

ОПД.Р.03 СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Методические указания и задания для самостоятельных
расчетно-графических работ

Методические указания предназначены для облегчения выполнения расчетно-графических работ (РГЗ) по строительной механике по разделу «Статика стержневых сооружений (систем)» статически определимых и неопределимых систем. Выполнение РГЗ позволит студенту изучить различные схемы соединений элементов сооружений, способных воспринимать действующие на них нагрузки; определить распределения напряжений и деформаций в сооружении, а также разобраться в вопросах прочности, устойчивости, надёжности при эксплуатации сооружений.

Методические указания могут быть использованы при выполнении расчетно-графических работ студентами дневной и заочной форм обучения по специальностям «Промышленное и гражданское строительство» и «Гидротехническое строительство».

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	4
ВВЕДЕНИЕ	6
ЧАСТЬ I	
1.1. Аналитический метод статически определимых стержневых систем на неподвижную нагрузку	8
1.2. Методы расчета сооружений на подвижную нагрузку	13
1.2.1. Общие сведения. Статический метод построения линий влияния.....	13
1.2.2. Определение усилий по линиям влияния	16
1.2.3. Линии влияния в многопролетной статически определимой балке.....	18
1.3. Расчет ферм на неподвижную и подвижную нагрузку	20
1.3.1. Основные определения. Расчет на неподвижную нагрузку.....	20
1.3.2. Расчет ферм на подвижную нагрузку.....	23
ЧАСТЬ II. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СООРУЖЕНИЙ	
2.1. Метод сил	28
2.1.1. Порядок расчета рам	28
2.2. Расчет рам методом перемещений	37
2.2.1. Последовательность расчета рам.....	37
ЧАСТЬ III. РАСЧЕТ ПОДПОРНЫХ СТЕН	
3.1. Основные положения	52
3.2. Теория Кулона для грунтов	52
3.3. Устойчивость подпорных стен на опрокидывание и сдвиг	57
ЧАСТЬ IV. ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ	
Указания по оформлению	58
4.1. Задание для контрольной работы № 1	59
4.1.1. Задача 1. Расчет статически определимой многопролетной балки.....	59
4.1.2. Задача 2. Расчет плоской статически определимой фермы	61
4.2. Задание для контрольной работы № 2	64
4.2.1. Задача. Расчет плоской статически неопределимой рамы методом сил	64
4.3. Задание для контрольной работы № 3	67
4.3.1. Задача. Расчет статически неопределимой рамы методом перемещений	67
4.4. Задание для контрольной работы № 4	70
4.4.1. Задача. Расчет подпорной стенки	70
ЛИТЕРАТУРА.....	73

ПРЕДИСЛОВИЕ

Содержание методических указаний определяется программой, утвержденной Министерством образования и науки Российской Федерации и соответствует учебному плану для направления 653500 «Строительство» и специальностям: 290300 – «Промышленно-гражданское строительство»; 290400 – «Гидротехническое строительство».

Цель изучения дисциплины: освоение методов расчета на прочность и жесткость основных элементов строительных конструкций, таких, как тонкостенные пространственные и плоские составные стержни, пластинки, тонкостенные цилиндры, диски, оболочки.

В результате изучения курса студент должен:

- правильно классифицировать и выбирать расчетную схему строительного сооружения, характер и метод их расчета;
- практически выполнять расчет и правильно оценивать результаты расчета при решении вопроса о надежности и экономичности конструкции;
- правильно представлять роль расчета для успеха в проектировании и надежности эксплуатации сооружения в целом;
- иметь представление о современных тенденциях использования персональных компьютеров при расчетах.

Основное внимание студентов должно быть сконцентрировано на изучении следующих тем:

- Классификация сооружений и построение их расчетных схем.
- Расчеты внутренних усилий в элементах сооружений на неподвижные и подвижные действия нагрузок.
- Теория и методы расчета статически неопределимых систем.
- Практические методы расчета сооружений на прочность, жесткость и устойчивость с облегчением надежности и экономичности.

Каждому студенту необходимо выполнить следующие расчетно-графические задания (РГЗ):

Расчет статически определимой многопролетной балки и плоской балочной фермы на неподвижную и подвижную нагрузки.

Расчет рамы или арки методами сил и перемещений, когда система статически неопределима.

Расчет подпорной стены.

Тематика и содержание самостоятельных РГЗ.

РГЗ № 1. Часть I. Расчет многопролетных балок и ферм аналитическим методом и с помощью теории линии влияния.

РГЗ № 2. Часть II. Расчет статически неопределимых рам методом сил.

РГЗ № 3. Часть II. Расчет статически неопределимых рам методом перемещений.

РГЗ № 4. Часть III. Расчет устойчивости подпорных стен на сдвиг и на опрокидывание.

К выполнению заданий следует приступать после изучения соответствующих тем и анализа примеров, которые приведены в настоящем указании. Хорошо составленный конспект лекций преподавателя или умение работать с рекомендуемой литературой позволит студенту выполнить РГЗ без особых затруднений.

ВВЕДЕНИЕ

Человечество с незапамятных времен прибегало к строительству. По мере развития человеческого общества усложнялись формы строительства. Примитивное строительство уступило место техническому развитию в виде сложных зданий и сооружений, машин, судов, летательных аппаратов, приборов и т.п. Для их создания требуется инженерный расчет, выполняемый на основе комплекса знаний, относящихся к различным областям науки и искусства. Под инженерным расчетом понимается расчет сооружения, в котором, исходя из условий эксплуатации, ставится цель установить размеры и материал элементов с соблюдением точности, отвечающей указаниям в официальных нормах и технических условиях применяемых к сооружению.

Основной задачей строительной механики является разработка методов расчета и получение данных для надежного и экономичного проектирования конструкций. Под надежностью конструкций здесь понимается безопасность её несущих элементов, т.е. практическое исключение возможности их разрушения. Для этого должны быть изучены возможные схемы воздействий на элементы конструкций и освоены методы определения сопротивления конструкций этим воздействиям.

Строительная механика среди других технических дисциплин выделяется тем, что в ней изучают вопросы расчета строительных сооружений на прочность, жесткость и устойчивость. Рассматриваются методы расчета, обеспечивающие проектирование конструкций, рациональных с точки зрения прочности и устойчивости, а также удовлетворяющие требованиям экономичности.

Всякое сооружение является комплексом отдельных элементов, связанных между собой, и учет взаимодействия этих элементов является часто довольно сложным. Поэтому в строительной механике рассматривают не действительное сооружение, а его упрощенную, так называемую расчетную схему. Эта схема должна быть простой, но вместе с тем как можно больше соответствовать условиям работы сооружения в целом.

В строительной механике пользуются теми же допущениями и ограничениями, что и в сопротивлении материалов, но применительно не к отдельному элементу, а ко всему сооружению в целом. Под сооружениями в строительной механике подразумевают совокуп-

ность отдельных элементов, соединенных между собой связями и образующих некоторую неизменяемую пространственную, плоскую или линейную систему.

Следует особое внимание обратить на то, что расчет сооружений опирается на два основных момента – воздействия и сопротивления. Воздействиями являются нагрузки, вес здания и оборудования, ветровое давление, динамические нагрузки, осадки грунта, тепловые воздействия, землетрясения и т.д. Сопротивление представляет собой основную функцию несущих конструкций системы, которые должны противостоять всем действующим на сооружение воздействиям. Отсюда возникает немалое количество подразделов курса, подходы и приемы расчета сооружений, которые следует освоить и уметь правильно применить на практике.

В краткий перечень подразделов входят: кинематический анализ стержневых систем; определение усилий в статически определимых стержневых системах при неподвижной и подвижной нагрузках; основные теоремы о линейно-деформируемых системах; определение перемещений; расчет статически неопределимых систем методами сил, перемещений, смешанным, комбинированным; матричный метод расчета перемещений стержневых систем: пространственные системы; расчет сооружений методом конечных элементов; расчет конструкций методом предельного равновесия; динамический расчет сооружений; устойчивость сооружений.

ЧАСТЬ I

1.1. Аналитический метод расчета статически определимых стержневых систем на неподвижную нагрузку

Цель расчета состоит в определении внутренних усилий во всех или отдельных элементах строительного сооружения. Каким образом в теоретической механике или в сопротивлении материалов используется «метод мысленного сечения» и метод замены связей.

Метод сечений заключается в том, что сооружение рассекается на две части, одна из них отбрасывается (любая часть), а её действие на оставшуюся часть заменяется внутренними усилиями. Составленные уравнения равновесия отсеченной части дают уравнения для определения неизвестных усилий: в пространственном случае эти уравнения проекций всех сил на три оси координат равны нулю и сумма моментов всех сил (в том числе и внутренних усилий) относительно этих трёх осей также равны нулю. В плоскости составляются три уравнения равновесия. Причем, чтобы упростить составленные уравнения равновесия, используется способ «моментных точек».

В способе «моментной точки» сумма моментов сил приравнивается к нулю, относительно моментной точки, где пересекаются линии действия двух и более неизвестных усилий.

В «способе проекций» приравниваются нулю суммы проекций сил на оси координат. Если в мысленное сечение попадает только один стержень, то для определения усилий удобно оси координат направить вдоль и перпендикулярно оси стержня, как это делается в курсе сопротивления материалов. В этом случае изгибающий момент равен алгебраической сумме моментов сил, действующих на одну из отсеченных частей; поперечная сила равна алгебраической сумме проекций тех же сил на нормаль к оси стержня; продольная сила равна алгебраической сумме проекций тех же сил на касательную к оси стержня.

Правило знаков продольных и поперечных сил такое же, как и в курсе сопротивления материалов, а для моментов это правило отменяется, вместо него вводится соглашение, что изгибающий момент строится в той стороне балки, где от изгиба будут испытывать растяжение.

Пример. Рассмотрим нагруженную раму, показанную на рис. 1 а и построим эпюру внутренних усилий M , N , Q . Правильность построенных эпюр проверим вырезав узлы соединения D и K вертикальных и горизонтальных элементов рамы.

Решение. Определяем опорные реакции из условий равновесия рамы:

$$\Sigma M_A = -q \cdot 3 \cdot 0,5 + F \cdot 2 - M + R_B \cdot 4 = 0,$$

откуда $R_B = 3$ кН;

$$\Sigma x = H_A - F = 0,$$

тогда $H_A = 20$ кН;

$$\Sigma M_B = q \cdot 3 \cdot 3,5 - M + H_A \cdot 2 - V_A \cdot 2 = 0,$$

откуда $V_A = 27$ кН.

Для проверки спроектируем все силы на вертикальную ось:

$$\Sigma y = V_A - R_B - q \cdot 3 = 0,$$

то есть реакции найдены правильно.

Переходим к построению эпюр внутренних усилий. Для этого, прежде всего, разбиваем раму в соответствии с нагрузкой и переломами её оси на участки: I участок – отрезок CD , II – DE , III – EK , IV – AD , V – BK (рис. 1 а).

Эпюра изгибающих моментов. *Участок I* представляет собой консоль, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой, поэтому можно без подробных вычислений построить соответствующую эпюру M (рис. 1 б). При этом

$$\frac{ql^2}{2} = \frac{10 \cdot 1^2}{2} = 5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок II нагружен равномерно распределенной нагрузкой. На таком участке эпюра M представляет собой квадратную параболу и для её построения необходимо знать значения моментов, по крайней мере, в трёх точках. Одну точку возьмём на левом конце участка, где

$$M_l = R_B \cdot 4 - F \cdot 3 - q \cdot 2 \cdot 1 = -68 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

вторую – на правом конце, где

$$M_r = R_B \cdot 2 - F \cdot 3 = -54 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

а третью – в середине участка, где

$$M_m = R_B \cdot 3 - F \cdot 3 - q \cdot 1 \cdot 0,5 = -56 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Отметим, что изгибающий момент в середине можно получить через значения момента на концах и балочный изгибающий момент:

$$M_m = \frac{M_l + M_r}{2} + \frac{ql^2}{8}.$$

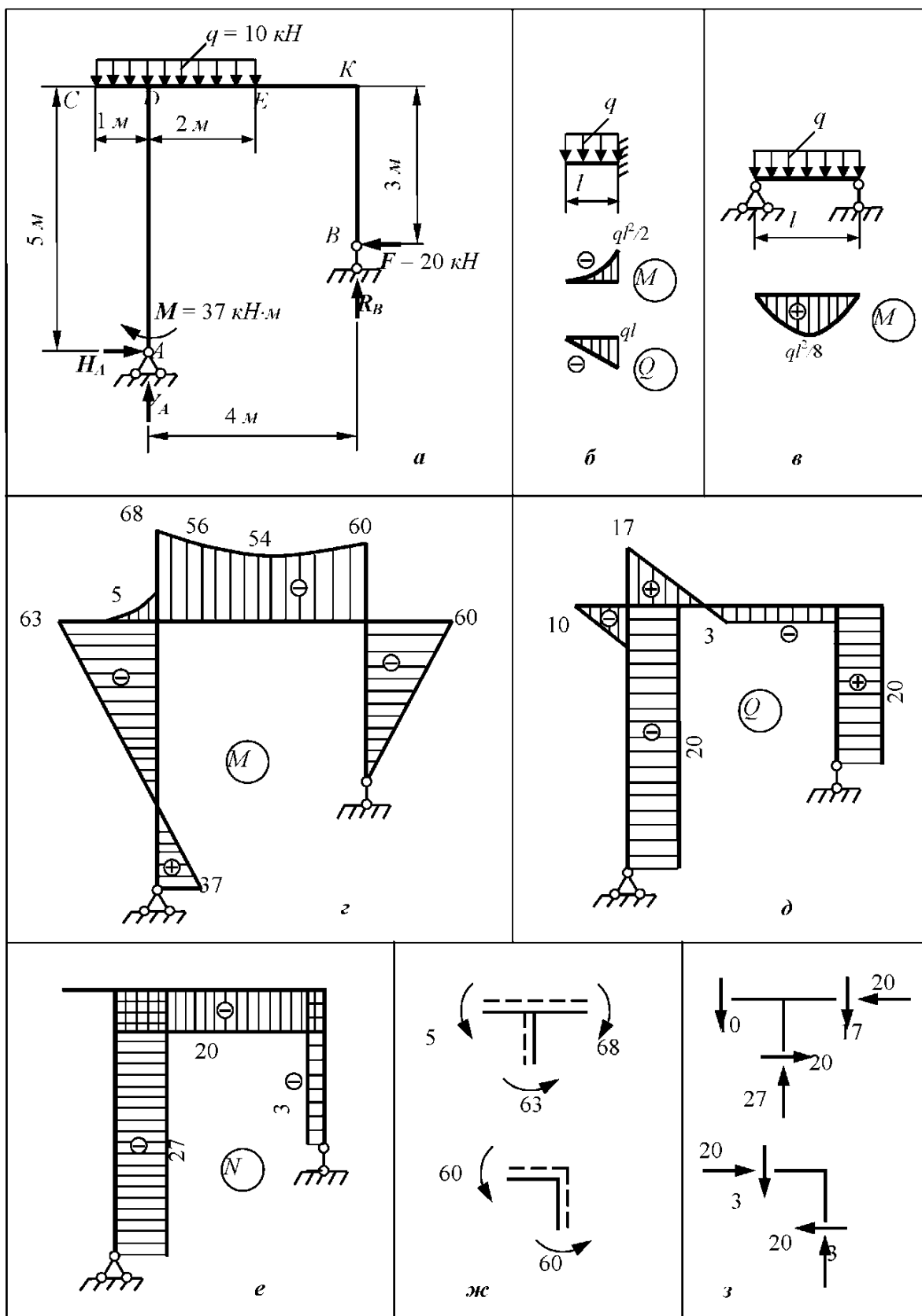


Рис. 1.

Здесь $ql^2/8$ представляет собой балочный момент в середине участка длиной l , нагруженного равномерно распределенной нагрузкой (рис. 1 в).

Участок III не нагружен. Эпюра M в этом случае линейная и для её построения достаточно иметь значения моментов в двух точках. Эти точки берём на концах участка. При этом момент на левом конце рассматриваемого участка, очевидно, должен совпадать с моментом на правом конце *II* участка, так как в точке E нет сосредоточенных моментов. Тогда

$$M_l = -54 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_r = -F \cdot 3 = -60 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок IV не нагружен. Значения моментов на концах

$$M_l = M = 37 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_r = -H_A \cdot 5 + M = -63 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Знаки моментов и обозначение концов (левый – l , правый – r) определены в предположении, что низ стержня находится внутри рамы.

Участок V также не нагружен. Для него $M_l = -60 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $M_r = 0$.

По полученным данным построена эпюра изгибающих моментов M (рис. 1 з).

Эпюра поперечных сил. *Участок I*. Здесь, как и при построении эпюры M , можно воспользоваться известной эпюрой Q для консольной балки (рис. 1 б).

Участок II. На участке с равномерно распределенной нагрузкой эпюра поперечных сил линейная. Для её построения достаточно иметь значения Q в двух точках, например, на левом конце:

$$Q_l = V_A - q \cdot 1 = 17 \text{ кН}$$

и на правом

$$Q_r = -R_B = -3 \text{ кН}.$$

Участок III без нагрузки, поэтому здесь $Q = \text{const}$ и для любого сечения

$$Q = -R_B = -3 \text{ кН}.$$

Участок IV. Здесь нагрузки нет, поэтому

$$Q = -H_A = -20 \text{ кН} = \text{const}.$$

Участок V. Как и на предыдущих участках поперечная сила постоянна:

$$Q = F = 20 \text{ кН}.$$

По полученным значениям построена эпюра Q (рис. 1 д).

Эпюра продольных сил. *Участок I*. При наличии на стержне только нагрузки, перпендикулярной к его оси, продольная сила в пределах стержня не меняется. Тогда для произвольного сечения получаем $N = 0$.

Из тех же соображений на *участках II и III* продольная сила постоянна и равна

$$N = -F = 20 \text{ кН.}$$

Участок IV:

$$N = -V_A = -27 \text{ кН.}$$

Участок V:

$$N = -R_B = -3 \text{ кН.}$$

По этим данным построена эпюра (рис. 1 е).

Правильность построения эпюр можно проверить по равновесию узлов.

Проверка моментов проиллюстрирована на рис. 1 ж. Здесь направления моментов показаны в соответствии с положением растянутых волокон (для удобства на рис. 1 ж стороны стержней с растянутыми волокнами обозначены штриховыми линиями).

Поперечные и продольные силы в узлах рамы показаны на рис. 1 в.

При изображении поперечных сил следует помнить, что положительная сила должна вращать узел по часовой стрелке, а отрицательная – против. В соответствии с правилом знаков положительная продольная сила растягивает стержень, отрицательная – сжимает.

Как видим, в нашем примере суммы моментов в узлах на рис. 1 ж равны нулю, так же, как и суммы проекций сил в узлах на рис. 1 в.

Отметим, что при определении поперечных сил во многих случаях, особенно в рамах со сложной конфигурацией осей и большим числом нагрузок, удобно определять поперечные силы через изгибающие моменты на концах участка. Если при этом участок нагружен равномерно распределенной нагрузкой, получаем:

$$Q_l = \frac{M_r - M_l}{l} + \frac{ql}{2};$$

$$Q_r = \frac{M_r - M_l}{l} - \frac{ql}{2},$$

где M_r и M_l – изгибающие моменты на правом и левом концах участка; l – длина участка.

Например, на участке II получим:

$$Q_l = \frac{-54 - (-68)}{2} + \frac{10 \cdot 2}{2} = 17 \text{ кН};$$

$$Q_r = \frac{-54 - (-68)}{2} - \frac{10 \cdot 2}{2} = -3 \text{ кН.}$$

При отсутствии нагрузки на участке достаточно принять в приведённых выражениях $q = 0$. Например, на участке III

$$Q = \frac{M_r - M_l}{l} = \frac{-60 - (-54)}{2} = -3 \text{ кН.}$$

1.2. Методы расчета сооружений на подвижную нагрузку

1.2.1. Общие сведения. Статический метод построения линий влияния

Подвижная нагрузка изменяет своё положение на сооружении во времени. В связи с этим изменяются усилия и напряжения в сечениях сооружения, перемещения его точек и другие факторы.

График, показывающий изменение исследуемого фактора (усилия в фиксированном сечении, перемещения и др.) при движении по сооружению единичной силы постоянного направления, называют **линией влияния**.

С помощью линий влияния выполняют расчет линейно-деформируемых систем на подвижную нагрузку.

Обычно подвижная нагрузка является результатом действия сил тяжести, поэтому единичную вертикальную силу называют **единичным грузом**.

Воображаемую линию, по которой перемещается единичный груз на сооружении, называют **грузовой линией**.

Для построения линий влияния применяют статический и кинематический методы.

При построении линий влияния *статическим методом* устанавливают единичную силу в произвольное положение, определяемое в выбранной системе координат абсциссой x . Затем известными способами находят значение исследуемого фактора $S(x)$. Далее, задавая характерные положения (x_i) единичной силы, определяют соответствующие значения $S(x_i)$ и в прямоугольных координатах $x - S$ строят график зависимости $S(x)$, то есть линию влияния S .

Пример. Построить статическим методом линии влияния опорных реакций и внутренних усилий в сечении K однопролётной балки (рис. 2 а).

Решение. *Линия влияния опорной реакции R_A .* Выбрав начало координат на опоре A и направив положительную ось x вправо, устанавливаем груз $F = 1$ в произвольное положение. Опорная реакция R_A определяется из условия равновесия $\sum M_B = 0$:

$$R_A l - F(1 - x) = 0;$$

$$R_A = F \frac{1 - x}{l},$$

при $F = 1$:

$$R_A = \frac{1 - x}{l}.$$

Полученная зависимость линейна, её график (рис. 2 б) изображается прямой, проходящей через точки $x = 0, R_A = 1, x = l, R_A = 0$.

Линия влияния опорной реакции R . Аналогично предыдущему, из условия равновесия $\Sigma M_A = 0$ получаем:

$$R_B = F \frac{x}{l}, \quad \text{или} \quad R_B = \frac{x}{l}.$$

При $x = 0$ $R_B = 0$; при $x = l$ $R_B = 1$. Линия влияния R_B построена на рис. 2 в.

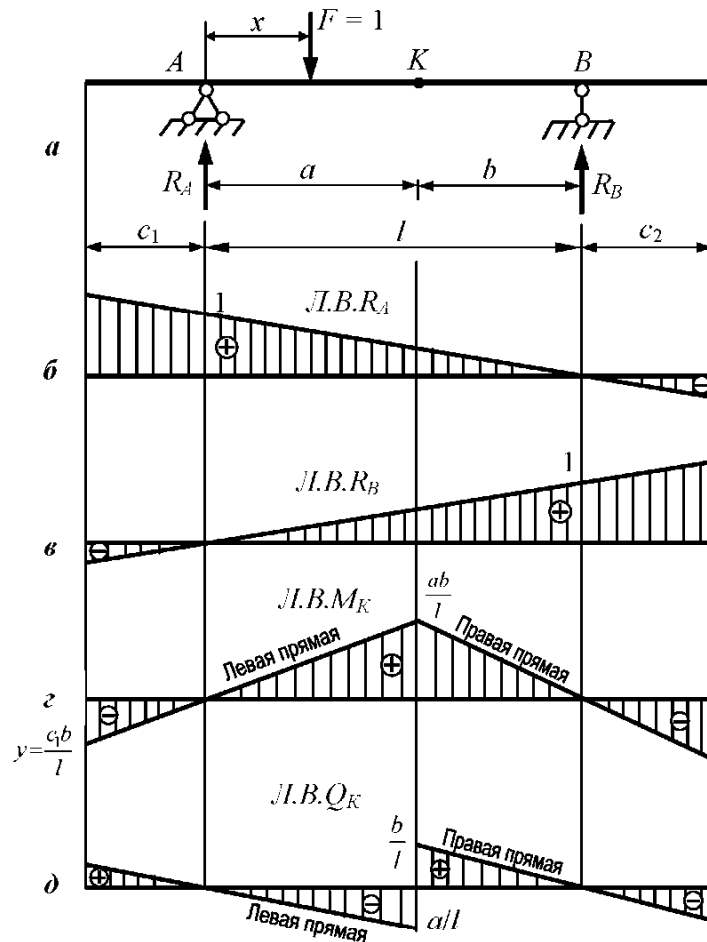


Рис. 2.

Линия влияния изгибающего момента в сечении K . При вычислении внутренних усилий используем полученные ранее зависимости для R_A и R_B .

Установив груз в произвольном положении слева от сечения K ($-c_1 < x < a$), рассмотрим равновесие правой части балки:

$$M_K = R_B b = \frac{x}{l} b.$$

График полученной линейной зависимости (левая прямая на рис. 2 з) можно построить по двум точкам: $x=0, M_K=0$; $x=a, M_K=ab/l$.

Если груз $F=1$ находится справа от сечения K [$a < x < (l+c_2)$], удобно рассматривать левую часть балки:

$$M_K = R_A a = \frac{l-x}{l} a.$$

При $x = a$ $M_K = \frac{l-a}{l} a = \frac{ab}{l}$, при $x = l$ $M_K = 0$.

Правая прямая построена на рис. 2 з.

Линия влияния поперечной силы в сечении K . Груз находится слева от сечения K . Из условия равновесия правой части получаем

$$Q_K = -R_B = -x/l.$$

Левая прямая на рис. 2 д построена по точкам: $x=0$, $Q_K=0$; $x=a$, $Q_K=a/l$.

Груз находится справа от сечения K :

$$Q_K = R_A = \frac{l-x}{l}.$$

Правую прямую на рис. 2 д построим по точкам:

$$x = a, Q_K = \frac{l-a}{l} = \frac{b}{l}; \quad x = l, Q_K = 0.$$

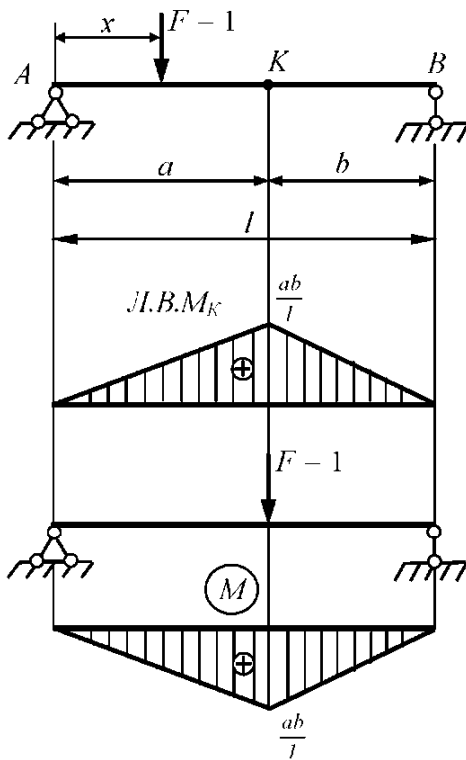


Рис. 3. Линии влияния внутренних усилий в точке K балки в двух опорах.

$M_K = R_A \cdot a = \frac{l-x}{l} a = \frac{ab}{l}$ или $M_K = R_B \cdot b = \frac{x}{l} b = \frac{ab}{l}$; поэтому эпюра M от силы $F=1$ представлена на этом же рисунке.

Для консольной балки, что приведена на рис. 4, аналогичным образом строится линия влияния M_1 и Q_1 для точки 1.

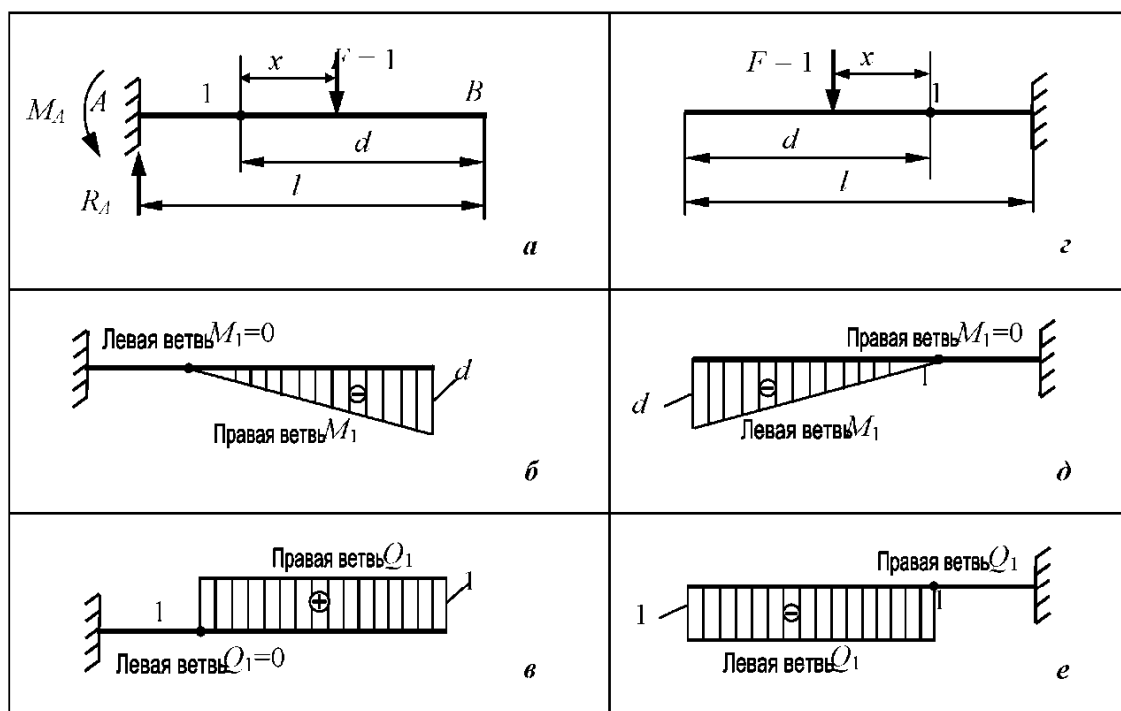


Рис. 4. Линии влияния внутренних усилий в точке 1 консольной балки.

В этом случае начало координат надо поместить в точке 1 и направить ось в сторону свободного конца балки. При определении усилий независимо от положений груза надо рассматривать часть балки, свободную от опорных закреплений.

1.2.2. Определение усилий по линиям влияния

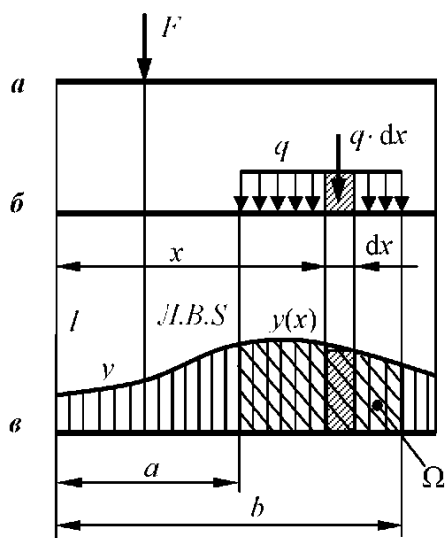


Рис. 5.

(рис. 5 б). Усилие от элементарной нагрузки $q \cdot dx$

$$dS = q \cdot dx \cdot y(x).$$

Усилия от нагрузки по линиям влияния определяют на основании линейной зависимости между усилиями и нагрузкой.

Пусть построена линия некоторого усилия S (рис. 5). Покажем вычисление этого усилия при действии некоторых видов *неподвижных нагрузок*.

Сосредоточенная сила F (рис. 5 а). Ордината y линии влияния S , находящаяся под сосредоточенной силой, представляет собой значение усилия S от нагрузки $F = 1$. Тогда от силы $F \neq 1$ получаем усилие

$$S = yF. \quad (2.1)$$

Равномерно распределенная нагрузка q

Усилие S получаем интегрированием:

$$S = \int_a^b qy(x)dx = q\Omega, \quad (2.2)$$

где Ω – площадь линии влияния в пределах нагрузки.

Если линия влияния в пределах распределенной нагрузки линейна, для определения усилия S нагрузке можно заменить равнодействующей.

Количество n сосредоточенных сил и m равномерно распределенных нагрузок:

$$S = \sum_{i=1}^n y_i F_i + \sum_{k=1}^m q_k \Omega_k. \quad (2.3)$$

При загрузении *подвижными нагрузками*, как правило, требуется вычислить наибольшее (наименьшее) усилие. В связи с этим, прежде всего необходимо найти положение нагрузки, дающее максимум (минимум) искомого усилия. После того, как это положение нагрузки, называемое *опасным* или *критическим*, найдено, усилие определяют по формуле (2.3).

При действии на сооружение подвижной нагрузки в виде одной *сосредоточенной силы* критическое положение нагрузки находится просто – оно соответствует наибольшей (наименьшей) ординате линии влияния.

Теперь рассмотрим загрузение линии влияния подвижной системой сил, которая представляет собой ряд не изменяющихся по величине сил с фиксированными расстояниями между ними (рис. 6 а).

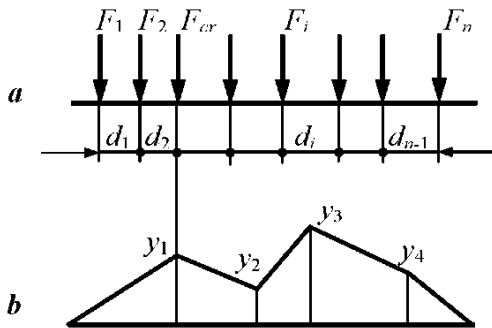


Рис. 6.

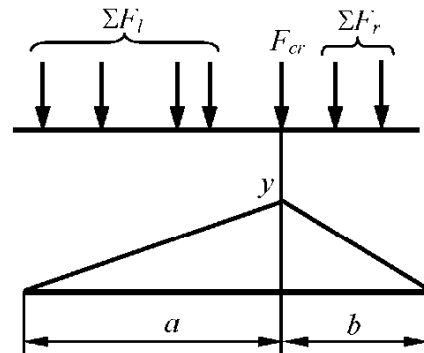


Рис. 7.

Пусть линия влияния некоторого усилия S имеет ломаное очертание (рис. 6 б). В этом случае максимум усилия достигается тогда, когда хотя бы одна из сил располагается над одной из вершин линии влияния, например y_1 . Эту силу и эту вершину называют *критическими*. Поиск критического положения нагрузки выполняют последовательной установкой сил над выпуклыми вершинами (y_1, y_3, y_4 на рис. 6 б) линии влияния и сравнением соответствующих значений усилия S .

Если линия влияния имеет одну вершину, т.е. очерчена по треугольнику (рис. 7), критическое положение нагрузки определяется неравенствами:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sum F_l + F_{cr}}{a} &\geq \frac{\sum F_l}{b}; \\ \frac{\sum F_l}{a} &\leq \frac{\sum F_r + F_{cr}}{b}. \end{aligned} \right\} (2.4)$$

Принимая вначале произвольный груз в качестве критического, проверяют неравенства (2.4). Если неравенства удовлетворяются – критический груз найден правильно, если нет, то необходимо выбрать критическим другой груз и снова проверить неравенства (2.4). При невыполнении первого неравенства, силы необходимо сместить влево, при невыполнении второго неравенства – вправо.

1.2.3. Линии влияния в многопролетной статически определимой балке

Многопролетную статически определимую балку (рис. 8 а) можно рассматривать как частный случай балки с узловой передачей нагрузки. Действительно, каждая вспомогательная балка этажной схемы (рис. 8 б) передаёт нагрузку через опору на нижележащую балку. Учитывая специфику многопролётной балки, рассмотрим порядок построения её линий влияния.

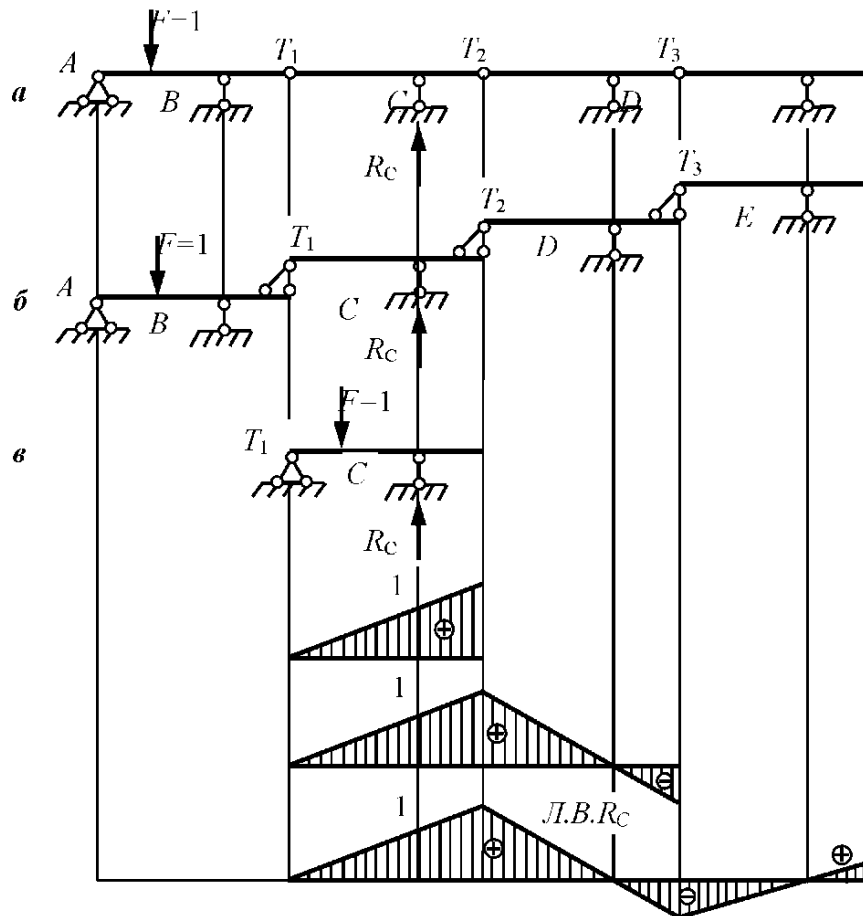


Рис. 8.

В первую очередь, единичный груз помещают на ту балку, в пределах которой находится сечение с искомым усилием, и для неё, как для обычной однопролётной балки, строят линию влияния. Последовательно перемещая груз на смежные балки, достраивают линию влияния влево и вправо, руководствуясь следующими правилами: если при переходе на смежную балку единичная сила опускается на ступеньку этажной схемы, то линия влияния в пределах этой балки и далее – нулевая; если сила поднимается на ступеньку, то линия влияния для этой балки – прямая, проходящая через крайнюю ординату линии влияния нижней балки и ноль на следующей опоре верхней балки.

На рис. 8 *в* показаны этапы построения линии влияния опорной реакции R_C .

Пример. Построив линии влияния, определить внутренние усилия в сечении 1 балки (рис. 9 *а*) от заданной нагрузки.

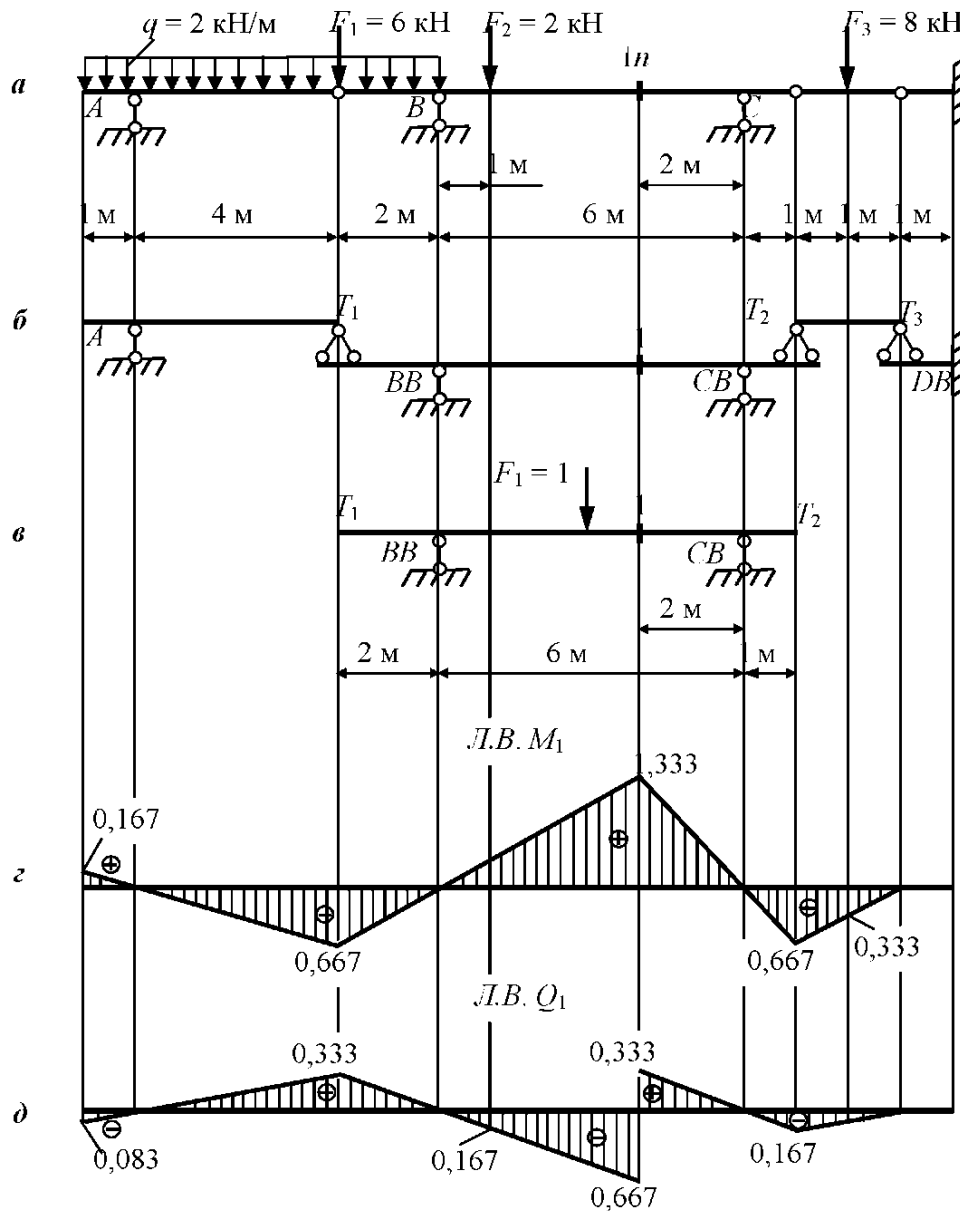


Рис. 9.

Решение. Построив этажную схему (рис. 9), строим линии влияния M_1 и Q_1 для однопролётной балки T_1BCT_2 (рис. 9 в). Достаивая полученные линии влево и вправо для смежных элементов AT_1 , T_2T_3 , T_3D , получаем линии влияния M_1 и Q_1 (рис. 9 г, д).

Определив из геометрических соотношений недостающие ординаты, находим:

$$M_1 = 6 \cdot (-0,667) + 2 \cdot 0,333 + 8 \cdot (-0,333) + 2 \cdot (0,167 \cdot 1 : 2 - 0,667 \cdot 6 : 2) = -9,84 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$Q_1 = 6 \cdot (0,333) + 2 \cdot (-0,167) + 8 \cdot (-0,083) + 2 \cdot (0,333 \cdot 6 : 2 - 0,083 \cdot 1 : 2) = 2,29 \text{ кН}.$$

1.3. Расчет ферм на неподвижную и подвижную нагрузку

1.3.1. Основные определения. Расчет на неподвижную нагрузку

Фермой называют геометрически неизменяемое сооружение, расчетная схема которого может быть представлена в виде системы прямолинейных стержней, соединенных по концам идеальными (без трения) шарнирами (рис. 10).

Точки, в которых соединяются стержни, называют **узлами**. Как правило, конструкция ферм предполагает передачу нагрузки в узлы. В связи с этим, стержни фермы работают только на осевое усилие (растяжение – сжатие).

Стержни, расположенные вверху и внизу по контуру фермы, образуют соответственно *верхний* и *нижний пояса* (рис. 10). Стержни, расположенные между поясами, образуют *решётку фермы*. Наклонные стержни решётки фермы называют *раскосами*, вертикальные – *стойками* или *подвесками*.

Опорные закрепления в фермах могут быть только шарнирные. Реакции в них определяются так же, как и в балках.

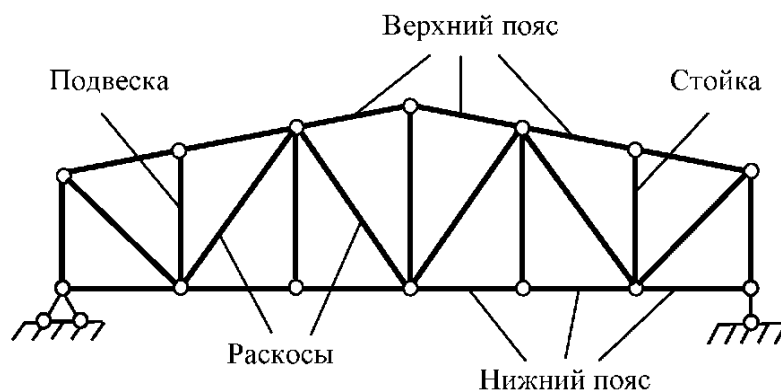


Рис. 10.

Для определения усилий в стержнях ферм применяют *метод сечений*, *кинематический метод* и *метод замены связей*. Усилия в различных стержнях всегда можно определить *способом моментной точки* или *способом проекций*.

Способ моментной точки. Найдя точку пересечения усилий в двух различных стержнях (моментную точку), составляют относительно неё уравнение моментов сил, действующих на одну из частей фермы. Из этого уравнения находят усилия в третьем стержне.

Способ моментной точки может быть применён и в том случае, когда сечение проходит более чем через три стержня, если при этом оси всех стержней, кроме одного, пересекаются в одной точке.

Способ проекций. Если два из трёх разрезанных стержней параллельны, то, составив уравнение проекций сил, расположенных с одной стороны от сечения, на перпендикуляр к параллельным стержням, получают уравнение для определения усилий в третьем стержне.

Способ двух сечений. Часто при вычислении усилия невозможно провести сечение так, чтобы оно пересекало только три стержня. Пусть сечение проходит через четыре стержня; при этом удаётся провести вспомогательное сечение также через четыре стержня, разрезав при этом не более двух новых стержней. Используя способ моментной точки или проекций, для этих сечений можно составить условия равновесия так, чтобы в них входили только усилия в двух повторяющихся стержнях. Решив полученную систему уравнений, находят искомые усилия.

В частном случае вспомогательное сечение пересекает три стержня или вырезает узел. Тогда из уравнения равновесия для этого сечения сразу можно найти одно из усилий, входящих в основное сечение.

Способ замкнутого сечения. Иногда для вычисления усилий удобно провести замкнутое сечение, вырезающее часть фермы. При этом сечение может пересекать и более трёх стержней, если остальные стержни разрезаются дважды (в общем случае четное количество раз). Дважды разрезанные стержни образуют самоуравновешенные системы, поэтому остальные три усилия можно определить способом моментной точки или способом проекций.

Пример аналитического способа расчета

Способом вырезания узлов графически определить усилия в стержнях стропильной фермы (рис. 11 а).

Аналитическое решение. Определяем опорные реакции:

$$\Sigma M_A = 4 \cdot 5 + 3 \cdot 15 - R_B \cdot 20 = 0; \quad R_B = 6,25 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_B = -5 \cdot 5 - 3 \cdot 10 - 4 \cdot 15 + R_A \cdot 20 = 0; \quad R_A = 5,75 \text{ кН}.$$

Последовательно вырезаем узлы фермы и рассматриваем их равновесие.

Узел 1 (рис. 11 б):

$$\Sigma y = N_{1-2} \sin \alpha + R_A - 20 = 0;$$

$$\Sigma x = N_{1-2} \cos \alpha + N_{1-3} = 0,$$

где

$$\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 5^2}} = 0,371; \quad \cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{2^2 + 5^2}} = 0,928;$$

$$\alpha = 21^{\circ}47'.$$

Тогда

$$N_{1-2} = \frac{-5,75}{0,371} = -15,5 \text{ кН};$$

$$N_{1-3} = 15,5 \cdot 0,928 = 14,4 \text{ кН}.$$

Так как усилие N_{1-3} вычислено, можно вырезать узел 3 (рис. 11 в). По признаку нулевых стержней $N_{2-3} = 0$.

$$\Sigma x = -N_{1-3} + N_{3-5} = 0; \quad N_{3-5} = N_{1-3} = 14,4 \text{ кН}.$$

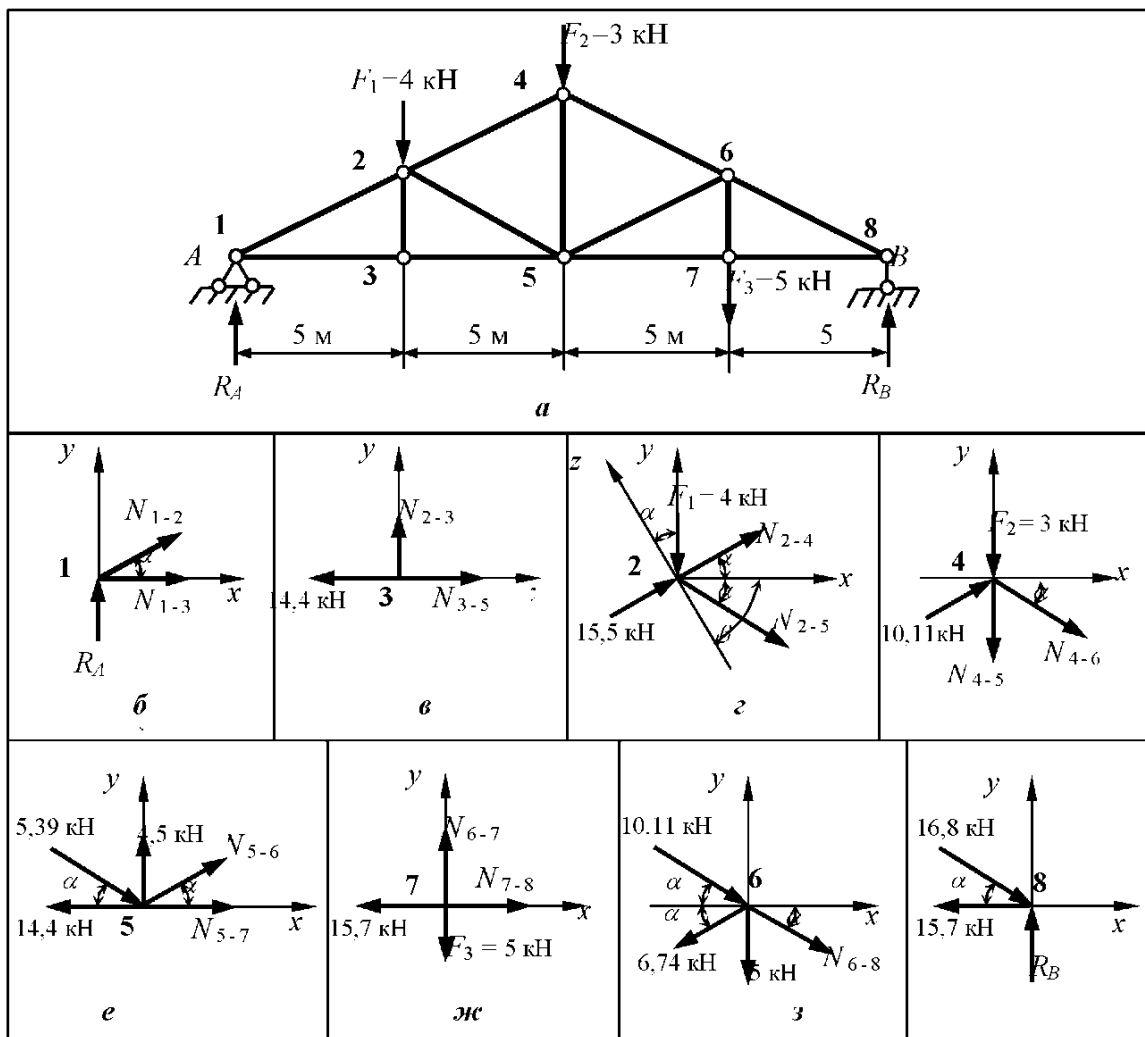


Рис. 11.

Узел 2 (рис. 11 з):

$$\beta = 90^\circ - 2\alpha = 90^\circ - 2 \cdot 21^\circ 47' = 46^\circ 26';$$

$$\cos\beta = 0,689; \quad \sin\beta = 0,725;$$

$$\Sigma z = -4 \cos\alpha - N_{2-5} \cos\beta = 0;$$

$$N_{2-5} = -\frac{4 \cdot 0,928}{0,689} = -5,39 \text{ кН};$$

$$\Sigma x = 15,5 \cos\alpha + N_{2-4} \cos\alpha - 5,39 \cos\alpha = 0,$$

откуда $N_{2-4} = 5,39 - 15,5 = -10,11 \text{ кН}$

Узел 4 (рис. 11 д):

$$\Sigma x = -10,11 \cos\alpha + N_{4-6} \cos\alpha = 0; \quad N_{4-6} = -10,11 \text{ кН};$$

$$\Sigma y = -3 + 2 \cdot 10,11 \sin\alpha - N_{4-6} = 0;$$

$$N_{4-5} = 4,5 \text{ кН}.$$

Узел 5 (рис. 11 е):

$$\Sigma y = 4,5 - 5,39 \sin\alpha + N_{5-6} \sin\alpha = 0; \quad N_{5-6} = -6,74 \text{ кН};$$

$$\Sigma x = 5,39 \cos\alpha - 6,74 \cos\alpha - 14,4 + N_{5-7} = 0; \quad N_{5-7} = 15,7 \text{ кН}.$$

Узел 7 (рис. 11 ж):

$$\Sigma y = N_{6-7} - 5 = 0; \quad N_{6-7} = 5 \text{ кН};$$

$$\Sigma x = -15,7 + N_{7-8} = 0; \quad N_{7-8} = 15,7 \text{ кН}.$$

Узел 6 (рис. 11 з):

$$\Sigma x = 10,11 \cos\alpha + 6,74 \cos\alpha - N_{6-8} \cos\alpha = 0; \quad N_{6-8} = 16,8 \text{ кН}.$$

Контроль:

$$\Sigma y = (-10,11 + 6,74 + 16,8) \sin\alpha - 5 = -0,02 \approx 0.$$

Для контроля также рассмотрим равновесие узла 8 (рис. 11, и):

$$\Sigma y = -16,8 \sin\alpha + 6,25 = 0,02 \approx 0;$$

$$\Sigma x = 16,8 \cos\alpha - 15,7 = 0,11 \approx 0.$$

1.3.2. Расчет ферм на подвижную нагрузку

При построении линий влияния реакций и усилий в фермах предполагают, что нагрузка перемещается по одному из поясов фермы, называемому **грузовым**. Если грузовой пояс верхний – говорят о *езде поверху*, если нижний – о *езде понизу*.

Характерной особенностью ферм является узловая передача нагрузки. Отсюда следует, что предельные положения единичной силы всегда соответствуют узлам грузового пояса, и линии влияния имеют ломаное очертание (без скачков).

Линии влияния опорных реакций балочных ферм имеют такой же вид, как и для балок.

Для построения линии влияния усилия в стержне фермы статическим методом важно выбрать рациональный способ вычисления этого усилия. При этом ферма и, соответственно, грузовой пояс, как правило, расчленяются на две или более частей. Устанавливая груз $F = 1$ на каждую из этих частей, выражают искомое усилие через x – координату груза – и строят линию влияния, не забывая об узловой передаче нагрузки.

При определении усилия способом моментной точки или способом проекций рассматривают два положения силы – слева и справа от сечения. Соответствующие этим положениям прямые на линии влияния обладают следующими свойствами: при определении усилия способом моментной точки левая и правая прямые пересекаются при продолжении под моментной точкой; при определении усилия способом проекций левая и правая прямые параллельны.

Эти свойства можно использовать как для построения линий влияния, так и для контроля их правильности.

Пример 1. Для фермы, приведенной на рис. 12, построить линии влияния усилий в отмеченных стержнях.

Решение. Для определения усилий N_1, N_2, N_3 проведём сечение $I-I$. Установим груз в произвольное положение, обозначим расстояние от него до левой опоры через x . При таком выборе начала отсчёта x опорные реакции определяются выражениями:

$$R_A = \frac{16-x}{16}; \quad R_B = \frac{x}{16}.$$

Линия влияния N_1 . Пусть груз находится слева от сечения $I-I$. Применяя способ моментной точки, получим:

$$\Sigma M_M = -R_B \cdot 12 + N_1 \cdot 4 = 0,$$

откуда $N_1 = R_B \cdot 3 = \frac{x}{16} \cdot 3$.

При $x = 0$ $N_1 = 0$; при $x = 4$ м $N_1 = 0,75$.

По полученным данным строим левую прямую.

Рассмотрим теперь случай, когда груз находится справа от сечения $I-I$:

$$\Sigma M_M = -R_A \cdot 4 - N_1 = 0,$$

откуда $N_1 = R_A = \frac{16-x}{16}$.

При $x = 8$ м $N_1 = 0,5$; при $x = 16$ м $N_1 = 0$. Строим правую прямую и учитываем узловую передачу нагрузки.

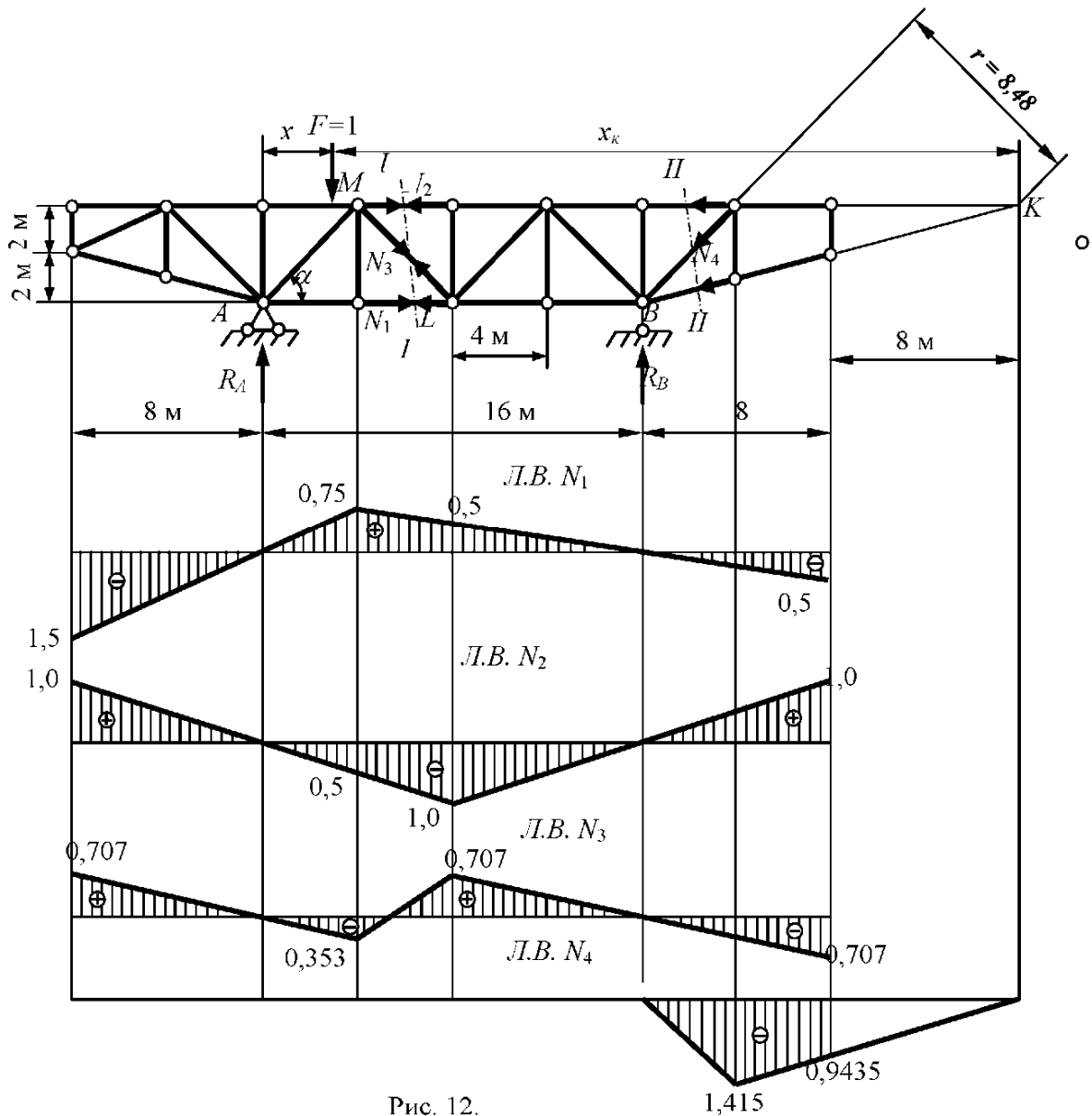


Рис. 12.

1,415

Отметим в качестве контроля, что левая и правая прямые действительно пересекаются под моментной точкой M .

Недостающие ординаты линии влияния определяем из геометрических соотношений.

Линия влияния N_2 . Груз $F=1$ слева от сечения $I-I$:

$$\sum M_i = -R_B \cdot 8 - N_2 \cdot 4 = 0,$$

откуда $N_2 = -R_B \cdot 2 = \frac{-x}{16} \cdot 2$.

При $x=0$ $N_2=0$; при $x=4$ $N_2=-0,5$.

Построив левую прямую, продолжим её до моментной точки и проведём правую прямую через найденную ординату и ноль под правой опорой фермы. Учитывая узловую

передачу нагрузки (в данном случае она не изменяет вид линии влияния), получаем линию влияния N_2 .

Линия влияния N_3 . Усилие N_2 определяем способом проекций. Груз $F' = 1$ слева от сечения $I - I$:

$$\Sigma y = R_B + N_3 \sin \alpha = 0;$$

здесь $\sin \alpha = 0,707$; тогда $N_3 = -R_B \cdot \frac{1}{0,707} = -\frac{x}{16} \cdot \frac{1}{0,707}$.

При $x = 0$ $N_3 = 0$; при $x = 4$ м $N_3 = -\frac{4}{16 \cdot 0,707} = -0,353$.

Груз $F' = 1$ справа от сечения $I - I$:

$$\Sigma y = R_A - N_3 \sin \alpha = 0;$$

$$N_3 = -R_A \cdot \frac{1}{0,707} = \frac{16 - x}{16} \cdot \frac{1}{0,707}.$$

При $x = 8$ м $N_3 = 0,707$; при $x = 16$ м $N_3 = 0$.

Контроль: левая и правая прямые линии влияния N_3 параллельны друг другу.

Линия влияния N_4 . Проведём сечение $II - II$. Усилие N_4 находим способом моментальной точки. Положение единичного груза удобно определять абсциссой x_K , отсчитанной от моментной точки K . При этом выражения для реакций R_A и R_B изменяются, и усилие лучше вычислять из условия равновесия правой (консольной) части фермы.

Если груз находится слева от сечения $II - II$, то $N_4 = 0$; если груз справа от сечения $II - II$, то

$$\Sigma M_K = F x_K - N_4 r = 0,$$

где $r = 8,48$;

$$N_4 = -\frac{x_K}{8,48}.$$

При $x_K = 8$ м $N_4 = -\frac{8}{8,48} = -0,943$; $x_K = 12$ м $N_4 = -\frac{12}{8,48} = -1,415$.

Учтя узловую передачу нагрузки, получаем линию влияния N_4 .

Контроль: левая (нулевая линия) и правая прямая пересекаются под моментной точкой K .

Замечание. Построение линий влияния N_1 , N_2 , N_3 можно несколько упростить, если воспользоваться соотношениями, связывающими эти усилия с опорными реакциями.

Так, для линии влияния N_1 при грузе слева

$$N_1 = R_B \cdot 3.$$

Это значит, что левая прямая должна совпадать с линией влияния R_B (рис. 13 а), увеличенной в 3 раза. Исходя из этого, проводим линию влияния $R_B \cdot 3$ и выделяем на ней ле-

вую прямую (рис.13 б). Дальнейшие построения выполняются так же, как было описано выше.

Пример 2. Для фермы, показанной на рис. 14, построить линии влияния усилий N_1 и N_2 и найти значение усилий от заданной нагрузки.

Решение. *Линия влияния N_1 .* Начало отсчета x помещаем на левой опоре. Тогда

$$R_A = \frac{24 - x}{24}; \quad R_B = \frac{x}{24}.$$

Проводим вспомогательное сечение $I-I$ и строим предварительно линию влияния N_3 , применяя способ моментной точки (рис. 14). Необходимые для этого геометрические данные:

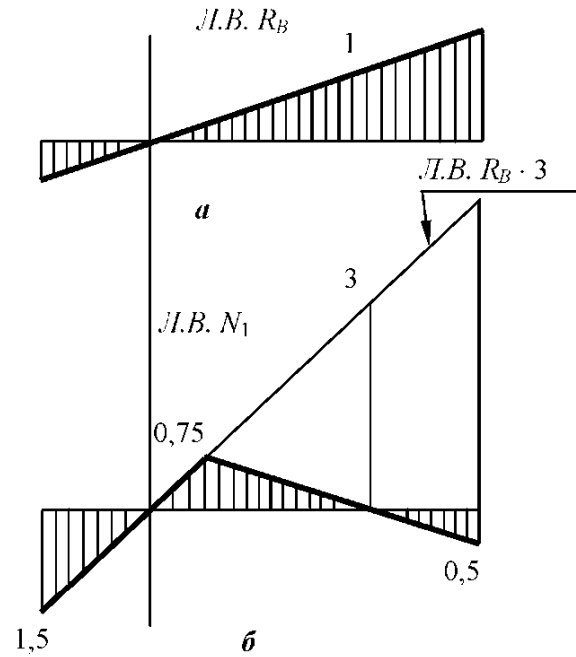


Рис. 13.

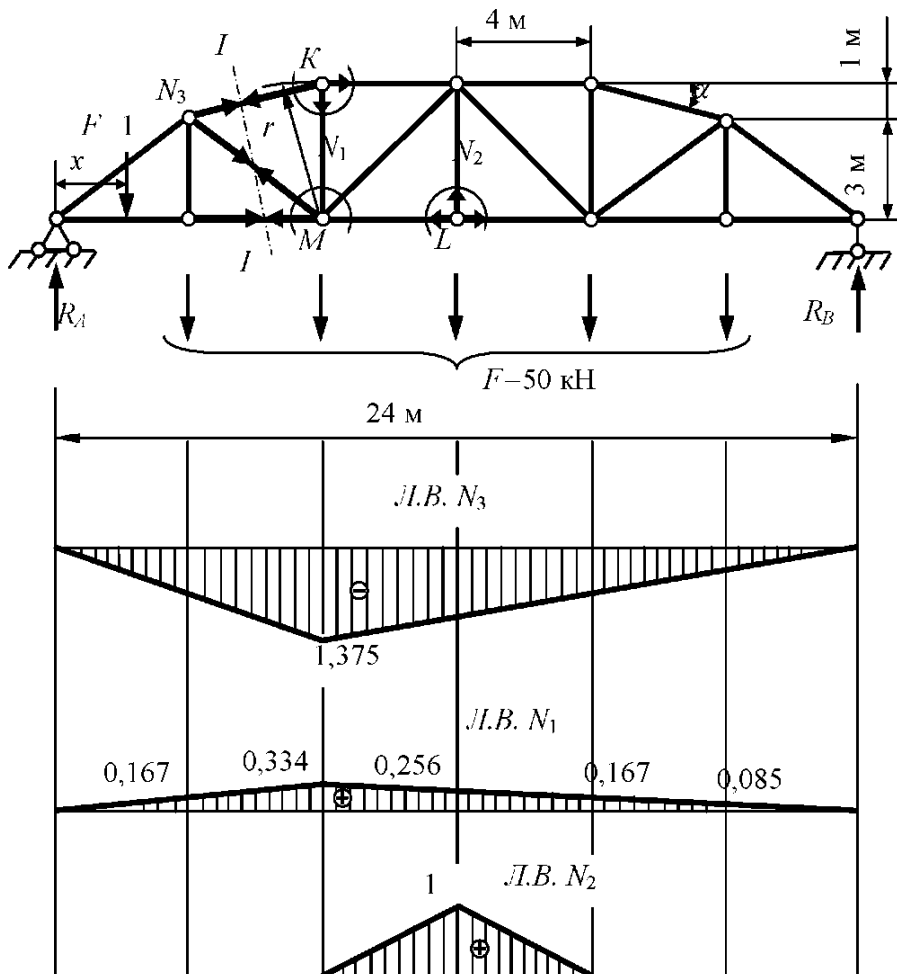


Рис. 14.

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 4^2}} = 0,243; \quad \cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{1^2 + 4^2}} = 0,97; \quad r = 4 \cdot 0,97 = 3,88 \text{ м.}$$

Теперь вырезаем узел K и, проектируя силы на ось y , получаем:

$$\Sigma y = -N_3 \sin \alpha - N_1 = 0;$$

$$N_1 = -N_3 \cdot 0,243.$$

Это соотношение справедливо при любом положении груза $F = 1$ на нижнем поясе. Следовательно, линию влияния получим умножением ординат линии влияния N_3 на коэффициент $(-0,243)$ (см. рис. 14).

Линия влияния N_2 . Усилие N_2 определяется из условия равновесия узла L . При этом возможны два случая 3положения нагрузки:

груз $F = 1$ приложен в узле L , тогда $N_2 = F = 1$;

груз находится вне узла L , тогда $N_2 = 0$.

Вычислив ординаты линии влияния в узлах фермы, определяем усилия N_1^0 и N_2 от заданной нагрузки:

$$N_1 = F \cdot (0,167 + 0,334 + 0,256 + 0,167 + 0,085) = 50,6 \text{ кН};$$

$$N_2 = F \cdot 1 = 50 \text{ кН.}$$

ЧАСТЬ 2

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СООРУЖЕНИЙ

2.1. Метод сил

2.1.1. Порядок расчета рам

Рамой называется система, состоящая из стержней, жестко соединенных в узлах. При этом некоторые из стержней могут быть соединены с другими также и шарнирно.

Расчет статически неопределимой рамы может быть произведен различными методами. Одним из важнейших является метод сил, в котором за основные (лишние) неизвестные принимают обобщенные реактивные силы в отброшенных связях системы.

Число лишних неизвестных, равное числу лишних связей и называемое степенью статической неопределимости, может быть определено исходя из формулы (2.1):

$$N = -W = C_0 + 2Ш - 3/l = C - 3/l, \quad (2.1)$$

где C – общее число связей.

Для рам с большим числом лишних связей степень статической неопределимости проще определять исходя из того, что каждый замкнутый бесшарнирный контур обладает тремя лишними связями, а каждый шарнир или ползун, введенные в такой контур, снимают по одной связи и снижают степень статической неопределимости на единицу. Тогда, обозначив количество замкнутых контуров через K , а количество снятых связей, т.е. общее число шарниров и ползунов, через $C_{сн}$, получим:

$$L = 3K - C_{сн}. \quad (2.2)$$

Все связи статически неопределимой системы разделяют на абсолютно необходимые и условно необходимые (они же условно лишние). При этом усилия в абсолютно необходимых связях оказываются статически определимыми.

Для перехода от заданной статически неопределимой рамы к основной системе нужно отбросить лишние связи и приложить вместо них неизвестные обобщенные силы X_1, X_2, \dots, X_n . Выбор основной системы является важным этапом расчета, так как от него зависит простота и точность расчета рамы.

После перехода к основной системе составляют канонические (написанные по определенному правилу) уравнения метода сил из условия, что основная система должна работать так же, как заданная:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \dots + \delta_{1n} X_n + \Delta_{1p} &= 0, \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \dots + \delta_{2n} X_n + \Delta_{2p} &= 0, \\ \dots & \\ \delta_{m1} X_1 + \delta_{m2} X_2 + \dots + \delta_{mn} X_n + \Delta_{mp} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Каждое из этих уравнений выражает условие, что перемещения по направлению каждой неизвестной обобщенной силы от всех неизвестных и от заданной нагрузки должны равняться нулю, так как в заданной системе по каждому из этих направлений имеются связи.

Входящие в канонические уравнения коэффициенты при неизвестных ($\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{22}, \dots, \delta_{nn}$) являются перемещениями основной системы по направлению неизвестных от единичных сил $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n$, действующих по направлению неизвестных X_1, X_2, \dots, X_n . Свободные же члены уравнений ($\Delta_{1p}, \Delta_{2p}, \dots, \Delta_{np}$) – это перемещения основной системы по направлению неизвестных от заданной нагрузки.

Коэффициенты при неизвестных и свободные члены уравнений определяют с помощью интеграла Максвелла–Мора; они выражаются формулами (2.4):

$$\delta_{ii} = \sum \int \frac{\bar{M}_i^2 ds}{EI}; \quad \delta_{ik} = \sum \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k ds}{EI}; \quad \Delta_p = \sum \int \frac{\bar{M}_i M_p ds}{EI}. \quad (2.4)$$

Предварительно должны быть построены эпюры $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_n$ от единичных сил $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n$ и эпюра M_p от заданной нагрузки.

Коэффициенты при неизвестных с одинаковыми индексами называют **главными**, а с разными – **побочными**. Как это следует из приведённых выше формул, главные коэффициенты (или главные перемещения), содержащие величину \bar{M}_i^2 , всегда положительны и не равны нулю. Побочные же коэффициенты (перемещения), содержащие произведение $\bar{M}_i \bar{M}_k$, могут быть положительными, отрицательными или равными нулю. Одно из важнейших требований к основной системе состоит в том, чтобы возможно большее число её побочных перемещений было равно нулю.

Вычисленные коэффициенты при неизвестных и свободные члены перед решением уравнений следует проверить. Универсальная, т.е. одновременная, проверка всех коэффициентов при неизвестных состоит в том, что их сумма $\Sigma \delta = \Sigma \delta_{ii} + 2 \Sigma \delta_{ik}$, представляющая собой условное перемещение по направлению всех неизвестных от всех единичных сил $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n$, должна быть равна величине

$$\delta_{\sigma\sigma} = \sum \int \frac{\bar{M}_\sigma^2 ds}{EI}. \quad (2.5)$$

При этом эпюра \bar{M}_σ , называемая **суммарной единичной эпюрой**, получается в результате сложения всех единичных эпюр:

$$\bar{M}_\sigma = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n. \quad (2.6)$$

Чтобы не перенести на эпюру \bar{M}_σ какую-нибудь случайную ошибку, вкраившуюся в одну из единичных эпюр, и не свести тем самым на нет всю проверку, следует строить эпюру \bar{M}_σ независимо от уже построенных эпюр $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_n$, т.е. непосредственно от единичных сил $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n$, действующих на основную систему одновременно.

Если универсальная проверка коэффициентов при неизвестных приводит к недопустимо большому расхождению (более 1%) между величинами, которые должны быть равны между собой, то для нахождения ошибки в вычислениях нужно произвести построчные проверки, которые состоят в том, что сумма коэффициентов при неизвестных каждого уравнения $\Sigma \delta_i = \delta_{i1} + \delta_{i2} + \dots + \delta_{in}$ должна быть равна величине

$$\delta_{i\sigma} = \sum \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_\sigma ds}{EI}. \quad (2.7)$$

Если построчные проверки дают расхождение только в одной строке, то ошибку следует искать в вычислении главного перемещения этой строки. Если же расхождения обнаруживаются одновременно в двух строках, то ошибка вероятнее всего допущена при вычислении того побочного перемещения, которое присутствует в обеих строках.

Проверка свободных членов уравнений состоит в том, что их сумма $\sum \Delta_{ip} = \delta_{1p} + \delta_{2p} + \dots + \delta_{np}$ должна быть равна величине

$$\Delta_{sp} = \sum \int \frac{\bar{M}_\sigma M_p ds}{EI} . \quad (2.8)$$

Для вычисления интегралов (2.5), (2.7) и (2.8) в случае прямолинейных стержней постоянного поперечного сечения может быть применен способ А.Н. Верещагина.

После определения и проверки всех коэффициентов при неизвестных и свободных членах канонических уравнений последние решают совместно и находят значения X_1, X_2, \dots, X_n .

Кажущаяся трудоемкость решения системы канонических уравнений метода сил (2.3) или метода перемещений (см. ниже формула (2.12)) при использовании среды Mathcad (любой из его версий от 2000 года по Mathcad'15 2008 года) преодолевается без особых затруднений. Для реализации решения систем линейных уравнений, как (2.3) и (2.12), достаточно составить матрицу с помощью кнопок-пиктограмм матриц образовать матрицу, например, $M(n, n)$ – для левой части систем и матрицу столбца $M_0(n, 1)$ – для правой части уравнений. Тогда операция умножения матриц $M^{-1} \times M_0$ дает ответ в виде матрицы столбца типа M_0 , где будет размещено решение систем (2.3) или (2.12).

Для вычисления коэффициентов систем (2.3) или (2.12) необходимо воспользоваться пиктограммой вычисления определенных интегралов Mathcad. Поэтому вычисления по формулам (2.4)–(2.8) определенных интегралов при применении среды Mathcad вовсе не исключает возможных технических ошибок в расчетах.

Для построения окончательной эпюры изгибающих моментов в раме (эпюры M) все ординаты единичных эпюр умножают на соответствующие значения X_1, X_2, \dots или X_n и складывают с ординатами эпюры M_p от заданной нагрузки:

$$M_{ок} = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_n X_n + M_p . \quad (2.9)$$

Проверкой правильности выполнения последней операции служит условие равновесия окончательных моментов во всех узлах рамы.

Итоговой проверкой окончательной эпюры изгибающих моментов ($M_{ок}$) рамы является **кинематическая проверка**. Если эпюра ($M_{ок}$) построена верно, то перемещение в основной системе, по которой в заданной системе данные перемещения запрещены, должно выполняться условие:

$$\Delta_{\sigma} = \sum \int \frac{\bar{M}_{\sigma} M_{ок} ds}{EI} = 0. \quad (2.10)$$

Точно так же, если M_{σ} заменим на \bar{M}_i , то должно выполняться любое из условий

$$\Delta_i = \sum \int \frac{\bar{M}_i M_{ок} ds}{EI} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2.11)$$

где \bar{M}_i – любая единичная эпюра; n – число неизвестных в раме.

Вариантом последней проверки является проверка по замкнутому контуру, состоящая в том, что сумма приведенных (т.е. деленных на жесткость EI соответствующих стержней рамы) площадей эпюры M , находящихся внутри каждого замкнутого бесшарнирного контура, должна быть равна сумме приведенных площадей, находящихся снаружи этого контура.

Эпюры поперечных сил (эпюры Q) и продольных сил (эпюры N) строят так же, как в статически определимых системах. При этом, для построения эпюры Q исходной может служить заданная нагрузка или построенная эпюра M , а для построения эпюры N – заданная нагрузка или построенная эпюра Q . При этом в последнем случае применяют способ вырезания узлов.

Проверка эпюр Q и N состоит в том, что для любой отсеченной части рамы сумма проекций на две оси всех действующих сил – внешних и внутренних – должна быть равна нулю.

Рассмотрим **пример** работы рамы, показанной на рис. 15.

Для рамы (рис. 15 а) построить эпюры M , Q и N и произвести промежуточные и окончательные проверки расчета.

Рама имеет в своих опорных закреплениях пять связей (две в опоре 1 и три в опоре 2), из которых две оказываются лишними. Следовательно, $\bar{I} = 2$ и система дважды статически неопределима.

На рис. 15 б показана основная система с неизвестными X_1 и X_2 . Канонические уравнения имеют вид:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0; \quad \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0.$$

Для вычисления перемещений, входящих в эту систему уравнений в виде коэффициентов при неизвестных и свободных членах, необходимо построить для основной системы эпюры изгибающих моментов от сил $\bar{X}_1 = 1$ и $\bar{X}_2 = 1$, действующих по направлению неизвестных, а также от заданной нагрузки. Эти эпюры, обозначенные соответственно \bar{M}_1 , \bar{M}_2 и M_p , показаны на рис. 15 в, г, е. Так как эпюры \bar{M}_1 и \bar{M}_2 ограничены прямыми линиями, то для нахождения перемещений можно воспользоваться «перемножением» эпюр

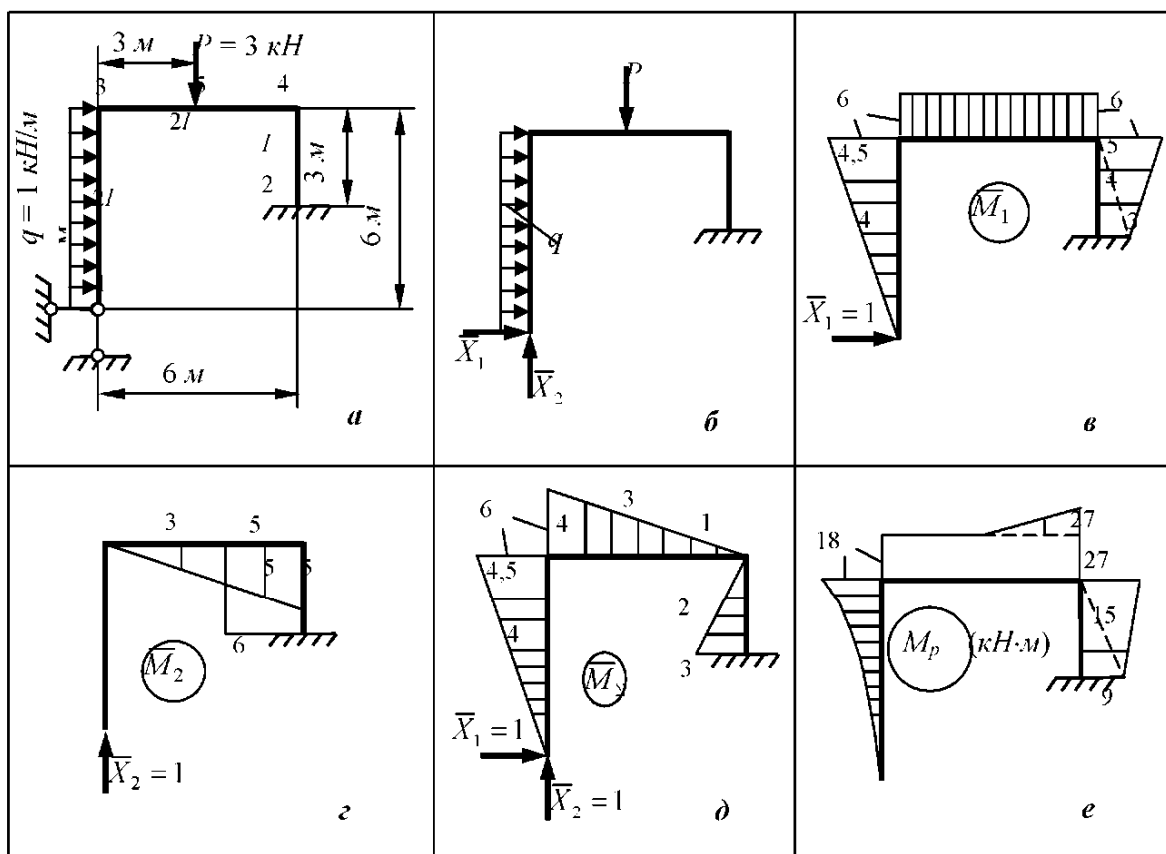


Рис. 15.

по способу А.Н. Верещагина. Индексы у перемещений показывают, какие эпюры перемножаются. Для удобства вычисляем перемещения, увеличенные в EI раз:

$$EI\delta_{11} = 6 \cdot 6 \cdot 4/(2 \cdot 2) + 6 \cdot 6 \cdot 6/2 + 3 \cdot 3 \cdot 4/(2 \cdot 1) + 6 \cdot 3 \cdot 5/2 = 207;$$

$$EI\delta_{12} = EI\delta_{21} = -6 \cdot 6 \cdot 3/2 - 4,5 \cdot 3 \cdot 6/1 = -135;$$

$$EI\delta_{22} = 6 \cdot 6 \cdot 4/(2 \cdot 2) + 6 \cdot 3 \cdot 6/1 = 144.$$

При вычислении δ_{11} и δ_{22} площади и ординаты берём из одних и тех же эпюр \bar{M}_1 или \bar{M}_2 . Трапециевидную эпюру \bar{M}_1 на правой стойке рамы разбиваем на два треугольника, каждый из которых при вычислении δ_{11} умножаем на соответствующую

ординату трапеции, т.е. на 4 и 5. При вычислении δ_{12} взята вся площадь трапеции $4,5 \cdot 3$ из эпюры \bar{M}_1 и умножена на ординату прямоугольной эпюры \bar{M}_2 , равную 6.

При перемножении эпюр следует придерживаться такого правила знаков: если обе эпюры одного знака, т.е. если они отложены с одной и той же стороны, то произведение и соответствующее перемещение считают положительными, если перемножаемые эпюры разных знаков, то – отрицательными. Естественно, что главные перемещения δ_{11} и δ_{22} , которые получаются умножением эпюры \bar{M}_1 на \bar{M}_1 и эпюры \bar{M}_2 на \bar{M}_2 , оказались положительными:

$$EI\Delta_{1p} = \frac{18 \cdot 6 \cdot 4,5}{3 \cdot 2} + \frac{18 \cdot 6 \cdot 6}{2} + \frac{9 \cdot 3 \cdot 6}{2 \cdot 2} + \frac{9 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot 1} + \frac{27 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 702;$$

$$EI\Delta_{2p} = -\left[\frac{18 \cdot 6 \cdot 3}{2} + \frac{9 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 2} + \frac{(9+27) \cdot 3 \cdot 6}{2} \right] \approx -520.$$

При вычислении свободных членов уравнений взята площадь эпюры M_p от заданной нагрузки и отдельные её участки умножены на ординаты эпюр \bar{M}_1 на \bar{M}_1 , расположенные против центра тяжести данного участка эпюры M_p .

Для проверки вычисленных коэффициентов при неизвестных и свободных членах уравнений построена суммарная единичная эпюра \bar{M}_σ от совместного действия сил $\bar{X}_1 = 1$ и $\bar{X}_2 = 1$ (рис. 15 д). Проверка коэффициентов при неизвестных состоит в том, что результат умножения эпюры \bar{M}_σ на эту же эпюру должен равняться сумме всех коэффициентов при неизвестных. Действительно,

$$EI\delta_{\sigma\sigma} = 6 \cdot 6 \cdot 4/(2 \cdot 2) + 6 \cdot 6 \cdot 4/(2 \cdot 2) + 3 \cdot 3 \cdot 2/(2 \cdot 1) = 81;$$

$$EI \Sigma \delta = EI (\delta_{11} + \delta_{22} + 2\delta_{12}) = 207 + 144 - 2 \cdot 135 = 81.$$

Проверку свободных членов уравнений производят путём умножения эпюры M_p на эпюру \bar{M}_σ :

$$EI\Delta_{\sigma p} = 18 \cdot 6 \cdot 4,5/(3 \cdot 2) + 18 \cdot 6 \cdot 3/2 + 9 \cdot 3 \cdot 1/(2 \cdot 2) - 3 \cdot 3 \cdot 15/2 = 182$$

и путём сложения свободных членов:

$$EI \Sigma \Delta_{ip} = EI (\Delta_{1p} + \Delta_{2p}) = 702 - 520 = 182.$$

Подставляя полученные и проверенные значения перемещений в уравнении и сокращая на EI , получаем:

$$207X_1 - 135X_2 + 702 = 0; \quad -135X_1 + 144X_2 - 520 = 0.$$

Решая эту систему уравнений, находим:

$$X_1 = -2,67 \text{ кН}; \quad X_2 = 1,11 \text{ кН}.$$

Окончательную эпюру изгибающих моментов строят согласно выражению (2.9):

$$M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + M_p = M_1 + M_2 + M_p.$$

Чтобы не ошибиться при вычислении изгибающих моментов в отдельных сечениях стержневой рамы, можно построить эпюры M_1 и M_2 путём умножения соответствующих единичных эпюр \bar{M}_1 и \bar{M}_1 на найденные значения неизвестных. Эпюры M_1 и M_2 показаны на рис. 16 а, б, а окончательная эпюра M – на рис. 16 в. Её статическая проверка состоит в том, что все узлы рамы должны быть уравновешены, т.е. сумма моментов в любом узле равна нулю (рис. 16 г). Такая проверка необходима, но недостаточна, так как может лишь служить контролем правильности суммирования отдельных эпюр. Кинематическая проверка состоит в том, что при умножении эпюры M на эпюру \bar{M}_σ по формуле (2.10) должен получиться нуль:

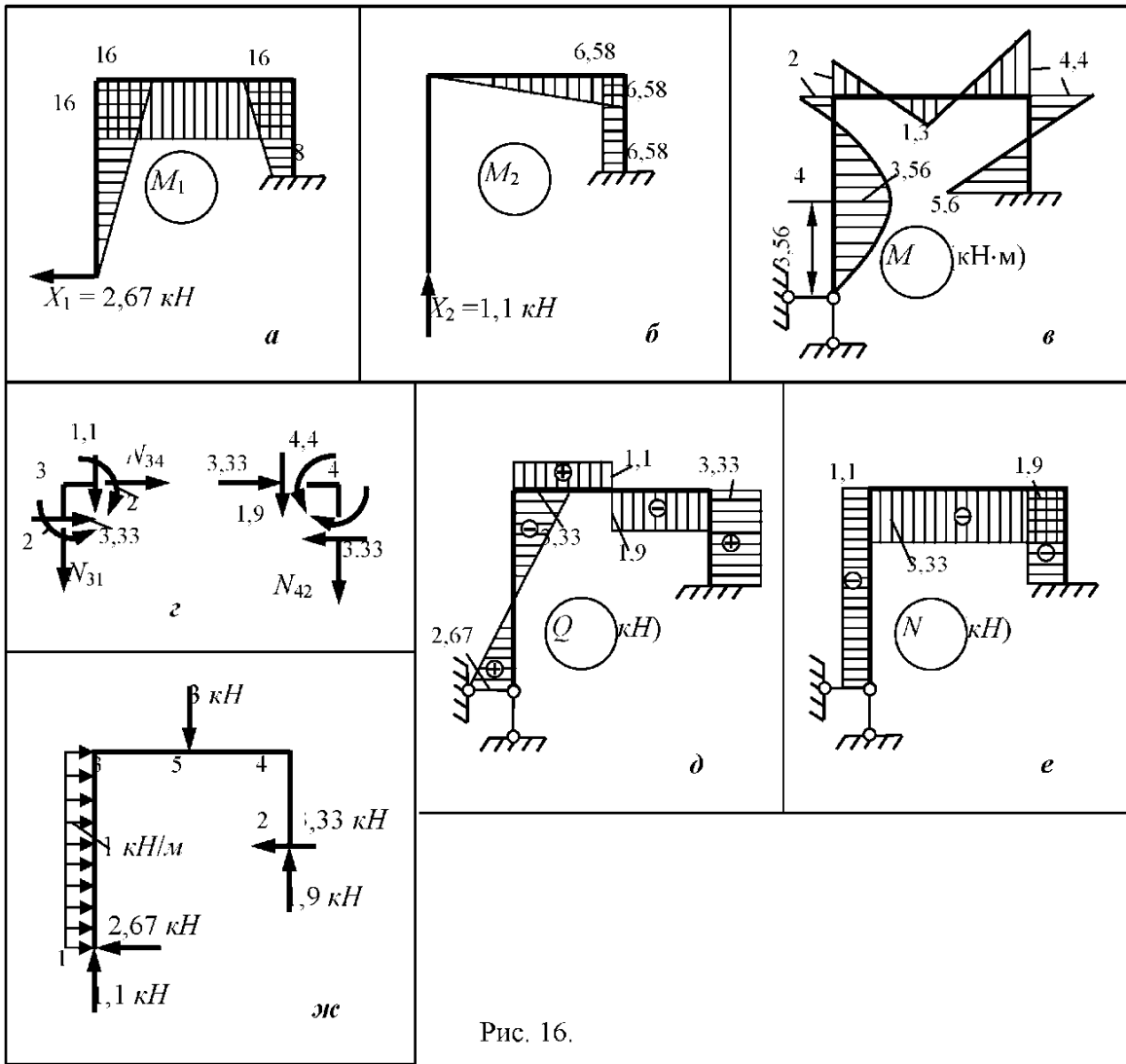


Рис. 16.

$$EI\Delta_{\sigma} = 2 \cdot 6 \cdot 4 / (2 \cdot 2) - 4,5 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 3 / (3 \cdot 2) + 2 \cdot 6 \cdot 4 / (2 \cdot 2) + 4,4 \cdot 2 \cdot 6 / (2 \cdot 2) - 4,5 \cdot 6 \cdot 3 / (2 \cdot 2) - 4,4 \cdot 3 \cdot 1/2 + 5,6 \cdot 3 \cdot 2/2 = 12 - 27 + 12 + 13,2 - 20,25 - 6,60 + 16,8 = 54 - 53,85 = 0,15.$$

Погрешность составляет всего

$$0,15 / 53,85 \cdot 100 \% = 0,28 \%$$

Допустимой можно считать невязку до 1%.

Для построения эпюр поперечных и продольных сил можно воспользоваться тем же способом, который был применен для построения окончательной эпюры изгибающих моментов, но для этого пришлось бы дополнительно построить эпюры $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, Q_p, \bar{N}_1, \bar{N}_2, N_p$. Поэтому более простым оказывается другой путь, основанный на использовании дифференциальной зависимости между изгибающим моментом и поперечной силой $\frac{dM}{ds} = Q$ и формулы для определения поперечной силы в нагруженном пролёте:

$$Q = Q^0 + (M_{\text{прав}} - M_{\text{лев}}) / l.$$

Рассмотрим каждый стержень отдельно.

На стержень 1 – 3 действует равномерно распределенная нагрузка интенсивностью 1 кН/м :

$$Q_{13} = 1 \cdot 6/2 + (-2 - 0)/6 = 3 - 0, \quad 33 = 2,67 \text{ кН};$$

$$Q_{31} = -3 - 0,33 = -3,33 \text{ кН}.$$

На левой половине стержня 3 – 4 поперечная сила оказывается равной:

$$Q_{35} = Q_{53} = (1,3 + 2)/3 = 1,10 \text{ кН},$$

на правой половине

$$Q_{54} = Q_{45} = (-4,4 - 1,3)/3 = -1,90 \text{ кН}.$$

На всём протяжении стержня 2 – 4 поперечная сила постоянна и равна

$$Q_{24} = Q_{42} = (5,6 + 4,4)/3 = 3,33 \text{ кН}.$$

Эпюра поперечных сил показана на рис. 16 д.

Для построения эпюры продольных сил вырезают узлы 3 и 4 и к ним взамен отброшенных стержней прикладывают известные поперечные силы и неизвестные продольные силы (рис. 16 е). При этом положительные поперечные силы направляют так, чтобы они вращали узлы по часовой стрелке. Искомые продольные силы направляют от узла, т.е. предварительно принимают растягивающими. Получение результатов со знаком минус означает, что тот или другой стержень сжат.

Для узла 3:

$$\Sigma X = 3,33 + N_{34} = 0; \quad N_{34} = -3,33 \text{ кН (сжатие)};$$

$$\Sigma Y = -1,1 - N_{31} = 0; \quad N_{31} = -1,1 \text{ кН (сжатие)}.$$

Для узла 4:

$$\Sigma Y = -1,9 - N_{42} = 0; \quad N_{42} = -1,9 \text{ кН (сжатие)}.$$

Продольная сила $N_{43} = -3,3 \text{ кН}$ в этом узле уже показана сжимающей.

Эпюра N изображена на рис. 16 е. Проверкой построенных эпюр Q и N служит проверка равновесия сил для всей рамы.

На рис. 16 ж' показана рама с отброшенными связями и с приложенными взамен силами, взятыми из эпюр Q и N :

$$\Sigma X = 1 \cdot 6 - 2,67 - 3,33 = 0; \quad \Sigma Y = -3 + 1,1 + 1,9 = 0.$$

Следовательно, эпюры построены правильно.

Необходимо ещё вычислить максимальные изгибающие моменты в пролётах ригеля и левой стойки. Положение сечений, в которых возникают эти моменты, определяем по эпюре поперечных сил.

В ригеле поперечная сила меняет знак под сосредоточенной силой P . Пользуясь дифференциальной зависимостью Д.И. Журавского между изгибающим моментом и поперечной силой, найдём

$$M_{max} = Q_{35} l / 2 - M_{35} = 1,1 \cdot 6 / 2 - 2 = 1,3 \text{ кН} \cdot \text{м} .$$

На стойке сечение, в котором изгибающий момент достигает наибольшей величины, определяем исходя из дифференциальной зависимости между нагрузкой и поперечной силой:

$$x_0 = Q_{13} / q = 2,67 / 1,0 = 2,67 \text{ м} .$$

Для определения наибольшего изгибающего момента в пролёте стойки служит зависимость между изгибающим моментом и поперечной силой:

$$M_{max} = Q_{13} \cdot x_0 / 2 = 2,67 \cdot 2,67 / 2 = 3,56 \text{ кН} \cdot \text{м} .$$

2.2. Расчет рам методом перемещений

2.2.1. Последовательность расчета рам

Как и метод сил, метод перемещений является одним из важнейших методов расчета статически неопределимых систем. В качестве основных неизвестных в этом методе принимают упругие перемещения узлов системы: углы поворота узлов и их линейные перемещения (рис. 17 а).

Общее число неизвестных метода перемещений n , называемое **степенью кинематической неопределимости** системы, определяют как сумму неизвестных углов поворота n_y и неизвестных линейных перемещений узлов n_d :

$$n = n_y + n_d .$$

Число неизвестных углов поворота равно числу «жестких» узлов, вследствие чего определение n_y сводится к простому подсчету числа «жестких» узлов рамы (например, узлы 2, 3 на рис. 17 а).

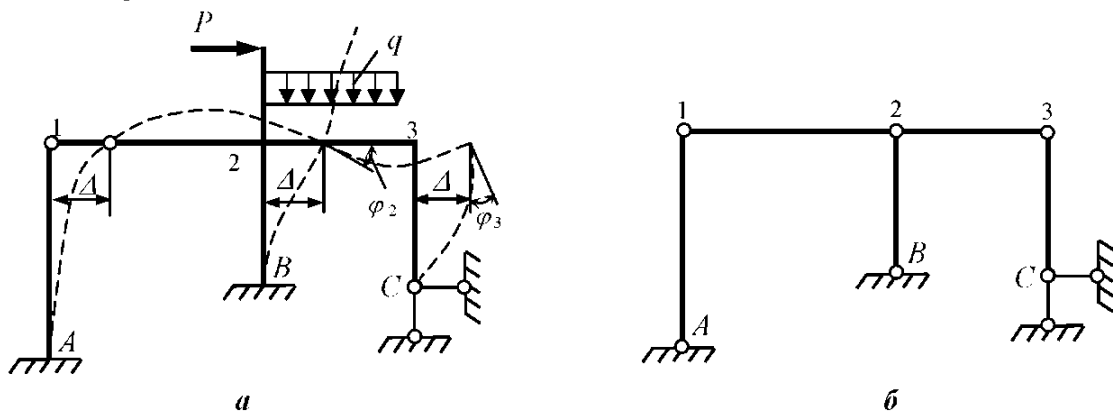


Рис. 17.

Для определения числа линейных перемещений узлов n , вводится предположение о том, что длина хорд упругих линий прямых стержневой рамы после их деформации остаются равными первоначальным длинам этих стержней, т.к. не учитывается сближение концов прямого стержня при его изгибе и действии продольной силы. В результате этого число независимых линейных смещений узлов заданной системы будет равно степени свободы шарнирной схемы, полученной из заданной системы введением шарниров во все узлы, включая и опорные (рис. 17 б). При этом, все статически определимые консоли, если они имеются в заданной системе, должны быть предварительно отброшены.

Таким образом, для рамы, представленной на рис. 17 а, число независимых линейных перемещений узлов будет равно:

$$n_d = 2Y - C - C_0 = 12 - 5 - 6 = 1,$$

а общее число неизвестных при $n_y = 2$ составит

$$n = 2 + 1 = 3.$$

В том случае, если заданная система содержит кроме прямых и криволинейные стержни (рис. 18), необходимо учитывать возможное сближение концов криволинейных стержней после их деформации. При этом формула, определяющая число независимых линейных смещений узлов системы, получит следующий вид:

$$n_d = a + 2Y - C - C_0,$$

где a – число криволинейных стержней.

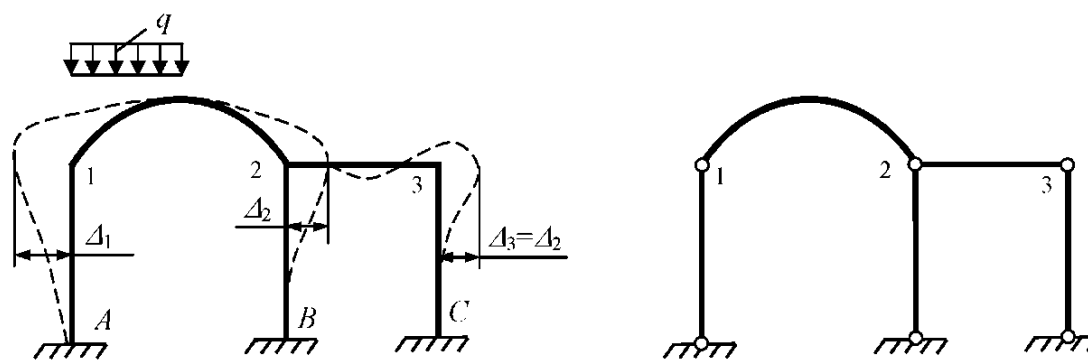


Рис. 18.

Например, для рамы, изображённой на рис. 18, будем иметь:

$$n_d = 1 + 12 - 5 - 6 = 2 \text{ и } n = 3 + 2 = 5.$$

После определения числа неизвестных образуют основную систему метода перемещений путём наложения на узлы заданной системы связей, препятствующих их перемещениям. В соответствии с принятыми неизвестными эти связи бывают двух типов: связи, препятствующие повороту узлов (зашемления), и связи, препятствующие линейным перемещениям узлов (опорные стержни) (рис. 19). Заметим, что водимые в основную систему

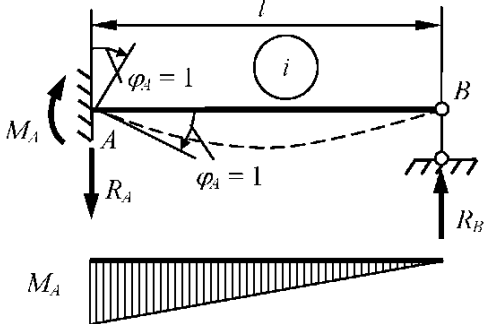
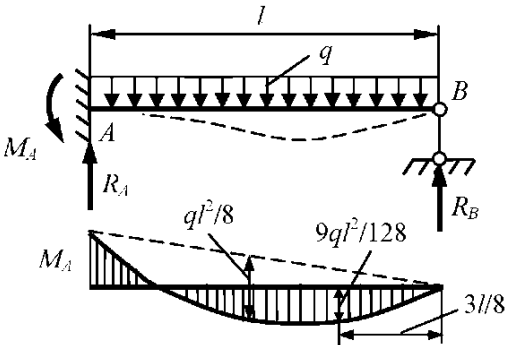
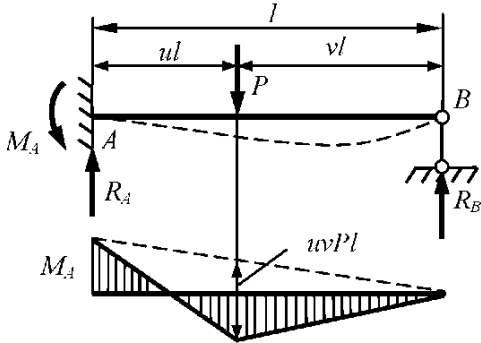
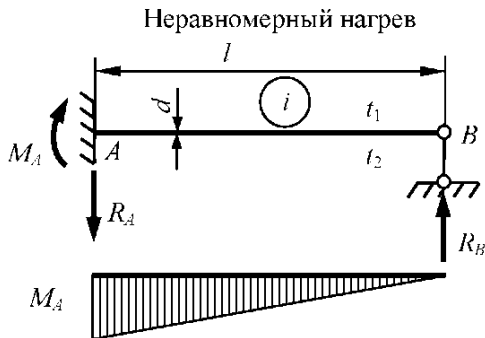
и т.д. Отсюда следует, что уравнения метода перемещений – статические в отличие от уравнений метода сил, которые имеют кинематический характер.

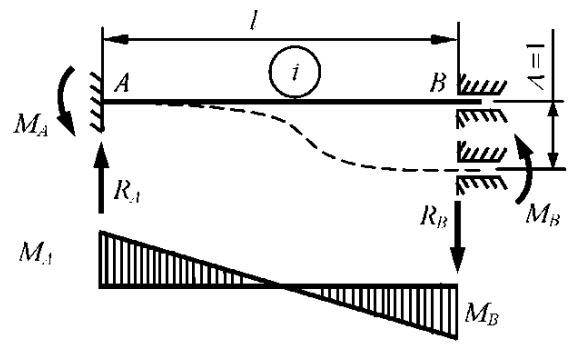
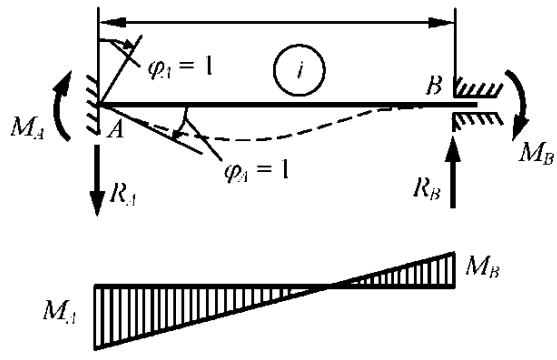
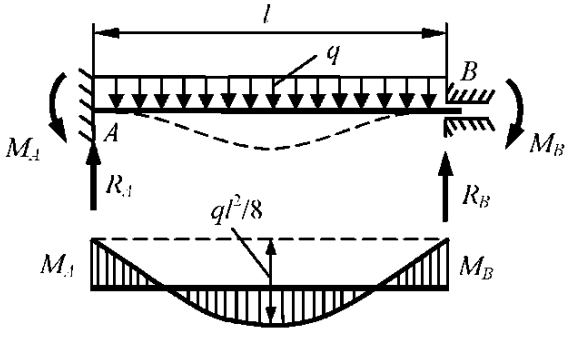
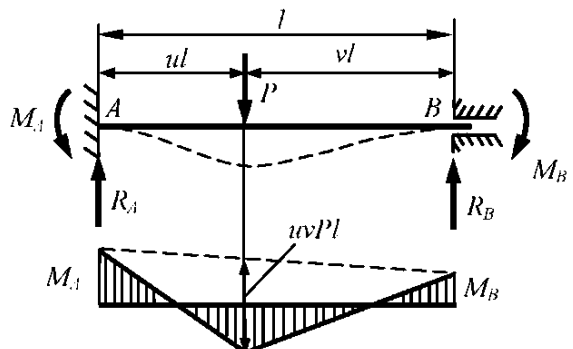
Входящие в канонические уравнения коэффициенты при неизвестных r_{ik} представляют собой реактивные усилия (моменты или силы), возникающие в связи i от единичного перемещения Z_k связи k . Свободные члены этих уравнений R_{ip} – реактивные усилия в связи i от внешней нагрузки. Единичные r_{ik} и грузовые R_{ip} реакции имеют положительный знак в том случае, если их направления совпадают с заданным направлением перемещения Z_i связи i . Коэффициенты с одинаковыми индексами $r_{11}, r_{22}, \dots, r_{mm}$ называют **главными**, а коэффициенты $r_{12}, r_{13}, \dots, r_{ik}$ – **побочными**. Главные коэффициенты всегда положительны и не равны нулю, а побочные коэффициенты, как и в методе сил, обладают свойством взаимности, т.е. $r_{ik} = r_{ki}$. Благодаря этому, система канонических уравнений метода перемещений симметрична относительно главной диагонали, и её можно решить при помощи сокращенного способа Гаусса.

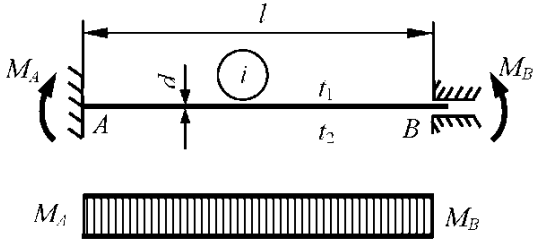
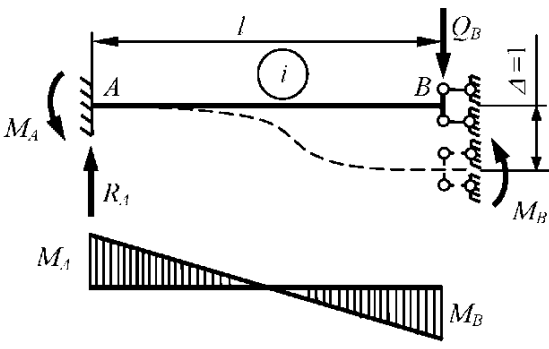
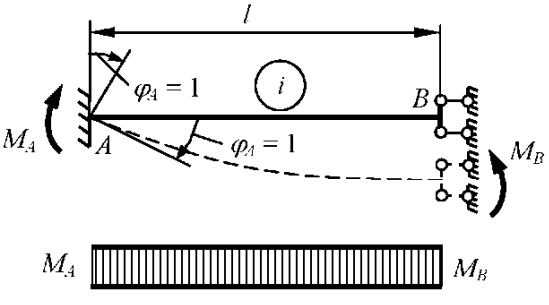
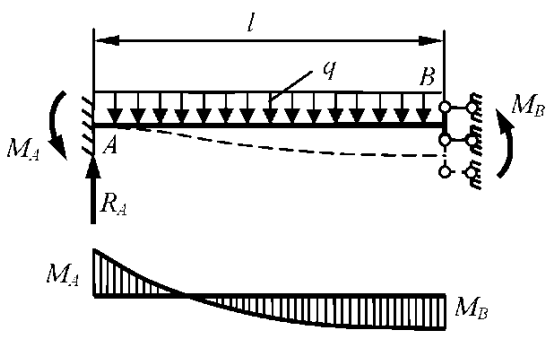
Для определения коэффициентов и свободных членов канонических уравнений необходимо предварительно построить эпюры изгибающих моментов в основной системе от единичных неизвестных перемещений узлов рамы и от внешней нагрузки. Поскольку основная система метода перемещений представляет собой совокупность независимых элементов – однопролётных статически неопределимых балок (рис. 19), построение указанных эпюр сводится к определению усилий в однопролётных балках от перемещений их концов и от нагрузки. Эти усилия, вычисленные для наиболее важных случаев перемещений и нагружений однопролётных балок постоянного сечения, приведены в табл. 1.

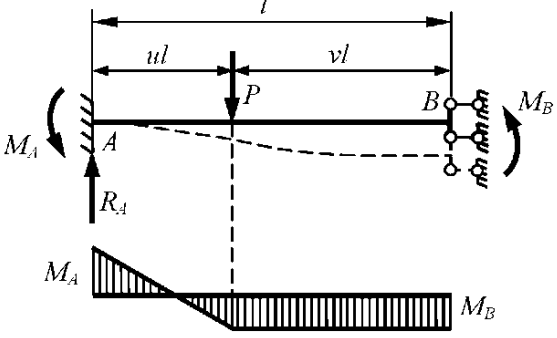
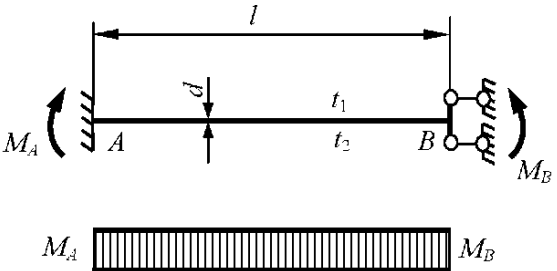
Таблица 1

№ п/п	Схема балки и эпюра изгибающих моментов	Формулы моментов и реакций
1	2	3
1		$i = EI/l$ $M_A = 3i/l$ $R_A = R_B = 3i/l^2$

№ п/п	Схема балки и эпюра изгибающих моментов	Формулы моментов и реакций
1	2	3
2		$M_A = 3i;$ $R_A = R_B = 3i/l$
3		$M_A = ql^2/8;$ $R_A = 5ql/8;$ $R_B = 3ql/8$
4		$M_A = \frac{Pl}{2}v(1-v^2);$ $R_A = \frac{Pv}{2}(3-v^2);$ $R_B = \frac{Pu^2}{2}(3-u)$
5	<p>Неравномерный нагрев</p> 	$M_A = \frac{3i\alpha t' l}{2d};$ $R_A = R_B = \frac{3i\alpha t'}{2d};$ <p>α – коэффициент теплового линейного расширения; $t_1 > t_2$; $t' = t_1 - t_2$</p>

№ п/п	Схема балки и эпюра изгибающих моментов	Формулы моментов и реакций
1	2	3
6		$M_A = \frac{6i}{l};$ $M_B = \frac{6i}{l};$ $R_A = R_B = \frac{12i}{l^2}$
7		$M_A = 4i;$ $M_B = 2i;$ $R_A = R_B = \frac{6i}{l}$
8		$M_A = M_B = \frac{ql^2}{12};$ $R_A = R_B = \frac{ql}{2}$
9		$M_A = uv^2Pl;$ $M_B = u^2vPl;$ $R_A = v^2(1-2u)P;$ $R_B = u^2(1+2v)P$

№ п/п	Схема балки и эпюра изгибающих моментов	Формулы моментов и реакций
1	2	3
10	<p style="text-align: center;">Неравномерный нагрев</p> 	$M_A = M_B = \frac{i\alpha t'l}{d};$ $R_A = R_B = 0;$ <p>α – коэффициент теплового линейного расширения;</p> $t_1 > t_2; t' = t_1 - t_2$
11		$M_A = M_B = \frac{6i}{l};$ $R_A = Q_B = \frac{12i}{l^2}$
12		$M_A = M_B = i$ $R_A = R_B = 0$
13		$M_A = \frac{ql^2}{3};$ $M_B = \frac{ql^2}{6};$ $R_A = ql; R_B = 0$

№ п/п	Схема балки и эпюра изгибающих моментов	Формулы моментов и реакций
1	2	3
14		$M_A = Plu(2-u)/2$ $M_B = Plu^2/2;$ $R_B = P; \quad R_A = 0$
15	<p style="text-align: center;">Неравномерный нагрев</p> 	$M_A = M_B = \frac{\alpha t' l}{d};$ $R_A = R_B = 0;$ <p>α – коэффициент теплового линейного расширения;</p> $t_1 > t_2; \quad t' = t_1 - t_2$

После построения единичных эпюр и грузовой эпюры моментов с помощью табл. 1 приступают к вычислению единичных коэффициентов r_{ik} и свободных членов R_{ip} канонических уравнений. При этом могут быть использованы два способа: статический способ и способ перемножения эпюр.

Статический способ является основным в методе перемещений, что объясняется его простотой и наглядностью. Он основан на использовании уравнений равновесия для определения реакций введённых связей, которые и являются искомыми коэффициентами при неизвестных и свободными членами канонических уравнений. Например, коэффициенты и свободные члены, представляющие реактивные моменты во введённых защемлениях, определяются из условий равновесия вырезанных из основной системы узлов в виде $\sum M = 0$. Коэффициенты при неизвестных и свободные члены уравнений, представляющие реактивные усилия во введённых стержневых связях, могут быть определены из условий равновесия некоторой отсечённой части основной системы, содержащей эти связи. Как уже было сказано, положительное направление определяемой реакции, моментной или силовой, совпадает с принятым направлением неизвестного угла поворота или линейного смещения узла.

Способ перемножения эпюр целесообразно применять, например, при расчёте рамы с наклонными стойками, когда применение статического способа усложняется. Коэффициенты при неизвестных в этом способе определяют путём интегрирования (перемножения) соответствующих единичных эпюр:

$$r_{ik} = \sum \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k}{EI} ds, \quad (2.13)$$

где $\bar{M}_i \bar{M}_k$ – эпюры от единичных перемещений, построенные в основной системе метода перемещений.

Свободные члены уравнений находят по формуле:

$$R_{ip} = - \sum \int \frac{M'_p \bar{M}_i}{EI} ds, \quad (2.14)$$

где M'_p – эпюра моментов от нагрузки, построенная в любой статически неопределимой системе, образованной из заданной рамы.

Заметим, что способ перемножения эпюр может быть применён в качестве контроля правильности вычисления коэффициентов и свободных членов канонических уравнений, найденных статическим способом.

При наличии ПЭВМ снабженной программной средой Mathcad, (любая из последних версий, начиная с 2000 по 2008 год до Mathcad'15) решение систем (2.3) или (2.12) не представляет особых затруднений. Для этого достаточно составить двумерную матрицу, например M с размерностями $n \times n$ и матрицу столбец, например $M_0(n, 1)$. Элементам матрицы M надо присвоить значения коэффициентов системы (2.12), а элементам столбца $M_0(n, 1)$ присвоить коэффициенты правой части системы (2.12). Причем, в предварительных вычислениях интегралов Максвелла-Мора типа (2.13), (2.14) нет необходимости, ибо этот процесс выполняется в среде Mathcad. Вычисление определенных интегралов при известных выражениях для изгибающих моментов $\bar{M}_k, \bar{M}_n, M_p$ реализовано естественным и аналогичным образом, если бы это выполнялось человеком. Правда, человек может допустить техническую ошибку, а компьютер лишен такой возможности, т.е. вычисляет без технических ошибок.

После определения из канонических уравнений основных неизвестных Z_1, \dots, Z_n эпюра изгибающих моментов от нагрузки строится по формуле:

$$M = \bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 + \dots + \bar{M}_n Z_n + M_p, \quad (2.15)$$

а эпюры поперечных и продольных сил – при помощи приёмов, аналогичных тем, которые используются в методе сил.

Проверкой правильности полученных эпюр является статическая проверка условий равновесия вырезанных узлов и отдельных частей рамы. Эта проверка является необхо-

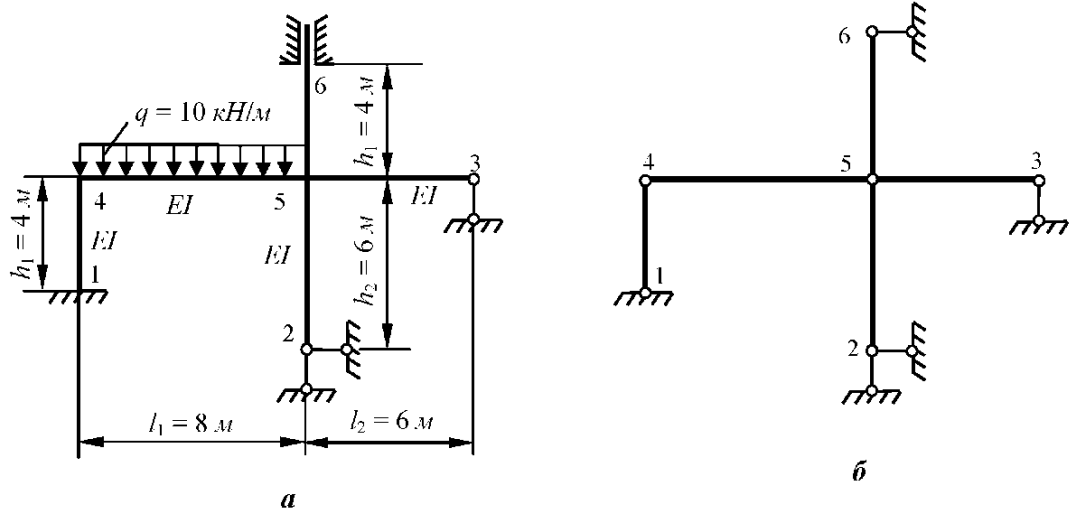


Рис. 20.

димой и достаточной при условии правильности исходных единичных и грузовых эпюр. Наряду с ней, могут быть применены и кинематические проверки (универсальная и построчные), применяемые в методе сил. Для этого необходимо окончательную эпюру моментов умножить на единичные эпюры (или их сумму), построенные в любой основной системе метода сил, образованной из заданной рамы.

Рассмотрим **п р и м е р** расчета для рамы, показанной на рис. 20.

Подсчитаем число основных неизвестных. Так как число неизвестных угловых перемещений равно числу жестких узлов рамы, то $n_y = 2$. Число линейных смещений получим из рассмотрения шарнирной схемы, образованной из заданной рамы (рис. 20, б), по формуле:

$$n_d = 2 \cdot 6 - 5 - 6 = 1.$$

То, что узлы рамы имеют только независимое линейное перемещение, можно определить и без применения формулы. Действительно, узлы рамы 4 и 5 не могут перемещаться по вертикали из-за опорных закреплений 1 и 2 и принятой гипотезы о нерастяжимости стержней и неизменности их длины при изгибе. Им доступно только горизонтальное перемещение, которое будет одинаковым

для узлов 4, 5 и 3 вследствие того, что они связаны между собой стержнями 4-5 и 5-3.

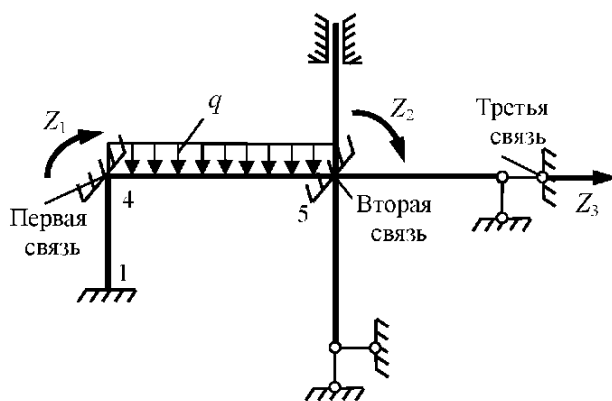


Рис. 21.

Образуем основную систему, введя связи, препятствующие возможному угловому и линейному смещению, и обозначив предполагаемые направления трёх неизвестных перемещений (рис. 21). Используя табл. 1, построим эпюры мо-

ментов $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3$, от единичных перемещений введённых связей по заданным направлениям и эпюру M_p от действия нагрузки на основную систему (рис. 22 а-г). На рис. 22 использованы следующие обозначения:

$$i_1 = \frac{EI}{h_1} = \frac{EI}{4}, \quad i_2 = \frac{EI}{l_1} = \frac{EI}{8}, \quad i_3 = \frac{EI}{h_2} = \frac{EI}{6}.$$

Заметим, что при построении единичных эпюр полезно предварительно нанести на схему рамы перемещение оси каждого стержня, вызванное заданным единичным смещением (штриховая линия на рис. 22 а-г), что позволит установить положение растянутых волокон и правильно изобразить эпюру моментов.

Система канонических уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + R_{1p} &= 0, \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2p} &= 0, \\ r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3p} &= 0. \end{aligned}$$

Для определения коэффициентов и свободных членов этих уравнений – реактивных усилий в наложенных связях – применим статический способ. Для этого вырежем вначале узел 4 и рассмотрим условие его равновесия в случаях, представленных на рис. 22 а-г, т.е.

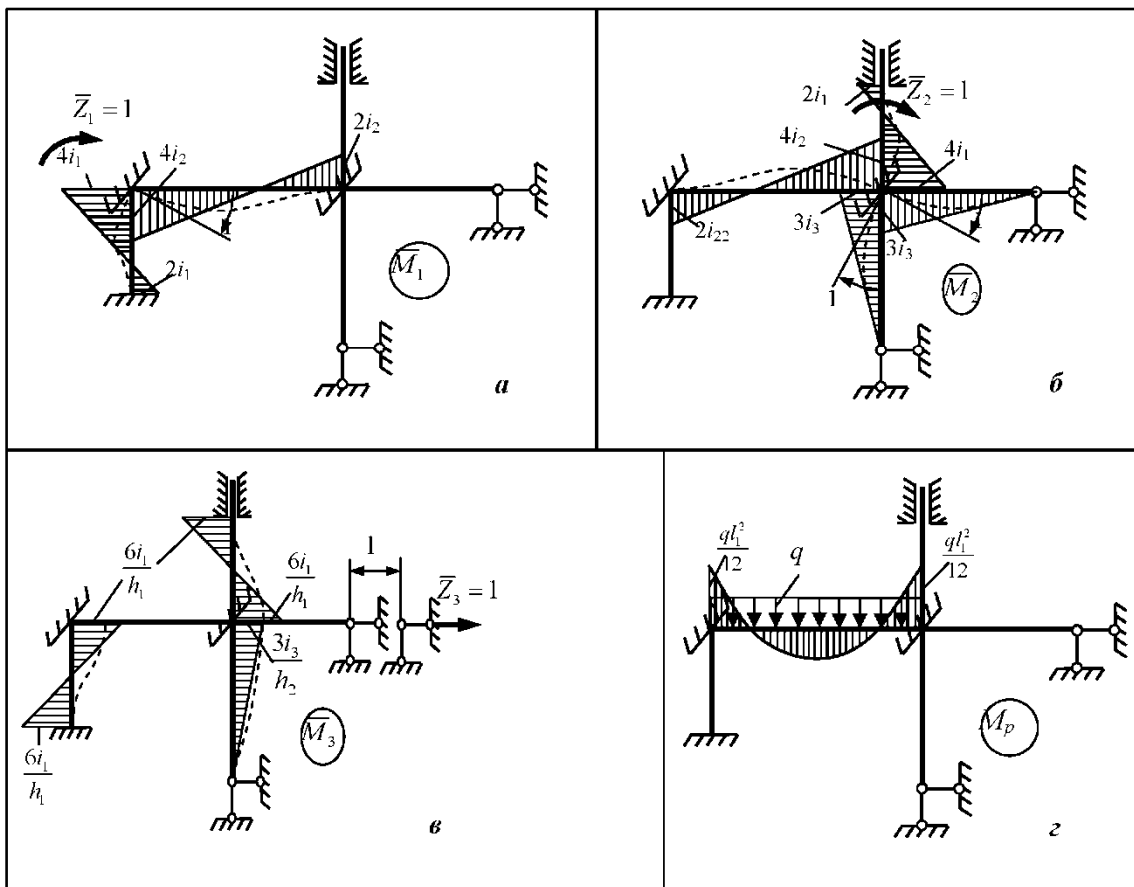


Рис. 22.

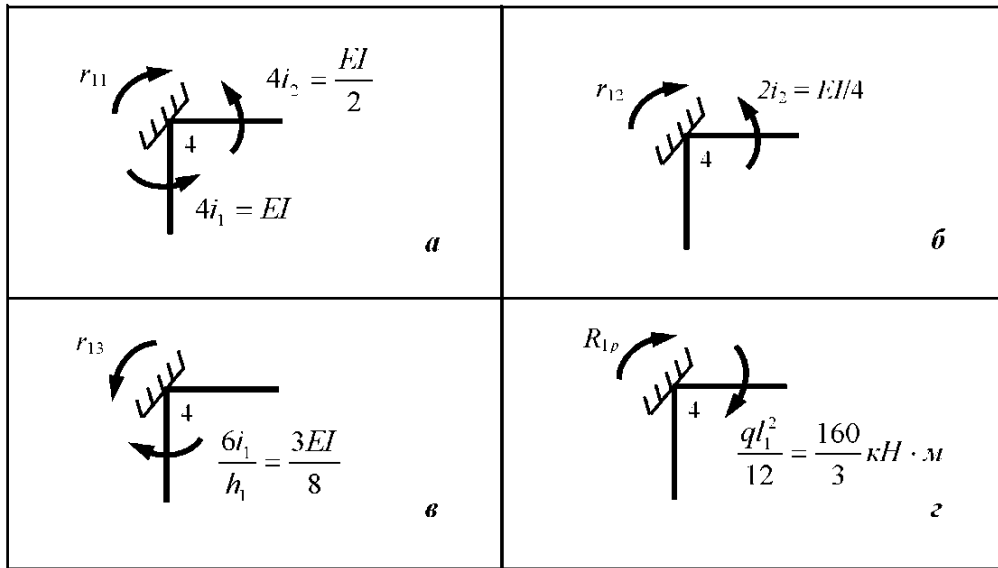


Рис. 23.

определим коэффициенты первой строки канонических уравнений. На рис. 23 *a–z* показан узел 4 с действующими на него моментами со стороны отброшенных частей рамы и реактивными моментами в защемлении (первой связи). Условия равновесия этого узла позволяют получить:

$$r_{11} = 4i_1 + 4i_2 = \frac{3EI}{2}; \quad r_{12} = 2i_2 = \frac{EI}{4}; \quad r_{13} = -\frac{6i_1}{h_1} = -\frac{3EI}{8};$$

$$R_{1p} = -\frac{ql_1^2}{12} = -10 \cdot 10^3 \cdot \frac{8^2}{12} \text{ Н} \cdot \text{м} = -\frac{160}{3} \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Отрицательный знак в двух последних случаях объясняется тем, что направления реактивных моментов r_{13} и R_{1p} противоположны заданному направлению угла поворота Z_1 первой связи.

Аналогично могут быть определены коэффициенты второго канонического уравнения, для чего из рамы должен быть вырезан узел 5 и рассмотрены условия его равновесия при тех же четырёх воздействиях на основную систему (рис. 22 *a–z*). Из рис. 24 *a–z* следует:

$$r_{21} = r_{12} = \frac{EI}{4}; \quad r_{22} = 4i_1 + 4i_2 + 3i_3 + 3i_3 = \frac{5EI}{2};$$

$$r_{23} = \frac{6i_1}{h_1} - \frac{3i_3}{h_2} = \frac{7EI}{24}; \quad R_{2p} = \frac{ql_1^2}{12} = \frac{160}{3} \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для определения коэффициентов третьего уравнения, представляющих реакции во введенном стержне (третьей связи), рассечем стойки и рассмотрим условие равновесия средней части рамы, содержащей введенный стержень (рис. 25 *a–z*). При этом под условием равновесия будем понимать равенство нулю проекции всех сил, действующих на выделенную часть рамы, на горизонталь: $\sum X = 0$. Отличные от нуля проекции дадут искомые

реакции во введенном стержне и поперечные силы, примененные в местах рассечения стоек. Последние определяются обычным путём по эюграм $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3, M_p$.

Из рис. 25 а-г следует:

$$r_{31} = r_{13} = -\frac{3EI}{8}; \quad r_{32} = r_{23} = \frac{7EI}{24};$$

$$r_{33} = \frac{12i_1}{h_1^2} + \frac{12i_1}{h_1^2} + \frac{3i_3}{h_2^2} = \frac{7EI}{18}; \quad R_{3p} = 0.$$

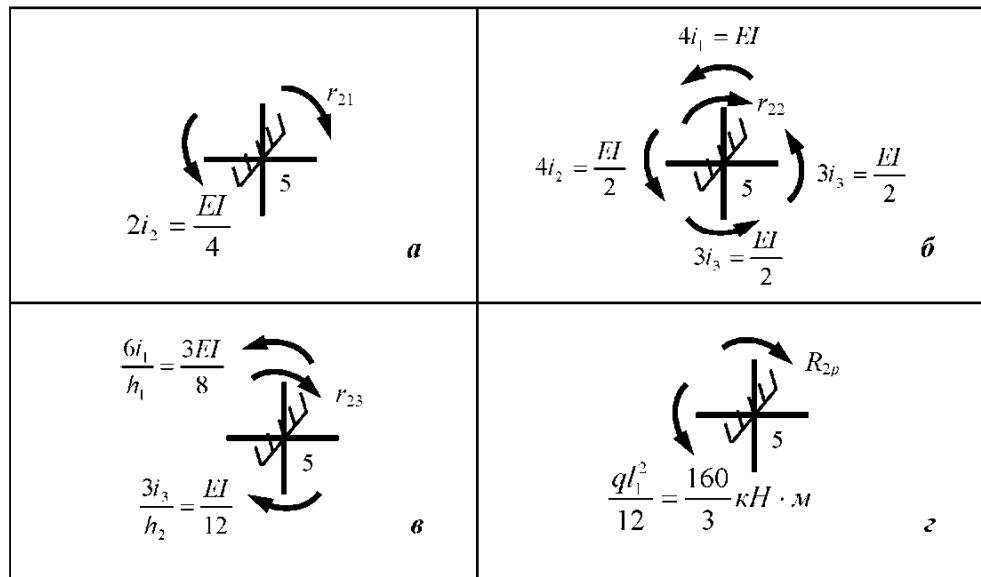


Рис. 24.

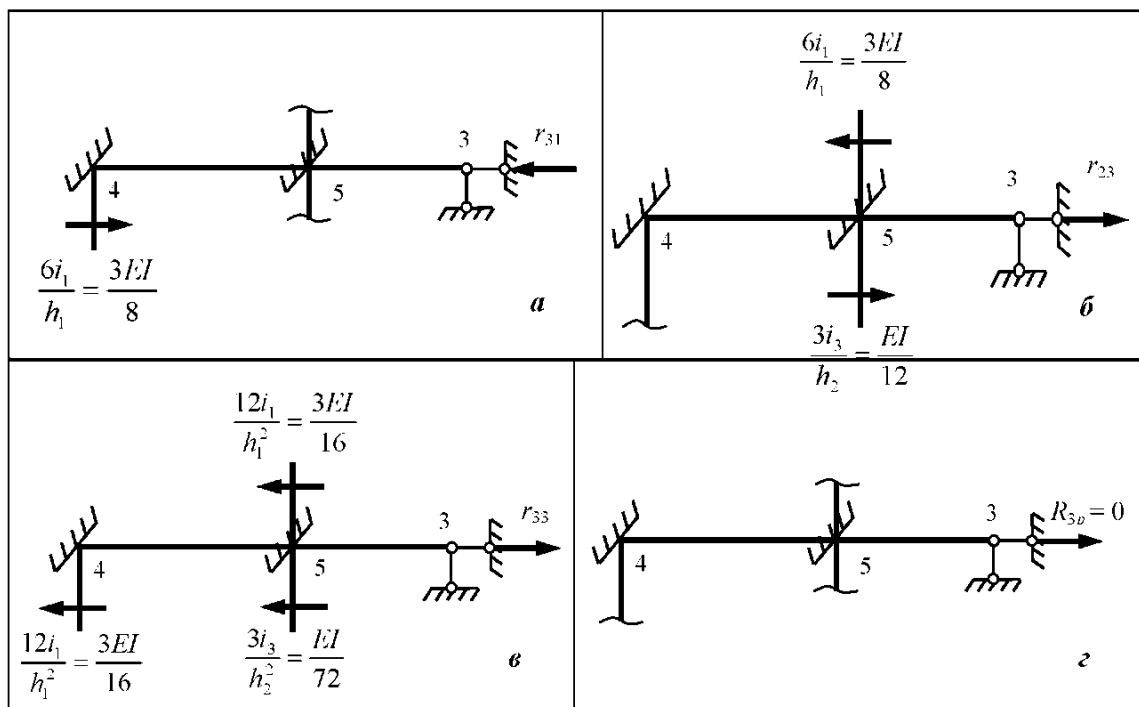


Рис. 25.

Проверка найденных коэффициентов и свободных членов может быть осуществлена способом перемножения эпюр. Для выполнения универсальной проверки построим суммарную единичную эпюру \bar{M}_σ , представляющую сумму единичных эпюр (рис. 26), и перемножаем её саму на себя:

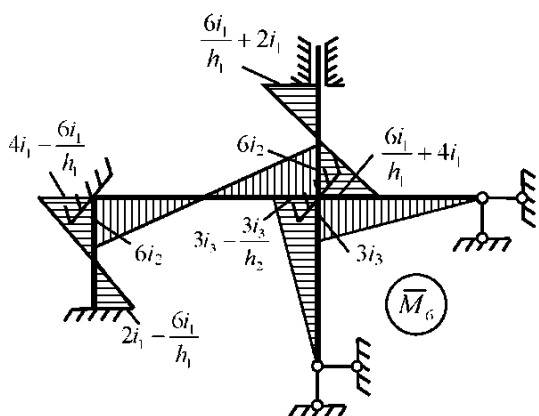


Рис. 26.

То обстоятельство, что сумма всех найденных коэффициентов равна тому же числу $\sum r_{ik} = \frac{85I}{16}$, подтверждает правильность их вычисления.

$$r_{\sigma\sigma} = \sum \int \frac{\bar{M}_\sigma^2}{EI} ds = \frac{85I}{16}.$$

Для проверки свободных членов необходимо построить эпюру изгибающих моментов M'_p от внешней нагрузки в любой статически определимой системе, образованной из заданной рамы, и перемножить её с эпюрой \bar{M}_σ :

Для двух из возможных эпюр M'_p , представленных на рис. 27, этот интеграл обращается в ноль, что также подтверждает правильность вычислений, так как в нашем случае $\sum R_{ip} = R_{1p} + R_{2p} + R_{3p} = 0$. Найденные значения коэффициентов позволяют переписать систему канонических уравнений в виде:

$$R_{op} = -\sum \int \frac{M'_p \bar{M}_\sigma}{EI} ds.$$

$$\frac{3}{2}Z_1 + \frac{1}{4}Z_2 - \frac{3}{8}Z_3 = \frac{160}{3EI}$$

$$\frac{1}{4}Z_1 + \frac{5}{2}Z_2 + \frac{7}{24}Z_3 = -\frac{160}{3EI},$$

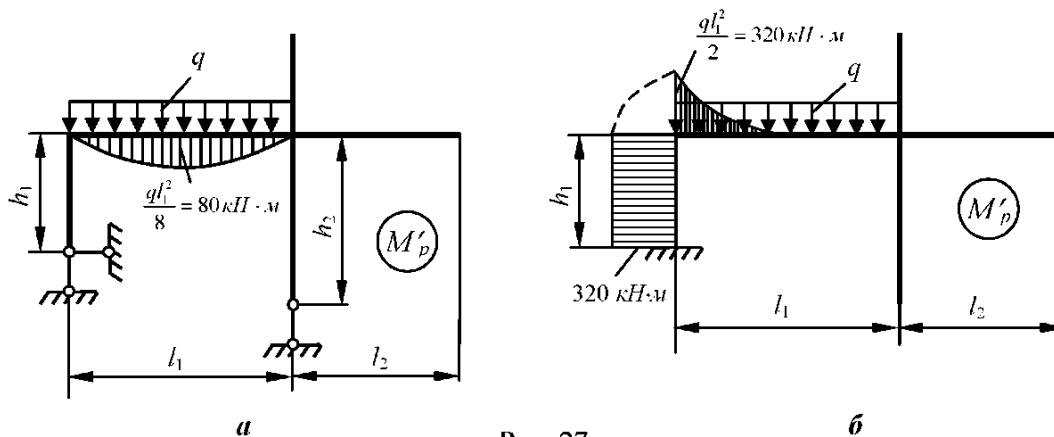
$$-\frac{3}{8}Z_1 + \frac{7}{24}Z_2 + \frac{7}{18}Z_3 = 0.$$


Рис. 27.

Решение этой системы даёт:

$$Z_1 = 65,4/(EI), \quad Z_2 = -38,4/(EI), \quad Z_3 = 91,8/(EI).$$

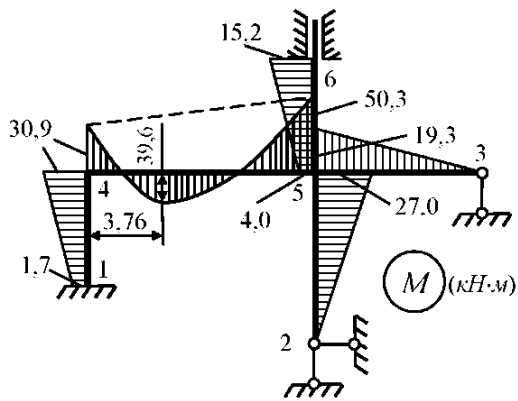


Рис. 28.

Единичные эпюры (рис. 22, а-г) могут быть теперь исправлены, т.е. умножены на найденные значения неизвестных. При этом знак у второй эпюры изменится на обратный, так как Z_2 имеет отрицательный знак. Окончательную эпюру изгибающих моментов (рис. 28) построим согласно выражению

$$M = \bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 + \bar{M}_3 Z_3 + M_p.$$

Достаточной проверкой её правильности являются статические проверки, приведённые на рис. 29 и 30. При желании сделать дополнительную кинематическую проверку подобно тому, как это делается в методе сил, необходимо построить единичные эпюры в основной системе метода сил и перемножить их или суммарную единичную эпюру \bar{M}'_o (например, рис. 31) с окончательной эпюрой изгибающих моментов. При правильном расчете результат такого перемножения должен быть равен нулю. Эта проверка будет служить контролем правильности принятых для расчета единичных эпюр и грузовой эпюры изгибающих моментов.

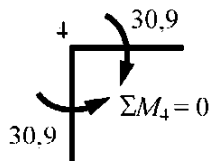


Рис. 29.

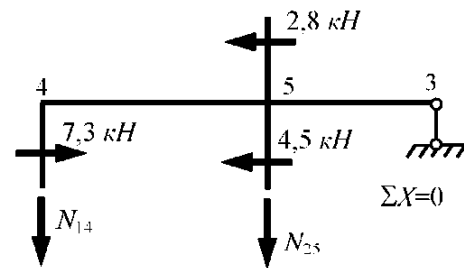
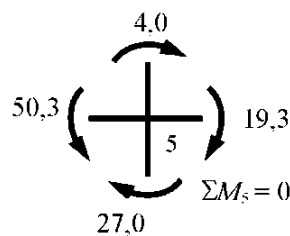


Рис. 30.

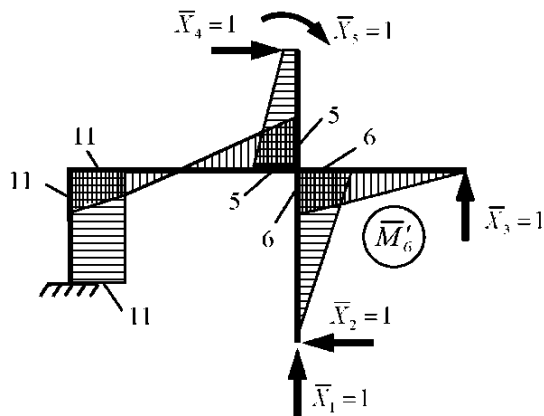


Рис. 31.

ЧАСТЬ 3

РАСЧЕТ ПОДПОРНЫХ СТЕН

3.1. Основные положения

Инженерные сооружения, предназначенные для удержания грунта или сыпучего тела, называются **подпорными стенами** и делятся на три основные группы: *шпунтовые, тонкостенные и массивные*. Шпунтовые возводятся путём забивки в грунт ряда свай, изготовленных из дерева, железобетона или металла. За счет заземления свай в их основании обеспечивается устойчивость шпунтовых стен. Тонкостенные подпорные стены образуются из двух тонких плит, одна из них горизонтальная является основанием, другая – вертикальная – для удержания грунта от обрушений. Если поперечные размеры подпорных стен имеют одинаковый порядок, то они обычно называются массивными подпорными стенами.

Расчетно-графическое задание № 4 предусматривает выполнение расчетов подпорной стены на прочность, на опрокидывание и на сдвиг.

На подпорные стены действуют следующие группы сил: собственный вес стенки G ; активное давление (E_a) обрушаемого грунта; давление воды G_w ; реакция стенки на сдвигание грунта в момент наступления предельного состояния; давление воды заполненного водохранилища; давление водонасыщенного грунта силы трения между основанием подпорной стены и подстилающим грунтом.

Свойства грунта отличаются многообразием, и некоторые характеристики являются трудно определяемыми. Поэтому на практике расчеты грунты заменяются идеальным сыпучим телом, и используется приближенная теория расчета, предложенная Ш. Кулоном.

3.2. Теория Кулона для грунтов

Приближенная теория грунтов. Основными характеристиками грунтов являются следующие параметры.

1. Пористость, η – отношение объема пустот (пор) к общему объему, в процентах и отвлеченных числах.

2. Удельный вес грунта, γ_{cp} – вес единицы объема грунта, H/m^3 , kH/m^3 .

3. Удельный вес грунта в воде, $\gamma_{взв}$,

$$\gamma_{взв} = \gamma_{cp} - \gamma_w(1 - \eta), \quad \gamma_w - \text{удельный вес воды} \quad (3.1)$$

4. Угол естественного откоса, ρ – наибольший угол откоса насыпного грунта горизонтальной плоскостью; коэффициент трения грунта, $f = \operatorname{tg} \rho$.

5. Угол внутреннего трения φ между частицами грунта; принимается $\varphi = \rho$.

6. Угол трения грунта φ_0 между частицами грунта и поверхностью подпорной стены. Определяется экспериментально или принимается по СНиП, например, по табл. 2.

Таблица 2

Наименование грунта	Удельный вес, кН/м^3	Угол внутреннего трения φ , град.	Угол трения φ_0 , град. для		
			стали	дерева	бетона
Песок мокрый	20	20–25	–	19	24
Песок влажный	17–18	40	18	21	25
Песок сухой	15–17	30–35	25–40	24	29–40
Глина мокрая	19–22	15–25	17–20	14	11
Глина влажная	17–19	25–35	22–35	–	18
Глина сухая	16–17	40–45	35–45	–	32
Гравий мокрый	19–20	25–35	–	–	22
Гравий сухой	18	35–45	37–40	–	24–31

Теория Кулона для грунтов. Для количественного описания поведения грунта, из-за сложности учета влияния всевозможных естественных факторов, на практике используется так называемая приближенная теория грунта Ш. Кулона. Суть этой теории заключается в следующем.

1. Реальный грунт, описывающий давление на подпорную стену, заменяется идеальным сыпучим телом, которое может воспринимать сжимающие и сдвигающие усилия, но лишено сцепления.

2. Давление на подпорную стену определяется не в состоянии покоя (установившееся давление), а в тот момент, когда подпорная стена начинает перемещаться в сторону от грунта, но эти перемещения ещё бесконечно малы, т.е. в состоянии предельного равновесия. В состоянии предельного равновесия (в момент обрушения) давление грунта (сыпучего тела) на подпорную стену достигает наибольшего значения и называется активным давлением (или напором) грунта. В момент предельного равновесия часть грунта начинает также перемещаться вслед за подпорной стеной. Поверхность, по которой происходит перемещение грунта, имеет криволинейное очертание (на рис. 32 *a* – пунктирная линия). При расчетах её принимают за плоскость (на рис. 32, *a* – линия *BH*) и называют плоскостью обрушения или плоскостью скольжения. Находящаяся в движении часть грунта (на рис. 32 *a* – треугольник *KBH*) называется призмой обрушения или призмой скольжения, у которой в качестве второй поверхности скольжения принимается непосредственно задняя грань стены *KB*.

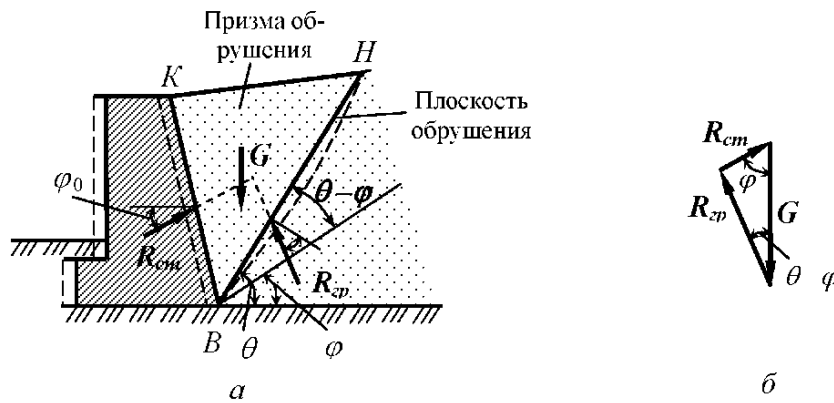


Рис. 32.

3. Сползающая призма обрушения принимается в виде абсолютно твёрдого тела, что позволяет заменить действующие на неё объёмные и поверхностные силы по плоскостям скольжения их равнодействующими G , R_{cm} и R_{zp} (рис. 32 а).

4. Сползающая призма находится в равновесии под действием трёх сил: собственного веса G , реакции подпорной стены R_{cm} и реакции остальной части грунта R_{zp} .

5. Принимается, что подпорная стена имеет неограниченную длину, её поперечные размеры и состав грунта являются постоянными по всей длине, т.е. любая выделенная часть двумя параллельными сечениями, перпендикулярными к продольной оси стены, находится в условиях плоской деформации. Это обстоятельство позволяет выполнить расчет подпорной стены как плоской системы длиной, равной единице (1 м).

Определение давления грунта. Подпорная стенка под действием собственного веса G , реакции стены E_{cm} и активного давления грунта E_a в момент предельного равновесия образует замкнутый силовой треугольник (рис. 32 б). Причем положение наклонной грани BH в момент предельного состояния, т.е. когда активное давление E_a имеет наибольшее значение, удовлетворяет условию $\frac{\partial E_a}{\partial \theta} = 0$. По теореме синусов для силового треугольника и для угла θ^* , при котором производная по θ от выражения активного давления E_a равна нулю, получена формула для E_a :

$$E_a = \frac{1}{2} \gamma_{zp} h^2 \frac{\cos^2(\varphi - \varepsilon)}{\left[1 + \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \varphi_0) \sin(\varphi - \alpha)}{\sin \psi \cos(\varepsilon - \alpha)}} \right]^2 \sin \psi \cos^2 \alpha}, \quad (3.2)$$

где ε – угол между вертикалью и наклонной гранью стены BK , причем ε принимает отрицательное значение, если наклон BK в сторону вращения часовой стрелки от вертикали; α – угол наклона дневной поверхности насыпи и горизонта.

Если грунт засыпки ограничен горизонтальной плоскостью $\alpha = 0$, поверхность стены вертикальная и идеально гладкая $\varepsilon = \varphi_0 = 0$, получим:

$$E_a = \frac{1}{2} \gamma_{сп} h^2 \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right). \quad (3.3)$$

В случае наличия дополнительной нагрузки P на поверхности засыпки, учёт нагрузки сводится к эквивалентному слою h_0 засыпки $\gamma_{сп} \cdot h_0 = P$, т.е. в (3.2) h заменяется на $h = h + P/\gamma_{сп}$.

Полагая в (3.2) или (3.3) величину h переменной, равную глубине y , из условия $q_a = \frac{\partial E_a}{\partial y}$ определяется формула вычисления интенсивности давления грунта:

$$q_a = \gamma_{сп} y \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right). \quad (3.4)$$

Соответственно полное давление на глубине y :

$$E_{ay} = \frac{1}{2} \gamma_{сп} y^2 \left[\operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\varphi + \varepsilon}{2} \right) + \operatorname{tg} \varepsilon \right]^2 \cos \varepsilon. \quad (3.5)$$

Заметим, что E_a действует перпендикулярно к грани стены BK , а место приложения, как центр тяжести треугольной эпюры давления, равен $h/3$ одной трети высоты подпорной стены.

На практике часто встречаются случаи, когда на подпорную стену действует давление воды или оказывают влияние грунтовые воды, как это показано на рис. 33.

Уровень грунтовых вод находится на высоте h_2 от основания стены. Выше h_2 грунт в пределах высоты h_1 обладает естественной влажностью, поэтому интенсивность q_1 давления при $y = h_1$ по формуле (3.4) определяется так:

$$q_1 = \gamma_{сп} h_1 \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right).$$

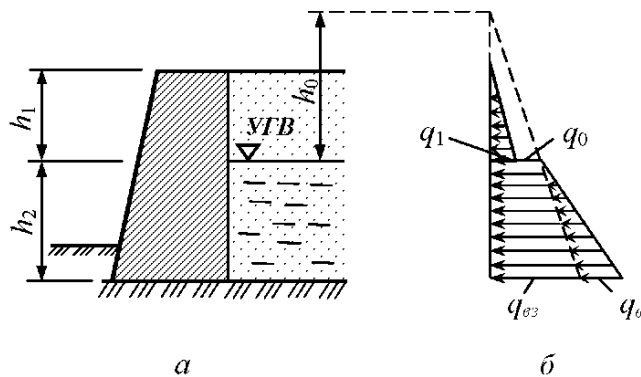


Рис. 33.

На нижнем участке давление на стенку состоит из двух составляющих: давления грунта во взвешенном состоянии и гидростатического давления воды.

$$q = (h_0 + h_2) \gamma_{\text{взв}} \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi_{\text{взв}}}{2} \right), \quad (3.6)$$

где h_0 – эквивалентная высота, определяемая из условия $\gamma_{\text{сп}} \cdot h_1 = \gamma_{\text{взв}} \cdot h_0$, равна $h_0 = \gamma_{\text{сп}} \cdot h_1 / \gamma_{\text{взв}}$; величина $\gamma_{\text{взв}}$ – определена выше в (3.1). Как видно на рис. 33, в пределах грунтовых вод интенсивность активного давления состоит из двух слагаемых $q_{\text{взв}}$ и q_6 . Последнее $q_6 = h_2 \cdot \gamma_6$, следовательно, эпюра давления в этом участке имеет вид трапеции. В начале при $y = h_1$ $q_0 = \gamma_{\text{сп}} h_1 \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi_{\text{взв}}}{2} \right)$, а в конце при $y = h_1 + h_2$ $q_{\text{осн}} = q_{\text{взв}} + q_6$.

Величина E_d на этом участке вычисляется как площадь трапеции, а центр тяжести трапеции можно вычислить аналитически по формуле:

$$Y_c = \frac{h(q_{\text{осн}} + 2q_0)}{3(q_{\text{осн}} + q_0)}. \quad (3.7)$$

Величина Y_c может быть определена путём графического построения. Для этого рассмотрим произвольную трапецию (рис. 34).

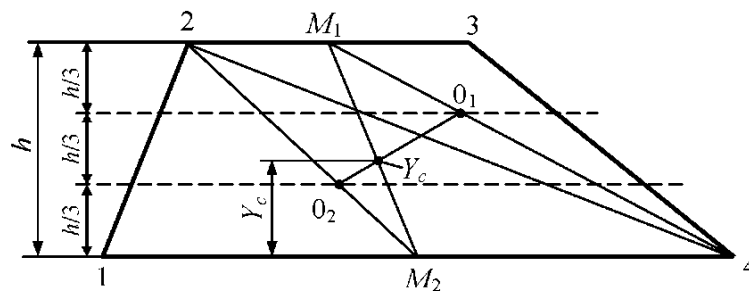


Рис. 34.

Для нахождения Y_c выполним следующие построения.

1. Делим q_0 и $q_{\text{осн}}$ на два и находим точки M_1 и M_2 и проводим линию M_1M_2 .
2. Разбиваем трапецию на два треугольника и из вершин 2 и 4 проводим медианы этих треугольников $4 - M_1$ и $2 - M_2$.
3. Проводим горизонтальные линии на высоте $h/3$ и $2h/3$ и находим центр тяжести O_1 и O_2 каждого треугольника, как пересечения горизонтальных линий и медиан треугольников.
4. Соединяем найденные центры O_1 и O_2 . Находим точку пересечения линий M_1M_2 и O_1O_2 . Точка пересечения этих линий есть положение центра тяжести трапеции 1234.

3.3. Устойчивость подпорных стен на опрокидывание и сдвиг

Для удержания грунта от обрушения подпорная стена должна обладать достаточной устойчивостью и прочностью. В связи с этими требованиями подпорные стены рассчитываются на устойчивость против опрокидывания относительно нижнего переднего ребра

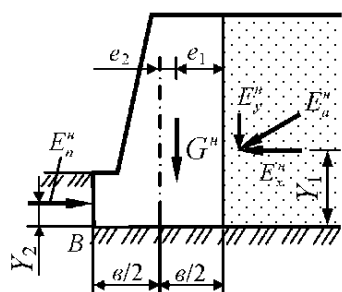


Рис. 35.

(точка *B*, рис. 35) и сдвига по плоскости подошвы стены и на прочность самой стены и грунта в её основании.

Условие устойчивости против опрокидывания подпорной стены должно удовлетворять неравенству

$$M \leq m_0 M_{np}, \quad (3.8)$$

где M – расчетный опрокидывающий момент относительно центра тяжести подошвы подпорной стены; M_{np} – предельный опрокидывающий момент относительно центра подошвы стены;

m_0 – коэффициент ($0,8 \div 1$), задаваемый в зависимости от условий работы стены;

$$M_{np} = N'' \cdot e_{np}, \quad (3.9)$$

где N'' – сумма всех вертикальных сил, действующих на стену; e_{np} – эксцентриситет силы N'' , $e_{np} = b/2$.

Устойчивость подпорной стены на сдвиг определяется неравенством для подошвы подпорной стенки

$$T \leq m_c \cdot T_{np}, \quad (3.10)$$

где T – расчетная сдвигающая сила, сумма проекций всех сил активного давления на горизонталь; T_{np} – сумма всех сил на горизонталь и силы трения подошвы, направленные на сторону обрушаемого массива грунта; m_c – коэффициент. Для вычисления силы трения основания $T_{np} = f_{mp} \cdot N''$, f_{mp} – коэффициент трения определяется экспериментально или задается по СНиП.

Принимаемые значения коэффициентов трения для различных грунтов оснований приведены в табл. 3.

Таблица 3

№ п/п	Наименование грунта	Коэффициент трения, f_{mp}
1	Для глин, глинистых известняков, глинистых сланцев влажных	0,25
2	То же, для сухих, а также суглинков и супесей	0,3
3	Для песков	0,4
4	Для крупнообломочных грунтов	0,5
5	Для скальных	0,6

Условия прочности подпорной стенки осуществляется определением напряжений в горизонтальных сечениях от давления грунта и веса вышележащей части стены.

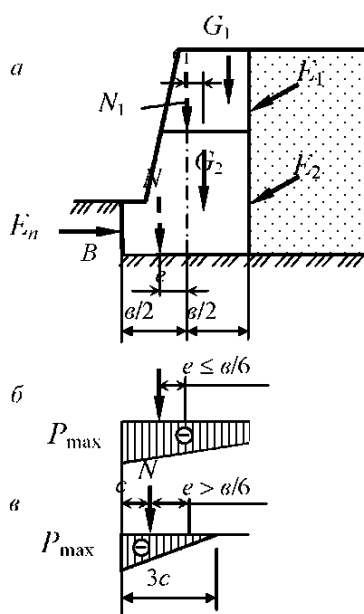


Рис. 36.

На рис. 36 приведена схема расчета подпорной стенки на прочность. Здесь e_1 – эксцентриситет для силы N_1 и вычисляется напряжение по формуле

$$\sigma_{\max} = \frac{N_i}{A_i} \pm \frac{N_i I_i}{W_i} \leq R_{cm}, \quad (3.11)$$

где A_i – площадь сечения в i -ом сечении, т.е. $A_i = b_i \cdot 1$; b_i – ширина стенки в i -ом сечении; $W_i = \frac{1 \cdot b_i^2}{6}$ – момент сопротивления i -го сечения.

Если нормальная сила N находится в пределах ядра сечения ($e \leq b/6$), то по всему сечению напряжения σ_{\max} сжимающие (рис. 36 б). Если $e \geq b/6$, то возникнут растягивающие напряжения. Грунт не воспринимает растягивающих напряжений, поэтому эпюра давлений P_{\max} принимает треугольный вид. Центр действия силы будет $C = b/3$. Другими словами $N = P_{\max} \cdot b/2$.

$$P_{\max} = \frac{2N}{3Cl} \leq R_{oc}. \quad (3.12)$$

Допускаемые прочности стенки R_{cm} и основания R_{oc} задаются в проектных документах согласно СНиП в каждом конкретном случае в зависимости от материала стенки и свойств грунта у основания стенки.

ЧАСТЬ 4

ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Указания по оформлению

Задания 1–4 состоят из отдельных тематических задач, которые имеют 10 вариантов расчетных схем и 10 вариантов исходных данных для каждой расчетной схемы, т.е. всего 100 вариантов.

Число единиц порядкового номера студента в журнале группы соответствует номеру варианта расчетной схемы задачи, а число десятков порядкового номера студента – соответствует номеру варианта для исходных данных в таблице. Например, студенты с поряд-

ковым номером 3, 13, 23 выбирают расчетную схему № 3; исходными данными для этих номеров являются соответственно варианты № 0, № 1, № 2 в таблицах.

Каждая задача должна иметь расчетно-пояснительную записку и графическую часть. Все листы, обычно на формате А4, относящиеся к контрольной работе, должны быть пронумерованы и сшиты (или вложены в файл). На титульный лист должны быть помещены следующие сведения: название дисциплины, номер или название задания, вариант (шифр), группа (специальность), фамилия, имя, отчество студента и дата выполнения задания.

Задание 1 состоит из двух задач: расчет статически определимой многопролетной балки и расчет плоской статически определимой фермы.

Для выполнения задания 1 рекомендуется повторение методики определения эпюр изгибающих моментов и поперечных сил балок из курса сопротивления материалов и определения усилий в элементах ферм из курса теоретической механики. В этом заключается суть первого пункта решения двух задач.

4.1. Задание для контрольной работы № 1

4.1.1. Задача 1. Расчет статически определимой многопролетной балки

Для балки, принятой согласно варианту (рис. 37) и исходными данными, взятыми в соответствии с шифром из табл. 4, требуется:

Таблица 4

Число десятков в цифре студента	$l_1, м$	$P, кН$	$l, м$	$q, кН/м$	Сосредоточенная сила P приложена в точке	Равномерно распределенная нагрузка q по всей длине участка	Сечение для построения линий влияния M и Q
0	1,2	6,6	12,6	0,6	k	ab	k
1	2,4	4,2	10,2	1,6	m	bc	m
2	4,2	5,4	8,4	1,0	n	ac	n
3	6,0	3,6	7,2	1,4	k	ca	k
4	1,8	6,0	12,0	2,4	n	cb	n
5	3,0	4,8	9,6	2,0	m	ba	m
6	5,4	1,8	11,4	1,2	n	ac	n
7	6,6	1,2	7,8	0,8	m	bc	m
8	4,8	2,4	9,0	2,2	k	ab	k
9	3,6	3,0	10,8	1,8	n	cb	n

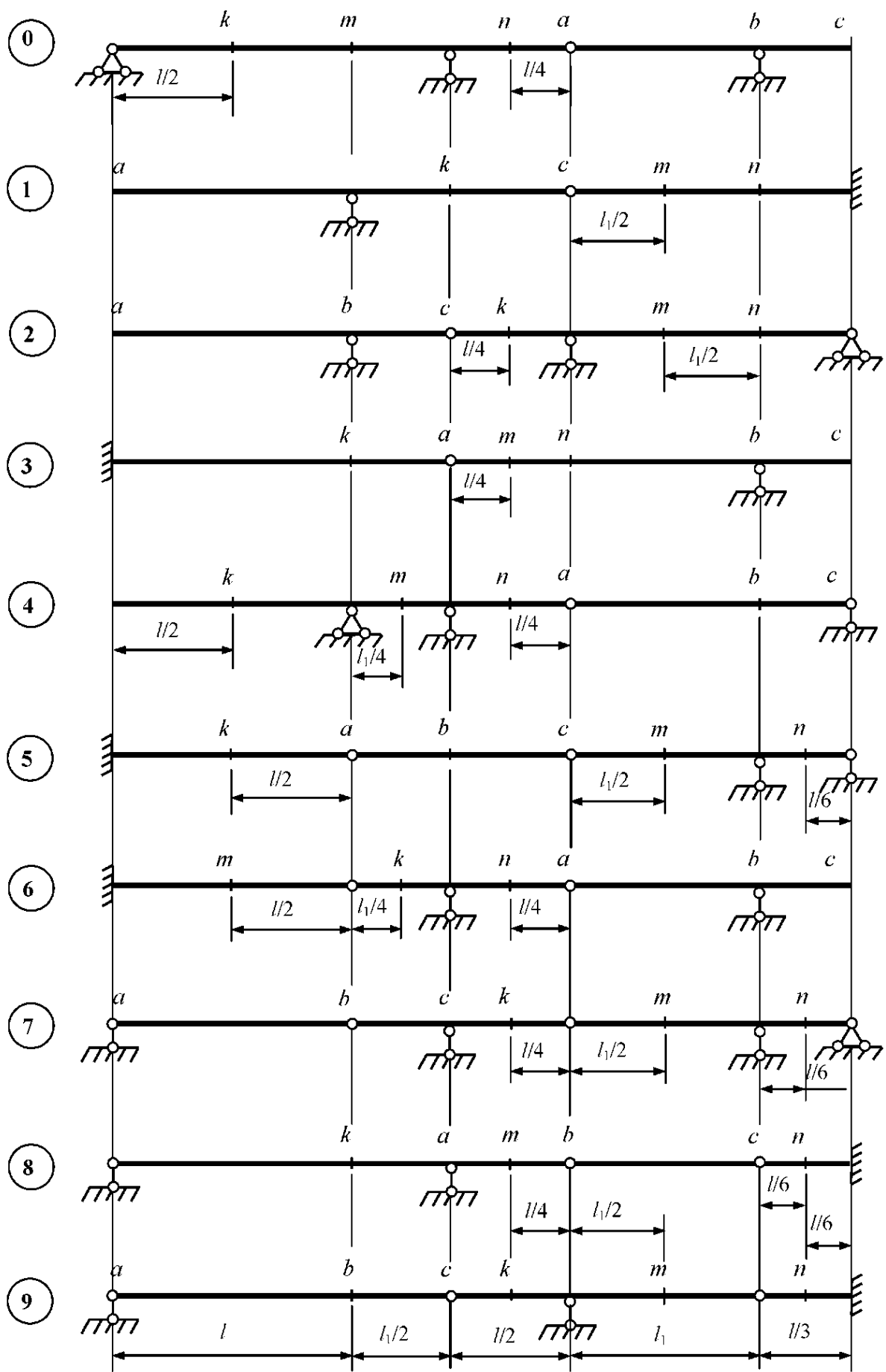


Рис. 37.

1. Построить эпюры изгибающих моментов (M) и поперечных сил (Q) при загрузке балки сосредоточенной силой P и равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q .

2. Построить линии влияния опорных реакций, а также M и Q для заданного сечения.

3. Определить по линиям влияния опорные реакции M и Q от заданной нагрузки.

Сосредоточенная сила и равномерно распределенная нагрузка направлены вертикально вниз.

Методические указания для задачи № 1

Решению задачи должно предшествовать повторение методики построения эпюр изгибающих моментов и поперечных сил для балок, рассматриваемой в курсе сопротивления материалов. При построении эпюр и линий целесообразно пользоваться поэтажной схемой.

Следует внимательно рассмотреть образование многопролетной балки, установить базисную балку, надстройки и расположить поэтажную схему непосредственно под заданной балкой.

Построение эпюр M и Q необходимо выполнить для каждой балки отдельно, а затем перенести их на общую базу и расположить под заданной балкой.

Ординаты эпюр откладываются со стороны растянутых волокон (положительные от оси вниз), положительные ординаты эпюры Q откладываются вниз. На эпюрах надо проставить значения характерных ординат, а на эпюре Q обязательно и знаки. Определение сил взаимодействия в шарнирах, опорных реакций, моментов и поперечных сил в характерных сечениях следует подробно изложить в пояснительной записке.

Построение линий влияния нужно сопровождать необходимыми уравнениями. Каждую линию влияния надо построить на общей базе и расположить под схемой заданной балки. На линиях влияния необходимо проставить все характерные ординаты. Определение по линиям влияния реакций, M и Q от заданной нагрузки следует представить рядом с соответствующей линией влияния.

4.1.2. Задача 2. Расчет плоской статически определимой фермы

Для фермы (рис. 38), с принятыми по шифру из табл. 5 размерами и нагрузкой, требуется:

1. Определить (аналитически) усилия в стержнях заданной панели, включая левую стойку (всего 4 стержня) от постоянных нагрузок P и P_1 .

Таблица 5

Число десятков в цифре студента	P , кН	P_1 , кН	d , м	Временная нагрузка, q , кН/м	Вертикальная сила P приложена в узле	h , м	Вертикальная сила P_1 приложена в узле	№ панели (считая слева)
0	2	10	5,0	1,2	a	4,4	a	3
1	5	6	4,5	1,4	k	8,0	k	4
2	8	4	2,0	2,4	b	6,0	b	5
3	12	1	5,5	1,0	m	7,6	m	6
4	3	9	3,5	1,8	c	5,6	c	4
5	4	8	3,0	2,0	n	7,2	n	5
6	6	5	6,0	0,8	e	6,8	e	6
7	10	2	6,5	0,6	o	4,8	o	3
8	9	3	2,5	2,2	k	4,0	k	4
9	1	12	4,0	1,6	c	6,0	c	5

2. Построить линии влияния усилий в тех же стержнях.

3. По линиям влияния определить значения усилий от постоянной нагрузки и сравнить их со значениями, полученными аналитически.

4. Установить наиболее опасное положение временной нагрузки для каждого стержня отдельно и найти величины максимальных и минимальных усилий.

5. Определить максимальные и минимальные значения расчетных усилий во всех стержнях заданной панели (с учетом постоянной нагрузки).

Методические указания для задачи № 2

Усилия в каждом стержне следует определять (если возможно) непосредственно через нагрузку и опорные реакции, а не одно через другое.

При определении усилий необходимо показать используемые сечения, приводить соответствующие уравнения, а все величины, входящие в них, должны быть указаны на чертеже. Геометрические размеры, необходимые для расчета, надо определять аналитически и лишь в крайнем случае – по масштабу.

Построение линий влияния должно быть обосновано расчетными формулами. Линии влияния необходимо расположить под схемой фермы и проставить на них числовые значения ординат под всеми узлами. При построении линий влияния следует рассматривать движение груза по нижнему поясу фермы. На построенных линиях влияния пунктиром надо показать измененные очертания для случая движения груза по верхнему поясу фермы.

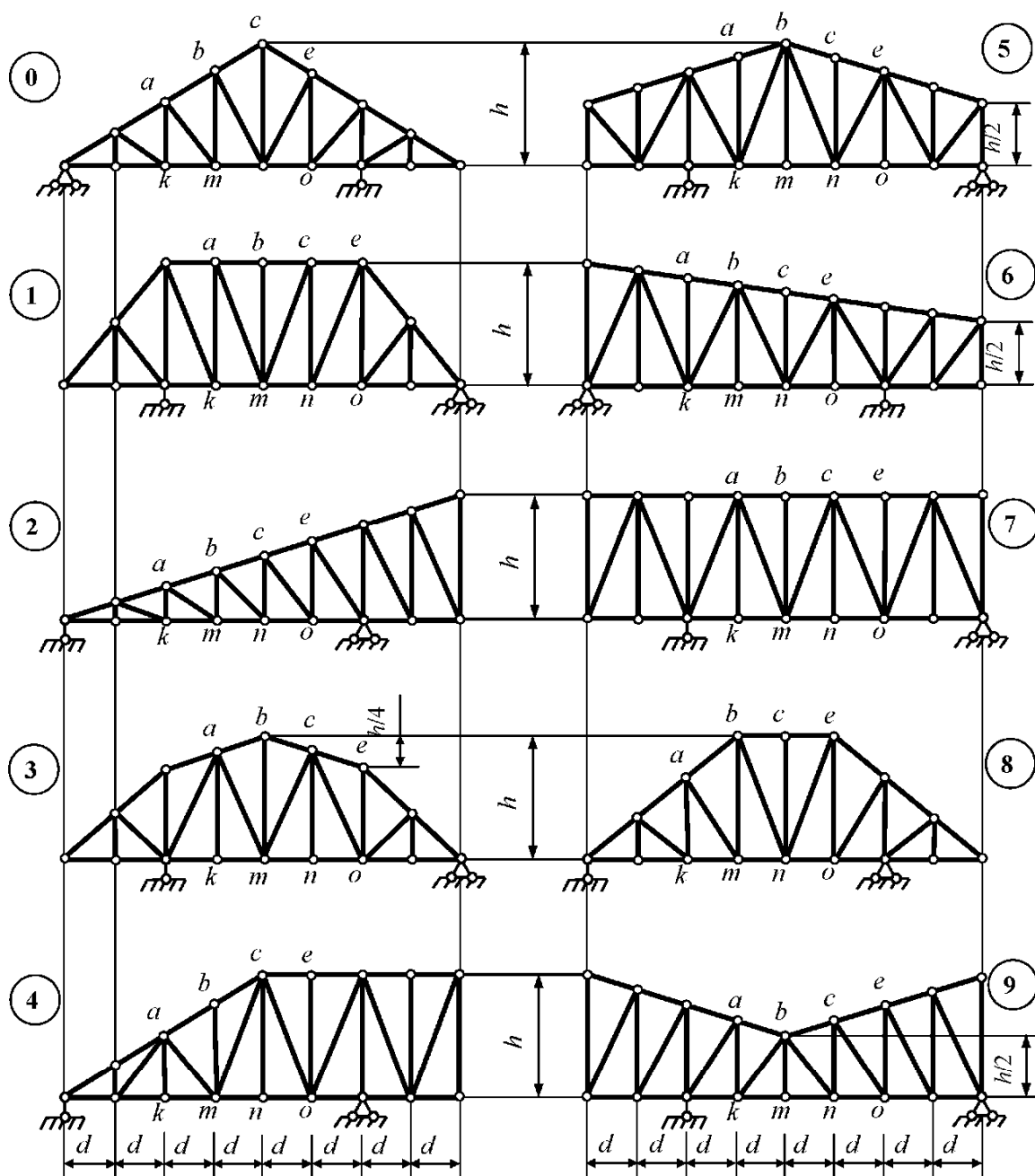


Рис. 38.

Определение по линиям влияния усилий в рассматриваемых стержнях от постоянной и временной нагрузок нужно представить рядом с соответствующей линией влияния. Для определения максимального усилия от временной нагрузки следует загрузить все узлы фермы, которым соответствуют положительные значения ординат линии влияния, для определения минимальных усилий – узлы, соответствующие отрицательным ординатам.

Максимальное расчетное усилие определяется суммой усилий от постоянной нагрузки и максимального усилия от временной нагрузки. Минимальное расчетное усилие

определяется суммой усилий от постоянной нагрузки и минимального усилия – от временной. Определение расчетных усилий удобно представить в табличной форме. В табл. 6 показана примерная форма записи.

Таблица 6

Наименование усилия (стержня)	Усилие от постоянной нагрузки, кН	Усилие от временной нагрузки, кН		Расчетные усилия, кН	
		максимальное	минимальное	максимальное	минимальное
U_5	8,7	16,3	-3,4	25,0	5,3
0_5	-9,2	2,4	-12,8	-6,8	-22
-	-	-	-	-	-

4.2. Задание для контрольной работы № 2

4.2.1. Задача. Расчет плоской статически неопределимой рамы методом сил

Для заданной рамы (рис. 39), с принятыми по шифру из табл. 7 размерами и нагрузкой, требуется:

1. Установить степень статической неопределимости и выбрать основную систему.
2. Построить единичные, суммарную единичную и грузовую эпюры моментов.
3. Составить расчетные (канонические) уравнения, определить все входящие в них коэффициенты и свободные члены и дать их проверки.
4. Решить расчетные уравнения и проверить корни.

Таблица 7

Число десятков в цифре студента	l , м	q , кН/м	h_1 , м	l_2/l_1	h_2 , м	Равномерно распределенная нагрузка q по всей длине участка
0	6	0,6	4	1:2	4	ab
1	3	1,5	2	2:1	2	bc
2	4	2,0	8	1:3	8	ad
3	6	1,2	3	3:1	3	de
4	8	0,2	6	1:4	6	ba
5	9	0,8	4	4:1	4	cb
6	12	1,8	8	2:3	8	da
7	10	1,6	6	3:2	6	ed
8	8	0,4	3	3:4	3	ad
9	4	1,0	2	4:3	2	cb

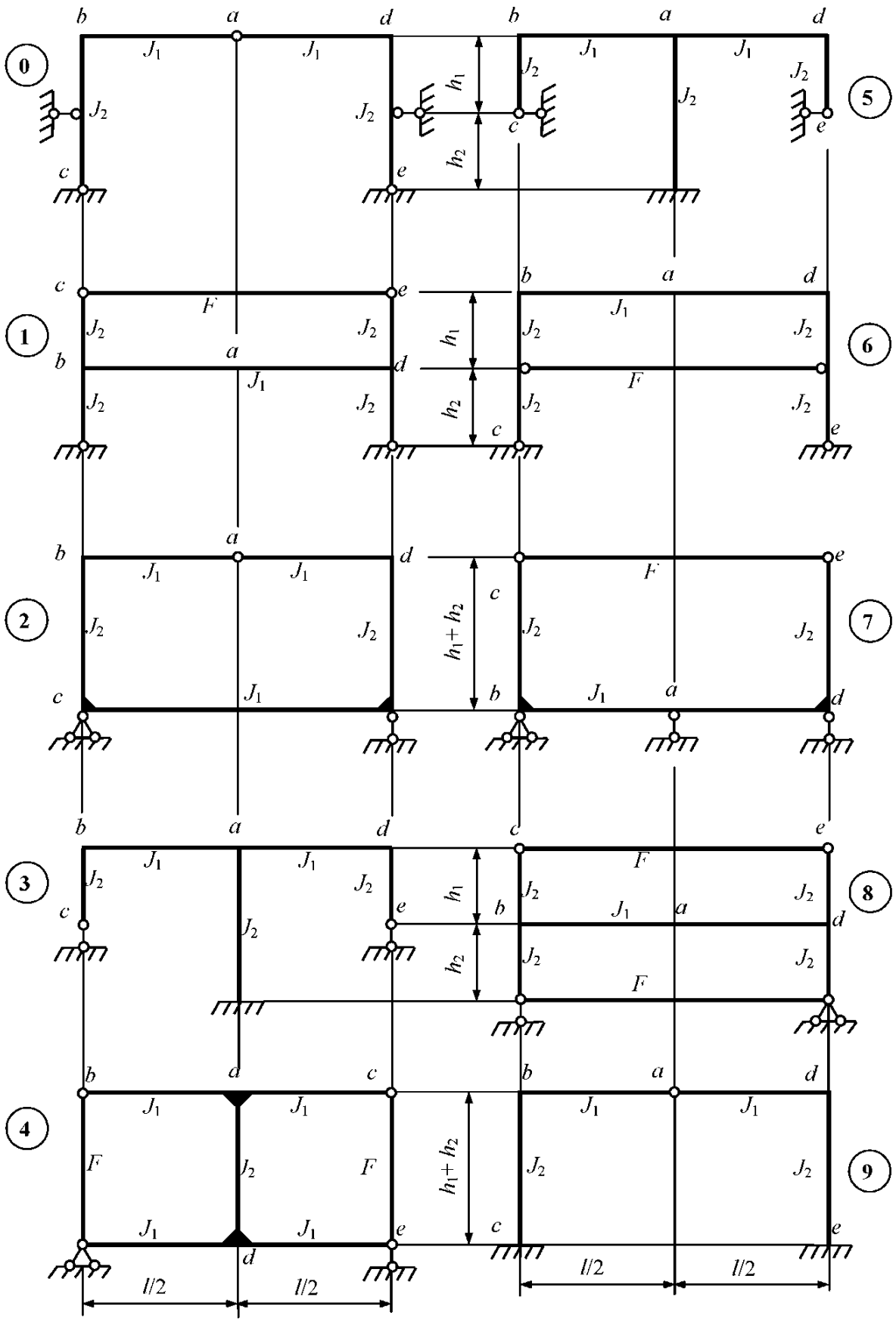


Рис. 39.

5. Построить расчетные эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил.
6. Выполнить статическую и кинематическую проверки расчетных эпюр.

Равномерно распределенная нагрузка q на горизонтальных стержнях направлена вертикально (вниз или вверх), на вертикальных – горизонтально (влево или вправо).

Для всех вариантов площадь затяжки $F = 5I_1$.

Методические указания для работы № 2

В первую очередь следует установить степень статической неопределимости рамы. С целью проверки полезно воспользоваться двумя способами: способом разделения системы на диски и способом замкнутых контуров.

Особое внимание следует обратить на выбор основной системы. Целесообразно выбрать несколько основных систем, сравнить их и одну принять к дальнейшему расчету.

Значительных упрощений расчета можно добиться, если использовать: симметрию рамы, разложение нагрузки на симметричную и кососимметричную, группировку неизвестных.

При построении единичных и грузовых эпюр ординаты надо откладывать со стороны растянутых волокон. Правильность построения единичных эпюр необходимо проверить построением суммарной единичной эпюры. Суммарная единичная эпюра строится в основной системе от всех единичных лишних неизвестных, приложенных одновременно. Для сравнения эту же эпюру следует получить путем сложения всех единичных эпюр: $M_{\Sigma} = M_1 + M_2 + \dots + M_n$.

Определяя коэффициенты и свободные члены расчетных уравнений сопряжением («перемножением») соответствующих эпюр способом Верещагина, не нужно забывать о правиле знаков, о разных жесткостях и учете продольной силы и затяжках.

Затем надо выполнить универсальную проверку коэффициентов – произведение по Верещагину суммарной единичной эпюры самой на себя должно равняться сумме коэффициентов во всех расчетных уравнениях, и проверку свободных членов – произведение по Верещагину суммарной единичной эпюры на грузовую должно равняться сумме свободных членов во всех расчетных уравнениях.

Решением расчетных уравнений определяются значения лишних неизвестных. Правильность решения необходимо проверить обратной подстановкой корней.

Суммированием исправленных и грузовой эпюр следует получить расчетную эпюру изгибающих моментов и проверить её кинематически.

Кинематическая проверка осуществляется путём сопряжения (способом Верещагина) расчетной эпюры изгибающих моментов на любую из единичных. Результат должен быть равен или быть близким к нулю (из-за неточности в подсчетах), причем разница между положительными и отрицательными слагаемыми, отнесённая к большему из них не должна превышать 2%.

Эпюру поперечных сил целесообразно построить по эпюре изгибающих моментов, используя зависимость:

$$Q_p^{(n)} = \frac{dM_p^{(n)}}{dS} = Q_p^O + \frac{M_{np} - M_{лев}}{S},$$

где Q_p^O – балочная поперечная сила (найденная для данного участка, при рассмотрении его как балки на двух опорах, загруженной пролетной нагрузкой); M_{np} , $M_{лев}$ – моменты на правом и левом концах участка (положительные, если они растягивают нижние волокна); S – длина участка.

Знаки ординат эпюры поперечных сил определяются по правилам, принятым в курсе сопротивления материалов.

Ординаты эпюры продольных сил целесообразно находить по эпюре поперечных сил путем вырезания узлов. При этом нужно начинать с узла, в котором количество неизвестных продольных сил не превышает двух и учитывать, что положительная сила вращает узел по ходу часовой стрелки, а отрицательная – против.

После построения всех расчетных эпюр необходимо выполнить статическую проверку, рассмотрев равновесие рамы в целом, либо отдельных её частей.

4.3. Задание для контрольной работы № 3

4.3.1. Задача. Расчет статически неопределимой рамы методом перемещений

Для заданной рамы (рис. 40) с размерами и нагрузкой, принятыми по шифру из табл. 8, требуется:

1. Выбрать основную систему и построить единичные и грузовую эпюры моментов.
2. Составить расчетные уравнения и определить коэффициенты и свободные члены, решить уравнения.
3. Построить расчетные эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил.
4. Выполнить кинематическую и статическую проверки расчетных эпюр.

Сосредоточенная сила P на горизонтальных стержнях направляется вертикально – на вертикальных – горизонтально.

Таблица 8

Число десятков в цифре студента	$l, м$	$P, кН$	$l_1, м$	$h_1, м$	I_2/I_1	$h_2, м$	Сосредоточенная сила P приложена на середине участка
0	3	12	6	3	2:1	9	ab
1	6	6	12	9	1:2	6	ad
2	9	4	9	6	3:1	3	ae
3	12	2	3	3	1:3	6	bc
4	6	12	6	9	1:4	3	ba
5	9	2	3	6	4:1	9	da
6	12	4	12	6	4:3	3	ea
7	3	6	9	3	3:4	9	cb
8	6	4	3	9	2:3	6	ae
9	3	8	6	6	3:2	3	ab

Методические указания для работы № 3

Основная система получается путем наложения моментных связей во все жесткие узлы рамы и вводом стержневых опор. Следует представить чертёж шарнирно-стержневой системы и обосновать количество и места постановки стержневых опор.

В расчете удобно пользоваться погонными жесткостями стержней: $i = EJ/l$ (где l – длина). Расчетные эпюры изгибающих моментов поперечных и продольных сил не зависят от абсолютных величин погонных жесткостей. Поэтому для уменьшения вычислений целесообразно пользоваться относительными их значениями, представляющими отношения действительных погонных жесткостей к одной из них, например, наименьшей.

Эпюры моментов от единичных основных неизвестных и нагрузки в основной системе вычерчиваются по табличным данным. Рекомендуется предварительно зарисовать контур изогнутой оси стержня, а при рассмотрении влияния перемещения стержневых опор, кроме того, находить поступательные перемещения всех узлов рамы.

Коэффициенты при неизвестных и свободные члены расчетных уравнений проще находить статическим способом – из условий равновесия выделенных частей рамы, при этом надо внимательно следить за их знаками. Для самоконтроля коэффициенты следует определять независимо друг от друга и затем взаимно побочные коэффициенты сопоставлять.

Решение расчетных уравнений необходимо проверить путем подстановки найденных значений неизвестных в исходные уравнения.

После определения значений неизвестных рекомендуется построить исправленные эпюры моментов. Расчетная эпюра изгибающих моментов получается суммированием исправленных и грузовой эпюр.

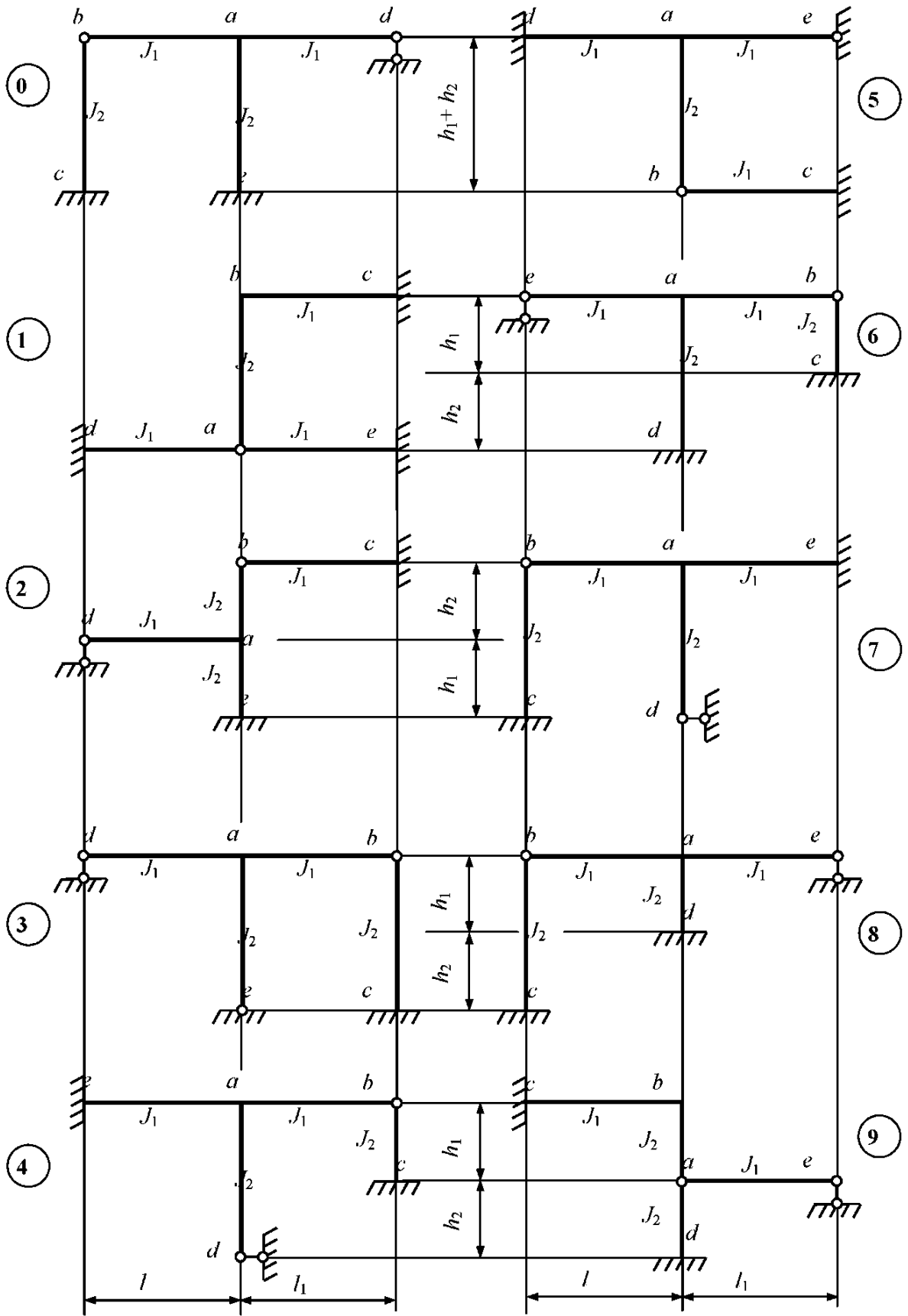


Рис. 40.

Расчетные эпюры поперечных сил строятся так же, как в примере расчета рамы (подраздел 2.1), представленной на рис. 15 и 16.

Расчетные эпюры нужно проверить статически (рассмотрением равновесия рамы в целом или отдельных её частей) и кинематически. Для последней проверки целесообразно выбрать основную систему метода сил, построить единичную эпюру от какого-либо лишнего неизвестного и «умножить» её способом Верещагина на расчетную эпюру изгибающих моментов.

4.4. Задание для контрольной работы № 4

4.4.1. Задача. Расчет подпорной стены

Для подпорной стены (рис. 41) с данными, принятыми по шифру из таблицы 9, требуется:

1. Построить эпюры интенсивности давления на заднюю и переднюю грани стены.
2. Определить силы, действующие на стену (давление грунта, воды и собственный вес), и точки их приложения.
3. Построить эпюру нормальных напряжений в подошве стены.
4. Проверить устойчивость стены на опрокидывание и скольжение.

В подошве стены грунт водонепроницаемый, со стороны передних граней – вода и водонасыщенный грунт, со стороны задних граней – сухой грунт.

Для всех вариантов принять: пористость водонасыщенного грунта $n = 0,4$, коэффициент трения по подошве стены $f = 0,5$.

Таблица 9

Число десятков в цифре студента	$H, м$	$q, кН/м$	Угол трения грунта по кладке стены, δ	Объемный вес грунта, $\gamma, кН/м^3$	Объемный вес кладки, $\gamma, кН/м^3$	Угол внутреннего трения грунта, ρ	Угол наклона поверхности грунта, α
0	5	0,6	6^0	1,5	2,1	26^0	4^0
1	8	1,0	9^0	1,7	2,3	28^0	8^0
2	6	1,4	12^0	1,9	2,5	30^0	12^0
3	10	0,8	10^0	1,6	2,2	32^0	6^0
4	9	1,2	8^0	1,8	2,4	34^0	10^0
5	8	1,4	15^0	1,7	2,5	35^0	8^0
6	6	0,6	14^0	1,5	2,2	27^0	4^0
7	10	1,0	11^0	1,8	2,3	29^0	12^0
8	5	1,2	7^0	1,6	2,1	31^0	6^0
9	9	0,8	16^0	1,9	2,4	33^0	10^0

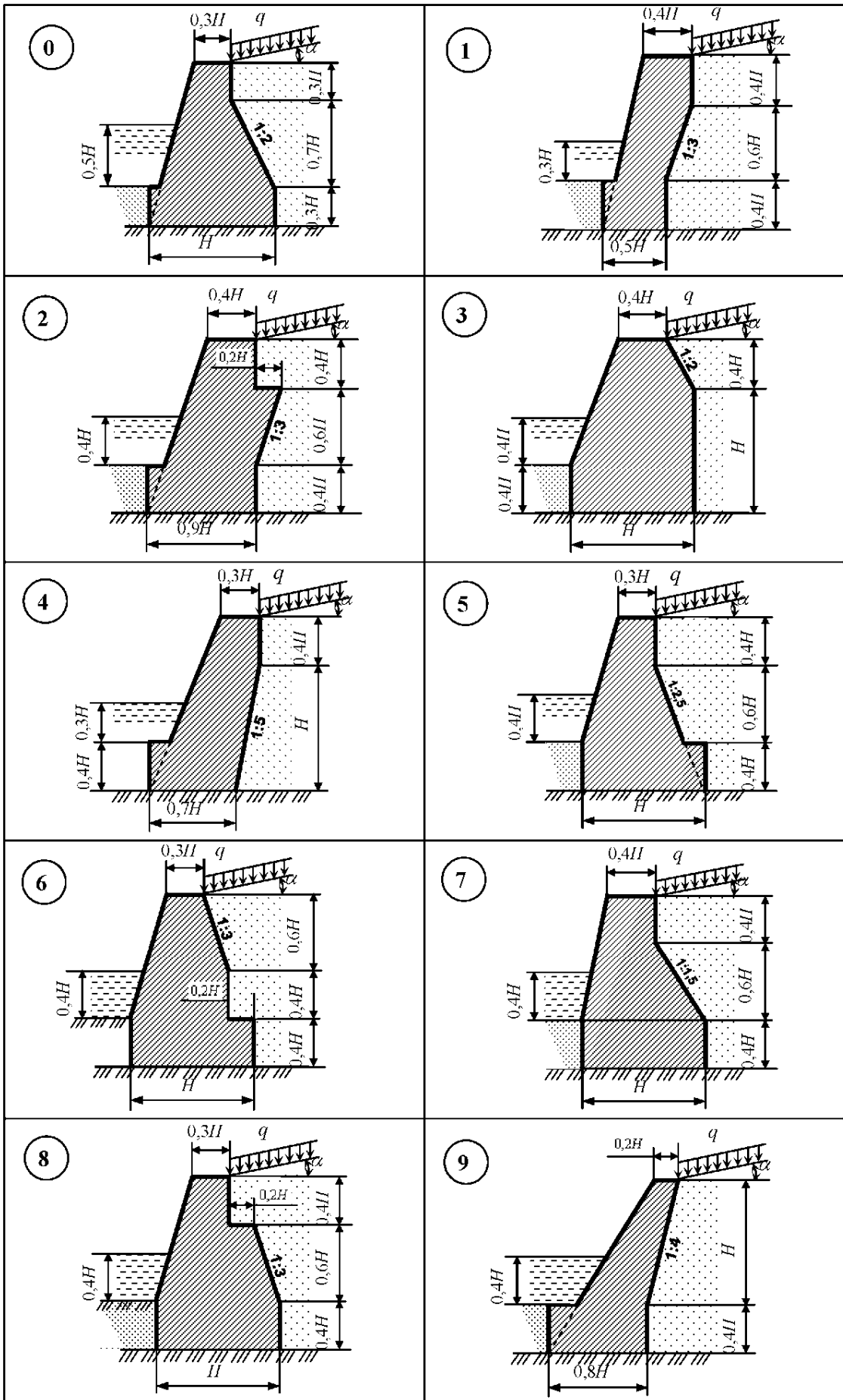


Рис. 41.

Методические указания для работы № 4

Размер подпорной стены, перпендикулярной чертежу, принимается равным одному метру.

При расчете стену следует разделять горизонтальными плоскостями на три или более блоков. Делящие плоскости целесообразно совмещать с ребрами стены, водной поверхностью и обрезаем фундамента. Для каждого блока нужно вычислить действующие силы: вес, давление воды и грунта, а также определить (аналитически или графически) координаты точек их приложения. Все виды давлений (воды и грунта) и точки приложения давлений рекомендуется находить по эпюрам интенсивности давления.

Боковое давление грунта следует определять как напор без учета сцепления. Эпюра интенсивностей давления для каждой плоской грани имеет прямолинейное очертание и строится по трём ординатам. Предварительно надо подсчитать коэффициенты бокового давления и отметки нулевых точек для каждой грани стены.

Положение нулевых точек определяется пересечением грани стены и приведенной поверхности. Коэффициент бокового давления рекомендуется определять по формуле:

$$\mu = \frac{\cos^2(\rho - \varepsilon)}{\cos^2 \varepsilon \cdot \sin \psi} \cdot \frac{1}{\left(1 + \sqrt{\frac{\sin(\rho + \delta) \sin(\rho - \alpha)}{\sin \psi \cdot \cos(\varepsilon - \alpha)}}\right)^2},$$

где ρ – угол внутреннего трения, δ – угол трения грунта по грани стены, α – угол наклона поверхности грунта к горизонтали; ε – угол наклона грани стены к вертикали; $\psi = 90^\circ - \varepsilon - \delta$.

Все углы подставляются в формулу в градусах, а для α и ε обязательно надо учитывать знаки (положительные – против хода часовой стрелки).

Для передней грани стены, со стороны которой примыкает водонасыщенный грунт, формула коэффициента бокового давления упрощается вследствие равенства нулю углов α , ε и δ и имеет вид:

$$\mu = \operatorname{tg}^2\left(45^\circ - \frac{\rho}{2}\right).$$

Когда изломы профиля сечения стены образуют горизонтальные площадки, надо учитывать вес грунта или воды, расположенные над этими площадками.

Величину напора на верхнюю заднюю грань стены следует определить графически построением Понселе и треугольника напора (Рехана). Построение рекомендуется провести при поверхности грунта свободной от нагрузки, а влияние последней учесть множителем $(1+2h/H)$, где H – высота грани; h – расстояние по вертикали от поверхности

границ до нулевой точки. Результаты аналитического и графического расчетов не должны отличаться более, чем на 2 %.

Ординаты эпюр нормальных напряжений в крайних точках подошвы стены можно определять по формуле сопротивления материалов – случай внецентренного сжатия.

Если эпюра получается двухзначной, то её необходимо перестроить с учетом того, что грунт основания не воспринимает растягивающих напряжений.

При определении коэффициентов запаса устойчивости на опрокидывание и скольжение следует составить условия предельного равновесия отдельно на опрокидывание и скольжение. В эти условия вводится давление грунта, увеличенное в K раз. Устойчивость подпорной стенки считается обеспеченной, если полученные значения коэффициентов запаса устойчивости будут не менее 1,25.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. *Ржаницын А.Р.* Строительная механика. – М., 1991.
2. Строительная механика / Под ред. Ю.И. Бутенко. – Киев, 1998.
3. *Кирьянов Д.В.* Mathcad 14. – БХВ–Петербург, 2007. – 704 с.

Дополнительная

4. *Леонтьев Н.Н. и др.* Основы строительной механики стержневых систем. – М., 1996.
5. Строительная механика. Руководство к практическим занятиям / Под ред. Б.И. Бутенко. – Киев, 1984.
6. *Клейн Г.К. и др.* Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики. – М., 1986. – 384 с.