), где метод сил безусловно выгоднее.

Основная система метода сил с только симметричными (ненулевыми) групповыми основными неизвестными показана на рис. 2.14.



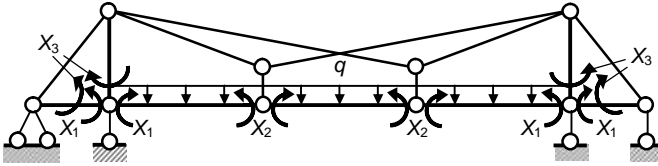


Рис. 2.14

Для такого типа конструкций за основные неизвестные иногда принимают усилия в поддерживающих балку вантах, подвесках и оттяжках. В этом случае основная система получается принципиально отличной по своей работе от заданной, вследствие чего в исходных данных (эпюрах и матрицах) возникают большие числа, ухудшается обусловленность системы уравнений, страдает точность расчета. Поэтому *настоятельно не рекомендуется* применять такие основные системы.

Рассматриваем единичные (рис. 2.15) и грузовое (рис. 2.16) состояния основной системы. Построение эпюр изгибающих моментов не составляет труда. Продольные силы в стержнях, для которых предполагается учитывать деформации растяжения (сжатия), находятся из условий равновесия узлов. В 1-м и 2-м единичных состояниях продольные силы отличаются только знаками. Значения продольных сил проставлены рядом с соответствующими стержнями на схеме.

Для вычисления искомых усилий в заданной статически неопределимой системе по матричной формуле (2.9) используем ЭВМ. Исходные матрицы можно составлять лишь для половины системы (по одну сторону от оси симметрии). Схема нумерации расчетных участков и сечений дана на рис. 2.17. На 2-м и 3-м участках, где на балку действует распределенная нагрузка  $q$ , назначены по три расчетных сечения – концевые  $b_j$ ,  $e_j$  и среднее  $c_j$ . На 1-м и 3-м участках, где эпюры изгибающих моментов во всех состояниях основной системы линейные, расчетные сечения – только концевые  $b_j$  и  $e_j$ . На участках 5, 6, ..., 9 стержней, испытывающих только равномерное осевое растяжение (сжатие) взято по одному сечению  $c_j$ .

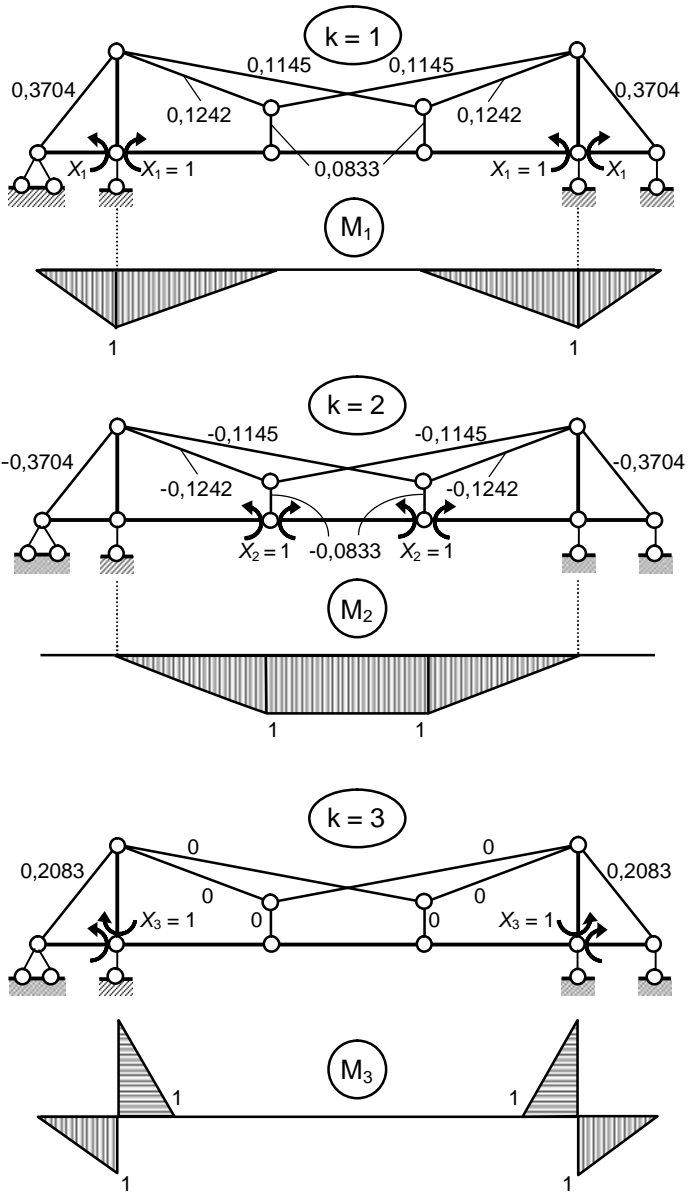


Рис. 2.15

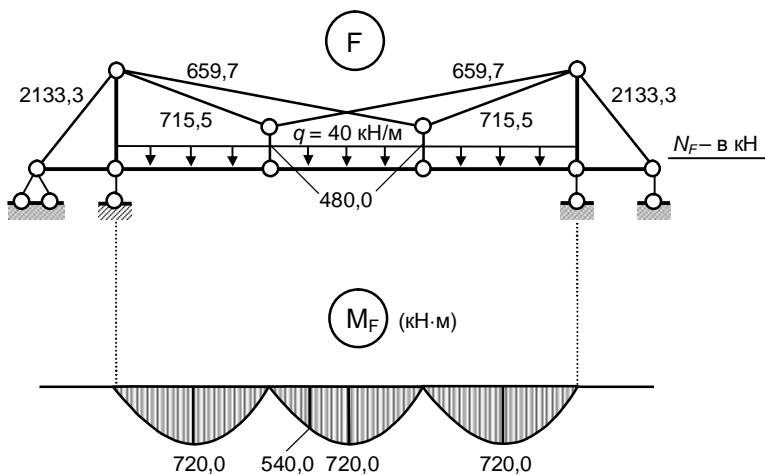


Рис. 2.16

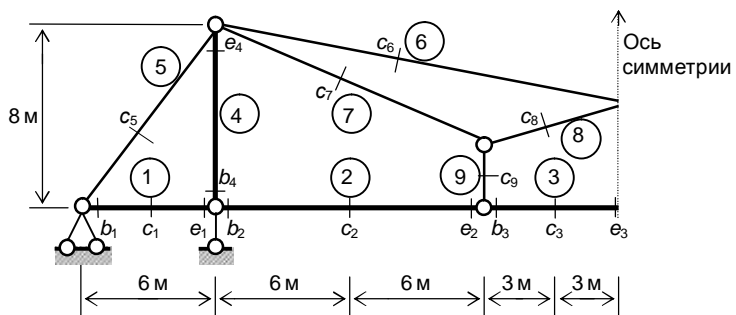
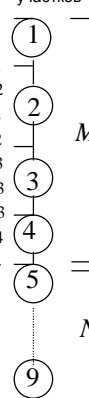


Рис. 2.17

Матрицы усилий в расчетных сечениях основной системы  $L$  (в единичных состояниях) и  $L_F$  (в грузовом состоянии):

$$L = \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} = \begin{matrix} \text{От } X_1 = 1 & X_2 = 1 & X_3 = 1 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0,3704 & -0,3704 & 0,2083 \\ 0,1145 & -0,1145 & 0 \\ 0,1242 & -0,1242 & 0 \\ 0,1145 & -0,1145 & 0 \\ 0,0833 & -0,0833 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (15 \times 3)$$

$$L_F = \begin{bmatrix} M_F \\ N_F \end{bmatrix} = \begin{matrix} \text{Наименования усилий} & \text{NN участков} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 720 \\ 0 \\ 0 \\ 540 \\ 720 \\ 0 \\ 0 \\ 2133,3 \\ 659,7 \\ 715,5 \\ 659,7 \\ 480,0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} M_{b1} \\ M_{e1} \\ M_{b2} \\ M_{c2} \\ M_{e2} \\ M_{b3} \\ M_{c3} \\ M_{e3} \\ M_{b4} \\ M_{e4} \\ N_{c5} \\ N_{c6} \\ N_{c7} \\ N_{c8} \\ N_{c9} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (15 \times 1)$$


Матрица внутренней податливости  $B$  основной системы состоит из матриц податливости расчетных участков при изгибе и растяжении (сжатии):  $B = [B_M B_N] = [B_{M1} B_{M2} B_{M3} B_{M4} B_{N5} B_{N6} B_{N7} B_{N8} B_{N9}]$ .

Приведем примеры формирования некоторых блоков:

$$B_{M1} = l_1 / (6EI_1) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 6 / (6EI) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = (1/EI) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix};$$

$$B_{M2} = l_2 / (6EI_2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (1/EI) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix};$$

$$B_{N5} = [l_5 / EA_5] = [10 / (3EA)] = (1/EI) [10 \cdot EI / (3EA)] = (1/EI) [3,333 \cdot I/A] = (1/EI) [1,6667] - \text{здесь учтено, что } l_5 = 10 \text{ м и } I/A = 10^5 \text{ см}^4 / (20 \text{ см}^2) = 5000 \text{ см}^2 = 0,5 \text{ м}^2.$$

Возможно автоматическое формирование матрицы  $B$  – для этого в компьютер вводятся сведения о расчетных участках:

– длины  $l_1 = 6 \text{ м}$ ;  $l_2 = 12 \text{ м}$ ;  $l_3 = 6 \text{ м}$ ;  $l_4 = 8 \text{ м}$ ;  $l_5 = 10 \text{ м}$ ;  $l_6 = 18,55 \text{ м}$ ;  
 $l_7 = 13,42 \text{ м}$ ;  $l_8 = 6,18 \text{ м}$ ;  $l_9 = 2 \text{ м}$ ;

– относительные (выраженные через параметр  $C_0 = EI$ ) жесткости сечений  $c_j = EI_j / C_0$  ( $j = 1, \dots, 4$ );  $c_j = EA_j / C_0$  ( $j = 5, \dots, 9$ ):

$$c_1 = c_2 = c_3 = 1; \quad c_4 = 0,5; \quad c_5 = 6 \text{ м}^{-2}; \quad c_6 = c_8 = 4 \text{ м}^{-2}; \quad c_7 = c_9 = 2 \text{ м}^{-2}.$$

Расчет конструкции на ЭВМ выполняем дважды – с учетом и без учета продольных деформаций элементов 5...9. В первом случае используются сформированные выше исходные данные, а во втором в них вносятся изменения, которые приведут к исключению влияния податливости стержней при растяжении (сжатии). Это можно сделать одним из следующих способов:

- 1) жесткости  $EA_j$  полагаются бесконечно большими, тогда  $c_5 = \dots = c_9 = \infty$  (реально в ЭВМ вводят не бесконечные, но большие значения  $c_5 \dots c_9$  – порядка  $10^4 \dots 10^5$ , от этого может возникать погрешность в 5-й – 6-й значащих цифрах результатов);
- 2) длины стержней 5...9 условно задают равными нулю;
- 3) из исходных данных вообще исключаются все сведения, относящиеся к элементам 5...9 (при этом нужно иметь в виду то, что в результате не будут вычислены продольные силы в этих стержнях).

По компьютерной распечатке получены матрицы искомых усилий – моментов и продольных сил в расчетных сечениях конструкции:

	<u>С учетом <math>\Delta l</math></u>	<u>Без учета <math>\Delta l</math></u>
$S =$	0,00	0,00
	-688,97	-248,63
	-821,79	-341,87
	211,97	295,25
	-194,28	-507,63
	-194,28	-507,63
	345,72	32,37
	525,72	212,37
	132,83	93,24
	0,00	0,00
	1928,54	2214,12
	587,85	678,68
	637,56	736,09
587,85	678,68	
427,73	493,81	

Эпюры внутренних силовых факторов в балке и пилоне (для половины системы) представлены на рис. 2.18.

Поперечные силы в концевых сечениях участков вычислены по изгибающим моментам обычным приемом:

$$Q_{bj}, Q_{ej} = (M_{ej} - M_{bj})/l_j \pm q_j l_j / 2.$$

Продольные силы в балке и пилоне найдены из условий равновесия узлов.

Сплошными линиями и прямыми цифрами даны эпюры и значения их ординат, полученные расчетом, в котором учтены удлинения  $\Delta l$  элементов, а штриховыми линиями и курсивом в скобках – без учета  $\Delta l$ .

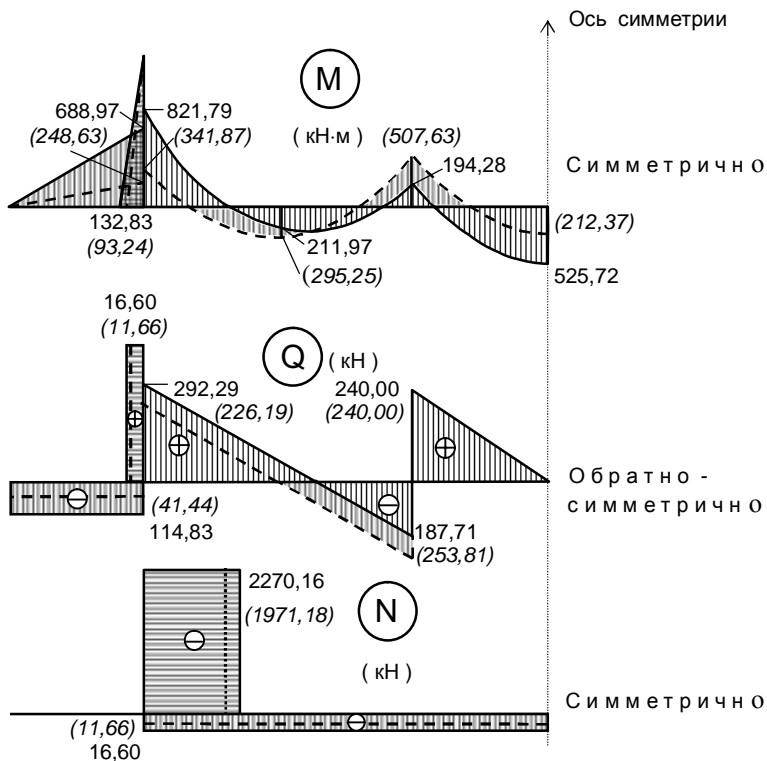


Рис. 2.18

**Сравнительный анализ** результатов, полученных в двух вариантах расчета, показывает:

1) найденные с учетом продольной податливости растянутых стержней и, следовательно, более точные значения продольных сил в оттяжке (элемент 5) на 12,9%, а в вантах 6, 7, 8 и подвеске 9 – на 13,4% *меньше*, чем при расчете в пренебрежении удлинениями этих стержней;

2) значения изгибающих моментов в характерных сечениях конструкции, найденные без учета продольных деформаций элементов, *в несколько раз (!)* отличаются от выявленных более точным расчетом – на крайнем участке балки они *занижены* в 2,77 раза, в пилоне – в 1,42 раза, в сечениях  $b_2$  и  $e_3$  – соответственно в 2,40 и 2,48 раза, а в сечениях  $e_2$  и  $b_3$  – в 2,61 раза, но уже в сторону *завышения*;

3) распределение моментов, полученное упрощенным (без учета  $\Delta l$ ) расчетом, существенно отклоняется от действительного как по общей картине – более «равномерной» по средним абсолютным величинам, так и по интервалу значений (от  $-507,63$  до  $+297,63$  кН·м в точке максимума между сечениями  $b_2$  и  $c_2$ , в то время как по более точному расчету – от  $-821,79$  до  $+525,72$  кН·м);

4) расположение опасных сечений по двум вариантам расчета принципиально разное: при учете  $\Delta l$  сечение балки с  $M_{\max}$  оказывается на оси симметрии конструкции, а с  $M_{\min}$  – в начале 2-го участка (справа от узла примыкания пилона); без учета  $\Delta l$  опасное по  $M_{\max}$  сечение получается вблизи середины 2-го участка, а по  $M_{\min}$  – в месте прикрепления подвески.

*Общий вывод:* упрощенный расчет, в котором работающие на чистое растяжение стержни считаются недеформируемыми (жесткими), лишь для продольных сил в этих стержнях дает ошибку «в запас прочности» (завышая значения  $N$ ). Ошибки в определении изгибающих моментов настолько велики, что *такой подход недопустим* даже на стадии предварительной оценки усилий в комбинированных системах рассмотренного типа или подобных им.

### Задача 2.3.2

Рассчитать раму (рис. 2.19) с учетом и без учета деформаций затяжки и подкосов, построить эпюры внутренних силовых факторов и выполнить сравнительный анализ результатов двух расчетов.

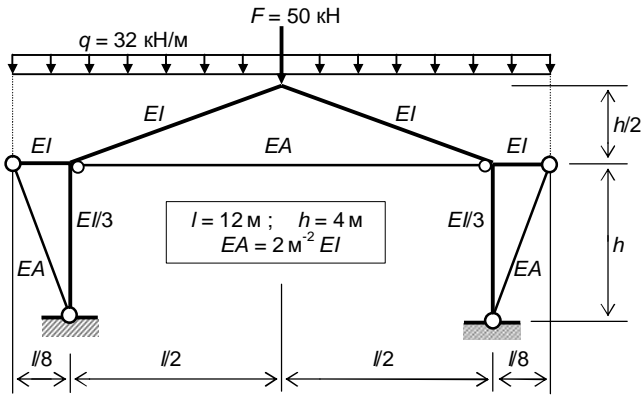


Рис. 2.19

Сведения о степенях статической и кинематической неопределимости системы и о числе симметричных и обратносимметричных неизвестных в различных вариантах расчета методами сил и перемещений приведены в таблице. К рассматриваемому случаю симметричного нагружения рамы относятся данные, выделенные жирным курсивом. Из их сравнения следует, что рациональным в данной задаче является метод перемещений.

Вариант расчета	Степени неопределимости		Число основных неизвестных			
	$n_{st}$	$n_k$	Метод сил		Метод перемещений	
			Сим.	Обр.с.	Симм.	Обр.сим.
С учетом $\Delta I$	4	7	<b>3</b>	1	<b>3</b>	4
Без учета $\Delta I$	4	4	<b>3</b>	1	<b>1</b>	3

Используя для уменьшения трудоемкости расчета симметрию конструкции и нагрузки, рассматриваем левую от оси симметрии половину рамы. Влияние на нее отбрасываемой правой половины моделируем наложением связей, обеспечивающих для половины рамы выполнение таких же кинематических условий по перемещениям сечений, расположенных на оси симметрии, как и во всей конструкции. Верхний узел и среднее сечение затяжки при симметричной деформации всей системы не поворачиваются ( $\theta = 0$ ) и не смещаются по горизонтали ( $u = 0$ ) – этим условиям отвечает подвижное по вертикали защемление – именно его и вводим в верхний узел полурамы. Что касается затяжки, то поскольку она, по своей природе, не работает на изгиб, то защемление для нее является излишним – можно было бы ограничиться наложением на правом конце половины затяжки лишь горизонтальной линейной связи, обеспечивающей  $u = 0$ . Но поскольку при этом формально возникает мгновенная изменяемость, условно добавляем и вертикальную линейную связь (она не будет включаться в работу!), в результате чего получаем цилиндрический шарнир. Сформировав таким образом эквивалентную расчетную схему половины рамы (она трижды кинематически неопределима), выбираем для нее основную систему метода перемещений (рис. 2.20).

На схеме обозначены номера наложенных на узлы связей (в квадратах) и соответствующие им основные неизвестные  $Z_1, Z_2$  и  $Z_3$ , номера узлов (в треугольниках) и элементов (в кружках) с указанием их типов по принятой классификации. На каждом изгибаемом элементе отмечены его концевые сечения  $b_j$  и  $e_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) (для элементов 2-го типа  $b_j$  назначается у защемленного конца), а на стержнях 4 и 5, работающих на осевое растяжение (сжатие) – произвольное сечение  $c_j$ .

Длины элементов:  $l_1 = 1,5$  м;  $l_2 = 6,325$  м;  $l_3 = 4$  м;  $l_4 = 4,272$  м;  $l_5 = 6$  м; погонные жесткости при изгибе  $i_j = EI_j / l_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ):  $i_1 = EI / (1,5 \text{ м}) = 8i$ ;  $i_2 = EI / (6,325 \text{ м}) = 1,9i$ ;  $i_3 = (EI/3) / (4 \text{ м}) = i$ .



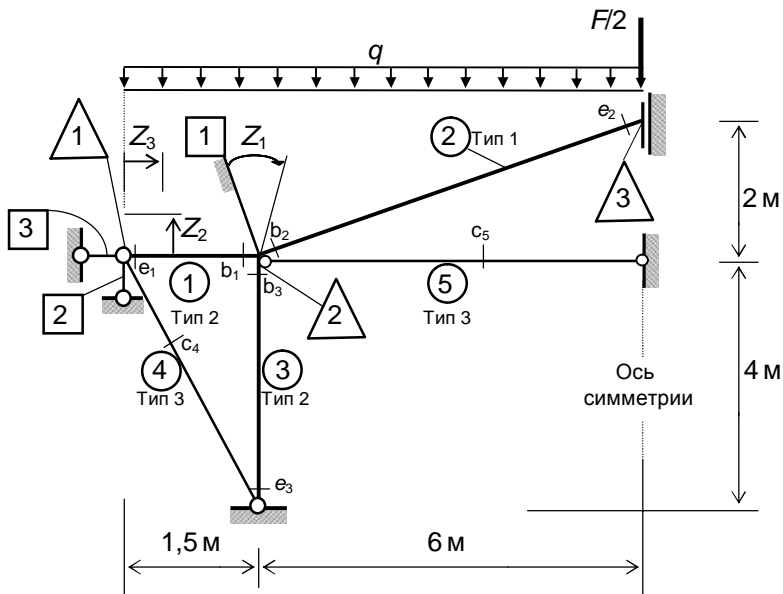


Рис. 2.20

Рассматриваем единичные состояния основной системы (рис. 2.21). С помощью таблиц метода перемещений строим эпюры изгибающих моментов  $M_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) и определяем постоянные по длине участков 1, 2, 3 поперечные силы  $Q_{j,k}$  (их значения приведены рядом с эпюрами  $M_k$ ). Также с помощью табличных данных строятся эпюры изгибающих моментов и находятся поперечные силы в основной системе от заданной нагрузки (рис. 2.22).

Можно использовать таблицы из приложения 1, принимая равными 1 значения всех поправочных функций, учитывающих влияние сдвига.

Для выполнения расчета в дальнейшем понадобятся продольные силы в элементах 4 и 5, удлинения (укорочения)  $\Delta l_j$  которых нужно учитывать, и в стержне 2, нагруженном наклонно к его оси. Продольные силы в затяжке и подкосе определяем по закону Гука:  $N_{j,k} = EA_j \cdot \Delta l_j / l_j$  ( $j = 4, 5; k = 1, 2, 3$ ). Из схем деформаций основной системы в единичных состояниях (см. рис. 2.21) видно, что подкос удлиняется во 2-м состоянии ( $\Delta l_{4,2} = 0,9363$ ) и укорачивается в 3-м ( $\Delta l_{4,3} = -0,3511$ ), а затяжка получает укорочение лишь при  $Z_3 = 1$  ( $\Delta l_{5,3} = -1$ ), поэтому  $N_{4,1} = N_{5,1} = N_{5,2} = 0$ ;  $N_{4,2} = EA_4 \cdot \Delta l_{4,2} / l_4 = 2 \text{ м}^2 EI \cdot 0,9363 / (4,272 \text{ м}) = 0,4383 EI = 5,26i$ ;

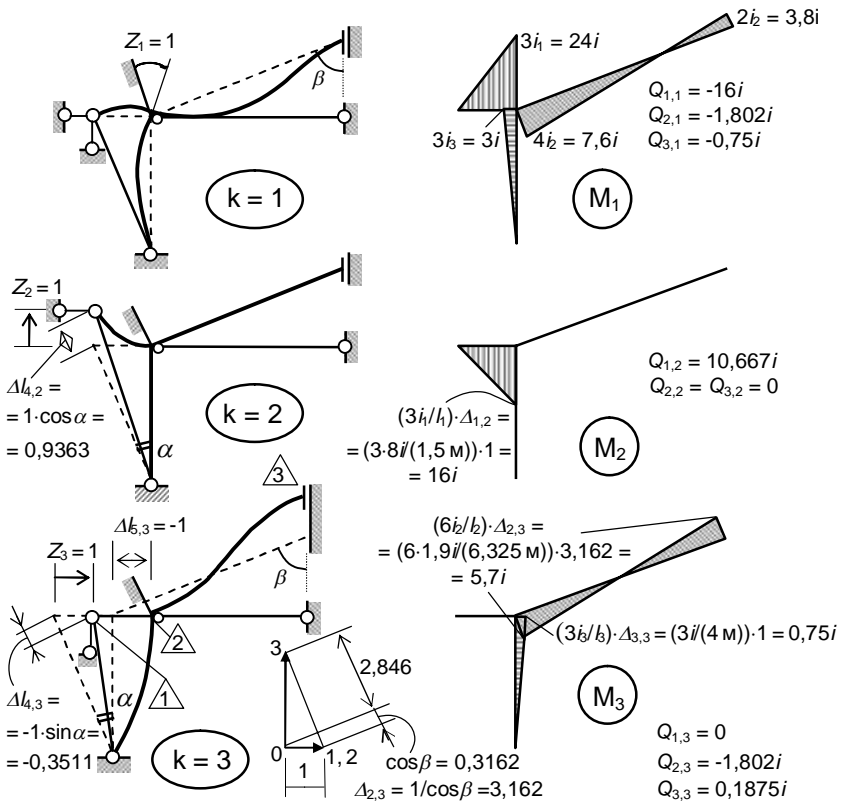


Рис. 2.21

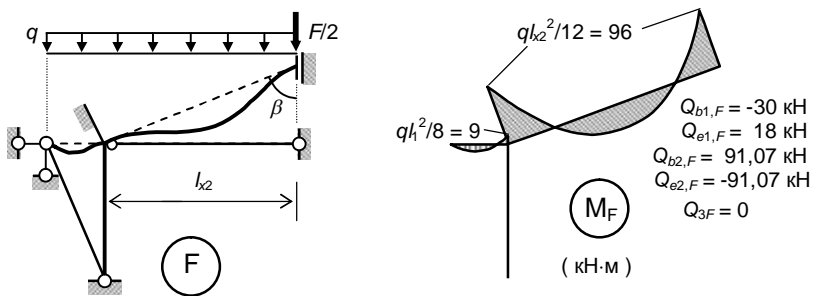


Рис. 2.22

$$N_{4,3} = EA_4 \cdot \Delta l_{4,3} / l_4 = 2 \text{ м}^2 EI (-0,3511) / (4,272 \text{ м}) = -0,1644 EI = -1,972i;$$

$$N_{5,2} = EA_5 \cdot \Delta l_{5,2} / l_5 = 2 \text{ м}^2 EI (-1) / (6 \text{ м}) = -EI/3 = -4i.$$

В грузовом состоянии (см. рис. 2.22) стержни 4 и 5 не деформируются, вследствие чего  $N_{4,F} = N_{5,F} = 0$ .

Продольные силы в концевых сечениях  $e_2$  и  $b_2$  наклонного стержня определяются из условий равновесия узла 3 и всего элемента 2. В грузовом состоянии:  $N_{e2,F} = -(F/2 + Q_{e2,F} \sin \beta) / \cos \beta = -352,27 \text{ кН}$ ;  $N_{b2,F} = N_{e2,F} - ql_{x2} \cdot \cos \beta = -412,98 \text{ кН}$ . В единичных состояниях:  $N_{e2,k} = N_{b2,k} = -Q_{2,k} \text{ tg} \beta$ ; откуда  $N_{e2,1} = N_{b2,1} = -5,406i$ ;  $N_{e2,2} = N_{b2,2} = 0$ ;  $N_{e2,3} = N_{b2,3} = -5,406i$ .

Для вычисления на ЭВМ искомым усилий по формуле (2.8) формируем исходные матрицы:

Перемещения концевых сечений элементов в единичных состояниях при  $Z_1 = 1 \quad Z_2 = 1 \quad Z_3 = 1$

Усилия в концевых сечениях элементов в единичных состояниях при  $Z_1 = 1 \quad Z_2 = 1 \quad Z_3 = 1$

в грузовом состоянии

$$a = \begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,316 \\ 0 & 0 & -0,949 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2,846 \\ 0 & 0 & 0,949 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0,9363 & -0,3511 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \theta_{b1} \\ v_{b1} \\ v_{b1} \\ \hline \theta_{b2} \\ v_{b2} \\ u_{b2} \\ \hline \theta_{e2} \\ v_{e2} \\ u_{e2} \\ \hline \theta_{b3} \\ v_{b3} \\ v_{e3} \\ \hline \Delta l_4 \\ \Delta l_5 \end{matrix} & S_0 = i^* & \begin{bmatrix} 24 & -16 & 0 \\ -16 & 10,667 & 0 \\ -16 & 10,667 & 0 \\ \hline 7,6 & 0 & 5,7 \\ -1,802 & 0 & -1,802 \\ -5,406 & 0 & -5,406 \\ \hline 3,8 & 0 & 5,7 \\ -1,802 & 0 & -1,802 \\ -5,406 & 0 & -5,406 \\ \hline 3 & 0 & -0,75 \\ -0,75 & 0 & 0,1875 \\ -0,75 & 0 & 0,1875 \\ \hline 0 & 5,26 & -1,972 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} & S_F = & \begin{bmatrix} 9 \\ -30 \\ 18 \\ \hline -96 \\ 91,07 \\ -412,98 \\ \hline 96 \\ -91,07 \\ -352,27 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} M_{b1} \\ Q_{b1} \\ Q_{e1} \\ \hline M_{b2} \\ Q_{b2} \\ N_{b2} \\ \hline M_{e2} \\ Q_{e2} \\ N_{e2} \\ \hline M_{b3} \\ Q_{b3} \\ Q_{e3} \\ \hline N_4 \\ N_5 \end{matrix} \end{matrix} \quad (14.3)$$

$c = [0 \quad 0 \quad 3] v_3$   
(1.3) Вертикальное перемещение узла 3 в единичных состояниях

$F_u = [-25] F_{y,3}$   
(1.1) Вертикальная нагрузка в узле 3

Если выполнять расчет без учета продольной податливости элементов 4 и 5, то степень линейной подвижности узлов становится равной нулю, и симметричное основное неизвестное будет одно – угол поворота  $Z_1$ . Основная система может быть получена как частный случай изображенной на рис. 2.20 исключением из нее линейных связей [2] и [3].

Схемы деформаций в единственном единичном состоянии (при  $Z_1 = 1$ ) и в грузовом состоянии остаются такими же, как показано на рис. 2.21 и 2.22, при этом не изменяются изгибающие моменты и попе-

речные силы, а также продольные силы в наклонном стержне. Но продольные силы в затяжке и подкосе следует определять иначе, чем в расчете с учетом их продольных деформаций, так как попытка применить закон Гука дает для усилий  $N_{4,k}$  и  $N_{5,k}$  неопределенности вида  $0 \cdot \infty$  (жесткости  $EA_4$  и  $EA_5$  считаются бесконечными, а деформации  $\Delta l_4$  и  $\Delta l_5$  – нулевые). Используя условия равновесия узлов 1 и 2 в единичном состоянии, получаем:  $N_{4,1} = -Q_{e1,1}/\cos\alpha = 17,089i$ ;  $N_{5,1} = -N_{2,1}\sin\beta - Q_{b2,1}\cos\beta + Q_{b3,1} - N_{4,1}\sin\alpha = -1,052i$ .

По таким же формулам (заменяя индекс состояния 1 на  $F$ ), находим  $N_{4,F} = -19,22$  кН;  $N_{5,F} = 369,70$  кН – от заданной нагрузки.

Исходные матрицы  $a$ ,  $S_0$  и  $c$  в этом варианте расчета имеют лишь по одному столбцу, причем  $a$  и  $c$  совпадают с первым столбцом одноименных матриц, составленных для расчета с учетом  $\Delta l$ , а матрица  $S_0$  получается из первого столбца аналогичной ранее составленной матрицы путем замены нулей в последних двух позициях на только что найденные значения  $N_{4,1}$  и  $N_{5,1}$ . Матрица  $S_F$  также изменяется – в двух последних позициях вместо нулей вписываются  $N_{4,F}$  и  $N_{5,F}$ . Матрица  $F_u$  не изменяется.

В результате двух расчетов на ЭВМ получены следующие матрицы основных неизвестных  $Z$  и искомых усилий:

	С учетом $\Delta l$	Без учета $\Delta l$
$Z = i^{-1}$	$Z_1 = \begin{bmatrix} 10,20 \\ 4,78 \\ -38,25 \end{bmatrix}$	$Z = [Z_1] = 2,51i^{-1}$
$S =$	$S = \begin{bmatrix} 177,26 \\ -142,17 \\ -94,17 \\ -236,55 \\ 141,63 \\ -261,30 \\ -83,30 \\ -40,51 \\ -200,59 \\ 59,28 \\ -14,82 \\ -14,82 \\ 100,58 \\ 153,02 \end{bmatrix}$	$S = \begin{bmatrix} 69,35 \\ -70,23 \\ -22,23 \\ -76,89 \\ 86,54 \\ -426,57 \\ 105,55 \\ -95,60 \\ -365,86 \\ 7,54 \\ -1,89 \\ -1,89 \\ 23,75 \\ 367,05 \end{bmatrix}$

Эпюры внутренних силовых факторов в левой половине заданной рамы показаны на рис. 2.23 (сплошными линиями – с учетом продольных деформаций стержней 4 и 5, штриховыми – без них). Соответствующие ординаты даны прямым шрифтом и курсивом в скобках.

На участках 1, 3, 4 и 5, где продольные силы постоянные, проставлены лишь их значения, без изображения эпюр.

**Сравнение результатов**, полученных в двух вариантах расчетов, показывает: 1) изгибающие моменты, вычисленные упрощенным способом – без учета удлинений подкоса 4 и затяжки 5, получились *заниженными* по сравнению с найденными более точным расчетом –

в 2,56 раза на 1-м участке, в 7,86 (!) раза в стойке рамы, в наклонном ригеле по максимальным (положительным) моментам – в 1,84 раза, по

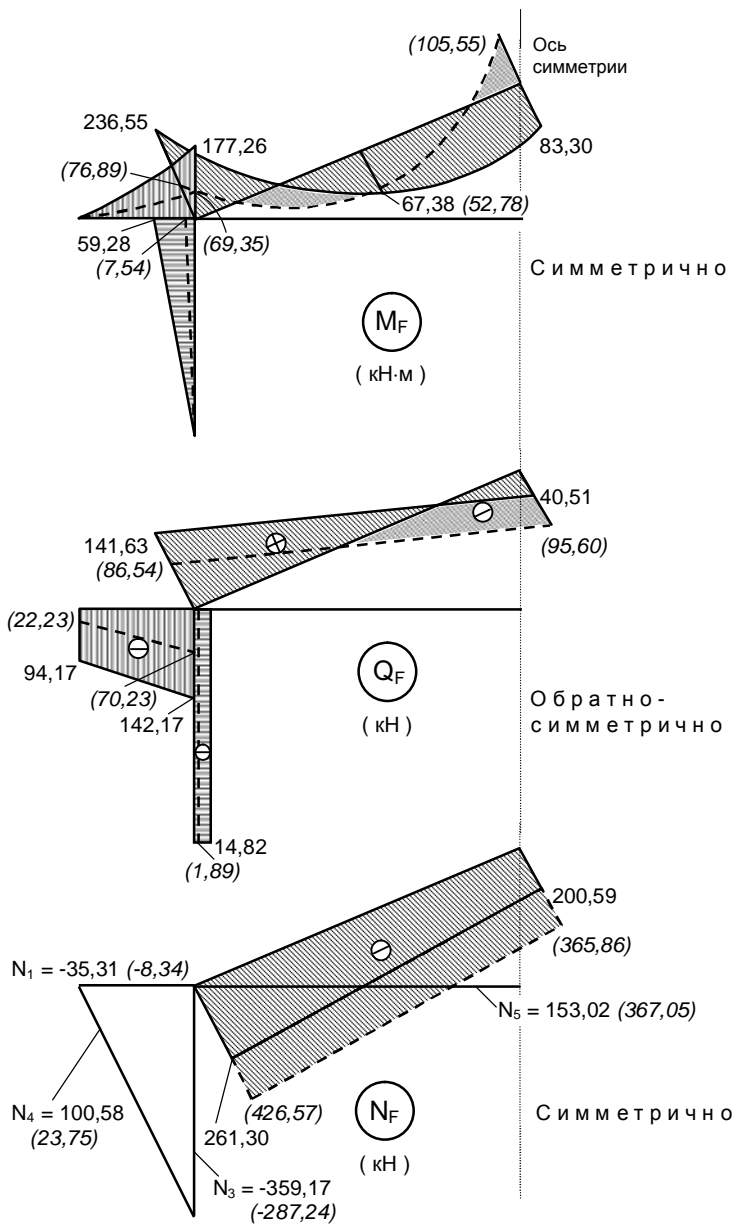


Рис. 2.23

минимальным (наибольшим отрицательным) – в 2,24 раза; при этом обращает на себя внимание то, что опасные по  $M_{\max}$  и  $M_{\min}$  сечения 2-го стержня в двух вариантах расчета располагаются совершенно по-разному: более отвечающие действительности  $M_{\max}$  и  $M_{\min}$ , найденные с учетом деформаций растянутых стержней 4 и 5, возникают соответственно на расстоянии 1,41 м от верхнего (конькового) узла рамы и на левом конце ригеля, а при упрощенном расчете – на расстоянии 3,0 м от узла 2, то есть примерно посередине ригеля, и на правом его конце;

2) общее распределение изгибающих моментов, получающееся в пренебрежении продольной податливостью затяжки и подкоса, – более «равномерное» в среднем по абсолютным величинам и с *существенно меньшими* расчетными значениями  $M_{\max}$  и  $M_{\min}$ , чем в действительности, что создает искаженное представление о работе конструкции и неизбежно приведет к грубым ошибкам в оценке ее прочности;

3) угол поворота узла 1 (основное неизвестное  $Z_1$ ) по упрощенному расчету также получается значительно (в 4,06 раза) меньше найденного по более точному варианту, следовательно, и перемещения в системе *сильно занижаются*, то есть конструкция необоснованно может быть оценена как существенно более жесткая, чем на самом деле;

4) продольные силы, вычисленные без учета продольных деформаций элементов 4 и 5, *меньше*, чем в случае учета этих деформаций, в стержнях 1 и 4 – в 4,23 раза, в стойке 3 – в 1,25 раза, и лишь в затяжке и наклонном ригеле они *завышаются* соответственно в 2,40 и 1,72 (в среднем) раза.

*Общий вывод:* расчет рамы с затяжкой и подкосами, работающими на чистое растяжение, в котором игнорируются деформации этих стержней, дает очень сильно (в несколько раз!) заниженные перемещения и расчетные изгибающие моменты. Поэтому он *недопустим даже на стадии предварительной оценки усилий и перемещений в конструкциях подобного типа.*

## 2.4. Учет изгиба стержней ферм

В предыдущих разделах рассматривались стержневые конструкции, для которых изгиб является основным видом деформации значительной части элементов. Но в некоторых случаях, например, для арок при определенных условиях загрузки (п. 2.1, рис. 2.1), изгиб может оказаться деформацией, лишь *сопровождающей* сжатие.

Конструкциями, изгиб стержневых элементов которых в большинстве расчетов, как правило, никак не учитывается, являются фермы. Такой подход основывается на представлении о работе фермы как *идеализированной системы* со строго прямолинейными стержнями,

осевые линии которых пересекаются точно в центрах узлов, причем соединения элементов – идеальные шарнирные (без трения), а нагрузки – сосредоточенные силы в узлах.

В действительности:

- узлы ферм не бывают шарнирными (соединения стержней, в зависимости от конструктивного решения, представляют собой упругие или неупругие защемления – в большей или меньшей степени податливые в деревянных, сборных железобетонных и стальных бесфасоночных фермах, либо почти жесткие в металлических сварных фермах с фасонками и в монолитных железобетонных фермах);
- возможна «расцентровка» осей стержней в узлах;
- стержни фермы могут иметь начальные искривления (погиби);
- нагрузки могут быть приложены с эксцентриситетами относительно центров узлов.

Следствием вышеуказанных обстоятельств является возникновение изгиба стержней фермы. Оценить влияние каждого из перечисленных факторов можно на примере фермы, рассмотренной в учебнике [ 2 ], где на с. 15–16 даны результаты расчета на действие нагрузки, показанной на рис. 2.24, в предположении абсолютно жесткого соединения стержней в узлах (этот случай является самым неблагоприятным – изгибающие моменты получаются наибольшими при прочих равных условиях).

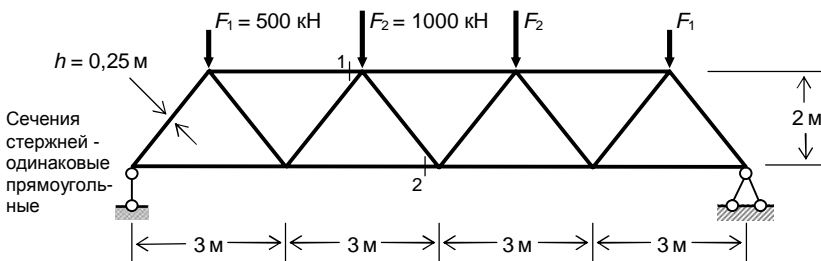


Рис. 2.24

- Данные, представленные на рис. 1.13 в [ 2 ], свидетельствуют о том, что продольные силы в системе с жесткими узлами меньше, чем вычисленные по традиционной шарнирной схеме, причем разница не превышает 1% для поясов фермы и 2,1% для раскосов. Соответствующие изгибающие моменты имеют значения,

Расчет фермы как статически неопределимой системы с жесткими узлами выполнен в [ 2 ] методом перемещений. При этом рассмотрена половина симметричной конструкции со степенью кинематической неопределимости расчетной схемы  $n_k = 13$ . Степень статической неопределимости той же половины фермы  $n_{ст} = 11$ , следовательно, можно применить для расчета и метод сил. Основную систему в этом случае целесообразно выбрать в виде фермы с шарнирными узлами.

указанные без скобок на рис. 2.25. Наибольший момент, равный 29,5 кН·м, возникает в сечении 1 (рис. 2.24) стержня, продольная сила в котором –1859,2 кН (при расчете по шарнирной схеме –1875 кН). Если принять ширину сечения  $b = h/2 = 12,5$  см, то фибровые напряжения от изгиба и сжатия получаются равными соответственно 22,7 МПа и 59,5 МПа. В сечении 2 стержня нижнего пояса с наибольшей продольной силой 2599,8 кН (в ферме с шарнирными узлами – 2625 кН) изгибающий момент равен 22,4 кН·м. Он вызывает фибровое напряжение 17,3 МПа (от продольной силы – 83,2 МПа). При этом полное напряжение получается на 21% больше, чем вычисленное по шарнирной схеме, и, следовательно, *в рассмотренном случае пренебрегать изгибом стержней фермы нельзя.*

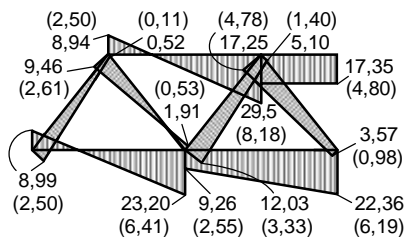


Рис. 2.25

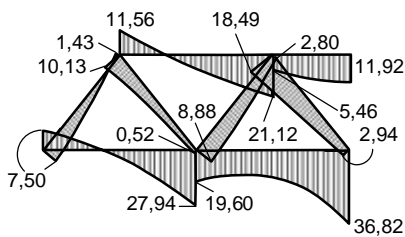


Рис. 2.26

Анализируя приведенные выше данные, нужно иметь в виду то, что они получены при следующих условиях:

- а) ферма рассчитана как *линейно деформируемая система* (то есть по *недеформированной* схеме, без учета явления продольно-поперечного изгиба элементов);
- б) стержни фермы достаточно массивные (жесткие) - высота сечений всех элементов  $h = 0,25$  м составляет 1/10... 1/12 их длины.

• Расчет по деформированной схеме (с учетом *конструктивной нелинейности*) для систем, стержни которых испытывают интенсивное растяжение или сжатие, будет давать другие значения изгибающих моментов – для рассматриваемой фермы эпюра показана на рис. 2.26 (при  $E = 3 \cdot 10^4$  МПа). Обращает на

себя внимание то, что моменты в *Об особенностях расчетов систем с элементами, испытывающими продольно-поперечный изгиб, можно прочитать, в частности, в [ 6 ].*

*растянутых* стержнях в среднем *больше*, чем вычисленные без учета эффекта продольно-поперечного изгиба, а в *сжатых* – *меньше*. Так, в сечении 1 уточненное значение момента получилось меньше в 1,4 раза, а в сечении 2 – в 1,65 раза больше. Объяснить это можно тем, что растянутые элементы при работе на изгиб проявляют себя как более жесткие, чем сжатые, и вследствие этого в большей степени участвуют



в восприятии изгиба. Заметим, что уточнения в значениях продольных сил при этом не превышают 0,1%. Наибольшее нормальное напряжение – оно возникает в сечении 2 – становится уже на 33% больше, чем найденное расчетом по шарнирной схеме.

- Оценивая влияние такого фактора, как *гибкость стержней*, следует отметить, что *увеличение* гибкости (оно сопровождается также увеличением отношения  $EA/EI$  жесткостей сечений элементов при растяжении-сжатии и изгибе) при расчете по недеформированной схеме приводит к уменьшению изгибающих моментов.

Например, если изменить размеры сечений всех стержней фермы в сравнении с принятыми выше, так чтобы гибкость элементов поясов фермы примерно удвоилась и стала бы равной 80, то отношение  $EA/EI$  возрастет в 3,65 раза, а изгибающие моменты уменьшатся в среднем в 3,6 раза (их значения даны в скобках на рис. 2.25).

Но более точный расчет – по деформированной схеме – показывает, что в наиболее напряженных сжато-изогнутых элементах увеличение гибкости может вызывать увеличение изгибающих моментов, причем тем большее, чем ближе значения продольных сил к критическим.

Таким образом, **пренебрежение изгибом стержней может быть опасным с точки зрения оценки прочности конструкции**, особенно для ферм с «жесткими» (массивными) стержнями. Вычислять изгибающие моменты в них следует, как правило, с учетом эффекта **продольно-поперечного изгиба**.

Далее рассмотрим такие факторы, как несовершенства геометрии фермы и неузловое приложение нагрузок.

- *Эксцентричное примыкание стержня к узлу*. В качестве примера возьмем средний стержень верхнего пояса фермы (в нем действует наибольшая сжимающая продольная сила) с одинаковыми смещениями его концов от центров узлов вверх на  $e_0$  (рис. 2.27, а). Эксцентricность прикрепления концов стержня к узлам моделируется бесконечно жесткими вставками и учитывается при описании геометрии

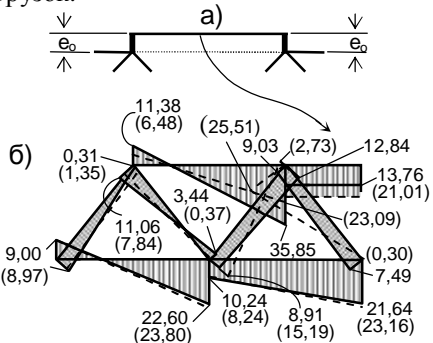


Рис. 2.27

расчетной схемы. Рассчитав ферму (по недеформированной схеме) как симметричную систему с жесткими узлами при тех же нагрузках и размерах, что на рис. 2.24, для  $e_0 = 1$  см находим изгибающие моменты, эпюра которых приведена на рис. 2.27, б сплошными линиями. Там же штриховыми линиями с ординатами в скобках даны моменты для

случая такого же отклонения  $e_0 = 1\text{ см}$  в противоположную сторону (вниз).

• *Влияние начальных геометрических несовершенств (погибей) стержней* оценим, рассматривая простейшее по форме – в виде треугольника – начальное отклонение от проектной прямолинейной оси среднего стержня верхнего пояса (рис. 2.28, а). Приняв верхнюю точку треугольника за дополнительный узел расчетной схемы с ординатой, учитывающей величину  $f_0$ , в результате расчета при  $f_0 = d/100 = 3\text{ см}$  и таких же прочих исходных данных, как на рис. 2.24, получаем эпюры моментов (рис. 2.28) для двух случаев –  $f_0$  вверх (сплошные линии) и  $f_0$  вниз (штриховые линии с скобками).

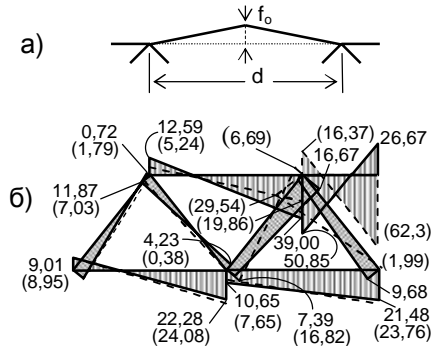


Рис. 2.28

• *Изгиб от нагрузок, приложенных со смещениями относительно центров узлов*, удобно изучать, заменяя их эквивалентными узловыми воздействиями. Для одиночной сосредоточенной силы на некотором стержне фермы (рис. 2.29, а) указанная замена дает загрузку, представленное на рис. 2.29, б, где  $F_l = F \cdot v[1 + u(v - u)]$ ;  $F_r = F \cdot u[1 + v(u - v)] = F - F_l$ ;  $M_l = Fd \cdot uv^2$ ;  $M_r = Fd \cdot u^2v$ .

Если  $u \ll 1$ , то можно принимать  $F_l \approx F$ ,  $F_r \approx 0$ ,  $M_l \approx Fe_F$ ,  $M_r \approx 0$ , (здесь  $e_F = ud$ ).

Эквивалентные силы и

моменты суммируются с заданными узловыми нагрузками. Далее расчет на суммарные силы в узлах выполняется обычным порядком, и влияние вызываемого ими изгиба оценивается так, как это сделано выше.

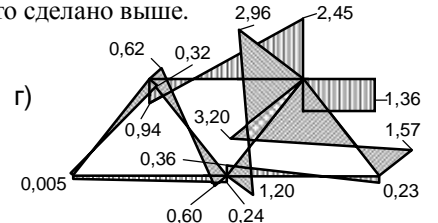
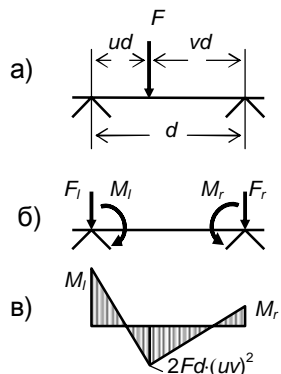


Рис. 2.29

На действие *узловых моментов* ферма рассчитывается отдельно. Например, при симметричном смещении нагрузок  $F_2$  (рис. 2.24) на  $e_F = 1\text{ см}$  от центров узлов имеем  $F_l = F_r = F_2$ ;  $M_l = M_r = F_2 e_F = 10\text{ кН}\cdot\text{м}$ .

Эпюра изгибающих моментов от одновременно приложенных  $M_l$  и  $M_r$  показана на рис. 2.29, г.

Полные изгибающие моменты в стержне, к которому приложена неузловая нагрузка, получаются суммированием результатов расчета на действие эквивалентных узловых воздействий и «локальных» моментов с эпюрой по рис. 2.29, в.

Сравнение эпюр, приведенных на рис. 2.25, 2.27 и 2.28, а также анализ данных рис. 2.29, г показывают, что *распределение изгибающих моментов, вызванных геометрическими несовершенствами  $e_0$ ,  $f_0$  и внешними моментами в узлах, носит локальный характер, с достаточно быстрым затуханием по мере удаления от места реализации любого из указанных факторов.*

### 3. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие виды простых деформаций в общем случае входят в полную деформацию элемента плоской стержневой системы? Пространственной стержневой системы?

2. Какие комбинации простых деформаций необходимо учитывать в расчетах напряженно-деформированного состояния балок, рам (в том числе пространственных и с элементами типа затяжек, подкосов и т.п.), ферм, арок (с затяжками и без них), различных комбинированных систем?

3. Какие виды деформаций для каждого из вышеуказанных типов конструкций можно не учитывать в расчете и почему?

4. Чем опасно необоснованное пренебрежение тем или иным видом деформации при определении перемещений и усилий в конструкциях? В чем состоит различие в возможных последствиях этого для статически определимых и статически неопределимых систем?

5. Как сказывается на результатах расчета исключение из него некоторого вида деформации – больше или меньше действительных будут вычисленные значения перемещений? А усилий? – Дайте принципиальное объяснение.

6. Как учитываются разные виды простых деформаций элементов при определении перемещений линейно деформируемых стержневых систем от различных воздействий (силовых, температурных, кинематических) по методу Максвелла – Мора?

7. Почему в универсальной формуле Максвелла – Мора для перемещений от изменений температуры и смещений связей меньше слагаемых, чем для случая силовых воздействий? Означает ли это, что при определении перемещений  $\Delta_{it}$  и  $\Delta_{ic}$  учитываются не все виды деформаций?

8. Как сказывается на перемещениях и усилиях в конструкции податливость связей? Как при вычислении перемещений по формуле Максвелла – Мора можно учесть ее влияние?

9. Перечислите основные признаки, по которым следует оценивать необходимость учитывать в расчете влияние деформации сдвига в элементах конструкции. То же, деформаций растяжения (сжатия).

10. Зависит ли степень статической неопределимости системы от того, учитывается ли в расчете или нет деформация сдвига для элементов конструкции? А степень кинематической неопределимости?

11. Будут ли одинаковыми или разными основные системы метода перемещений при расчете одной и той же конструкции с учетом и без учета продольных деформаций стержней (при одинаковых прочих условиях)?

12. Что можно сказать о соответствующих вариантах основной системы метода сил?

13. Как именно (в схемах, формулах и т.п.) учитывается влияние сдвига при расчете статически неопределимой системы методом сил? А при использовании метода перемещений?

14. Как получены поправочные функции, учитывающие сдвиг в типовых задачах для элементов основной системы метода перемещений?

15. Для каких строительных конструкций может быть значительным влияние деформации сдвига?

16. В чем состоят особенности расчета статически неопределимой системы методом сил с учетом продольных деформаций стержней? То же, методом перемещений.

17. Приведите примеры строительных конструкций (помимо ферм), напряженно-деформированное состояние которых существенно зависит от продольной податливости элементов.

18. Как скажется на перемещениях комбинированной конструкции замена материала растянутых элементов на более прочный?

#### **4. СОДЕРЖАНИЕ ИНДИВИДУАЛЬНОГО РАСЧЕТНОГО ЗАДАНИЯ**

1. Оценить степени статической и кинематической неопределимости заданной системы.
2. Выбрать рациональный метод расчета, принимая во внимание возможность учета симметрии системы и нагрузки.
3. Выполнить решение задачи:

а) для конструкций с расчетными схемами №1...№6:

– определить величины  $\Delta_{(1)}$  и  $\Delta_{(2)}$ , на которые должны быть изготовлены короче или длиннее соответствующие стержни, чтобы после монтажа «с натягом» в конструкции при заданной нагрузке выполнялись бы

условия  $|M_{1-1}| = |M_{2-2}| = |M_{3-3}|$ ;

- построить эпюры внутренних силовых факторов при выполнении указанных условий;

**б) для конструкций с расчетными схемами №7...№12:**

- определить регулируемые смещения связей  $\Delta_{(1)}$  и  $\Delta_{(2)}$ , обеспечивающие при заданной нагрузке выполнение условий  $|M_{1-1}| = |M_{2-2}| = |M_{3-3}|$ ;
- построить эпюры внутренних силовых факторов при выполнении указанных условий;

**в) для конструкций с расчетными схемами №13...№18:**

- определить усилие предварительного натяжения  $N_0$  стержня (1), обеспечивающее выполнение условия  $M_{1-1} = -M_{2-2}$ ;
- построить эпюры внутренних силовых факторов при выполнении указанного условия;

**г) для конструкций с расчетными схемами №19...№24:**

- построить эпюры внутренних силовых факторов по результатам расчетов с учетом и без учета деформаций сдвига горизонтальных и наклонных *изгибаемых* стержней;

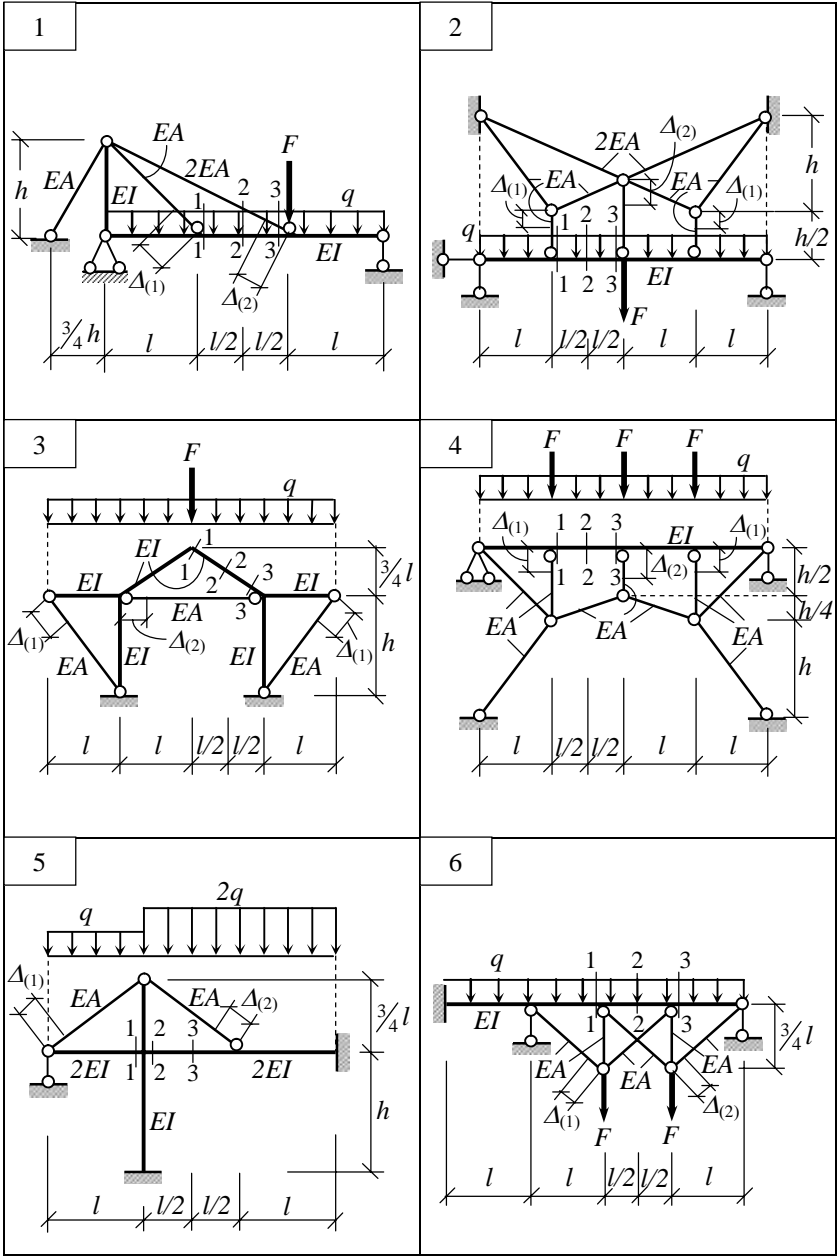
указание: принимать  $E/G = 2,5$ ;  $k_f = 4$ ;  $I/A_0 = 2 \cdot 10^{-3} l^2$ , где  $A_0$  – площадь сечения элементов, для которых учитывается сдвиг;

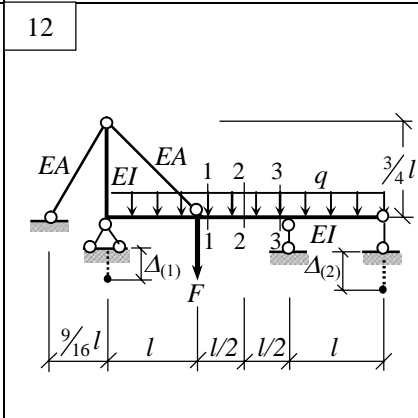
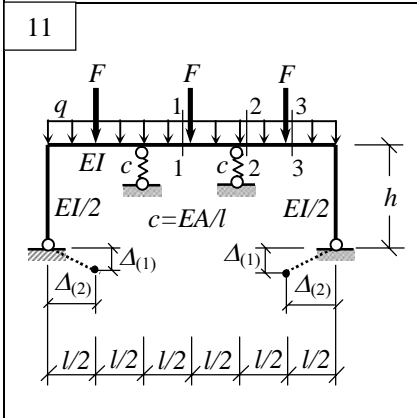
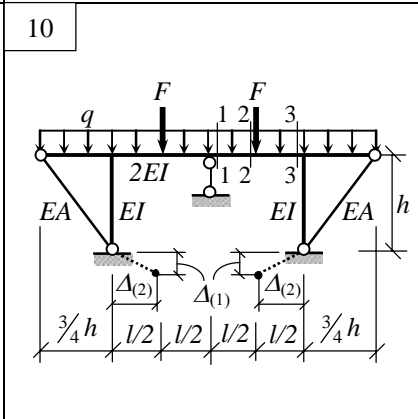
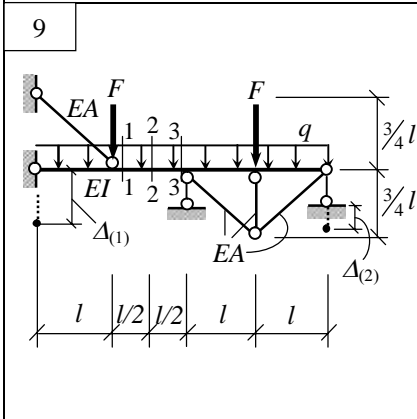
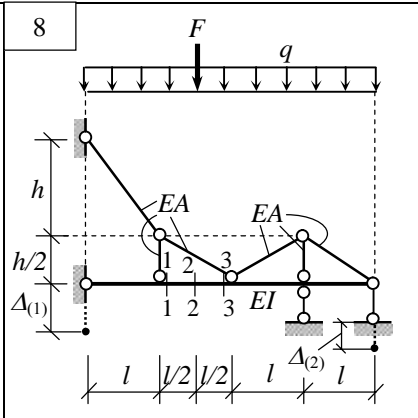
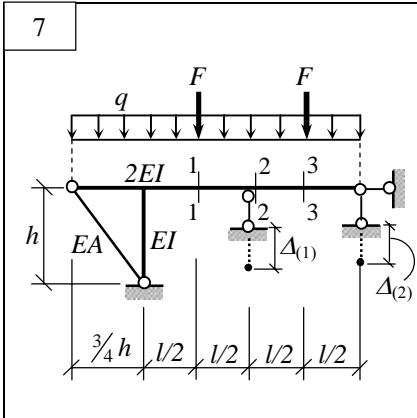
**д) для конструкций с расчетными схемами №25...№30:**

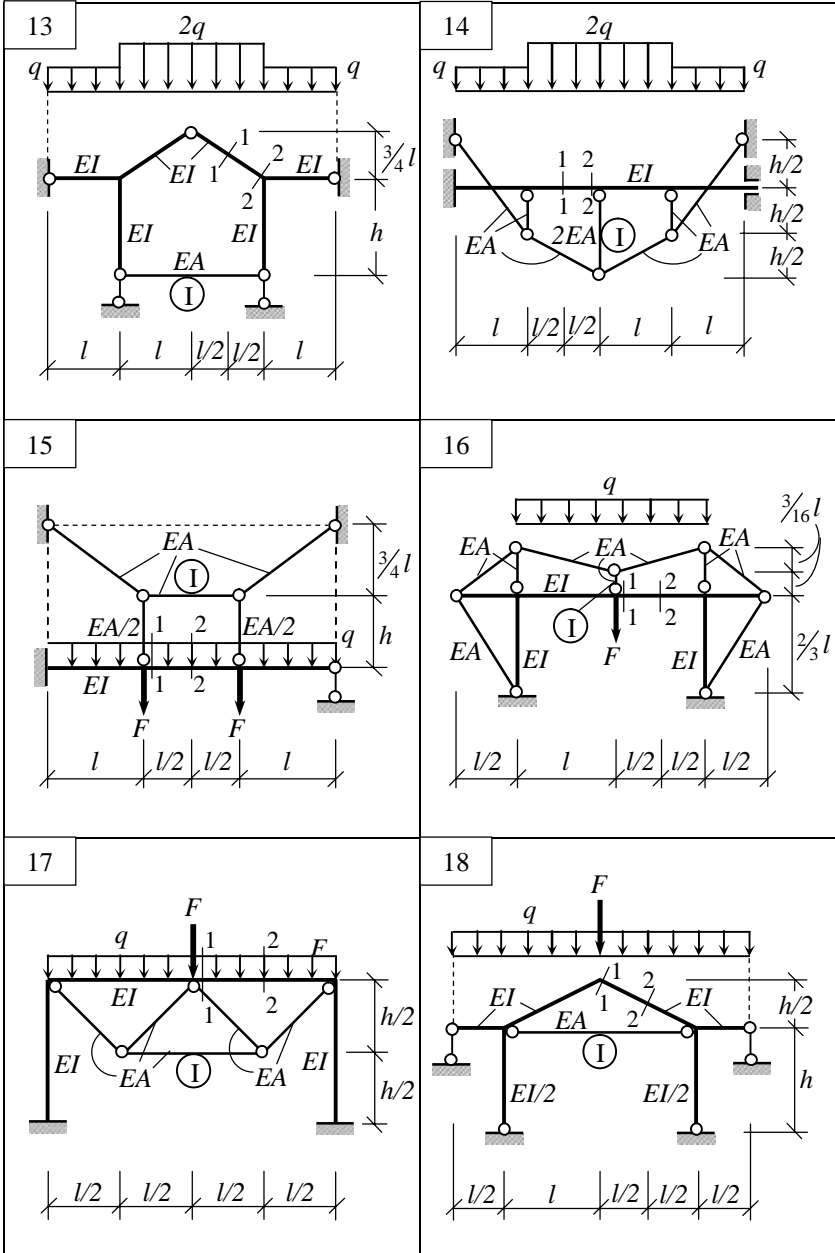
- построить эпюры внутренних силовых факторов по результатам расчетов с учетом и без учета податливости элементов, работающих на растяжение (сжатие);
- выполнить 2 – 3 перерасчета с измененными соотношениями  $EA/EI$  и приближенно (интерполяцией) определить такое соотношение  $EA/EI$ , при котором будет выполнено условие  $M_{1-1} = -M_{2-2}$ .

## 5. ВАРИАНТЫ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

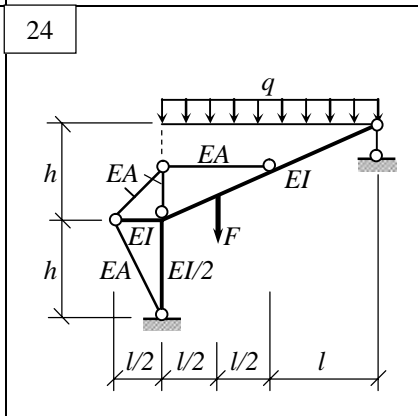
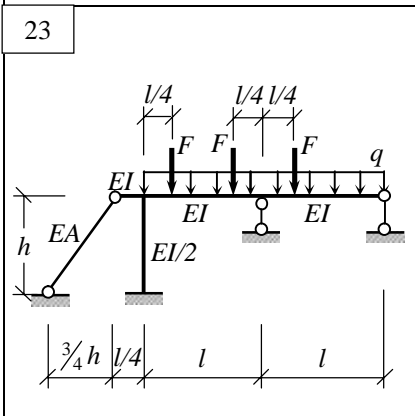
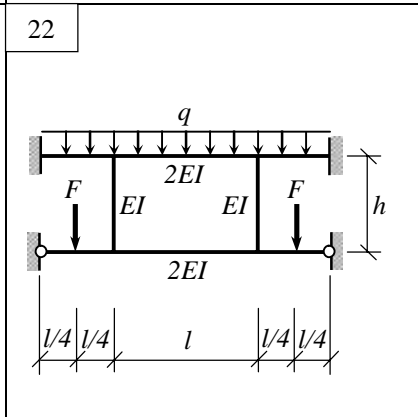
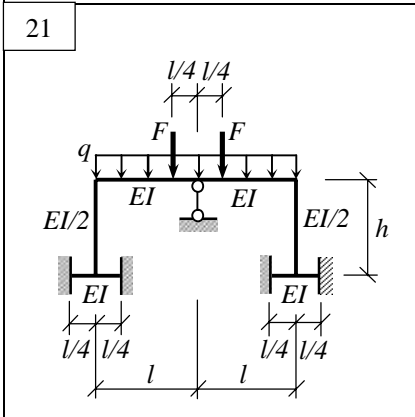
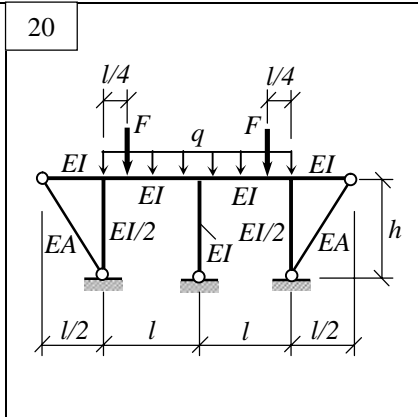
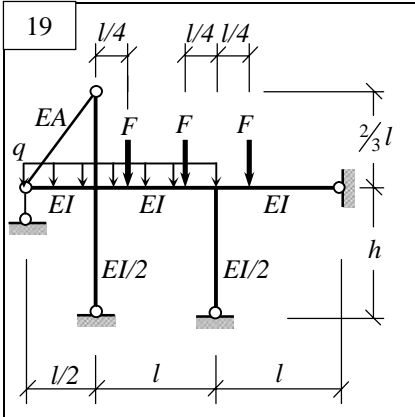
N вари- анта	Х а р а к т е р и с т и к и с и с т е м ы				Н а г р у з к и	
	$l$ ( м )	$h$ ( м )	$EI$ ( кН·м <sup>2</sup> )	$\frac{EI}{EA \cdot l^2}$	$q$ ( кН/м )	$F$ ( кН )
1	6	3	$2 \cdot 10^4$	$1,0 \cdot 10^{-2}$	20	50
2	8	4	$4 \cdot 10^4$	$1,2 \cdot 10^{-2}$	24	80
3	10	5	$5 \cdot 10^4$	$1,5 \cdot 10^{-2}$	18	40
4	9	4	$4 \cdot 10^4$	$1,2 \cdot 10^{-2}$	20	60
5	6	4	$3 \cdot 10^4$	$0,8 \cdot 10^{-2}$	30	40
6	12	5	$8 \cdot 10^4$	$1,0 \cdot 10^{-2}$	20	80
7	8	5	$3 \cdot 10^4$	$0,9 \cdot 10^{-2}$	18	50
8	10	4	$8 \cdot 10^4$	$1,2 \cdot 10^{-2}$	24	30
9	9	5	$6 \cdot 10^4$	$1,0 \cdot 10^{-2}$	32	40
10	12	6	$10 \cdot 10^4$	$1,5 \cdot 10^{-2}$	25	60



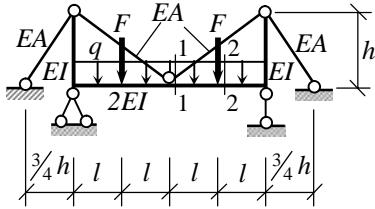




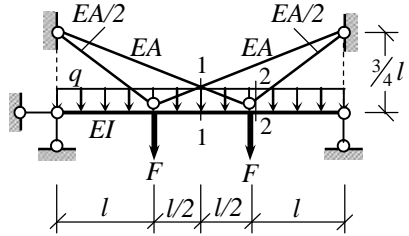




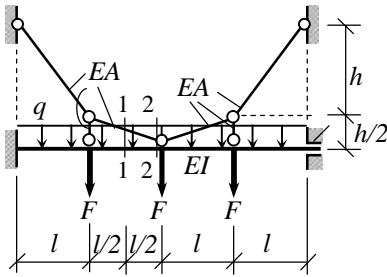
25



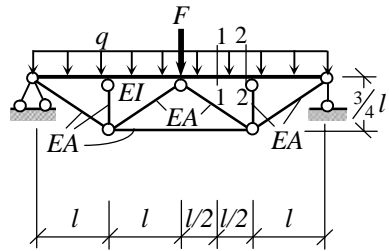
26



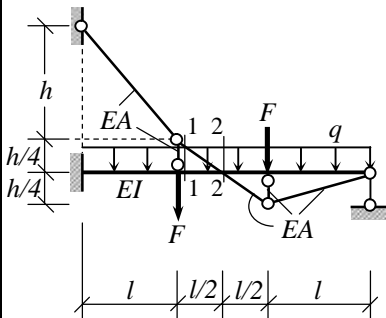
27



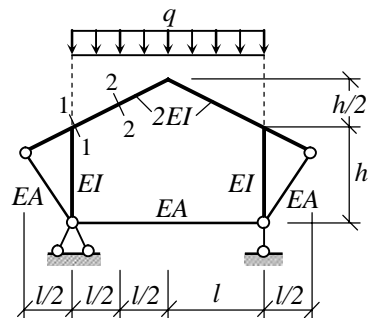
28



29



30



# ПРИЛОЖЕНИЕ 1

## Таблицы метода перемещений (с учетом сдвига)

Таблица 1

Эпюры внутренних силовых факторов в типовых элементах постоянного сечения плоских ОСМП от смещений концевых сечений

Тип элемента	Вид смещения	
	Поворот концевой сечения на угол $\theta$	Взаимное линейное смещение концевых сечений $\Delta$
Тип 1	<p style="text-align: center;"><math>EI_j = \text{const}</math> <math>GA_j = \text{const}</math></p> <p style="text-align: center;"><math>l_j</math></p> <p style="text-align: center;"><math>2i_j \cdot \theta \cdot \varphi_3</math> (M)</p> <p style="text-align: center;"><math>4i_j \cdot \theta \cdot \varphi_2</math> (M)</p> <p style="text-align: center;"><math>\frac{6i_j}{l_j} \cdot \theta \cdot \eta</math> (Q)</p>	<p style="text-align: center;"><math>EI_j = \text{const}</math> <math>GA_j = \text{const}</math></p> <p style="text-align: center;"><math>\Delta</math></p> <p style="text-align: center;"><math>l_j</math></p> <p style="text-align: center;"><math>\frac{6i_j}{l_j} \cdot \Delta \cdot \varphi_4</math> (M)</p> <p style="text-align: center;"><math>\frac{12i_j}{l_j^2} \cdot \Delta \cdot \eta</math> (Q)</p>
$i_j = \frac{EI_j}{l_j}$		
Тип 2	<p style="text-align: center;"><math>EI_j = \text{const}</math> <math>GA_j = \text{const}</math></p> <p style="text-align: center;"><math>l_j</math></p> <p style="text-align: center;"><math>3i_j \cdot \theta \cdot \varphi_1</math> (M)</p> <p style="text-align: center;"><math>\frac{3i_j}{l_j} \cdot \theta \cdot \varphi_1</math> (Q)</p>	<p style="text-align: center;"><math>EI_j = \text{const}</math> <math>GA_j = \text{const}</math></p> <p style="text-align: center;"><math>\Delta</math></p> <p style="text-align: center;"><math>l_j</math></p> <p style="text-align: center;"><math>\frac{3i_j}{l_j} \cdot \Delta \cdot \varphi_1</math> (M)</p> <p style="text-align: center;"><math>\frac{3i_j}{l_j^2} \cdot \Delta \cdot \varphi_1</math> (Q)</p>

$$\varphi_1 = \frac{1}{1+3\lambda}; \quad \varphi_2 = \frac{1+3\lambda}{1+12\lambda}; \quad \varphi_3 = \frac{1-6\lambda}{1+12\lambda}; \quad \varphi_4 = \eta = \frac{1}{1+12\lambda}; \quad \lambda = k_\tau \cdot \frac{E}{G} \cdot \frac{I}{Al^2},$$

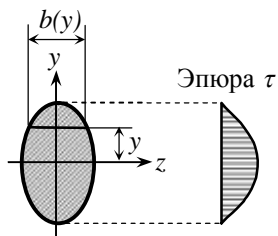
где  $E, G$  – модули упругости материала 1-го и 2-го рода ( $E/G = 2(1+\nu)$ );

$\nu$  – коэффициент Пуассона;

$I, A$  – момент инерции (осевой) и площадь поперечного сечения;

$k_\tau$  – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений в сечении:

$$k_\tau = \frac{A}{I^2} \int_A \frac{S^2(y)}{b^2(y)} dA.$$



Эпюры внутренних силовых факторов в типовых элементах постоянного сечения плоских ОСМП от некоторых видов воздействий

Тип элемента	Нагрузки			Изменение температуры
	Равномерно распределенная	Сосредоточенная сила	Сосредоточенный момент	
Тип 1				<p> <math>i_j = EI_j / l_j</math>  <math>\Delta T_{2j} = \Delta T_{1j} - \Delta T_{2j}</math>  <math>Q = 0, N = -\alpha_j \Delta T_{2j} EA_j</math>  <math>M</math> и <math>N</math> даны для <math>\Delta T_{2j} &gt; 0</math> и <math>\Delta T_{2j} &lt; 0</math> соответственно         </p>
Тип 2				<p> <math>N = -\alpha_j \Delta T_{2j} EA_j</math> </p>

Примечания: 1). Для элемента типа 3 продольная сила от изменения температуры – как для элементов типа 1 и 2;  $M = 0, Q = 0$ .

2). Для элемента типа 4 эпюры  $M$  и  $Q$  от поперечных нагрузок – как в однопролетной балке, шарнирно опертой по концам (влияния сдвига нет).

$$\alpha_1 = \varphi_1 = \frac{1}{1 + 3\lambda}; \quad \alpha_2 = 1 - \frac{6\lambda}{1 + 12\lambda} \cdot (1 - u/v); \quad \alpha_3 = 1 - \frac{6\lambda}{1 + 12\lambda} \cdot (1 - v/u); \quad \beta_1 = \frac{1 + 12\lambda/5}{1 + 3\lambda}; \quad \mu_1 = 1 - \frac{9\lambda}{1 + 3\lambda} \cdot \frac{1 - v^2}{1 - 3v^2};$$

$$\mu_2 = 1 - \frac{12\lambda}{1 + 12\lambda} \cdot \frac{3u}{2 - 3v}; \quad \mu_3 = 1 - \frac{12\lambda}{1 + 12\lambda} \cdot \frac{3v}{2 - 3u}.$$

Если сдвиг не учитывается (т.е. считается  $G = \infty$ ), то  $\lambda = 0$ , и значения всех функций  $\alpha_1, \dots, \beta_1, \eta, \mu_1, \dots, \varphi_1, \dots, \varphi_4$  становятся равными 1.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

### Об одном варианте формирования исходных матриц при определении перемещений с учетом сдвига

Поскольку поперечная сила в среднем сечении незагруженного участка или участка, на котором приложена *равномерно* распределенная нагрузка  $q = \text{const}$ , выражается через изгибающие моменты в концевых сечениях:  $Q_{cj} = (M_{cj} - M_{bj})/l_j$ , то поперечные силы могут быть исключены из матриц  $L$  и  $L_F$ , но при этом в матрицу податливости участка при изгибе вносятся поправки, учитывающие влияние сдвига. Матрица податливости участка при *поперечном* изгибе (изгибе со сдвигом) имеет следующую структуру:

$$B_{(M,Q)j} = \frac{l_j}{6EI_j} \begin{bmatrix} (2 + 6\lambda_j) & (1 - 6\lambda_j) \\ (1 - 6\lambda_j) & (2 + 6\lambda_j) \end{bmatrix} \text{ — для незагруженного участка;}$$

$$B_{(M,Q)j} = \frac{l_j}{6EI_j} \begin{bmatrix} (1 + 6\lambda_j) & 0 & -6\lambda_j \\ 0 & 4 & 0 \\ -6\lambda_j & 0 & (1 + 6\lambda_j) \end{bmatrix} \text{ — для участка с нагрузкой } q,$$

где  $\lambda_j = k_{\tau j} (E_j/G_j) \cdot l_j / (A_j l_j^2)$ .

### РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лашеников Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Стержневые системы: Учебник для вузов/ Под ред. А.Ф. Смирнова. – М.: Стройиздат, 1981. – 512 с.
2. Александров А.В., Лашеников Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы: Учебник для вузов /Под ред. А.Ф. Смирнова. – М.: Стройиздат, 1983. – 488 с.
3. Кирсанов Н.М. Висячие и вантовые конструкции: Учебное пособие для вузов. – М.: Стройиздат, 1981. – 158 с.
4. Никифоров В.Ф. Комбинированные конструкции. Статика: Учебное пособие. – Ярославль: ЯПИ, 1978. – 89 с.
5. Перельмутер А.В. Основы расчета вантово-стержневых систем. – М.: Стройиздат, 1969. – 190 с.
6. Роев В.И. Устойчивость упругих стержневых систем. Метод перемещений: Метод. указания. – Новосибирск: НГАС, 1997. – 41 с.