

ОПД.Р.03 СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА
СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ
СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ
Учебное пособие

Глава 1.

1. Введение

Строительство - древнейшая и ответственнейшая область деятельности человека. Испокон веков строитель был ответственен за прочность и надежность возводимого им сооружения. В законах вавилонского царя Хаммураби (1728 – 1686 г.г. до нашей эры) записано (рис.1.1):

«...если строитель возвел дом, то за каждый музар жилой площади ($\approx 36 \text{ м}^2$) он получает два шекеля серебра (228),

если строитель построил недостаточно прочный дом, он обрушился и при этом погиб хозяин, то строитель должен быть убит (229),

если при обрушении дома погиб сын заказчика, то должен быть убит сын строителя (230),

если в результате обрушения погибнет раб заказчика-хозяина, то строитель должен передать хозяину равноценного раба (231),

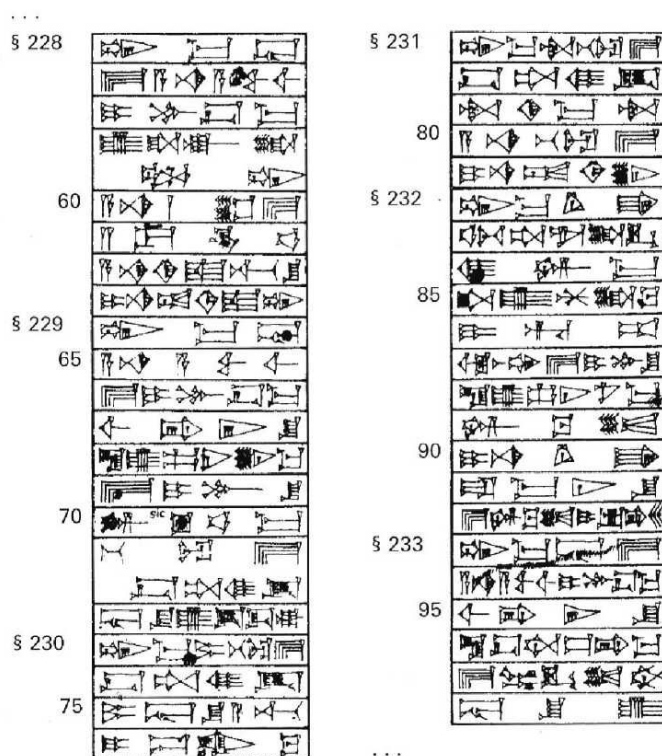


Рис.1.1

если строитель построил дом, но не проверил надежность конструкции, в результате чего обрушилась стена, то он должен за свой счет построить стену заново (232) ...»

Строительство возникло с появлением человека разумного, который, не зная законов природы, накапливая практический опыт, возводил жилища и другие необходимые сооружения. В том числе гениальные сооружения Египта, Греции, Рима. До середины XIX века зодчий в одном лице решал все художественные и технические задачи проектирования и возведения здания лишь на основе своего практического опыта. Так в 448 – 438 годах до н.э. зодчими Иктином и Калликратом под руководством Фидия был построен Парфенон в Афинах. Так работали и наши безымянные зодчие, возводившие великолепные храмы по всей Руси, и великие зодчие с великими именами: Барма и Постник, Растрелли и Росси, Баженов и Казаков и многие другие.

Опыт заменял знание.

Когда знаменитый русский зодчий Карл Иванович Росси строил в 1830 году в Петербурге здание Александринского театра, то многие видные деятели во главе с известным инженером Базеном усомнились в прочности громадных металлических стропильных арок ферм, запроектированных Росси, и добились приостановки строительства. Оскорбленный, но уверенный в своей интуиции Росси писал министру двора: "...В случае, когда бы в упомянутом здании от устройства металлической крыши произошло бы какое-либо несчастье, то в пример для других пусть тотчас же меня повесят на одной из стропил". Этот аргумент подействовал не менее убедительно, чем расчетная проверка, которую нельзя было применить для решения спора, так как метода расчета ферм не существовало.

Начиная с эпохи возрождения начал развиваться научный подход к расчету сооружений.

2. Цель и задачи строительной механики

Строительная механика – важнейший инженерный раздел большой отрасли науки, механики деформируемого твердого тела. Механика деформируемого твердого тела опирается на законы и методы теоретической механики, в которой исследуются равновесие и движение абсолютно твердых объектов.

Наука о методах расчета сооружений на прочность жесткость и устойчивость называется строительной механикой.

Точно так же была сформулирована задача в сопротивлении материалов. Это определение в принципе правильное, но не точное. Рассчитать конструкцию на прочность – это значит найти такие размеры сечений ее элементов и такой материал, чтобы была обеспечена ее прочность при заданных воздействиях.. Но ни сопротивление материалов, ни строительная механика таких ответов не дают. Обе эти дисциплины дают лишь теоретические основы для расчета на прочность. Но без знания этих основ невозможен ни один инженерный расчет.

Чтобы понять сходство и различие сопротивления материалов и строительной механики нужно представить структуру всякого инженерного расчета. Он всегда включает в себя три этапа.

1. Выбор расчетной схемы. Рассчитать реальное, даже самое простое сооружение или конструктивный элемент, учитывая, например, возможные отклонения его формы от проектной, особенности структуры и физическую неоднородность материала и т.п., невозможно. Всякое сооружение идеализируется, выбирается расчетная схема, отражающая все основные особенности работы сооружения или конструкции.

2. Анализ расчетной схемы. Используя теоретические методы выясняют закономерности работы расчетной схему под нагрузкой. При расчете на прочность получают картину распределения возникающих внутренних силовых факторов. Выявляются те места в конструкции, в которых могут возникнуть большие напряжения..

3. Переход от расчетной схемы к реальной конструкции. Это этап конструирования.

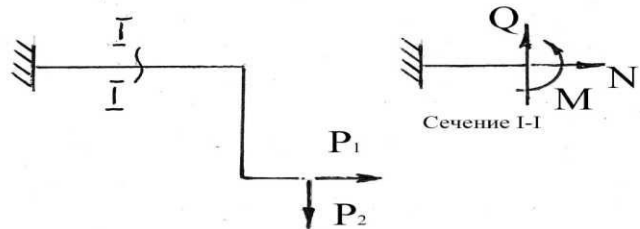
Сопротивление материалов и строительная механика “работают” на втором этапе.

В чем отличие строительной механики от сопротивления материалов?

В сопротивлении материалов изучается работа бруса (стержня) при растяжении, сжатии, кручении и изгибе. Здесь закладываются основы расчета на прочность разнообразных конструкций и сооружений.

В строительной механике стержневых систем рассматривается расчет комбинаций из стержневых элементов, соединенных жестко или шарнирно. Результатом расчета служат, как правило, значения внутренних силовых факторов (расчетных усилий) в элементах расчетной схемы.

В каждом нормальном сечении стержневой конструкции поле напряжений в общем случае может быть приведено к трем внутренним силовым факторам (внутренним усилиям)– изгибающему моменту M , поперечной (перерезывающей) силе Q и продольной силе N



(рис.1.2). Они и определяют “работу” как

Рис.1.2

каждого элемента, так и всего сооружения. Зная M , Q и N во всех сечениях расчетной схемы сооружения, еще нельзя ответить на вопрос о прочности сооружения. Ответить на вопрос можно только “добравшись” до напряжений. Эпюры внутренних усилий позволяют указать на самые напряженные места в конструкции и, используя известные из курса сопротивления материалов формулы, найти напряжения. Например, в сжато изогнутых в одной плоскости стержневых элементах максимальные нормальные напряжения в крайних волокнах определяются по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W} \quad (1.1)$$

где W – момент сопротивления сечения, A – площадь сечения, M – изгибающий момент, N – продольная сила.

Используя ту или иную теорию прочности, сравнивая полученные напряжения с допускаемыми (расчетными сопротивлениями) можно ответить на вопрос, выдержит ли конструкция заданную нагрузку ?

Изучение основных методов стержневой механики позволяет перейти к расчету пространственных, в том числе тонкостенных, конструкций

Таким образом, строительная механика представляет собой естественное продолжение курса сопротивления материалов, где его методы применяются и развиваются для исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) расчетных схем конструкций и элементов различных инженерных сооружений и машин. В различных специализированных вузах изучают “строительную механику самолета”, “строительную механику корабля”, “строительную механику ракет” и т.п. Поэтому *строительную механику можно назвать специальным сопротивлением материалов.*

В течение учебного года изучаются методы расчета (определения внутренних усилий) в самых распространенных расчетных схемах, применяемых в строительной практике.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие задачи изучаются в курсе строительной механики стержневых систем ?
2. Какие этапы предполагает всякий инженерный расчет?
3. Как соотносятся учебные курсы сопротивления материалов и строительной механики?

3. Понятие о расчетной схеме

Расчетной схемой называют упрощенное, идеализированное изображение сооружения или конструкции, отражающее его (ее) основные свойства.

3.1 Идеализируется материал, из которого изготовлена конструкция .

Предполагается (как и в сопротивлении материалов), что материал идеально упруг, его свойства подчиняются закону Гука.

В специальных курсах используются и другие модели, описывающие другие физические свойства, как то неоднородность структуры, нелинейную упругость, пластичность, ползучесть и др.

3.2. Идеализируется геометрия

Остановимся лишь на основных типах расчетных схем, получивших наибольшее распространение в строительных конструкциях.

а) Балки и балочные системы (простая балка – это брус работающий на изгиб). Основная их особенность состоит в том, что при действии на них только вертикальных нагрузок возникают одни лишь вертикальные опорные реакции. Кроме однопролетных балок и консолей различают многопролетные шарнирные балки (рис 1.3.а), многопролетные неразрезные балки (рис. 1.3.б)

б) Арочные системы (арки и рамы). Основная особенность этих систем в том, что при действии только вертикальных нагрузок опорные реакции имеют как вертикальные так и горизонтальные составляющие. Различают:

трехшарнирные арки и рамы (рис.1.3.с)

двухшарнирные арки (рис.1.3.д)

безшарнирные арки (рис.1.3.е)

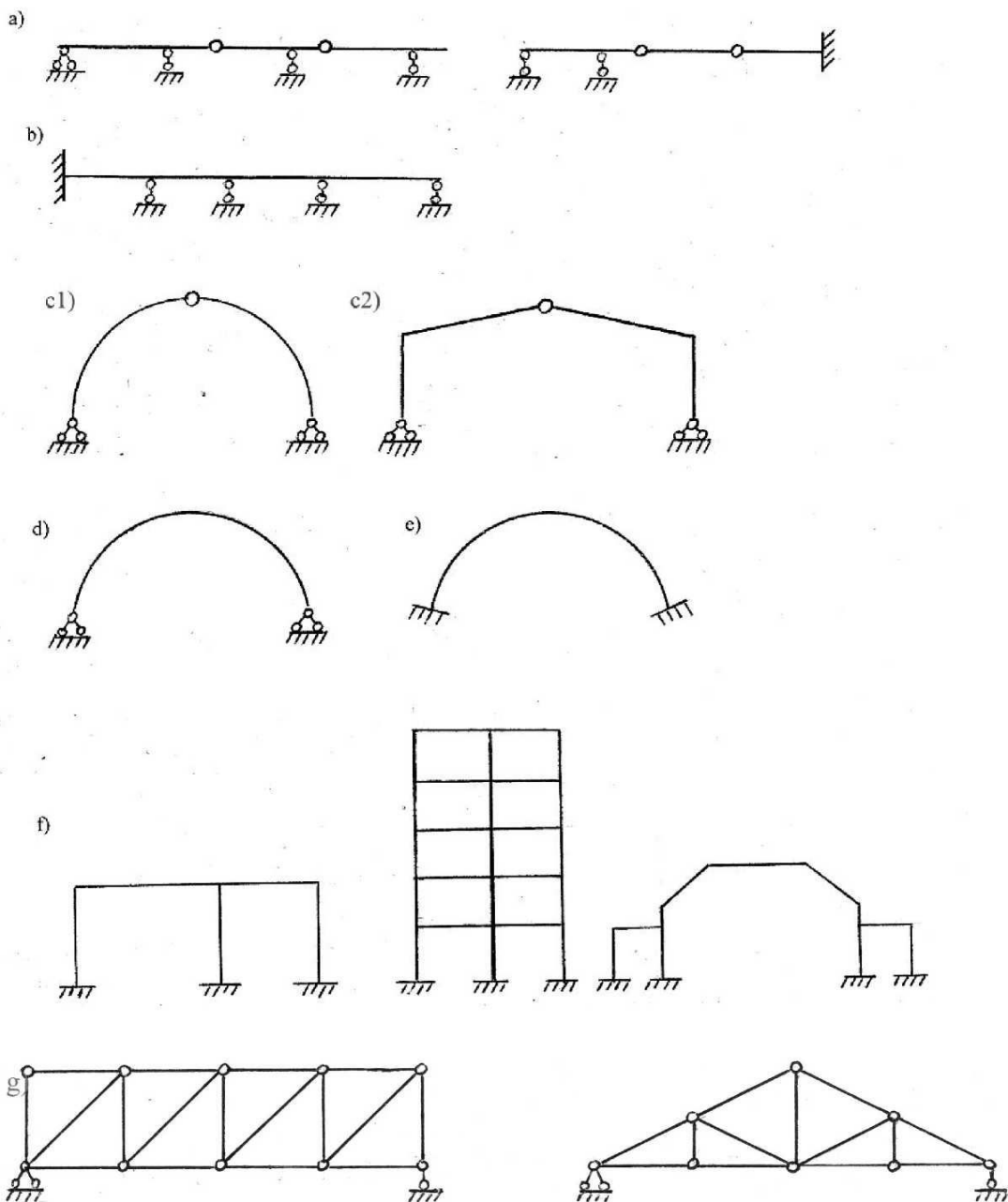


Рис.1.3

с) рамные системы (рамы) (рис.1.3.f)

d) фермы (1.3.g)

Здесь показаны лишь плоские расчетные схемы. Они могут быть связаны между собой, образуя сложные плоские и пространственные стержневые системы.

Тонкостенные пространственные системы (плиты, складки и оболочки) будут рассмотрены в курсе теории упругости.

1.3. Идеализируется работа опор.

Рассмотрим лишь самые распространенные в строительной практике схемы опирания:

Всякая опора накладывает на расчетную схему сооружения связи, препятствующие перемещениям по направлению, по которому эта связь наложена, или поворот.

a) Свободное опирание (рис.1.4a)

На стержневую систему накладывается лишь одна связь, запрещающая перемещение по своему направлению. В такой опоре возникает лишь одна опорная реакция.

b) Неподвижная шарнирная опора (рис.1.4b)

При таком опирании возможен лишь поворот вокруг опоры, а линейные перемещения невозможны. Опорную реакцию, возникающую на этой опоре, для удобства расчета раскладывают на вертикальную (перпендикулярную плоскости опирания) и горизонтальную составляющие.

с) Заделка, защемление, жесткое опирание (рис.1.4c)

Такая опора эквивалентна трем связям. На такой опоре возникают три

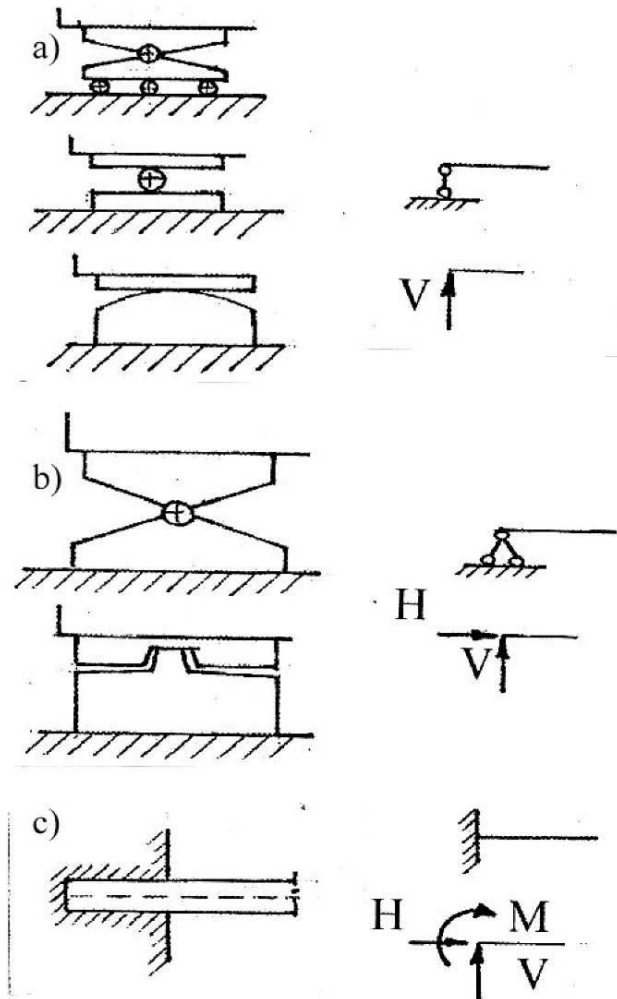


Рис1..4

опорные реакции: вертикальная и горизонтальная составляющие и момент.

3.4. Идеализируется нагрузка

Основные типы внешней нагрузки показаны на рис. 1.5 и хорошо известны из курса сопротивления материалов: сосредоточенные силы (а), распределенная нагрузка постоянной b) или переменной интенсивности (с), сосредоточенный момент (d).

Особый вид нагружения представляет собой динамическая нагрузка, переменная во времени. О ней подробнее будет рассказано в главе динамике сооружений (Пособие. Чвсть II. []).

Кроме внешних нагрузок, напряженное состояние конструкции могут вызвать и другие внешние воздействия. Для строительных конструкций важнейшее значение имеют температурные воздействия и осадка опор.

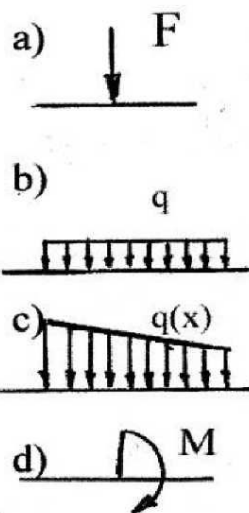


Рис.1.5

4. Кинематический анализ расчетных схем

Расчетная схема всякого строительного сооружения должна быть геометрически неизменяемой.

Геометрически неизменяемой называют такую стержневую систему, форма которой может быть изменена только в результате упругих деформаций ее элементов.

Необходимым условием геометрической неизменяемости системы служит равенство нулю числа степеней ее свободы.

Степенью свободы называют число независимых геометрических параметров, определяющих положение системы на плоскости(если речь идет о плоской расчетной схеме).

Простейшая “система” – точка на плоскости имеет две степени свободы: два числа , x и y , определяют положение точки M на плоскости (рис.1.6а)

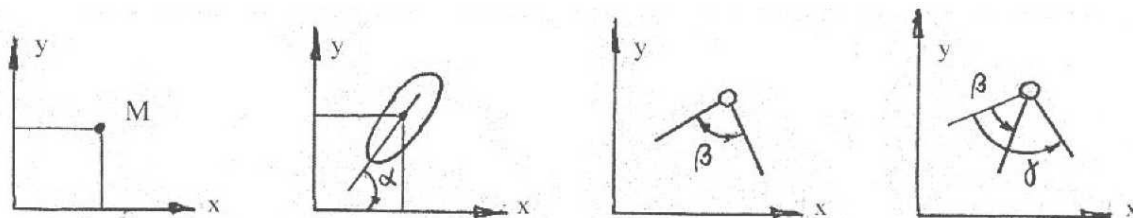


Рис.1.6

Стержень(жесткий диск) имеет на плоскости три степени свободы: два числа, x и y определяют положение центра тяжести стержня на плоскости и угол α фиксирует наклон стержня к осям координат (рис1.6b)

На рис. 1.с показаны два диска, соединенные шарниром. *Шарнир, соединяющий два диска называется простым.* Такая система имеет четыре степени свободы: три числа определяют положение системы как жесткого образования и четвертое число, угол β , фиксирует "особенность" этой жесткой системы. Если бы стержни не были бы соединены шарниром, то степень их свободы равнялась бы шести. Таким образом, простой шарнир отнимает у системы две степени свободы

Шарнир, соединяющий n стержней эквивалентен $n-1$ простому шарниру. Например, шарнир, соединяющий $n = 3$ стержня (рис.6d) эквивалентен двум $(3 - 1)$ простым шарнирам. У такой "связки" число степеней свободы системы равно пяти: три числа, характеризующие положение системы как жесткого тела и два угла β и γ . Система "россыпью" имеет девять степеней свободы, а шарнир, соединяющий три стержня, отнимает у нее четыре степени, как два простых шарнира. *Шарнир, соединяющий n стержней называется сложным и эквивалентен (по числу отнимаемых связей, $n- 1$ простому шарниру.*

Приведенные простейшие соображения позволяют записать формулу для определения числа степеней свободы плоской шарнирно- стержневой системы

$$W = 3D - 2Ш - C_0 \quad (1.2)$$

Здесь D – число дисков (стержней), $Ш$ – число простых шарниров, C_0 – число опорных стержней

Проверка по формуле (1) необходима, но недостаточна для заключения о геометрической неизменяемости системы, так как при неправильной расстановке стержней можно получить механизм (изменяемую систему) и при $W = 0$.

Ферма на рис.1.7а. геометрически неизменяема, имеет 9 дисков (стержней), два простых шарнира А и В, три двукратных (1,2,3) и один четырехкратный (4), три опорных стержня.

$$W = 3 \cdot 9 - 2 \cdot 12 - 3 = 0$$

Переставим один раскос так, как показано на рис. 7b. Подсчет числа степеней свободы дает;

$$W = 3 \cdot 9 - 2 \cdot 12 - 3 = 0$$

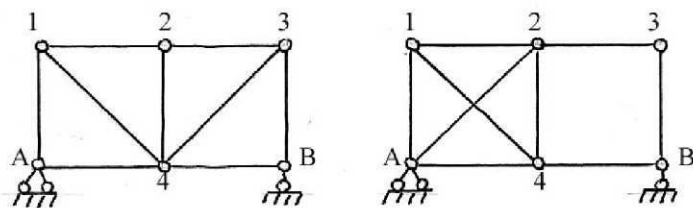


Рис.1.7

Однако нетрудно заметить, что новая система изменяема (шарнирный четырехугольник 2-3-В-4 – изменяемая фигура) и возможны ее перемещения без нагрузки.

Поэтому кроме проверки по формуле (1.2) условия $W=0$ необходимо провести и структурный анализ системы.

Основой этого анализа является житейское представление о неизменяемости шарнирного треугольника. Три стержня, соединенные шарнирами при условии, что шарниры не лежат на одной прямой (рис.1.8) образуют геометрически неизменяемую систему.

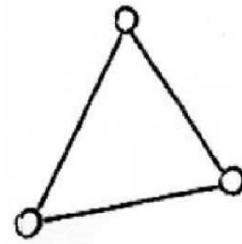


Рис.1.8

Полезно знать правила соединения двух дисков в жесткую, геометрически неизменяемую систему. Рис.1.8

Два диска образуют геометрически неизменяемую систему, если

- 1) соединены тремя непараллельными и непересекающимися стержнями (рис.1.9)
- 2) соединены шарниром и стержнем не лежащими на одной прямой (рис.1.10)

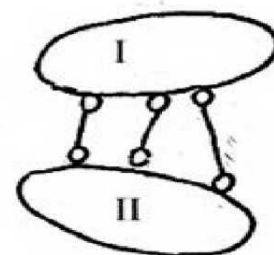


Рис.1.9

Оба эти способа можно свести к правилу треугольника, если ввести понятие условного или фиктивного шарнира, на пересечении двух соединяющих стержней

Сформулированные правила позволяют сделать следующий вывод: если к геометрически неизменяемой системе каждый новый узел присоединяется при помощи двух стержней, не лежащих на одной прямой, то такая система тоже будет геометрически неизменяемой .

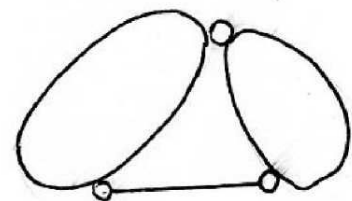


Рис.1.10

Невыполнение указанных правил может привести к большим неприятностям. Пусть, например, три стержня, соединяющих диски, пересекаются в одной точке (рис.1.11).

Такая система называется *мгновенно изменяемой*, так как возможно бесконечно малое перемещение диска I относительно диска II из –за наличия мгновенного центра вращения O. Мгновенно изменяемые системы характерны тем, что в них могут возникать бесконечно малые перемещения без деформации элементов.

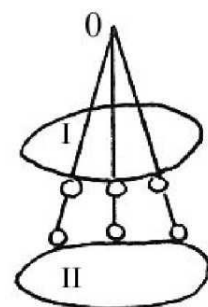


Рис 1.11

На практике нужно избегать не только мгновенно изменяемых систем, но и систем близких к ним. Рассмотрим примеры.

Пусть два диска соединены тремя стержнями, два из которых пересекаются, а продолжение третьего проходит вблизи точки пересечения (рис.1.12). Расsectем соединяющие стержни и рассмотрим равновесие верхней части.

Из уравнения равновесия $\sum M_O = 0$, получаем

$$S_3 \Delta - Fe = 0, \quad S_3 = Fe / \Delta.$$

Если Δ стремится к нулю, то усилие N_1 стремится к бесконечности.

Пусть в системе на рис.1.13 два стержня лишь немного отклонены от прямой АВ. Если в узле С приложена вертикальная сила, то усилия в стержнях АС и ВС определяются из уравнения равновесия узла С

$$S_1 = S_2 = F / 2 \sin \alpha.$$

При малом угле α правая часть становится большой, а при угле, стремящемся к нулю, усилия стремятся к бесконечности.

Итак, анализ геометрической неизменяемости расчетной схемы проводится в два этапа:

- 1) Определяют, равна ли нулю степень свободы системы по формуле (1)?
- 2) Проводят структурный анализ системы.

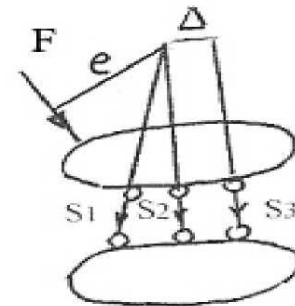


Рис.1.12

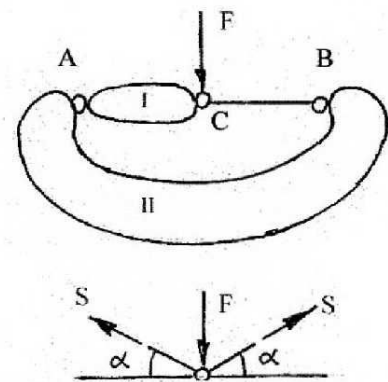


Рис.1.13

Вопросы для самоконтроля

1. Что понимают под расчетной схемой сооружения? Какими соображениями руководствуются при идеализации сооружения?
2. Какие расчетные схемы сооружений изучают в строительной механике стержневых систем?
3. Как идеализируются опоры сооружений?
4. Какая модель деформируемого тела применяется в классической строительной механике и к каким материалам она неприменима?
5. Какая система называется геометрически неизменяемой?

6. Что называется степенью свободы плоской стержневой системы?
7. Что такое простой шарнир и скольким кинематическим связям он эквивалентен?
8. Что такое сложный шарнир?
9. В чем заключается кинематический анализ расчетной схемы сооружения?
10. Какое необходимое, но недостаточное условие является признаком геометрической неизменяемости системы?
11. В чем состоит анализ геометрической структуры системы?
12. Перечислите способы образования геометрически неизменяемых стержневых систем?
13. Какие системы называют мгновенно-изменяемыми и почему?
14. Почему мгновенно-изменяемые системы не применяют в строительной практике?

Глава 2

1. Статически определимые и статически неопределимые стержневые системы.

Стержневую систему называют статически определимой, если опорные реакции и внутренние силовые факторы M , Q и N в каждом сечении могут быть найдены из одних лишь уравнений равновесия.

Замечательной особенностью таких систем является то, что внутренние усилия M , Q и N и перемещения невязаносвязаны. Это означает, например, что внутренние силовые факторы в железобетонной и металлической рамах при одинаковых размерах и нагрузке одинаковы. Перемещения же (деформации) могут быть вычислены только при известных значениях жесткостей сечений, то есть когда заданы их размеры и физические свойства материала, из которых изготовлена конструкция.

Отсюда следует, что в статически определимых системах не возникает усилий от температурных воздействий и осадки опор.

Если отсутствуют внешние силовые воздействия, то в статически определимых системах напряженное состояние равно нулю.

В статически неопределимых системах уравнений равновесия недостаточно для определения указанных выше расчетных параметров из-за наличия так называемых лишних (или избыточных) связей. Особенности работы таких систем обсуждаются во второй части Пособия.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определения статически определимой и статически неопределимой системы
2. Назовите главную особенность статически определимых систем?

2. Расчет многопролетной шарнирной балки

Общие сведения

Многопролетные статически-определимые балки представляют собой комбинированные системы, состоящие из нескольких балок, соединенных шарнирами. Несколько расчетных схем таких балок показаны на рис. 2.1.

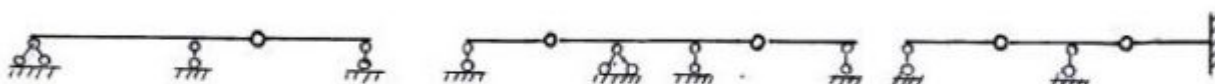


Рис.2.1

Многопролетные шарнирные балки объединяют преимущества однопролетной балки (простота расчета и изготовления, отсутствие стесненной деформации) с преимуществами неразрезной балки (меньшие моменты в пролетах из-за влияния опорных моментов, меньшие деформации). Они обладают и тем преимуществом, что, используя разгружающий эффект консоли, удачным выбором положения шарниров можно любым образом установить желаемое соотношение между изгибающими моментами на опоре и в пролете.

Из-за этих преимуществ шарнирные балки охотно применяют в разных конструкциях, например, в прогонах, мостовых переходах и т.д. Устройство шарниров, правда, связано с известными трудностями. Шарнирная балка статически определима, если число шарниров равно числу “лишних” опорных реакций.

“Поэтажная” схема. Порядок расчета многопролетной шарнирной балки.

.Удобной расчетной моделью служит так называемая “поэтажная схема”. Для ее построения следует всю систему мысленно разделить по шарнирным сочленениям на отдельные балки и определить условия их опирания. При этом обнаружится, что отдельные балки имеют либо по два опорных закрепления, либо защемлены на

одном из концов (консоли). Такие балки относят к "главным" (или несущим) и на схеме изображают на самом нижнем ярусе (балки ABC на рис.2.2а, АВ и CDE -на рис.2.2б). Элементы поэтажной схемы, опирающиеся на главные балки или имеющие лишь по одной опоре на основание ("землю") называют "второстепенными" (или несомыми) балками (балки CDE и EF - на рис 2.2а, BC -на рис.2.2б). Такие балки на поэтажной схеме располагаются выше балок, на которые они шарнирно опираются.

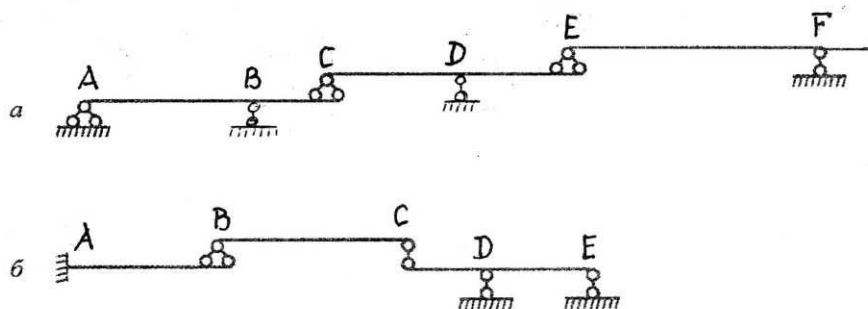


Рис.2.2

В "поэтажной схеме" взаимодействие элементов подчиняется принципу: усилия могут передаваться только с вышележащих балок на нижележащие, но не передаются в обратном направлении, то есть с нижних элементов на верхние.

Опорные реакции второстепенных (несомых) балок – это силы, с которыми “нижний этаж” действует на верхний. По третьему закону Ньютона верхний этаж действует на нижний с такими же силами.

Это позволяет выстроить простой алгоритм расчета многопролетных шарнирных балок

- 1) Строят поэтажную схему, выделяя несущие балки и несомые.
- 1) Рассчитывают несомую балку самого верхнего этажа: определяют опорные реакции и строят эпюры изгибающих моментов M и поперечных сил Q .
- 2) Последовательно рассчитывают балки нижних этажей на свою нагрузку и на силу, передающуюся с верхнего (“ перевернутую” опорную реакцию балки верхнего этажа)
- 3) В одном масштабе строят эпюры M и Q для всей балки.

Прежде, чем приступать к решению задач, нужно вспомнить основные определения и правила построения эпюр в простых, однопролетных балках.

Изгибающим моментом M , действующим в сечении, называют алгебраическую сумму моментов всех внешних сил, приложенных к левой и правой части балки, относительно этого сечения. При этом опорные реакции включаются в состав внешних сил.

Изгибающий момент считается положительным, если он растягивает нижние волокна. Эпюру M строят со стороны растянутых волокон и знаков не ставят.

Поперечная сила Q численно равна алгебраической сумме проекций всех левых или правых сил от сечения на нормаль (перпендикуляр) к оси балки.

Знак Q принято считать положительным, если сумма проекций всех левых сил направлена вверх (или, соответственно, всех правых сил – вниз). На эпюре Q знаки ставят обязательно, откладывая положительные значения вверх от оси балки, а отрицательные – вниз..

При построении эпюр нужно помнить основные правила

1. На ненагруженном участке балки эпюра M прямолинейная, а Q – постоянная, то есть имеет вид прямоугольника

2. В точке приложения сосредоточенной силы на эпюре M образуется излом, направленный в сторону действия силы. На эпюре Q в этом сечении образуется скачок, равный по величине приложенной силе F

3. В точке приложения сосредоточенного момента m на эпюре M образуется скачок, равный по величине приложенному моменту m .

4. На участке с равномерно распределенной нагрузкой изгибающий момент M изменяется по закону квадратной параболы, обращенной выпуклостью в сторону действия нагрузки, а поперечная сила – по линейному закону

5. В сечениях, где эпюра Q пересекает ось балки, изгибающий момент принимает экстремальное значение.

6. Момент в шарнире или на шарнирной опоре равен нулю, если в сечении бесконечно близком к шарниру (или опоре) не приложен внешний сосредоточенный момент.

7. Если на прямолинейном участке балки длиной l , загруженной равномерно распределенной нагрузкой q , сосредоточенной силой F или сосредоточенным моментом m известны две крайние ординаты эпюры моментов, то эпюру M можно построить, подвесив на линию, соединяющую концы ординат, известные балочные эпюры моментов (рис. 2.3)

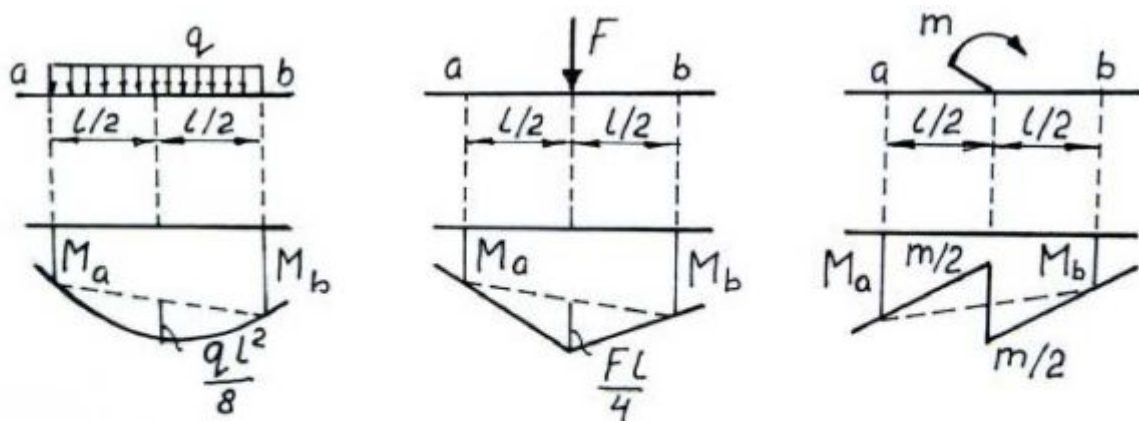


Рис.2.3

Пример Требуется построить эпюры M и Q в балке, изображенной на рис.2.4.

Балка ABC имеет две опоры “на землю” и является основной. Балка CD – второстепенная и на поэтажной схеме располагается “на втором этаже”.

Построив поэтажную схему начинают расчет (построение эпюр) с верхнего этажа.

Расчет несомой балки CD (Рис.2.4а). Из условий симметрии $V_C = V_D = \frac{ql_2}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \text{ kH}$.

Момент в середине пролета равен

$$M = \frac{ql^2}{8} = \frac{4 \cdot 3^2}{8} = 4,5 \text{ kHm}$$

Эпюры M и Q – на рис.2.4а.

Расчет несущей балки AC.(рис.2.4б)

Определяют опорные реакции

$$\sum M_A = 0, \quad 8 \cdot 2 + 6 \cdot 5,5 - V_B \cdot 4 = 0; \quad V_B = \frac{49}{4} = 12,25 \text{ kH},$$

$$\sum M_B = 0, \quad V_A \cdot 4 - 8 \cdot 2 + 6 \cdot 1,5 = 0, \quad V_A = \frac{7}{4} = 1,75 \text{ kH}.$$

Проверка

$$\sum y = 0, \quad 1,75 - 8 + 12,25 - 6 = 14 - 14 = 0;$$

$$M_k = 1,75 \cdot 2 = 3,5 \text{ kHm}, \quad M_B = -6 \cdot 1,5 = -9,0 \text{ kHm}$$

Эпюры M и Q показаны на рис.2.4б.

Окончательные эпюры M и Q показаны на рис.2.4с.

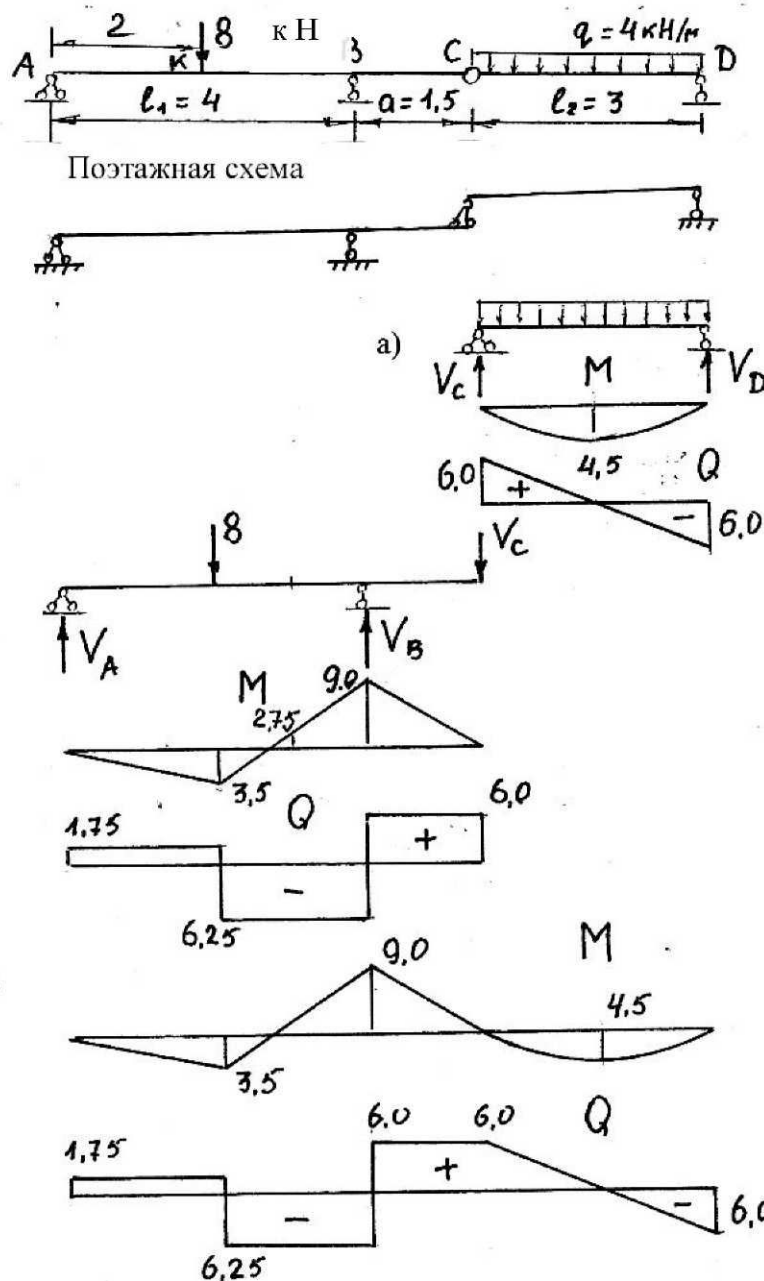


Рис. 16.

Рис. 2.4

Вопросы для самоконтроля

1. Что представляет собой многопролетная статически-определимая шарнирная балка? Какие элементы в ней различают?
2. Что представляет собой поэтажная схема и как она выстраивается?
3. Каков порядок расчета многопролетной шарнирной балки?
4. Как определяют опорные реакции в простых, однопролетных балках?
5. Что такое изгибающий момент и поперечная сила в балках?
6. Какое правило знаков принято при построении эпюр M и Q?

7. Какой вид имеют эпюры изгибающих моментов и поперечных сил на участках, где отсутствует нагрузка?

8. Как изменяются изгибающий момент и поперечная сила на участке, где действует равномерно распределенная нагрузка q , или сосредоточенная сила F , или сосредоточенный момент m ?

9. Чему равен момент в шарнире (или на шарнирной опоре) если бесконечно близко от него не приложен внешний сосредоточенный момент ?

10. Как “подвешивается” балочная эпюра изгибающих моментов простой балки на участке балки длиной l , загруженной равномерно распределенной нагрузкой q (или сосредоточенной силой F , или сосредоточенным моментом M), если известны изгибающие моменты по концам этого участка?

3. Линии влияния опорных реакций и расчетных усилий в балках.

При расчете строительных конструкций нередко приходится иметь дело с нагрузками, которые могут занимать на ней разные положения. Например, это может быть тележка крана на подкрановой балке, нагрузка проходящего поезда или скопления людей на ферме моста и т.п. Все эти нагрузки представляют собой, как правило, систему сосредоточенных вертикальных грузов с фиксированным расстоянием друг от друга. Предполагается, что нагрузки лишь изменяют свое положение, но не создают динамического эффекта.

Линией влияния (л.в.) какого-либо расчетного усилия (опорной реакции, изгибающего момента или поперечной силы) в заданном сечении балки называют график, отражающий закон изменения этого усилия в зависимости от положения на балке груза $F = 1$.

Линии влияния позволяют легко определить усилия в сечении, для которого они построены от любых нагрузок в произвольной комбинации.

Проще всего построение л.в. можно осуществить, используя статический способ. Он состоит в том, что из уравнений равновесия находят формулу (закон) изменения усилия в рассматриваемом сечении, для которого строится л.в., при любом положении груза $F = 1$. Положение груза определяется в произвольно выбранной системе координат. В балках за начало отсчета принимают обычно левую опору А.

Л.в. опорных реакций V_A и V_B балки с консолями (рис.2.5).

Из уравнений равновесия можно получить формулы для V_A и V_B :

$$\text{Уравнение л.в. } V_A \quad \sum M_B = 0; \quad V_A \cdot l - 1(l-x) = 0 \quad V_A = \frac{l-x}{l}$$

$$\text{Уравнение л.в. } V_B \quad \sum M_A = 0; \quad -V_B \cdot l + 1 \cdot x = 0 \quad V_B = \frac{x}{l}$$

Каждое из этих уравнений - это уравнение прямой линии (x в первой степени).

Графики можно построить, определив опорные реакции в двух точках

$$\text{при } x=0 \quad V_A = 1, V_B = 0,$$

$$\text{при } x=l \quad V_A = 0, V_B = 1.$$

Положительный знак означает, что соответствующая реакция направлена вверх.

При положении груза $F=1$ на дальней от опоры консоли опорная реакция меняет знак, так как направлена вниз.

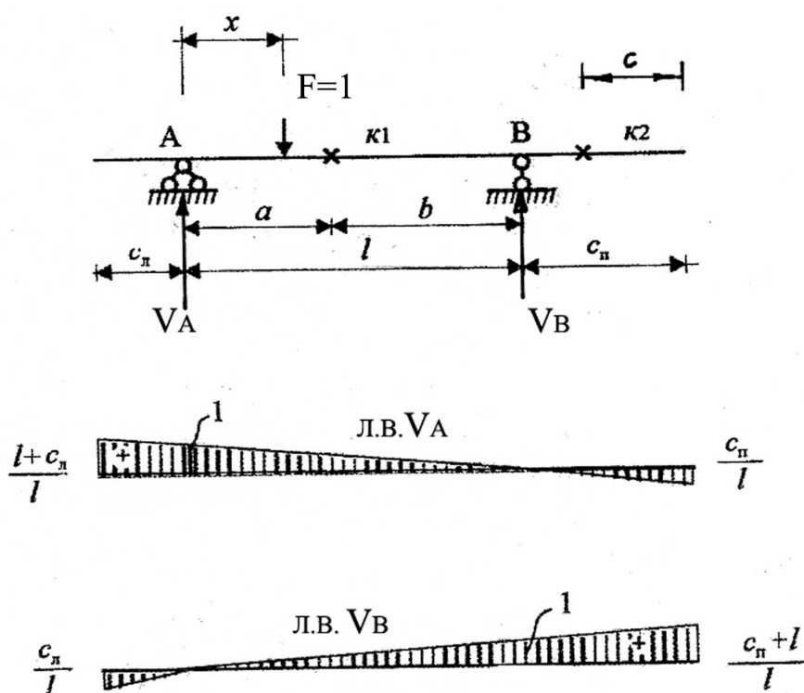


Рис2.5

Чтобы сразу оценить полезность таких графиков, зададимся вопросом, что будет, если на балке в каком то месте стоит не единичный груз, а сосредоточенная сила, например, мешок с цементом 0,5 кн.? Нужно умножить эту силу на ординату линии влияния (например, л.в. V_A) под нагрузкой и сразу, без составления уравнений равновесия получить значение опорной реакции V_A .

Линии влияния изгибающего момента и поперечной силы в каком либо сечении балки получают аналогично. Они функционально связаны с линиями влияния

опорных реакций.

Линия влияния изгибающего момента M_{k1} в сечении k_1 , расположенного в пролете балки (рис.2.6).

Рассматривают два случая расположения единичного груза: левее заданного сечения k_1 и правее него. Выражение для момента M_{k1} получают из уравнения равновесия. Составляют уравнение для той части балки, на которой груз $F=1$ отсутствует.

1. Пусть груз $F=1$ расположен левее сечения k_1 . Рассматривая равновесии правой части балки получим: $M_{k1} = V_B \cdot b = \frac{x}{l} b$. Эта формула определяет левую ветвь л.в.

M_{k1} от сечений k_1 до конца левой консоли

2. Пусть груз $F=1$ расположен правее сечения k_1 . Тогда $M_{k1} = V_A \cdot a = \frac{l-x}{l} a$. Эта формула определяет правую ветвь л.в. M_{k1} .

Таким образом, ординаты правой ветви равны увеличенным в a раз ординатам линии влияния опорной реакции V_A , а ординаты левой ветви – ординатам л.в. V_B , увеличенным в b раз. Левая и правая ветви пересекаются над сечением k_1 (рис. 2.6).

Каждая ордината этого графика дает значение изгибающего момента в сечении k_1 , когда груз $F=1$ располагается на балке в месте, соответствующем этой ординате. Отличие от эпюры моментов состоит и в том, что положительные ординаты откладываются над осью балки.

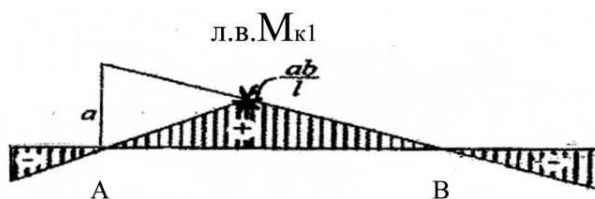


Рис.2.6

Итак, построение л.в. изгибающего момента в заданном сечении k двухопорной балки сводится к следующему простому алгоритму:

1. На левой опоре вверх откладывают отрезок, равный расстоянию от этой опоры до сечения. Этот отрезок можно откладывать в любом удобном масштабе.
2. Конец отрезка соединяют с правой опорой

3. На полученную прямую сносят сечение. На рис. 2.6 эта точка показана звездочкой.
4. Точку пересечения соединяют с левой опорой.
5. Если у балки есть консольные участки, то правую ветвь л.в. продолжают по прямой до конца правой консоли, а левую ветвь - до конца левой консоли

Линия влияния поперечной силы Q_{k1} (рис.2.7)

Опираясь на определение поперечной силы в балках, как проекции всех сил, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения на нормаль к оси балки, нетрудно получить формулы для левой и правой ветвей л.в. Q_{k1} .

1. Груз $F=1$ левее сечения $k1$: $Q_{k1} = -(V_B) = -\frac{x}{l}$. - левая ветвь,

2. Груз $F=1$ правее сечения $k1$: $Q_{k1} = V_A = \frac{l-x}{l}$. - правая ветвь .

Порядок построения л.в. поперечной силы для сечения k сводится к следующим действиям :

1. На левой опоре *вверх* откладывают отрезок равный единице (рис.2.7)
2. на правой опоре *вниз* откладывают отрезок равный единице.
3. Соединяют концы отрезков с противоположными опорами.
4. На полученный параллелограмм сносят сечение.
5. Если у балки есть консольные участки, то правую ветвь л.в. продолжают по прямой до конца правой консоли, а левую ветвь - до конца левой консоли

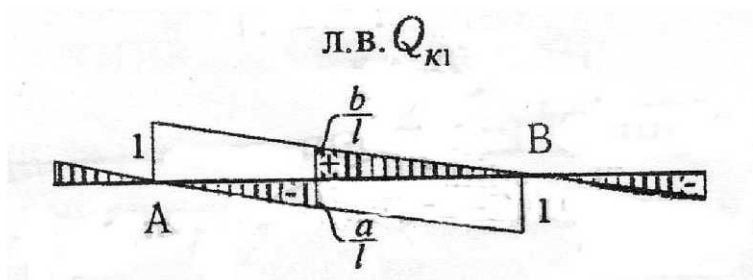


Рис.2.7

Линии влияния момента и поперечной сил для сечения k_2 , расположенного на консольной части балки (рис.2.8), легче всего строить, опираясь лишь на определения изгибающего момента и поперечной силы в балке.

Рассмотрим, например, сечение $k1$ на правой консоли.

Будем задавать положение груза $F=1$ координатой x с началом отсчета в сечении k_2 , направляя ось вправо (см. рис.2.5)

Линия влияния M_{k1} .

1. Груз $F=1$ левее сечения κ_2 : $M_{\kappa_2} = 0$ (Рассматривая правую ненагруженную часть консоли устанавливаем на основании определения момента, что $M_{\kappa_2} = 0$)
2. Груз $F=1$ правее сечения κ_2 : $M_{\kappa_2} = -1 \cdot x$.

Линия влияния M_{κ_2} показана на рис.2.8

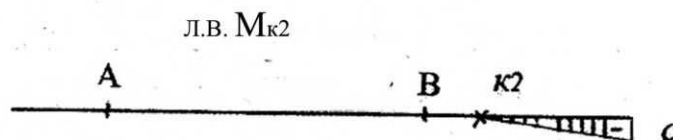


Рис.2.8

Линия влияния Q_{κ_2} (рис.2.9)

1. Груз $F=1$ левее сечения κ_2 : $Q_{\kappa_2} = 0$
2. Груз $F=1$ правее сечения κ_2 : $Q_{\kappa_2} = 1$

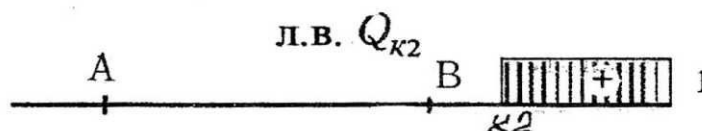


Рис.2.9

Сравнивая эпюры изгибающих моментов M и поперечных сил Q с линиями влияния M и Q , следует отметить, что они принципиально различны.

Ординаты эпюр усилий характеризуют напряженное состояние всей системы, в любом сечении от одной конкретной заданной нагрузки. При другом положении нагрузки расчет нужно проводить заново и строить новые эпюры.

Ординаты линии влияния, наоборот, характеризуют величину и изменение усилия в одном сечении, для которого построена эта линия влияния, в зависимости от положения единичной силы.

Определение усилий по линиям влияния. Загрузка линий влияния.

Ординаты различных линий влияния имеют разную размерность. Действительно, чтобы получить по линии влияния опорную реакцию или поперечную силу, нужно умножить эту силу на ординату л.в. под силой и не забыть о ее знаке этой ординаты. Отсюда следует, что ординаты линий влияния опорных реакций и поперечных сил безразмерны. Ординаты линий влияния изгибающих моментов имеют размерность длины.

Линии влияния, построенные от единичного вертикального груза, позволяют найти соответствующее усилие от любой реальной нагрузки, действующей на балку.

Рассмотрим три самые распространенные случая нагружения.

1. Влияние неподвижной цепочки сосредоточенных грузов (рис.2.10).

Применяя принцип независимости действия сил, можно выразить влияние всех сил, как сумму влияний каждой из них в отдельности. На рис. 2.10 показан участок какой то линии влияния усилия S (это может быть опорная реакция, момент или поперечная сила). Влияние каждой силы определяется произведением этой силы на ординату л.в. в месте ее приложения. Влияние цепочки сил может быть представлено в виде суммы

$$S = F_1 y_1 + F_2 y_2 + \dots + F_n y_n = \sum_{i=1}^n F_i y_i \quad (1.2)$$

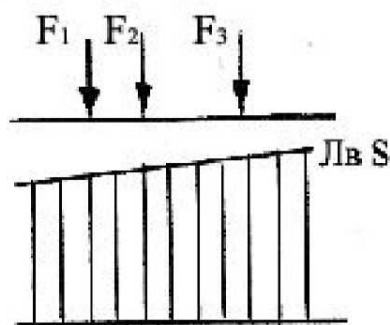


Рис.2.10

Следовательно, надо сосредоточенные внешние нагрузки умножить на ординаты л.в., расположенные под этими нагрузками (со своим знаком !) и результаты сложить,

2. Влияние неподвижной равномерно распределенной нагрузки, интенсивностью q (рис.2.11).э

Распределенную нагрузку на участке л.в., отмеченной на рисунке ab , можно представить как цепочку сосредоточенных грузов $q dx$. Чтобы просуммировать влияние всех этих элементарных грузов $q dx$, нужно взять определенный интеграл в пределах от a до b

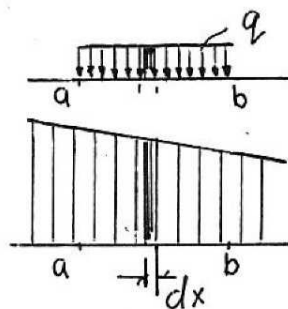


Рис.2.11

$$S = \int_a^b q y dx = q \int_a^b y dx = q \omega \quad (2.2)$$

Буквой ω обозначена площадь линии влияния под нагрузкой.

Итак, чтобы определить по л.в. усилие от равномерно распределенной нагрузки интенсивность нагрузки q нужно умножить на площадь л.в. под нагрузкой (площадь понимается алгебраически - учитываются знаки участков л.в.).

3. Влияние сосредоточенного момента (рис.2.12)

Задача сводится к загрузению сосредоточенными силами, если момент

представить в виде пары сил с плечом, равным единице. В этом случае каждая сила будет равна по величине M .

Влияние момента записывается как для цепочки грузов

$$S = -My_1 + My_2,$$

Это выражение можно переписать так

$$S = M \frac{y_2 - y_1}{1}.$$

Из рис.2.12 видно, что второй (дробный) множитель равен $tg\alpha$ - тангенсу угла наклона л.в. к оси балки в месте приложения сосредоточенного момента, т.е

$$S = M tg\alpha. \quad (3.2)$$

Чтобы учесть влияние сосредоточенного момента нужно умножить его на тангенс угла наклона л.в. к оси балки в сечении, где он действует. При этом принимается следующее правило знаков: момент, действующий по часовой стрелке, считается положительным; угол α , отсчитываемый против часовой стрелки, принят положительным. На рис. 2.12 угол α положительный.

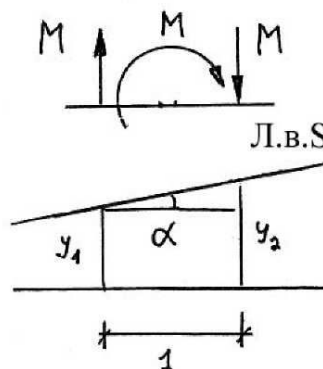


Рис.2.12

Линии влияния расчетных усилий в многопролетных шарнирных балках.

Чтобы построить л.в. в многопролетной шарнирной балке, необходимо, прежде всего, построить поэтажную схему, схему взаимодействия отдельных ее элементов. Из поэтажной схемы следует, что единичная сила оказывает влияние на усилие в сечении только тогда, когда она находится на “этаже”, на котором это сечение задано, или на более высоких “этажах”.

Поэтому построение л.в. проводят в два этапа.

1.Строят л.в. на том этаже, на котором задано сечение по правилам построения л.в. для одиночной балки.

2.Учитывают влияние верхних этажей.

Построим, например, л.в. изгибающего момента для сечения I – I в балке, показанной на рис.2.13, на котором изображена и поэтажная схема.

Так как сечение задано на основной балке AC, то строим л.в. момента как для однопролетной балки с консолью, руководствуясь правилом, изложенным на стр.20. На втором этапе находятся нулевые точки л.в.на верхних “этажах”, которые и позволяют довести решение задачи до конца. При перемещении груза $F = 1$ по балке второго “этажа” SE вправо опорная реакция на опоре С будет линейно уменьшаться и, следовательно будут уменьшаться давление на нижний этаж. Когда единичная сила, займет положение над опорой на "землю" D, то она будет воспринята этой

опорой, опорная реакция на опоре С будет равна нулю, давление на нижний этаж передаваться не будет и момент в сечении I – I будет равен нулю. Проведя прямую линию, соединяющую конец отрезка на консоли ВС и найденную нулевую точку D и продолжая ее до конца консоли второго этажа E, получают второй участок л.в.

Поднимем груз $F = 1$ на третий “этаж”. Рассуждая аналогичным образом, устанавливаем, что при положении груза над опорой F опорная реакция на опоре E будет равна нулю и нижние “этажи” выключаются из работы, то есть M_{I-I} равен нулю. Соединим конец отрезка л.в на конце консоли второго “этажа” E с нулем на опоре F, закончим построение л.в. M_{I-I} . (рис.2.13с).

Все ординаты л.в. определяются из подобия треугольников. Опорными значениями служат ординаты на том этаже, на котором задано сечение.

Изложенные правила и приемы позволяют легко построить и л.в. поперечной силы Q в том же сечении I – I.(рис.2.13d).

Построенные л.в. позволяют найти расчетные усилия в сечении I – I от любой заданной нагрузки.

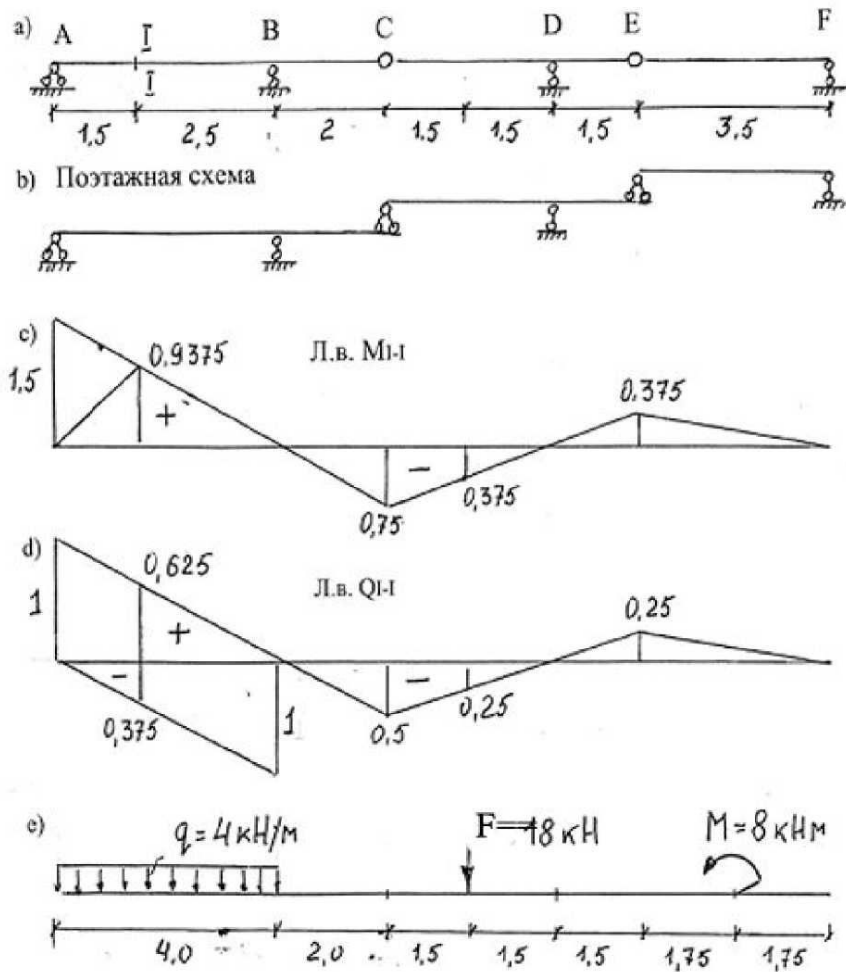


Рис.2.13

Найдем, например, M_{I-I} и Q_{I-I} от нагрузки, показанной на рис.2.13е.

$$M_{I-I} = 4 \cdot \frac{0,9375 \cdot 4}{2} + 18(-0,375) + (-8)\left(-\frac{0,375}{3,5}\right) = 1,607 \text{ кНм},$$

$$Q_{I-I} = 4\left(-\frac{0,375 \cdot 1,5}{2} + \frac{0,625 \cdot 2,5}{2}\right) + 18(-0,25) + (-8)\left(-\frac{0,25}{3,5}\right) = -1,928 \text{ кН}.$$

Пример решения задачи №1 контрольного задания .

Задана двухпролетная шарнирная балка и действующая на нее нагрузка(Рис.2.14)

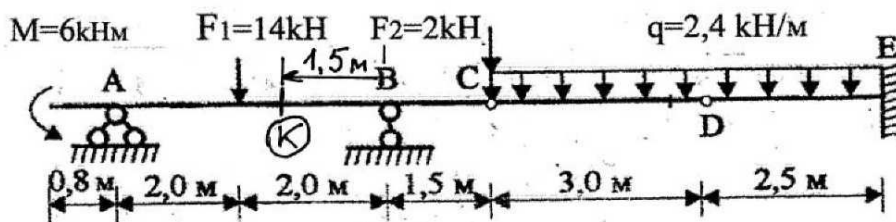


Рис.2.14

Требуется

1. Построить эпюры M и Q .

2. Построить линии влияния R_B , M_K и Q_K для сечения k и определить по ним опорную реакцию R_B , M_K и Q_K от заданной нагрузки.

1. Построение эюр M и Q .

1.1 Выделяя "главные балки" (AB и DE) и "второстепенную" (CD), строят "поэтажную схему" (рис.2.15)

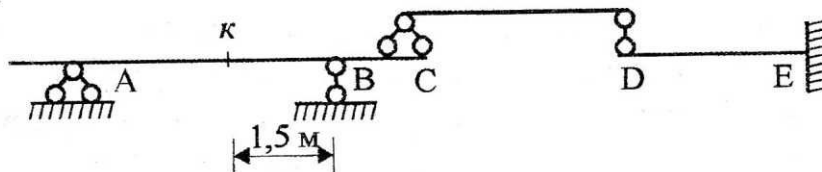


Рис.2.15

1.2 Начинают расчет с балки верхнего этажа (рис.2.16)

Балка CD/

Силу F_2 при расчете балки CD не учитываем, так как она на изгиб балки не влияет. Равномерно распределенная нагрузка оказывает одинаковое давление на опоры C и D. Поэтому

$$V_C = V_D = ql/2 = 2,4 \cdot 3/2 = 3,6 \text{ кН}$$

Нужно твердо знать формулу для вычисления изгибающего момента в середине пролета равномерно загруженной балки

$$M_{\max} = ql^2/8 = 2,4 \cdot 3^2/8 = 2,7 \text{ кНм.}$$

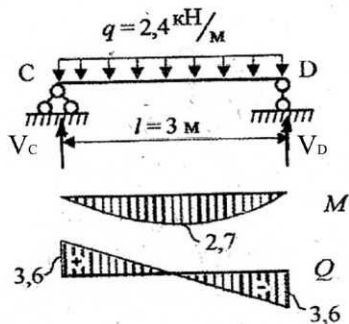


Рис.2.16

1.3 Последовательно рассчитывают балки нижнего этажа.

Балка AB (рис.2.17)

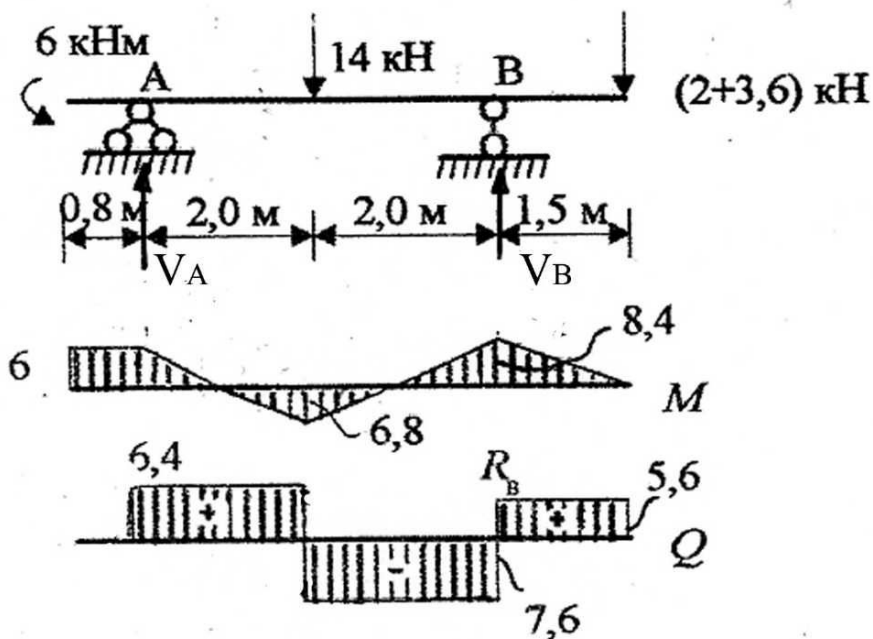


Рис.2.17

Опорные реакции определяют из условий равновесия

На конце левой консоли действует сосредоточенная сила равная сумме двух сил:

силы $F_2 = 2 \text{ кН}$ и перевернутой опорной реакции балки верхнего этажа $V_c = 3.6 \text{ кН}$.

$$\sum M_B = 0; -6 - 14 \cdot 2 + V_A \cdot 4 + (2+3,6) \cdot 1,5 = 0$$

$$V_A = 6,40 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0: -6 + 14 \cdot 2 - V_B \cdot 4 + 5,6 \cdot 5,5 = 0$$

$$V_B = 13,20 \text{ кН}$$

Проверка

$$\sum y = 0; 6,40 - 14 + 13,2 - (2+3,6) = 19,6 - 19,6 = 0$$

Подсчитывают M и Q в характерных сечениях. Изгибающий момент M в каком либо сечении равен сумме моментов всех сил, действующих по одну сторону от этого сечения. Поперечная сила в каком либо сечении равна сумме проекций на нормаль к оси балки всех сил, лежащих по одну сторону от этого сечения.

$$M_A = -6 \text{ кНм}, \quad M_{\text{середина пролета AB}} = -6 + 6,4 \cdot 2 = 6,80 \text{ кНм};$$

$$M_K = -6 + 6,4 \cdot 2,5 - 14 \cdot 0,5 = 3 \text{ кНм} \quad M_B = - (2+3,6) \cdot 1,5 = -8,40 \text{ кНм}.$$

$$Q_{\text{прав}}^A = V_A = 6,40 \text{ кН}, \quad Q_{\text{прав}}^{\text{серед. пролета AB}} = V_A = 6,40 \text{ кН};$$

$$Q_{\text{лев}}^{\text{середина пролета AB}} = 6,40 - 14 = -7,60 \text{ кН}; \quad Q_K = 6,4 - 14 = -7,60 \text{ кН}$$

$$Q_{\text{прав}}^B = -7,60 + 13,20 = 5,6 \text{ кН}$$

Эпюру изгибающих моментов строим со стороны растянутых волокон и знаков можно не ставить. На эпюре поперечных сил знаки ставят обязательно.

Балка DE (рис.2.18)

Эпюры внутренних усилий M и Q в консольной балке удобно строить, начиная со свободного конца консоли, не определяя опорных реакций.

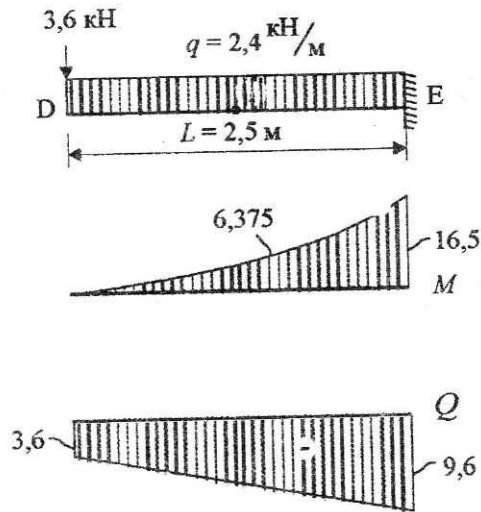


Рис.2.18

На участке, где действует равномерно распределенная нагрузка, моменты можно вычислять в трех точках: по концам и в середине участка. При вычислении изгибающего момента равномерно распределенная нагрузка заменяется равнодействующей.

$$M_D = 0$$

$$M_{\text{середине}} \text{ консоли} = -3,6 \cdot 1,25 - 2,4 \cdot 1,25 \cdot 0,625 = -6,375 \text{ кНм}$$

$$M_E = -3,6 \cdot 2,5 - 2,4 \cdot 2,5 \cdot 1,25 = -16,50 \text{ кНм}$$

$$Q_D = -3,6 \text{ кН}$$

$$Q_E = -3,6 - 2,4 \cdot 2,5 = -9,6 \text{ кН}$$

Составляя эпюры, построенные для отдельных элементов, изображая ординаты в одном, удобном масштабе, строят окончательные эпюры M и Q . (Рис.2.19)

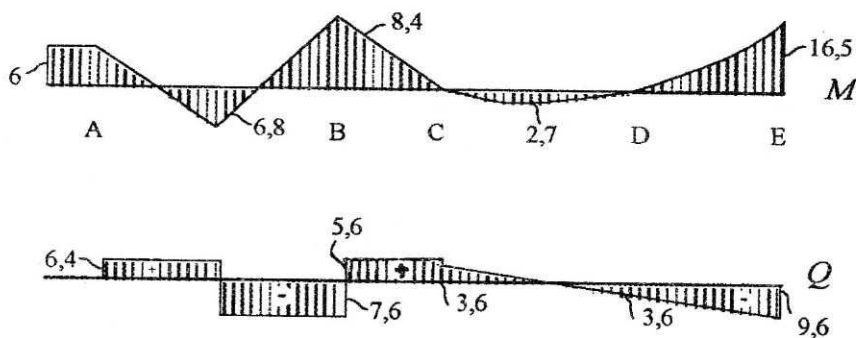


Рис.2.19

2. Построение линий влияния и определение по ним V_B , M_k и Q_k от заданной нагрузки.

Ориентируясь на «этажную» схему строят л.в. для балки АВ, а затем учитывают влияние верхнего этажа CD (рис.2.20).

Построение л.в. M_d на основной балке АВ.

1. На левой опоре вверх откладывают отрезок длиной, равной расстоянию от опоры А до сечения к.
2. Конец отрезка соединяют с правой опорой.
3. На полученную линию сносят сечение.
4. Точку пересечения соединяют с левой опорой.
5. Левую и правую ветви л.в. продолжают до конца левой и правой консольной части балки

Если единичный груз находится на верхнем этаже, то давление на основную балку передается только через опору С. Когда груз расположится на опоре D, то опорная реакция V_c будет равна нулю и основная балка выключается из работы. Поэтому влияние верхнего этажа на расчетные усилия в сечении к отражается прямой, соединяющей конец отрезка (ординаты) л.в. в точке С с точкой D.

На участке DE ординаты обеих л.в. равны нулю: нагрузка, действующая на нижнем этаже не влияет на напряженное состояние другого нижнего этажа (АВ)

Линии влияния М и Q показаны на рис.2.20.

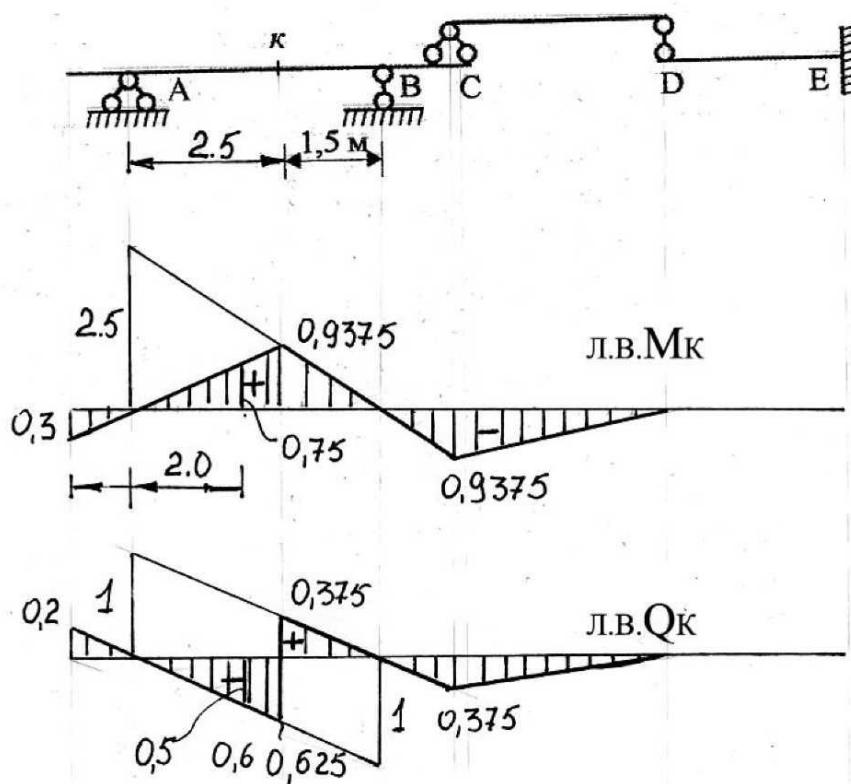


Рис.2.20

Определение M_k и Q_k по линиям влияния.

По правилам, изложенным на стр. 22-23, найдем расчетные величины усилий в сечении k от нагрузки, изображенной на рис.2.14.

Сосредоточенные силы умножаем на ординаты л.в. под этими силами, интенсивность нагрузки q умножаем на площадь л.в. под нагрузкой и сосредоточенный момент - на тангенс угла наклона л.в. к оси балки в месте приложения момента.

$$M_k = -6 \cdot 0,3 / 0,8 + 14 \cdot 0,75 + 2 (-0,9375) + 2,4 (-0,9375 \cdot 3/2) = 3,0 \text{ кНм}$$

$$Q_k = -6 (-0,2 / 0,8) + 14 (-0,5) + 2 (-0,375) + 2,4 (-0,375 \cdot 3/2) = -7,6 \text{ кН}$$

Сравнивая полученные значения с величинами, полученными при построении эпюр, убеждаемся в их полном совпадении.

4. Определение невыгодного положения нагрузки на сооружение.

Невыгодным назовем такое положение нагрузки, при котором усилие в каком-либо интересующем нас сечении принимает наибольшее значение.

Пусть для какого то сечения построена л.в. усилия S (рис.2.14). Если на балку действует один сосредоточенный вертикальный груз, то наибольшая величина усилия S в сечении будет тогда, когда груз будет располагаться над наибольшей ординатой этой линии. При разнозначной л.в. можно говорить о наибольшем положительном S_{\max} или наибольшем отрицательном усилии S_{\min} .

Если балка нагружена парой одинаковых сил (например колесной парой тележки крана на подкрановой балке) (рис.2.15), то необходимо найти наибольшее значение суммы $\sum Fy$. Если силы F одинаковы, то наибольшее влияние эта пара окажет тогда, когда один из грузов будет располагаться над наибольшей ординатой л.в.:

$$S_{\max} = F(y_3 + y_4), \quad S_{\min} = F(y_1 + y_2). \quad (4.2)$$

Найдем невыгодное положение цепочки грузов на треугольной линии влияния (рис.2.16).

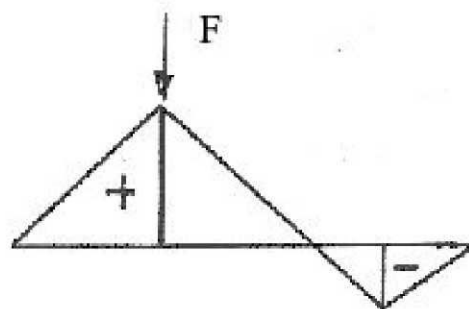


Рис. 2.14

При любом положении нагрузки влияние этой цепочки может быть выражено формулой

$$S = F_1 y_1 + F_2 y_2 + \dots + F_n y_n. \quad (5.2)$$

При разном положении цепочки связанных грузов усилие S является функцией от y .

$$S = f(y). \quad (6.2)$$

Чтобы найти наибольшее значение функции S , нужно исследовать ее на экстремум.

В точке экстремума производная от функции S меняет знак: функция возрастает пока $\frac{dS}{dx} > 0$ и убывает, когда $\frac{dS}{dx} < 0$.

Запишем производную от S по x

$$\frac{dS}{dx} = F_1 \frac{dy_1}{dx} + F_2 \frac{dy_2}{dx} + \dots + F_n \frac{dy_n}{dx} \quad (7.2)$$

На левом участке л.в. угол наклона к оси балки постоянный. Поэтому на этом участке $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{c}{a} = \operatorname{const.}$

На правом участке $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\pi - \beta) = -\operatorname{tg} \beta = \operatorname{const.}$

Производную $\frac{dS}{dx}$ можно теперь записать так:

$$\frac{dS}{dx} = (F_1 + F_2 + F_3) \operatorname{tg} \alpha - (F_4 + F_n) \operatorname{tg} \beta. \quad (8.2)$$

Обращаясь к рис.2.16 можно сформулировать критерий экстремальности положения нагрузки так: при бесконечно малой передвижке цепочки грузов

по л.в. производная должна поменять знак. Это может произойти только в том случае, когда один из грузов, стоящий около максимальной ординаты л.в. перейдет с левой ветви на правую.

Пример.

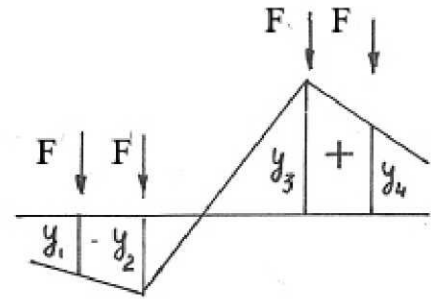


Рис.2.15

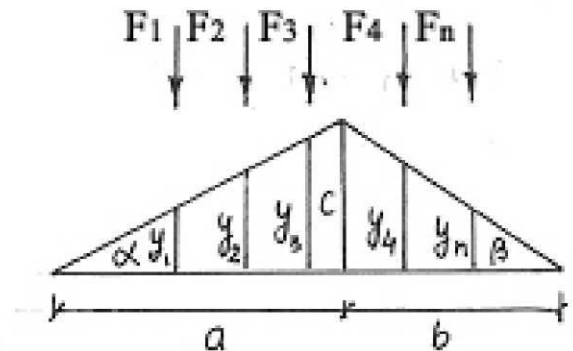


Рис.2.16

На балку, пролетом 16 м (рис.2.17) действует цепочка связанных грузов. Тогда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4} = 0,75, \operatorname{tg} \beta = -\frac{3}{12} = -0,25$$

Требуется найти невыгодное положение, при котором изгибающий момент в сечении I – I будет наибольшим.

Пусть грузы расположены так, как показано на рис.2.17с. Предположим, что груз $F = 5$ кН располагается чуть слева от максимальной ординаты $y = 3$. Тогда

$$\frac{dM}{dx} = (8 + 7 + 10 + 5) 0,75 - (18 + 15) 0,25 = 22,5 - 8,25 = 14,25 > 0.$$

Предположим, что груз $F = 5$ кН располагается чуть справа от максимальной ординаты $y = 3$. В этом случае

$$\frac{dM}{dx} = (8 + 7 + 10) 0,75 - (5 + 18 + 15) 0,25 = 18,75 - 9,5 = 9,25 > 0.$$

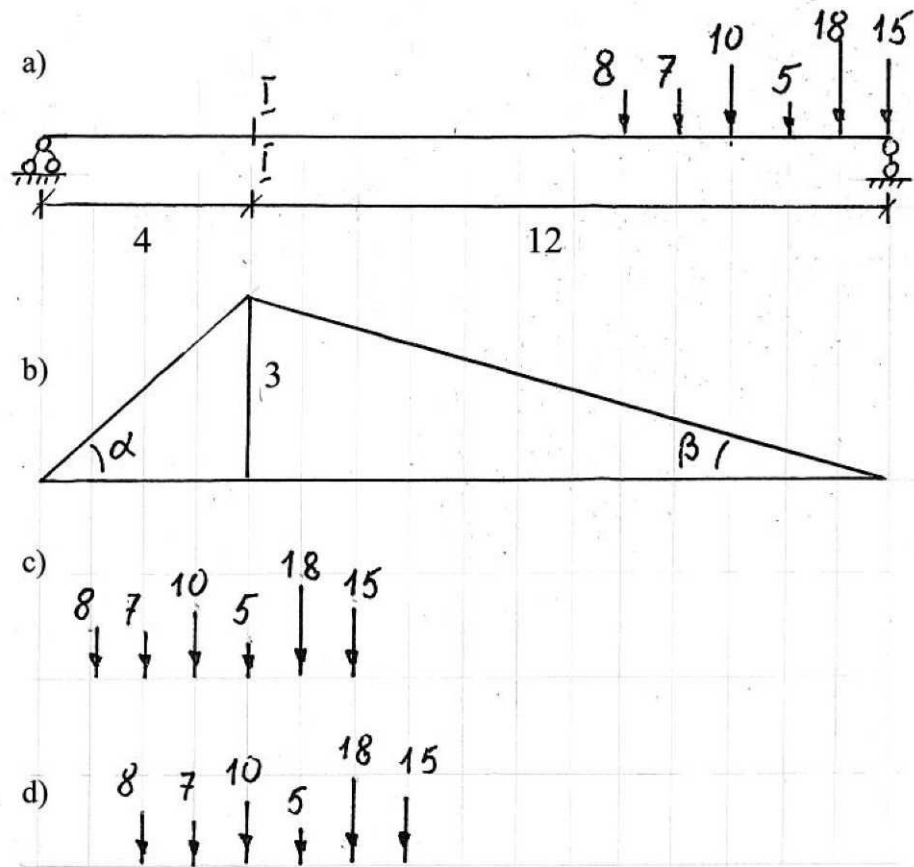


Рис.2.17

Производная не поменяла знака. Положение нельзя считать невыгодным.

Передвинем цепочку грузов вправо. Новое положение показано на рис.2.17d. Предположим, что груз $F = 10$ кН расположен чуть слева от максимальной ординаты л.в. Тогда

$$\frac{dM}{dx} = (8 + 7 + 10) 0,675 - (5 + 18 + 15) 0,25 = 9,25 > 0.$$

Предположим, что груз $F = 10$ кН располагается чуть справа от ординаты $y = 3$.

Тогда

$$\frac{dM}{dx} = (8 + 7) 0,75 - (10 + 5 + 18 + 15) 0,25 = 11,25 - 12,0 = - 0,75 < 0.$$

Производная поменяла знак. Значит положение цепочки грузов, изображенное на рис.2.17d невыгодное. При таком расположении грузов момент в сечении I – I будет наибольшим.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется линией влияния (л.в.)?
2. В чем отличие линии влияния от эпюры?
3. Какова размерность ординат линий влияния изгибающего момента, опорной реакции, поперечной силы?
4. Сформулируйте правила построения л.в. М и Q для сечения, заданного между опорами балки на двух опорах.
5. Сформулируйте правила построения л.в. М и Q для сечения, заданного на консоли.
6. Как вычисляются усилия по л.в. от заданной произвольной неподвижной нагрузки?
7. Как устанавливаются знаки при вычислении усилий по л.в. (при загрузении л.в.)?
8. Каков порядок построения л.в. в многопролетных шарнирных балках?
9. Какое положение цепочки грузов на балку считается невыгодным?
10. Как найти аналитическим способом невыгодное положения цепочки сосредоточенных грузов при загрузении треугольной л.в.?

Глава 3

1. Расчет трехшарнирных арок и рам..

Арка – древнейшая конструкция. Зодчие уже до новой эры понимали, что арочной конструкцией можно перекрывать большие пролеты, чем конструкцией балочной. Попытки создать теорию расчета арок были осуществлены еще в XVIII веке.. Во всех работах того времени рассматривалось не рабочее, а предельное

состояние арок, непосредственно предшествующее ее разрушению. Обычно не делали различия между статически определимыми и статически неопределимыми арками. Расчет статически определимых трехшарнирных арок и рам сформировался уже в XIX веке, когда смысл условий равновесия стал ясен не только теоретикам – механикам, но и рядовым инженерам.

Трехшарнирной называют стержневую систему, состоящую из двух элементов, соединенных шарниром, и прикрепленных к основанию при помощи двух неподвижных шарнирных опор. Если элементы имеют криволинейное очертание, то говорят о трехшарнирных арках (рис.1.3с₁). В трехшарнирной раме элементы имеют ломаное очертание (рис1.3с₂).

Основная особенность таких расчетных схем состоит в том, что при действии вертикальной нагрузки в опорах кроме вертикальных опорных реакций возникают и горизонтальные составляющие, называемые распорами.

Рассмотрим арку, у которой опоры располагаются на одном уровне, а промежуточный шарнир - над серединой пролета(рис.3.1 а). Расстояние между опорами, как и в балке, называют пролетом. Расстояние от линии опор до промежуточного шарнира С называют стрелой подъема арки.(Шарнир С, вообще говоря, может соединять элементы в любом месте на оси арки)

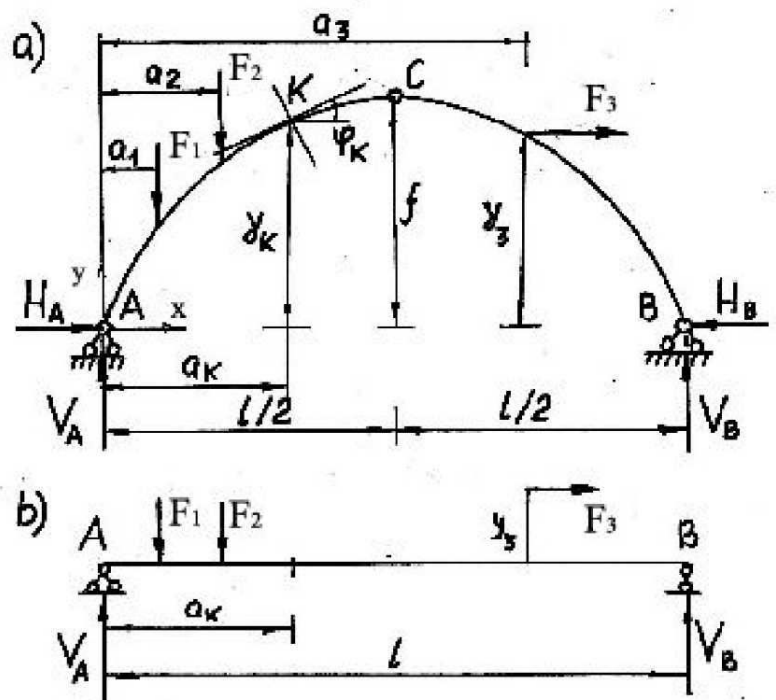


Рис 3.1

Нетрудно показать, что такая шарнирная система геометрически неизменяема Действительно, степень ее свободы (см. формулу 1.2) равна нулю:

$$W = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 4 = 0 \quad (1.3)$$

На схеме арки легко просматриваются “шарнирные треугольники”, обеспечивающие геометрическую неизменяемость системы.

Расчет арки начинают с определения опорных реакций. Искомые реакции показаны на рис.3.1 а .

Вертикальные опорные реакции определяются из уравнений равновесия как в балке с пролетом, равным пролету арки (рис.3.1 б)

$$1) \sum M_A = 0; F_1 a_1 + F_2 a_2 - F_3 y_3 - V_B l = 0,$$

$$V_B = \frac{\sum M_A}{l}; \quad (2.3)$$

$$2) \sum M_B = 0; V_A l - F_1(l - a_1) - F_2(l - a_2) + F_3 y_3 = 0,$$

$$V_A = \frac{\sum M_B}{l} \quad (3.3)$$

(Опорные реакции верны, если удовлетворяется уравнение равновесия $\sum y = 0$.)

Для определения распора (горизонтальной составляющей на одной из опор) используют дополнительное условие равновесия: равенство нулю суммы моментов всех сил, действующих на одну из половин арки.

$$3) \sum M_C^{ЛЕВ} = 0, \text{ или } \sum M_C^{ПРАВ} = 0.$$

Раскрывая первое условие, найдем H_A .

$$V_A \frac{l}{2} - F_1(l/2 - a_1) - F_2(l/2 - a_2) - H_A f = 0,$$

$$H_A = \frac{\sum M_C^{ЛЕВ}}{f}. \quad (4.3)$$

Распор H_B находят, проектируя все силы, действующие на арку, на ось x

$$4) \sum x = 0, H_A - F_3 - H_B = 0, \text{ т.е. } H_B = H_A - F_3.$$

Рассматривая последнее равенство, можно заключить, что, если на арку действует лишь вертикальная нагрузка, то распоры на обеих опорах одинаковы

$$H_A = H_B = H. \quad (5.3)$$

Выведем формулы для определения внутренних усилий в произвольном сечении трехшарнирной арки с координатами a_k и y_k . (Эти формулы, как увидим впоследствии, годятся в расчетах и любых статически неопределимых арок.)

На рисунке 3.2 показаны расчетные усилия: M – изгибающий момент, Q – поперечная сила (проекция всех левых (или правых)

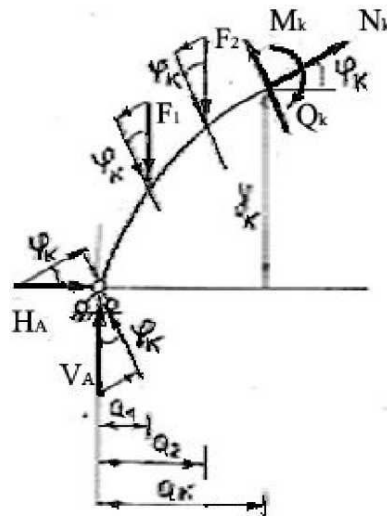


Рис.3.2

сил на нормаль к оси арки в рассматриваемом сечении) и N – продольная сила (проекция всех левых (или правых) сил на касательную к оси арки в рассматриваемом сечении).

Составим выражение для изгибающего момента в сечении

$$M_K = [V_A a_K - F_1(a_K - a_1) - F_2(a_K - a_2)] - H_A u_K.$$

Выражение в квадратных скобках – это изгибающий момент в сечении K простой балки с пролетом равным пролету арки (рис. 31 б). Обозначим его M_K^0 . Тогда

$$M_K = M_K^0 - H_A u_K. \quad (6.3)$$

Из формулы (6.3) следует, что изгибающие моменты в арке значительно меньше изгибающих моментов в балках того же пролета с той же нагрузкой.

Опираясь на определение поперечной силы и соблюдая правило знаков, принятое в сопротивлении материалов, составим следующее выражение (см. рис. 32)

$$Q_K = [V_A - F_1 - F_2] \cos \varphi_K - H_A \sin \varphi_K.$$

Выражение в квадратных скобках есть ничто иное, как поперечная сила в сечении K балки с пролетом, равным пролету арки. Обозначим ее Q_K^0 . Тогда

$$Q_K = Q_K^0 \cos \varphi_K - H_A \sin \varphi_K \quad (7.3)$$

Следовательно, и поперечные силы в арке меньше, чем в соответствующей балке.

Замечание. Если сечение находится на правой половине арки, то $\sin \alpha$ отрицательный по определению.

Проектируя все силы, расположенные слева от сечения, на касательную к оси арки и памятуя о том что силы, направленные “к сечению” – сжимающие, получим

$$N_K = - [V_A - F_1 - F_2] \sin \varphi_K - H_A \cos \varphi_K \quad \text{или}$$

$$N_K = - (Q_K^0 \sin \varphi_K + H_A \cos \varphi_K) \quad (8.3)$$

Пример решения задачи № 2 задания контрольного задания.

Ниже рассмотрены два варианта : трехшарнирная арка и трехшарнирная рама

Вариант 1

Требуется определить изгибающий момент M , поперечную силу Q и продольную силу N в сечении K арки (рис 3.3), пролетом $l = 30$ м, очерченной по параболе

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x).$$

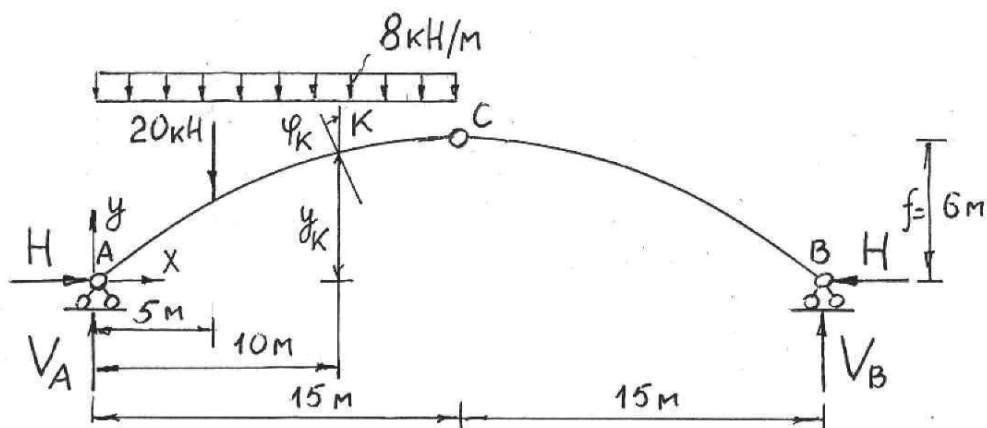


Рис.3.3

1. Определение опорных реакций.

Вертикальные составляющие опорных реакций V_A и V_B находят, составляя уравнений равновесия арки:

$$1) \sum M_A = 0, \quad 20 \cdot 5 + 8 \cdot 15 \cdot 7,5 - V_B \cdot 30 = 0, \quad V_B = 33,3 \text{ kH},$$

$$2) \sum M_B = 0, \quad V_A \cdot 30 - 20 \cdot 25 - 8 \cdot 15 \cdot 22,5 = 0, \quad V_A = 106,6 \text{ kH}$$

$$\text{Проверка } \sum y = 0, \quad 33,3 - 20 - 8 \cdot 15 + 106,6 = 0,$$

Вычисляют распор на правой опоре, рассматривая равновесие правой половины арки (выбирают ту часть на которой меньше действующих сил)

$$2) \sum M_C^{\text{прав}} = 0, \quad H \cdot 6 - 33,3 \cdot 15 = 0, \quad H = 83,3 \text{ kH}$$

Распоры на обеих опорах одинаковы, так как на арку действует только вертикальная нагрузка.

2. Вычисление балочных изгибающего момента и поперечной силы для сечения К

$$M_K^0 = 106,6 \cdot 10 - 20 \cdot 5 - 8 \cdot 10 \cdot 5 = 666 \text{ кНм},$$

$$Q_K^0 = 106,6 - 20 - 8 \cdot 10 = 6,6 \text{ кН}$$

3. Вычисление внутренних усилий в сечении К.

Вычислим вначале значения y_K , $\sin \varphi_K$ и $\cos \varphi_K$, необходимые для вычислений по формулам (3.6 – 3.8)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{l^2} (l - 2x), \quad \operatorname{tg} \varphi_K = \frac{4 \cdot 6}{30^2} (30 - 2 \cdot 10) = 0,2666$$

$$\sin \varphi_K = \frac{0,2666}{\sqrt{1 + 0,2666^2}} = 0,2576, \quad \cos \varphi_K = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,2666^2}} = 0,9662.$$

$$y_K = \frac{4 \cdot 6}{30^2} 10(30 - 10) = 5,33 \text{ м.}$$

$$M_K = M_K^0 - H \cdot y_K = 666 - 83,3 \cdot 5,33 = 222,0 \text{ кНм}$$

$$Q_K^0 = Q_K^0 \cos \varphi_K - H \sin \varphi_K = 6,6 \cdot 0,9662 - 83,3 \cdot 0,2576 = -15,08 \text{ kH}$$

$$N_K = -(Q_K^0 \sin \varphi_K + H \cos \varphi_K) = -(6,6 \cdot 0,2576 + 83,3 \cdot 0,9662) = -82,18 \text{ kH}.$$

Вариант 2.

Требуется найти изгибающий момент M , поперечную силу Q и продольную силу N в заданных сечениях трехшарнирной рамы 1, 2 и 3 (Рис.3.4)

Вычисляют опорные реакции.

$$1) \sum M_A = 0;$$

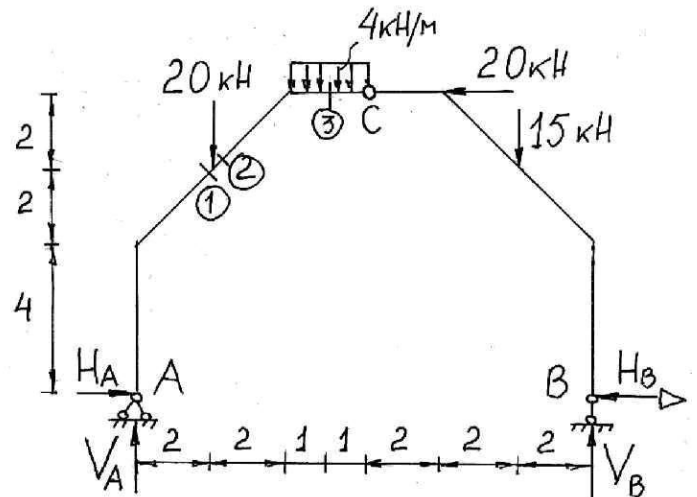
$$20 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \cdot 5 - 20 \cdot 8 + 15 \cdot 10 - V_B \cdot 12 = 0,$$

$$V_B = \frac{40 + 40 - 160 + 150}{12} = 5,83 \text{ kH}$$

$$2) \sum M_B = 0;$$

$$V_A \cdot 12 - 20 \cdot 10 - 4 \cdot 2 \cdot 7 - 20 \cdot 8 - 15 \cdot 2 = 0$$

$$V_A = \frac{200 + 56 + 160 + 30}{12} = 37,17 \text{ kH}.$$



Из равновесия правой половины рамы находим распор H_B Рис.3.4

$$3) \sum M_C^{права} = 0; 15 \cdot 4 - H_B \cdot 8 - 5,83 \cdot 6 = 0; \quad H_B = -3,25 \text{ kH}.$$

Знак минус означает, что реакция H_B направлена в сторону, противоположную первоначально заданной. Удобно показать правильное направление полученного распора (показано стрелкой вправо) и знак минус в дальнейших расчетах не учитывать

Из равновесия рамы в целом находят распор H_A

$$4) \sum x = 0;$$

$$H_A - 20 + 3,25 = 0, \quad H_A = 16,75 \text{ kH}.$$

Сечения 1 и 2 находятся в непосредственной близости от силы 20 кН слева и справа соответственно.

Значения изгибающего момента в этих сечениях одинаковы, так как сила 20 кН в вычислении этого момента не участвует. Проще всего вычислить этот момент, рассматривая левую часть арки относительно этих сечений.

$$M_1 = M_2 = 37,17 \cdot 2 - 16,75 \cdot 6 = -26,16 \text{ kHm}$$

Поперечные и продольные силы в сечениях 1 и 2 разные

Проектируя все силы слева от сечения на нормаль к оси рамы, получаем поперечную силу Q . (Проекцию всех левых сил, направленную вверх принято считать положительной . Угол наклона оси в сечениях 1 и 2 равен 45^0).

Проектируя все силы слева от сечения на ось рамы, получаем продольную силу.

(Проекцию всех левых сил, направленных в сторону сечения (сжатие) принято считать отрицательной)

$$Q_1 = 37.17 \cdot 0.707 - 16.75 \cdot 0.707 = 14.44 \text{ kH}.$$

$$Q_2 = 37.17 \cdot 0.707 - 16.75 \cdot 0.707 - 20 \cdot 0.707 = 0.30 \text{ kH}.$$

$$N_1 = -37.17 \cdot 0.707 - 16.75 \cdot 0.707 = -28.58 \text{ kH}.$$

$$N_2 = -37.17 \cdot 0.707 - 16.75 \cdot 0.707 + 20 \cdot 0.707 = -14.44 \text{ kH}.$$

В сечении 3 значения расчетных усилий определяется также

$$M_3 = 37.17 \cdot 5 - 16.75 \cdot 8 - 20 \cdot 3 - 4 \cdot 1 \cdot 0.5 = 10.15 \text{ kHm}.$$

$$Q_3 = 37.17 - 20 - 4 \cdot 1 = 13.17 \text{ kH}.$$

$$N_3 = -16.75 \text{ kH}.$$

2. Кривая давления. Рациональная ось арки

Три усилия в каждом сечении арки M , Q и N статически эквивалентны одной равнодействующей, приложенной с эксцентриситетом

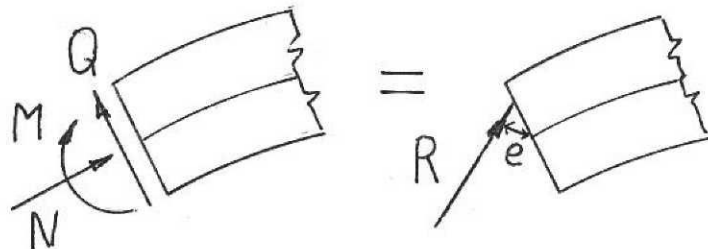


Рис.3.5

относительно оси арки. (рис.3.5)

Направление и величина равнодействующей опорной реакции на любой из опор определяется как векторная сумма H и V (рис3.6а)

$$\mathbf{R}_A = \mathbf{H} + \mathbf{V}_A \quad \text{и} \quad \mathbf{R}_B = \mathbf{H} + \mathbf{V}_B \quad (9.3)$$

Далее величины и направления промежуточных равнодействующих можно определить из силового многоугольника (рис.3.6б)

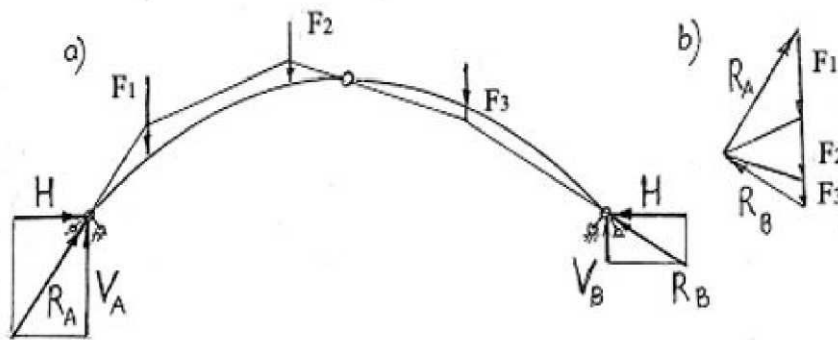


Рис.3.6

Линия, соединяющая точки приложения равнодействующих в сечениях арки называют многоугольником давления. При действии на арку распределенной нагрузки многоугольник давления превращается в кривую давления..

Очертание многоугольника (кривой) давления повторяет очертание эпюры изгибающих моментов: чем дальше уходит равнодействующая от оси арки, чем больше ее эксцентриситет, тем больше и изгибающий момент.

Если ось арки совпадает с многоугольником давления, то в арке не возникают ни изгибающие моменты, ни поперечные силы. Такое очертание оси арки называют *рациональным*. В этом случае при действии вертикальной нагрузки арка оказывается сжатой во всех сечениях. Именно поэтому уже древние зодчие возводили арочные конструкции из притесанных друг к другу каменных блоков, часто без связующего раствора.

Выясним, какое очертание должна иметь арка при действии на нее равномерно распределенной нагрузки? (рис.3.7)

Очертание будет рациональным, если в каждом сечении изгибающий момент будет равен нулю, т.е.

$$M = M^0 - H \cdot y = 0$$

$$y = \frac{M^0}{H}. \quad (10.3)$$

Следовательно, если арка будет иметь очертание, совпадающее с очертанием балочной эпюры изгибающих моментов от действующей на нее нагрузки, то оно будет рациональным.

Уравнение для вычисления изгибающего момента в балке под равномерно распределенной нагрузкой имеет вид квадратной параболы:

$$M^0 = V_A x - \frac{qx^2}{2} = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} = \frac{q}{2}x(l-x)$$

Следовательно, очертание арки по квадратной параболе будут рациональным при действии на арку равномерно распределенной нагрузки.

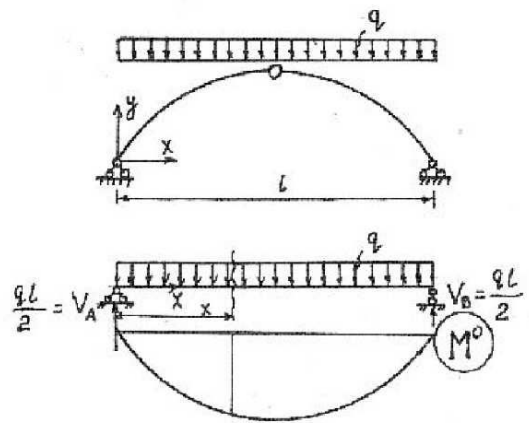


Рис.3.7

опросы для самоконтроля

1. Какие стержневые системы называют распорными?
2. Что такое трехшарнирная арка (рама)?
3. Как определяются опорные реакции в трехшарнирных системах?
4. По каким формулам определяются расчетные усилия в сечениях арки?
5. Что такое кривая давления?
6. Какое очертание арки называют рациональным?
7. Какова должна быть ось арки, чтобы в ней от заданной нагрузки не возникало бы изгибающих моментов?

Глава №4.

Балочные плоские фермы.

1. Основные понятия. Статическая определимость ферм

Фермы, как и арки, относятся к конструкциям, применявшимся уже в древности. Великий архитектор Палладио (XVI век) уже использовал фермы для покрытия зданий.

Однако методы расчета усилий, возникающих в элементах фермы, были разработаны лишь в середине XIX века. Толчком к развитию теории послужил технический прогресс, связанный с появлением паровоза, железных дорог и со строительством мостов. К этому времени теория изгиба балок была разработана достаточно полно. Для перекрытия больших пролетов балки больших пролетов, однако, неэффективны. Нормальные напряжения распределены по сечению балки неравномерно: крайние волокна сильно напряжены; зоны, прилегающие к

нейтральной оси, недонапряжены. Поэтому балки больших пролетов имеют, как правило, двутавровое сечение. Естественно стремление облегчить стенку. Так появляется балочная ферма. (Первые балочные фермы и рассматривались современниками как “балки со сквозной стенкой”, а не как самостоятельная конструкция).

Разработка современных подходов к расчету ферм связана с именем выдающегося русского инженера Д.И.Журавского(1821 – 1891), который впервые предложил расчетную схему фермы с шарнирами в узлах и способ определения усилий в стержнях из уравнений равновесия.

Фермой называют систему, состоящую из стержней, соединенных по концам шарнирами. Шарниры в узлах расчетной схемы. – идеализация, отражающая действительную работу гибких стержней. Введение шарниров в узлы делает большинство применяемых на практике ферм статически определимыми и почти не оказывает влияния на величину возникающих в стержнях продольных усилий.

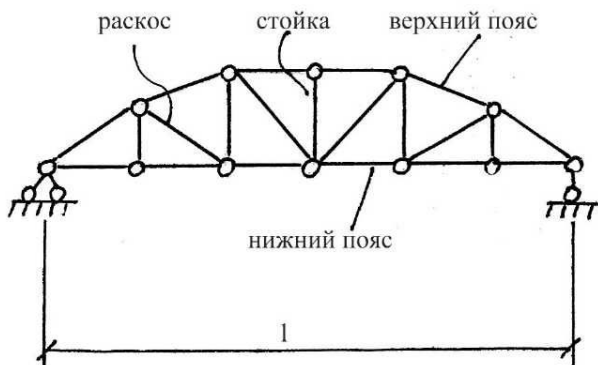


Рис. 4.1

С классификацией различных

ферм можно познакомиться в любом учебнике по строительной механике.

Фермы, образованные из шарнирных треугольников называют простыми. Ниже будут рассмотрены простые балочные фермы (рис.4.1). Расстояние между опорами называют пролетом. Различают верхний и нижний поясы, стойки, раскосы. Расстояние между узлами по любому поясу называют панелью

Балочные фермы различаются очертанием поясов (фермы с параллельными поясами, треугольные фермы, фермы с полигональным верхним поясом) и структурой решетки.

Фермы рассчитывают на нагрузки, приложенные в узлах (на узловую нагрузку). В этом случае в стержнях фермы возникают лишь продольные усилия (растяжения или сжатия).

Цель расчета фермы на узловую нагрузку – определить продольные усилия во всех стержнях

Если на какой-либо стержень действует поперечная, неузловая нагрузка, то стержень начинает работать на изгиб, сечение его придется увеличивать, ферма

утяжеляется. Поэтому при проектировании всегда нужно стремиться к узловой передаче нагрузки.

Рассмотрим ферму, связанную с основанием тремя непараллельными и не пересекающимися опорными стержнями. Такая опорная система статически определима: трех уравнений статики хватает для определения всех возможных компонент опорных реакций.

Под действием внешних нагрузок, в том числе и опорных реакций, ферма находится в равновесии. Поэтому и каждый узел находится в равновесии. На каждый узел действует система сил, пересекающихся в одной точке. Для такой системы сил можно записать только два уравнения равновесия: сумма проекций всех сходящихся в узле сил на два произвольных направления должна быть равна нулю. Если в ферме k узлов, то можно записать $2k$ уравнений равновесия такого типа. В ферме, состоящей из s стержней и трех опорных стержней, неизвестными будут $s + 3$ усилий. Таким образом, критерием статической определимости фермы будет выполнение условия

$$s + 3 = 2k \quad \text{или} \quad s = 2k - 3. \quad (1.4)$$

2. Способы определения усилий в стержнях фермы.

Расчет фермы, как и всякой статически определимой системы начинается с определения опорных реакций, Это делают обычным способом как в балке, составляя уравнения равновесия для фермы в целом. После этого приступают к определению усилий в стержнях.

Основной метод состоит в отделении части фермы и рассмотрении ее равновесия. Этот *метод разрезов* применялся и в решении задач сопротивления материалов.

Последовательность действий была определена еще в курсе теоретической механики, когда изучалась статика системы сил на плоскости.

1. Проводят мысленно разрез фермы, который должен проходить, вообще говоря, не более, чем через три стержня, в том числе и через тот, усилие в котором следует определить.

2. Отбрасывают левую или правую часть фермы относительно разреза (удобнее отбрасывать ту часть, к которой приложено большая часть нагрузок). Если вырезается узел, то он просто изымается из фермы.

3. Заменяют действие отброшенной части продольными усилиями в разрезанных стержнях, полагая их все растягивающими (действующими “от узла”).

4. Составляют уравнение равновесия так, чтобы искомое усилие входило в него как единственное неизвестное.

5. Решают уравнение, находят усилие. Если результат получается со знаком плюс, то стержень растянут, если минус – сжат.

Итак, метод общий – метод разрезов. Но при составлении уравнения равновесия нужно применить такой способ, который позволяет избежать решения системы совместных уравнений. Различают несколько таких способов: способ моментной точки, способ проекций и способ вырезания узлов.

В строительной механике часто применяют “фирменные” обозначения усилий в стержнях. Буквой O обозначают усилие в элементах верхнего пояса, U – в элементах нижнего пояса, D – в раскосах, V – в стойках. Этим буквам придается два индекса, соответствующих номерам узлов по концам стержня. Некоторые из этих букв оказываются “перегруженными содержанием”. Например, буквой V обозначают вертикальную составляющую опорной реакции и работу внешних сил. Поэтому усилия в стержнях фермы можно обозначать одной буквой (обычно S) с двумя индексами.

Определим усилия в стержнях фермы, показанной на рис.4.2.

Опорные реакции определим как в балке с пролетом, равным пролету фермы:

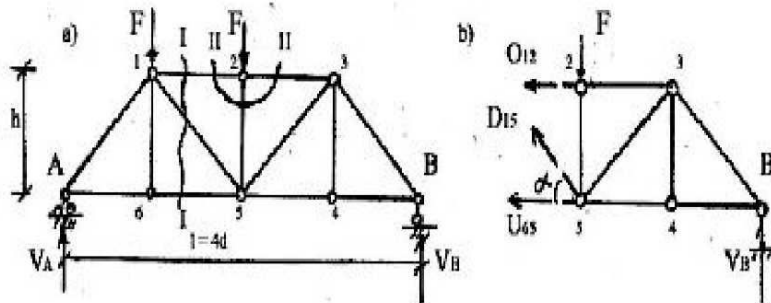
$$\sum M_A = 0; \quad -V_B \cdot l + F \cdot d + F \cdot 2d = 0, \quad V_B = \frac{3Fd}{l}.$$

$$\sum M_B = 0;$$

$$V_A \cdot l - F \cdot 3d - F \cdot 2d = 0$$

$$V_A = \frac{5d}{l}$$

Рис.4.2



Найдем усилие O₁₂

Проведем сечение I – I (рис.4.2 а).

Отбросим левую часть фермы. и заменим

Рис.4.2

ее действие на оставшуюся правую часть неизвестными усилиями O₁₂, D₁₅ и U₆₅, полагая их растягивающими (рис.4.2. б).

Уравнение равновесия нужно составить так, чтобы в него вошло усилие O₁₂ и не вошли D₁₅ и U₆₅. Для этого следует взять момент всех сил, приложенных к правой части фермы, относительно точки 5, играющей в данном случае роль моментной точки.

$$\sum M_5 = 0, \quad -O_{12} \cdot h - V_B \cdot 2d = 0, \quad O_{12} = -\frac{2d}{h} V_B.$$

Таким образом, для определения усилия O_{12} применен *способ моментной точки*.

За *моментную* принимают ту точку, в которой пересекаются все *неинтересующие нас стержни*, попавшие в сечение.. Следовательно, в разрез могут попасть и n стержней, если $n-1$ пересекаются в одной точке. (рис. 4.3).

Найдем усилие в раскосе D_{15} .

Проводим то же сечение I – I. Изложенный выше способ здесь не применим: моментную точку придется

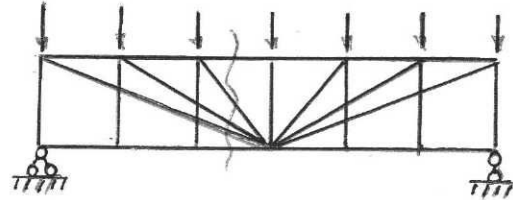


Рис.4.3

искать на пересечении стержней O_{12} и U_{65} , а они параллельны. Поэтому составляем уравнение другого вида: проектируем все силы, приложенные к правой части фермы, на вертикаль, применяя *способ проекций*:

$$\sum y = 0, \quad D_{15} \sin \alpha - P + V_B = 0, \quad D_{15} = \frac{F - V_B}{\sin \alpha}.$$

Найдем усилие V_{25} .

Провести разрез фермы на две части так, чтобы он прошел через стойку 2-5 и еще через два стержня не удастся. Поэтому проводят сечение II – II, применяя *способ вырезания узлов* (рис.4.4).

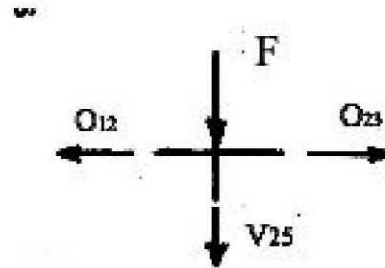


Рис.4.4

Проектируя все силы на вертикаль, получаем

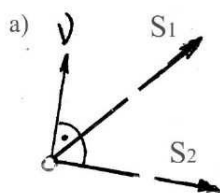
$$\sum y = 0, \quad -F - V_{25} = 0, \quad V_{25} = -F.$$

Применяя способ вырезания узлов, нужно помнить, что для системы сходящихся сил можно записать только два уравнения равновесия. Поэтому в вырезаемом узле не должно быть более двух стержней с неизвестными усилиями.

До начала определения усилий в элементах фермы полезно выявить те стержни, усилия в которых при заданной нагрузке равны нулю. Такие стержни называют *нулевыми*.

Правила определения нулевых стержней следуют из уравнений равновесия.

Если в узле сходится два стержня и узел не нагружен, то усилия в обоих стержнях равны нулю (рис.4.5а). Проектируя силы на направление v , получаем



$S_1 = 0$. После этого из проекции на направление S_2 следует, что и $S_2 = 0$.

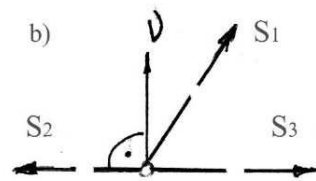


Рис.4.5

Если в узле сходятся три стержня, два из которых лежат на одной прямой и узел не нагружен (рис.4.5b), то усилие в ответвляющемся стержне равно нулю ($S_1 = 0$), а два других равны между собой ($S_2 = S_3$). Первое заключение следует из уравнения равновесия $\sum v = 0$., второе – получаем, проектируя все силы на прямую, вдоль которой действуют силы S_2 и S_3 .

Пользуясь этими правилами легко установить, что все стержни, перечеркнутые одной чертой в ферме на рис.4.6, нулевые.

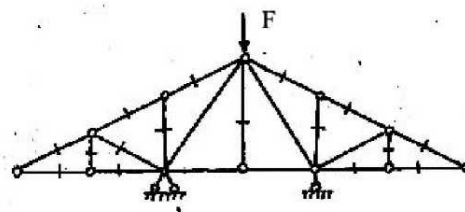
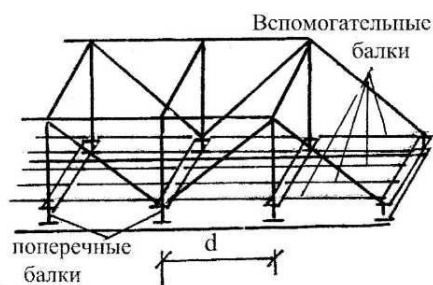


Рис.4.6

3. Особенности расчета шпренгельных ферм.

По конструктивным соображениям раскосы фермы обычно составляют со стойками и поясами углы, близкие 45° . (В этом случае легко соблюсти обязательное условие центрирования осей стержней в узлах). В такой ферме длина панели примерно равна высоте стойки. Высота большепролетных, интенсивно нагруженных ферм (прежде всего ферм мостов) становится значительной. Соответственно удлиняются и панели d . Удлинение панелей приводит к увеличению веса моста, так как вспомогательные продольные изгибаемые балки, опирающиеся на поперечные, и первыми принимающие на себя нагрузку, сильно удлиняются (рис. 4.7)

Для уменьшения длины панелей верхнего или нижнего пояса (в зависимости от того, к какому поясу приложена нагрузка) применяют вложенные двухопорные фермы – шпренгели, опирающиеся на узлы основной фермы.



Принципиальная схема такой фермы показана на рис. 4.8а.

Рис.4.7

Шпренгели работают только на местную узловую нагрузку, приложенную непосредственно в их пролете. Вертикальная местная нагрузка передается на узлы основной фермы.

Схема, показанная на рис. 4.8b, отличается от первой схемы стержнями-подвесками, “зацепляющими” панели нижнего пояса основной фермы. Обе схемы по характеру работы идентичны. Уменьшив длины опорных стержней шпренгелей и подвесок до нуля и соединив наклонные элементы шпренгелей с раскосами основной фермы, получают схему, изображенную на рис.4.8с – ферму со шпренгелями или *шпренгельную ферму*.

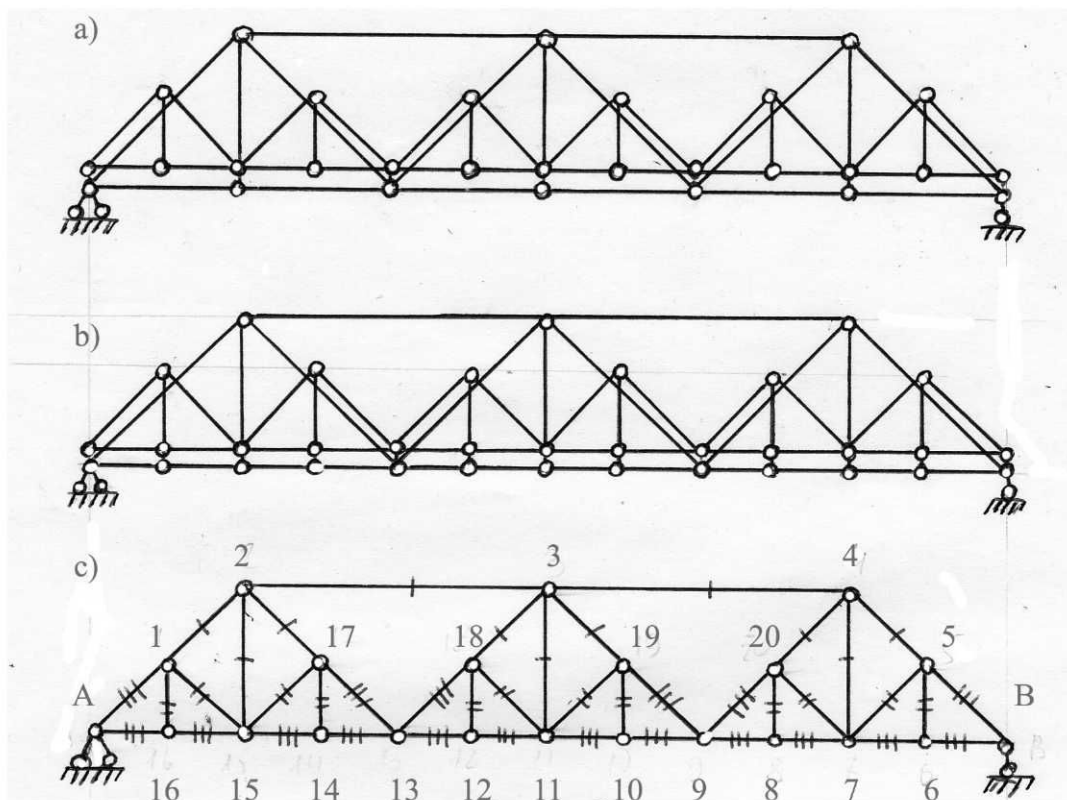


Рис. 4.8

Первый мост по шпренгельной схеме был построен в Красноярске через Енисей по проекту инженера, известного специалиста по строительной механике, проф. Л.Д.Проскурякова. За проект этого моста Л.Д. Проскуряков удостоен золотой медали на Всемирной выставке в Париже в 1899 году.

В ферме на рис. 4.8. шпренгели передают нагрузку на узлы того же пояса, к которому они прикреплены. Такие шпренгели называются *одноярусными*.

Шпренгели, передающие местную нагрузку с верхнего пояса на узлы нижнего пояса или наоборот, называют *двухъярусными*. Примеры ферм с двухъярусными шпренгелями показаны на рис. 4.9.

В фермах с одноярусными шпренгелями различают три класса стержней.

1. Стержни, принадлежащие только основной ферме (например, стержни 2 – 3, 3 – 18, 3 – 11, 4 – 5 и т.д. на рис.4.8. (Стержни этого класса перечеркнуты на схемах 4.8 и 4.9 одной чертой).. Усилия в этих стержнях могут быть определены из расчета основной фермы после удаления из схемы шпренгелей и перераспределения с них нагрузки на узлы основной фермы..

2. Стержни, принадлежащие только шпренгелю (отмечены двумя штрихами). Усилия в этих стержнях определяются из расчета шпренгеля на местную нагрузку, как двухопорной фермы.

3. Стержни, принадлежащие одновременно основной ферме и шпренгелю (“смешанные” стержни, отмечены тремя чертами). Усилие в каждом из таких стержней может быть определено как сумма двух усилий: соответствующего усилия, полученного из расчета основной фермы, и усилия, полученного из расчета шпренгеля на местную нагрузку.

Если до рассчитываемого стержня можно “добраться” обычным сечением(через три стержня), то усилие в нем можно определять, не учитывая вышеприведенных соображений..

В фермах с двухъярусными шпренгелями различают еще стержни четвертого класса. К ним относят элементы основной фермы, у которых линии влияния по езде поверху и понизу имеют различный вид.

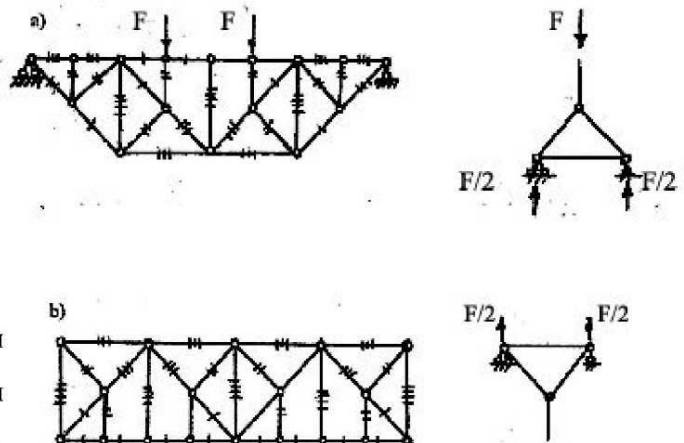


Рис.4.9

Вопросы для самоконтроля

- 1.Что такое ферма? Чем отличается расчетная схема от реальной конструкции?
- 2.Какие усилия возникают в стержнях фермы (расчетной схемы) и почему?
- 3.Как определяются опорные реакции в балочных фермах?
- 4.Назовите основные элементы фермы?
- 5.Как найти положение моментной точки при определении усилий в элементах стержня? Когда способ моментной точки применить нельзя?
- 6.Когда и как применяется способ проекций?
- 7.Когда и как применяется способ вырезания узлов?
- 8.Какие стержни называют нулевыми? Каковы правила определения нулевых стержней?

9. Какие фермы называют шпренгельными? С какой целью в ферму вводятся шпренгели?
10. Какие три класса стержней различают в шпренгельных фермах?
11. Каковы способы вычисления усилий в стержнях шпренгельной фермы?

Глава 5

1. Линии влияния усилий в элементах балочных ферм.

При расчете ферм на нагрузки, меняющие свое положение удобно, применять линии влияния.

Линией влияния усилия в каком-либо стержне фермы называют график, отражающий закон изменения этого усилия в зависимости от положения на ферме груза $F=1$.

Рассмотрим предварительно построение л.в. в простых балках при узловой передаче нагрузки.

На практике (например, в мостовых конструкциях) нагрузки на балку могут передаваться лишь в отдельных местах, в которых опираются промежуточные, поперечные балки (рис. 5.1). Балка АВ называется главной. Места опирания поперечных балок называют узлами, а расстояние между узлами – панелями. Верхние однопролетные балки, к которым непосредственно приложена нагрузка, называют второстепенными или вспомогательными. Если груз находится, например, на балке 1-2, то давление на главную балку передается только в узлах 1 и 2, где расположены опоры поперечных балок. На величину и изменение опорных реакций

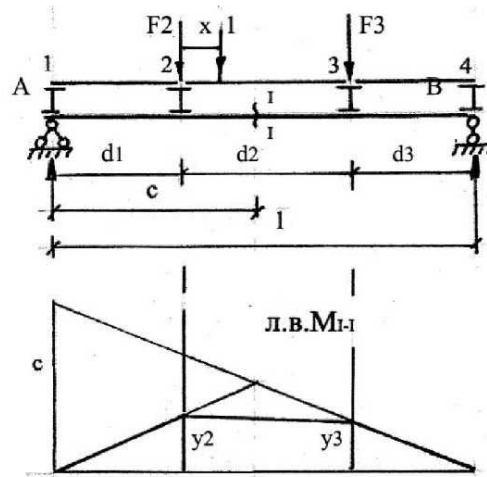


Рис.5.1

узловая передача нагрузки не оказывает влияния, в чем легко убедиться, составив обычные “балочные” уравнения равновесия. Поэтому линии влияния опорных реакций главной балки V_A и V_B будут такими же, как и при нагрузке, приложенной к ней непосредственно. Иначе обстоит дело с л.в. моментов и поперечных сил.

Построим л.в. изгибающего момента в сечении I – I главной балки АВ, если груз $F = 1$ движется по разрезной системе вспомогательных балок. Если груз находится на узлах, то он непосредственно действует на главную балку. Поэтому построим сначала л.в. изгибающего момента для сечения I – I при непосредственной передаче нагрузки и отметим ординаты y_2 и y_3 над узлами.

Рассмотрим вначале положение груза на вспомогательной балке 2 – 3. Его положение зафиксируем координатой x с началом отсчета на опоре 2.

Если единичный груз располагается на балке 2 – 3, то воздействие на главную балку оказывают силы F_2 и F_3 , равные по величине опорным реакциям балки 2 - 3 и обратные по знаку (третий закон Ньютона!).

Момент в сечении I - I главной балки будет равен

$$M_{I-I} = F_2 y_2 + F_3 y_3 \quad (1.5)$$

Опорные реакции балки 2 – 3 на действие силы $F = 1$ (следовательно, силы давления на основную балку) можно записать в виде

$$F_2 = \frac{d_2 - x}{d_2}, \quad F_3 = \frac{x}{d_2} \quad (2.5)$$

Подставляя силы 2.5 в выражение 1.5, получаем

$$M_{I-I} = \frac{d_2 - x}{d_2} y_2 + \frac{x}{d_2} y_3 \quad (3.5)$$

Отсюда следует, что при движении груза между узлами 2 и 3 л.в. в главной балке имеет вид прямой. соединяющей узловые ординаты y_2 и y_3

Когда груз $F=1$ находится на вспомогательной балке 1 – 2 а начало отсчета координаты x принято на опоре 1, то момент в сечении I–I равен

$$M_{I-I} = F_2 y_2 = \frac{x}{d_1} y_2. \quad (4.5)$$

Когда груз $F=1$ находится на вспомогательной балке 3 - 4 а начало отсчета координаты x принято на опоре 3, то момент в сечении I–I равен

$$M_{I-I} = F_3 y_3 = \frac{d_3 - x}{d_3} y_3. \quad (5.5)$$

Обобщая, можно сформулировать правила построения л.в.усилия в балке при узловой передаче нагрузки:

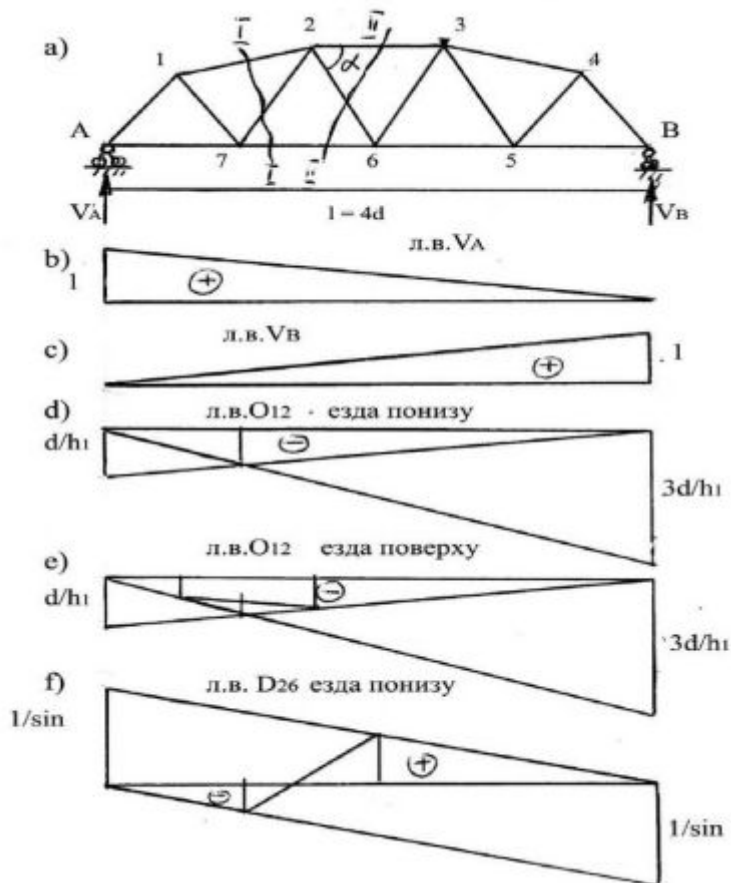
1.Строят соответствующую л.в. для главной балки.

2.Проектируют на левую и правую ветви л.в. узлы и соединяют полученные точки прямыми линиями

2. Линии влияния усилий в стержнях простых балочных ферм

Все сказанное о построении л.в. усилий при узловой передаче нагрузки на балку имеет Рис.5.2

непосредственное отношение к ферме, так как она так же нагружена в узлах - шарнирах. Рассмотрим, например, ферму, показанную на рис. 5.2.а.

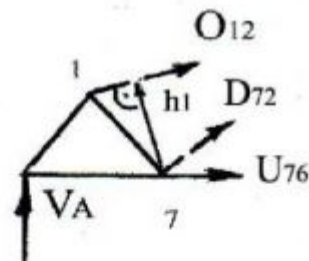


Л.в. опорных реакций V_A и V_B в балочной имеют точно такой же вид, как в однопролетной балке (рис.5.2b и 5.2c))

Вид л.в. усилия в каком-либо стержне фермы может зависит от того, по какому поясу, верхнему или нижнему перемещается груз $F=I$. Поэтому нужно заранее условиться о положении этого груза (говорят: езда понизу, или езда поверху).

Построим л.в. O_{12} при езде понизу.

Проводим сечение I-I фермы, как при аналитическом расчете. Рассмотрим два возможных положения груза $F = I$: слева и справа от "разрезанной" панели 7-6.



1. Пусть груз $F = I$ расположен в любом месте справа от узла 6. Рассмотрим равновесие левой части фермы, отбросив правую и заменив ее действие растягивающими усилиями O_{12}, D_{27} и U_{76} (рис.5.3). Используя моментную точку 7, запишем уравнение равновесия

Рис.5.3

$$\sum M_7 = 0, \quad V_A d + O_{12} h = 0.$$

Отсюда $O_{12} = -V_A \frac{d}{h_1},$

Получен закон, по которому изменяется усилие. O_{12} , когда $F = I$ расположен справа от узла 6. Усилие O_{12} меняется по закону левой опорной реакции V_A , но с поправочным коэффициентом $-\frac{d}{h_1}$. Строим правую ветвь откладывая на левой опорной

вертикали ординату $-\frac{d}{h_1}$ и соединяя ее с нулевой точкой на правой опоре Мы имеем право

использовать только часть этой прямой на участке 6 - В.

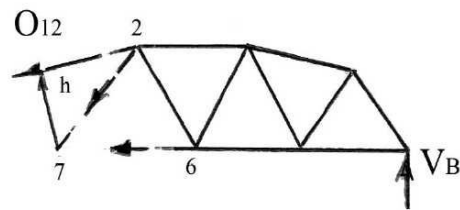


Рис.5.4

2. Пусть груз $F = I$ находится в любом узле нижнего пояса слева от разрезанной панели 7 - 6 (в том числе и в узле 7). Рассмотрим равновесие правой части фермы (рис.5.4).Используя ту

же моментную точку 7, запишем уравнение равновесия

$$\sum M_7 = 0, \quad - V_B 3d - O_{12} h_1 = 0.$$

Получим аналитическое выражение для левой ветви л.в.

$$O_{12} = -V_B \frac{3d}{h_1}.$$

Усилие изменяется по закону V_B , но с поправочным коэффициентом $3d/h_1$.

Строим левую ветвь л.в. O_{12} , откладывая на правой опорной вертикали отрезок $-\frac{3d}{h_1}$ и соединяя конец этого отрезка с нулем на противоположной опоре. Эта

прямая “работает” только на участке А - 7. Соединяя концы полученных участков переходной линией 7 - 6, получаем л.в. O_{12} . (рис.5.2d)

Ординаты этого графика безразмерны, так как умножая грузы, имеющие размерность силы, на ординаты л.в. под этими грузами, мы должны получить силы с соответствующей размерностью.

Элементарным расчетом можно показать, что левая и правая ветви л.в. пересекаются под моментной точкой.

Как изменится вид л.в. O_{12} при езде поверху? Разрез фермы, естественно, сохраняется. Не изменятся и выражения для правой и левой ветвей л.в. Заметим, что сечение I - I разрезает панель верхнего пояса 1 – 2. Поэтому правая ветвь “работает” на участке 2-В., а левая – на А – 1. Таким образом, отличие будет только в переходной линии, соединяющей в этом случае точки на правой и левой ветвях, соответствующих краям разрезанной панели. Рис.(5.2e)

Построим л.в. D_{26} . при езде понизу.

Проведем сечение II – II как при аналитическом расчете.

1.Предположим, что груз $F = 1$ располагается справа от разрезанной панели 7 – 6. Рассматривая равновесие левой части фермы(рис.5.5) и применяя способ проекций, получаем

$$\sum y = 0; \quad V_A - D_{26} \sin \alpha = 0, \quad D_{26} = \frac{1}{\sin \alpha} V_A.$$

Правая ветвь изменяется также, как и V_A , но с коэффициентом $1/\sin \alpha$. Откладываем

Отрезок $1/\sin \alpha$ вверх на левой опорной

вертикали и соединяем его конец с опорой В.Правая ветвь линии влияния – это участок этой прямой 6В.

2. Пусть груз $F=1$ находится слева от узла 7 .Рассматривая равновесие правой (относительно разреза) части фермы, получим выражение для левой ветви л.в.

$$\sum y = 0; \quad V_B + D_{26} = 0, \quad D_{26} = -\frac{1}{\sin \alpha}.$$

Рабочая часть левой ветви – участок прямой А7. Проводя переходную линию под узлами 7 и 6, получаем л.в. D_{26} (рис.5.2 f)

3.Определение усилий по л.в. (загрузка л.в.)

Если на узлы фермы действует система сосредоточенных сил F_i то усилие S по л.в. определяется как сумма влияний отдельных сил

$$S = \sum_i F_i y_i, \quad (4.5)$$

Где y_i – ордината л.в., взятая под силой F_i .

4.Линии влияния усилий в стержнях шпренгельных ферм

Принадлежность элемента шпренгельной фермы к тому или иному классу накладывает отпечаток на характер линии влияния. Рассмотрим ферму с одноярусными шпренгелями (рис.5.8 а)

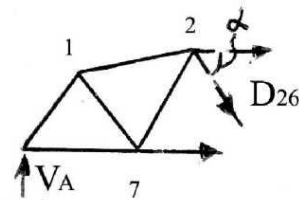


Рис.5.5

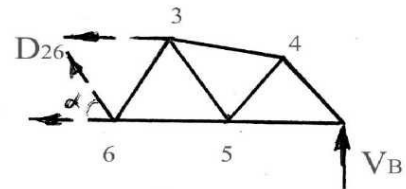


Рис.5.6

Л.в. усилий в стержнях первого класса строят точно так же как в простейших фермах, удаляя при их построении элементы шпренгелей (рис. 5.8b). На рис.5.8с и 5.8d показаны, например, л.в. O_{23} и V_{34}

Л.в. усилий в элементах шпренгелей строят, рассматривая два случая загрузки: 1. Груз $F = 1$ расположен на шпренгеле, например, в узле (рис. 5.7). Тогда, вырезая узел 6 (рис.5.9), из условия равновесия получаем усилие в стержне 5 – 6, например, будет равно единице.

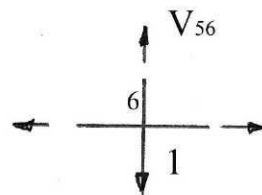


Рис. 5.7

2. Груз $F = 1$ расположен вне этого узла. Тогда шпренгель не работает и усилие в нем равно нулю. Л.в. V_{56} показана на рис.5.8g

Точно также строят л.в. усилий в любых фермах, в которых стойки соединены с поясом при отсутствии раскосов.

Л.в. усилий в стержнях третьего класса (“смешанных”) строят с учетом шпренгелей. Построим, например, л.в. D_{15} . Сечение I – I, которое нужно провести, чтобы “добраться” до усилия D_{15} , разрезает панель 1 -6. Формулы, определяющие левую и правую ветви этой л.в., получим, рассмотрев равновесие левой и правой частей фермы относительно сечения.

Из равновесия правой части фермы (рис.5.9) получаем левую ветвь л.в. D_{15} .

$$\sum M_O = 0;$$

$$-D_{15} \cdot h_1 + V_B \cdot l_1 = 0,$$

$$D_{15} = \frac{l_1}{h_1} \quad (1)$$

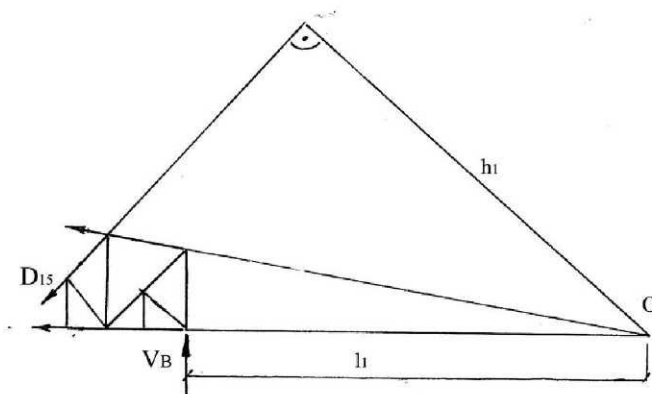


Рис.5.9

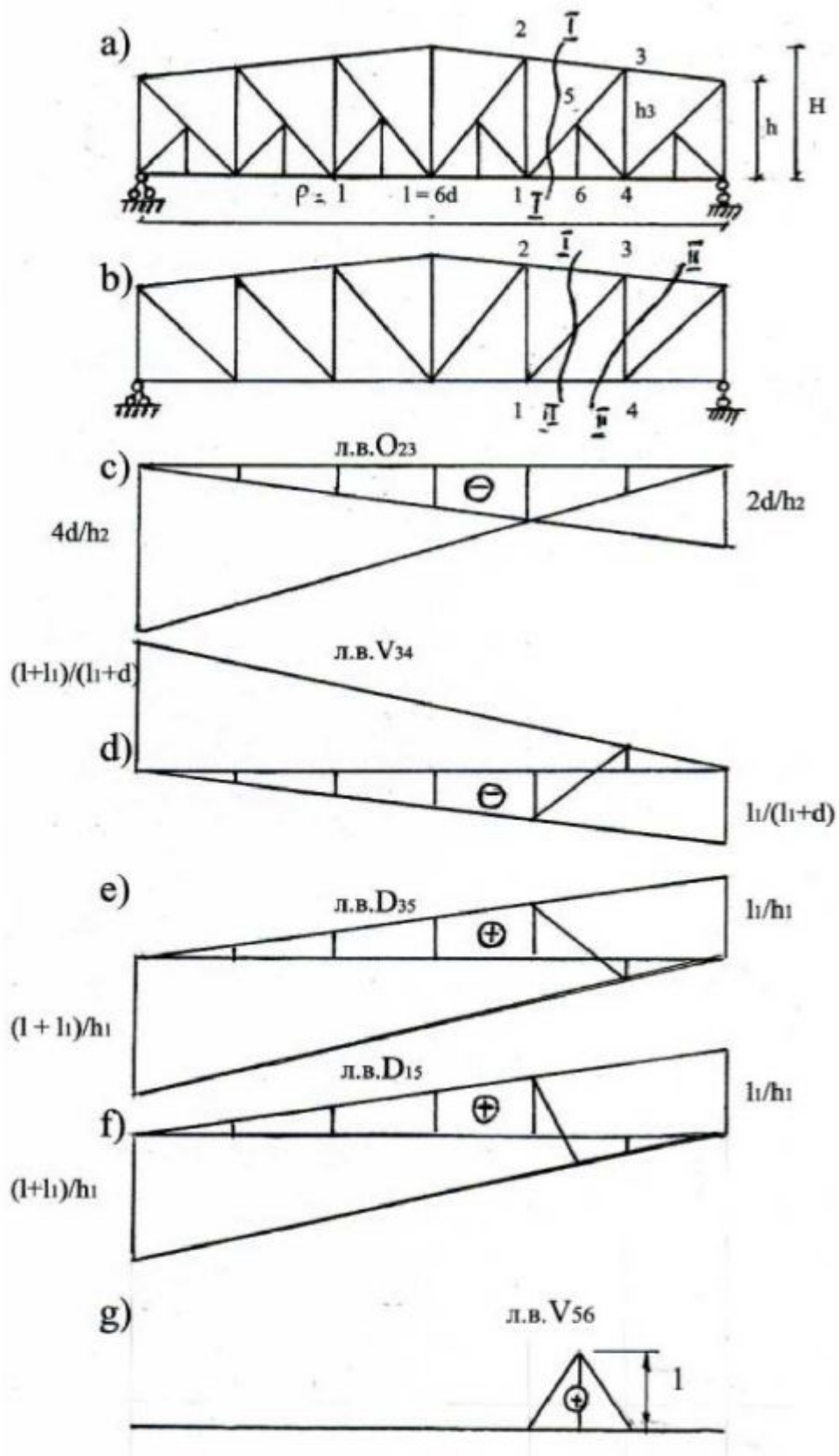


Рис. 5.8

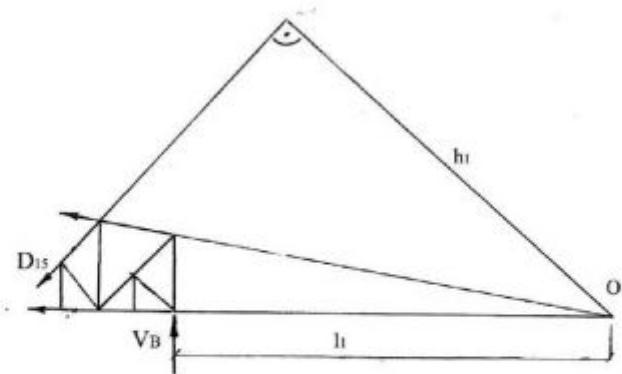
Из равновесия правой части фермы (рис.5.9) получаем левую ветвь л.в. D_{15} .

$$\sum M_O = 0;$$

$$-D_{15} \cdot h_1 + V_B \cdot l_1 = 0,$$

$$D_{15} = \frac{l_1}{h_1}$$

Рис.5.9



Из равновесия левой части фермы (рис. 5.10) получаем правую ветвь л.в. D_{15}

$$\sum M_O = 0;$$

$$V_A(l+l_1) + D_{15} \cdot h_1 = 0$$

$$D_{15} = -\frac{l+l_1}{h_1}$$

Переходная линия соединяет точки, полученные снесением на правую и левую ветви соответственно правого и левого

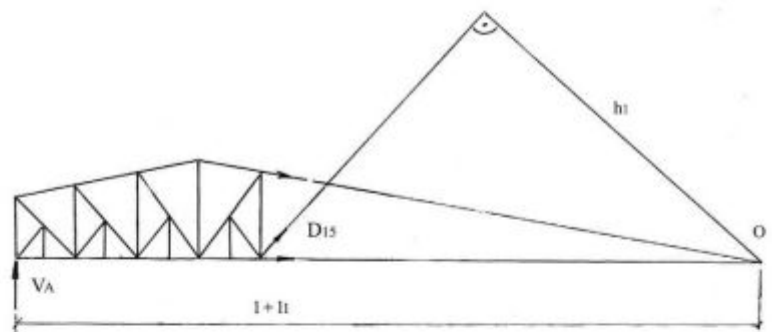


Рис.5.10

узлов разрезанной панели, т.е. 6 и 1. Л.в. D_{15} показана на рис. 5.8 f.

На рис 5.8e показана л.в. V_{35} в стержне первого класса. Эта л.в. отличается от л.в. V_{15} только переходной линией. Действительно, если шпренгеля нет, то сечение I – I “разваливает” панель 1 – 4. И на левую и правую ветви л.в., описываемых формулами (1) и (2), нужно сносить соответственно узлы 1 и 4.

Некоторые особенности имеет построение л.в. усилий в стержнях с двухъярусными шпренгелями. Рассмотрим, например, ферму на рис.5.11а. В этой ферме шпренгели предназначены для уменьшения

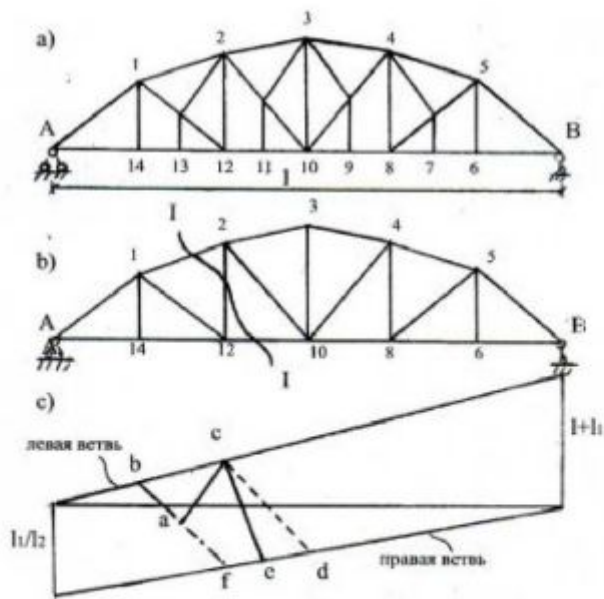


Рис.5.11

длины панелей нижнего пояса и “переброски” грузов, приложенных к шпренгелям в узлах 7,9,11,13, на узлы верхнего пояса.

Построим л.в. V_{2-12} . Этот стержень принадлежит основной ферме. Вначале построим л.в. усилия в этом стержне без учета шпренгелей отдельно при езде поверху и понизу. Проведем сечение I-I (рис. 5.11b).

1. Рассмотрим равновесие левой части фермы, когда единичный груз находится справа от сечения (рис. 5.12)

$$\sum M_O = 0; -V_A \cdot l_1 - V_{2-12} \cdot l_2 = 0.$$

$$V_{2-12} = -\frac{l_1}{l_2} V_A \text{ - правая ветвь л.в.}$$

2. Из равновесия правой части фермы получают

$$\sum M_O = 0; V_{2-12} \cdot l_2 - V_B \cdot (l + l_1) = 0$$

$$V_{2-12} = \frac{l + l_1}{l_2} V_B \text{ - левая ветвь.}$$

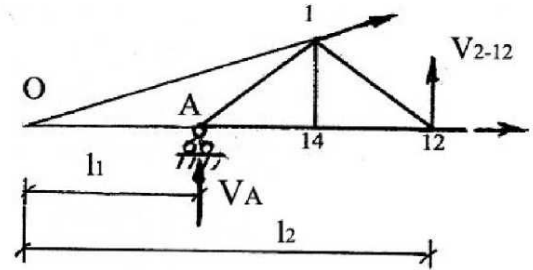


Рис. 5.12

Обе л.в. показаны на рис. 5.11.с. Они отличаются лишь положением переходной линии. Пунктиром обозначена переходная линия при езде понизу и штрих- пунктиром – при езде поверху. После этого учтем наличие шпренгелей. При положении груза $F = 1$ в узлах 11 и 13 он воспринимается шпренгелями и передается на узлы верхнего пояса. Поэтому в этих точках нужно пользоваться ординатами л.в. при езде поверху (точки e и a на рис. (5.11с). При положении груза в узлах 10, 12 и 14 шпренгели не работают и ординаты берут из л.в. при езде понизу (точки d, c и b). Соединяя соседние ординаты прямыми (се, ac, ab,), получаем окончательное очертание л.в. V_{29}

Пример решения задачи № 3 контрольного задания.

Задана ферма, изображенная на рис. 5.13

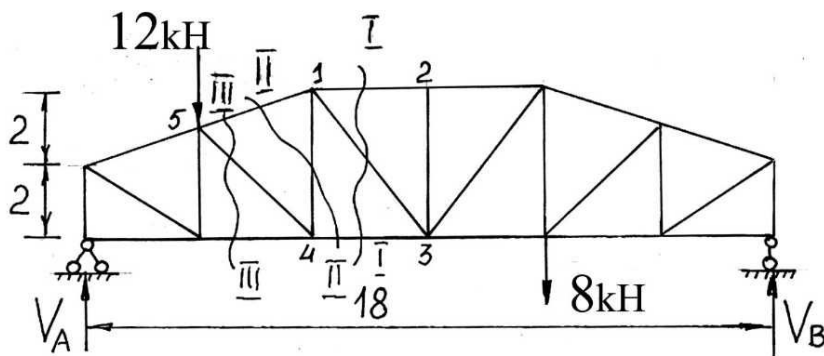


Рис. 5.13

I. Требуется найти усилия S_{12} , S_{43} , S_{13} , S_{41} , S_{54} от заданной нагрузки. (Аналитический расчет).

II. Построить линии влияния для усилий в этих же стержнях.

III. Найти усилия в стержнях по линиям влияния и сравнить их с усилиями, полученными аналитически

I. Расчет усилий от заданной нагрузки.

1. Определяем опорные реакции.

$$\sum M_A = 0; 12 \cdot 3 + 8 \cdot 12 - V_B \cdot 18 = 0; V_B = \frac{36 + 96}{18} = 7.33 \text{ кН}$$

$$\sum M_B = 0; V_A \cdot 18 - 12 \cdot 15 - 8 \cdot 6 = 0; V_A = \frac{180 + 48}{18} = 12.66 \text{ кН}$$

$$\text{Проверка: } \sum y = 0; 12.66 - 12 - 8 + 7.33 = 0.$$

2. Определяем усилие S_{12} .

Проводим сечение I – I (рис. 5.13). Отбрасываем правую часть фермы относительно этого сечения. Следует отбрасывать ту часть фермы, на которой расположено больше нагрузок. В рассматриваемом случае безразлично, какую часть фермы отбрасывать. Действие отброшенной части заменим неизвестными продольными силами S_{12} , S_{13} и S_{43} , полагая их растягивающими (рис. 5.14)

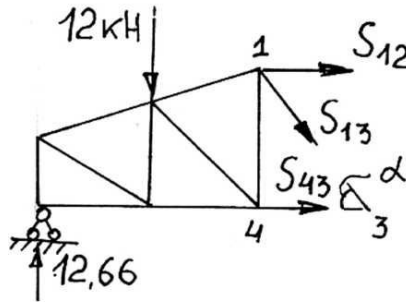


Рис.5.14

Рассмотрим равновесие оставшейся левой части.

Моментная точка для определения усилия S_{12} находится на пересечении стержней 1-3 и 4-3, то есть в узле 3. Используя эту моментную точку, запишем уравнение равновесия:

$$\sum M_3 = 0; 12.66 \cdot 9 - 12 \cdot 6 + S_{12} \cdot 4 = 0; S_{12} = \frac{-114 + 72}{4} = -10.5 \text{ кН.}$$

Знак минус, полученный в расчете, означает, что стержень 1 – 2 не растянут, а сжат.

3. Определяем усилий S_{43} .

До усилия в стержне 4 – 3 можно “добраться” тем же сечением I – I. Из рис. 5.14 следует, что моментной точкой для определения усилия S_{43} будет узел 1.

$$\sum M_1 = 0; 12.66 \cdot 6 - 12 \cdot 3 - S_{43} \cdot 4 = 0; S_{43} = \frac{76 - 36}{4} = 10.0 \text{ кН.}$$

4. Определим усилие S_{13} .

Стержень 1 – 3 попадает также в сечение I-I. (Рис. 5.14).

Запишем уравнение равновесия левой части в виде суммы проекций всех левых сил на ось у. (Моментной точки для определения усилия S_{13} нет)

$$\sum y = 0; 12.66 - 12 - S_{13} \sin \alpha = 0$$

Синус α легко определяется, когда заданы размеры фермы.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{l_{14}}{l_{43}} = \frac{4}{3} = 1.3333; \sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1.3333}{\sqrt{1 + 1.3333^2}} = \frac{1.3333}{1.6666} = 0.8000$$

Здесь полезно вспомнить о так называемом “египетском” прямоугольнике: прямоугольник, у которого катеты равны 3 и 4 имеет гипотенузу, равную 5 (теорема Пифагора!). Поэтому тригонометрические функции угла α в таком треугольнике определяются еще проще:

$$\sin \alpha = \frac{4}{5} = 0.8; \quad \cos \alpha = \frac{3}{5} = 0.6.$$

$$\text{Итак, } S_{13} = \frac{12.66 - 12}{0.8} = 0.833 \text{ кН}$$

5. Определим усилие S_{41} .

Проведем сечение II – II (рис. 5.13) и отбросим правую часть фермы (рис.5.15)

Моментная точка для определения усилия S_{41} лежит на пересечении стержней 5–1 и 4 – 3, то есть в точке О.

Составим сумму моментов всех сил, действующих на часть фермы относительно точки О, расстояние до которой определяется из подобия треугольников.

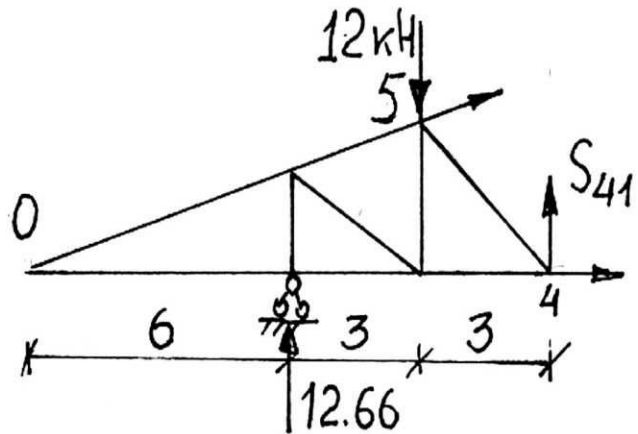


Рис.5.15

$$\sum M_O = 0;$$

$$- 12.66 * 6 + 12 * 9 - S_{41} * 12 = 0;$$

$$S_{41} = \frac{-76 + 108}{12} = 2.66 \text{ кН.}$$

6. Определим усилие S_{54} .

Сечение III – III (рис.5.13)

Отбрасывая правую часть, снова рассмотрим равновесие оставшейся левой части. Моментная точка и для этого усилия – точка О.

Плечо h_1 момента силы S_{54} определяется из прямоугольного треугольника с гипотенузой О – 4 (рис.5.16)

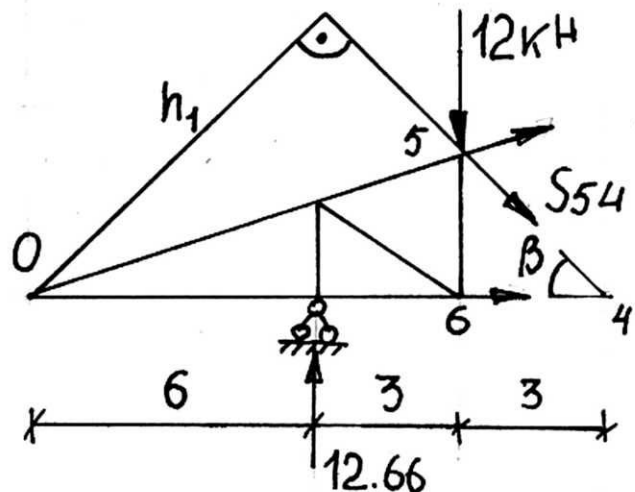


Рис. 5.16

$$h_1 = l_{04} \sin \beta$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{l_{56}}{l_{64}} = \frac{3}{3} = 1.$$

Следовательно, $\beta = 45^\circ$ и

$$\sin \beta = \cos \beta = 0.707.$$

$$h_1 = 12 * 0.707 = 8,48 \text{ м.}$$

Составляем сумму моментов всех сил относительно точки О и приравниваем ее нулю

$$\sum M_O = 0; \quad -12.66 \cdot 6 + 12 \cdot 9 + S_{54} \cdot h_1 = 0,$$

$$S_{54} = \frac{-108 + 76}{8.48} = -3.77 \text{ кН (сжатие)}.$$

II. Построение линий влияния

1. *Линии влияния (л.в.) опорных реакций V_A и V_B* показаны на рис. 5.23а и 5.23б и не требуют пояснений (они аналогичны линиям влияния опорных реакций балки).

2. *Л.В. усилия S_{12} .*

Для определения закона изменения этого усилия проводим сечение I – I точно так же, как и при аналитическом расчете. Рассмотрим два возможных положения груза $F = 1$: слева и справа от “разрезанной” панели 1 - 2.

1. Пусть груз $F = 1$ расположен в любом месте справа от узла 2. Рассмотрим равновесие левой части фермы, отбросив правую и заменив ее действие растягивающими усилиями S_{12} , S_{13} и S_{43} (рис.5.17). Используя моментную точку 3, запишем уравнение равновесия

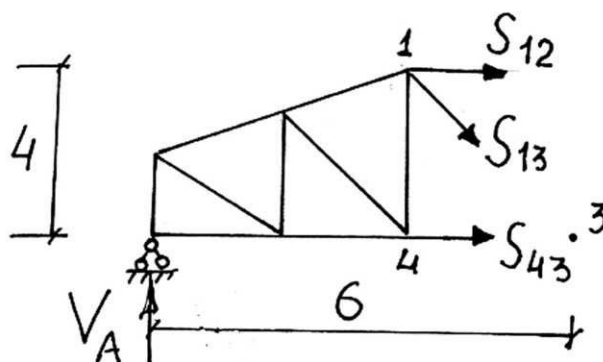


Рис.5.17

$$\sum M_3 = 0, \quad V_A \cdot 9 + S_{12} \cdot 4 = 0.$$

$$S_{12} = -2.25 V_A, \text{ (правая ветвь линии влияния) .}$$

Таким образом, получен закон, по которому изменяется усилие. S_{12} , когда $F = 1$ расположен справа от узла 2. Усилие S_{12} меняется по закону левой опорной реакции V_A , но с поправочным коэффициентом -2.25 . Строим правую ветвь, откладывая на левой опорной вертикали ординату -2.25 и соединяя ее с нулевой точкой на правой опоре. Мы имеем право использовать только часть этой прямой на участке 3 – В, на которой может располагаться груз $F = 1$.

2. Пусть груз $F = 1$ находится в любом узле слева от разрезанной панели 1 - 2 (в том числе и в узле 1). Рассмотрим равновесие правой части фермы (рис.5.18). Используя моментную точку 3, запишем уравнение равновесия

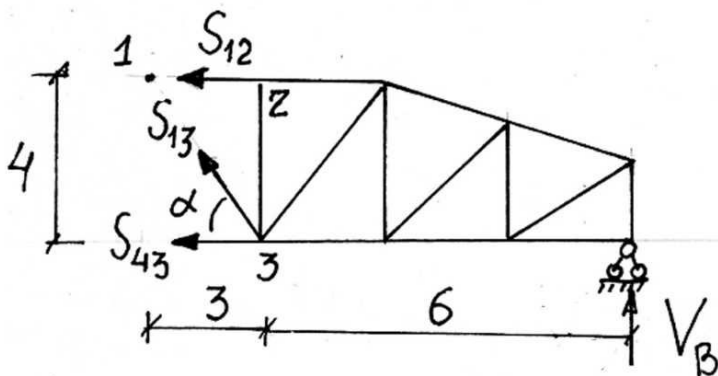


Рис.5.18

$$\sum M_3 = 0,$$

$$- V_B * 9 - S_{12} * 4 = 0.$$

$$S_{12} = - 2.25 V_B.$$

Усилие изменяется по закону V_B , но с поправочным коэффициентом 2.25

Строим левую ветвь л.в. S_{12} , откладывая на правой опорной вертикали отрезок - 2.25 и соединяя конец этого отрезка с нулем на противоположной опоре. Эта прямая “работает” только на участке А - 1.

Соединяя концы полученных участков переходной линией, получаем л.в. S_{12} . (рис.5.23с).

2. Л.В. усилия S_{43} .

Используем то же сечение, что и при построении л.в. усилия S_{12} .

1. Груз $F = 1$ находится справа от узла 2 (рис. 5.17).

$$\sum M_1 = 0; \quad V_A * 6 - S_{43} * 4 = 0.$$

$$S_{43} = 1.5 V_A \text{ (правая ветвь л.в.)}$$

2. Груз $F = 1$ находится слева от узла 1 (рис.5.18)

$$\sum M_1 = 0; \quad S_{43} * 4 - V_B * 12 = 0.$$

$$S_{43} = 3 V_B \text{ (левая ветвь л.в.)}$$

Линия влияния усилия S_{43} показана на рис. 5.23d.

3. Л.В. усилия S_{13} .

Стержень 1 - 3 попадает в то же сечение I - I.

1. Пусть груз $F = 1$ справа от узла 2 (рис.5.17). Для выяснения закона изменения усилия S_{13} при любом положении груза справа используем способ проекций.

Проектируя все силы, приложенные к левой части фермы на ось y , получаем

$$\sum y = 0; \quad V_A - S_{13} * \sin \alpha = 0;$$

$$S_{13} = \frac{V_A}{\sin \alpha} = \frac{1}{0.8} V_A = 1.25 V_A. \text{ (правая ветвь линии влияния)}$$

Откладываем на опоре А вверх отрезок, равный 1.25 и соединяем его конец с правой опорой. Правая ветвь “работает” на участке 3 – В.

2. Пусть груз $F = 1$ слева от узла 1 (рис.5.18).

$$\sum y = 0; \quad S_{13} * \sin \alpha - V_B = 0$$

$$S_{13} = \frac{V_B}{0.8} = -1.25V_B \text{ (левая ветвь линии влияния).}$$

Откладываем на опоре В вниз отрезок, равный 1.25 и соединяем его конец с левой опорой. Работающая часть левой ветви - от опоры А до узла 1.

Ординаты правой ветви (под узлом 2) и левой ветви (под узлом 1) соединяем переходной линией.

Линия влияния S_{13} показана на рис. 5.23е.

4. Л.В. усилия S_{41} .

Проводим сечение II – II и, последовательно рассматривая равновесие левой и правой части фермы, находим законы изменения усилия S_{41} в зависимости от положения груза $F = 1$.

1. Груз $F = 1$ расположен справа от разрезанной панели 1 – 5. Рассмотрим равновесие левой части относительно этого сечения (рис.5.19) Моментная точка, как и при аналитическом расчете, лежит на пересечении стержней 5 – 1 и 4 – 3.

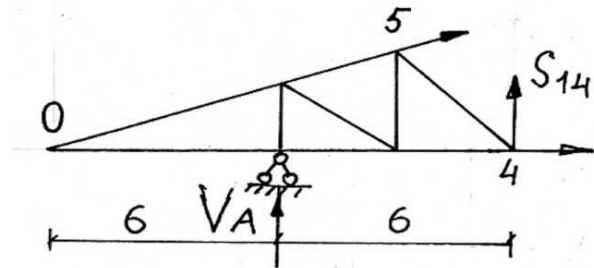


Рис.5.19

$$\sum M_O = 0; \quad -V_A * 6 - S_{41} * 12 = 0;$$

$$S_{41} = -0.5 V_A \text{ (правая ветвь л.в.)}$$

Откладываем на левой опоре вниз отрезок, равный 0.5 и соединяем его конец с правой опорой. “Работающая” часть этой линии – от опоры В до узла 1.

2. Груз $F = 1$ располагаем в любом узле слева от узла 5. Рассмотрим равновесие правой части фермы (рис.5.20):

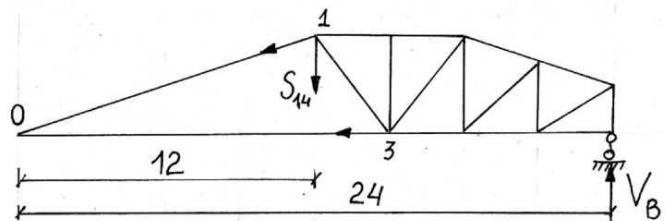


Рис.5.20

$$\sum M_O = 0;$$

$$S_{41} * 12 - V_B * 24 = 0;$$

$$S_{41} = 2V_B \text{ (левая ветвь л.в.)}$$

Откладываем на правой опоре вверх отрезок, равный 2 и соединяем его конец с левой опорой. “Работающая” часть этой линии – от опоры А до узла 5.

Ординаты правой ветви (под узлом 1) и левой ветви (под узлом 5) соединяем переходной линией.

Линия влияния S_{41} показана на рис. 5.23g.

5. Л.В. усилия S_{54} .

Проводим сечение III – III (рис.5.13)

1.Рассмотрим равновесие левой части, когда груз $F = 1$ находится справа от сечения (рис.5.21). Моментная точка – О.

$$\sum M_O = 0; \quad -V_A * 6 + S_{54} * h_1 = 0;$$

$$S_{54} = \frac{6}{8.48} V_A = 0.707 V_A \text{ (правая ветвь л.в.)}$$

Откладываем на правой опоре вверх отрезок, равный 0.707 и соединяем его конец с левой опорой. “Работающая” часть этой линии – от опоры В до узла 1

2. Груз $F = 1$ находится слева от разрезанной панели. Рассмотрим равновесие правой части фермы (рис. 5.22).

$$\sum M_O = 0;$$

$$- S_{54} * 8.48 - V_B * 24 = 0;$$

$$S_{54} = - 2.83 V_B \text{ .(левая ветвь л.в.)}$$

Откладываем на правой опоре вниз отрезок, равный 2.83 и соединяем

его конец с левой опорой. “Работающая” часть этой линии – от опоры А до узла 5.

Ординаты правой ветви (под узлом 1) и левой ветви (под узлом 5) соединяем переходной линией.

Линия влияния S_{54} показана на рис. 5.23g.

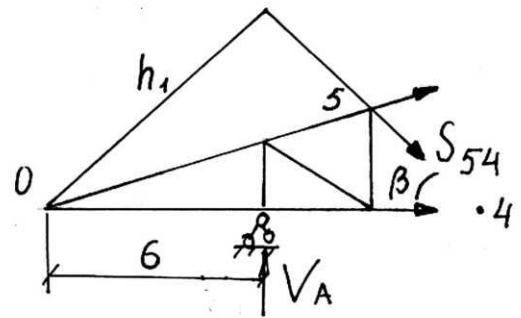


Рис.5.21

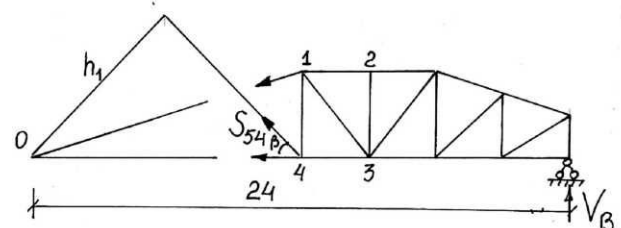


Рис.5.22

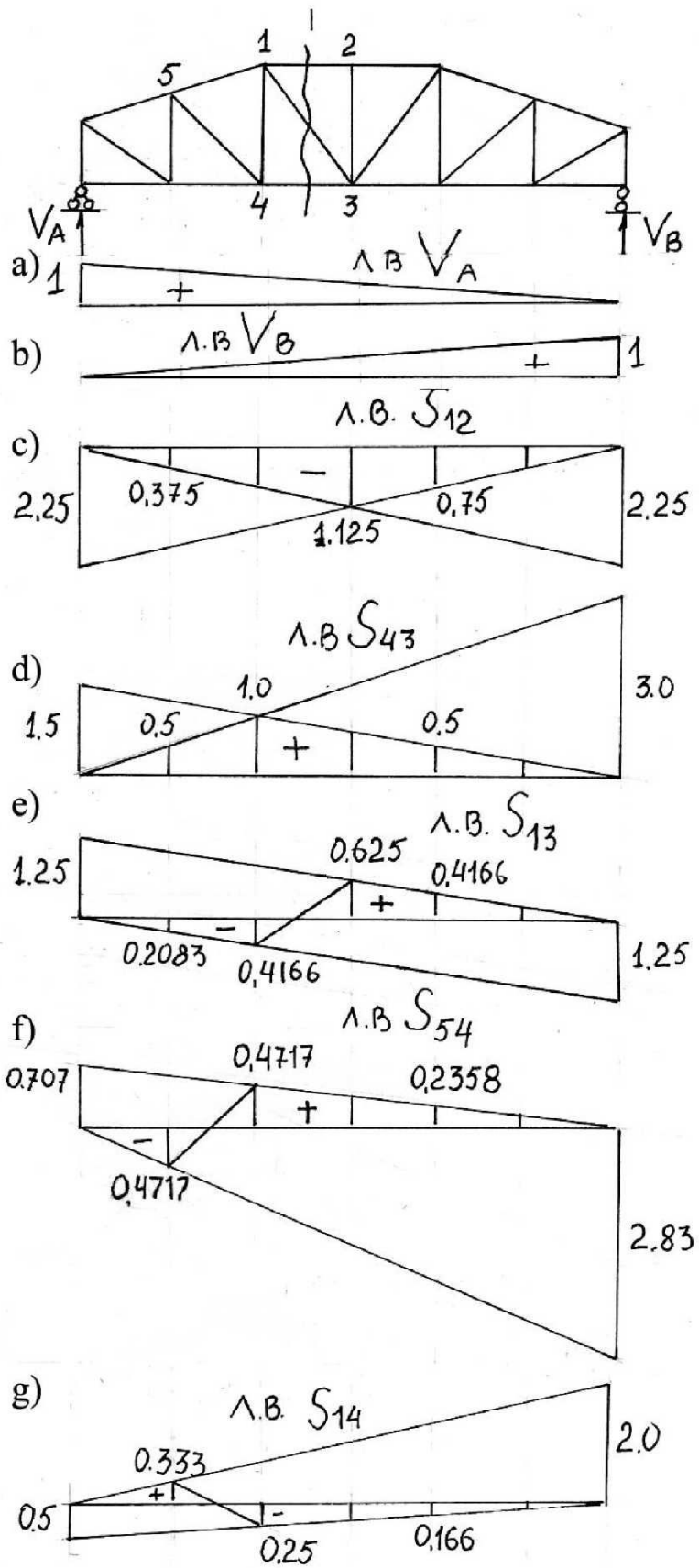


Рис. 5.23

III. Вычислим усилия в заданных стержнях от заданной нагрузки по линиям влияния.

Умножаем заданные силы на ординаты л.в. под ними, учитывая знак соответствующей ординаты (На рис.5.22 все необходимые ординаты показаны и получены из подобия треугольников)

$$S_{12} = 12*(-0.375) + 8*(-0.75) = -10.5 \text{ кН},$$

$$S_{43} = 12*0.5 + 8*0.5 = 10.0 \text{ кН},$$

$$S_{13} = 12*(-0.2083) + 8*0.4166 = 0.833 \text{ кН},$$

$$S_{41} = 12*0.333 + 8*(-0.166) = 2.66 \text{ кН},$$

$$S_{54} = 12*(-0.4717) + 8*0.2358 = -3.77 \text{ кН}$$

Усилия, полученные двумя способами оказались, естественно, одинаковыми.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называют линией влияния усилия в элементе фермы?
2. Что такое узловой способ передачи нагрузки?
3. Каков порядок построения л.в. в балке при узловой передаче нагрузки?
4. Отличаются ли линии влияния опорных реакций балочной фермы от линий влияния опорных реакций в балке?
5. Какие два положения груза $F = 1$ рассматривают при построении линий влияния усилий в элементах фермы?
6. Какое положение занимает переходная прямая в линиях влияния в элементах фермы?
7. Если при построении линии влияния используется моментная точка, то где пересекаются правая и левая ветви л.в.?
8. Какие особенности имеет построение л.в. усилий в элементах шпренгельной фермы?

Глава 6

1. Анализ напряженного состояния балочных ферм с разным очертанием поясов.

Полезно познакомиться с качественной картиной распределения усилий в элементах ферм с различным очертанием верхнего пояса. Для этого сделаем сравнительный анализ напряженного состояния наиболее характерных балочных ферм: с параллельными поясами, полигонального и треугольного очертания (рис.6.1а) У всех ферм приняты одинаковыми пролет и высота. Предполагается, что фермы нагружены одинаково: равномерно в узлах верхнего пояса.

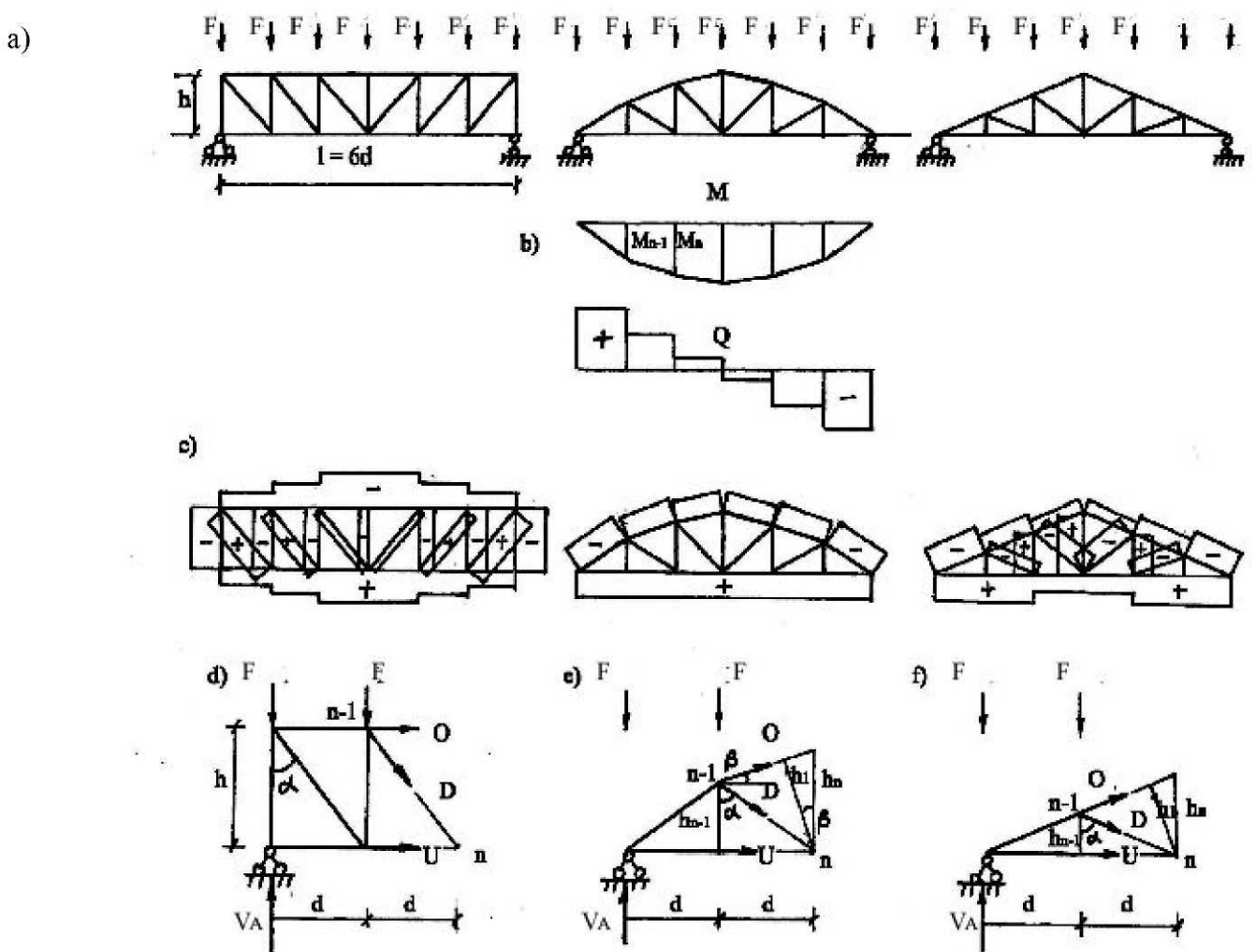


Рис.6.1

На рис. 6.1b показан характер эпюр M и Q для простой балки с пролетом, равным пролету фермы.

Найдем, например, усилия в элементах второй (слева) панели.

Усилие в стержне нижнего пояса U любой из этих ферм нетрудно найти из уравнений равновесия части фермы слева от сечения по второй панели, используя моментную точку $n-1$ (рис. 6.1d,e,f).

$$\sum M_{n-1} = 0; \quad \underline{V_A \cdot d - F \cdot d} - U \cdot h = 0.$$

Подчеркнутое выражение – это балочный изгибающий момент M_{n-1} . Поэтому

$$U = \frac{M_{n-1}}{h_{n-1}} \quad (1.6)$$

Анализируя формулу (1.6), нетрудно установить, что нижний пояс растянут и

1. В ферме с параллельными поясами, в которых h постоянно, усилия в поясах, пропорциональные балочному изгибающему моменту, увеличиваются к середине пролета.
2. В ферме с полигональным верхним поясом длины стоек и ординаты балочной эпюры моментов возрастают к середине пролета одновременно. Поэтому усилия в поясах изменяются мало. Если верхний пояс фермы вписывается в очертание параболы, то усилия во всех стержнях нижнего пояса одинаковы
3. В треугольной ферме усилия в поясах уменьшаются к середине пролета.

Усилие в верхнем поясе O во всех фермах определяется из уравнения

$$\sum M_n = 0; \quad V_A \cdot 2d - F \cdot 2d - F \cdot d + O \cdot h_1 = 0,$$

$$O = - \frac{M_n}{h_1}, \quad (2.6)$$

Повторяя рассуждения, приведенные при анализе усилий в нижнем поясе, можно заключить, что сжатие в верхнем поясе имеет тот же характер, что и в нижнем поясе.

Проведем анализ усилий в элементах решетки.

Усилие в раскосе фермы с параллельными поясами определяется способом проекций.

$$\sum y = 0; \quad V_A - F - F - D \cdot \cos \alpha = 0, \quad D = \frac{Q_n}{\cos \alpha}. \quad (3.6)$$

В формуле (3.6) Q_n - поперечная сила в сечении простой балки от заданной нагрузки под n -ой панелью.

Так как угол α в ферме постоянен, то растягивающие усилия в нисходящих раскосах уменьшаются к середине пролета.

Усилие в стойках во всех рассматриваемых фермах всегда имеет знак, противоположный знаку усилия в раскосе. Действительно, из равновесия любого узла нижнего пояса следует

$$V = -D \cdot \cos \alpha. \quad (4.6)$$

Поэтому в ферме с параллельными поясами сжимающие усилия в стойках уменьшаются к середине пролета.

Для выявления характера изменения усилий в раскосах фермы с параболическим очертанием верхнего пояса, спроектируем все силы, попавшие в сечение, на горизонталь (рис. 6.1e)

$$\sum x = 0; \quad U + O \cos \beta + D \sin \alpha = 0, \quad D \sin \alpha = -U - O \cos \beta. \quad (5.6)$$

Учитывая выражения для усилий в элементах поясов 1.6 и 2.6 и замечая, что $h_1 = h_n \cos \beta$, получаем

$$D \sin \alpha = \frac{M_n}{h_n} - \frac{M_{n-1}}{h_{n-1}}. \quad (6.6)$$

Так как в рассматриваемой схеме фермы длины стоек изменяются пропорционально ординатам балочной эпюры изгибающих моментов M , то усилие в раскосе равно нулю. Следовательно, в фермах с параболическим верхним поясом решетка при такой нагрузке не работает.

В треугольных фермах нисходящие раскосы в отличие от предыдущих ферм сжаты, а стойки растянуты и усилия в них увеличиваются к середине пролета.

Характер изменения усилий в элементах ферм показан на рис. 6.1с.

2. Ферма наименьшего веса.

Оптимальной можно назвать прочную строительную конструкцию, выполняющую заданные в проекте функции, и в то же время легкую в изготовлении (технологичную) и требующую наименьшего расхода материалов. Последнее условие

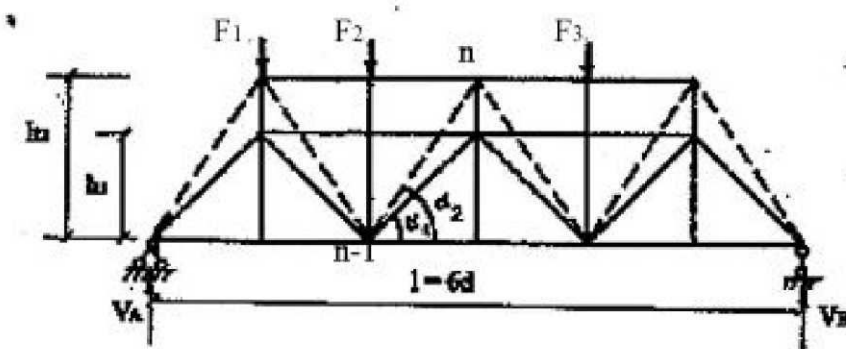


Рис.6.2

особенно важно, так как стоимость материалов часто составляет большую часть расходов на строительство.

Попытаемся, например, установить, какие условия нужно соблюсти, чтобы ферма с параллельными поясами, изображенная на рис. 6.2 имела минимальный вес.

Предположим, что при заданном пролете число панелей не меняется, а варьируется только высота фермы h .

Рассмотрим две фермы: с высотой h_1 и h_2 . Во второй ферме решетка показана пунктиром. Установим некоторые общие зависимости, связывающие усилия в элементах обеих ферм. Усилиям в ферме с высотой h_1 будем придавать индекс 1, в фермах с высотой h_2 - индекс 2.

Усилие в любой панели верхнего или нижнего пояса определяется из уравнения

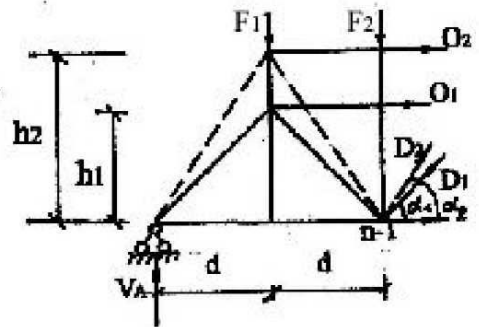


Рис.6.3

равновесия с использованием моментной точки. Например, в третьей панели для нахождения усилия O_1 в первой ферме и O_2 во второй используется одна и та же моментная точка n-1 (рис.6.3).

$$\sum M_{n-1} = 0;$$

$$O_1 = -\frac{M_{n-1}^0}{h_1}, \quad O_2 = -\frac{M_{n-1}^0}{h_2}. \quad (7.6)$$

M_{n-1}^0 - это балочный момент, равный в обоих случаях сумме моментов всех левых сил относительно узла n-1. Поэтому

$$O_1 h_1 = O_2 h_2. \quad (8.6)$$

Подобное соотношение получается аналогичным образом и для усилий в нижнем поясе, если использовать моментную точку n:

$$U_1 h_1 = U_2 h_2 \quad (9.6)$$

Отсюда можно сделать вывод, что в любой панели усилия в поясах $S_{пояса}$ (O или U) связаны зависимостью

$$S_{пояса}^1 h_1 = S_{пояса}^2 h_2 \quad (10.6)$$

Усилие в раскосах получают, проектируя все силы, попавшие в сечение, и нагрузки на вертикаль. Рассмотрим опять третью панель фермы 1.

$$\sum y = 0, \quad [V_A - F_1 - F_2] + D_1 \sin \alpha_1 = 0 \quad (11.6)$$

Выражение в скобках соответствует поперечной силе в балке с пролетом, равным пролету фермы. Обозначив эту поперечную силу Q_k^0 , получаем зависимость

$$Q_k^0 + D_1 \sin \alpha_1 = 0. \quad (12.6)$$

Рассматривая то же сечение в ферме 2, получаем подобное уравнение для нахождения D_2 .

$$Q_k^0 + D_2 \sin \alpha_2 = 0. \quad (13.6)$$

Отсюда следует, что в каждом сечении устанавливается простая зависимость

$$D_1 \sin \alpha_1 = D_2 \sin \alpha_2. \quad (14.6)$$

Усилия в стойках не зависят от высоты фермы: часть стоек не работает (нулевой стержень перечеркнут одной чертой), стойки под силами сжаты, т.е.

$$V_1 = V_2 \quad (15.6)$$

Предположим, что ферма изготовлена из материала, имеющего постоянный объемный вес. Тогда ферма наименьшего веса будет иметь и наименьший объем и задача сводится к нахождению фермы наименьшего объема, выдерживающую заданную нагрузку.

Объем U любого элемента фермы равен

$$U = A \cdot l, \quad (16.6)$$

Где A – площадь сечения стержня, l – длина стержня.

Длины стержней верхнего и нижнего пояса постоянны и равны d . Длина стоек h – величина переменная, которую и будем варьировать при решении задачи. Длина раскосов равна $\sqrt{h^2 + d^2}$.

$$\sin \alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + d^2}}. \quad (17.6)$$

Предположим также, что допускаемое напряжение на растяжение и сжатие постоянно и равно $[\sigma]$. Тогда площадь сечения любого элемента фермы можно определить по формуле

$$A = \frac{S}{[\sigma]}. \quad (18.6)$$

Здесь S усилие в любом элементе фермы, т.е. O , U , V или D .

Подставляя (18.6) в (16.6), получаем формулы для подсчета объемов элементов фермы

$$\begin{aligned}
 U_{\text{стойки}} &= \frac{V}{[\sigma]} h, \\
 U_{\text{поояса}} &= \frac{S_{\text{поояса}}}{[\sigma]} \\
 U_{\text{раскоса}} &= \frac{D}{[\sigma]} \sqrt{h^2 + d^2}.
 \end{aligned}
 \tag{19.6}$$

Учитывая соотношения (10.6, 14.6 и 15.6) , выражения для объемов отдельных стержней можно представить как функции одной переменной – высоты фермы h .

$$\begin{aligned}
 U_{\text{стойки}} &= C_1 h, \text{ где } C_1 = \frac{V}{[\sigma]}, \\
 U_{\text{поояса}} &= \frac{S_{\text{поояса}}}{[\sigma]} d \frac{h}{h} = \frac{S_{\text{поояса}} \cdot h d}{[\sigma] h} = C_2 \frac{1}{h}, \text{ где } C_2 = \frac{S_{\text{поояса}} \cdot h \cdot d}{[\sigma]}, \\
 U_{\text{раскоса}} &= \frac{D}{[\sigma]} \sqrt{h^2 + d^2} \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} = C_3 \frac{h^2 + d^2}{h}, \text{ где } C_3 = \frac{D \cdot \sin \alpha}{[\sigma]}.
 \end{aligned}
 \tag{20.6}$$

Здесь введены обозначения C_1 , C_2 и C_3 для тех компонентов выражений (20.6), которые не зависят от изменения h .

Объем всей фермы получают, суммируя объемы всех ее элементов

$$\begin{aligned}
 U_{\text{фермы}} &= \sum U_{\text{стойки}} + \sum U_{\text{поояса}} + \sum U_{\text{раскоса}} = \\
 &= \sum C_1 \cdot h + \sum C_2 \frac{1}{h} + \sum C_3 \frac{h^2 + d^2}{h}.
 \end{aligned}
 \tag{21.6}$$

Исследуя объем фермы на экстремум, приравняем нулю производную от $U_{\text{фермы}}$ по h .

$$\frac{dU_{\text{фермы}}}{dh} = 0.
 \tag{22.6}$$

В каждом конкретном случае уравнение (21.6) позволяет найти соотношение между h и d , при котором ферма будет иметь наименьший объем, и, следовательно, наименьший вес.

Покажем расчет на примере фермы, изображенной на рис. 6.4

Из условий симметрии:

$$V_A = V_B = \frac{\sum F}{2} = 1,5F.$$

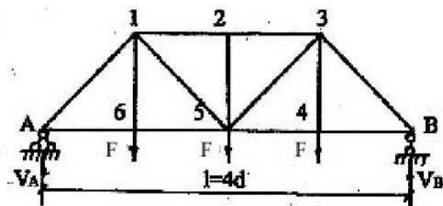


Рис.6.4

В симметричной ферме можно ограничиться нахождением усилий в стержнях лежащих по одну сторону от оси симметрии.

Из равновесия узла А (рис. 6.5) получаем

$$\sum y = 0, \quad D_{A1} \sin \alpha + 1,5F = 0,$$

$$D_{A1} = -\frac{1,5F}{\sin \alpha} = -\frac{1,5F\sqrt{h^2 + d^2}}{h},$$

$$\sum M_1 = 0. \quad 1,5Fd - U_{A6}h = 0,$$

$$U_{A6} = \frac{1,5F}{h}.$$

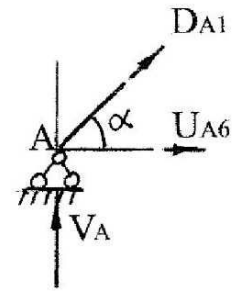


Рис.6.5

Из равновесия левой части фермы относительно сечения второй панели (рис 6.6), получаем

$$\sum M_5 = 0, \quad O_{12}h + 1,5F \cdot 2d - Fd = 0,$$

$$O_{12} = -\frac{2Fd}{h}.$$

$$\sum y = 0, \quad 1,5F - F - D_{15} \sin \alpha = 0,$$

$$D_{15} = \frac{0,5F}{\sin \alpha} = \frac{0,5F\sqrt{h^2 + d^2}}{h}$$

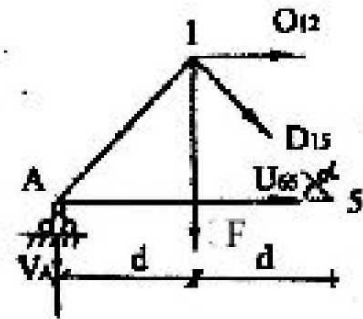


Рис.6.6

Из равновесия узла 6 получаем

$$V_{16} = P, \quad U_{A6} = U_{65}.$$

Результаты расчета удобно свести в таблицу.

Элемент фермы	Длина Стержня l	Усилие	Площадь Сечения $A = \frac{S}{[\sigma]}$	Объем элемента $U_{\sigma} = A \cdot l$
D_{A1}	$\sqrt{h^2 + d^2}$	$-\frac{1,5F\sqrt{h^2 + d^2}}{h}$	$\frac{1,5F\sqrt{h^2 + d^2}}{h[\sigma]}$	$\frac{1,5F(h^2 + d^2)}{h[\sigma]}$
O_{12}	d	$-2Fd/h$	$2Fd/h[\sigma]$	$2Fd^2/h[\sigma]$
D_{15}	$\sqrt{h^2 + d^2}$	$\frac{0,5F\sqrt{h^2 + d^2}}{h}$	$\frac{0,5F\sqrt{h^2 + d^2}}{h[\sigma]}$	$\frac{0,5F(h^2 + d^2)}{h[\sigma]}$
V_{16}	h	F	$F/[\sigma]$	$Fh/[\sigma]$
U_{A6}	d	$1,5Fd/h$	$1,5Fd/h[\sigma]$	$1,5Fd^2/h[\sigma]$

U_{65}	d	$1,5Fd/h$	$1,5Fd/h[\sigma]$	$1,5Fd^2/h[\sigma]$
----------	-----	-----------	-------------------	---------------------

Общий объем фермы равен удвоенной сумме величин, расположенных в последнем столбце таблицы

$$U_{\text{фермы}} = 2 \frac{F}{[\sigma]} \left(\frac{7d^2}{h} + 3h \right) \quad (23.6)$$

Приравнявая производную по h нулю, получаем

$$\frac{d}{dh} U_{\text{фермы}} = 2 \frac{F}{[\sigma]} \left(-\frac{7d^2}{h^2} + 3 \right) = 0.$$

$$h = \sqrt{\frac{7}{3}} d^2 = 1,527d. \quad (24.6)$$

Итак, ферма будет иметь наименьший объем (вес) если тангенс угла наклона раскоса к поясу будет равен 1,527., а угол составит $56^{\circ} 45'$.

Подставляя (24.6) в (22.6) получаем наименьший объем фермы

$$U_{\text{фермы}} = 18,33 \frac{Fd}{[\sigma]}. \quad (25.6)$$

Если $h = d$, то объем фермы получается равным

$$U_{\text{фермы}} = 20 \frac{Fd}{[\sigma]}, \quad (25.6)$$

то есть на 9,1% больше, чем в “оптимальном” варианте.

Замечание:

Наиболее удобно конструировать узлы фермы, если раскосы подходят к поясам под углом около 45° . Поэтому по технологическим соображениям не всегда удастся спроектировать ферму наименьшего веса.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие усилия (растяжение или сжатие) возникают в элементах верхнего пояса балочной фермы при действии вертикальной нагрузки?
2. Какие усилия возникают в стержнях нижнего пояса балочной фермы при действии вертикальной нагрузки?
3. В чем различие напряженных состояний балочных ферм с разным очертанием верхнего пояса при действии вертикальной нагрузки?
4. Какой математический прием применяется для определения фермы наименьшего веса?

Глава 7

1. Определение перемещений в упругих системах и некоторые основные теоремы строительной механики.

1.1 Основные понятия

Перемещением произвольной точки системы называют изменение ее координат, вызванное деформацией элементов этой системы. Различают линейные перемещения (прогибы, перемещения опор и т.п.) и угловые (повороты узлов и отдельных сечений системы).

Уметь определять перемещения важно само по себе: СН и Пы накладывают весьма жесткие ограничения на деформативность возводимых сооружений. Кроме того это умение необходимо для расчета статически неопределимых систем.

Общие методы нахождения перемещений базируются на энергетических представлениях в процессе деформирования (при нагружении).

Назовем любую комбинацию силовых воздействий на систему *обобщенной силой*. Изображенные на рис. 7.1 сосредоточенная сила и распределенная нагрузка, которым придан индекс k , составляют обобщенную силу, которую можно обозначить одной буквой P_k .

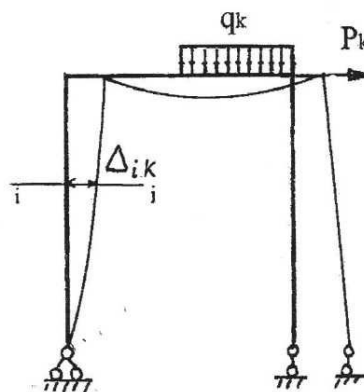


Рис.7.1

Перемещение от заданной обобщенной силы P_k по некоторому направлению i обозначают Δ_{ik} . Если сила (или силы) с индексом k равны единице, то перемещение по направлению i обозначают δ_{ik} .

При рассмотрении малых перемещений (а в классической механике только такие перемещения и рассматриваются) можно применить принцип суперпозиции и считать перемещения линейными функциями внешних сил

$$\Delta_{IP} = P_1\delta_{i1} + P_2\delta_{i2} + \dots + P_n\delta_{in}. \quad (1.7)$$

Выполнение этого условия служит определением линейно деформируемой системы.

Различают *действительные перемещения*, вызванные какими либо силовыми непосредственными воздействиями на систему, и *возможные (виртуальные) перемещения*, которые не зависят от заданных внешних воздействий и

удовлетворяют заданным граничным условиям (условиям закрепления). Возможными являются, например, перемещения системы, нагруженной какой-либо обобщенной силой P_m , вызванные другой обобщенной силой P_n .

В дальнейшем нам придется неоднократно определять работу внешних сил V , действующих на систему, и работу внутренних сил W , возникающих в элементах системы.

Известное представление о работе, как произведении силы на путь (перемещение), обобщается с введением понятий обобщенной силы и обобщенного перемещения. Пусть, например, на балку действует обобщенная сила, образуемая совокупностью трех сил P_K^1 , P_K^2 и P_K^3 (рис.7.2). Каждая из этих сил совершает работу на своем возможном перемещении w_1 , w_2 и w_3 . Тогда суммарная работа

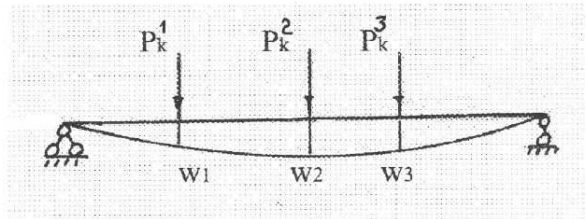


Рис.7.2

будет равна :

$$V = P_K^1 w_1 + P_K^2 w_2 + P_K^3 w_3 = P_K \Phi(w). \quad (2.7)$$

Здесь P_K - обобщенная сила, $\Phi(w)$ - обобщенное перемещение.

Другой пример обобщенной силы и перемещения легко получить, вычисляя работу момента M как работу пары сил на линейных возможных перемещениях от угла поворота θ (рис.7.3) :

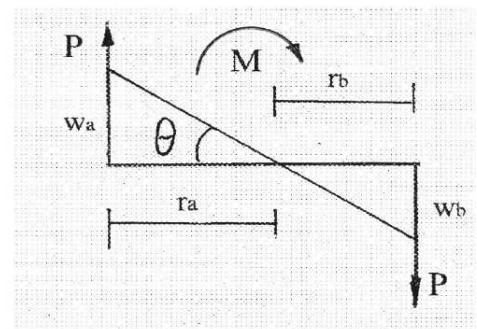


Рис.7.3

$$V = Pw_a + Pw_b = P \cdot r_a \theta + P \cdot r_b \theta = P(r_a + r_b) \theta = M \cdot \theta. \quad (3.7)$$

1.2. Работа внешних и внутренних сил

1. Работа внешних сил.

Следует различать работу сил на возможных перемещениях (виртуальную работу) и на перемещениях, вызываемых самими силами (действительную работу).

1.1. Виртуальная работа внешних сил.

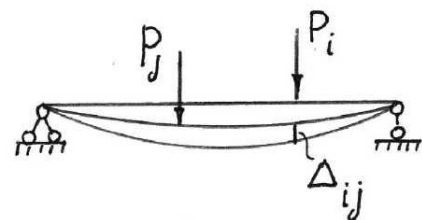


Рис.7.4

Пусть на какую – то систему действует обобщенная сила P_i . Тело деформируется. После этого тело нагружается другой обобщенной силой P_j .

Перемещения, вызванные этой силой, можно принять за возможные для силы P_i .

Сила P_i совершит работу на возможном перемещении, равную произведению силы на проекцию полного перемещения на направление силы (рис.7.4)

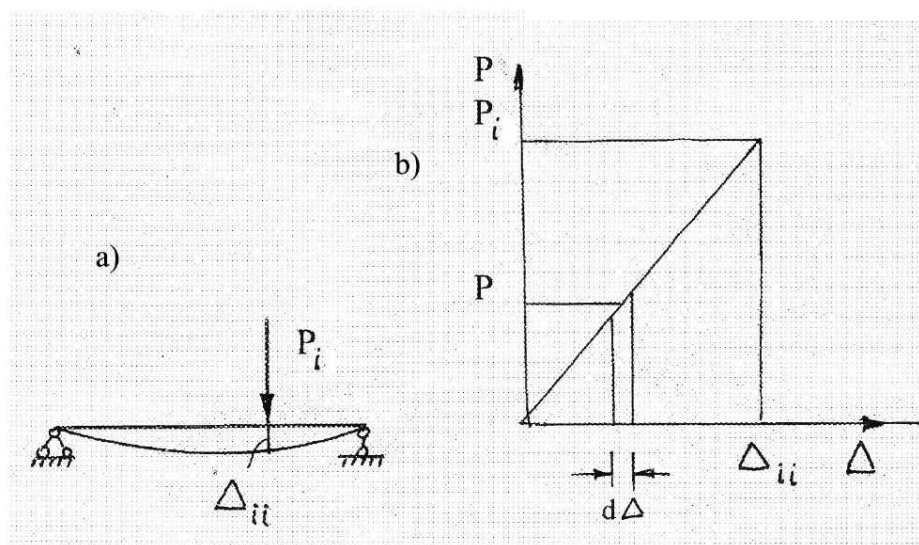
$$V = P_i \cdot \Delta_{ij} \quad (4.7)$$

1.2. Действительная работа внешних сил.

Рассмотрим работу статических внешних сил. Статические силы в процессе нагружения изменяются от нуля до своего расчетного значения плавно и достаточно медленно так, что можно не учитывать возникающие при изменении нагрузки силы инерции.

Рассмотрим действительную работу внешней статической силы P_i , на перемещении

вызываемой этой же силой (рис.7.5 а). На основании закона Гука нагрузка и перемещение связаны линейной зависимостью, изображенной на графике (рис. 7.5б)



$$\Delta_{ii} = kP_i, \quad (5.7)$$

Рис.7.5

где k – коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств материала, размеров и формы поперечного сечения

Элементарная работа силы на “своем” перемещении равна

$$dV^{действ.} = P d\Delta = P \cdot kdP \quad (6.7)$$

Полная работа статически приложенной силы, следовательно, будет равна

$$V^{действ.} = \int_0^{P_i} P d\Delta = k \int_0^{P_i} P dP = \frac{kP_i^2}{2} = \frac{P_i \Delta_{ii}}{2} \quad (7.7)$$

Таким образом, работа статически приложенной силы P_i равна половине произведения этой силы на перемещение, вызванное этой же силой.

2. Работа внутренних сил.

2.1. Виртуальная работа внутренних сил.

В общем случае в каждом сечении стержневой системы под действием внешней нагрузки возникают деформации и связанные с ними внутренние силовые факторы: продольные силы N , изгибающие моменты M и поперечные силы Q .

Рассмотрим последовательно возможную работу каждой из этих внутренних сил состояния i на перемещениях, вызванных системой сил, которым придадим индекс k .

Пусть стержень растянут (или сжат) центрально приложенной силой N_i . Если мысленно выделить бесконечно малый элемент длиной ds , то на плоскостях разрезов будут действовать нормальные напряжения и статически им эквивалентные нормальные силы N_i . Для элемента эти силы будут внешними. Они уравниваются равными им, но направленными в противоположную сторону внутренними силами (рис.7.6). Предположим, что на стержень начала действовать новая сила N_k и элемент ds получает

удлинение $\Delta_k ds$. Элементарная работа внутренних сил N_i на перемещениях, вызванных силами N_k , равна

$$dW = -N_i \Delta_k ds. \quad (8.7)$$

Знак минус взят потому, что при удлинении $\Delta_k ds$ внутренние силы N_i переместятся

в сторону, противоположную своему действию, и совершат отрицательную работу. Работа внутренних сил N_i на всей длине стержня будет равна

$$W = -\int_0^l N_i \Delta_k ds. \quad (9.7)$$

Так как удлинение $\Delta_k ds$ определяется по известной из курса сопротивления материалов формуле

$$\Delta_k ds = \frac{N_k ds}{EA}, \quad (10.7)$$

то

$$W = -\int_0^l \frac{N_i N_k}{EA} ds. \quad (11.7)$$

Здесь E – модуль упругости, A – площадь сечения стержня.

Рассматривая в такой же последовательности работу внутренних изгибающих моментов M_i на поворотах, вызванных моментами M_k (рис.7.7),

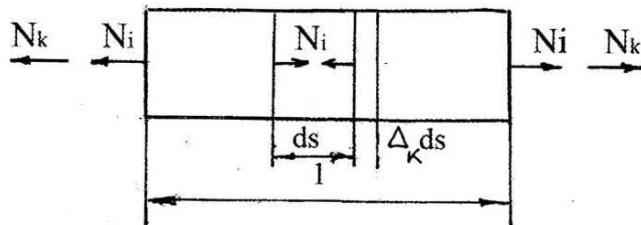


Рис.7.6

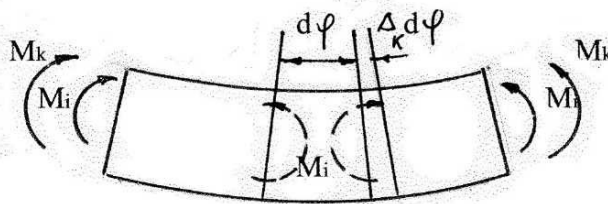


Рис.7.7

можно записать

$$dW = -M_i \Delta_k d\varphi. \quad (12.7)$$

С учетом известного соотношения

$$\Delta_k d\varphi = \frac{M_k ds}{EI}, \quad (13.7)$$

получаем $W = -\int_0^l \frac{M_i M_k}{EI} ds$ (14.7)

Здесь I - момент инерции поперечного сечения стержня

Внутренние поперечные силы Q_i совершают виртуальную работу на сдвигах, вызванных силами Q_k (рис. 7.8).

Элементарная виртуальная работа внутренних поперечных сил Q_i определяется по формуле

$$dW = -Q_i \Delta_k d\gamma. \quad (15.7)$$

С учетом известного для чистого сдвига бруса соотношения

$$\Delta_k d\gamma = K \frac{Q_k}{GA} ds, \quad (16.7)$$

можно записать $W = -K \int_0^l \frac{Q_i Q_k}{GA} ds$ (17.7)

Здесь G - модуль сдвига, K - коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения

(например, для круглого сечения коэффициент равен $32/27$, для прямоугольного сечения $6/5$).

Работа всех внутренних сил на возможных перемещениях системы, состоящей из n стержней равна

$$W = -\sum_n \left[\int_0^l \frac{N_i N_k}{EA} ds + \int_0^l \frac{M_i M_k}{EI} ds + K \int_0^l \frac{Q_i Q_k}{GA} ds \right] \quad (18.7)$$

2.2. Действительная работа внутренних сил

Если внешние силы P_i , вызывающие в каждом сечении внутренние усилия N_i , M_i и Q_i , действуют статически, то и внутренние усилия возрастают от нуля до номинального значения и, поэтому, выражение для действительной работы внутренних сил на "своих" перемещениях должны иметь двойку в знаменателе:

$$W^{действ.} = -\sum_n \left[\int_0^l \frac{N_i^2}{2EA} ds + \int_0^l \frac{M_i^2}{2EI} ds + K \int_0^l \frac{Q_i^2}{GA} ds \right]. \quad (19.7)$$

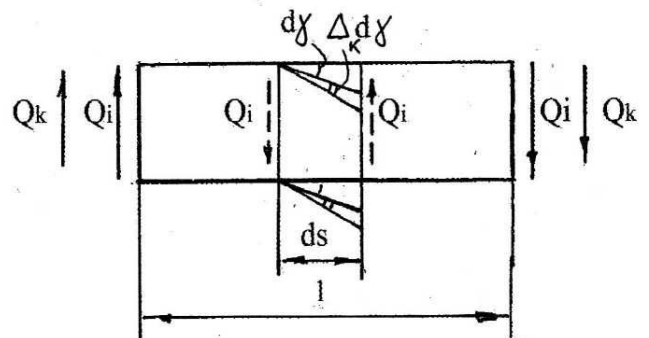


Рис. 7.8

13. Некоторые основные теоремы о работе внешних и внутренних сил.

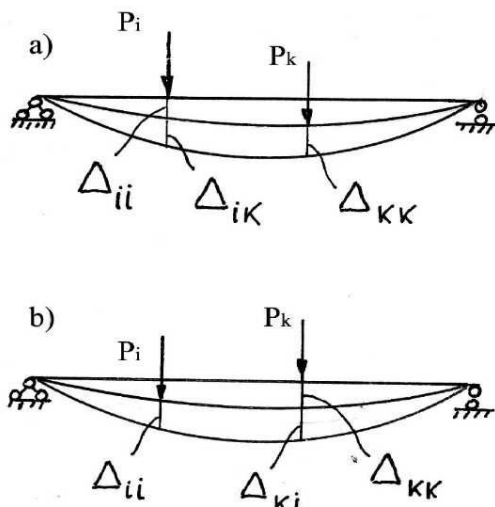
сил.

3.1. Теорема о взаимности работ

Виртуальная (возможная) работа внешних сил обладает свойством взаимности.

Рассмотрим балку, на которую в определенной последовательности действуют две обобщенные силы P_i и P_k .

Пусть сначала к балке приложена сила P_i , а затем к деформированной балке – сила P_k (Рис.7.9а). Первая сила совершит работу на действительном перемещении Δ_{ii} , а затем на возможных перемещениях Δ_{ik} , вызванном силой P_k . Сила P_k совершит работу на “своем”



перемещении Δ_{kk} . Полная работа обеих сил равна

Рис.7.9

$$\frac{P_i \Delta_{ii}}{2} + P_i \Delta_{ik} + \frac{P_k \Delta_{kk}}{2} \quad (20.7)$$

Изменим порядок приложения сил (Рис. 7.9b). Сначала к балке прикладывается сила P_k , а затем к деформированной балке – сила P_i . Тогда сила P_k совершит работу на “своем” перемещении Δ_{kk} и виртуальном Δ_{ki} , вызванном силой P_i . Сила же P_i совершит действительную работу на перемещении Δ_{ii} . Полная работа будет равна

$$\frac{P_k \Delta_{kk}}{2} + P_k \Delta_{ki} + \frac{P_i \Delta_{ii}}{2} \quad (21.7)$$

В обоих случаях нагружения исходное и конечное состояние балки одинаковы. Поэтому и полные работы, произведенные силами P_i и P_k , будут одинаковы. Приравнявая работы и сокращая подобные члены, получаем

$$P_i \Delta_{ik} = P_k \Delta_{ki} \quad (22.7)$$

Отсюда следует, что

В линейно деформируемой системе работа сил i -ого состояния на перемещениях, вызванных силами k -ого состояния, равна работе сил k -ого состояния на перемещениях, вызванных силами i -ого состояния.

Можно показать, что свойством взаимности обладает и работа внутренних сил.

3.2. Теорема о взаимности перемещений.

Перемещения обладают свойством взаимности.

Предположим, что в зависимости (22.7) обобщенная сила P_i равна обобщенной силе P_k . Тогда

$$\Delta_{ik} = \Delta_{ki} \quad (23.7)$$

Теорему о взаимности перемещений можно сформулировать и так:

Если обобщенные силы P_i и P_k численно равны, то перемещение точки приложения силы P_i в k -ом состоянии численно равно обобщенному перемещению точки приложения силы P_k в i -том состоянии.

Если $P_i = P_k = 1$, то как следствие из теоремы о взаимности перемещений получаем взаимность единичных перемещений:

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}. \quad (24.7)$$

Буквой δ (дельта) обозначаются перемещения от сил, равных единице.

Это соотношение используется, в частности, при расчете статически неопределимых систем методом сил.

3.3. Потенциальная энергия деформаций.

Потенциальная энергия деформаций U выражает запас работы, накопленной в системе, который она (система) может вернуть после разгрузки, то есть по абсолютной величине она равна действительной работе внутренних сил:

$$U = -W^{outside} = \frac{1}{2} \sum_s \int \frac{N^2}{EA} ds + \int \frac{M^2}{EI} ds + K \int \frac{Q^2}{GA} ds. \quad (25.7)$$

Но в линейно деформируемой системе работа внутренних сил принимается равной работе внешних сил, так как в процессе деформации (нагружения) пренебрегают тепловой, электромагнитной и прочими видами энергии, накапливаемые в деформируемом теле. Поэтому можно записать

$$U = V = \frac{1}{2} (P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2 + \dots + P_i \Delta_i + \dots + P_n \Delta_n) \quad (26.7)$$

Здесь Δ_i - суммарное перемещение точки приложения силы P_i по направлению этой силы. В свою очередь, выражая перемещение Δ_i через единичные перемещения, как это было показано ранее

$$\Delta_i = P_1 \delta_{i1} + P_2 \delta_{i2} + \dots + P_i \delta_{ii} + \dots + P_n \delta_{in}, \quad (27.7)$$

можно представить потенциальную энергию деформаций квадратичным по отношению внешних сил выражением

$$U = \frac{1}{2} (\delta_{11} P_1^2 + \delta_{22} P_2^2 + \dots + \delta_{ii} P_i^2) + (\delta_{12} P_1 P_2 + \delta_{13} P_1 P_3 + \dots + \delta_{n-1} P_{n-1} P_n) \quad (28.7)$$

3.4. Теорема Кастильяно

Частная производная от потенциальной энергии деформаций системы по одной из сил равна перемещению точки приложения этой силы по ее направлению.

Действительно, поскольку

$$\frac{\partial \Delta_i}{\partial P_i} = \delta_{i1} = \delta_{1i}, \quad (29.7)$$

то

$$\frac{\partial U}{\partial P_1} = \frac{1}{2} (\Delta_1 + P_1 \frac{\partial \Delta_1}{\partial P_1} + P_2 \frac{\partial \Delta_2}{\partial P_2} + \dots + P_n \frac{\partial \Delta_n}{\partial P_1}) = \frac{1}{2} (\Delta_1 + P_1 \delta_{11} + P_2 \delta_{12} + \dots + P_n \delta_{1n}) = \Delta_1. \quad (30.7)$$

3.5. Теорема Лагранжа.

Приведем без доказательства теорему Лагранжа:

Частная производная от потенциальной энергии деформаций по любому независимому перемещению равна соответствующей силе

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_i} = P_i. \quad (31.7)$$

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение перемещению точки?
2. Для чего нужно уметь определять перемещения?
3. Что называют обобщенной силой и обобщенным перемещением?
4. Что понимается под возможным (виртуальным) перемещением?
5. Как определяется возможная работа внешних сил?
6. Какая нагрузка называется статической?
7. Как определяется действительная работа внешних сил?
8. Как определяется виртуальная работа изгибающих моментов, поперечных и продольных сил?
9. По какой формуле вычисляется действительная работа внутренних сил?
10. Сформулируйте основные теоремы строительной механики.
11. Как определяется потенциальная энергия деформаций системы?

Глава 8

1. Универсальная формула для определения перемещений.

1.1. Начало возможных перемещений.

Теорема Кастильяно открывает принципиальный путь для определения перемещений. Но удобнее использовать другую возможность.

Для этого вспомним известное из курса теоретической механики *начало возможных перемещений*: если на тело действует уравновешенная система сил, то сумма работ всех этих сил на любых бесконечно малых возможных перемещениях равна нулю.

Начало возможных перемещений применимо как к недеформируемым, так и к деформируемым системам. Применяя начало к деформируемым системам нужно помнить:

- 1) равновесие должно быть обеспечено в каждой точке; поэтому вычисление виртуальных работ нужно проводить не для всего тела в целом, а в каждой точке;
- 2) в деформируемом теле работают не только внешние, внутренние силы;
- 3) возможны только те перемещения, которые допускаются как внешними, так и внутренними силами.

Итак, на основе начала возможных перемещений можно записать

$$V + W = 0 \quad ((1.8))$$

1.2. Формула Мора

Не уменьшая общности постановки задачи, найдем прогиб в раме в точке 1 по направлению $i - i$ от заданной обобщенной нагрузки P (рис. 8.1а).

Рассмотрим два состояния этой стержневой системы.

Первое состояние – это действительное состояние системы, которая под заданной нагрузкой деформируется и в ней возникают внутренние усилия. Будем придавать

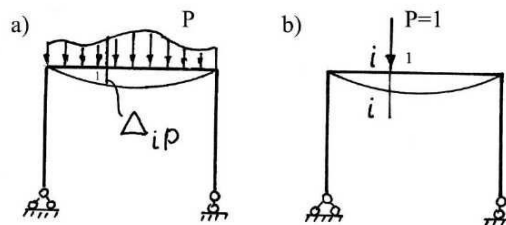


Рис. 8.1

этим усилиям индекс p : M_p , Q_p и N_p . Искомому перемещению придадим два индекса Δ_{ip} : первый индекс i означает направление перемещения, второй индекс p – причину, вызывающую это перемещение.

Второе состояние системы, которое назовем вспомогательным, возникает от действия силы $P = 1$, приложенной в точке 1 по направлению $i - i$. В этом состоянии в раме возникают внутренние усилия, которым придадим индекс i : M_i , Q_i и N_i .

Рассматривая первое состояние как возможное для второго состояния, на основе начала возможных перемещений можно записать

$$1 \cdot \Delta_{ip} - \sum_n \left[\int_0^l \frac{N_p N_i}{EA} ds + \int_0^l \frac{M_p M_i}{EI} ds + K \int_0^l \frac{Q_{pi} Q_i}{GA} ds \right] = 0 \quad (2.8)$$

Отсюда следует формула для определения искомого перемещения

$$\Delta_{ip} = \sum_n \left[\int_0^l \frac{N_p N_i}{EA} ds + \int_0^l \frac{M_p M_i}{EI} ds + K \int_0^l \frac{Q_p Q_i}{GA} ds \right] \quad (3.8)$$

Формула (3.8) носит название *формулы Мора* и служит основным инструментом для определения перемещений в стержневых системах.

Эта формула прекрасно “работает” и в случае, когда необходимо найти не линейное, а угловое перемещение какого либо сечения или узла расчетной схемы. В этом случае по направлению искомого угла поворота прикладывают не силу $P = 1$, а единичный изгибающий момент $M = 1$.

В практических расчетах формула (3.8) в полном объеме обычно никогда не используется.

При расчете шарнирно стержневых систем, нагруженных в узлах, (в фермах, например,) возникают лишь одни продольные усилия, а моменты и поперечные силы отсутствуют. Поэтому перемещения в таких системах вычисляются по формуле

$$\Delta_{ip} = \sum_n \int_0^l \frac{N_p N_i}{EA} ds \quad (4.8)$$

Так как продольные усилия в таких системах постоянны по длине стержней, а жесткость на растяжение-сжатие EA , как правило, тоже постоянна, то формула получает такой простой вид

$$\Delta_{ip} = \sum_n \frac{N_p N_i l}{EA} \quad (5.8)$$

В схемах, работающих в основном на поперечную нагрузку, перемещения связаны, главным образом, с изгибанием стержней. Поэтому для них с большой степенью точности можно пренебречь влиянием продольных и поперечных сил на перемещения.

Тогда для определения перемещений в формуле (3.8) можно ограничиться только вторым членом

$$\Delta_{ip} = \sum_n \int_0^l \frac{M_p M_i}{EI} ds \quad (6.8)$$

Эта формула, которую в строительной механике называют интегралом Мора, и служит для определения перемещений возникающих под нагрузкой в различных стержневых системах (балках рамах).

Покажем, например, как воспользоваться интегралом Мора в известной задаче об определении перемещения конца равномерно нагруженной консоли

$$\Delta_{1p} = \int_0^l \frac{M_p M_1}{EI} dx = \int_0^l \frac{qx^3}{2EI} dx = \frac{ql^4}{8EI} \quad (7.8)$$

Получен хорошо известный из сопротивления материалов результат.

Техника определения перемещений.

2.1. Способ Верещагина

Вычисление перемещения по формуле (6.8) существенно затрудняется, когда система состоит из нескольких по-разному ориентированных в заданной системе координат стержней. Это связано с затруднениями в аналитической записи моментов на разных участках схемы..

Вычисление интеграла Мора значительно упрощается, если применить способ “перемножения эпюр”, предложенный студентом Верещагиным в 1925 году.

Пусть на каком-то участке системы a, b заданы две эпюры: M_p и M_1 (рис.8.3). Предположим также, что жесткость на изгиб стержня на этом участке постоянна :

$$EI = \text{const.}$$

Из чертежа видно, что

$$M_1 = x \cdot tg\alpha . \quad (8.8)$$

Интеграл (8.6) после подстановки примет вид

$$\int_a^b \frac{M_p M_1}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_a^b x \cdot tg\alpha \cdot M_p dx = \frac{tg\alpha}{EI} \int_a^b x \cdot M_p dx = \frac{tg\alpha}{EI} \int_a^b x \cdot d\omega \quad (9.8)$$

Здесь $d\omega = M_p dx$ - дифференциал площади эпюры M_p , а произведение $x \cdot d\omega$ - статический момент этой элементарной площади относительно оси $0 - 0$. Сам же интеграл $\int_a^b x \cdot d\omega$ - это статический момент всей площади эпюры M_p относительно оси $0 - 0$, равный, как известно, всей площади эпюры M_p на участке a, b , умноженной на расстояние x_c от оси $0 - 0$ до центра тяжести фигуры (точка ц.т.) Следовательно,

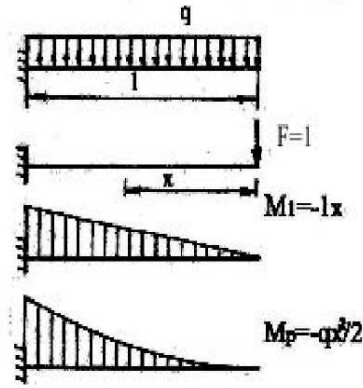


Рис.8.2

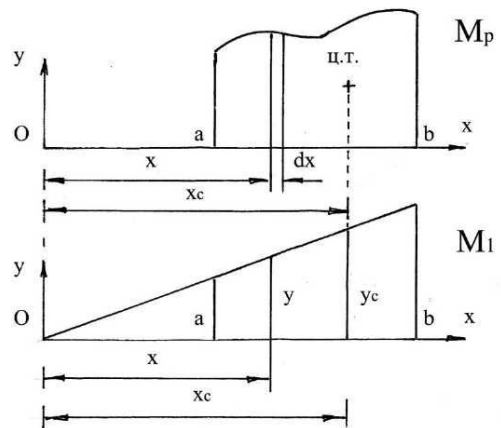


Рис.8.3

результат интегрирования по формуле (9.8) можно представить в виде (10.8). В окончательной формуле использовано следующее из чертежа равенство $x_c \operatorname{tg} \alpha = y_c$.

$$\int_a^b \frac{M_p M_1}{EI} dx = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{EI} \int_a^b x \cdot d\omega = \frac{\omega \cdot x_c \operatorname{tg} \alpha}{EI} = \frac{\omega \cdot y_c}{EI}. \quad (10.8)$$

Итак, результат перемножения эпюр на участке $a - b$ равен произведению площади криволинейной эпюры на ординату прямолинейной эпюры, взятую под центром тяжести площади криволинейной эпюры.

Так как строители строят эпюры моментов “со стороны растянутых волокон”, то указанное правило трансформируется в более простое: если площадь одной “перемножаемой” эпюры и ордината по ее центру тяжести другой эпюры лежат по одну сторону от стержня, то результат “перемножения” – с плюсом, если по разные стороны – с минусом.

Еще раз подчеркнем: если на каком-либо участке одна из эпюр криволинейна (а это может быть только на участке системы, на котором действует распределенная нагрузка), то обязательно нужно брать площадь этого участка. Это следует из вывода правила Верещагина. Если на участке обе эпюры прямолинейны, то площадь можно брать на любой из них.

Применяя способ Верещагина, нужно уметь определять площади сложных фигур и знать положение их центра тяжести. Самую сложную эпюру моментов от обычно встречающихся нагрузок (сосредоточенных сил и моментов, равномерно распределенной нагрузки) всегда можно представить в виде комбинации простых фигур: прямоугольника, треугольника и квадратной параболы (см. таблицу 1).

Таблица 1

$\omega = a \cdot l$	$\omega = \frac{2}{3} f \cdot l$	$\omega = \frac{a \cdot l}{2}$

На рис.8.4, например, показано, как представить эпюру в виде трех простейших составляющих. Результат умножения эпюры M_p на эпюру M_1 (рис.8.4е) получается как сумма произведений площадей каждой из составляющих на ординаты под их центрами тяжести из эпюры M_1 .

$$\int_0^l \frac{M_p M_1}{EI} dx = \frac{1}{EI} \{ \omega_1 y_1 + \omega_2 (-y_2) + \omega_3 (-y_3) \} =$$

$$= \frac{1}{EI} \left[\frac{M_p^H \cdot l}{2} \left(\frac{2}{3} M_1^H + \frac{1}{3} M_1^K \right) - \frac{2}{3} f \cdot l \frac{M_1^H + M_1^K}{2} - \frac{M_p^K l}{2} \left(\frac{1}{3} M_1^H + \frac{2}{3} M_1^K \right) \right] \quad (11.8)$$

$\omega_1 \quad y_1 \quad \omega_2 \quad y_2 \quad \omega_3 \quad y_3$

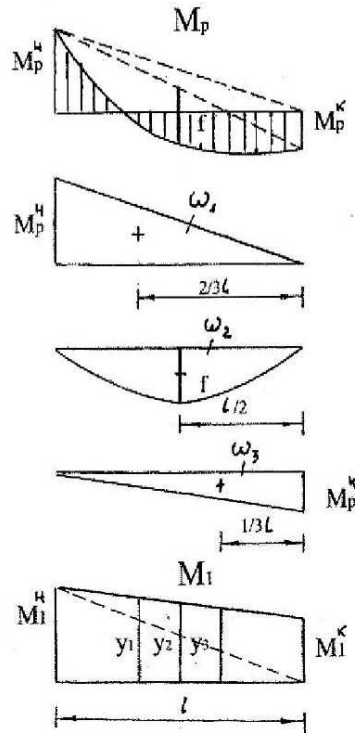


Рис.8.4

Перемножение эпюр на таких относительно сложных участках удобнее проводить, применяя формулу Симпсона для приближенного численного интегрирования, дающую точный результат, когда обе эпюры прямолинейны и если одна из эпюр очерчена по квадратной параболе (рис.8.5а).

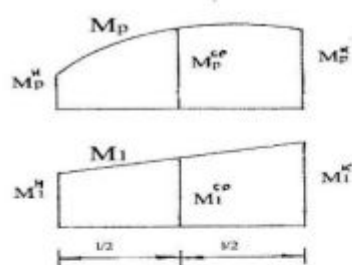
$$\Delta_{Pi} = \int_0^l \frac{M_p M_1}{EI} dx = \frac{l}{6EI} (M_p^H M_1^H + 4M_p^{CP} M_1^{CP} + M_p^K M_1^K) \quad (12.8)$$

Если на рассматриваемом участке обе эпюры прямолинейны (умножается трапеция на трапецию, рис.8.5b), то, разбивая трапеции на простейшие фигуры и применяя способ Верещагина, можно получить удобную формулу

$$\Delta_{Pi} = \frac{l}{6EI} (2M_p^H M_i^H + 2M_p^K M_i^K + M_p^H M_i^K + M_p^K M_i^H) \quad (13.8)$$

Применяя формулы (12.8) и (13.8), следует помнить, что если ординаты перемножаемых эпюр лежат по разные стороны от оси стержня, то результат их перемножения нужно брать с минусом.

a)



b)

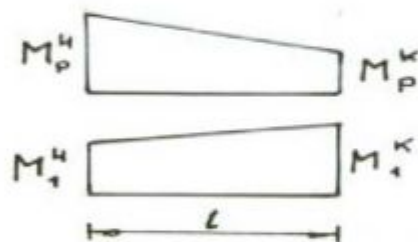


Рис.8.5

2.2 Порядок вычисления перемещений без применения ЭВМ.

1. Строят эпюру M_p – эпюру изгибающих моментов от заданной нагрузки.
2. Строят эпюру M_i .

Если ищут линейное перемещение, то эпюру M_i строят от единичной силы $P=1$, приложенной вдоль линии искомого перемещения. Направление выбирается произвольно. Если результат получается со знаком минус, то это означает, что перемещение имеет направление, обратное выбранному.

Если ищут угол поворота сечения или узла, то эпюру M_i строят от единичного сосредоточенного момента, приложенного в этом сечении или в узле. Направление момента также выбирается произвольно.

3. Вычисляют перемещение по способу Верещагина.

Сравнивая эпюру M_p и эпюру M_i , разбивают раму на участки так, чтобы на каждом участке обе эпюры были бы прямолинейны или одна из эпюр – прямолинейна, а другая – гладкая кривая.

“Перемножают” эпюры по способу Верещагина или, применяя при необходимости формулы (12.8) и (13.8) на каждом из выбранных участков. Сложив результаты вычислений на всех участках, получают искомое перемещение.

Если результат получается со знаком минус, то это означает, что рассматриваемая точка (или сечение) будет перемещаться в направлении, противоположном принятому в начале расчета.

2.3 Вычисление перемещений при помощи матриц.

Определение перемещений в статически определимых системах – трудоемкая задача, связанная с утомительными алгебраическими выкладками. Применение ЭВМ существенно облегчает и ускоряет получение результата. Формулу Симпсона (12.8) легко представить в матричном виде, что особенно удобно при использовании стандартных программ.

Элементарные сведения о матрицах приведены в Приложении.

Используя правила перемножения матриц (стр. 3 – 4 Приложения), формулу (12.8) можно получить, проделав следующие действия над тремя матрицами

$$\int_0^l \frac{M_P M_1}{EI} dx = \begin{vmatrix} M_1^H & M_1^{CP} & M_1^K \end{vmatrix} \times \frac{l}{6EI} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} M_P^H \\ M_P^{CP} \\ M_P^K \end{vmatrix} \quad (16.8)$$

В компактном виде выражение (16.8) может быть записано так

$$\int_0^l \frac{M_P M_1}{EI} dx = MI^T \times |L \times M_P| \quad (17.8)$$

$$|MI|^T = \begin{vmatrix} M_1^H & M_1^{CP} & M_1^K \end{vmatrix} \quad (18.8)$$

= матрица-строка из ординат эпюры изгибающих моментов от единичного воздействия в начале, середине и конце участка соответственно,

$$|L| = \frac{l}{6EI} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (19.8)$$

- матрица податливости рассматриваемого элемента,

$$\|MP\| = \begin{vmatrix} M_P^a \\ M_P^{CP} \\ M_P^b \end{vmatrix} \quad (20.8)$$

- матрица-столбец (вектор) из ординат изгибающих моментов от внешней нагрузки в начале, середине и конце участка соответственно.

Если на участке рамы обе эпюры M_P и M_1 прямолинейны, то матрицы $\|MI\|^T$, $\|MP\|$ и $|L|$ имеют более простой вид

$$|MI|^T = \begin{vmatrix} M_1^H & M_1^K \end{vmatrix} \quad (21.8)$$

$$\|MP\| = \begin{vmatrix} M_P^H \\ M_P^K \end{vmatrix} \quad (22.8)$$

$$|L| = \frac{l}{6EI} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad (23.8)$$

Выражение (17.8) позволяет найти часть перемещения Δ_{ip} , как результат “перемножения” эпюр на участке рамы, где эпюра M_P –гладкая кривая, а эпюра M_1 прямолинейна (как на рис.8.5а).

Если обе эпюры прямолинейны, то в формуле 17.8 матрицы имеют вид (20.8), (21.8) и (22.8).

Если ищут перемещение в системе, в которой можно указать n таких участков (или стержней), то оно определяется как сумма

$$\Delta_{ip} = \sum_{i=1}^n \|MI\|^T \times |L_i| \times \|MP\| = \|MI\|^T \times \|L\| \times MP \quad (24.8)$$

где $\|MI\|^T = \|M_i^1, M_i^2 \dots M_i^n\|$ (25.8)

- матрица-строка из ординат эпюры M_i на всех участках рамы,

$$\|MP\| = \begin{pmatrix} M_p^1 \\ M_p^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ M_p^n \end{pmatrix} \quad (26.8)$$

- матрица –столбец из ординат эпюры M_p на всех участках рамы,

$\|L\|$ – квазидиагональная матрица податливости всей системы, имеющая вид

$$\|L\| = \begin{pmatrix} L_1 & & & & \\ & L_{II} & & & \\ & & L_{III} & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & L_n \end{pmatrix} \quad (27.8)$$

Порядок этой матрицы зависит от числа элементов (участков), на которые разбивается рама.

Если в заданной раме от заданной нагрузки определяется несколько перемещений (например, $i=1,2$), то матрица $\|MI\|^T$ (25.8) будет иметь столько строк, сколько определяется перемещений

$$\|MI\|^T = \begin{pmatrix} M_1^1 & M_1^2 & \cdot & \cdot & M_1^n \\ M_2^1 & M_2^2 & \cdot & \cdot & M_2^n \end{pmatrix} \quad (28.8)$$

Поскольку элементы рамы связаны между собой, то можно понизить порядок матрицы податливости $\|L\|$.

Если на границе участков k и $k+1$ непрерывны как единичные, так и грузовая эпюры (значение ординаты эпюры моментов в конце одного участка равно ординате эпюры моментов в начале примыкающего участка, что может иметь место при стыковке только двух стержней) то нижняя строка матрицы $\|L_k\|$ совмещается с верхней строкой матрицы $\|L_{k+1}\|$, а правый столбец матрицы $\|L_k\|$ совмещается с

левым столбцом матрицы $\|L_{k-1}\|$. Такой сдвиг матриц условно показан на схеме (28.8)

$$\|L\| = \left\| \begin{array}{c} \boxed{I_k} \\ \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ I_{k-1} \end{array} \end{array} \right\| \quad (29.8)$$

2.4 Порядок вычисления перемещений на ЭВМ.

1. Строят эпюру M_p от заданной нагрузки.
2. Строят эпюры M_i от силы $P=1$, приложенной по направлению искомого перемещения, или от единичного момента $m=1$, если ищут угол поворота сечения. Отдельно строят столько эпюр M_i , сколько нужно найти перемещений.
3. Сравнивая эпюру M_p и все эпюры M_i , разбивают раму на участки так, чтобы на каждом участке эпюры были гладкими кривыми или прямолинейными (без переломов и скачков). Нумеруют концы выделенных участков, определяют точки ввода данных.

На этом этапе устанавливают знаки для моментов. Все эпюры построены на растянутых волокнах. Знаки устанавливаются произвольно для того, чтобы дать команду машине с какой стороны стержня (слева или справа, сверху или снизу) расположена эпюра в расчетной точке.

4. Составляют матрицы $\|M_i\|$ и $\|M_p\|$, придавая значениям моментов в точках ввода те знаки, которые заданы при выполнении п.3.
5. Составляют матрицы податливости для всех выделенных участков, используя выражения (19.8) и (23.8).
6. Формируют матрицу податливости для всей рамы, помня о правиле (29.8).
7. Вводят матрицы $\|M_i\|$, $\|M_p\|$ и $\|L\|$ в ЭВМ, руководствуясь указаниями на дисплее.
8. Проверяют и корректируют (если необходимо) введенные данные, руководствуясь указаниями на дисплее.
9. Нажимают клавишу ENTER, получают на дисплее искомые перемещения.

Примечание: Программа составлена для учебных задач, в которых число расчетных точек не превышает 11.

Пример решения задачи № 4 контрольного задания

Задана рама с нагрузкой (рис.8.6)

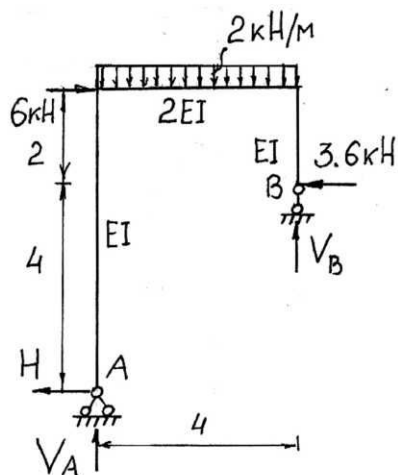


Рис.8.6

Требуется :Определить горизонтальные перемещения опоры В и левого верхнего узла рамы.

Следуя указанному на стр.88 алгоритму, проведем расчеты.

1. Построение эпюры M_P от заданной нагрузки (грузовая эпюра)

Вычисляют опорные реакции.

$$\sum M_A = 0, \quad 6 \cdot 6 + 2 \cdot 4 \cdot 2 - 3,6 \cdot 4 - V_B \cdot 4 = 0, \quad V_B = 9,4 \text{ кН},$$

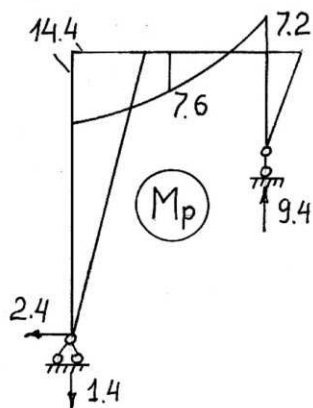
$$\sum y = 0 \quad V_A - 2 \cdot 4 + 9,4 = 0, \quad V_A = - 1,4 \text{ кН},$$

Знак минус означает, что реакция направлена не вверх, а вниз.. При построении эпюры это следует учитывать (см.рис.8.7)

$$\sum x = 0, \quad - H + 6 - 3,6 = 0, \quad H = 2,4 \text{ кН}$$

$$M^{\text{серед.пролета}} = 2,4 \cdot 6 - 1,4 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 = - 7,6 \text{ кНм}$$

Эпюра M_P показана на рис.8.7.

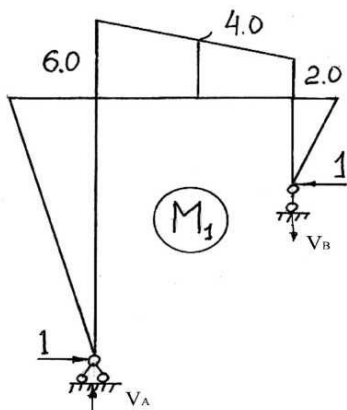


2.Построение эпюр изгибающих моментов от единичных сил, приложенных по направлениям искомым перемещений.

Для того, чтобы найти перемещение опоры В, приложим в этом месте единичную горизонтальную силу, так как только такое перемещение возможно. Направление этой силы выбирается произвольно

Определив опорные реакции, построим эпюру M_1 (Рис.8.8)

Рис. 8.7



$$\sum M_A = 0, -1 \cdot 4 + V_B \cdot 4 = 0, V_B = 1,0 \text{ kH}$$

$$\sum x = 0, 1 - H = 0, H = 1; \quad \sum y = 0, V_A - 1 = 0, V_A = 1,0 \text{ kH}$$

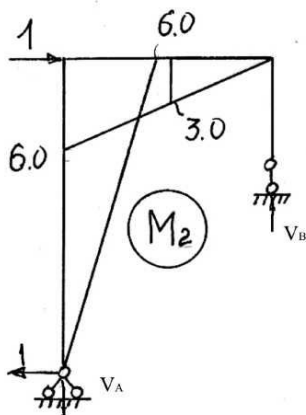
Для нахождения горизонтального перемещения верхнего узла приложим горизонтальную силу, равную единице (рис.8.9).

Опорные реакции в этом случае также определяют из уравнений равновесия

Рис.8.8.
$$\sum M_A = 0; \quad 1 \cdot 6 - V_B \cdot 4 = 0 \quad V_B = 1,5$$

$$\sum x = 0: -V_A + 1,5 = 0 \quad V_A = 1,5, \quad \sum y = 0; \quad -H + 1 = 0 \quad H = 1.$$

Эпюра M_2 показана на рис. 8.9



3. Вычисление перемещений.

Сравнивая эпюры M_p , M_1 и M_2 , выделяем участки, на которых эпюры прямолинейны или представляют собой гладкие кривые. Таких участков три (рис.8.10). Обозначим концы участков цифрами

На участке, на котором действует распределенная нагрузка вводят точку и по середине этого участка (точка 3). Значения момента в этой точке нужно при применении формулы Симпсона. Перемножение эпюр на участках I и III выполняют по способу Верещагина,

Рис. 8.9 На рис. 8.10 целесообразно проставить и знаки эпюры изгибающих моментов в соответствии с принятыми правилами: сумма моментов всех левых сил, действующих по часовой стрелке принято считать положительной.

Обозначим площади участков эпюры M_p буквой ω с соответствующим индексом

$$\omega_I = \frac{14,4 \cdot 6}{2} = 43,2, \quad \omega_{III} = \frac{7,2 \cdot 2}{2} = 7,2;$$

Ординаты под центрами тяжести эпюр M_p на участках I и III эпюр M_1 равны

$$y_I = -\frac{2}{3} \cdot 6 = -4, \quad y_{III} = -\frac{2}{3} \cdot 2 = -1,333$$

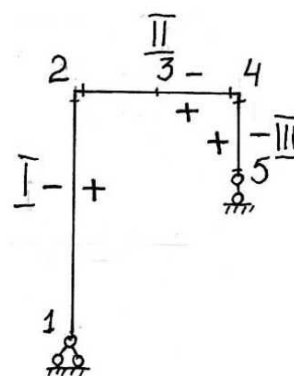


Рис.8.10

Знак минус для y_1 взят потому, что ордината единичной эпюры M_1 расположена с другой, чем на эпюре M_P , стороны стержня.

Ордината y_1 на эпюре M_2 положительна и равна

$$y_1 = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4.$$

Для перемножения эпюр на участке II по формуле Симпсона нужно вычислить значения моментов M_P и M_1 в сечении 3..

Ордината y в этом сечении может быть вычислена так:

$$M_P^{CP} = f + \left[\frac{M_P^H}{2} - \frac{M_P^K}{2} \right], \quad (14.8)$$

(При вычислениях значения M_P^H и M_P^K берут по абсолютной величине)

$$\text{где } f = \frac{ql^2}{8} = \frac{2 \cdot 4^2}{8} = 4, \quad M_P^H = M_P^2 = 14,4 \quad M_P^K = M_P^4 = 7,2.$$

$$\text{Следовательно, } M_P^{CP} = 4 + \frac{14,4 - 7,2}{2} = 7,6$$

M_1^{CP} вычисляется как средняя линия трапеции

$$M_1^{CP} = \frac{6 + 2}{2} = 4,0 \quad M_2^{CP} = -\frac{6}{2} = -3$$

Итак, перемещения вычисляются по формулам

$$\Delta_{1P} = \frac{\omega_I y_I}{EI} + \frac{\omega_{III} y_{III}}{EI} + \frac{l_{2-3-4}}{6 \cdot 2EI} (M_P^1 M_1^1 + 4M_P^{CP} M_1^{CP} + M_P^2 M_1^2), \quad (15.8)$$

$$\Delta_{1P} = \frac{\omega_I y_I}{EI} + \frac{l_{2-3-4}}{6 \cdot 2EI} (M_P^2 M_2^2 + 4M_P^{CP} M_2^{CP} + M_P^4 M_2^4) \quad (16.8)$$

Проведя выкладки, получаем

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EI} \{ 43,2 \cdot (-4) + 7,2 \cdot 1,333 + \frac{4}{6 \cdot 2} [-14,4 \cdot 6 - 4 \cdot 7,6 \cdot 4 + 7,2 \cdot 2] \} = -227,73 / EI$$

$$\Delta_{2P} = \frac{1}{EI} \{ 43,2 \cdot 4 + \frac{4}{6 \cdot 4} (14,4 \cdot 6 + 4 \cdot 7,6 \cdot 3 + 7,2 \cdot 0) \} = 232,0 / EI$$

Знак минус в перемещении Δ_{1P} означает, что перемещение будет направлено в сторону, противоположную приложенной единичной силе, то есть вправо.

Применим матрицы для решения этой же задачи.

Порядок этого расчета приведен на стр.89.

Разбиение эпюр на участки продельвают, как и при обычном расчете. Нумеруют концы участков. Если на всех эпюрах в конце одного участка и начале примыкающего значения моментов одинаковы, то такие сечения обозначаются одной цифрой (рис.8.10). Учитывая, что расчет можно поручить и ЭВМ устанавливают правило знаков. Знак моментов устанавливается произвольно. Учитывая правило

знаков, отмечая значения ординат на эшорах M_p , M_1 и M_2 в точках ввода (рис.8.10), составляют матрицы $\|MI\|$ и $\|MP\|$.

$$MI = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -6 & 6 \\ -4 & 3 \\ -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad MP = \begin{vmatrix} 0 \\ 14,4 \\ 7,6 \\ -7,2 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Составляем матрицы податливости для всех выделенных участков(п.5)

$$L_I = \frac{6}{6EI} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$L_{II} = \frac{4}{6 \cdot 2EI} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{vmatrix} 0,333 & 0 & 0 \\ 0 & 1,333 & 0 \\ 0 & 0 & 0,333 \end{vmatrix}$$

$$L_{III} = \frac{2}{6EI} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{vmatrix} 0,666 & 0,333 \\ 0,333 & 0,666 \end{vmatrix}$$

Формируем матрицу податливости всей рамы (п.6)

$$|L| = \frac{1}{EI} \begin{vmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & & & \\ & & .333 & & \\ & & & 1.333 & \\ & & & & .333 \\ & & & & & .666 & .333 \\ & & & & & .333 & .666 \end{vmatrix}$$

“Стыкуя” участки I и II, II и III, получаем матрицу податливости порядка 5 X 5
Примечание:

При вводе в ЭВМ дробная часть чисел отделяется от целой точкой.

Если целая часть равна нулю, то она не вводится (как это показано в окончательной записи матрицы податливости $\|L\|$).

$$|L| = \frac{1}{EI} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2.333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.333 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & .333 \\ 0 & 0 & 0 & .333 & .666 \end{vmatrix}$$

Перемножение матриц 23.8 сделаем “ на руках” по правилам, приведенным в приложении. Перемножение проведем по частям

$$M1^T \times |L| = \begin{vmatrix} 0 & -6 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 2.333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.333 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & .333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .333 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{EI} \begin{vmatrix} -6 & -14 & -5.333 & -2 & -.666 \\ 6 & 14 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Умножаем полученную матрицу на матрицу-столбец $\|MP\|$.

$$\frac{1}{EI} \begin{vmatrix} -6 & -14 & -5.333 & -2 & -.666 \\ 6 & 14 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ 14,4 \\ 7,6 \\ -7,2 \\ 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{vmatrix} -227,7 \\ 232 \end{vmatrix}$$

Перемножение матриц может быть выполнено на ЭВМ по стандартным программам. На кафедре разработан удобный интерфейс для такой операции.

После ввода матриц в ЭВМ (выполняя пункты 7 – 9 алгоритма) получают значения перемещений, которые высвечиваются на дисплее

$$EI \Delta_{1P} = -227,73 \quad EI \Delta_{2P} = 232,0$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какой принцип можно положить в основу вывода универсальной формулы Мора для определения перемещений?
2. Поясните физический смысл всех компонентов, входящих в формулу Мора.
3. Как записывается формула Мора при вычислении перемещений в изгибаемых системах и почему?
4. Как записывается формула Мора при вычислении перемещений в фермах при действии узловой нагрузки?
5. Какие два состояния системы рассматриваются при вычислении перемещений по универсальной формуле? Какие эпюры необходимо построить?
6. Как перемножать эпюры по способу Верещагина?
7. Можно ли применять способ Верещагина при перемножении двух полигональных эпюр, не разбивая их на простейшие фигуры?
8. Когда удобно применять формулу Симпсона для перемножения эпюр?
9. Какую формулу удобно применять при “умножении” трапеции на трапецию?
10. Каков порядок вычисления перемещений при помощи матриц?
11. Как формируют матрицы ординат единичных и грузовых эпюр моментов?
12. Как формируется матрица податливости системы при вычислении перемещений?

13.Какие действия нужно проделать над матрицей податливости, если в системе имеются сечения, в которых значения моментов на соседних участках одинаковы?

14.Какой вид имеет окончательная запись произведения матриц при вычислении перемещений?

Приложение 1

Элементарные сведения о матрицах

При решении задач строительной механики нередко приходится обращаться к операциям над матрицами

Матрицей A называют систему элементов a_{ij} , расположенных в определенном порядке и образующих таблицу, которая состоит из m строк и n столбцов.

Матрицу A записывают в виде

$$A = \underbrace{\left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right)}_n \left. \vphantom{\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array}} \right\} m$$

Здесь a_{ij} - элемент матрицы, где первый индекс означает номер строки, второй – столбца.

Заметим, что матрицу не следует путать с определителем. Матрица – это все лишь таблица.

В зависимости от количества строк и столбцов различают несколько видов матриц. Рассмотрим некоторые из них.

1. Матрица – столбец ($n = 1$)

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}$$

2. Матрица – строка ($m = 1$)

$$b = \left| b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n \right|$$

Для компактности матрицу – столбец можно записать в строчку. Такая операция называется *транспонированием*.

$$a^T = \left| a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_m \right|$$

Матрица- строка a^T - это транспонированная матрица – столбец a . Значок T означает операцию транспонирования..

2. Прямоугольная матрица, содержащая m строк и n столбцов.

Пример.

Матрица размером 4×6 имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 7 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 7 & 9 & -3 \\ 4 & 7 & 1 & -8 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

3. В квадратной матрице число строк равно числу столбцов.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

В этом случае говорят, что “матрица имеет порядок равный m ”.

В строительной механике часто встречаются матрицы, элементы которой симметричны относительно диагонали, образованной элементами с одинаковыми индексами.

Транспонирование матриц.

Если в матрице A поменять местами столбцы на строки (первую строку сделать первым столбцом, вторую строку – вторым и т.д.), то получают матрицу A^T , которая называется транспонированной по отношению к матрице A .

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & l & m \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} a & d & k \\ b & e & l \\ c & f & m \end{pmatrix}$$

Над матрицами, как и над числами по определенным правилам можно проводить различные алгебраические действия. Познакомимся только с некоторыми из них, которые нужны для решения учебных задач по строительной механике.

Сложение матриц.

Суммой матриц A и B называют такую матрицу C , элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B .

Складывать можно лишь матрицы, имеющие одинаковое количество строк и одинаковое число столбцов.

Пример. Сложение двух столбцов

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -6 & 10 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 9 \\ 4 \\ -6 \end{vmatrix}$$

Пример. Сложение двух прямоугольных матриц

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & -10 \\ 5 & 8 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 12 \\ -6 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 7 & 2 \\ -1 & 6 \\ 3 & -8 \end{vmatrix}$$

Умножение матрицы на постоянное число.

Это действие сводится к умножению всех элементов матрицы на это число.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \lambda = \begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{vmatrix}$$

Пример

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \cdot 4 = \begin{vmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 16 & 20 & 24 \\ 28 & 32 & 36 \end{vmatrix}$$

Умножение матрицы строки на матрицу столбец

Результат этого умножения – число, полученное сложением произведений первого элемента строки на первый элемент столбца, второго – на второй и т.д.,

Пример

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 7 \\ -2 \\ 6 \end{vmatrix} = 5 \cdot 7 + 6 \cdot (-2) + 7 \cdot 6 = 65$$

Умножение прямоугольных матриц.

Произведение матриц получается перемножением строк матрицы А на столбцы матрицы В.

Пусть даны две квадратные матрицы

$$A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{vmatrix} k & l \\ m & n \end{vmatrix}.$$

Произведением матриц А и В будет матрица

$$AB = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} k & l \\ m & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ak + bm & al + bn \\ ck + dm & cl + dn \end{vmatrix}.$$

В результате умножения двух квадратных матриц получается матрица того же порядка, что и перемножаемые.

Матрицы А и В могут быть и не квадратными. Важно лишь, чтобы число столбцов матрицы А n_1 равнялось числу строк матрицы В m_2 .

Произведение матрицы А, размером $m_1 \times n_1$, на матрицу В, размером $m_2 \times n_2$, равно матрице С, размером $m_1 \times n_2$.

Пример.

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} -5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 9 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (-5) \cdot 3 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot (-3) & (-5) \cdot 2 + 6 \cdot 6 + 7 \cdot 4 & (-5) \cdot 3 + 6 \cdot 9 + 7 \cdot 2 \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} -6 & 54 & 71 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Пример

$A[(m_1=4) \times (n_1=4)], B[(m_2=4) \times (n_2=2)]$

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1/5 \\ 1 & 1/5 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1/10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 4 \cdot 1/5 + 2 \cdot 1/5 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot (-1/10) \\ 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 1/5 + 4 \cdot 1/5 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot (-1/10) \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1,5 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 1/5 + 0 \cdot 1/5 + 1,5 \cdot 0 + 0 \cdot (-1/10) \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1,5 \cdot 0 & 0 \cdot 1/5 + 0 \cdot 1/5 + 0 \cdot 0 + 1,5 \cdot (-1/10) \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} 2 & 1,2 \\ 4 & 1,2 \\ 1,5 & 0 \\ 0 & -0,15 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Результат умножения – матрица, размером $(m=4) \times (n=2)$.

Пример

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 0 & -1/8 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -2 \\ 0,75 & 0 \\ 0 & -0,1875 \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} 0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 0,75 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot (-2) + 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot -0,1875 \\ (-1/3) \cdot 2 + (-1/3) \cdot 4 + 0 \cdot 0,75 + (-1/8) \cdot 0 & (-1/3) \cdot (-2) + (-1/3) \cdot (-2) + 0 \cdot 0 + (-1/8) \cdot (-0,1875) \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} 4,75 & -2 \\ -2 & 1,35677 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Число столбцов в одной матрице должно быть равно числу строк в другой.

Упражнения.

1. Сложить матрицы А и В

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 1.333 \\ 1.5 & 7.1 \\ 0.333 & 0.666 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2.2 & -1 \\ 3 & 0.666 \\ -1.5 & -1.1 \\ 0.666 & 0.333 \end{pmatrix}$$

2. Умножить матрицу A на матрицу B

a) $A = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.12 \\ 4 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1.5 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1.52 \\ -9.59 \end{pmatrix}$

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1/3 & -1/5 & -1/5 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.5 \end{pmatrix}$

в) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1/5 & -1/5 & 1/4 & 1/4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.333 & 0.6666 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6666 & 1.333 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$

Оглавление

Глава 1

1. Введение
2. Цель и задачи строительной механики
- Вопросы для самоконтроля
3. Понятие о расчетной схеме
4. Кинематический анализ расчетной схемы
- Вопросы для самоконтроля

Глава 2

1. Статически определимые и статически неопределимые системы
2. Расчет многопролетной шарнирной балки
- Вопросы для самопроверки
3. Линии влияния опорных реакций и расчетных усилий в балках
4. Определение невыгодного положения нагрузки на сооружение
- Вопросы для самоконтроля

Глава 3

1. Расчет трехшарнирных арок
2. Кривая давления. Рациональная ось арки
- Вопросы для самоконтроля

Глава 4

1. Основные понятия. Статическая определимость ферм
 2. Способы определения усилий в стержнях ферм
 3. Особенности расчета шпренгельных ферм
- Вопросы для самоконтроля

Глава 5

1. Линии влияния усилий в элементах балочных ферм
 2. Линии влияния усилий в стержнях простых балочных ферм
 3. Определение усилий по л.в. (загружение л.в.)
 4. Линии влияния усилий в стержнях шпренгельных ферм
- Вопросы для самоконтроля

Глава 6

1. Анализ напряженного состояния балочных ферм с разным очертанием верхнего пояса
 2. Ферма наименьшего веса
- Вопросы для самоконтроля

Глава 7

1. Определение перемещений с упругих системах и некоторые основные теоремы строительной механики
 - 1.1. Основные понятия
 - 1.2. Работа внешних и внутренних сил
 - 1.3. Некоторые общие свойства работ внешних и внутренних сил
- Вопросы для самоконтроля

Глава 8

1. Универсальная формула для определения перемещений
 - 1.1. Начало возможных перемещений
 - 1.2. Формула Мора
 2. Техника определения перемещений
 - 2.1. Способ Верещагина
 - 2.2. Порядок вычисления без ЭВМ
 - 2.3. Вычисление перемещений при помощи матриц
 - 2.4. Порядок вычисления перемещений на ЭВМ
- Вопросы для самоконтроля

Приложение. Элементарные сведения о матрицах

Оглавление