

**ОПД.Р.03 СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА  
РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ  
РАМЫ МЕТОДОМ СИЛ**

Методические указания и задания  
к расчетно-графической работе

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ОПИСАНИЕ ЗАДАНИЯ.....	4
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЯ.....	10
ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ .....	11
ЛИТЕРАТУРА.....	17

## ОПИСАНИЕ ЗАДАНИЯ

Задание на расчетную работу представляет собой набор двадцати четырех статически неопределимых рам (с. 5-8,) и трех таблиц исходных данных (с. 2-4). Исходные данные и номер расчетной схемы для выполнения расчетной работы выбираются в соответствии со списочным номером студента и номером группы (в схемах 3, 5, 8, 14, 17 , наклонные стержни считать ригелями).

Для каждой из расчетных схем требуется:

1. Подсчитать степень статической неопределимости ( $CCH$ ), выбрать основную систему (ОС) метода сил и записать канонические уравнения.
2. Определить коэффициенты при неизвестных и свободные члены канонических уравнений.
3. Определить из канонических уравнений неизвестные силы и построить эпюры внутренних сил.
4. Произвести проверку правильности построения эпюр .
5. Определить линейное перемещение или угол поворота сечения 1, отмеченного на схеме.

Таблица 1

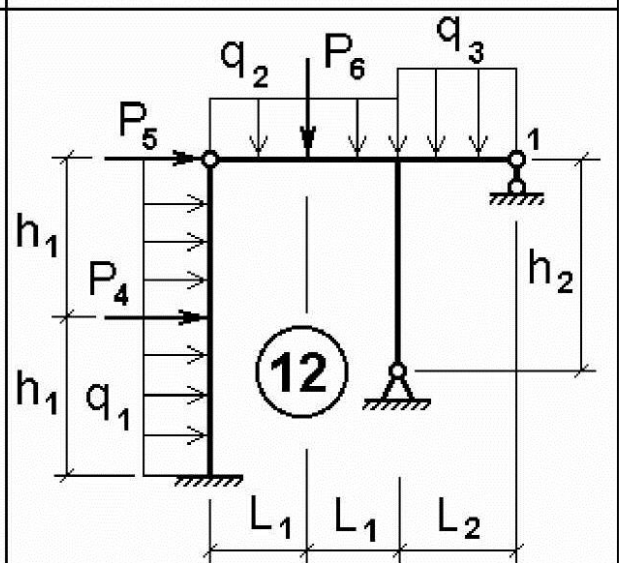
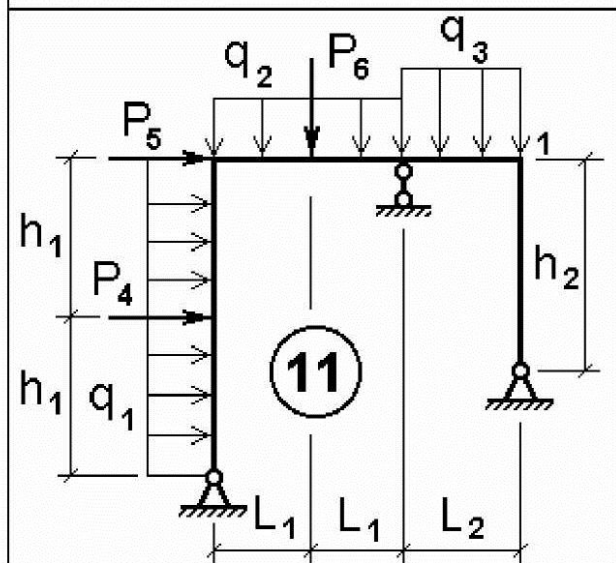
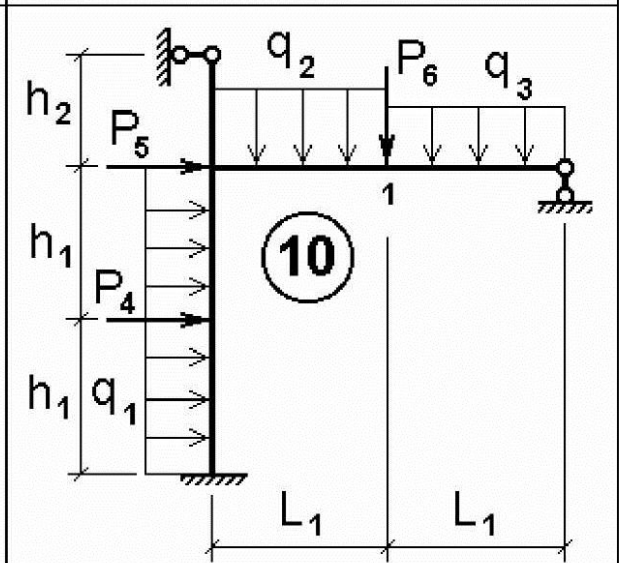
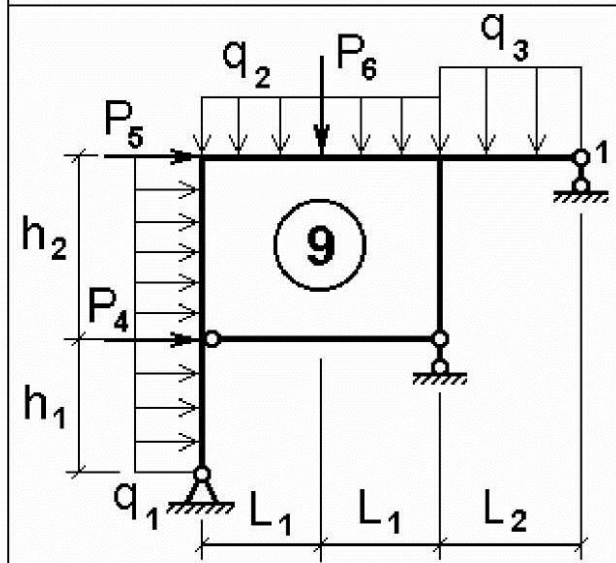
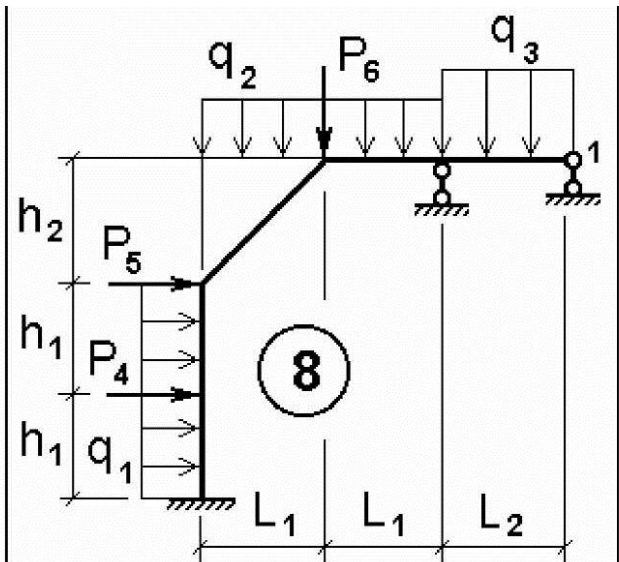
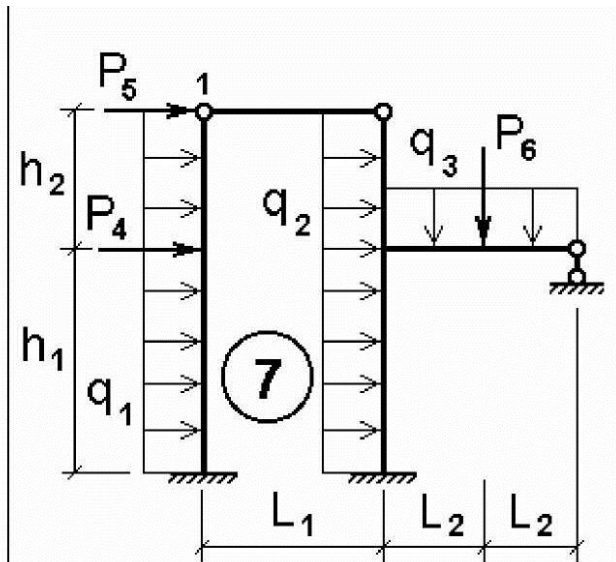
Группа	$EI_p / EI_{ст}$	Нагрузка
С-31	3/1	$q_1, q_2, P_4$
С-32	3/2	$q_1, q_2, P_5$
С-33	5/3	$q_1, q_2, P_6$
С-34	2/1	$q_1, q_3, P_4$
С-35	2/3	$q_1, q_3, P_5$
ГСХ-41	3/4	$q_1, q_3, P_6$
ГСХ-42	5/6	$q_2, q_3, P_6$

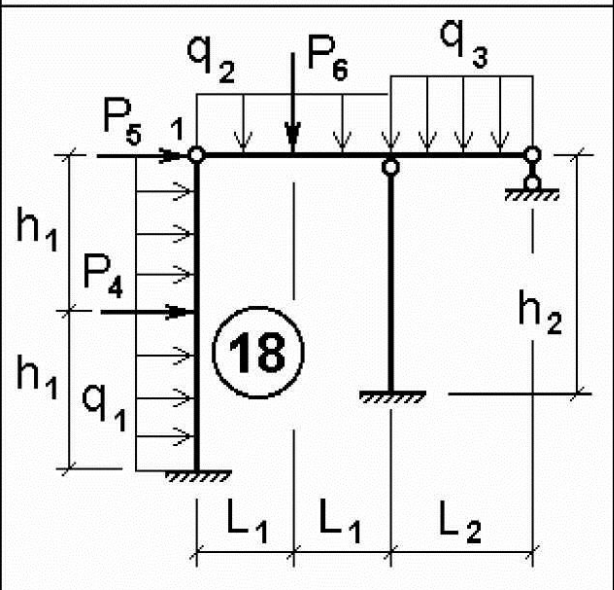
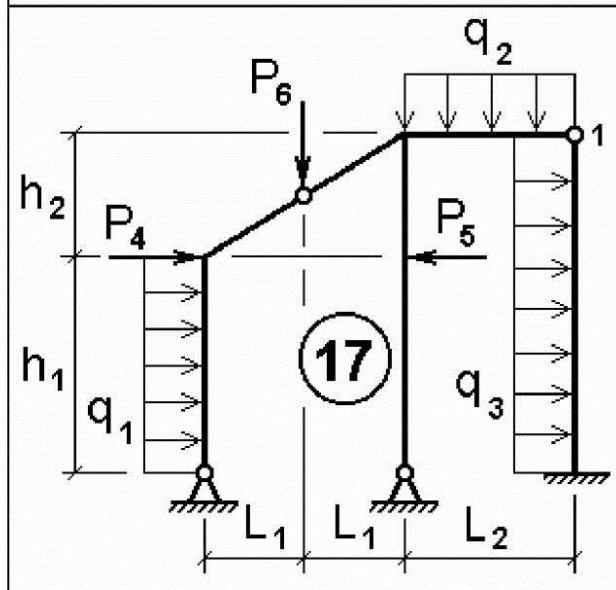
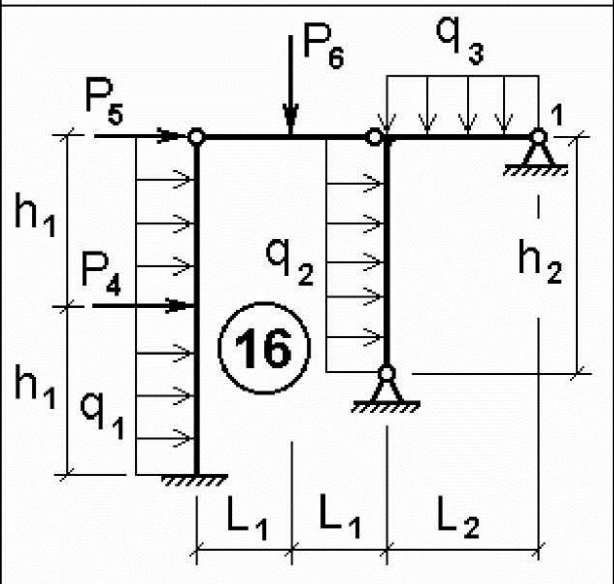
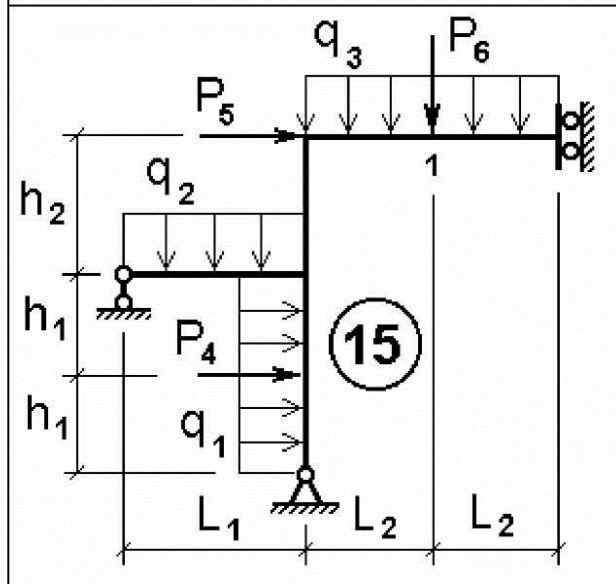
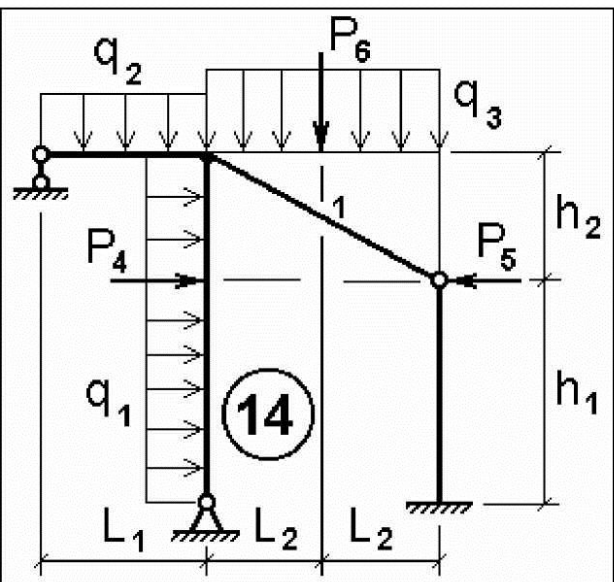
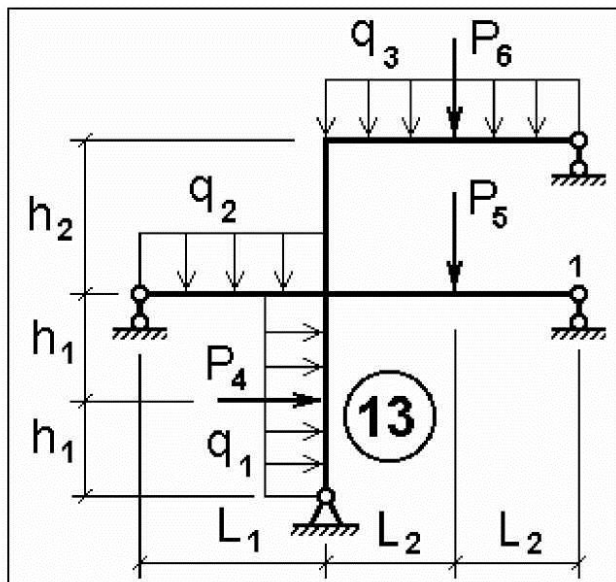
Таблица 2

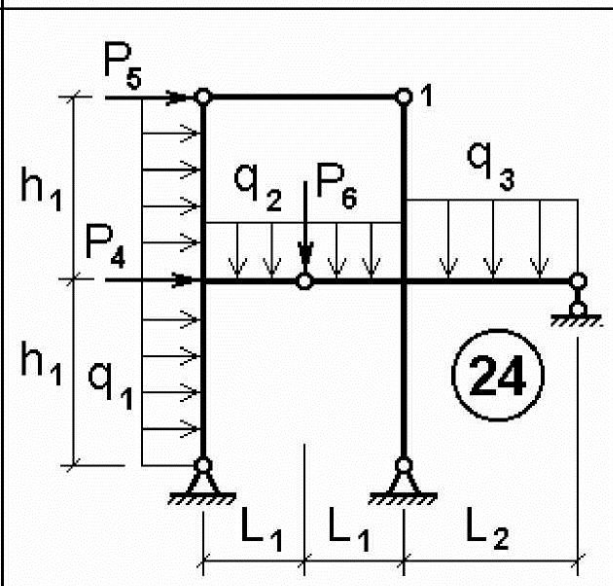
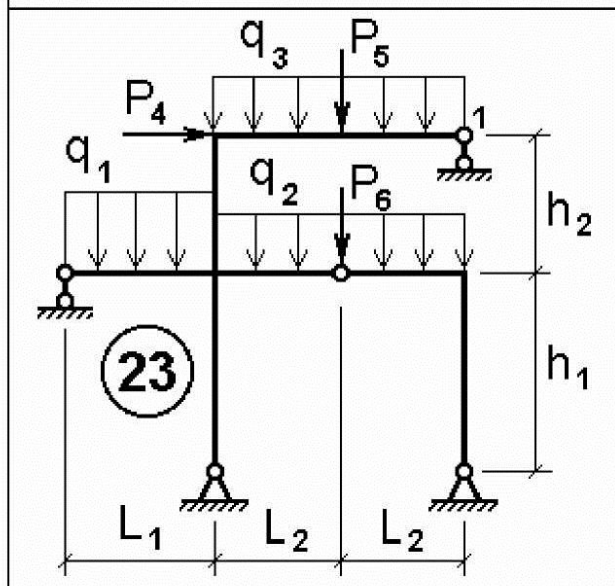
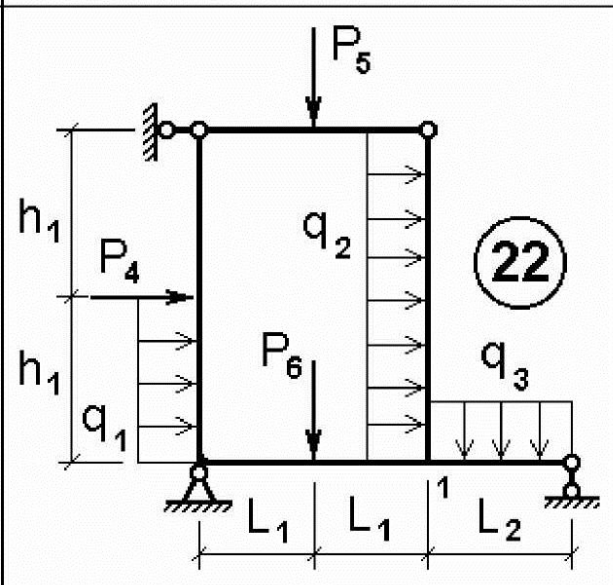
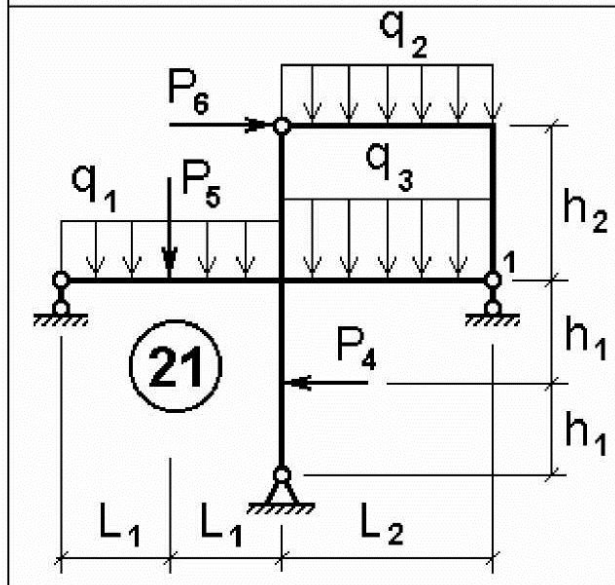
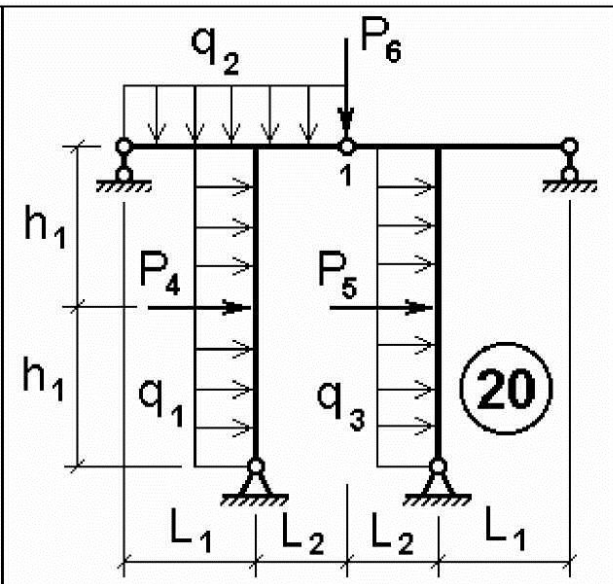
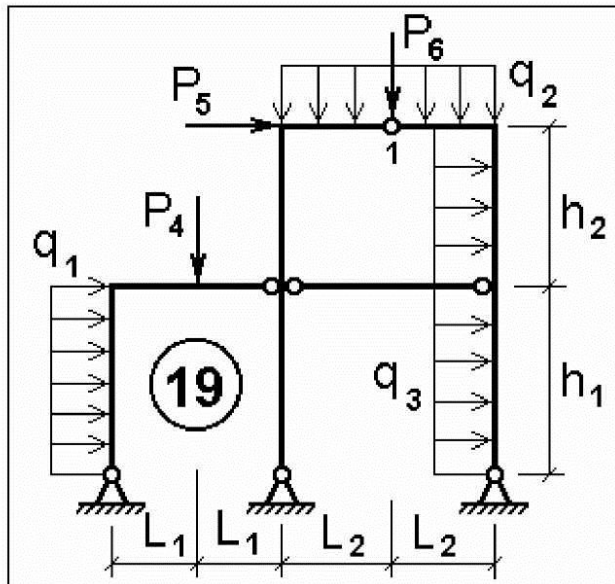
№ схемы	q <sub>1</sub> [кН/м]	q <sub>2</sub> [кН/м]	q <sub>3</sub> [кН/м]	P <sub>4</sub> [кН]	P <sub>5</sub> [кН]	P <sub>6</sub> [кН]
1	14	8	12	40	41	39
2	11	15	16	54	48	33
3	7	13	14	75	42	37
4	6	9	11	49	44	56
5	9	11	14	55	66	64
6	18	19	8	69	71	65
7	16	14	15	78	54	51
8	10	17	18	71	38	35
9	24	22	19	62	67	55
10	16	15	10	51	68	70
11	18	17	20	55	64	74
12	21	12	23	68	78	81
13	13	8	16	54	64	53
14	14	24	17	50	60	61
15	18	20	14	55	45	69
16	11	9	15	57	47	49
17	13	18	17	58	68	64
18	12	20	24	61	66	76
19	15	18	16	81	61	70
20	11	10	9	44	64	85
21	16	18	20	53	78	81
22	9	17	19	51	44	64
23	7	12	16	40	39	51
24	14	11	9	44	28	37

Таблица 3

N схемы	L <sub>1</sub> [м]	L <sub>2</sub> [м]	h <sub>1</sub> [м]	h <sub>2</sub> [м]	Определить
1	2,5	-	1,4	2,7	$\Delta_{1,y}$
2	2,7	-	2,8	2,1	$\varphi_1$
3	3,5	-	3,3	-	$\Delta_{1,x}$
4	3,9	3,7	3,3	2,9	$\varphi_1$
5	4,1	-	3,4	1,6	$\Delta_{1,x}$
6	3,6	4,2	3,5	5,1	$\varphi_1$
7	5,1	2,8	6,2	3,9	$\Delta_{1,x}$
8	4,3	4,1	3,5	4,2	$\Delta_{1,x}$
9	3,1	3,7	3,5	4,8	$\varphi_1$
10	3,9	-	3,4	2,5	$\varphi_1$
11	3,3	3,9	5,4	7,1	$\Delta_{1,x}$
12	3,1	3,7	5,1	6,7	$\varphi_1$
13	4,5	3,1	2,3	3,7	$\Delta_{1,x}$
14	4,7	3,2	6,3	3,6	$\Delta_{1,y}$
15	6,1	4,3	3,3	4,6	$\Delta_{1,y}$
16	2,3	3,7	4,1	5,7	$\varphi_1$
17	2,8	4,8	6,1	3,5	$\Delta_{1,x}$
18	3,4	5,0	5,6	8,5	$\Delta_{1,x}$
19	2,2	2,9	4,9	4,2	$\Delta_{1,y}$
20	3,9	2,7	4,8	-	$\Delta_{1,y}$
21	2,9	5,5	2,7	4,0	$\Delta_{1,x}$
22	3,6	4,6	5,3	-	$\varphi_1$
23	4,2	3,5	5,6	3,9	$\Delta_{1,x}$
24	2,2	3,9	4,2	-	$\Delta_{1,x}$









## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЯ

Расчетная работа выполняется на стандартных листах бумаги формата А4. Первый лист является титульным.

Степень статической неопределимости подсчитывается как число степеней свободы системы с обратным знаком, т.е.

$$CCH = -W = -(3B - 2Ш - C_0),$$

где  $B$  - число блоков;  $Ш$  - число простых шарниров;  $C_0$  - число элементарных опорных связей. Если рама имеет замкнутые бесшарнирные контуры, то  $CCH$  увеличивается на величину  $3K$ , где  $K$  - число таких контуров.

Основная система метода сил выбирается путем отбрасывания “лишних связей” и приложения вместо них неизвестных сил  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ( $n = CCH$ ). Основная система должна быть геометрически неизменяемой и статически определимой. Из заданной статически неопределимой системы можно получить множество вариантов основных систем. Наиболее рациональной основной системой будет та, в которой реакции опор и внутренние силы определяются как можно проще.

Канонические уравнения метода сил при действии нагрузки имеют вид:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1p} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2p} &= 0; \\ &\dots\dots\dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{np} &= 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения по физическому смыслу означают отсутствие перемещений (абсолютных или относительных) в направлениях отброшенных связей. Коэффициенты при неизвестных  $\delta_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) представляют собой перемещения в направлении  $i$ -ой отброшенной связи (в направлении силы  $X_i$ ) от силы  $X_i = 1$  и называются коэффициентами податливости. Свободные члены  $\Delta_{ip}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) канонических уравнений представляют перемещения в направлении  $i$ -ой отброшенной связи (в направлении силы  $X_i$ ) от действия заданной нагрузки.

Коэффициенты податливости и свободные члены канонических уравнений определяются по формуле Мора, в которой учитываются только перемещения от изгиба стержней:

$$\delta_{ij} = \sum \int_0^l \frac{M_i M_j}{EI} dx; \quad \Delta_{ip} = \sum \int_0^l \frac{M_i M_p}{EI} dx.$$

Здесь  $M_i, M_j, M_p$  - изгибающие моменты в ОС соответственно от сил  $X_i = 1, X_j = 1$ , и заданной нагрузки;  $EI$  - жесткость стержней на изгиб.

Суммы берутся по всем участкам рамы. Как правило, жесткость  $EI$  в пределах каждого участка является постоянной. В этом случае для вычисления интегралов Мора на каждом участке можно воспользоваться правилом Верещагина.

После решения канонических уравнений из уравнений равновесия, составленных для ОС при совместном действии заданной нагрузки и сил  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , определяются реакции опор. Внутренние силы  $N, Q, M$  в заданной статически неопределимой системе являются такими же, как и в ОС, поэтому они определяются путем расчета ОС. Эпюры  $N, Q, M$  изображаются в заданной статически неопределимой раме. Правильность построения эпюр контролируется кинематической проверкой

$$\sum_0^l \int \frac{MM_i}{EI} dx = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

а так же проверкой равновесия узлов рамы.

Линейное перемещение в статически неопределимой системе определяется по формуле

$$\Delta = \sum_0^l \int \frac{MM_0^{(1)}}{EI} dx,$$

где  $M$  - изгибающий момент в статически неопределимой системе от действия заданной нагрузки;  $M_0^{(1)}$  - изгибающий момент в любой статически определимой системе, полученной из заданной статически неопределимой системы, от силы  $P = 1$ , приложенной в направлении искомого перемещения.

Таким же образом определяется и угол поворота. В этом случае эпюра  $M_0^{(1)}$  строится от момента  $m = 1$  приложенного в сечении, где требуется определить угол поворота.

### ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

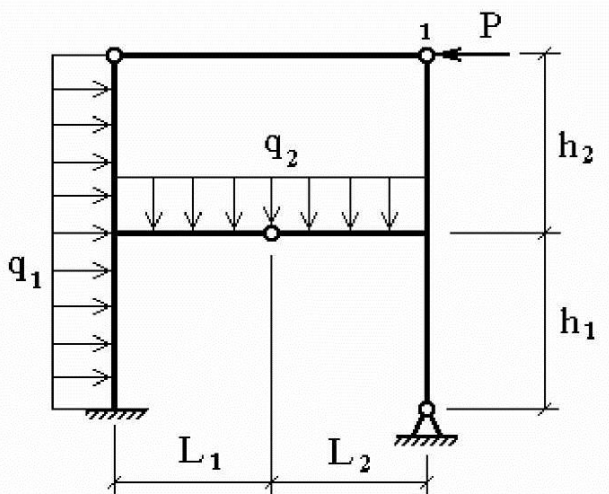


Рис. 1.

Исходные данные:

$$L_1 = L_2 = 2,2 \text{ м};$$

$$h_1 = h_2 = 2,5 \text{ м};$$

$$q_1 = 12 \text{ кН/м};$$

$$q_2 = 15 \text{ кН/м};$$

$$P = 30 \text{ кН};$$

$$EI_p / EI_{ст} = 4/3.$$

Построить эпюры  $M, Q, N$ .

Определить перемещение т. 1.

# 1. Определение ССН и выбор ОС

$$ССН = -W = -(3B - 2Ш - C_0) = -(3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 5) = 2.$$

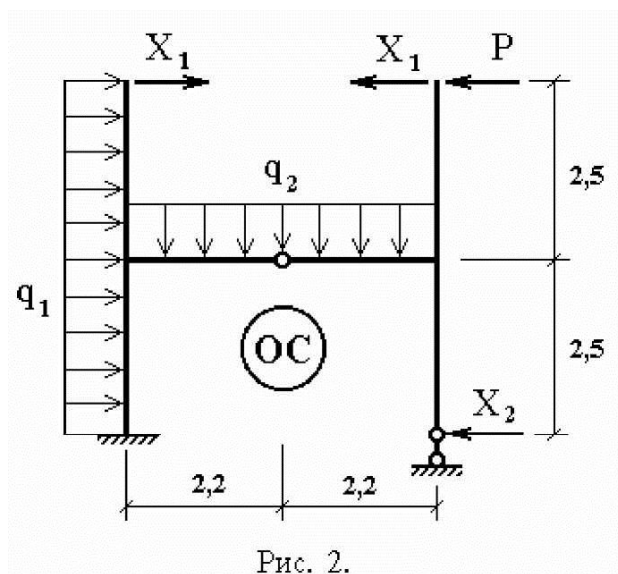


Рис. 2.

Выбираем ОС, удаляя две лишние связи и заменяя их неизвестными силами  $X_1, X_2$  (рис. 2). Неизвестные силы  $X_1, X_2$  определяются из канонических уравнений:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1p} = 0;$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2p} = 0.$$

# 2. Определение коэффициентов при неизвестных и свободных членах канонических уравнений

Для определения  $\delta_{ij}$  и  $\Delta_{ip}$  необходимо построить в ОС эпюры

моментов  $M_1, M_2$  и  $M_p$ .

Построение эпюры  $M_1$  от силы  $X_1 = 1$

Определяем необходимые реакции опор (рис. 3а).

$$\sum M_C^{сп} = 1 \cdot 2,5 + R_B \cdot 2,2 = 0, \quad R_B = -1,136,$$

$$\sum M_A = M_A + R_B \cdot 4,4 = 0, \quad M_A = -5,0.$$

Строим эпюру  $M_1$  (рис. 3б).

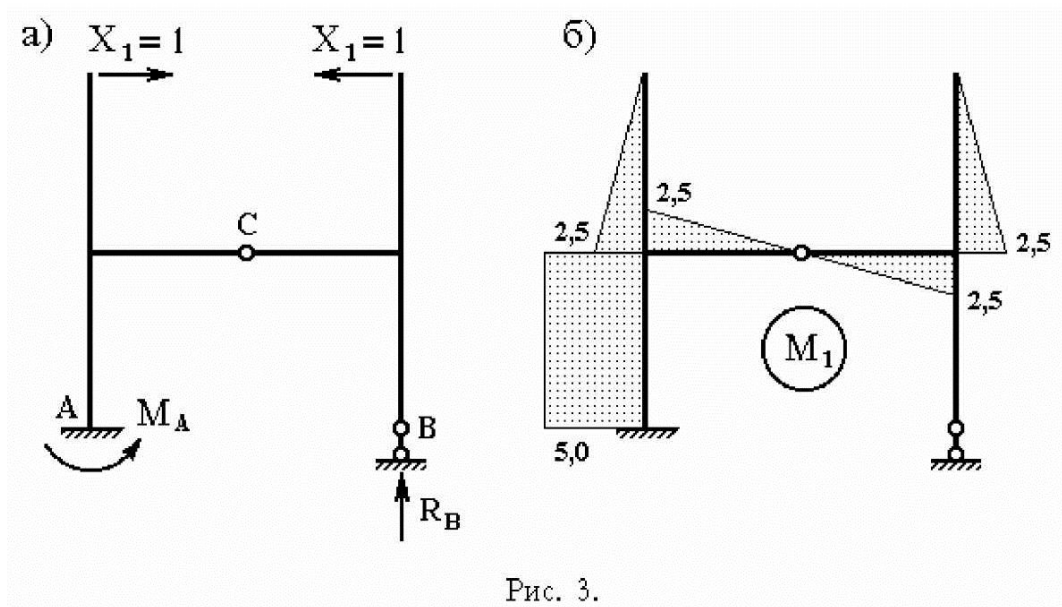


Рис. 3.

Построение эпюры  $M_2$  от силы  $X_2 = 1$

Определяем необходимые реакции опор (рис. 4а).

$$\sum M_C^{\text{np}} = -1 \cdot 2,5 + R_B \cdot 2,2 = 0, \quad R_B = 1,136,$$

$$\sum M_A = M_A + R_B \cdot 4,4 = 0, \quad M_A = -5,0.$$

Строим эпюру  $M_2$  (рис. 4б).

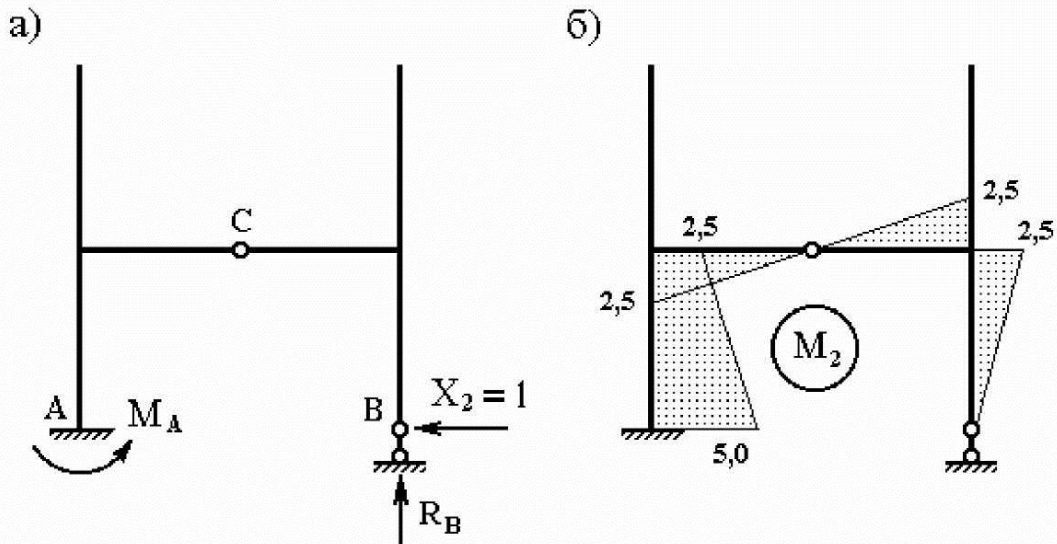


Рис. 4.

Построение эпюры  $M_p$  от заданной нагрузки

Определяем необходимые реакции опор (рис. 5а).

$$\sum M_C^{\text{np}} = -q_2 \cdot 2,2 \cdot 1,1 + P \cdot 2,5 + R_B \cdot 2,2 = 0, \quad R_B = -17,591 \text{ кН},$$

$$\sum X = X_A + q_1 \cdot 5,0 - P = 0, \quad X_A = -30 \text{ кН},$$

$$\sum M_A = M_A - q_1 \cdot 5,0 \cdot 2,5 - q_2 \cdot 4,4 \cdot 2,2 + P \cdot 5,0 + R_B \cdot 4,4 = 0, \quad M_A = 222,6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Строим эпюру  $M_p$  (Рис. 5б).

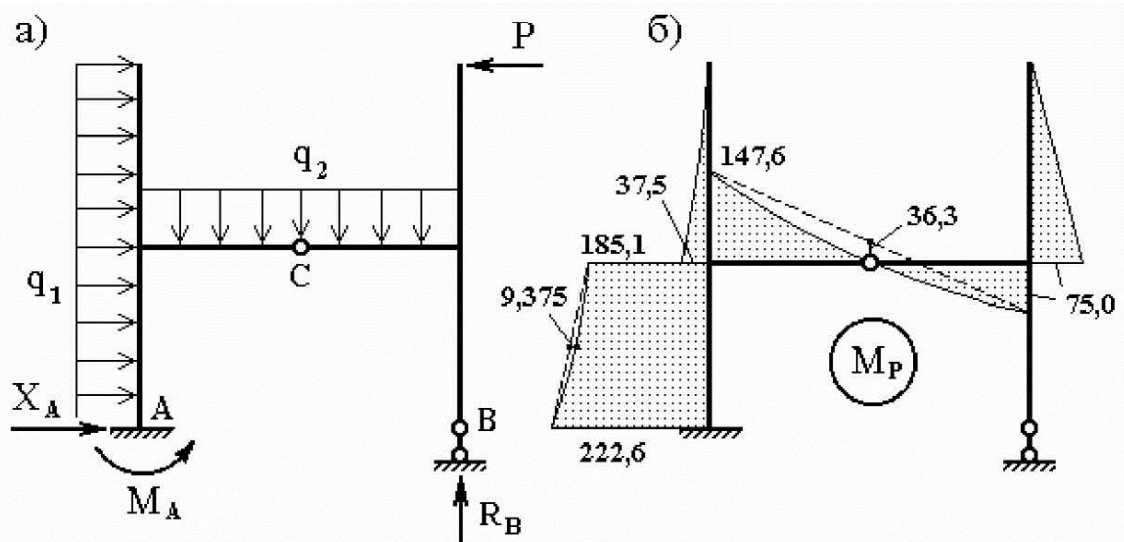


Рис. 5.

Определяем  $\delta_{ij}$  и  $\Delta_{ip}$  ( $i, j = 1, 2$ ), перемножая соответствующие эпюры.  
Берем  $EI_p = 4EI$ ,  $EI_{ct} = 3EI$ .

$$\delta_{11} = \frac{1}{4EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2,5 \cdot 2,5 \cdot 2 + \frac{1}{3EI} \left( \frac{1}{3} \cdot 2,5 \cdot 2,5 \cdot 2,5 \cdot 2 + 5,0 \cdot 2,5 \cdot 2,5 \right) = \frac{26,597}{EI},$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{1}{4EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2,5 \cdot 2,2 \cdot 2 - \frac{1}{3EI} \cdot \frac{2,5 + 5,0}{2} \cdot 2,5 \cdot 5,0 = -\frac{17,917}{EI},$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{4EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2,5 \cdot 2,5 \cdot 2 + \frac{1}{3EI} \left[ \frac{2,5}{5} (2 \cdot 2,5 \cdot 2,5 + 2 \cdot 5,0 \cdot 5,0 + 2,5 \cdot 5,0 + 5,0 \cdot 2,5) + \frac{1}{3} \cdot 2,5 \cdot 2,5 \cdot 2,5 \right] = -\frac{17,917}{EI},$$

$$\Delta_{1p} = \frac{1}{4EI} \left[ \frac{4,4}{6} (2 \cdot 147,6 \cdot 2,5 + 2 \cdot 75,0 \cdot 2,5 - 147,6 \cdot 2,5 - 75,0 \cdot 2,5) \right] +$$

$$+ \frac{1}{3EI} \left[ \frac{1}{3} \cdot 37,5 \cdot 2,5 \cdot \frac{3}{4} \cdot 2,5 + \frac{1}{3} \cdot 75,0 \cdot 2,5 \cdot 2,5 + \left( \frac{185,1 + 222,6}{2} \cdot 2,5 - \frac{2}{3} \cdot 9,375 \cdot 2,5 \right) \cdot 5,0 \right] =$$

$$= \frac{996,973}{EI},$$

$$\Delta_{2p} = \frac{1}{4EI} \left[ \frac{4,4}{6} (-2 \cdot 147,6 \cdot 2,5 - 2 \cdot 75,0 \cdot 2,5 + 147,6 \cdot 2,5 + 75,0 \cdot 2,5) \right] +$$

$$+ \frac{1}{3EI} \left[ -\frac{2,5}{6} (2 \cdot 222,6 \cdot 5,0 + 2 \cdot 185,1 \cdot 2,5 + 222,6 \cdot 2,5 + 185,1 \cdot 5,0) + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{3} \cdot 9,375 \cdot 2,5 \cdot \frac{5,0 + 2,5}{2} \right] = -\frac{726,035}{EI}.$$

3. Определение сил  $X_1, X_2$ , построение эпюр  $M, Q, N$ .

Подставляя  $\delta_{ij}$  и  $\Delta_{ip}$  в канонические уравнения, получаем систему:

$$\begin{aligned} 26,597 \cdot X_1 - 17,917 \cdot X_2 + 996,973 &= 0; \\ -17,917 \cdot X_1 + 16,181 \cdot X_2 - 726,035 &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда  $X_1 = -28,566$  кН,  $X_2 = 13,239$  кН.

Определяем опорные реакции в ОС при совместном действии заданной нагрузки и сил  $X_1, X_2$  (рис.6а).

$$\sum X = X_A + q_1 \cdot 5,0 - P - X_2 = 0, \quad X_A = -16,761 \text{ кН.}$$

$$\sum M_C^{np} = X_1 \cdot 2,5 + P \cdot 2,5 - q_2 \cdot 2,2 \cdot 1,1 - X_2 \cdot 2,5 + R_B \cdot 2,2 = 0, \quad R_B = 29,915 \text{ кН.}$$

$$\sum Y = Y_A - q_2 \cdot 4,4 + R_B = 0, \quad Y_A = 36,085 \text{ кН.}$$

$$\sum M_A = M_A - q_1 \cdot 5,0 \cdot 2,5 - q_2 \cdot 4,4 \cdot 2,2 + P \cdot 5,0 + R_B \cdot 4,4 = 0, \quad M_A = 13,574 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Строим эпюры  $M, Q, N$  (рис. 6б, 6в, 6г).

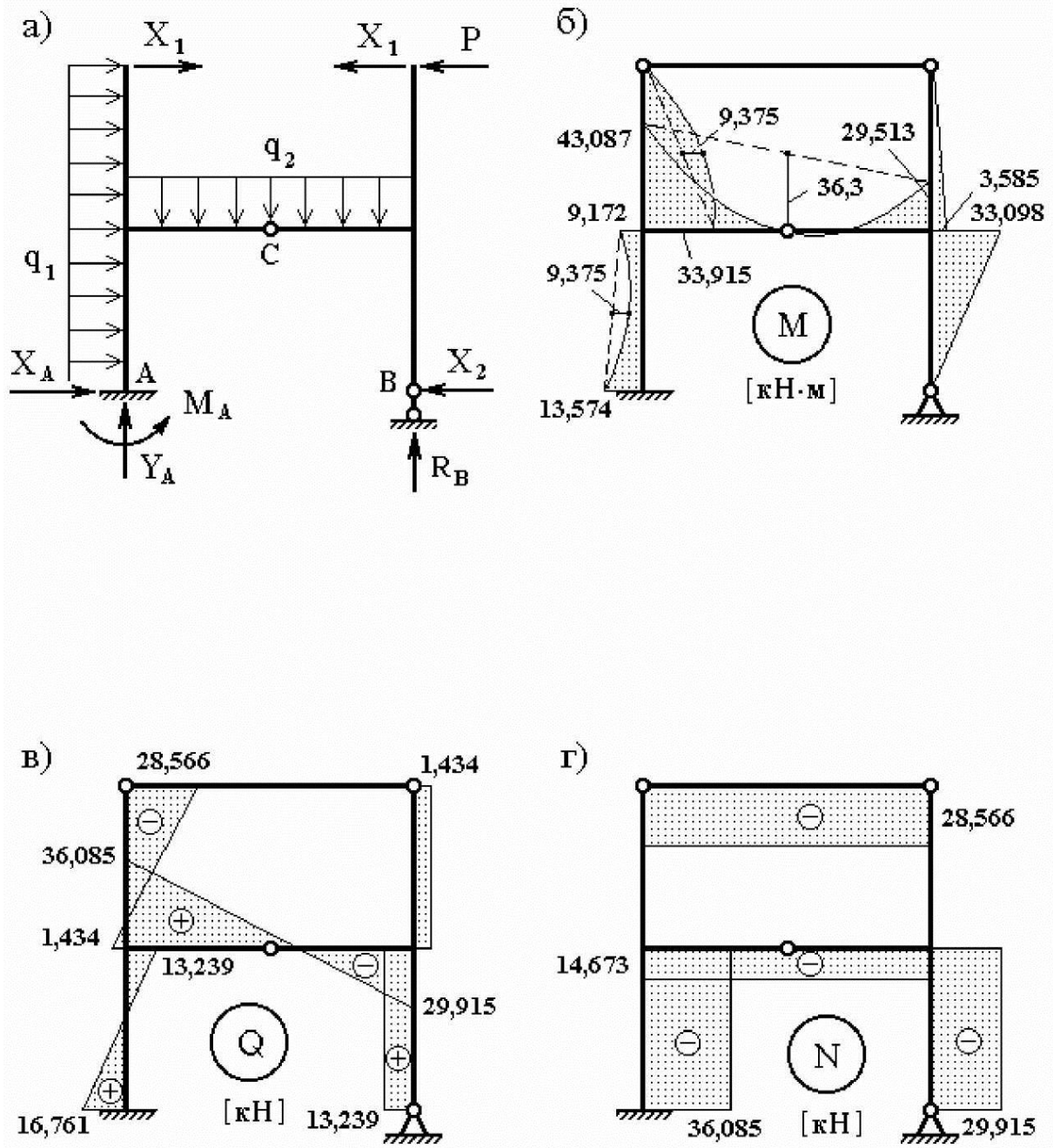


Рис. 6.

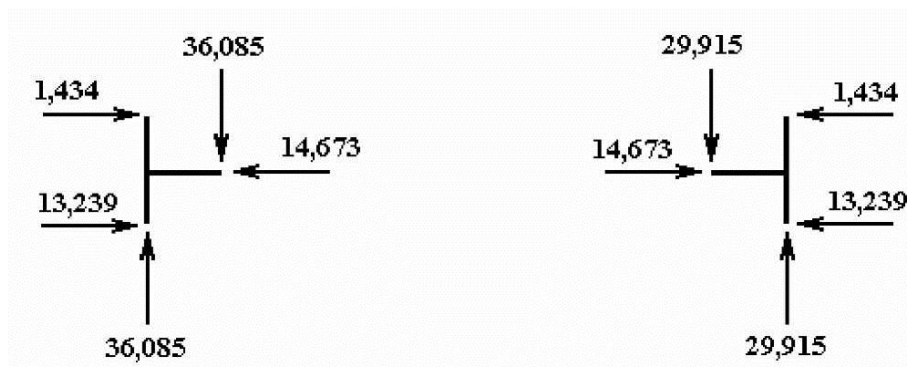
#### 4. Проверка правильности построения эпюр $M, Q, N$

а) Кинематическая проверка

$$\begin{aligned} \sum \int_0^l \frac{M_1 M}{EI} dx &= \frac{1}{4EI} \left[ \frac{4,4}{6} (2 \cdot 43,087 \cdot 2,5 - 2 \cdot 29,513 \cdot 2,5 + 29,513 \cdot 2,5 - 2,5 \cdot 43,087) \right] + \\ &+ \frac{1}{3EI} \left[ \frac{1}{3} \cdot 3,585 \cdot 2,5 \cdot 2,5 - \frac{1}{3} \cdot 33,915 \cdot 2,5 \cdot 2,5 - \frac{2}{3} \cdot 9,375 \cdot 2,5 \cdot 1,25 + \right. \\ &\left. + \left( \frac{13,574 + 9,172}{2} \cdot 2,5 - \frac{2}{3} \cdot 9,375 \cdot 2,5 \right) \cdot 5,0 \right] = -\frac{0,006}{EI} \approx 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum \int_0^l \frac{M_2 M}{EI} dx &= \frac{1}{4EI} \left[ \frac{4,4}{6} (-2 \cdot 43,087 \cdot 2,5 + 2 \cdot 29,513 \cdot 2,5 - 29,513 \cdot 2,5 + 43,087 \cdot 2,5) \right] + \\ &+ \frac{1}{3EI} \left[ \frac{1}{3} \cdot 33,098 \cdot 2,5 \cdot 2,5 - \frac{2,5}{6} \cdot (2 \cdot 9,172 \cdot 2,5 + 2 \cdot 13,574 \cdot 5 + 9,172 \cdot 5 + 13,574 \cdot 2,5) + \right. \\ &\left. + \frac{2}{3} \cdot 9,375 \cdot 2,5 \cdot \frac{5,0 + 2,5}{2} \right] = -\frac{0,01}{EI} \approx 0. \end{aligned}$$

б) Проверка равновесия узлов



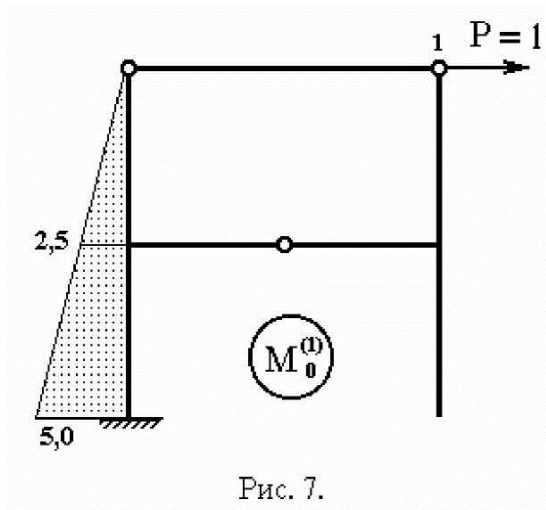
$$\begin{aligned} \sum X &= 1,434 + 13,239 - 14,673 = 0, & \sum X &= 14,673 - 1,434 - 13,239 = 0, \\ \sum Y &= 36,085 - 36,085 = 0, & \sum Y &= 29,915 - 29,915 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum X &= 28,566 - 28,566 = 0, & \sum X &= 28,566 + 1,434 - 30,0 = 0. \end{aligned}$$



## 5. Определение перемещения точки 1

Строим эпюру  $M_0^{(1)}$  в статически определимой системе от силы  $P=1$ , приложенной в точке 1 в горизонтальном направлении (рис. 7). Определяем перемещение точки 1.



$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \sum \int_0^l \frac{MM_0^{(1)}}{EI} dx = \\ &= \frac{1}{3EI} \left[ -\frac{1}{3} \cdot 33,915 \cdot 2,5 \cdot 2,5 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{3} \cdot 9,375 \cdot 2,5 \cdot 1,25 + \frac{2,5}{6} (2 \cdot 13,574 \cdot 5,0 + \right. \\ &\quad \left. + 2 \cdot 9,172 \cdot 2,5 + 9,172 \cdot 5,0 + 13,574 \cdot 2,5) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{3} \cdot 9,375 \cdot 2,5 \cdot \frac{5,0 + 2,5}{2} \right] = -\frac{13,289}{EI}. \end{aligned}$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1986 г.
2. Смирнов В.А., Иванов С.А., Тихонов М.А. Строительная механика. – М.: Стройиздат, 1984 г.
3. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики (статически определимые и статически неопределимые системы), под общей редакцией Г.К. Клейна. – М.: Высшая школа, 1973 г.