

ОПД.Р.03 СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Методическое пособие с заданиями к контрольным работам

Издание предназначено для студентов всех форм обучения специальностей 270205 «Автомобильные дороги и аэродромы», 270102 «Промышленное и гражданское строительство» и направления подготовки 270800 «Строительство» при изучении ими дисциплины "Строительная механика". Приведены задания к контрольным работам, а также методические указания по их выполнению. Рассмотрены примеры решения задач.

ОГЛАВЛЕНИЕ

УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ	4
ЗАДАЧА № 1. РАСЧЕТ МНОГО ПРОЛЕТНОЙ ШАРНИРНО-КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ ...	4
Методические указания к решению задачи № 1	7
ЗАДАЧА № 2. РАСЧЕТ ТРЕХШАРНИРНОЙ АРКИ ИЛИ РАМЫ	15
Методические указания к решению задачи № 2	17
ЗАДАЧА № 3. РАСЧЕТ ПЛОСКОЙ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ ФЕРМЫ	22
Методические указания к решению задачи № 3	23
ЗАДАЧА № 4. РАСЧЕТ ШПРЕНГЕЛЬНОЙ ФЕРМЫ	31
Методические указания к решению задачи № 4	32
ЗАДАЧА № 5. РАСЧЕТ ПЛОСКОЙ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ РАМЫ МЕТОДОМ СИЛ	45
Методические указания к решению задачи № 5	45
ЗАДАЧА № 6. РАСЧЕТ НЕРАЗРЕЗНОЙ БАЛКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УРАВНЕНИЯ ТРЕХ МОМЕНТОВ	56
Методические указания к решению задачи № 6	58
ЗАДАЧА № 7. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ РАМЫ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ (ДЕФОРМАЦИЙ)	62
Методические указания к решению задачи № 7	65
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	81

УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

В пособии представлены 7 задач. Студенты специальности «Промышленное и гражданское строительство» и направления подготовки «Строительство» выполняют задачи № 1, 2, 3, 6 и 7. Студенты специальности «Автомобильные дороги и аэродромы» 1, 2, 4, 5, 6.

Исходные данные для решения заданий выбираются студентом из таблиц, которые приведены к каждой задаче в соответствии с его личным учебным шифром (номером зачетной книжки). Шифром считаются три последние цифры. Например: если номер зачетной книжки 20531, то учебным шифром будет число 531. Для получения исходных данных необходимо выписать из таблицы три строки: одну, отвечающую первой цифре шифра, вторую, отвечающую второй (средней) цифре шифра и третью, отвечающую последней цифре шифра (номер расчетной схемы).

Работы, выполненные не по своему варианту, преподавателем не принимаются и остаются без рецензии.

К каждой задаче даны необходимые теоретические сведения и справочный материал, приведены примеры решения задач. Кроме методических указаний при решении контрольной работы студент должен использовать литературу, указанную в библиографическом списке.

Каждая контрольная работа должна быть выполнена на листах писчей бумаги формата А4. Чертежи, выполненные на листах миллиметровой бумаги, значительно облегчают выполнение работы, что позволит избежать ошибок, связанных с решением задач, т. к. числовые значения в большинстве расчетов берутся из чертежа.

Перед решением задачи необходимо вычертить расчетную схему в определенном масштабе с указанием размеров и внешних нагрузок в числах. Решение задачи должно сопровождаться краткими последовательными пояснениями и схемами с размерами.

Необходимо помнить, что язык техники – это чертежи и формулы.

На эпюрах и линиях влияния должны быть проставлены значения всех характерных ординат и размерности. Отмеченные рецензентом замечания нельзя убирать.

ЗАДАЧА № 1. РАСЧЕТ МНОГОПРОЛЕТНОЙ ШАРНИРНО-КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ

Задача. Для балки, выбранной по варианту (табл. 1) и расчетной схеме (рис. 1), требуется:

1) построить эпюры поперечных сил (Q) и изгибающих моментов (M) аналитически.

2) построить линии влияния Q и M для заданных сечений, а также линию влияния любой опорной реакции R .

3) по линиям влияния определить значения M , Q и R от заданной нагрузки и сверить их со значениями, полученными аналитически для заданных сечений.

Таблица 1

Числовые данные к задаче № 1

Первая цифра шифра	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
l_1 , м	10	14	8	12	9	11	14	15	8	13
b , м	2,0	3,0	2,0	3,0	3,6	3,0	4,0	2,5	2,0	1,6
q_1 , кН/м	1,5	2,0	2,5	3,0	2,4	1,8	2,2	2,6	1,0	0,8
Вторая цифра шифра	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
l_2 , м	9,0	10,0	11,0	13,0	14,0	15,0	8,0	10,0	11,0	9,0
a , м	2,0	2,2	3,0	2,6	2,4	3,2	3,4	3,6	2,0	2,4
q_2 , кН/м	3,0	2,5	2,2	0,8	1,8	2,6	1,0	1,5	2,0	2,4
Третья цифра шифра	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
l_3 , м	8,0	4,0	10,0	12,0	6,0	2,0	4,0	5,0	7,0	9,0
P , кН	2,0	1,5	2,5	4,0	3,0	4,5	3,5	2,5	6,0	5,0
d , м	3,0	2,0	2,0	1,0	0,6	1,0	1,2	1,5	2,0	2,5
Номера сечений по первой цифре шифра	1; 2	3; 4	5; 6	1; 4	2; 3	4; 5	3; 6	1; 3	4; 2	2; 5
c , м	1,2	1,5	2,0	2,5	1,8	2,2	1,6	2,4	1,4	2,6

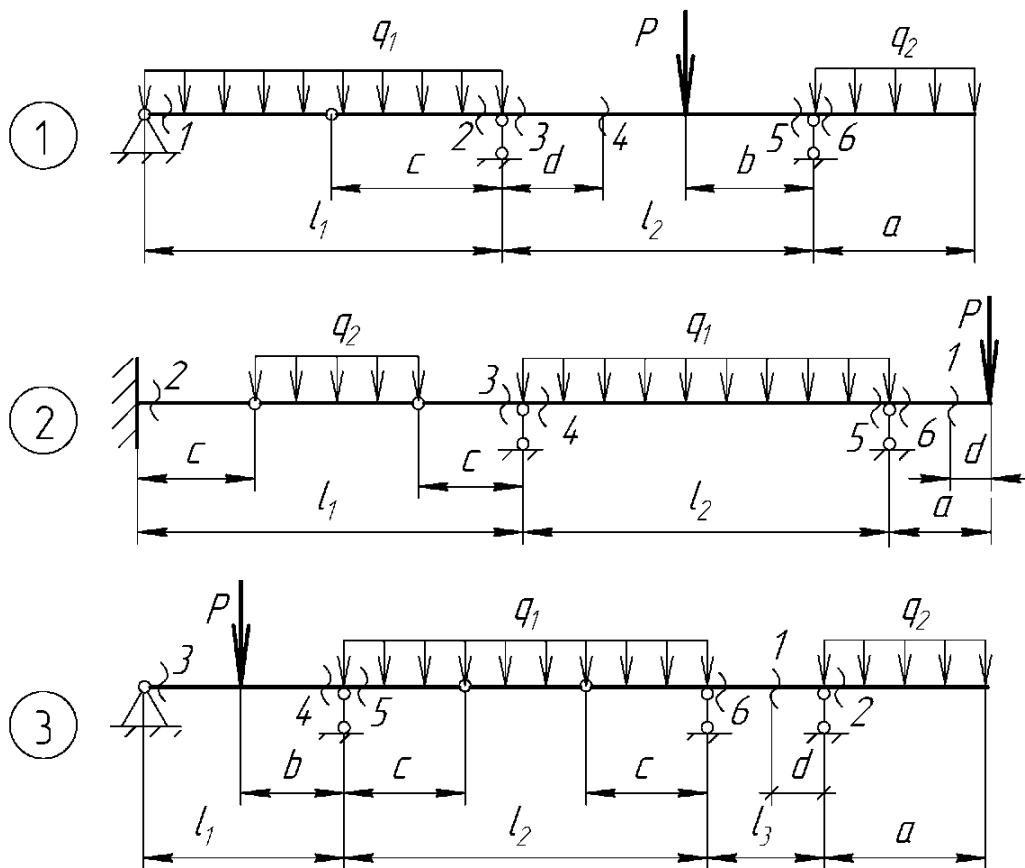


Рис. 1. Расчетные схемы к задаче № 1

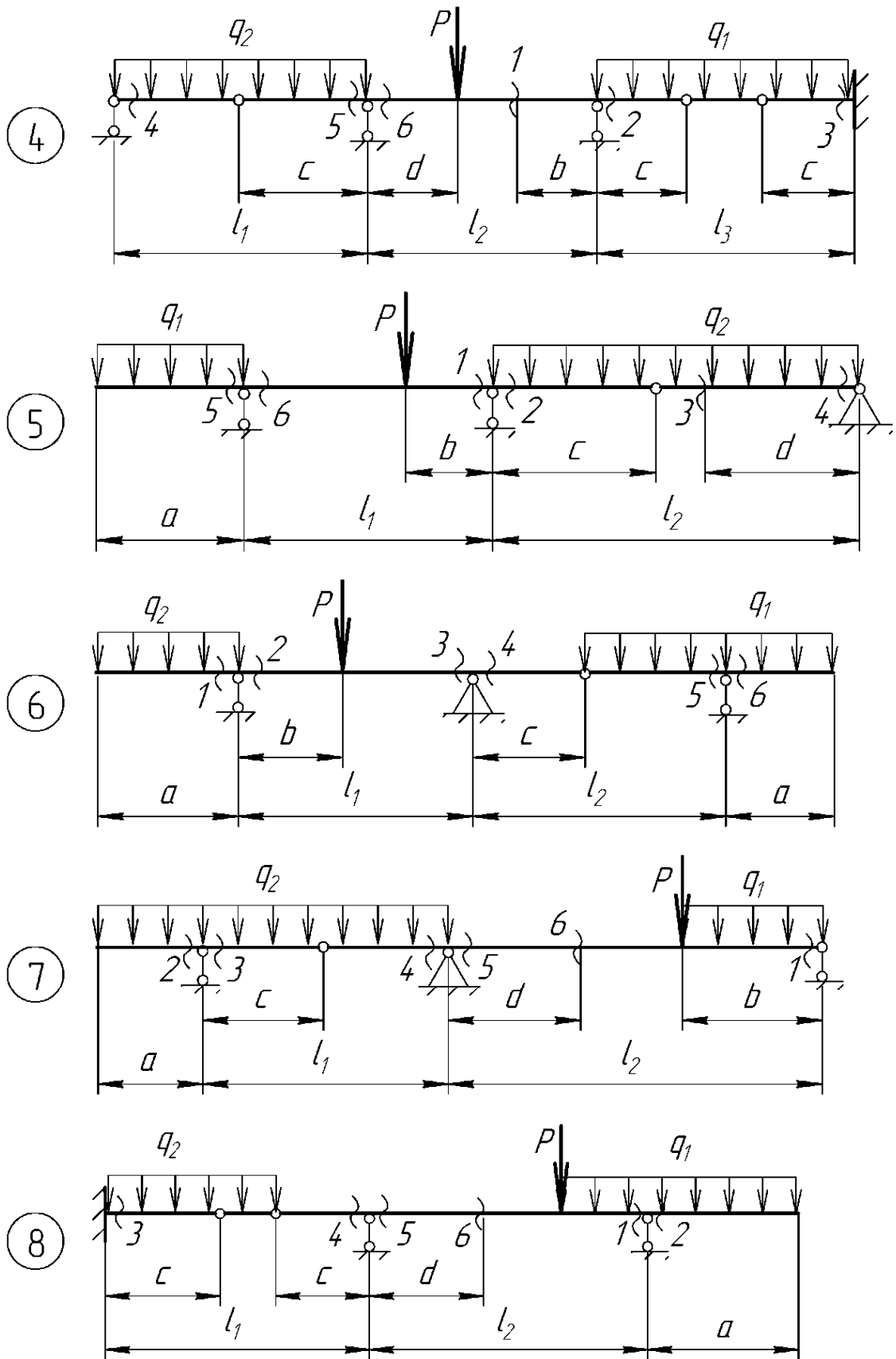


Рис. 1. Продолжение

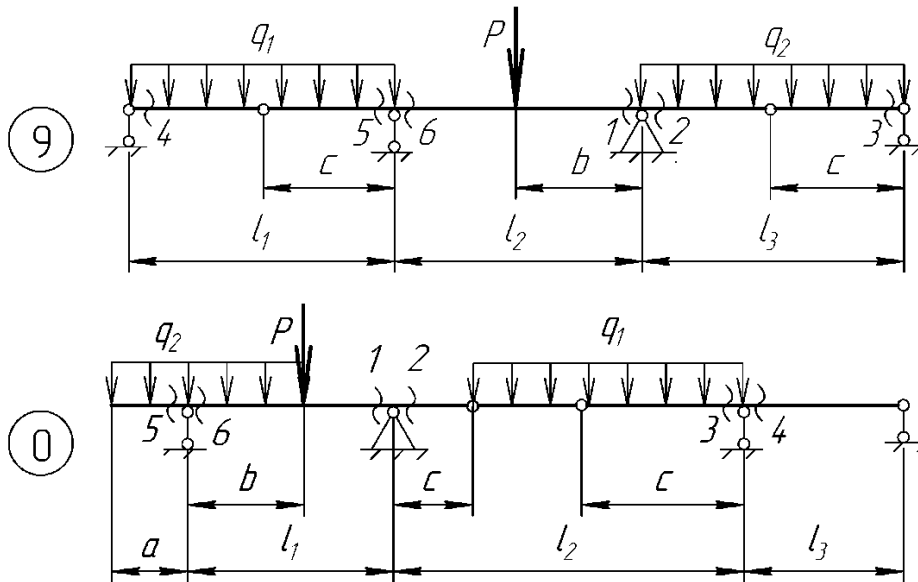


Рис. 1. Окончание

Методические указания к решению задачи № 1

Для построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов используется "поэтажная" схема, которая располагается под схемой заданной балки.

При построении "поэтажной" схемы необходимо выделить основные балки, для этого мысленно удаляют шарниры, соединяющие балки. Те балки, которые самостоятельно способны нести нагрузку (защемленные или имеющие две земные опоры), будут основными, или главными. Второстепенные, или вспомогательные, балки имеют только одну земную опору или не имеют опор вообще (пример рис. 2).

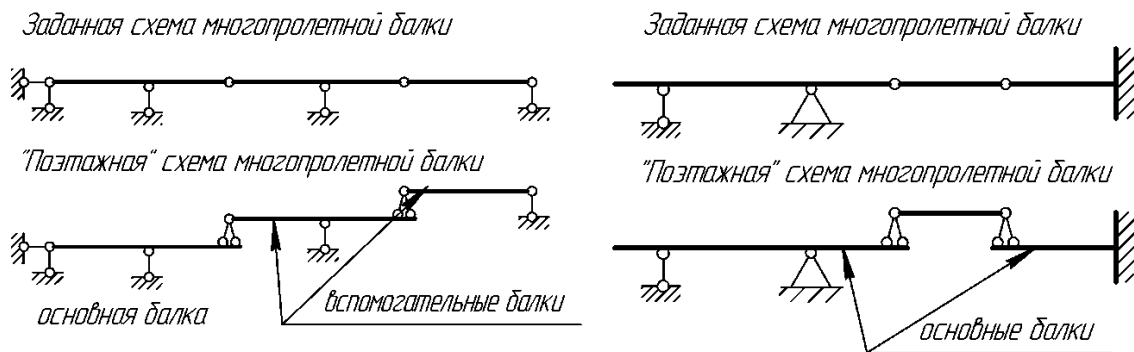


Рис. 2. Пример образования «поэтажных» схем в многопролетных балках

После построения "поэтажной" схемы заданную балку рассматривают как ряд простых балок. Для того чтобы провести расчет, необходимо в местах расчленения балки (шарнирах) приложить силы взаимодействия между двумя смежными балками. Эти силы должны быть равны между собой и противоположно направлены.

Расчет на подвижную нагрузку производится при помощи линий влияния (л. в.). Линии влияния опорных реакций балки на двух опорах с консолями являются основными (рис. 3), поэтому вид и исходные ординаты л. в. опорных реакций необходимо запомнить. Каждая из опорных л. в. показывает, что реакция опоры равна единице, когда груз $P = 1$ стоит над этой опорой, и уменьшается по линейному закону до нуля, когда груз приближается к противоположной опоре.

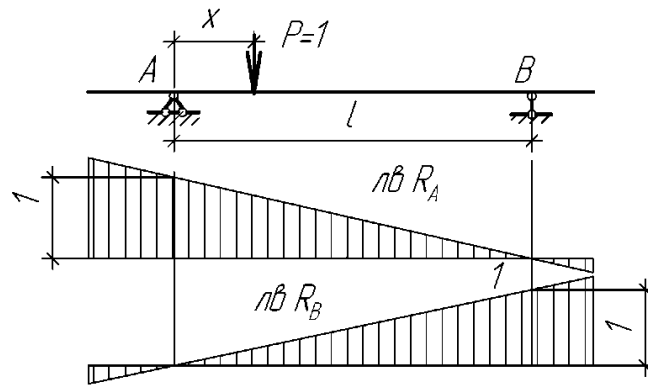


Рис. 3. Линии влияния опорных реакций

Все остальные л. в. усилий в сечениях сооружений строятся на базе основных (рис. 4). Ординаты л. в. в каком-либо сечении определяются из подобия треугольников. Правила, которые необходимо запомнить при построении л. в. в многопролетных балках:

- в земных опорах л. в. проходят через ноль (нулевая точка), а на консолях левые и правые ветви л. в. имеют продолжение;
- в шарнирах л. в. имеют перелом;
- если в пролетах балки встречаются подряд два шарнира, то ордината л. в. усилия во втором шарнире по ходу движения единичного груза от нижележащей балки равна нулю;
- движение груза по балкам, лежащим ниже искомой, не рассматривается, так как нагрузка, приложенная к ним, не вызывает усилий в верхних этажах.

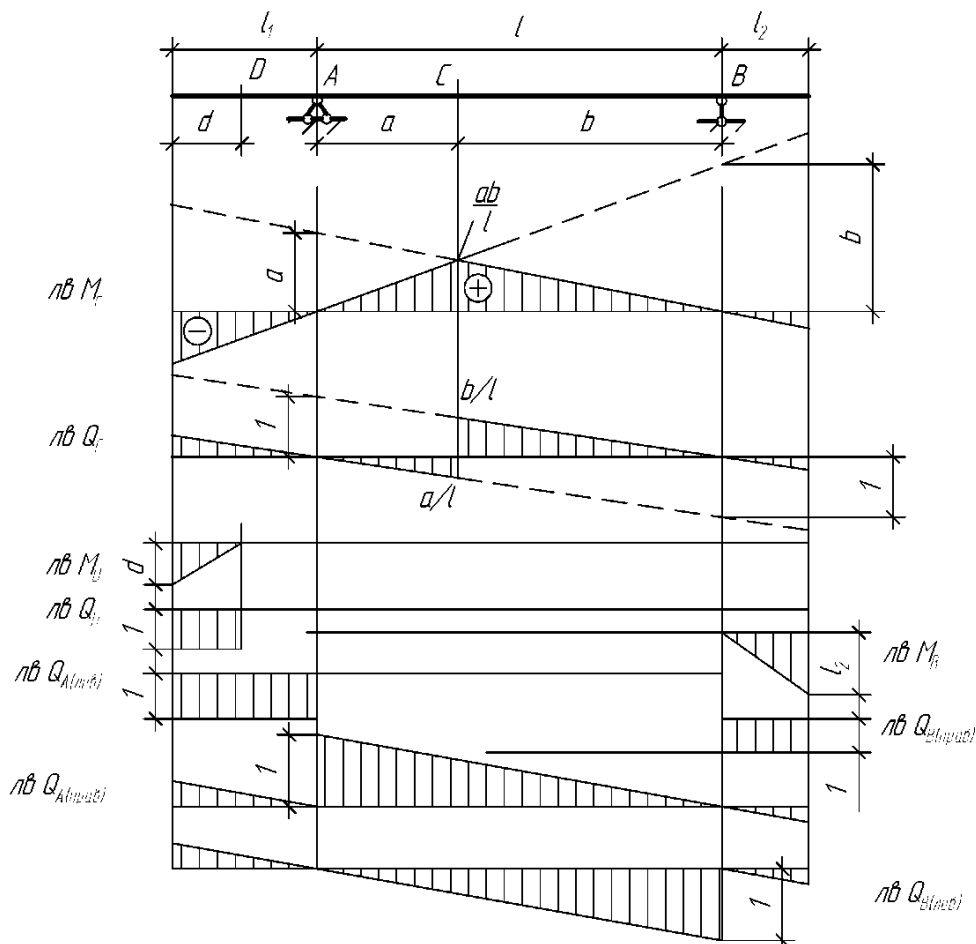


Рис. 4. Примеры построения линий влияния поперечных сил и изгибающих моментов в различных сечениях двухопорной балки

Ордината л. в. показывает, чему равно усилие при действии в этой точке $P = 1$. При действии на сооружение системы сосредоточенных сил, моментов сил и распределенных нагрузок на нескольких участках усилие S в некотором сечении сооружения производится по формуле

$$S = \sum_{i=1}^n P_i y_i + \sum_{j=1}^m q_j \omega_j + \sum_{k=1}^z M_k \operatorname{tg} \alpha_k, \quad (1)$$

где P – сосредоточенная сила, действующая на сооружение, y – ордината л. в. усилия под сосредоточенной нагрузкой, q – распределенная нагрузка, ω – площадь, образованная той частью л. в., под которой находится распределенная нагрузка, M – момент сил, $\operatorname{tg} \alpha$ – тангенс угла наклона л. в. к базовой прямой.

Нагрузки, направленные сверху вниз считаются положительными. Момент сил считается положительным, если он направлен по ходу часовой стрелки. Для тангенса угла наклона принимается следующее правило: если направление оси балки к л. в. на участке действия сосредоточенного момента совпадает с направлением момента, то получаем знак "минус", если не совпадает, то знак "плюс".

Пример решения задачи № 1

Схема балки представлена на рис. 5, а.

Расчленим балку по шарнирам E, F, G и составляем "поэтажную" схему, в которой балки AE (с жесткой заделкой) и GCD (на двух шарнирных опорах) являются основными, а второстепенные балки – EBF (имеет одну земную опору) и FG (без земных опор) (рис. 5, б).

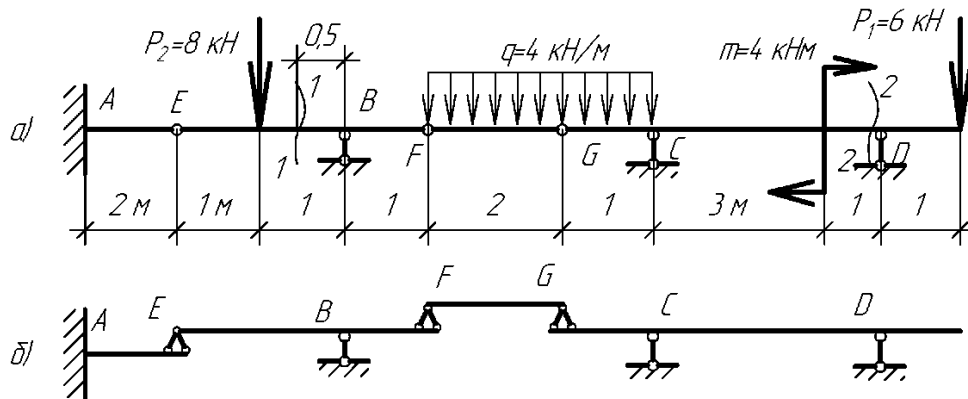


Рис. 5. Расчетная схема многопролетной балки и ее «поэтажная» схема

Аналитический расчет внутренних усилий начинаем с второстепенной балки FG . Расчетная схема балки FG , нагруженной равномерно распределенной нагрузкой (рис. 6), хорошо известна из курса «Сопротивления материалов», поэтому не приводим примера расчета опорных реакций и значений внутренних усилий в сечениях.

$$R_F = R_G = \frac{ql}{2} = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4 \text{ кН.}$$

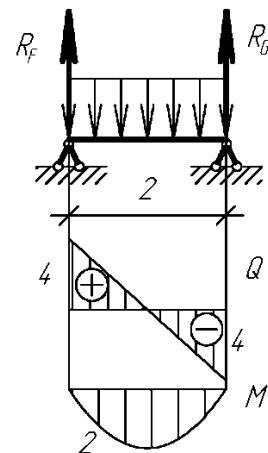


Рис. 6. Расчет второстепенной балки FG

Балка GCD.

Расчетная схема балки и эпюры внутренних усилий показаны на рис. 7. К нагрузкам, действующих на эту балку, добавили давление от второстепенной балки R_G .

Реакции в опорах определяются из уравнений моментов сил относительно левой и правой опоры.

$$\sum M_D = 0; R_G \cdot 5 + q \cdot 1 \cdot 4,5 - R_C \cdot 4 - M - P_1 \cdot 1 = 0.$$

Из уравнения определяем $R_C = 7$ кН.

$$\sum M_C = 0; R_G \cdot 1 + q \cdot 1 \cdot 0,5 - M + R_D \cdot 4 - P_1 \cdot 5 = 0.$$

Из полученного уравнения определяем $R_D = 7$ кН.

Произведем проверку равновесия балки:

$$\sum Y = 0; R_C + R_D - q \cdot 1 - R_G - P_1 = 0.$$

Равенство нулю всех вертикальных сил, приложенных к балке, доказывает, что реакции в опорах и сила в шарнире рассчитаны верно.

Строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов основной балки (рис. 7).

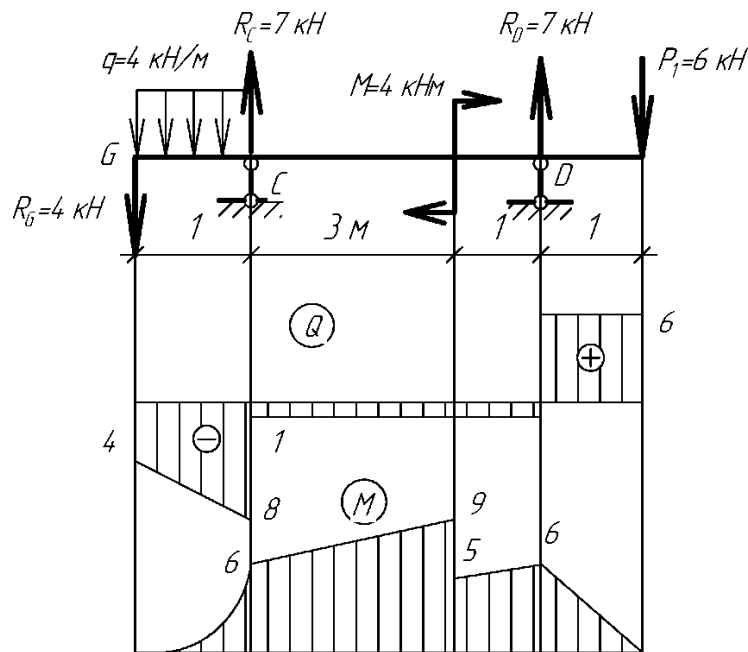


Рис. 7. Расчетная схема основной балки

Балка EBF.

К нагрузкам, действующих на эту балку, добавили давление от второстепенной балки R_F .

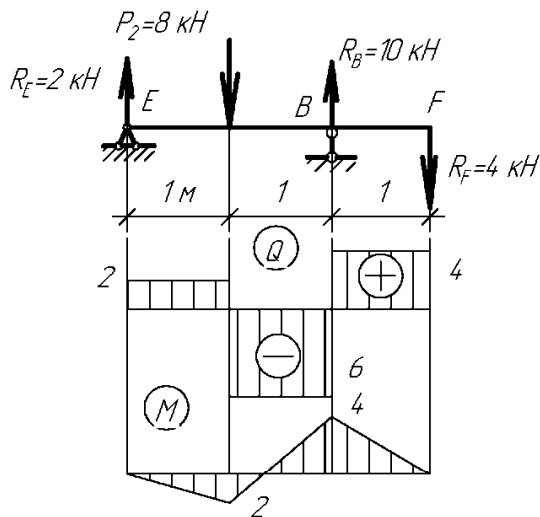


Рис. 8. Расчетная схема второстепенной балки

Определение реакций в опорах из уравнений моментов сил.

$$\sum M_E = 0; P_2 \cdot 1 - R_B \cdot 2 + R_F \cdot 3 = 0.$$

Следовательно $R_B = 10$ кН.

$$\sum M_B = 0; P_2 \cdot 1 - R_E \cdot 2 - R_F \cdot 4 = 0.$$

$$R_E = 2 \text{ кН.}$$

Проверка выполнения условия равновесия второстепенной балки:

$$\sum Y = 0; R_E + R_B - R_F - P_2 = 0.$$

Равенство нулю всех вертикальных сил, приложенных к балке, доказывает, что реакции в опорах и сила в шарнире рассчитаны верно.

Эпюры внутренних усилий представлены на рис. 8.

Балка AE.

Балка является основной и воспринимает нагрузку от второстепенной балки EBF.

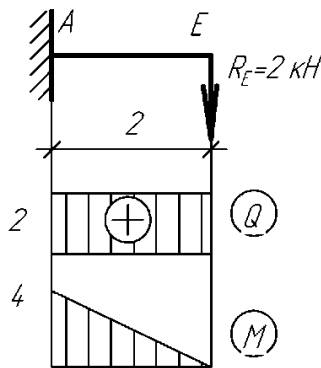


Рис. 9. Расчетная схема основной балки

Консольная с жестким защемлением балка хорошо известна из курса «Сопротивления материалов. Расчетная схема балки и эпюры внутренних усилий показаны на рис. 9.

Общие эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для заданной балки показаны на рис. 101.

Значения поперечной силы и изгибающего момента в заданных сечениях балки составляют:

В сечении 1-1: $M_{1-1} = -1$ кН·м, $Q_{1-1} = -6$ кН.

В сечении 2-2, расположенном на бесконечно малом расстоянии слева от опоры D: $M_{2-2} = -6$ кН·м, $Q_{2-2} = -1$ кН.

Реакция в жесткой заделке $R_A = 2$ кН.

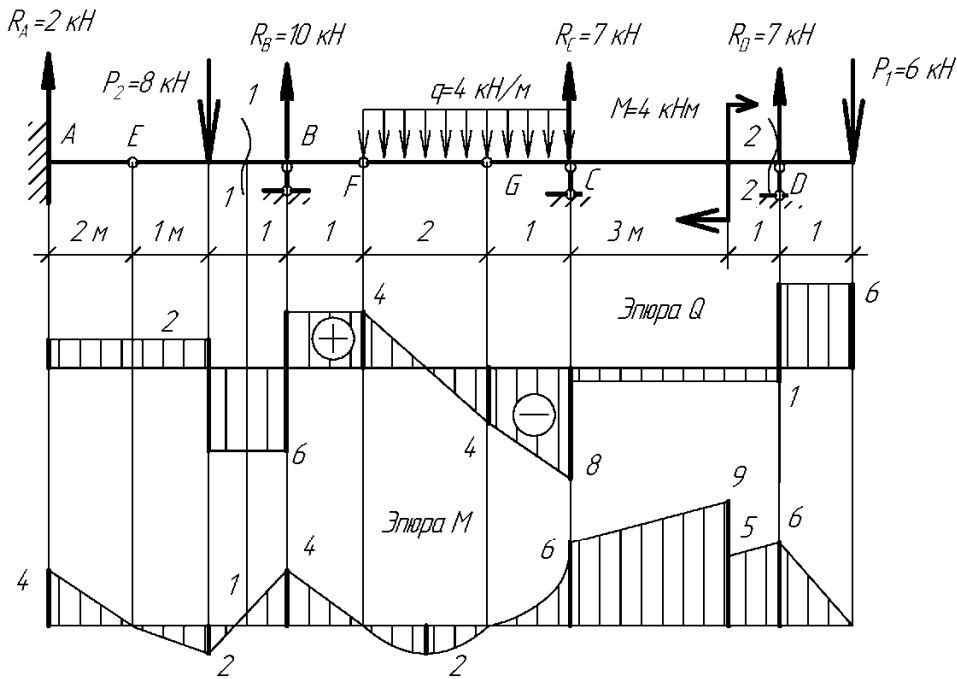


Рис. 10. Эпюры внутренних усилий в многопролетной балке

Линию влияния момента в сечении 1–1 строим как для однопролетной балки (рис. 4, л. в. M_C), откладывая под сечением 1–1 ординату, равную 0,375, определяемую формулой $(a \cdot b)/l$, где $a = 1,5$ м. $b = 0,5$ м, $l = 2$ м (рис. 11, а). Правую и левую ветки л. в. соединяем с нулем на опорах E и B . Правая ветка л. в. имеет продолжение на консоли BF , на шарнире F происходит перелом л. в. и продолжение на верхнюю вспомогательную балку в нуль в шарнире G . На балках AE и GCD все ординаты л. в. будут равны нулю, т. к. при перемещении груза по этим балкам изгибающего момента в сечении 1–1 не возникает.

Линию влияния поперечной силы в сечении 1–1 строим как для однопролетной балки (рис. 4, л. в. Q_C), откладывая под сечением 1–1 ординаты, равные $-0,75$ и $+0,25$, определяемые формулами a/l и $-b/l$, где $a = 1,5$ м. $b = 0,5$ м, $l = 2$ м (рис. 11, б). Правую и левую ветки л. в. соединяем с нулем на опорах E и B . Правая ветка л. в. имеет продолжение на консоли BF , на шарнире F происходит перелом л. в. и продолжение на верхнюю вспомогательную балку в нуль в шарнире G . На балках AE и GCD все ординаты л. в. будут равны нулю, т. к. при перемещении груза по этим балкам поперечной силы в сечении 1–1 не возникает.

Ординаты л. в. момента и поперечной силы под опорой F , а также ординаты л. в. под сосредоточенной силой P_2 определяем из подобия треугольников.

$$y_1 = \frac{0,375 \cdot 1}{1,5} = 0,25, \quad y_2 = \frac{0,75 \cdot 1}{1,5} = 0,5.$$

Значение изгибающего момента в сечении 1–1:

$$M_{1-1} = P_2 \cdot y_1 + q \cdot \omega_1 = 8 \cdot 0,25 + 4 \left(-\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0,75 \right) = -1 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Значение поперечной силы в сечении 1-1:

$$Q_{1-1} = P_2 \cdot y_2 + q \cdot \omega_2 = 8 \cdot (-0,5) + 4 \left(-\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0,5 \right) = -6 \text{ кН.}$$

Значения внутренних усилий в сечении 1-1 балки, рассчитанных по линиям влияния совпадают с аналитическим расчетом.

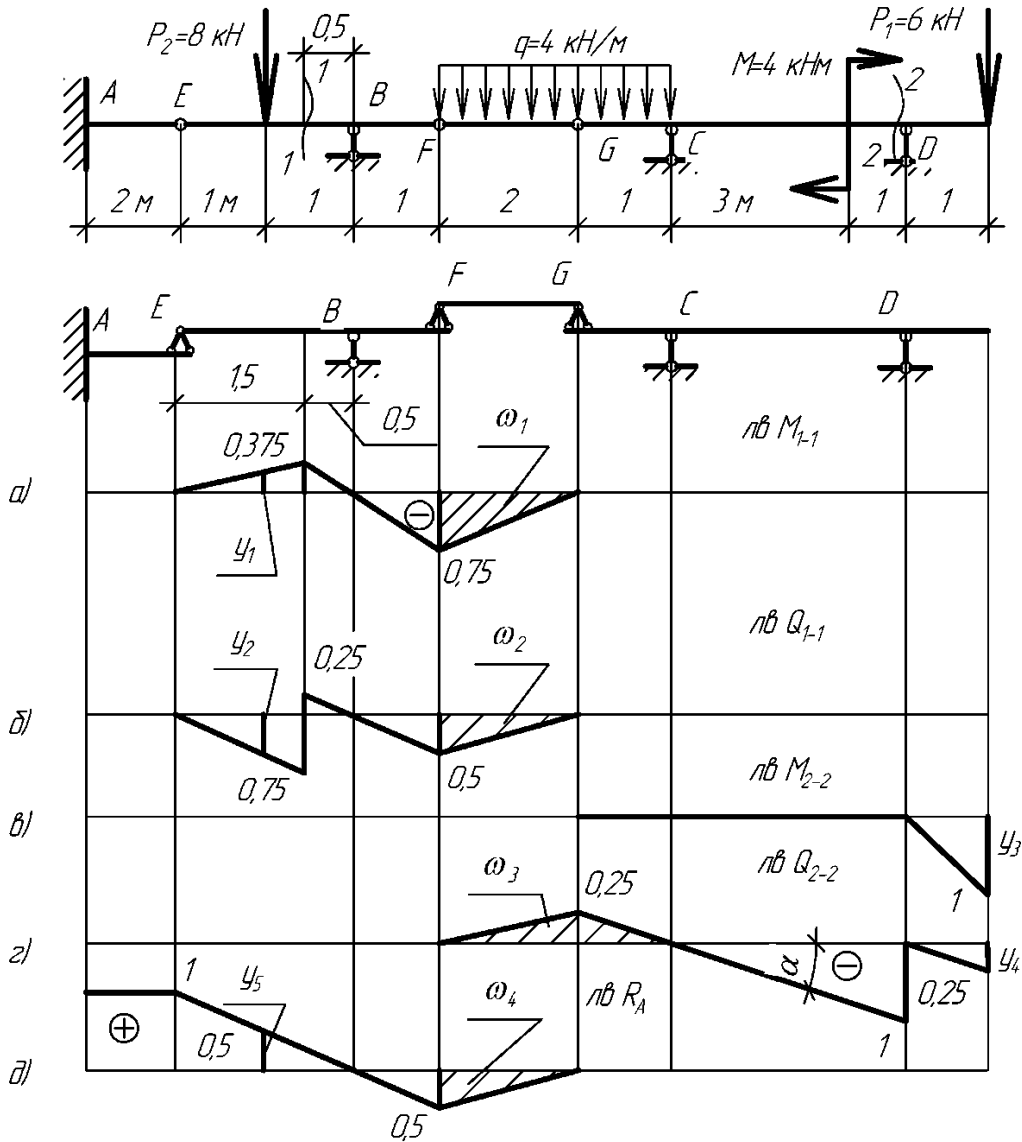


Рис. 11. Линии влияния усилий в заданных сечениях балки

Построение л. в. усилий в сечении 2-2, расположенном на бесконечно близком расстоянии слева от опоры D.

Правая ветка л. в. момента строится как для консоли (см. рис. 4, л. в. M_D), а ординаты левой ветки равны нулю. Построение л. в. M_{2-2} показано на рис. 11, в.

Ордината л. в. левой ветки поперечной силы в сечении 2–2 равна -1 , на опоре C равна нулю. Левая ветка л. в. Q_{2-2} имеет продолжение на консоли GC , перелом в шарнире G и значение ординаты $= 0$ в шарнире F .

Правая ветка Q_{2-2} параллельна левой. Построение л. в. Q_{2-2} показано на рис. 11, г.

Значение изгибающего момента в сечении 2–2:

$$M_{2-2} = P_1 \cdot y_3 = 6 \cdot (-1) = -6 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Значение поперечной силы в сечении 2–2:

$$Q_{2-2} = P_1 \cdot y_4 + q \cdot \omega_3 + M \cdot \operatorname{tg} \alpha = 6 \cdot (-0,25) + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,25 \cdot 3 + 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -1 \text{ кН.}$$

Значения внутренних усилий в сечении 2–2 балки, рассчитанных по линиям влияния совпадают с аналитическим расчетом.

При построении л. в. реакции в жесткой заделке рассмотрим сначала только основную балку AE , которая представляет собой балку с жесткой заделкой.

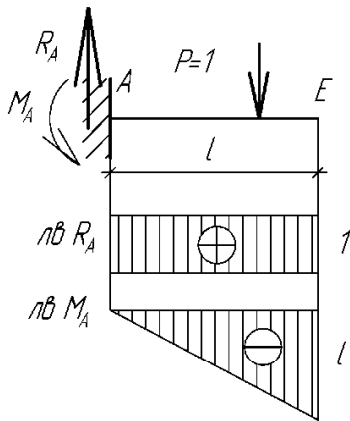


Рис. 12. Линии влияния реакции и реактивного момента консольной балки

Для такой балки табличные л. в. реакции и реактивного момента представлены на рис. 12.

С основной балки л. в. R_A переходит на вспомогательные балки EBF и FG с продолжением на консоли и переломом на шарнирах (рис. 11, д).

Значение R_A определим по формуле: $R_A = P_2 \cdot y_5 + q \cdot \omega_4$.

$$R_A = 8 \cdot 0,5 + 4 \left(-\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0,5\right) = 2 \text{ кН.}$$

Значение реакции совпадает с аналитическим расчетом.

ЗАДАЧА № 2. РАСЧЕТ ТРЕХШАРНИРНОЙ АРКИ ИЛИ РАМЫ

Задание. Исходные данные выбираются из табл. 3 согласно шифру, расчетные схемы представлены на рис. 13. Требуется:

1) по выбранной схеме рассчитать аналитически значения изгибающего момента (M), поперечной (Q) и продольной (N) сил в заданном сечении.

2) построить л. в. усилий для заданного сечения и по ним определить значения M , Q , N . Сравнить полученные результаты.

Таблица 3

Данные для задачи № 2

Первая цифра шифра	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
l , м	26	36	18	28	20	32	22	34	24	30
α	0,2	0,5	0,3	0,6	0,4	0,7	0,8	0,25	0,35	0,45
Вторая цифра шифра	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
q_1 , кН/м	0	4	0	5	0	6	7	0	8	0
q_2 , кН/м	4	0	5	0	6	0	0	7	0	8
P , кН	12	9	14	18	20	21	15	19	22	24
Третья цифра шифра	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Схема	а	а	б	в	г	а	а	б	в	г
f/l	0,34	0,35	0,39	0,40	0,32	0,36	0,38	0,33	0,30	0,31
Номер сечения	1	2	1	1	2	2	1	2	2	1
a_k , м	6	8	7	3	4	8	5	8	6	7
Очертание оси	п	о	р	р	р	п	о	р	р	р

Обозначения в последней строке: п – парабола, о – окружность, р – рама.

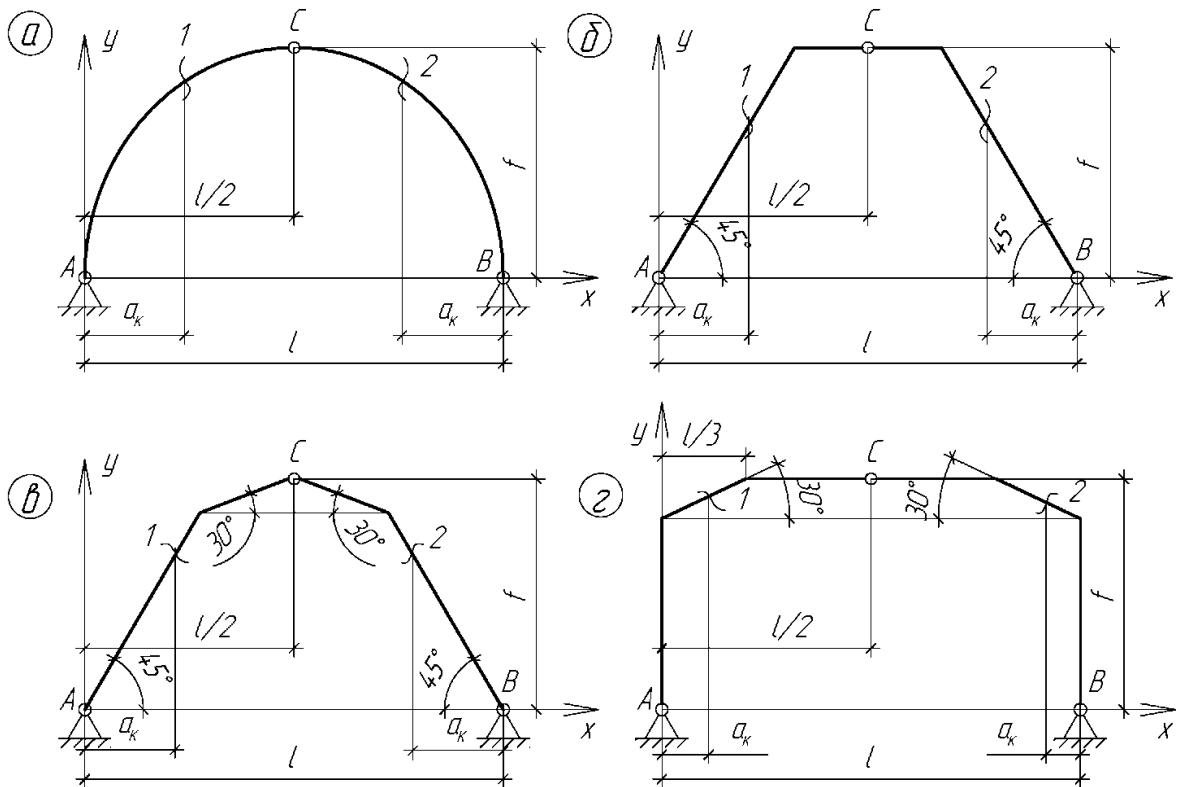


Рис. 13. Расчетные схемы к задаче № 2

Схема нагрузки для заданных схем

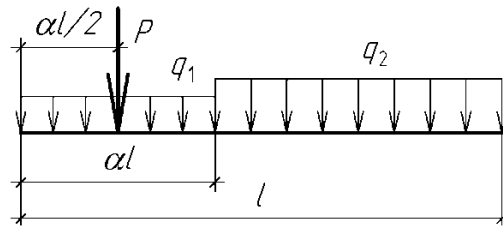


Рис. 13. Окончание

Методические указания к решению задачи № 2

Трехшарнирная арка (рама) представляет собой статически определимую систему, состоящую из двух полуарок (полурам), соединенных между собой и с опорами шарнирами. На рис. 14 представлена схема арки.

l – пролет арки, f – стрела подъема. Уравнение оси арки, угол наклона φ касательной к оси арки и тригонометрические функции $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ можно вычислить по следующим формулам:

1) ось арки – квадратная парабола:

$$y_K = \frac{4f}{l^2}(l - a_K)a_K; \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{l^2}(l - 2a_K);$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}}; \quad \sin\varphi = \cos\varphi \cdot \operatorname{tg}\varphi. \quad (2)$$

2) ось арки – окружность:

$$y_K = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2} - a_K\right)^2} - R + f; \quad R = \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f};$$

$$\sin\varphi = \frac{l - 2a_K}{2R}; \quad \cos\varphi = \frac{y_K + R - f}{R}. \quad (3)$$

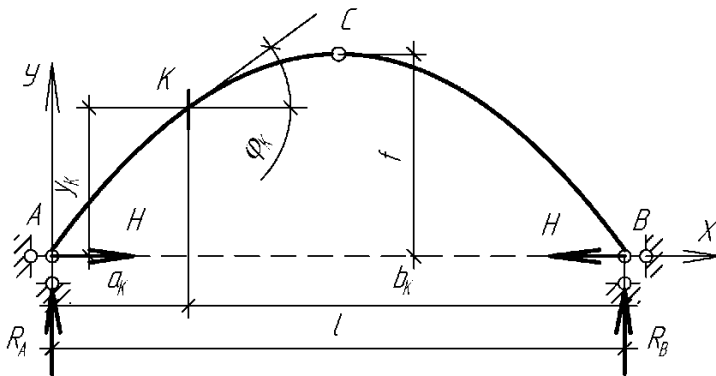


Рис. 14. Расчетная схема арки

Вертикальные реакции R_A , R_B определяются как в простой двухопорной балке из уравнений моментов сил относительно правой и левой опоры.

Горизонтальные реакции (распоры) определяются из уравнений $\sum M_C^{\text{прав}} = 0$ и $\sum M_C^{\text{лев}} = 0$.

При составлении уравнений $\sum M_C^{\text{прав}} = 0$ или $\sum M_C^{\text{лев}} = 0$ введем обозначения: M_C^0 – сумма моментов сил в простой балке. Тогда из уравнения моментов сил в шарнире арки получим $M_C^0 - Hf = 0$.

$$H = \frac{M_C^0}{f}. \quad (4)$$

Распор равен изгибающему моменту простой балки, разделенному на стрелу подъема.

Для определения усилий M, Q, N в поперечных сечениях арок или рам при действии на них вертикальной нагрузки используются следующие формулы:

Изгибающий момент в некотором сечении K :

$$M_K = M_K^0 - H \cdot y_K, \quad (5)$$

где M_K^0 – изгибающий момент как в простой балке длиной a_K .

Поперечная сила в некотором сечении K :

$$Q_K = Q_K^0 \cos \varphi_K - H \sin \varphi_K, \quad (6)$$

где Q_K^0 – поперечная сила как в простой балке длиной a_K .

Продольная сила в сечении K :

$$N_K = -Q_K^0 \sin \varphi_K - H \cos \varphi_K. \quad (7)$$

Для рамы значения $y, \sin \varphi, \cos \varphi$ на каждом участке определяются с помощью геометрических построений.

Пример решения задачи № 2

Схема арки представлена на рис. 15.

$$l = 24 \text{ м}, f/l = 0,4, \alpha = 0,7, q = 3 \text{ кН}, P = 12 \text{ кН}, y_K = \frac{4f}{l^2}(l - a_K)a_K, \text{ ось арки}$$

очерчена по параболе.

Определим вертикальные опорные реакции в арке как в простой двухопорной балке, составив уравнения статики:

$$\sum M_B = 0; R_A \cdot l - P(l - 8,4) - q \cdot 7,2 \cdot 7,2 / 2 = 0.$$

Из этого уравнения определим реакцию в опоре A : $R_A = 11,04 \text{ кН}$.

$$\sum M_A = 0; -R_B \cdot l + P \cdot 8,4 + q \cdot 7,2(16,8 + 7,2 / 2) = 0.$$

Это уравнение позволяет определить реакцию опоры B : $R_B = 22,56 \text{ кН}$.

Проверка. $\sum y = 0$; $R_A - P - q \cdot 7,2 + R_B = 0$ дает следующий результат:
 $11,04 - 12 - 21,6 + 22,56 = 0$, значит, значения реакций опор определены верно.

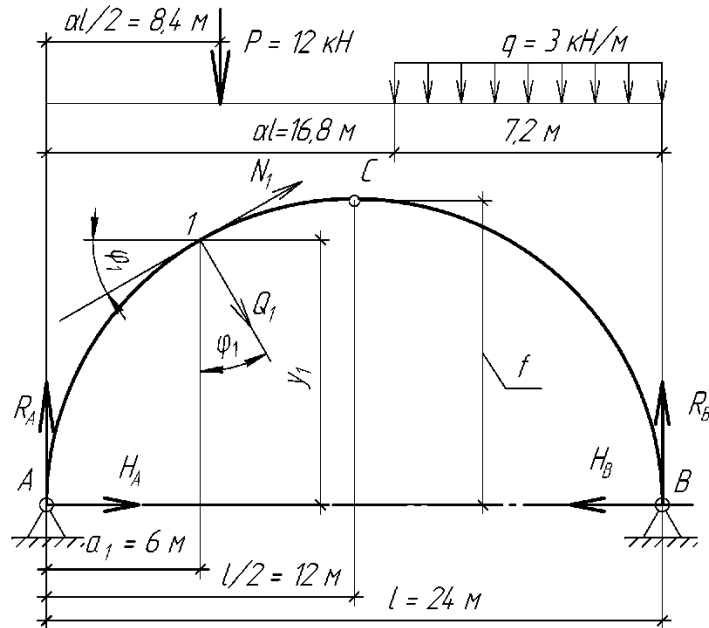


Рис. 15. Расчетная схема заданной арки

Рассчитаем горизонтальные реакции (распор) из уравнения моментов сил справа или слева от шарнира C ($H_A = H_B = H$).

$$\sum M_C^{\text{лев}} = 0; R_A \frac{l}{2} - P \left(\frac{l}{2} - 8,4 \right) - H_A f = 0, \Rightarrow H_A = 9,3 \text{ кН.}$$

$$\sum M_C^{\text{прав}} = 0; R_B \frac{l}{2} - q \cdot 7,2 \left(\frac{l}{2} - \frac{7,2}{2} \right) - H_B f = 0, \Rightarrow H_B = 9,3 \text{ кН.}$$

Определим M, Q, N в заданном сечении 1-1.

Величина изгибающего момента:

$$M_1 = R_A \cdot a_1 - H \cdot y_1 = -0,72 \text{ кН} \cdot \text{м, где } y_1 = \frac{4f}{l^2} (l - a_1) a_1 = 7,2 \text{ м.}$$

Величина поперечной силы в сечении 1-1:

$$Q_1 = R_A \cos \varphi_1 - H \sin \varphi_1 = 2,83 \text{ кН,}$$

где $\cos \varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1}} = 0,78, \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{4f}{l^2} (l - 2a_1) = 0,8;$

$$\sin \varphi_1 = \cos \varphi_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 = 0,625.$$

Величина продольной силы в сечении 1-1:

$$N_1 = -R_A \cdot \sin \varphi_1 - H \cdot \cos \varphi_1 = -14,14 \text{ кН.}$$

При построении линий влияния для M , Q , N в сечении 1–1 от заданной нагрузки требуется убрать с арки все внешние нагрузки и нагрузить арку подвижной единичной силой $P = 1$ (рис. 16).

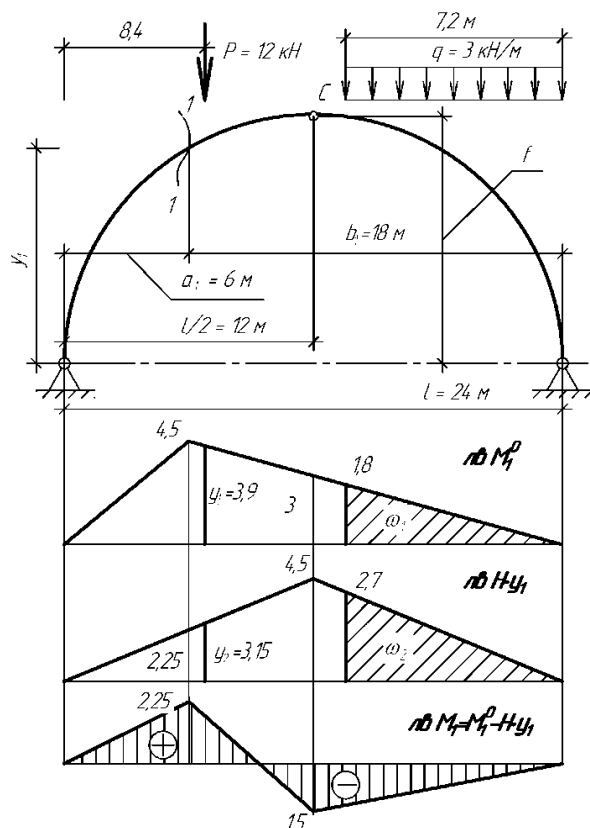


Рис. 16. Построение л. в. изгибающего момента в сечении арки

Для определения численного значения изгибающего момента в сечении 1–1 воспользуемся формулами (1) и (2). Отметим ординаты на л. в., лежащие под внешними нагрузками, определим их значения из пропорций в прямоугольном треугольнике.

$$M_1 = P \cdot y_1 + q \cdot \omega_1 - (P \cdot y_2 + q \cdot \omega_2) = 12 \cdot 3,9 + 3 \cdot \frac{1}{2}(1,8 \cdot 7,2) - (12 \cdot 3,15 + 3 \cdot \frac{1}{2}(2,7 \cdot 7,2)) = -0,72 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Значение изгибающего момента в сечении 1–1, рассчитанного с помощью линий влияния полностью совпадает с аналитическим расчетом.

Для построения л. в. момента M_1 используем выражение $M_1 = M_1^0 - H \cdot y_1$.

В этом случае требуется построить две линии влияния – от момента как в простой балке (M_1^0) и л. в. распора, умноженного на ординату y_1 (рис. 16).

Ордината л. в. момента M_1^0 в сечении балки определяется формулой $(a_1 \cdot b_1)/l$ (см. рис. 4).

Значение ординаты составит $(6 \cdot 18)/24 = 4,5$.

Обе ветки момента M_1^0 на опорах арки имеют нулевые ординаты.

Под шарниром C определяем ординату распора, умноженного на y_1 :

$$H \cdot y_1 = \frac{l}{4f} y_1 = \frac{24}{4 \cdot 9,6} 7,2 = 4,5.$$

Для построения линии влияния поперечной силы Q_1 используем выражение $Q_1 = Q_1^0 \cos \varphi_1 - H \cdot \sin \varphi_1$. В этом случае требуется построить две линии влияния – от поперечной силы как в простой балке, умноженной на косинус угла наклона касательной к сечению арки ($Q_1^0 \cos \varphi_1$) и линию влияния распора, умноженного на синус угла наклона касательной (рис. 17).

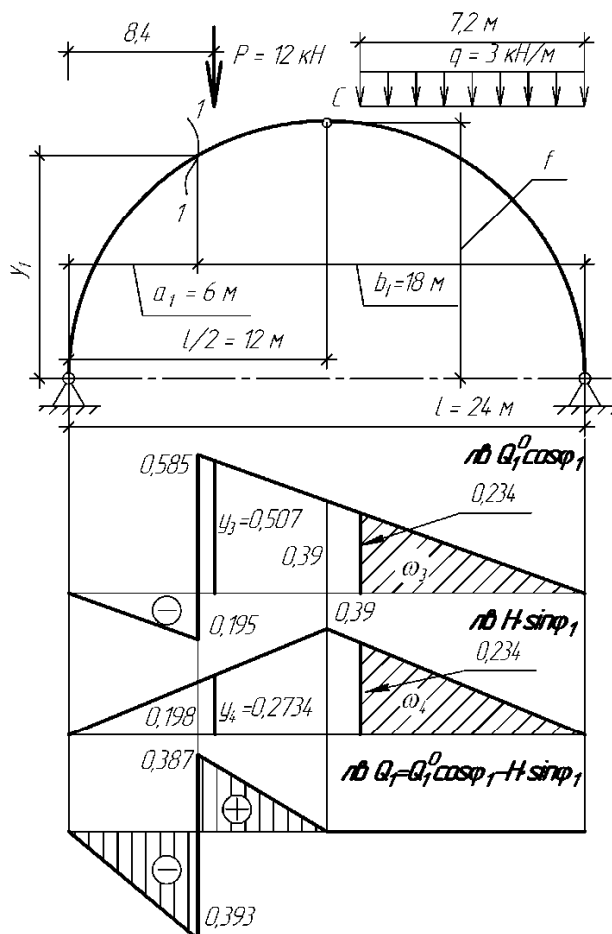


Рис. 17. Построение л. в. поперечной силы в сечении арки

Расхождение в значении поперечной силы, рассчитанной по линиям влияния, составляет примерно 1 % от значения, полученного аналитическим расчетом. Такое отклонение допустимо.

Ординаты л. в. поперечной силы в сечении простой балки см. на рис. 4.

Ордината левой ветки л. в.

$$Q \text{ в сечении арки } -\frac{a_1}{l} \cos \varphi_1 = \\ = -\frac{6}{24} \cdot 0,78 = -0,195.$$

Ордината правой ветки линии влияния поперечной силы $\frac{b_1}{l} \cos \varphi_1 = \frac{18}{24} \cdot 0,78 = 0,585$.

Ордината л. в. распора, умноженного на $\sin \varphi_1$:

$$\frac{l}{4f} \sin \varphi_1 = \frac{24}{4 \cdot 9,6} \cdot 0,625 = 0,39.$$

Численное значение поперечной силы:

$$Q_1 = P \cdot y_3 + q \cdot \omega_3 - (P \cdot y_4 + \\ + q \cdot \omega_4) = 12 \cdot 0,507 + \\ + 3 \cdot \frac{1}{2}(0,234 \cdot 7,2) - \\ - (12 \cdot 0,2734 + \\ + 3 \cdot \frac{1}{2}(0,243 \cdot 7,2)) = 2,8 \text{ кН.}$$

Для построения линии влияния продольной силы N_1 используем выражение $N_1 = -Q_1^0 \sin \varphi_1 - H \cos \varphi_1$. В этом случае требуется построить две л. в. – от поперечной силы как в простой балке, умноженной на синус угла наклона касательной к сечению арки ($Q_1^0 \sin \varphi_1$) и л. в. распора, умноженного на косинус угла наклона касательной (рис. 18).

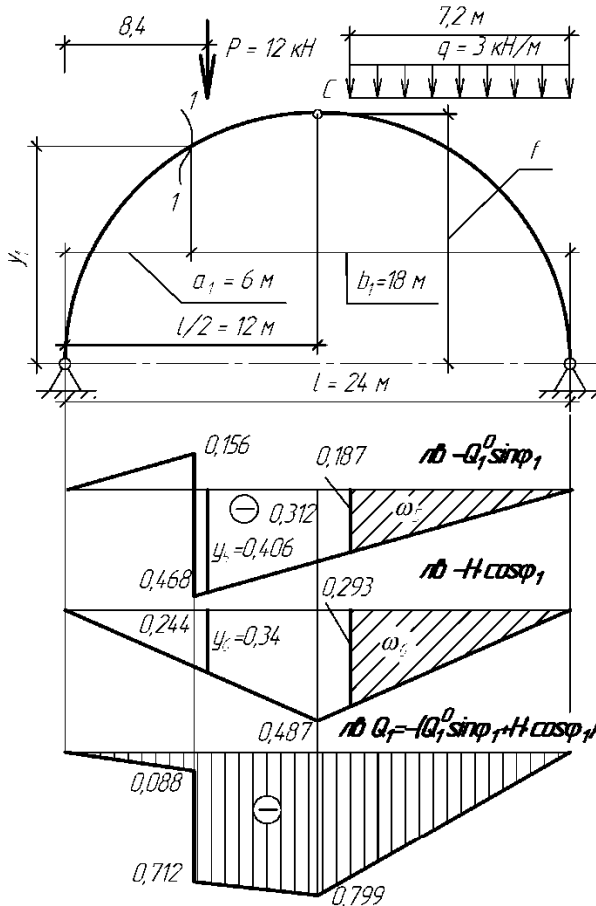


Рис. 18. Построение л. в. продольной силы в сечении арки

Ординаты л. в. поперечной силы в сечении простой балки см. рис. 4.

Ордината левой ветки линии влияния N в сечении арки $\frac{a_1}{l} \sin \varphi_1 = \frac{6}{24} \cdot 0,625 = 0,156$.

Ордината правой ветки линии влияния продольной силы

$$-\frac{b_1}{l} \sin \varphi_1 = -\frac{18}{24} \cdot 0,625 = -0,468.$$

Ордината л. в. распора, умноженного на $\cos \varphi_1$:

$$\begin{aligned} -\frac{l}{4f} \cos \varphi_1 &= \\ &= \frac{24}{4 \cdot 9,6} \cdot 0,78 = 0,4875. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_1 &= P \cdot y_5 + q \cdot \omega_5 + P \cdot y_6 + \\ &+ q \cdot \omega_6 = 12 \cdot (-0,406) + \\ &+ 3 \cdot \frac{1}{2}(-0,187 \cdot 7,2) + \\ &+ 12 \cdot (-0,341) + \\ &+ 3 \cdot \frac{1}{2}(-0,293 \cdot 7,2) = \\ &= -14,148 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Значение продольной силы, полученное аналитически, составляет $-14,14$ кН.

ЗАДАЧА № 3. РАСЧЕТ ПЛОСКОЙ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ ФЕРМЫ

Задание. Для плоской статически определимой фермы, выбранной по шифру из табл. 4 с размерами и нагрузкой по рис. 19, требуется:

1) определить усилия в стержнях заданной панели, включая правую и левую стойки, применяя способ сечений.

2) построить линии влияния для стержней заданной панели (5 стержней), по которым определить усилия и сравнить результат, полученный аналитически.

Методические указания к решению задачи № 3

Аналитический расчет статически определимой фермы начинается с определения опорных реакций, которые находятся из уравнений равновесия моментов сил относительно правой и левой опор как для простой двухопорной балки.

Таблица 4

Числовые данные к задаче № 3

Первая цифра шифра	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
d , м	4,5	8,25	5,25	6,0	9,0	6,3	6,9	6,75	7,5	6,6
P , кН	1,8	1,5	1,2	1,0	1,9	2,0	1,1	1,3	1,4	1,6
Вторая цифра шифра	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Номер панели (считается слева)	5	4	3	2	3	4	5	2	3	4
Номер схемы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
h , м	3,0	5,5	3,5	4,0	6,0	4,2	4,6	4,5	5,0	4,4

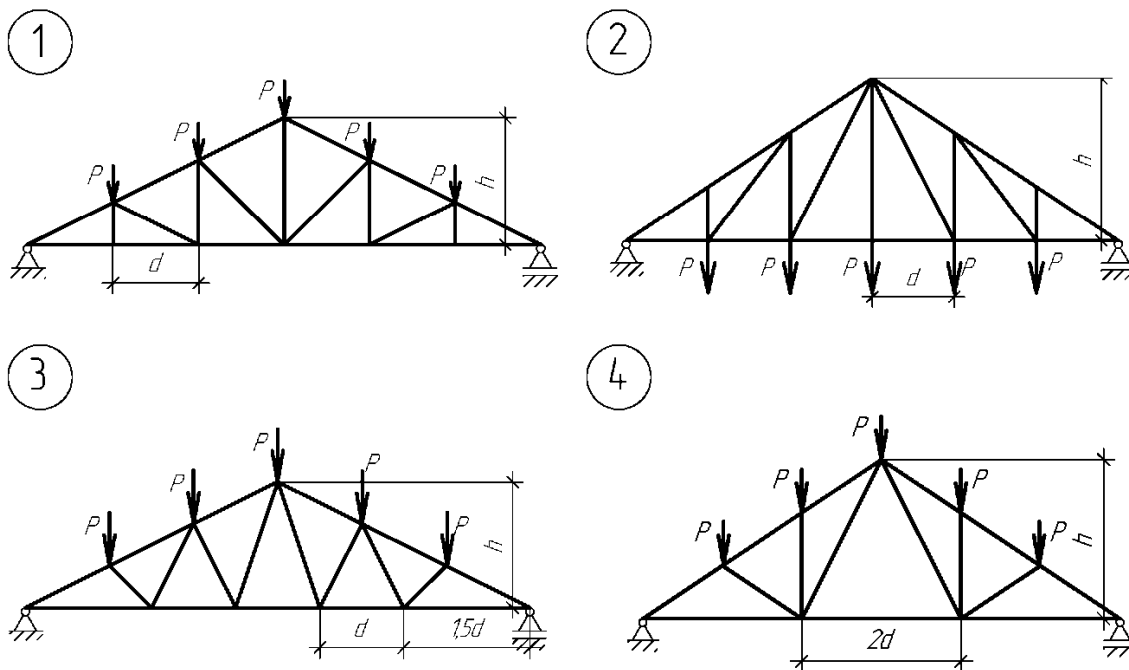


Рис. 19. Расчетные схемы к задаче № 3

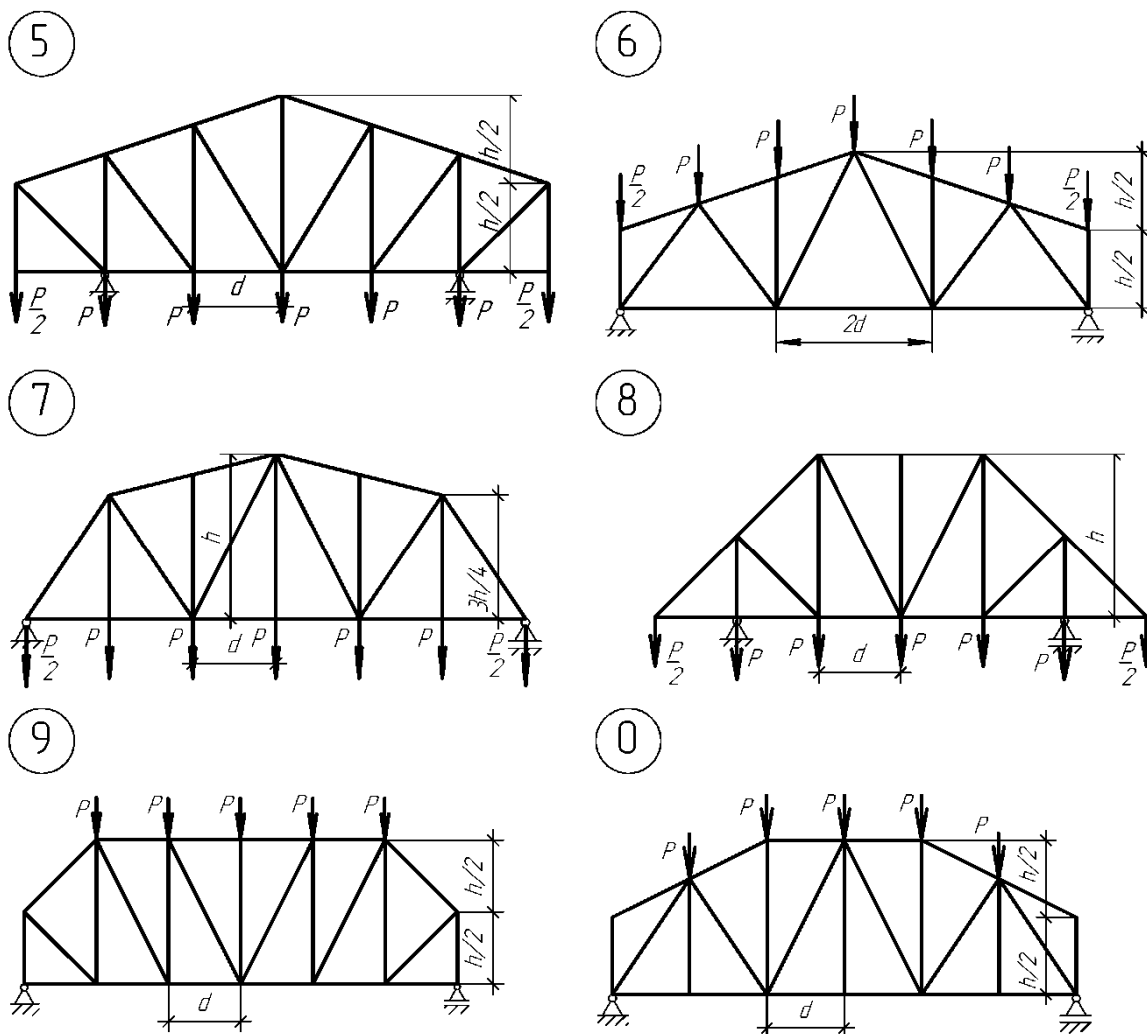


Рис. 19. Окончание

Продольные усилия в стержнях фермы определяются методом сечений. В зависимости от вида проведенного сечения различают три основных способа аналитического расчета: способ моментной точки, способ проекций и способ вырезания узлов. Необходимо стремиться к тому, чтобы усилие в каждом стержне определялось независимо от усилий в других стержнях. Достигнуть этого всегда удастся почти во всех случаях путем правильного выбора сечения и использования одного из трех способов. Необходимо усвоить признаки нулевых стержней.

Рассмотрим способы определения усилий на примере фермы (рис. 20).

Реакции в опорах фермы определим из уравнений моментов сил относительно левой и правой опоры.

$$\sum M_A = 0; R_B \cdot 16 - P_2 \cdot 12 - P_1 \cdot 4 = 0; \Rightarrow R_B = 9,5 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = 0; R_A \cdot 16 - P_1 \cdot 12 - P_2 \cdot 4 = 0; \Rightarrow R_A = 8,5 \text{ кН.}$$

Проверка: $\sum y = R_A + R_B - P_1 - P_2 = 8,5 + 9,5 - 8 - 10 = 0$.

Усилие в стержне 2–3 определяем методом моментной точки. Проводим сечение $n-n$, рассматриваем равновесие левой части фермы относительно моментной точки 7 (точка, в которой пересекаются направления всех стержней перерезанной панели кроме искомого).

$$\sum M_7^{\text{лев}} = 0; R_A \cdot 8 - P_1 \cdot 4 + N_{2-3} \cdot 4 = 0; \Rightarrow N_{2-3} = -9 \text{ кН. (Сжатие).}$$

Усилие в стержне 7–6 также определяем методом моментной точки, которой в данном случае является точка 3.

$$\sum M_3^{\text{лев}} = 0; R_A \cdot 12 - P_1 \cdot 8 - N_{7-6} \cdot 4 = 0; \Rightarrow N_{7-6} = 9,5 \text{ кН. (Растяжение).}$$

Усилие в стержне 7–3 определяем методом проекций, рассматривая левую часть фермы.

$$\sum y^{\text{лев}} = 0; R_A - P_1 + N_{7-3} \cdot \cos \alpha = 0; \Rightarrow N_{7-3} \approx -0,71 \text{ кН. (Сжатие).}$$

Метод вырезания узлов рассмотрим на примере определения усилия в стержне 7–6. Рассматривая равновесие ненагруженного трехстержневого узла, следует, что это частный случай равновесия узла. Оси двух стержней 7–6 и 6–B лежат на одной прямой, усилия в них равны между собой, но противоположно направлены, третий стержень 6–3 является «одиноким», усилие в нем равно нулю.

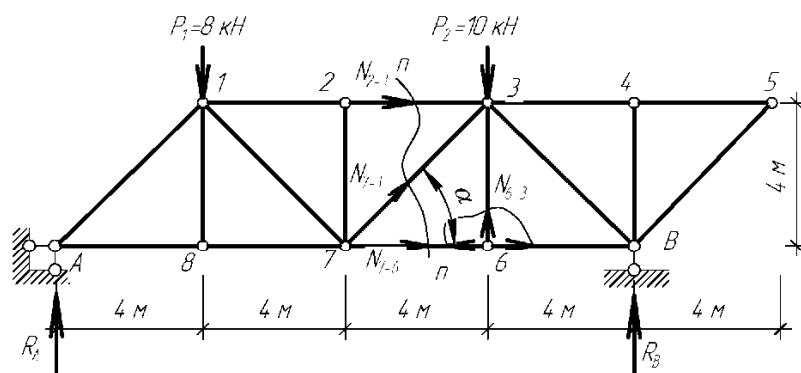


Рис. 20. Расчетная схема статически определимой фермы

Построение линий влияния. Ординаты линий влияния для определения усилия в любом стержне фермы выражаются через опорные реакции A и B от подвижной нагрузки $P = 1$, которую рассматриваем или слева от сечения или справа.

Пример решения задачи № 3

Схема фермы представлена на рис. 21: d – длина панели равна 6 м, $2h$ – высота фермы составляет 8 м, узловая нагрузка $P = 6$ кН.

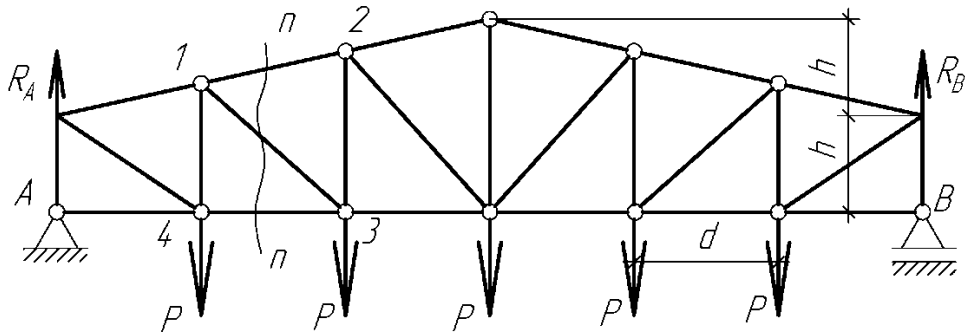


Рис. 21. Расчетная схема фермы

Определяем опорные реакции R_A и R_B , т. к. ферма и нагрузка симметричны, то они будут равны: $R_A = R_B = \frac{\sum P}{2} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$ кН.

Произведем необходимые расчеты геометрических параметров фермы (рис. 22).

$$\alpha = \arctg\left(\frac{h}{3d}\right) = \arctg\left(\frac{4}{3 \cdot 6}\right) \approx 12,53^\circ. \quad a = \frac{h}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{h \cdot 3d}{h} = 3d = 18 \text{ м.}$$

$$r_{1-2} = (a + 2d)\sin\alpha = 30 \cdot \sin 12,53^\circ = 6,5 \text{ м.}$$

$$h_1 = d \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{3} = \frac{4}{3} \text{ м.}$$

$$\varphi = \operatorname{artg}\left(\frac{h+h_1}{d}\right) = \operatorname{artg}\left(\frac{4h}{3d}\right) \approx 41,6^\circ.$$

$$r_{1-3} = (a + 2d)\sin\varphi = 5d \cdot \sin\varphi = 5 \cdot 6 \cdot \sin 41,6^\circ = 20 \text{ м.}$$

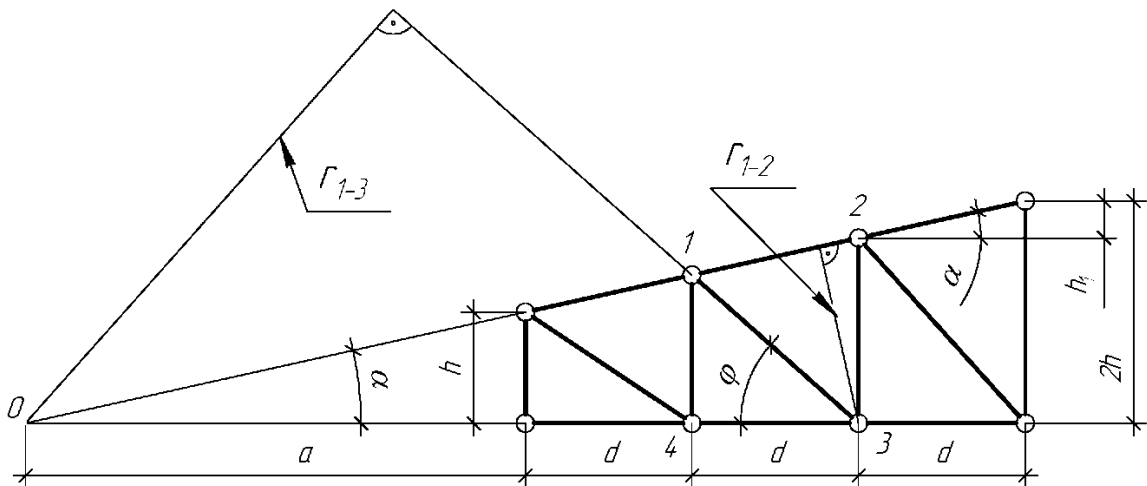


Рис. 22. Расчет геометрических параметров фермы

Проводим сечение $n-n$ и рассматриваем левую часть фермы (рис. 23).

Определяем усилие в стержне N_{1-2} методом моментной точки. Т. к. в пределах перерезанной панели в узле 3 пересекаются направления всех стержней кроме 1-2, то моментной точкой будет узел 3. Уравнение моментов сил относительно узла 3:

$\sum M_3^{\text{лсв}} = 0; P \cdot d - R_A \cdot 2d - N_{1-2} \cdot r_{1-2} = 0$. Из уравнения получаем численное значение продольной силы $N_{1-2} = -22,2$ кН (сжатие).

Для определения усилия в стержне 4-3 нижнего пояса составим уравнение моментов сил относительно точки 1.

$$\sum M_1^{\text{лсв}} = 0; -R_A \cdot d + N_{4-3} \cdot h = 0. \quad N_{4-3} = 22,5 \text{ кН (растяжение).}$$

Для составления уравнения моментов сил и определения усилия в стержне 1-3 выбираем моментную точку 0.

$$\sum M_0^{\text{лсв}} = 0; R_A \cdot 3d - P \cdot 4d - N_{1-3} \cdot r_{1-3} = 0. \quad N_{1-3} = 6,3 \text{ кН (растяжение).}$$

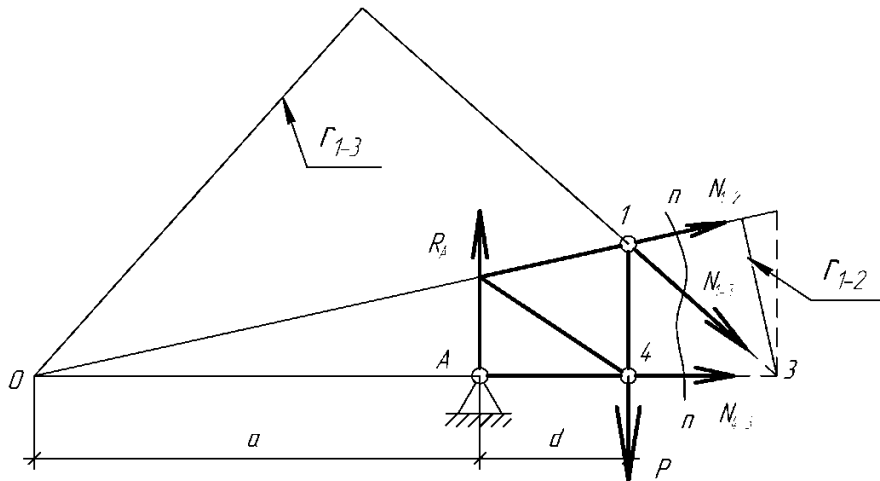


Рис. 23. Схема определения усилий в стержнях фермы

Для определения усилий в вертикальных стержнях фермы проводим сечения $m-m$ и $k-k$ (рис. 24).

Моментной точкой для определения усилий в этих стержнях является точка 0.

$$\sum M_0^{\text{лсв}} = 0; R_A \cdot 3d - P \cdot 4d - P \cdot 5d + N_{3-2} \cdot 5d = 0. \quad N_{3-2} = 1,8 \text{ кН (растяжение).}$$

$$\sum M_0^{\text{лсв}} = 0; R_A \cdot 3d - P \cdot 4d + N_{1-4} \cdot 4d = 0. \quad N_{1-4} = -5,25 \text{ кН (сжатие).}$$

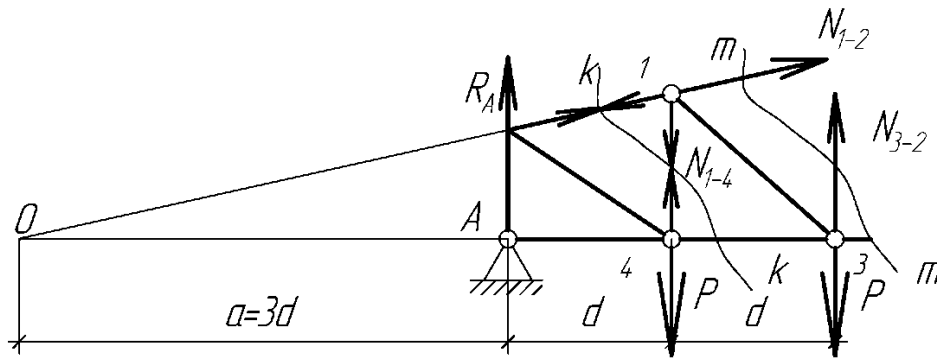


Рис. 24. Схема определения усилий в вертикальных стержнях фермы

Построение л. в. в заданных стержнях фермы (рис. 25).

Линия влияния продольного усилия N_{1-3} .

Груз $P = 1$ перемещается левее узла 2 перерезанной панели. Отбросим левую часть фермы. Рассмотрим равновесие оставшейся правой части фермы относительно моментной точки 0.

$$\sum M_0^{\text{прав}} = 0; R_B \cdot 9d + N_{1-3} \cdot r_{1-3} = 0, \text{ откуда } N_{1-3} = -\frac{9d}{r_{1-3}} R_B = -2,7 R_B \text{ получа-}$$

ем уравнение левой ветки л. в., из которого видно, что она изменяется по закону опорной реакции R_B , но ее ординаты нужно умножить на отрицательное число 2,7.

Груз $P = 1$ перемещается правее узла 2 перерезанной панели. Отбросим правую часть фермы. Рассмотрим равновесие оставшейся левой части фермы относительно моментной точки 0.

$$\sum M_0^{\text{лев}} = 0; R_A \cdot 3d - N_{1-3} \cdot r_{1-3} = 0, \text{ откуда } N_{1-3} = \frac{3d}{r_{1-3}} R_A = 0,9 R_A \text{ получаем}$$

уравнение правой ветки л. в., из которого видно, что она изменяется по закону опорной реакции R_A , но ее ординаты нужно умножить на число 0,9.

Обе ветки пересекаются под моментной точкой. При узловом методе передачи нагрузки следует соединить ординату левой ветки л. в. под узлом 4 с ординатой правой ветки л. в. под узлом 3 передаточной прямой.

Для расчета численного значения продольного усилия в стержне 1–3 следует определить значения ординат под узлами фермы из подобия треугольников и произвести расчет по формуле (1). Для нашего случая:

$$N_{1-3} = P \sum y_i = 6 \cdot (-2,7/6 + 3,6/6 + 0,45 + 1,8/6 + 0,9/6) = 6,3 \text{ кН.}$$

Полученное значение продольного усилия полностью совпадает со значением, рассчитанным аналитически.

Линия влияния продольного усилия N_{3-4} .

Последовательно составляем уравнения равновесия правой и левой частей фермы относительно моментной точки 1.

$\sum M_1^{\text{прав}} = 0; R_B \cdot 5d - N_{4-3} \cdot h = 0$, откуда $N_{4-3} = \frac{5d}{h} R_B = 7,5R_B$, получаем уравнение левой ветки л. в.

$\sum M_1^{\text{лев}} = 0; R_A \cdot d - N_{4-3} \cdot h = 0$, откуда $N_{4-3} = \frac{d}{h} R_A = 1,5R_A$, получаем уравнение правой ветки л. в.

Обе ветки пересекаются под моментной точкой 1. Передаточная прямая в данном случае совпадает с правой веткой.

Из подобия треугольников определяем ординаты л. в. под узлами фермы и производим расчет усилия в стержне 3–4.

$N_{3-4} = P \sum y_i = 6 \cdot (7,5/6 + 6/6 + 4,5/6 + 3/6 + 1,5/6) = 22,5$ кН. Полученное значение продольного усилия полностью совпадает со значением, рассчитанным аналитически.

Линия влияния продольного усилия N_{1-2} .

Последовательно составляем уравнения равновесия правой и левой частей фермы относительно моментной точки 3.

$\sum M_3^{\text{прав}} = 0; R_B \cdot 4d + N_{1-2} \cdot r_{1-2} = 0$, откуда $N_{1-2} = -\frac{4d}{r_{1-2}} R_B = -3,7R_B$ получаем уравнение левой ветки л. в.

$\sum M_3^{\text{лев}} = 0; R_A \cdot 2d + N_{1-2} \cdot r_{1-2} = 0$, откуда $N_{1-2} = \frac{2d}{r_{1-2}} R_A = -1,8R_A$ получаем уравнение правой ветки л. в.

Обе ветки пересекаются под моментной точкой 3. Передаточная прямая в данном случае совпадает с левой веткой.

Из подобия треугольников определяем ординаты л. в. под узлами фермы и производим расчет усилия в стержне 1–2.

$N_{1-2} = P \sum y_i = 6 \cdot (-3,7/6 - 7,4/6 - 1,85/2 - 3,7/6 - 1,85/6) = -22,2$ кН. Полученное значение продольного усилия полностью совпадает со значением, рассчитанным аналитически.

Линия влияния продольного усилия N_{1-4} .

Последовательно составляем уравнения равновесия правой и левой частей фермы относительно моментной точки 0.

$\sum M_0^{\text{прав}} = 0; R_B \cdot 9d - N_{1-4} \cdot 4d = 0$, откуда $N_{1-4} = \frac{9}{4} R_B = 2,25R_B$, получаем уравнение левой ветки л. в.

$\sum M_0^{\text{лев}} = 0; R_A \cdot 3d + N_{1-4} \cdot 4d = 0$, откуда $N_{1-4} = -\frac{3}{4} R_A = -0,75R_A$, получаем уравнение правой ветки л. в.

Обе ветки пересекаются под моментной точкой 0. Передаточная прямая в данном случае совпадает с правой веткой.

Из подобия треугольников определяем ординаты л. в. под узлами фермы и производим расчет усилия в стержне 1–4.

$$N_{1-4} = P \sum y_i = 6 \cdot (2,25/6 - 3/6 - 2,25/6 - 1,5/6 - 0,75/6) = -5,25 \text{ кН.}$$

Полученное значение продольного усилия полностью совпадает со значением, рассчитанным аналитически.

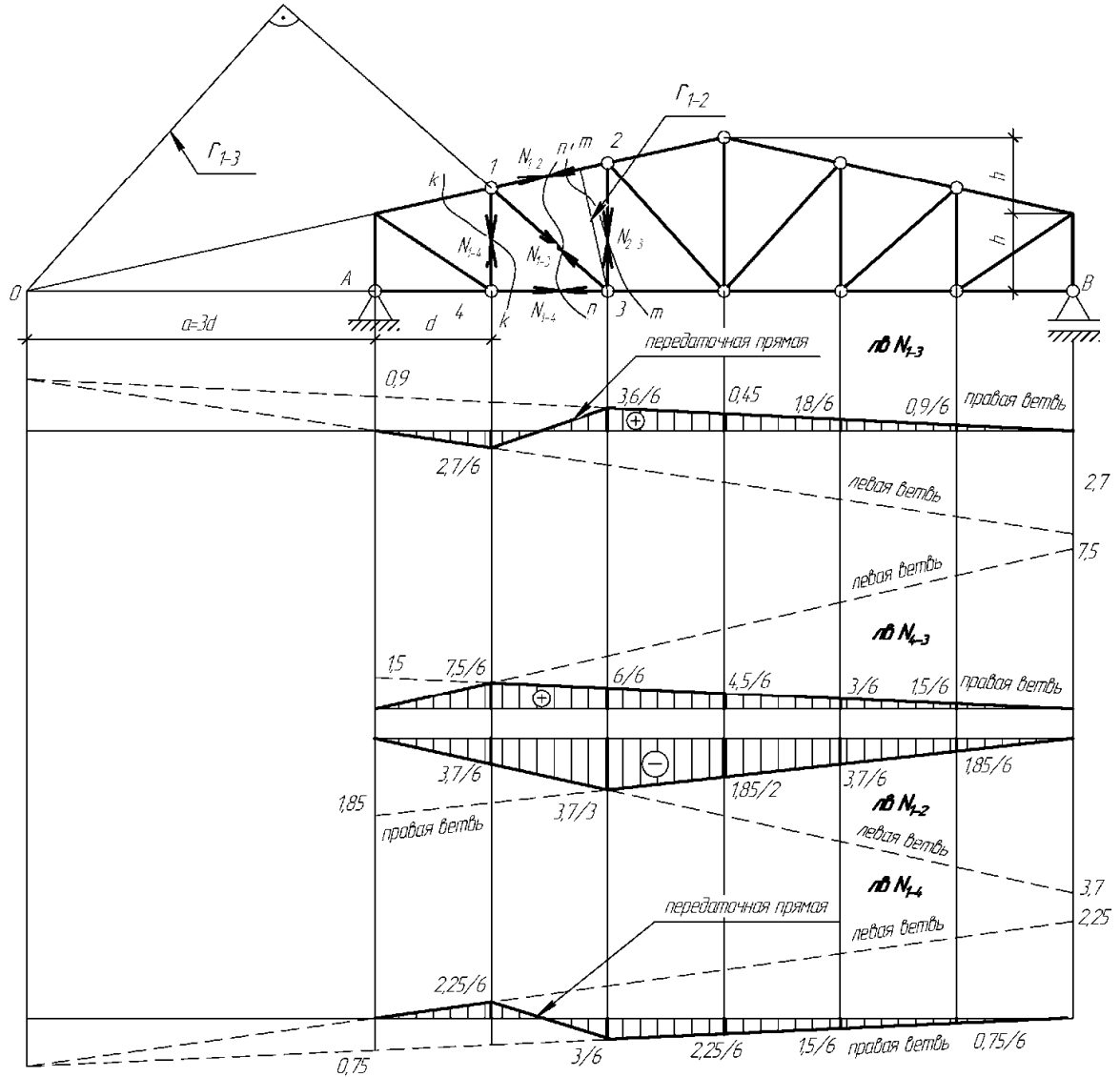


Рис. 25. Построение линий влияния усилий в ферме

Линия влияния продольного усилия N_{3-2} строится аналогично N_{1-4} .

ЗАДАЧА № 4. РАСЧЕТ ШПРЕНГЕЛЬНОЙ ФЕРМЫ

Задание: Для шпренгельной фермы с выбранными по шифру из табл. 5 размерами и нагрузкой (рис. 26) требуется:

- 1) определить аналитически усилия в стержнях 3 и 4 категории заданной панели от постоянной нагрузки.
- 2) построить л. в. для определения усилий в тех же стержнях от постоянной нагрузки и сравнить с п. 1.
- 3) определить по л. в. усилия в тех же стержнях от временной нагрузки и найти величины максимальных и минимальных усилий.
- 4) определить максимальные и минимальные значения рассчитанных усилий для указанных стержней заданной панели (с учетом постоянной нагрузки).

Таблица 5

Числовые данные к задаче № 4

Первая цифра шифра	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Длина панели d , м	3,0	3,2	3,5	4,0	4,5	3,6	3,8	4,2	3,4	4,4
Постоянная нагрузка $q_{пост}$, кН/м	200	225	250	180	210	220	190	185	195	205
Вторая цифра шифра	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Номер панели (считается слева)	3	2	5	4	3	2	5	4	3	2
h , м	3,5	3,8	4,2	3,0	3,6	3,4	4,0	3,2	4,4	3,8
Третья цифра шифра (номер схемы)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Временная нагрузка $q_{вр}$, кН/м	400	450	500	550	700	600	650	750	800	350

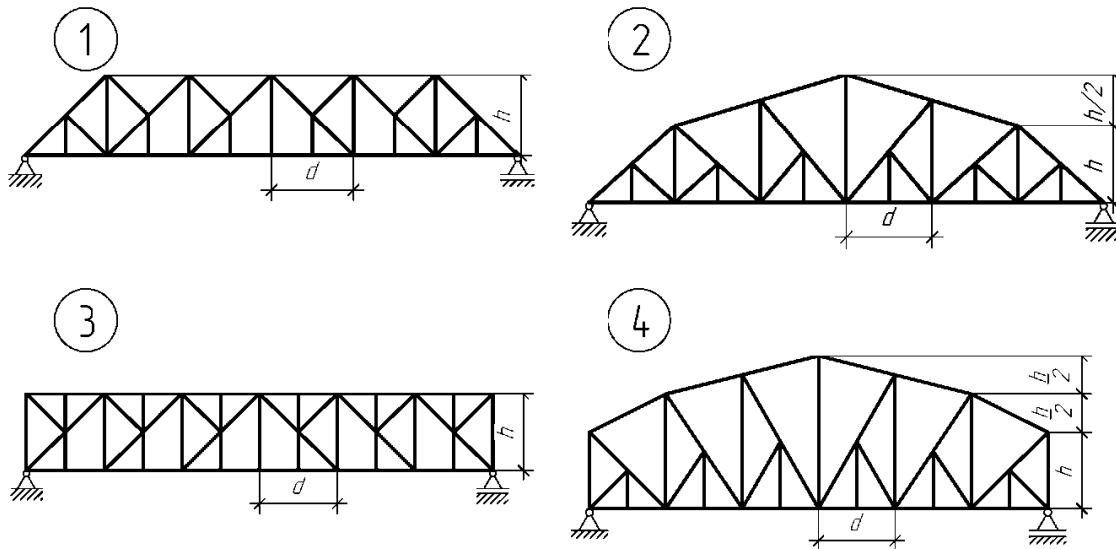


Рис. 26. Расчетные схемы к задаче № 4

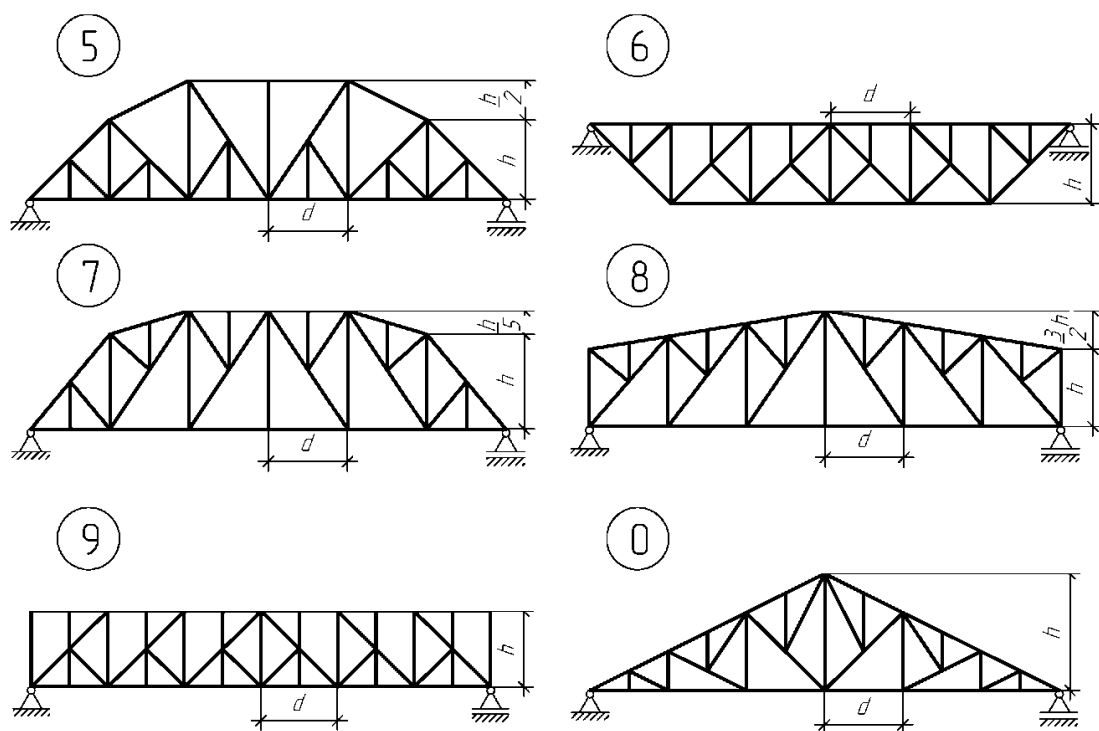


Рис. 26. Окончание

Методические указания к решению задачи № 4

В шпренгельных фермах с одноярусными (рис. 27, а) и двухъярусными (рис. 27, б) шпренгелями следует различать стержни по категориям.

I категории – принадлежат только основной ферме 1–2, 2–3, 3–10, 2–13, 2–12 и т. д. (рис. 27, а), 1–13, 3–14 (рис. 27, б)

II категории – стержни, принадлежащие только шпренгелям 1–13, 1–14, 13–12 и т. д. (рис. 27, а), 2–13, 12–14 т. д. (рис. 27, б).

III категории – стержни, принадлежащие одновременно основной ферме и шпренгелям 12–10, 13–11 и т. д. (рис. 27, а), 13–12, 1–2 и т. д. (рис. 27, б).

В фермах с двухъярусными шпренгелями имеются стержни IV категории – это стойки, в которых происходит перераспределение усилий за счет передачи нагрузки шпренгелем из верхнего пояса в нижний (или наоборот) 3–12, 5–11 и т. д. (рис. 27, б).

Усилия в стержнях I и II категории удобно определять, если рассматривать ферму, состоящую из двух подконструкций – основной фермы и фермочек-шпренгелей. Усилия в стержнях III категории удобнее определять, рассматривая шпренгельную ферму как обычную.

После определения усилий в стержнях фермы аналитически необходимо перейти к построению л. в. в указанных стержнях. Усилия в любом стержне фермы можно определить по линии влияния, которые строятся по закону изменения опорных реакций от подвижной нагрузки $P = 1$ (узловая нагрузка исключается как от полной нагрузки, так и временной), которую рассматриваем слева и справа от сечения.

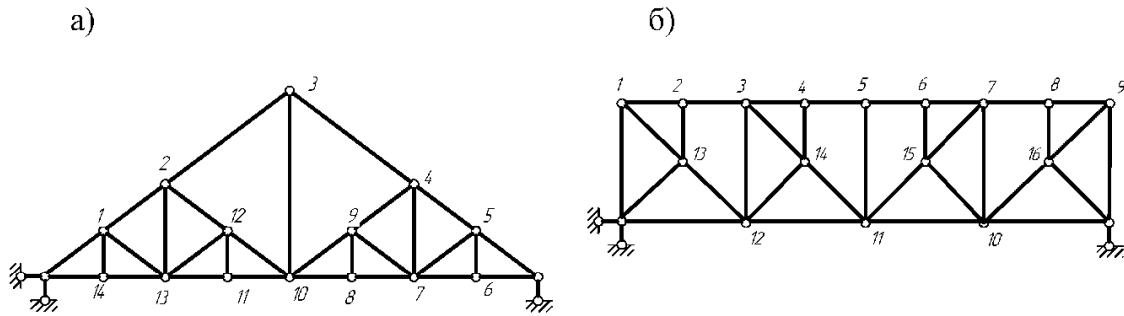


Рис. 27. Шпренгельные фермы

При построении л. в. учитывается узловая передача нагрузки, т. к. стержни панели рассечены, и сила $P = 1$ не может находиться в таком стержне. При узловой передаче нагрузки линия влияния усилия определяемого стержня в пределах разрезанной панели представляет собой прямую, соединяющую вершины ординат, расположенные под узлами разрезанной панели. Эта прямая называется передаточной прямой.

После построения л. в. определяют усилия в стержнях как от постоянной нагрузки, так и от временной. От постоянной нагрузки усилия сравнивают с усилиями, полученными аналитически. От временной нагрузки определяют максимальные и минимальные значения усилий.

Полученные данные заносят в таблицу и определяют расчетные усилия.

Пример решения задачи № 4

Рассмотрим решение задачи на примерах шпренгельных ферм с одноярусными и двухярусными шпренгелями.

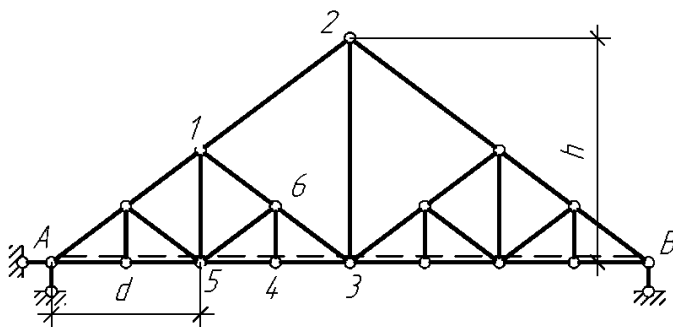


Рис. 28. Схема фермы с одноярусными шпренгелями

Схема сложной фермы с одноярусными шпренгелями представлена на рис. 28.

$$q_{\text{пост}} = 200 \text{ кН/м,}$$

$$d = 4 \text{ м, } h = 6 \text{ м,}$$

$$q_{\text{вр}} = 600 \text{ кН/м.}$$

В этой ферме стержни 1-2, 2-3, 1-5, 1-6 – стержни первой категории. Стержни 5-6, 4-6 – стержни второй категории, и стержни 6-3, 5-4, 4-3 – стержни третьей категории.

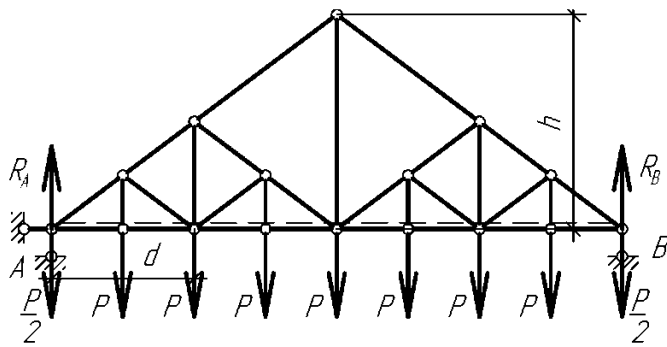


Рис. 29. Приведение нагрузки к узловой

Определяем реакции в опорах. Ввиду симметрии фермы

$$R_A = R_B = \frac{q_{\text{посг}} \cdot 4d}{2} = \frac{200 \cdot 4 \cdot 4}{2} = 1600 \text{ кН.}$$

Приводим постоянную нагрузку к узловой

$$P = q_{\text{посг}} \frac{d}{2} = 200 \frac{4}{2} = 400 \text{ кН}$$

(рис. 29).

Для аналитического расчета продольных усилий в стержнях I категории удаляем шпренгели, при этом нагрузку со шпренгелей распределяем на узлы основной фермы $P_0 = 800$ кН (рис. 30).

Продольное усилие в стержне 1-2.

Проводим сечение $n-n$, рассматриваем равновесие левой части фермы. Моментной точкой является узел 3.

$$\sum M_3^{\text{лев}} = 0; \quad -R_A \cdot 2d + \frac{P_0}{2} \cdot 2d + P_0 \cdot d - N_{1-2} \cdot r_{1-2} = 0.$$

$$r_{1-2} = 2d \cdot \sin \alpha, \text{ т.к. } \alpha = \arctg \frac{h}{2d} = 36,87^\circ, \text{ то } r_{1-2} = 4,8 \text{ м.}$$

$$N_{1-2} = \frac{-1600 \cdot 8 + 400 \cdot 8 + 800 \cdot 4}{4,8} = -1333,3 \text{ кН.}$$

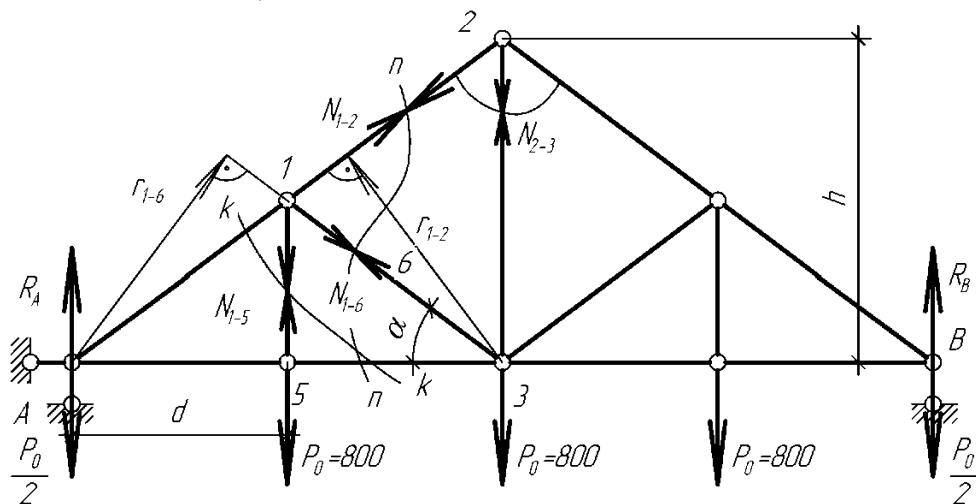


Рис. 30. Схема определения усилий в стержнях 1-й категории основной системы

Продольное усилие в стержне 1–6.

Моментной точкой является узел A . $r_{1-6} = r_{1-2} = 4,8$ м.

$$\sum M_A^{\text{лев}} = 0; -P_0 \cdot d - N_{1-6} \cdot r_{1-6} = 0, \Rightarrow N_{1-6} = -666,7 \text{ кН.}$$

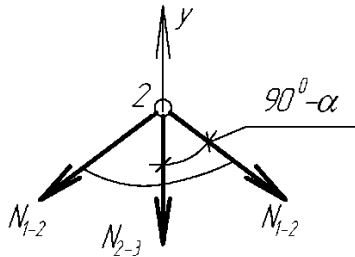
Продольное усилие в стержне 1–5.

Проводим сечение $k-k$, рассматриваем равновесие левой части фермы. Моментной точкой является узел A .

$$\sum M_A^{\text{лев}} = 0; N_{1-5} \cdot d - P_0 \cdot d = 0, \Rightarrow N_{1-5} = 800 \text{ кН.}$$

Усилие N_{1-5} можно определить методом вырезания узлов, имеем частный случай равновесия узла, когда в трехстержневом узле вдоль одиночного стержня 1–5 действует сила P_0 .

Продольное усилие в стержне 2–3.



Используем метод вырезания узлов (рис. 31). Составляем уравнение равновесия сил относительно вертикальной оси y .

$$\sum y = 0; -2N_{1-2} \cdot \sin \alpha - N_{2-3} = 0.$$

$$N_{2-3} = -2N_{1-2} \sin \alpha = -2(-1333,3) \sin 36,87^\circ = 1600 \text{ кН.}$$

Рис. 31. Схема вырезания узла

Для определения усилий в стержнях II категории рассмотрим только фермочку-шпренгель (рис. 32).

Продольное усилие в стержне 4–6.

Частный случай равновесия трехстержневого узла. $N_{4-6} = P = 400$ кН.

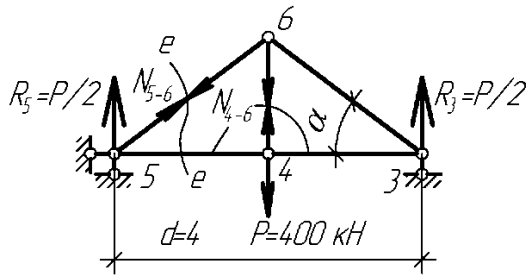


Рис. 32. Фермочка-шпренгель

Продольное усилие в стержне 5–6.

Проводим сечение $e-e$.

$$\sum y^{\text{лев}} = 0; R_5 + N_{5-6} \sin \alpha = 0.$$

$$N_{5-6} = -\frac{R_5}{\sin \alpha} = -\frac{400}{2 \cdot \sin 36,87} = -333,3 \text{ кН.}$$

Для определения усилий в стержнях III категории рассматриваем ферму как единую конструкцию (рис. 33.). Проводим сечение $m-m$.

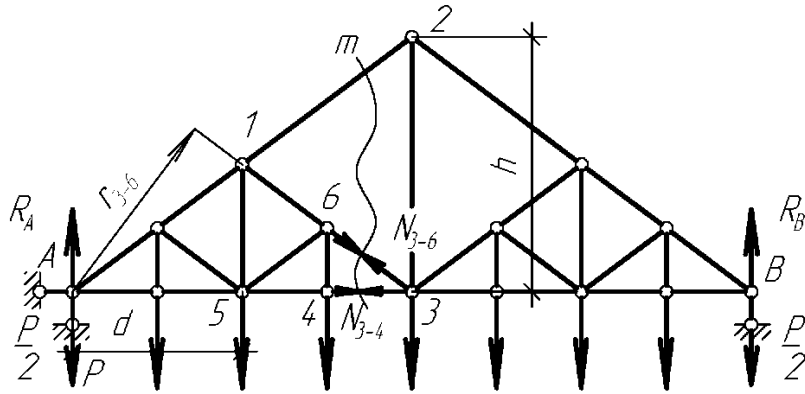


Рис. 33. Схема определения усилий в стержнях III категории

Продольное усилие в стержне 3–4.

Моментная точка – узел 1. Рассматриваем равновесие левой части фермы.

$$\sum M_1^{\text{лев}} = 0; -R_A \cdot d + \frac{P}{2} \cdot d + P \cdot d - P \cdot d + N_{3-4} \cdot \frac{h}{2} = 0.$$

$$N_{4-3} = \frac{R_A \cdot d - (P/2) \cdot d}{(h/2)} = \frac{1600 \cdot 4 - 200 \cdot 4}{3} = 1867 \text{ кН.}$$

Продольное усилие в стержне 3–6.

Моментная точка – узел A.

$$\sum M_A^{\text{лев}} = 0; P \cdot \left(\frac{d}{2} + d + \frac{3}{2}d \right) + N_{3-6} \cdot r_{3-6} = 0. \quad r_{3-6} = 4,8 \text{ м.}$$

$$N_{3-6} = -1000 \text{ кН.}$$

Построение л. в. усилий в стержнях I категории. Снимаем все внешние нагрузки с фермы и рассматриваем движение груза $P = 1$ по нижнему поясу фермы (рис. 34).

Линия влияния усилия N_{1-2} .

Проводим сечение $n-n$. Груз $P = 1$ находится слева от сечения, рассматриваем равновесие правой части фермы для построения левой ветви л. в. Моментной точкой является узел 3.

$$\sum M_3^{\text{прав}} = 0; R_B \cdot 2d + N_{1-2} \cdot r_{1-2} = 0, \quad N_{1-2} = -\frac{2d}{r_{1-2}} R_B = -\frac{8}{4,8} R_B = -1,67 R_B.$$

Получаем уравнение левой ветви л. в., из которого видно, что она изменяется по закону опорной реакции R_B , но ее ординаты нужно умножить на отрицательное число 1,67.

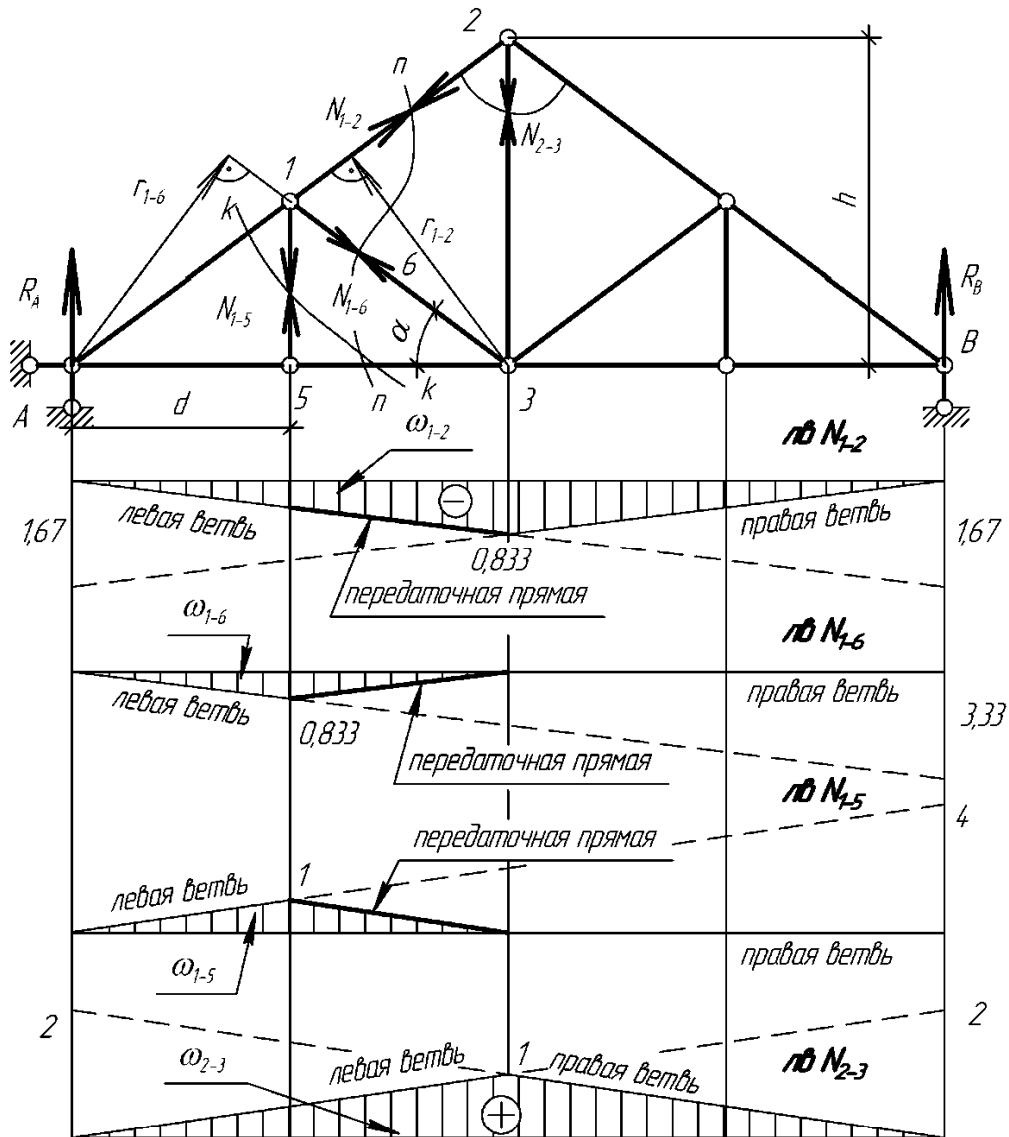


Рис. 34. Схема построения линий влияния в стержнях I категории

Груз $P = 1$ находится справа от сечения, рассматриваем равновесие левой части фермы относительно узла 3.

$$\sum M_3^{\text{сп}} = 0; R_A \cdot 2d + N_{1-2} \cdot r_{1-2} = 0, N_{1-2} = -\frac{2d}{r_{1-2}} R_A = -1,67R_A.$$

Получаем уравнение правой ветки л. в., из которого видно, что она изменяется по закону опорной реакции R_A , но ее ординаты нужно умножить на отрицательное число 1,67.

Обе ветки пересекаются под моментной точкой. Учитывая узловой метод передачи нагрузки переносим узел 5 на левую ветвь, а узел 3 на правую – получаем передаточную прямую.

Линия влияния усилия N_{1-6} .

Моментной точкой является узел A . Последовательно рассматриваем положение груза $P = 1$ слева и справа то сечения $n-n$. Составляем уравнения равновесия правой и левой частей фермы.

Уравнение левой ветви л. в.:

$$\sum M_A^{\text{прав}} = 0; R_B \cdot 4d + N_{1-6} \cdot r_{1-6} = 0, N_{1-6} = -\frac{4d}{r_{1-6}} R_B = -\frac{16}{4,8} R_B = -3,33 R_B.$$

Уравнение правой ветви: $\sum M_A^{\text{лев}} = 0; R_A \cdot 0 + N_{1-6} \cdot r_{1-6} = 0, N_{1-6} = 0.$

Переносим узел 5 на левую ветвь, а узел 3 на правую – получаем передаточную прямую.

Линия влияния усилия N_{1-5} .

Моментной точкой является узел A .

Уравнение левой ветви л. в.:

$$\sum M_A^{\text{прав}} = 0; R_B \cdot 4d - N_{1-5} \cdot d = 0, N_{1-5} = \frac{4d}{d} R_B = 4 R_B.$$

Уравнение правой ветви: $\sum M_A^{\text{лев}} = 0; R_A \cdot 0 + N_{1-5} \cdot d = 0, N_{1-5} = 0.$

Переносим узел 5 на левую ветвь, а узел 3 на правую – получаем передаточную прямую.

Линия влияния усилия N_{2-3} .

Т. к. $N_{2-3} = -2N_{1-2} \sin \alpha$, то ординаты линий влияния усилия N_{1-2} умножаем на $-2 \sin \alpha = -2 \cdot \sin 36,87^\circ$ и получаем требуемые ординаты.

Обе ветви л. в. пересекаются под узлом 1 с ординатой равной единице.

Построение л. в. в стержнях II категории (рис. 35).

Линия влияния усилия N_{4-6} .

Если груз $P = 1$ находится в узле 4, усилие $N_{4-6} = 1$. Под узлом откладываем ординату, равную единице. Груз, находящийся слева и справа от узла 4 не вызывает усилия в стойке. Л.в. N_{4-6} захватывает только одну панель в пределах фермочки-шпренгеля.

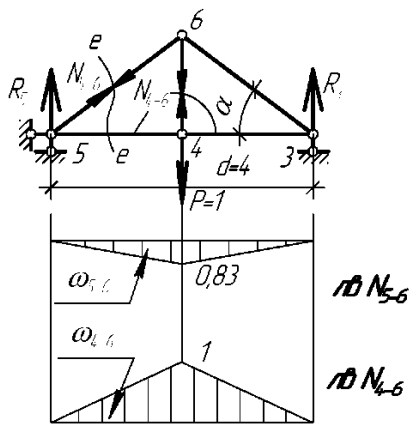


Рис. 35. Фермочка-шпренгель

Линия влияния усилия N_{5-6} .

Условие равновесия на вертикальную ось y :

$$\sum y = N_{5-6} \sin \alpha + R_5 = 0.$$

$$R_5 = R_3 = 0,5.$$

$$N_{5-6} = -\frac{R_5}{\sin \alpha} = -\frac{1}{2 \sin 36,87^\circ} = -0,83.$$

Если груз $P = 1$ находится вне узла 4, то л. в. $N_{5-6} = 0$.

Построение л. в. в стержнях III категории (рис. 36).

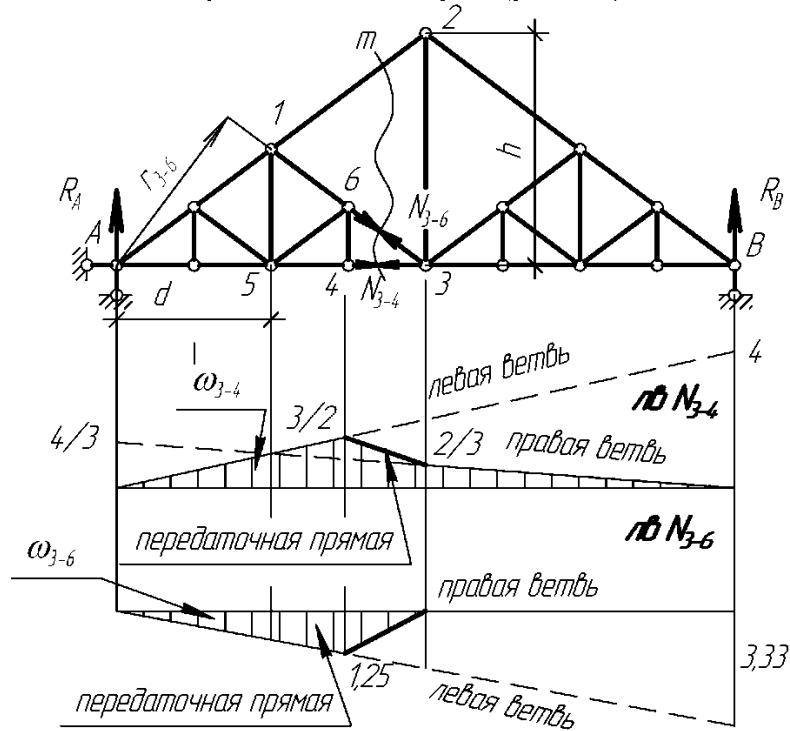


Рис. 36. Схема построения линий влияния в стержнях III категории

Линия влияния усилия N_{3-4} .

Моментной точкой является узел 1.

Уравнение левой ветви л. в.:

$$\sum M_1^{\text{прав}} = 0; -R_B \cdot 3d + N_{3-4} \cdot h/2 = 0, N_{3-4} = \frac{3d}{h/2} R_B = 4R_B.$$

Уравнение правой ветви:

$$\sum M_1^{\text{лев}} = 0; -R_A \cdot d + N_{3-4} \cdot h/2 = 0, N_{3-4} = \frac{d}{h/2} R_A = \frac{4}{3} R_A.$$

Переносим узел 4 на левую ветку л. в., узел 3 – на правую, получаем передачную прямую.

Линия влияния усилия N_{3-6} .

Моментной точкой является узел A.

Уравнение левой ветви л. в.:

$$\sum M_A^{\text{прав}} = 0; -R_B \cdot 4d - N_{3-6} \cdot r_{3-6} = 0, N_{3-6} = -\frac{4d}{r_{1-6}} R_B = -3,33R_B.$$

Уравнение правой ветви:

$$\sum M_A^{\text{лев}} = 0; R_A \cdot 0 + N_{3-6} \cdot r_{3-6} = 0, N_{3-6} = 0.$$

Переносим узел 4 на левую ветвь, а узел 3 на правую – получаем передачную прямую.

Численные значения усилий в стержнях фермы 2-й панели от постоянной и временной нагрузки определим по формуле (1), используя только слагаемое с распределенной нагрузкой. Результаты расчетов занесем в таблицу 6.

$$N_{1-2}^{\text{пост}} = \omega_{1-2} \cdot q_{\text{пост}} = -\frac{1}{2} 0,833 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 200 = -1333 \text{ кН.}$$

$$N_{1-2}^{\text{вр}} = \omega_{1-2} \cdot q_{\text{вр}} = -\frac{1}{2} 0,833 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 600 = -4000 \text{ кН.}$$

$$N_{1-6}^{\text{пост}} = \omega_{1-6} \cdot q_{\text{пост}} = -\frac{1}{2} 0,833 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 200 = -666,4 \text{ кН.}$$

$$N_{1-6}^{\text{вр}} = \omega_{1-6} \cdot q_{\text{вр}} = -\frac{1}{2} 0,833 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 600 = -2000 \text{ кН.}$$

$$N_{1-5}^{\text{пост}} = \omega_{1-5} \cdot q_{\text{пост}} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 200 = 800 \text{ кН.}$$

$$N_{1-5}^{\text{вр}} = \omega_{1-5} \cdot q_{\text{вр}} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 600 = 2400 \text{ кН.}$$

$$N_{2-3}^{\text{пост}} = \omega_{2-3} \cdot q_{\text{пост}} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 200 = 1600 \text{ кН.}$$

$$N_{2-3}^{\text{вр}} = \omega_{2-3} \cdot q_{\text{вр}} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 600 = 5400 \text{ кН.}$$

$$N_{5-6}^{\text{пост}} = \omega_{5-6} \cdot q_{\text{пост}} = -\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 0,83 \cdot 200 = -333 \text{ кН.}$$

$$N_{5-6}^{\text{вр}} = \omega_{5-6} \cdot q_{\text{вр}} = -\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 0,83 \cdot 600 = -999 \text{ кН.}$$

$$N_{4-6}^{\text{пост}} = \omega_{4-6} \cdot q_{\text{пост}} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 200 = 400 \text{ кН.}$$

$$N_{4-6}^{\text{вр}} = \omega_{4-6} \cdot q_{\text{вр}} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 600 = 1200 \text{ кН.}$$

$$N_{3-4}^{\text{пост}} = \omega_{3-4} \cdot q_{\text{пост}} = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} \cdot 6 + \left(\frac{3/2 + 2/3}{2} \right) \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 4 \right) \cdot 200 = 1867 \text{ кН.}$$

$$N_{3-4}^{\text{вр}} = \omega_{3-4} \cdot q_{\text{вр}} = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} \cdot 6 + \left(\frac{3/2 + 2/3}{2} \right) \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 4 \right) \cdot 600 = 5600 \text{ кН.}$$

$$N_{3-6}^{\text{пост}} = \omega_{3-6} \cdot q_{\text{пост}} = -\frac{1}{2} \cdot 1,25 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 200 = -1000 \text{ кН.}$$

$$N_{3-6}^{\text{вр}} = \omega_{3-6} \cdot q_{\text{вр}} = -\frac{1}{2} \cdot 1,25 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 600 = -3000 \text{ кН.}$$

Результаты расчета шпренгельной фермы

Наименование стержней	Усилия от постоянной нагрузки, кН	Усилия от временной нагрузки, кН		Расчетные усилия, кН	
		max	min	max	min
Стержень 1–2	-1333,3	-	-4000	-	-5333,3
Стержень 1–6	-666,7	-	-2000	-	-2666,7
Стержень 1–5	800,0	2400	-	3200	-
Стержень 2–3	1600,0	5400	-	7000	-
Стержень 5–6	-333,3	-	-999	-	-1332,3
Стержень 4–6	400,0	1200	-	1600	-
Стержень 3–4	1867,0	5600	-	7467	-
Стержень 3–6	-1000,0	-	-3000	-	-4000

В ферме с двухъярусными шпренгелями (рис. 37) рассмотрим определение усилий и построение линий влияния усилий в стержнях II и IV категории. Примем $q_{\text{пост}} = 200$ кН/м, $d = 4$ м, $h = 6$ м, $q_{\text{вр}} = 600$ кН/м.

$$R_A = R_B = \frac{6d \cdot q_{\text{пост}}}{2} = 2400 \text{ кН. } P = q_{\text{пост}} \frac{d}{2} = 200 \frac{4}{2} = 400 \text{ кН.}$$

К стержням II категории относятся стержни 3–6 и 5–6. Выделим из конструкции отдельно фермочку–шпренгель (рис. 38).

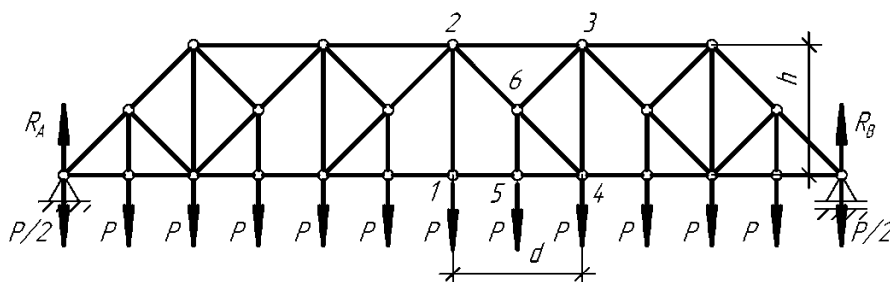


Рис. 37. Расчетная схема фермы с двух ярусными шпренгелями

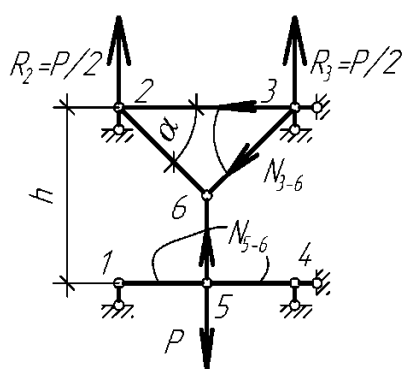


Рис. 38. Расчетная схема двухъярусного шпренгеля

Продольное усилие в стержне 5–6.

Частный случай равновесия трехстержневого узла $N_{5-6} = P = 400$ кН.

Продольное усилие в стержне 3–6.

Вырезаем узел 3, рассматриваем условие $\sum y = 0$.

$$R_3 - N_{3-6} \sin \alpha = 0. \text{ Т. к. } R_3 = P/2,$$

$$\alpha = \arctg \frac{3}{2} = 56,3^\circ, \text{ то } N_{3-6} = \frac{P}{2 \sin \alpha} = 240,4 \text{ кН.}$$

Построим л. в. усилий в стержнях II категории (рис. 39) и определим по ним усилия от постоянной и временной нагрузок.

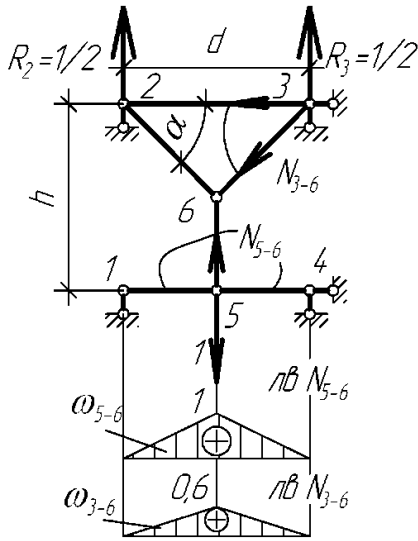


Рис. 39. Линии влияния усилий в стержнях II категории

Если груз $P = 1$ находится вне узла 5, то ордината л. в. $N_{3-6} = 0$.

$$N_{3-6}^{\text{пост}} = \omega_{3-6} \cdot q_{\text{пост}} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 0,6 \cdot 200 = 240 \text{ кН.}$$

$$N_{3-6}^{\text{вр}} = \omega_{3-6} \cdot q_{\text{вр}} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 0,6 \cdot 600 = 720 \text{ кН.}$$

К стержням IV категории относятся стойки 1–2 и 3–4, эти стойки являются стержнями основной фермы, поэтому шпренгели не оказывают влияние на усилия в этих стержнях (рис. 40).

Продольное усилие в стержне 3–4.

Рассекаем ферму сквозным сечением $g-g$. Рассматриваем левую часть фермы, используем метод проекций для определения усилия N_{3-4} .

$$\sum y^{\text{прав}} = R_B - 3P - P/2 - N_{3-4} = 0; N_{3-4} = R_B - 3P - P/2 = 2400 - 3 \cdot 400 - 200 = 1000 \text{ кН.}$$

Продольное усилие в стержне 1–2.

Вырезаем узел 1. Рассматривая частный случай равновесия трехстержневого узла, находим, что $N_{1-2} = P = 400 \text{ кН}$.

Линия влияния усилия N_{5-6} .

Если груз $P = 1$ находится в узле 5, усилие $N_{5-6} = 1$. Под узлом откладываем ординату, равную единице. Груз, находящийся слева и справа от узла 5 не вызывает усилия в стойке. Л. в. N_{5-6} захватывает только одну панель в пределах фермочки-шпренгеля.

$$N_{5-6}^{\text{пост}} = \omega_{5-6} \cdot q_{\text{пост}} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 \cdot 200 = 400 \text{ кН.}$$

$$N_{5-6}^{\text{вр}} = \omega_{5-6} \cdot q_{\text{вр}} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 \cdot 600 = 1200 \text{ кН.}$$

Линия влияния усилия N_{3-6} .

Условие равновесия на вертикальную ось y :

$$\sum y^{\text{прав}} = R_3 - N_{3-6} \sin \alpha = 0.$$

Уравнение линии влияния

$$N_{3-6} = \frac{1}{2 \sin \alpha} = 0,6.$$

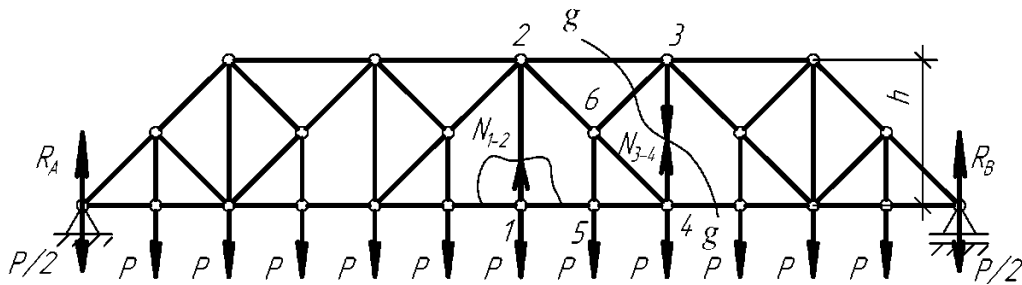


Рис. 40. Схема определения усилий в стержнях IV категории

Построение л. в. усилий в стержнях IV категории производится следующим образом. Вначале для основной фермы строится л. в. усилия в рассматриваемом стержне фермы при перемещении единичного груза по узлам одного пояса (например верхнего). А затем строится линия влияния этого же усилия по узлам другого пояса. Различие в этих линиях влияния связано с тем, что с изменением грузового пояса меняются разрезанные панели. Перемещая единичный груз по грузовому поясу шпренгельной фермы, устанавливаем закон изменения усилия с учетом того, что нагрузка, расположенная в дополнительных узлах, при помощи двухъярусных шпренгелей передается из узлов грузового пояса в узлы не грузового пояса.

Линия влияния усилия N_{3-4} .

Проводим сечение $g-g$ (рис. 41). Груз $P = 1$ находится справа от сечения, рассматриваем равновесие левой части фермы:

$\sum y^{\text{лев}} = 0$; $N_{3-4} + R_A = 0$; $N_{3-4} = -R_A$. Получаем уравнение правой ветви л. в. Под опорой A устанавливаем ординату единица и соединяем с нулем под опорой B .

Груз $P = 1$ находится слева от сечения, рассматриваем равновесие правой части фермы:

$\sum y^{\text{прав}} = 0$; $-N_{3-4} + R_B = 0$; $N_{3-4} = R_B$. Получаем уравнение левой ветви л. в. Под опорой B устанавливаем ординату минус единица и соединяем с нулем под опорой A .

Пусть груз $P = 1$ перемещается по верхнему поясу. Переносим на левую ветвь крайний левый узел перерезанной панели (2), а на правую ветвь – крайний правый (узел 3). Получаем передаточную прямую ($2'-3'$) при езде поверху.

Аналогично получаем передаточную прямую при перемещении груза $P = 1$ по нижнему поясу ($4'-7'$).

С учетом работы шпренгелей на прямую $2'-3'$ переносим узел 5, на прямую $4'-7'$ переносим узел 8. Соединяем точки и получаем л. в. N_{3-4} .

$$N_{3-4}^{\text{пост}} = \omega_{3-4} \cdot q_{\text{пост}} = \left(\frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 3 \cdot 4 + \frac{0,0835 + 0,5}{2} \cdot 2 + \frac{0,0835 + 2/3}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,22 - \frac{1}{2} \cdot 4,78 \cdot \frac{1}{6} \right) \cdot 200 = 5 \cdot 200 = 1000 \text{ кН.}$$

$$N_{3-4}^{\text{вр}} = \omega_{3-4} \cdot q_{\text{вр}} = 5 \cdot 600 = 3000 \text{ кН.}$$

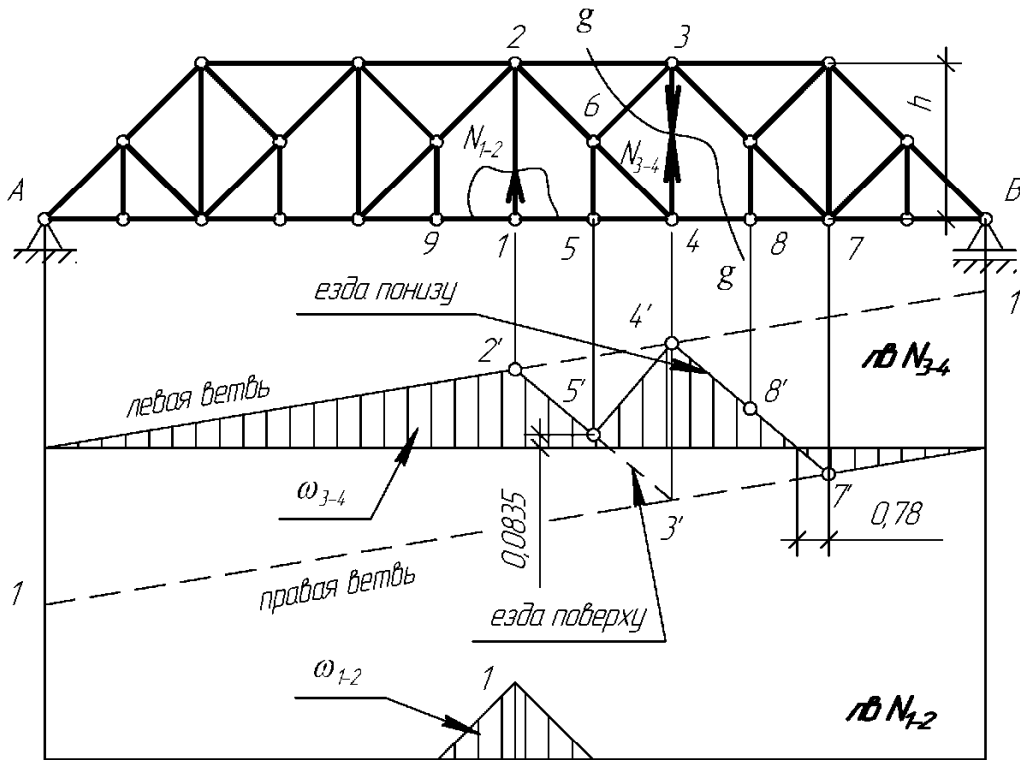


Рис. 41. Построение л. в. усилий в стержнях IV категории

Линия влияния усилия N_{1-2} .

Стержень 1–2 можно отнести как к стержням IV категории, так и к стержням I категории. Проще задачу решить как для стержня I категории способом вырезания узлов. На основании частных случаев равновесия узлов $N_{1-2} = 0$, если сила $P = 1$ находится вне узла 1 и $N_{1-2} = 1$, если сила находится в узле 1. Перерезанными панелями являются панели 1–9 и 1–5.

$$N_{1-2}^{\text{пост}} = \omega_{1-2} \cdot q_{\text{пост}} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 \cdot 200 = 400 \text{ кН.}$$

$$N_{1-2}^{\text{вр}} = \omega_{1-2} \cdot q_{\text{вр}} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 \cdot 600 = 1200 \text{ кН.}$$

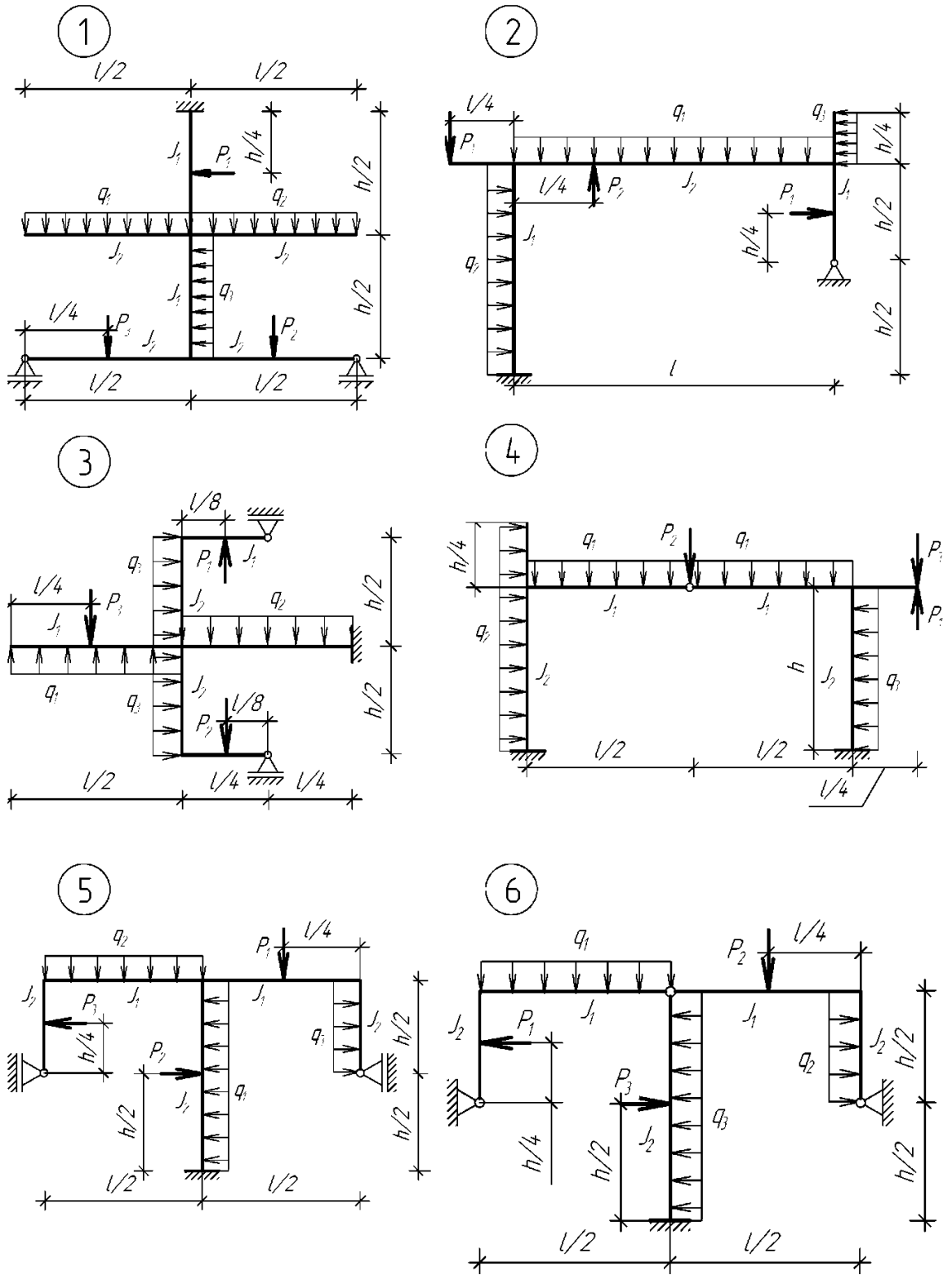


Рис. 42. Расчетные схемы к задаче № 5

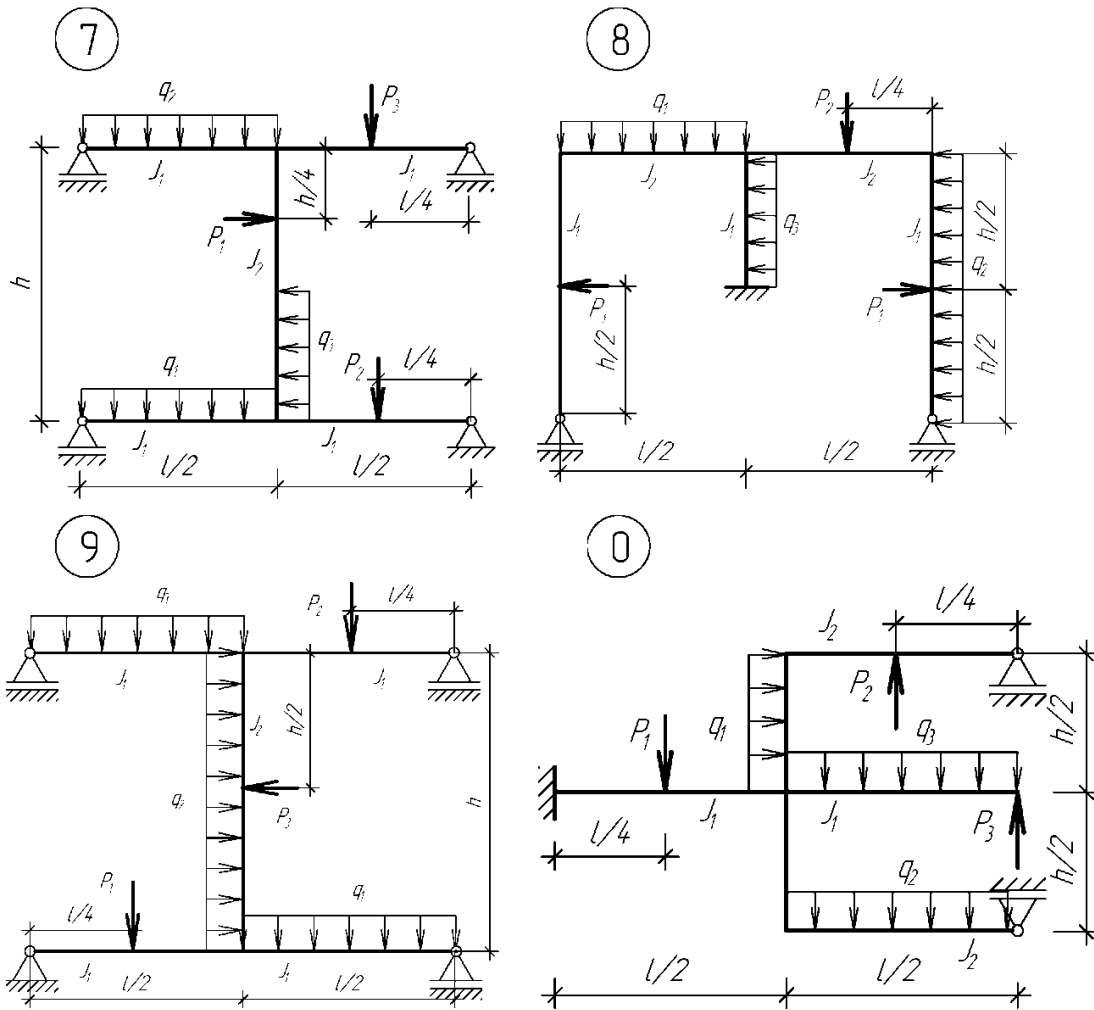


Рис. 42. Окончание

Коэффициенты при неизвестных и свободные (грузовые) члены канонических уравнений метода сил определяются по формулам

$$\delta_{ii} = \sum_n \int_0^l \frac{\overline{M}_i^2 \cdot dx}{EJ}, \quad \delta_{ij} = \sum_n \int_0^l \frac{\overline{M}_i \cdot \overline{M}_j \cdot dx}{EJ}, \quad \delta_{ip} = \sum_n \int_0^l \frac{\overline{M}_i \cdot M_p \cdot dx}{EJ}, \quad (9)$$

где \overline{M}_i , \overline{M}_j , M_p – изгибающие моменты, возникающие в ОС соответственно от сил $X_i = 1$, $X_j = 1$ и заданной нагрузки.

После определения δ_{ii} и δ_{ij} проводят проверку правильности их вычисления по формуле

$$\delta_{ii} + 2\delta_{ij} + \delta_{jj} = \sum_n \int_0^l \frac{\overline{M}_s^2 \cdot dx}{EJ}, \quad (10)$$

где \overline{M}_s – суммарная единичная эпюра ($\overline{M}_s \cdot \overline{M}_s = M_s^2$)

После определения свободных (грузовых членов) также производится проверка их вычисления по формуле

$$\sum \Delta_{ip} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_s \cdot M_p}{EJ} dx. \quad (11)$$

Убедившись в правильности определения коэффициентов и свободных членов, составляем каноническое уравнение и определяем истинные значения неизвестных метода сил X_1, X_2, \dots, X_n .

Для построения эпюр M, Q и N необходимо определить реакции опор в ОС с учетом найденных X_n и заданной нагрузки, затем рассчитать основную систему как статически определимую и далее рассматривать в отдельности каждый стержень с определением M, Q и N .

Второй способ построения эпюр M, Q и N основан на принципе независимости действия сил. Окончательная эпюра изгибающих моментов строится как алгебраическая сумма исправленных единичных эпюр $\bar{M}_i X_i$ с грузовой эпюрой M_p . Окончательная эпюра изгибающих моментов: $M_{ок} = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \bar{M}_3 X_3 + \dots + \bar{M}_n X_n + M_p$.

Построив $M_{ок}$ следует убедиться, что все узлы рамы уравновешены, т.е. в каждом жестком узле рамы сумма моментов должны быть равна нулю.

Обязательно следует провести кинематическую проверку по формуле

$$\sum \int \frac{M_{ок} \cdot \bar{M}_s}{EJ} dx = 0. \quad (12)$$

Положительный результат кинематической проверки является достаточным условием правильности построения окончательной эпюры моментов.

Относительная погрешность определяется по формуле

$$\varepsilon = \frac{|A - B|}{\min\{A, B\}} \cdot 100\% \leq 2\%, \quad (13)$$

где A – сумма слагаемых с положительным знаком, B – сумма по абсолютной величине слагаемых с отрицательным знаком, $\min\{A, B\}$ – наименьшее значение по абсолютной величине из двух сумм A и B .

Затем по эпюре $M_{ок}$ строим эпюру поперечных сил Q , рассматривая каждый стержень в отдельности.

Поперечные силы на участке рамы длиной l определяются по формулам:

$$Q^{np} = \frac{M^{np} - M^{лев}}{l} - \frac{ql}{2}, \quad Q^{лев} = \frac{M^{np} - M^{лев}}{l} + \frac{ql}{2}, \quad (14)$$

где M^{np} – величина изгибающего момента справа на участке, $M^{лев}$ – величина изгибающего момента слева, q – интенсивность распределенной нагрузки.

Если распределенной нагрузки на ригеле или стойке нет, то поперечная сила постоянна и определяется по формуле

$$Q = \frac{M^{np} - M^{жсн}}{l}. \quad (15)$$

По эпюре Q строим эпюру N , рассматривая каждый узел в отдельности, начиная с узла, в котором сходятся не более двух стержней.

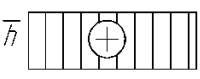
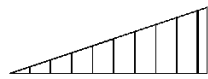
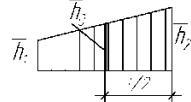
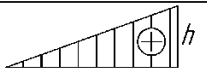
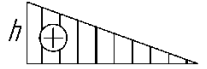
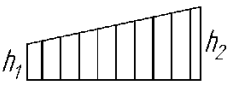
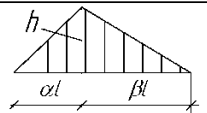
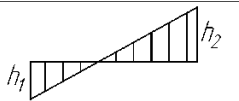
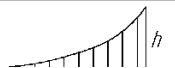
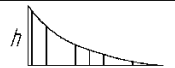
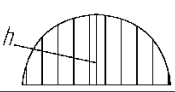
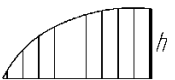
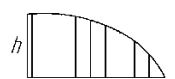
По эпюрам поперечных и продольных сил определяются реакции в опорах внешних связей, которые являлись необходимыми связями в основной системе.

После определения всех реакций в связях проводят статическую проверку рамы по формулам $\sum x = 0$; $\sum y = 0$, $\sum M = 0$.

Приведенные выше интегралы определяются по правилу Верещагина или по справочным таблицам выражений интеграла Мора $\int \bar{M}_i M_p dx$ для различных сочетаний эпюр (табл. 8).

Таблица 8

Выражения интеграла Мора $\int \bar{M}_i M_p dx$ для различных сочетаний эпюр

Эпюра M_p \ Эпюра \bar{M}_i			
	$\frac{1}{2} h \bar{h} l$	$\frac{1}{3} h \bar{h} l$	$\frac{1}{6} h (\bar{h}_1 + 2\bar{h}_2) \cdot l$
	$\frac{1}{2} h \bar{h} l$	$\frac{1}{6} h \bar{h} l$	$\frac{1}{6} h (2\bar{h}_1 + \bar{h}_2) \cdot l$
	$\frac{1}{2} (h_1 + h_2) \bar{h} l$	$\frac{1}{6} (h_1 + 2h_2) \bar{h} l$	$\frac{1}{6} [h_1 (2\bar{h}_1 + \bar{h}_2) + h_2 (2\bar{h}_2 + \bar{h}_1)] \cdot l$
	$\frac{1}{2} h \bar{h} l$	$\frac{1}{6} (1 + \alpha) h \bar{h} l$	$\frac{1}{6} [(1 + \beta) \bar{h}_1 + (1 + \alpha) \bar{h}_2] \cdot h l$
	$\frac{1}{2} (h_2 - h_1) \bar{h} l$	$\frac{1}{6} (2h_2 - h_1) \bar{h} \cdot l$	$\frac{1}{6} [h_2 (2\bar{h}_2 + \bar{h}_1) - h_1 (2\bar{h}_1 + \bar{h}_2)] \cdot l$
	$\frac{1}{3} h \bar{h} l$	$\frac{1}{4} h \bar{h} l$	$\frac{1}{12} h (\bar{h}_1 + 3\bar{h}_2) \cdot l$
	$\frac{1}{3} h \bar{h} l$	$\frac{1}{12} h \bar{h} l$	$\frac{1}{12} h (3\bar{h}_1 + \bar{h}_2) \cdot l$
	$\frac{2}{3} h \bar{h} l$	$\frac{1}{3} h \bar{h} l$	$\frac{1}{3} h (\bar{h}_1 + \bar{h}_2) \cdot l$
	$\frac{2}{3} h \bar{h} l$	$\frac{5}{12} h \bar{h} l$	$\frac{1}{12} h (3\bar{h}_1 + 5\bar{h}_2) \cdot l$
	$\frac{2}{3} h \bar{h} l$	$\frac{1}{4} h \bar{h} l$	$\frac{1}{12} h (5\bar{h}_1 + 3\bar{h}_2) \cdot l$

Пример решения задачи № 5

Схема рамы (заданная система ЗС) представлена на рис. 43, а.

$J_1 : J_2 = 3 : 4$, J_1 – жесткость вертикальных стоек, J_2 – жесткость ригелей.

Определяем степень статической неопределимости рамы по формуле

$$n = 3K + 2Ш + C_0 - 3D, \quad (16)$$

где K – число замкнутых контуров, C_0 – число опорных стержней, $Ш$ – число простых шарниров, D – число дисков.

$n = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 5 - 3 \cdot 1 = 2$. Система имеет две «лишние» связи.

Выбираем основную систему (ОС) метода сил путем удаления одного вертикального и одного горизонтального опорного стержня (рис. 43, б). Действие удаленных связей заменяем неизвестными усилиями X_1 и X_2 .

Обозначим жесткость стоек через $J_1 = J$, тогда жесткость ригелей составит $J_2 = (3/4)J$.

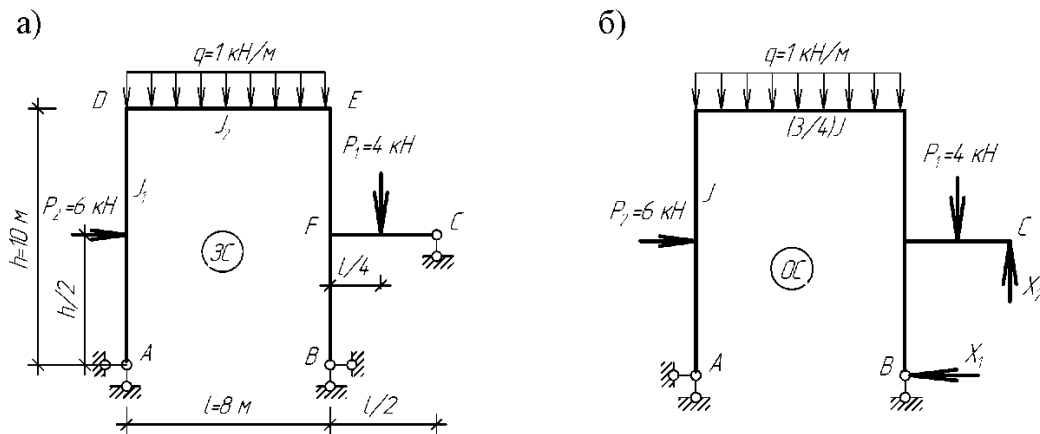


Рис. 43. Заданная и основная схема рамы

Система канонических уравнений метода сил:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0. \end{cases}$$

Последовательно загружаем основную систему силами $X_1 = 1$, $X_2 = 1$, строим единичные эпюры \bar{M}_1 , \bar{M}_2 (рис. 44, а и б). По единичным эпюрам вычисляем коэффициенты при неизвестных.

При построении единичной эпюры \bar{M}_2 в основной системе определили реакции \bar{R}_A^{oc} ; \bar{R}_B^{oc} из уравнений моментов сил относительно опор A и B .

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1}{EJ} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{10 \cdot 10 \cdot 10}{EJ} + \frac{10 \cdot 8 \cdot 10}{(3/4)EJ} + \frac{1}{3} \cdot \frac{10 \cdot 10 \cdot 10}{EJ} = \frac{5200}{3EJ}.$$

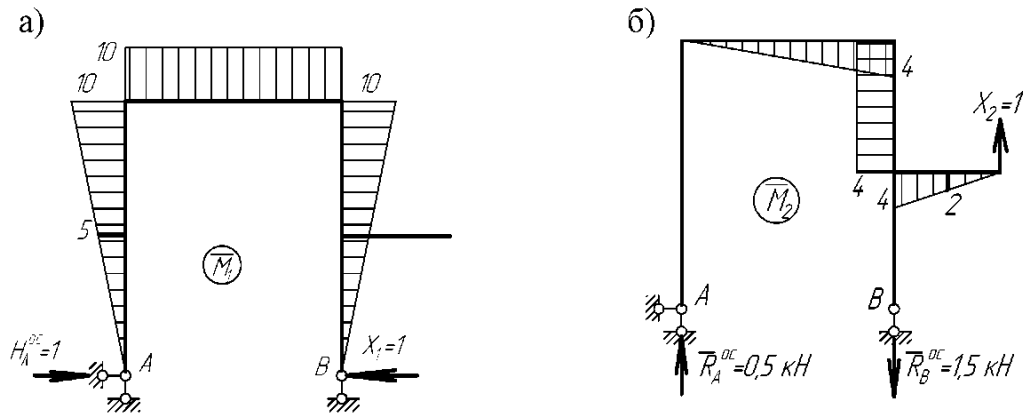


Рис. 44. Эпюры моментов от единичных воздействий

$$\delta_{22} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 \cdot \bar{M}_2}{EJ} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{4 \cdot 8 \cdot 4}{(3/4)EJ} + \frac{4 \cdot 5 \cdot 4}{EJ} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{(3/4)EJ} = \frac{1488}{9EJ}.$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_2}{EJ} dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{10 \cdot 8 \cdot 4}{(3/4)EJ} - \frac{(5+10) \cdot 4 \cdot 5}{2 \cdot EJ} = -\frac{2180}{6EJ}.$$

Проверка правильности определения коэффициентов по формуле (10).

$$\sum \delta_{ij} = \delta_{11} + \delta_{22} + 2\delta_{12} = \frac{5200}{3EJ} + \frac{1488}{9EJ} - 2 \frac{2180}{6EJ} = \frac{1172}{EJ}.$$

Суммарная единичная эпюра показана на рис. 45, а.

Умножаем суммарную единичную эпюру саму на себя:

$$\begin{aligned} \sum \frac{\bar{M}_s \cdot \bar{M}_s}{EJ} dx &= \frac{1}{3} \cdot \frac{10 \cdot 10 \cdot 10}{EJ} + \frac{1}{6} \left[\frac{10(2 \cdot 10 + 6) + 6(2 \cdot 6 + 10)}{(3/4)EJ} \right] \cdot 8 + \\ &+ \frac{1}{6} \left[\frac{6(2 \cdot 6 + 1) + 1(2 \cdot 1 + 6)}{EJ} \right] \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{(3/4)EJ} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5 \cdot 5 \cdot 5}{EJ} = \frac{1172}{EJ}. \end{aligned}$$

Результаты проверки совпали, следовательно коэффициенты при неизвестных вычислены верно.

Для определения свободных членов строим грузовую эпюру M_p в основной системе (рис. 45, б). Определяем реакции в опорах, используя уравнения моментов сил:

$$\sum M_A^{oc} = 0; -P_2 \cdot 5 - q \cdot 8 \cdot 4 - P_1 \cdot 10 + R_B^{oc} \cdot 8 = 0; R_B^{oc} = 16,75 \text{ кН},$$

$$\sum M_B^{oc} = 0; -P_2 \cdot 5 + q \cdot 8 \cdot 4 - P_1 \cdot 2 - R_A^{oc} \cdot 8 = 0; R_A^{oc} = 3,25 \text{ кН}.$$

Эпюру изгибающих моментов на ригеле длиной 8 м расслаиваем на параболу с ординатой $(ql^2)/8$ и на перекрученную эпюру с ординатами 30 и 8.

$$\Delta_{1P} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \cdot M_P}{EJ} dx = -\frac{1}{3} \cdot \frac{30 \cdot 5 \cdot 5}{EJ} - \frac{5+10}{2} \cdot \frac{30 \cdot 5}{EJ} + \frac{(8-30) \cdot 10 \cdot 8}{2(3/4)EJ} - \frac{2}{3} \cdot \frac{8 \cdot 10 \cdot 8}{(3/4)EJ} + \frac{(5+10) \cdot 8 \cdot 5}{2EJ} = -\frac{2817,22}{EJ}.$$

$$\Delta_{2P} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 \cdot M_P}{EJ} dx = \frac{1}{6} \cdot \frac{(2 \cdot (-8) + 30) \cdot 4 \cdot 8}{(3/4)EJ} + \frac{1}{3} \cdot \frac{8 \cdot 4 \cdot 8}{(3/4)EJ} - \frac{8 \cdot 4 \cdot 5}{EJ} - \frac{1}{6} \cdot \frac{8 \cdot (2 \cdot 4 + 2) \cdot 2}{(3/4)EJ} = \frac{17,77}{EJ}.$$

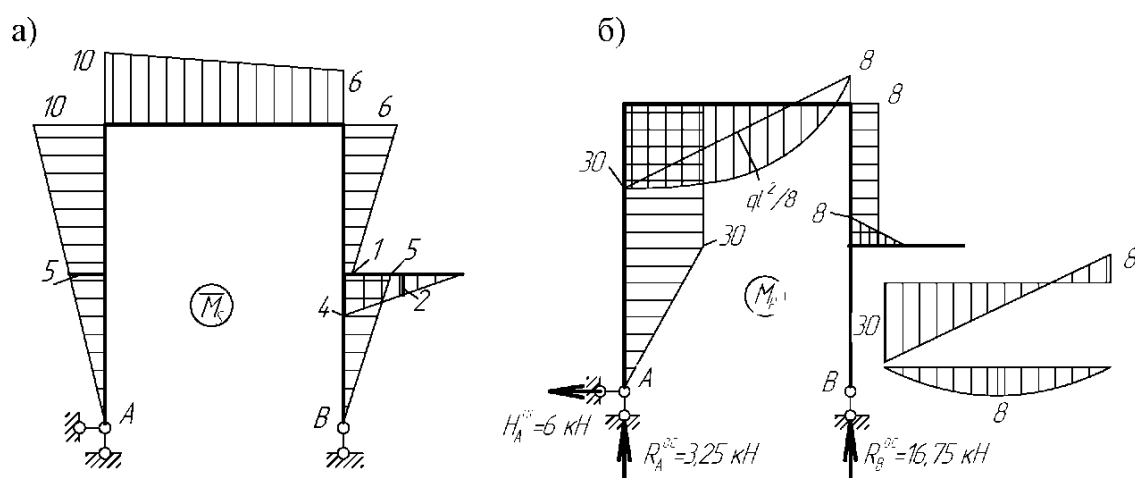


Рис. 45. Суммарная единичная и грузовая эпюра в основной системе

Производим проверку правильности определения свободных коэффициентов по условию $\sum \Delta_{iP} = \sum \int \frac{\bar{M}_i \cdot M_P}{EJ} dx$.

$$\sum \Delta_{iP} = -\frac{2817,22}{EJ} + \frac{17,77}{EJ} = -\frac{2799,44}{EJ}.$$

$$\sum \int \frac{\bar{M}_S \cdot M_P}{EJ} dx = -\frac{1}{3} \cdot \frac{5 \cdot 30 \cdot 5}{EJ} - \frac{5+10}{2} \cdot \frac{30 \cdot 5}{EJ} + \frac{1}{6} \left[\frac{10(-30 \cdot 2 + 8) + 6(8 \cdot 2 - 30)}{(3/4)EJ} \right] \cdot 8 - \frac{1}{3} \cdot \frac{(10+6) \cdot 8 \cdot 8}{(3/4)EJ} + \frac{6+1}{2} \cdot \frac{8 \cdot 5}{EJ} - \frac{1}{6} \cdot \frac{(2 \cdot 4 + 2) \cdot 8 \cdot 2}{(3/4)EJ} = -\frac{2799,44}{EJ}.$$

Результаты проверки совпали, следовательно свободные коэффициенты вычислены верно.

Подставляем вычисленные значения коэффициентов в канонические уравнения:

$$\begin{cases} \frac{5200}{3EJ} X_1 - \frac{2180}{6EJ} X_2 - \frac{2817,22}{EJ} = 0; \\ -\frac{2180}{6EJ} X_1 + \frac{1488}{9EJ} X_2 + \frac{17,77}{EJ} = 0. \end{cases}$$

Решаем систему уравнений и находим значения неизвестных усилий в удаленных «лишних» связях: $X_1 = 2,97$ кН, $X_2 = 6,42$ кН.

Значения неизвестных получено со знаком плюс, следовательно, предварительное направление их выбрано верно.

Строим исправленные эпюры моментов путем умножения единичных эпюр \bar{M}_1 и \bar{M}_2 на найденные значения сил X_1 и X_2 (рис. 46, а и б).

Затем по формуле $M_{ок} = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \bar{M}_3 X_3 + \dots + \bar{M}_n X_n + M_p$ определяем значения моментов в узлах рамы строим окончательную эпюру изгибающих моментов в заданной системе (рис. 46, в).

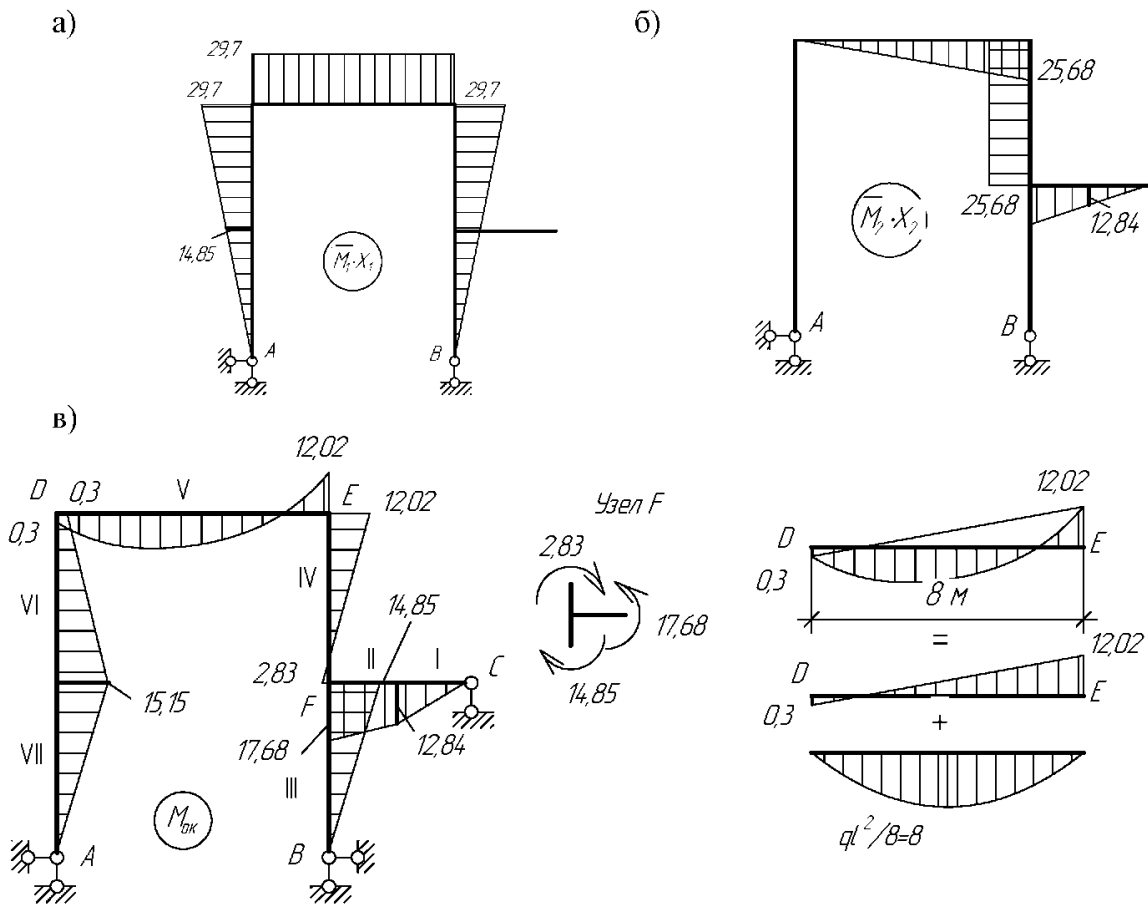


Рис. 46. Исправленные и окончательная эпюра изгибающих моментов

Проверка окончательной эпюры изгибающих моментов:

1) Статическая проверка удовлетворяется, так как все узлы рамы находятся в равновесии.

2) Кинематическая проверка по формуле (12):

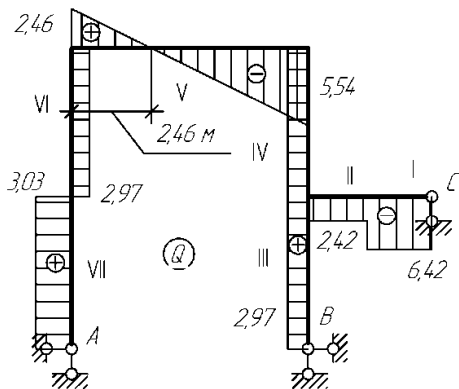
$$\begin{aligned} \sum \int \frac{M_{ок} \bar{M}_s}{EJ} dx &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{15,15 \cdot 5 \cdot 5}{EJ} - \frac{1}{6} \left[\frac{0,3(2 \cdot 10 + 5) + 15,15(2 \cdot 5 + 10)}{EJ} \right] \cdot 5 + \\ &+ \frac{1}{6} \left[\frac{-0,3(2 \cdot 10 + 6) + 12,02(2 \cdot 6 + 10)}{0,75EJ} \right] \cdot 8 - \frac{1}{3} \frac{8(10 + 6) \cdot 8}{0,75EJ} + \frac{1}{6} \left[\frac{12,02(2 \cdot 6 + 1) - 2,83(2 \cdot 1 + 6)}{EJ} \right] \cdot 5 + \\ &+ \frac{1}{3} \cdot \frac{14,85 \cdot 5 \cdot 5}{EJ} + \frac{1}{3} \cdot \frac{12,84 \cdot 2 \cdot 2}{0,75EJ} + \frac{1}{6} \left[\frac{12,84(2 \cdot 2 + 4) + 17,68(2 \cdot 4 + 2)}{0,75EJ} \right] \cdot 2 = \\ &= -\frac{839,111}{EJ} + \frac{838,404}{EJ} = -\frac{0,707}{EJ}. \end{aligned}$$

Относительная погрешность, вычисленная по формуле (15) составляет

$$\varepsilon = \frac{|A - B|}{\min\{A, B\}} \cdot 100\% = \frac{0,707}{838,404} \cdot 100\% = 0,08\%. \text{ Относительная погрешность меньше допустимых } 2\%.$$

Следовательно, эпюра $M_{ок}$ построена верно.

По окончательной эпюре изгибающих моментов строим эпюру поперечных сил (рис. 47). При рассмотрении участков мысленно становимся внутри рамы.



$$Q_I = \frac{M^{пр} - M^{лев}}{l_I} = \frac{0 - 12,84}{2} = -6,42 \text{ кН.}$$

$$Q_{II} = \frac{M^{пр} - M^{лев}}{l_{II}} = \frac{12,84 - 17,68}{2} = -2,42 \text{ кН.}$$

$$Q_{III} = \frac{0 - (-14,85)}{5} = 2,97 \text{ кН.}$$

$$Q_{IV} = \frac{2,83 - (-12,02)}{5} = 2,97 \text{ кН.}$$

Рис. 47. Эпюра поперечных сил

$$Q_V^{пр} = \frac{M^{пр} - M^{лев}}{l_V} - \frac{ql_V}{2} = \frac{-12,02 - 0,3}{8} - \frac{1 \cdot 8}{2} = -5,54 \text{ кН.}$$

$$Q_V^{лев} = \frac{M^{пр} - M^{лев}}{l_V} + \frac{ql_V}{2} = \frac{-12,02 - 0,3}{8} + \frac{1 \cdot 8}{2} = 2,46 \text{ кН.}$$

Сечение ригеля с чистым изгибом находится на расстоянии $R_A/q = 2,46/1 = 2,46$ м от левого узла рамы.

В этом сечении изгибающий момент достигает экстремального значения, величину момента рассчитаем по уравнению:

$$M_{\max} = R_{A1} \cdot 2,46 + 0,3 - \frac{q \cdot 2,46^2}{2} \approx 3,33 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

$$Q_{VI} = \frac{M^{\text{np}} - M^{\text{кв}}}{l_{VI}} = \frac{0,3 - 15,15}{5} = -2,97 \text{ кН. } Q_{VII} = \frac{M^{\text{np}} - M^{\text{кв}}}{l_{VII}} = \frac{15,15 - 0}{5} = 3,03 \text{ кН.}$$

Эпюру продольных сил строим по эпюре поперечных сил способом вырезания узлов. Двухстержневой узел *D* соединяет V и VI участки. Схема уравновешивания показана на рис. 48, а. Схема уравновешивания узлов *E* и *F* по поперечным и продольным силам показана на рис. 48, б и в. При уравновешивании трехстержневого узла следует приложить найденное значение продольной силы с участка IV.

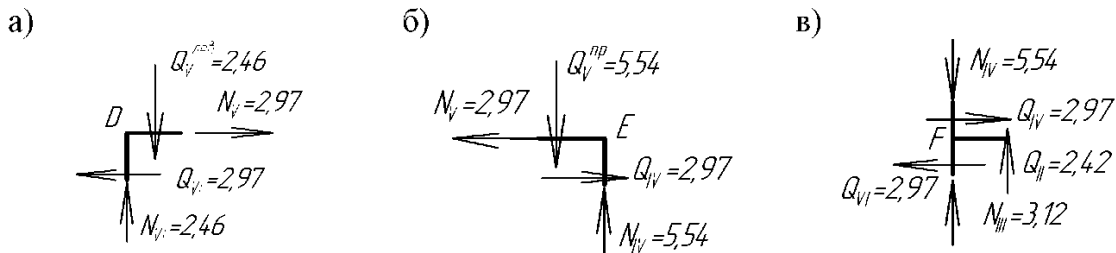


Рис. 48. Схема уравновешивания узлов рамы продольными и поперечными силами

Эпюра продольной силы представлена на рис. 49, а. Произведем статическую проверку рамы. Нанесем на заданную схему рассчитанные реакции внешних связей (рис. 49, б) и проверим выполнение условий:

$$\sum y = 0; R_A + R_B + R_C - ql_V - P_1 = 2,46 + 3,12 + 6,42 - 8 - 4 = 0;$$

$$\sum x = 0; P_2 - H_A - H_B = 6 - 3,03 - 2,97 = 0;$$

$$\sum M_0 = 0; -P_1 \cdot 6 + R_C \cdot 8 - H_B \cdot 5 + R_B \cdot 4 - R_A \cdot 4 - H_A \cdot 5 = 0.$$

Условия выполняются, следовательно, рама статически уравновешена.

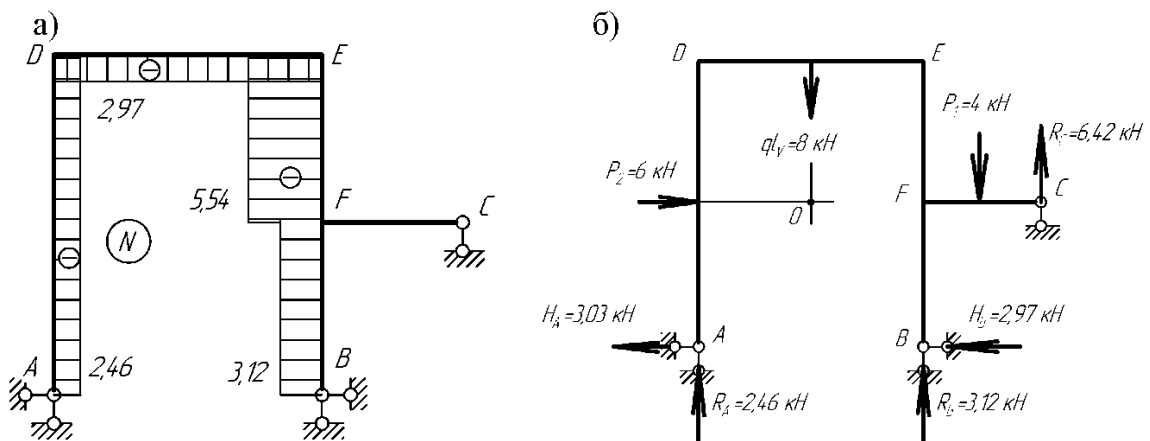


Рис. 49. Эпюра продольной силы и схема статической проверки рамы

ЗАДАЧА № 6. РАСЧЕТ НЕРАЗРЕЗНОЙ БАЛКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УРАВНЕНИЯ ТРЕХ МОМЕНТОВ

Задание. Для неразрезной балки с выбранными по шифру (табл. 9) размерами и нагрузкой (см. рис. 50) требуется:

- 1) записать уравнение трех моментов и по уравнению рассчитать опорные моменты;
- 2) построить эпюры M и Q ;
- 3) выполнить кинематическую (деформационную) проверку построения эпюры M и выполнить статическую проверку.

Таблица 9

Числовые данные к задаче № 6

Первая цифра шифра	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
l_1 , м	6	8	10	12	8	6	10	12	8	10
b , м	2	3	4	3	2	4	3	2	4	2
q_1 , кН/м	1,0	2,0	3,0	4,0	3,0	2,0	1,0	4,0	2,0	1,0
Вторая цифра шифра	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
l_2 , м	8	6	12	8	6	10	6	8	12	10
P_1 , кН	4,0	8,0	5,0	6	3	2	1	6	8	4
c , м	2	4	1,0	3	2	1	4	1	2	3
q_2 , кН/м	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	1,6	1,8	1,4	1,2	2,0
Третья цифра шифра (номер схемы)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
l_3 , м	8	5	6	8	5	9	6	8	5	6
P_2 , кН	1	2	3	2	1	3	2	1	3	2

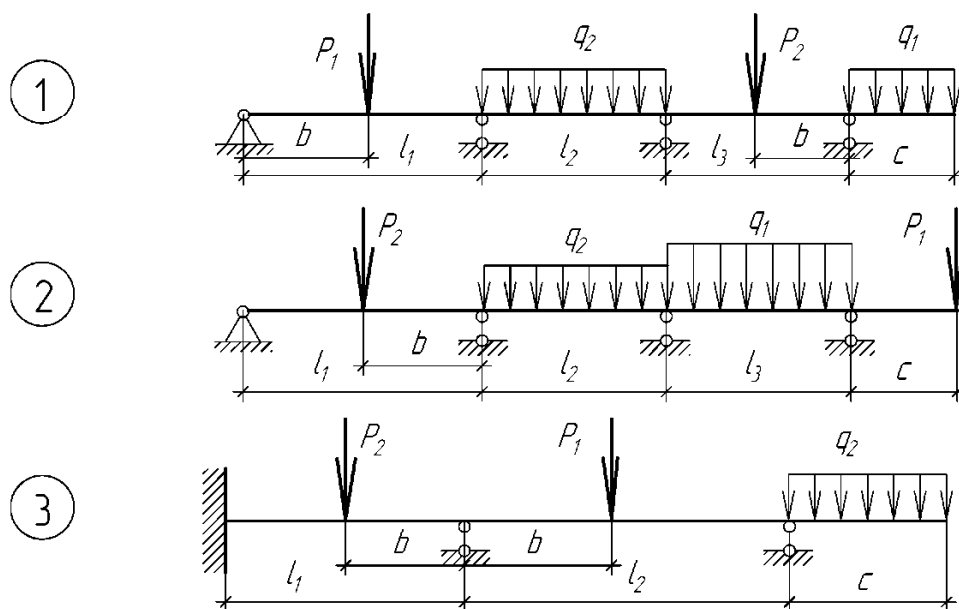


Рис. 50. Расчетные схемы к задаче № 6

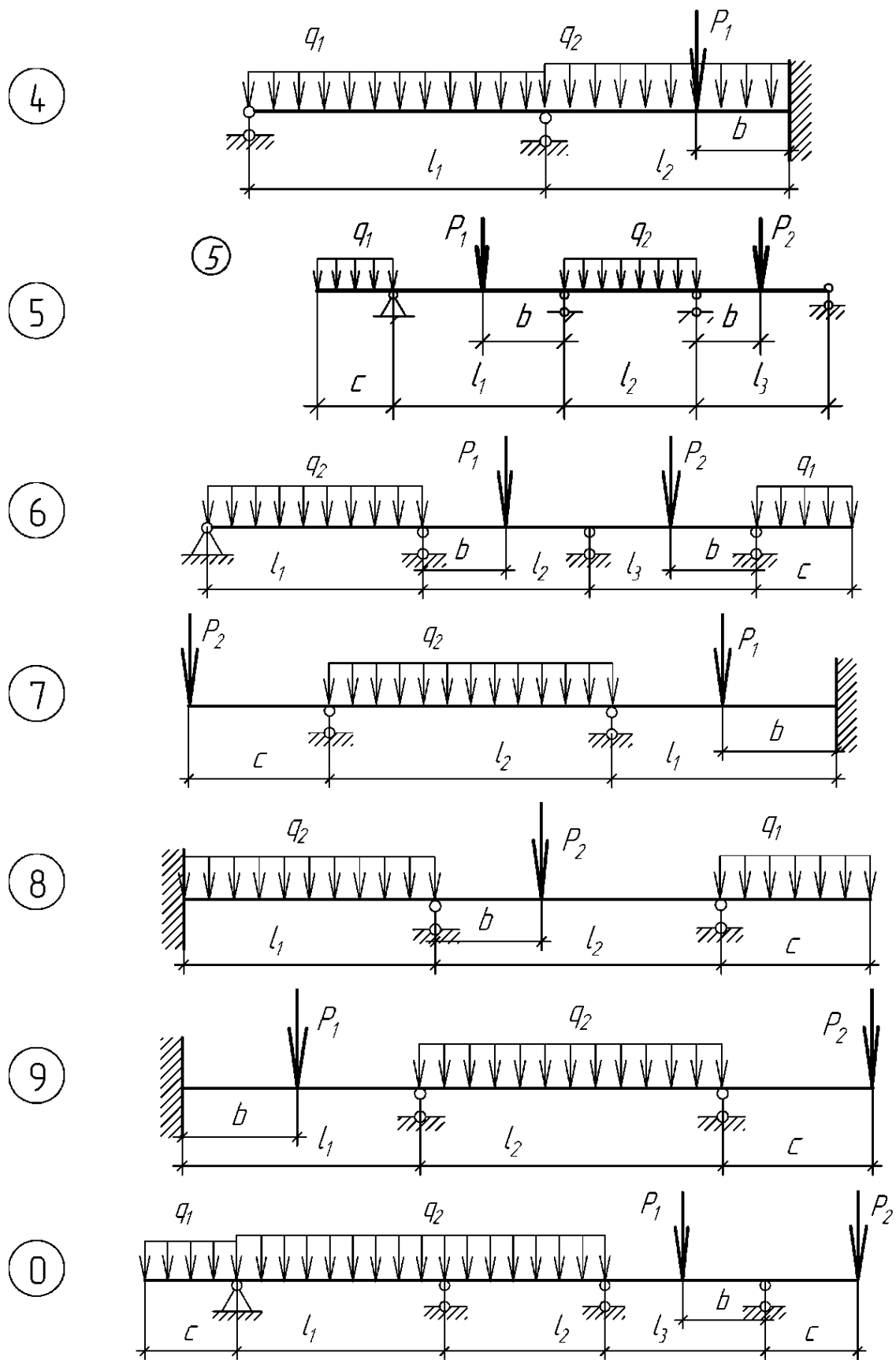


Рис. 50. Окончание

Методические указания к решению задачи № 6

Для расчета неразрезанной балки используем уравнение трех моментов, вывод которого рассматривается в учебниках.

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -6 \left(\frac{\omega_n a_n}{l_n} + \frac{\omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}} \right), \quad (17)$$

где M_{n-1}, M_n, M_{n+1} – опорные моменты, l_n, l_{n+1} – длины пролетов, ω_n, ω_{n+1} – площади эпюр изгибающих моментов, a_n, b_{n+1} – абсциссы центров тяжести эпюр моментов как геометрических фигур (рис. 51).

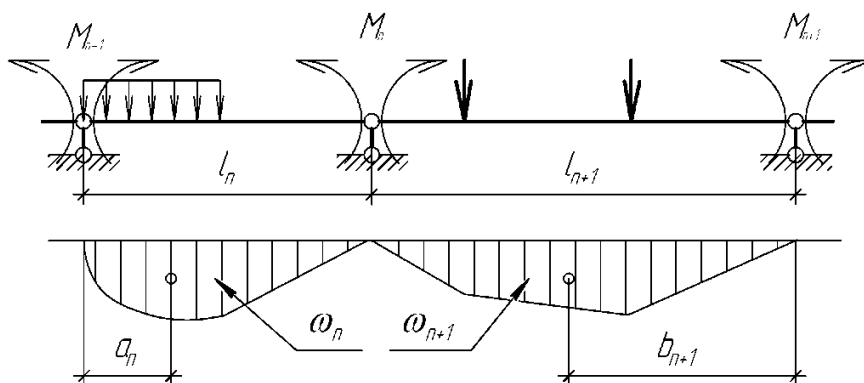


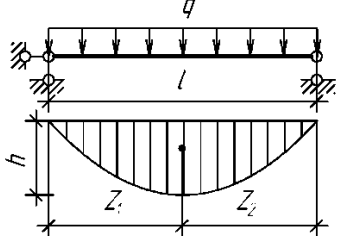
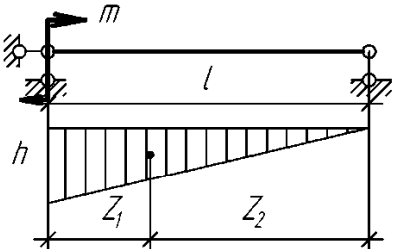
Рис. 51. Фрагмент основной системы многопролетной балки

В табл. 10 приводятся сведения о геометрических характеристиках фигур (площадь, абсциссы центров тяжести), форму которых могут иметь эпюры изгибающих моментов в однопролетных балках.

Таблица 10

Геометрические характеристики плоских фигур

Схема балки и вид эпюры изгибающих моментов	h	F'	Z_1	Z_2
1	2	3	4	5
	$h_1 = m_1$ $h_2 = m_2$	$\frac{(h_1 + h_2) \cdot l}{2}$	$\frac{h_1 + 2h_2}{3(h_1 + h_2)} \cdot l$	$\frac{h_2 + 2h_1}{3(h_1 + h_2)} \cdot l$
	$\frac{P \cdot a \cdot b}{l}$	$\frac{l \cdot h}{2}$	$\frac{a + l}{3}$	$\frac{b + l}{3}$

1	2	3	4	5
	$\frac{ql^2}{8}$	$\frac{2}{3}l \cdot h$	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{2}$
	m	$\frac{hl}{2}$	$\frac{1}{3}l$	$\frac{2}{3}l$

Пример решения задачи № 6

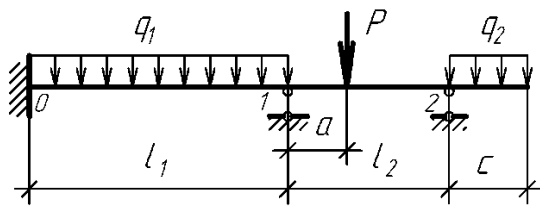


Рис. 52. Расчетная схема балки

Расчетная схема балки представлена на рис. 52.

$P = 4 \text{ кН}, q_1 = 2 \text{ кН/м},$
 $q_2 = 4 \text{ кН/м}, l_1 = 8 \text{ м}, l_2 = 6 \text{ м},$
 $a = 2 \text{ м}, c = 2 \text{ м}.$

Решение. Балка является дважды статически неопределимой. Из заданной системы переходим в основную путем врезания шарниров в заделку и в промежуточную опору (рис. 53). Жесткую заделку заменим пролетом $l_0 = 0$ ($J = \infty$). Консоль заменяем моментом на опоре 2, величина которого $M_3 = -qc^2/2 = -8 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Построим эпюры изгибающих моментов от заданных нагрузок для каждого пролета, рассматривая их как простые двухопорные балки. Отмечаем абсциссы центров тяжести эпюр ($a_1 = 4, b_2 = 10/6$).

Следует составить два уравнения моментов.

Для составления уравнения 3-х моментов для опоры 0 имеем:

$$M_{n-1} = 0, \omega_n = 0, l_n = l_0 = 0, a_n = 0, M_n = M_1, \omega_{n+1} = \omega_1 = \frac{2}{3} \cdot 16 \cdot 8 = \frac{256}{3},$$

$$b_{n-1} = 4 \text{ м}, l_{n+1} = l_1 = 8 \text{ м}, M_{n-1} = M_2.$$

Согласно (17) уравнение трех моментов для опоры 0 примет вид

$$2M_1(0+8) + M_2 \cdot 8 = -6 \cdot \frac{256}{3} \cdot \frac{4}{8} \text{ или } 16M_1 + 8M_2 = -256.$$

Для составления уравнения 3-х моментов для опоры 1 имеем: $M_{n-1} = M_1$, $\omega_n = \omega_1 = \frac{256}{3}$, $l_n = 8$ м, $a_n = 4$ м, $M_n = M_2$, $\omega_{n+1} = \omega_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{3} \cdot 6 = 16$, $b_{n+1} = 10/3$ м, $l_{n+1} = l_2 = 6$ м, $M_{n+1} = M_3 = -8$.

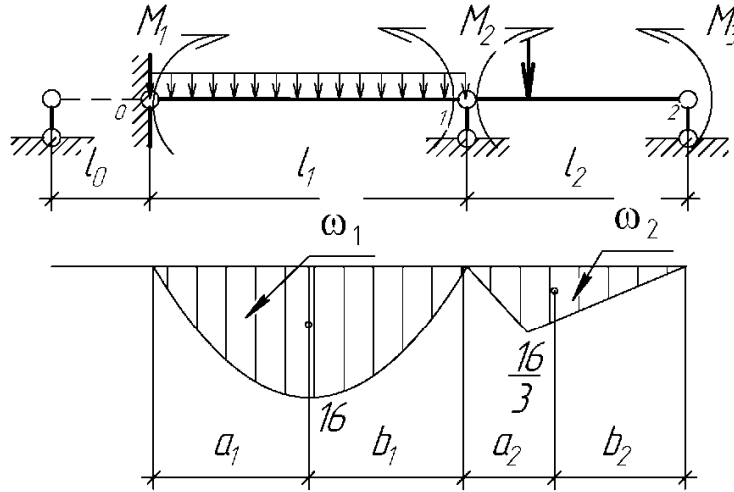


Рис. 53. Основная схема неразрезной балки

Согласно (17) уравнение трех моментов для опоры 1 примет вид

$$M_1 \cdot 8 + 2M_2(6 + 8) - 8 \cdot 6 = -6 \left(\frac{256}{3} \cdot \frac{4}{8} + 16 \cdot \frac{10}{3 \cdot 6} \right) \text{ или } 8M_1 + 28M_2 = -261,3.$$

Решаем систему из двух уравнений и определяем опорные моменты.

$$\begin{cases} 16M_1 + 8M_2 = -256, \\ 8M_1 + 28M_2 = -261,3. \end{cases}$$

$$M_1 = -13,2 \text{ кН}\cdot\text{м}, M_2 = -5,6 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

На основании полученных результатов строим огибающую опорных моментов (рис. 54, а). Отрицательные значения M_1 и M_2 означают, что моменты деформируют балку с растяжением верхних волокон, поэтому огибающая моментов отложена выше базовой линии.

Производим суммирование ординат эпюры опорных моментов и ординат эпюры, построенной для каждого пролета отдельно (рис. 53 и 54, б). Результатом сложения эпюр будет окончательная эпюра изгибающих моментов для неразрезной балки (рис. 54, в).

Определяем величины поперечных сил для каждого участка балки.

$$Q_1^{\text{пр}} = \frac{M_{\text{пр}} - M_{\text{л}}}{c} - \frac{q_2 c}{2} = \frac{0 + 8}{2} - \frac{4 \cdot 2}{2} = 0.$$

$$Q_1^{\text{л}} = \frac{M_{\text{пр}} - M_{\text{л}}}{c} + \frac{q_2 c}{2} = \frac{0 + 8}{2} + \frac{4 \cdot 2}{2} = 8 \text{ кН}.$$

$$Q_{II} = \frac{M_{up} - M_{.1}}{l_2 - a} = \frac{-8 - (-1,07)}{4} = 1,73 \text{ кН.}$$

$$Q_{III} = \frac{M_{up} - M_{.1}}{a} = \frac{-1,07 - (-5,5)}{2} = 2,27 \text{ кН.}$$

$$Q_{IV}^{np} = \frac{M_{up} - M_{.1}}{l_1} - \frac{q_1 l_1}{2} = \frac{-5,6 - (-13,2)}{8} - \frac{2 \cdot 8}{2} = -7,05 \text{ кН.}$$

$$Q_{IV}^{\pi} = \frac{M_{up} - M_{.1}}{l_1} + \frac{q_1 l_1}{2} = \frac{-5,6 - (-13,2)}{8} + \frac{2 \cdot 8}{2} = 8,95 \text{ кН.}$$

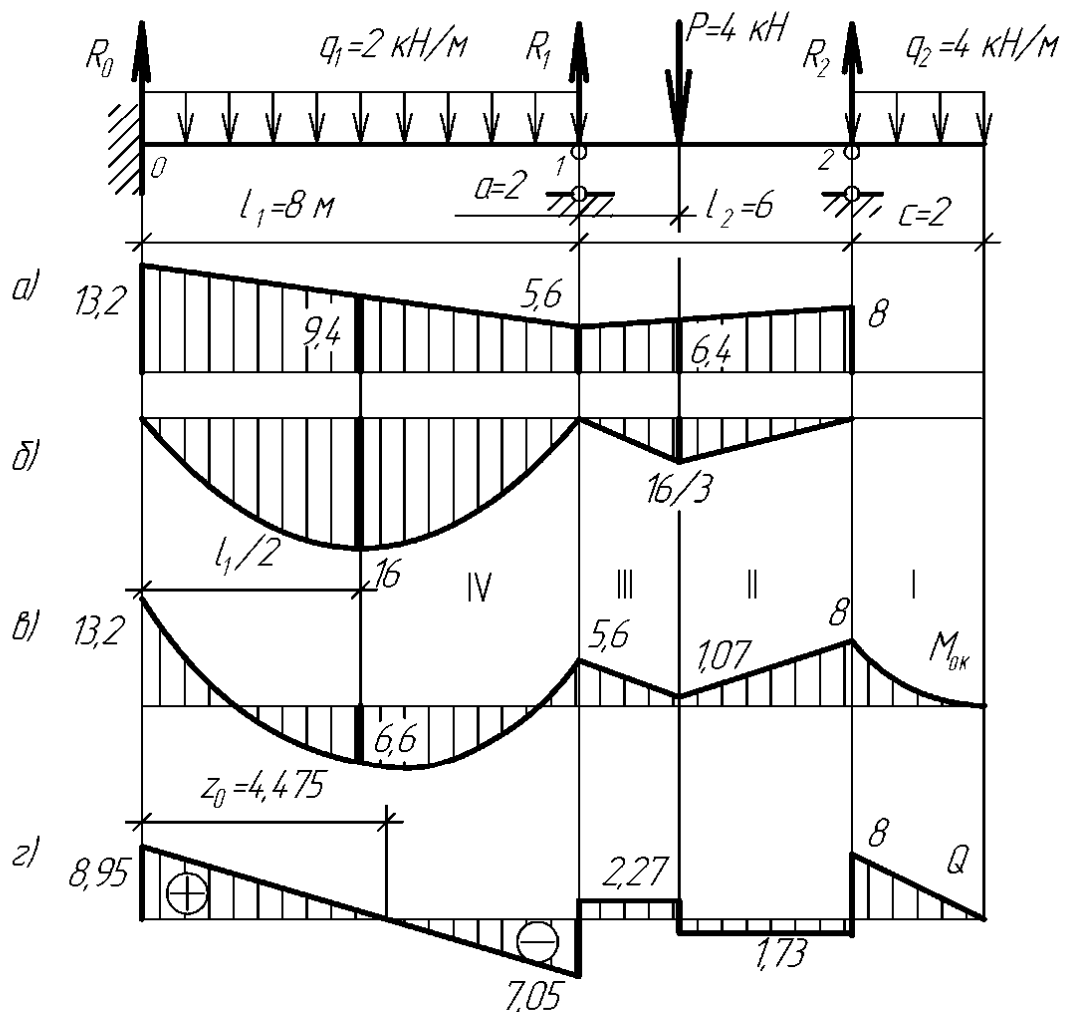


Рис. 54. Построение эпюр внутренних усилий в неразрезной балке

Реакции внешних связей составят:

$$R_0 = 8,95 \text{ кН, } R_1 = 7,05 + 2,27 = 9,32 \text{ кН, } R_2 = 1,73 + 8 = 9,73 \text{ кН.}$$

Проводим статическую проверку:

$$\sum y = R_0 - q_1 l_1 + R_1 - P + R_2 - q_2 c = 0.$$

$$8,95 - 2 \cdot 8 + 9,32 - 4 + 9,73 - 4 \cdot 2 = 0.$$

Кроме статической проверки необходимо провести кинематическую проверку – перемещения основной и заданной системы от совместного действия неизвестных и нагрузки по направлению любого неизвестного должны быть равны нулю. Это условие имеет запись $\sum \int \frac{M_{ок} \bar{M}}{EJ} dx = 0$.

Произведем перемножение окончательной эпюры моментов ($M_{ок}$) с суммарной единичной эпюрой (\bar{M}) (рис. 55), используя таблицу 8 выражений интеграла Мора $\int \bar{M}_i M_p dx$ для различных сочетаний эпюр. Предварительно произведем расслоение эпюры моментов на IV участке.

$$\sum \int \frac{M_{ок} \cdot \bar{M}}{EJ} dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{1 \cdot 8 \cdot 16}{EJ} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(13,2 + 5,6) \cdot 8}{EJ} - \frac{1}{6} \left[\frac{5,6(1 \cdot 2 + 2/3) + 1,07(2 \cdot 2/3 + 1)}{EJ} \right] \cdot 2 - \frac{1}{6} \cdot \frac{(2/3) \cdot 4 \cdot (2 \cdot 1,07 + 8)}{EJ} = \frac{85,333}{EJ} - \frac{85,517}{EJ} = -\frac{0,184}{EJ}$$

$$\text{Относительная погрешность } \varepsilon = \frac{|A - B|}{\min\{A, B\}} \cdot 100\% = \frac{0,184}{85,333} \cdot 100 = 0,22\%$$

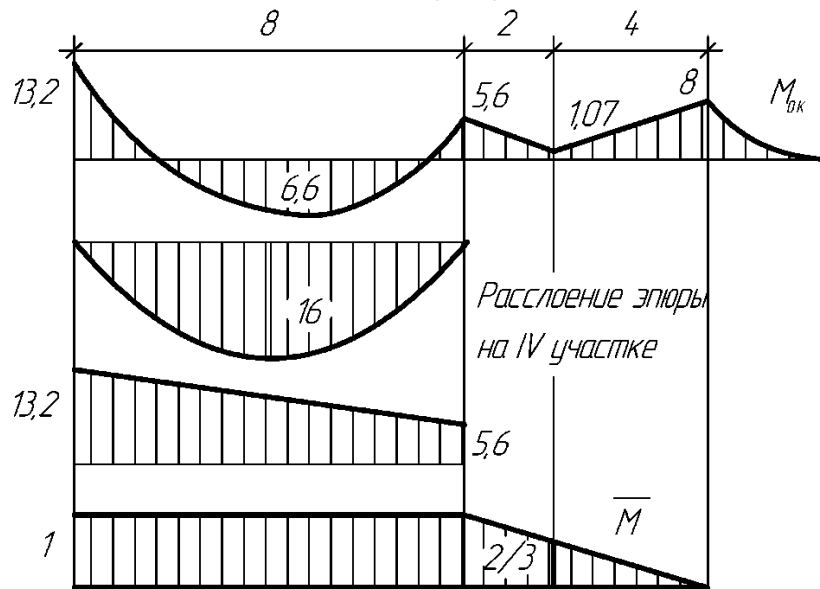


Рис. 55. Расчетная схема моментов для кинематической проверки балки

ЗАДАЧА № 7. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ РАМЫ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ (ДЕФОРМАЦИЙ)

Задание. Для рамы с выбранными по шифру из табл. 11 размерами и нагрузкой по расчетной схеме (рис. 56) требуется:

- 1) определить число независимых линейных и угловых перемещений.
- 2) выбрать основную систему метода перемещений.

- 3) раскрыть статическую неопределимость.
 - 4) построить эпюры M, Q, N .
 - 2) выполнить статическую и кинематическую проверку рамы.
- Жесткости стоек и ригелей рамы берутся одинаковыми.

Таблица 11

Числовые данные к задаче № 7

Первая цифра шифра	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$l, \text{ м}$	4	5	6	3	7	8	9	10	12	2
Вторая цифра шифра	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$h, \text{ м}$	3	4	5	9	6	7	8	2	12	10
$P_1, \text{ кН}$	4	0	0	5	0	0	6	0	0	7
$P_2, \text{ кН}$	0	4	0	0	5	0	0	6	0	0
$P_3, \text{ кН}$	0	0	6	0	0	5	0	0	4	0
Третья цифра шифра (номер схемы)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
$q, \text{ кН/м}$	2	4	6	4	2	6	4	2	4	6

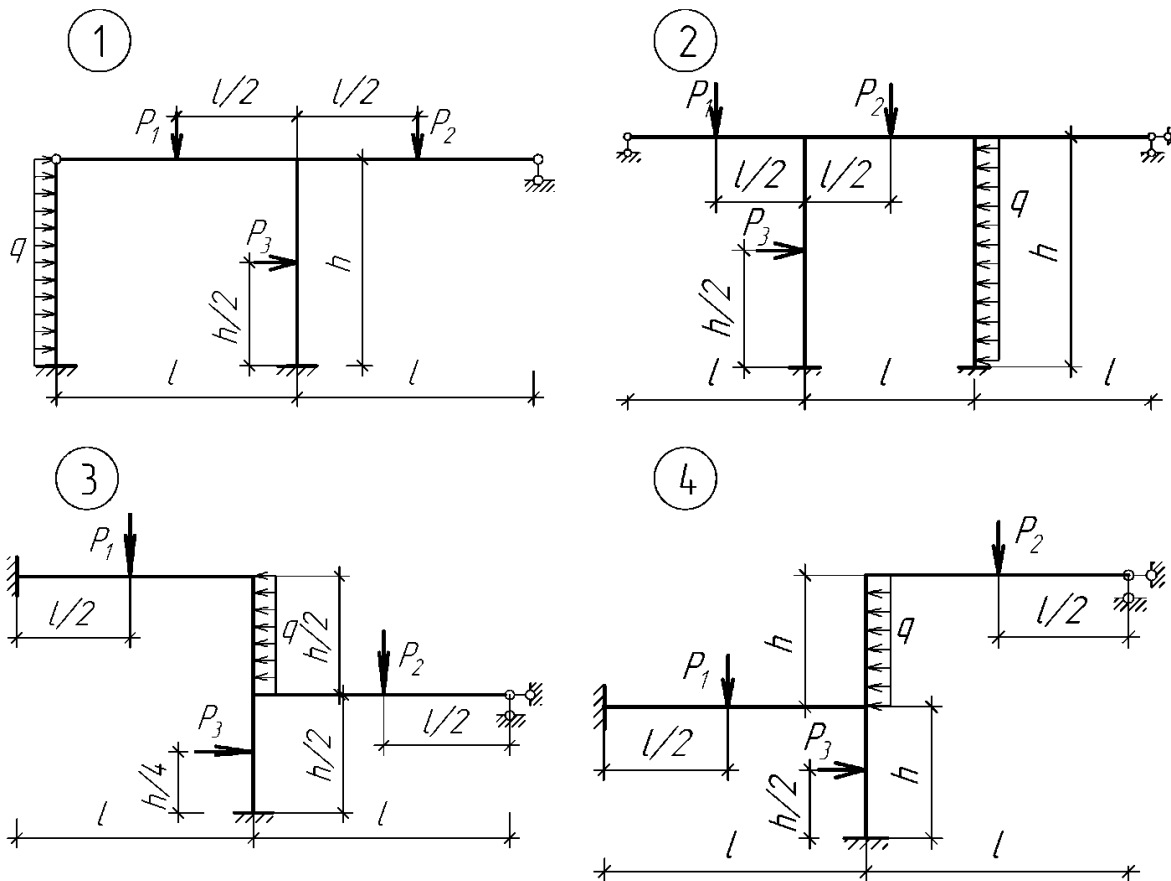


Рис. 56. Расчетные схемы к задаче № 7

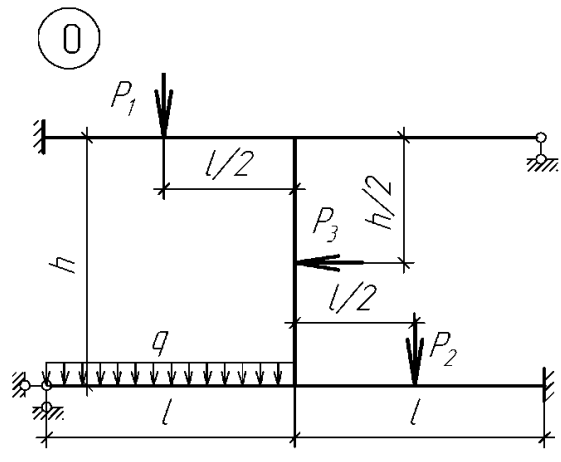
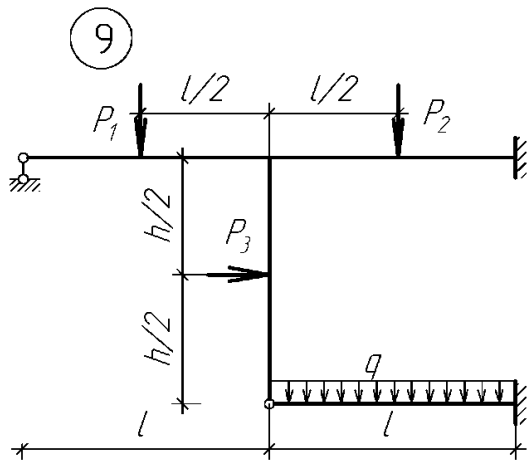
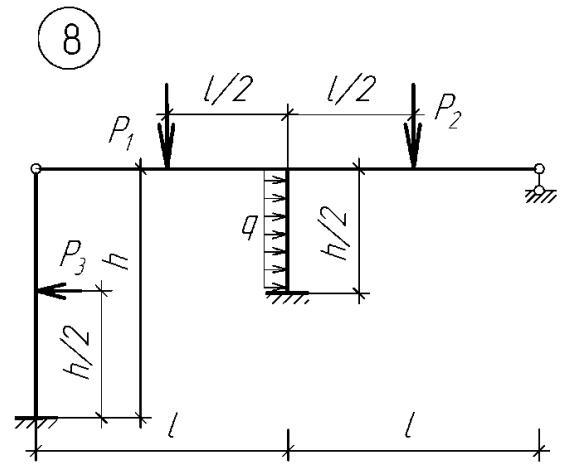
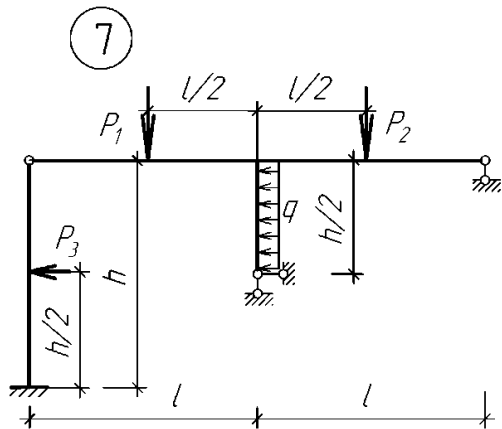
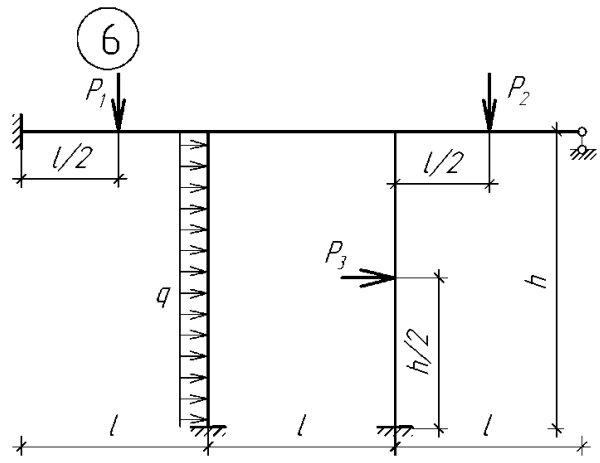
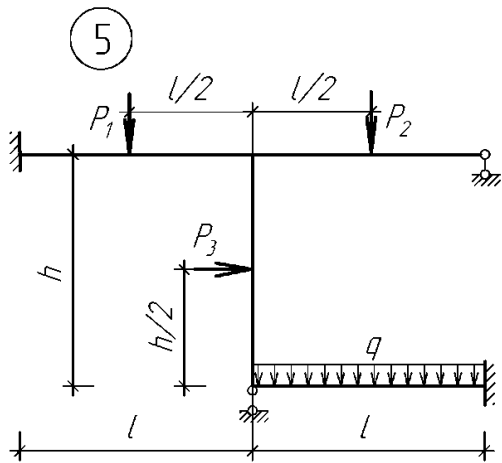


Рис. 56. Окончание

Методические указания к решению задачи № 7

Метод, в котором за основные неизвестные принимаются угловые и линейные перемещения узлов системы и который позволяет их найти, называется методом перемещений.

Общее число неизвестных метода перемещений называют степенью кинематической неопределимости, она определяется как сумма неизвестных углов поворота n_y и неизвестных независимых линейных перемещений n_l :

$$n = n_y + n_l. \quad (18)$$

n_y равно числу жестких узлов (узел, в котором жестко соединено не менее двух стержней), n_l определяется по шарнирной схеме, которую получают путем введения шарниров в жесткие узлы и жесткие заделки по формуле:

$$n_l = 2V - C - C_0, \quad (19)$$

где V – число шарнирных узлов рамы, включая опорные, C – число стержней рамы, C_0 – число опорных стержней.

Например, на рис. 57, а представлена статически неопределимая рама. Число жестких узлов $n_y = 2$ (узлы C и D). Шарнирная схема рамы показана на рис. 57, б. Число независимых линейных перемещений $n_l = 2 \cdot 6 - 5 - 5 = 2$.

Таким образом, степень кинематической неопределимости рамы составит $n = n_y + n_l = 2 + 2 = 4$.

Для того, чтобы предотвратить угловые перемещения рамы, в узлы C и D вводим дополнительные жесткие заделки, а для предотвращения линейных перемещений вводим дополнительные опорные стержни (рис. 57, в). Таким образом получаем основную систему метода перемещений.

В дополнительных закреплениях возникают реакции (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4), которые и являются основными неизвестными метода перемещений.

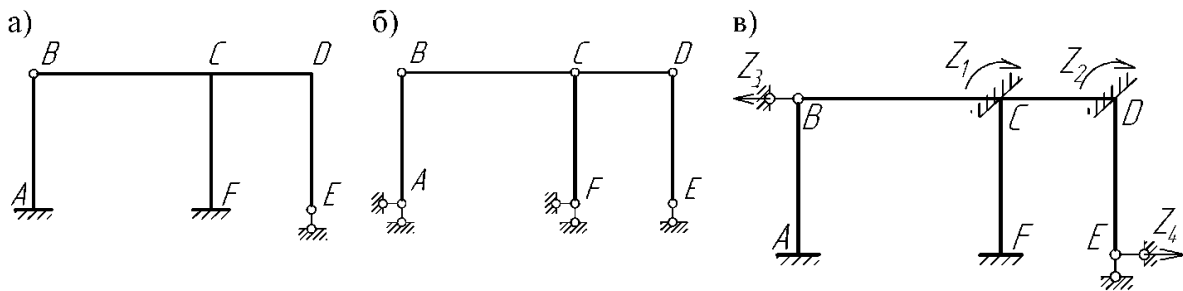
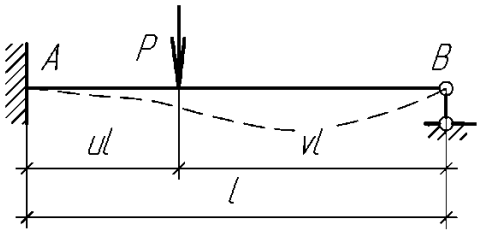
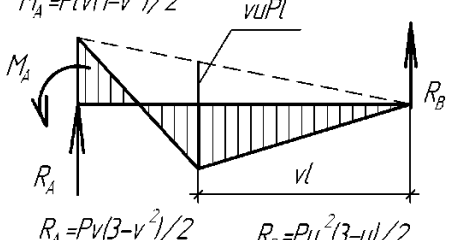
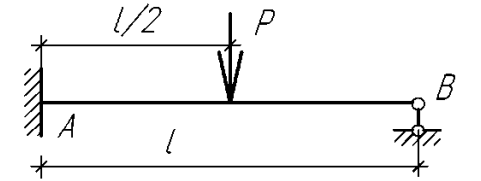
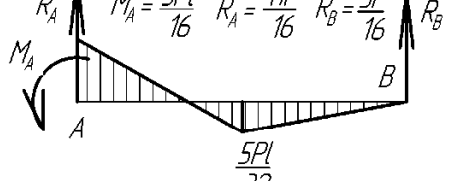
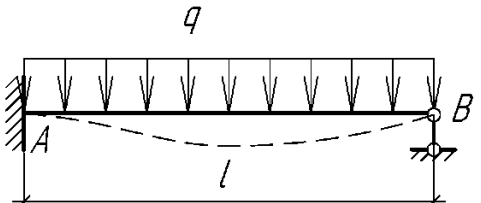
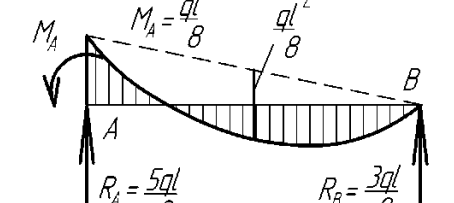
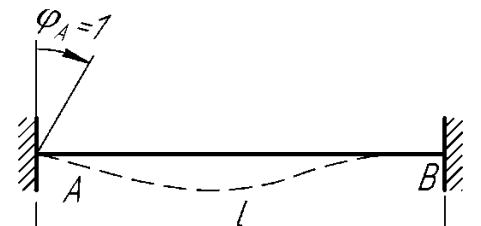
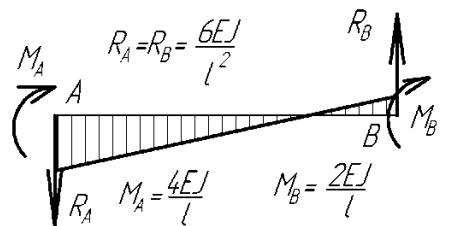
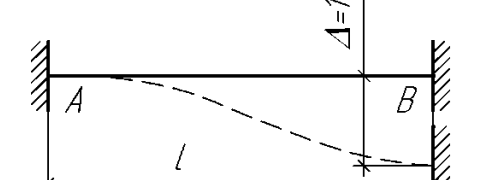
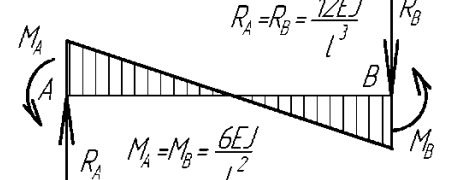
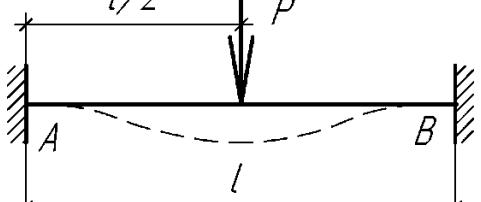
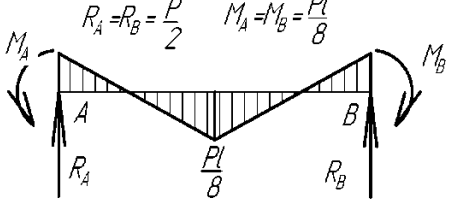


Рис. 57. Статически неопределимая рама

1	2	3
3		 $M_A = Plv(1-v^2)/2$ $R_A = Pv(3-v^2)/2$ $R_B = Pl^2(3-ul)/2$
4		 $M_A = \frac{3Pl}{16}$ $R_A = \frac{11P}{16}$ $R_B = \frac{5P}{16}$ $M_B = \frac{5Pl}{32}$
5		 $M_A = \frac{ql^2}{8}$ $R_A = \frac{5ql}{8}$ $R_B = \frac{3ql}{8}$
6		 $R_A = R_B = \frac{6EJ}{l^2}$ $M_A = \frac{4EJ}{l}$ $M_B = \frac{2EJ}{l}$
7		 $R_A = R_B = \frac{12EJ}{l^3}$ $M_A = M_B = \frac{6EJ}{l^2}$
8		 $R_A = R_B = \frac{P}{2}$ $M_A = M_B = \frac{Pl}{8}$

9		
10		

Порядок расчета рам методом перемещений аналогичен порядку расчета стержневых систем методом сил. При проведении кинематической проверки необходимо производить перемножение окончательной эпюры изгибающих моментов с единичной эпюрой, построенной в любой основной системе метода сил.

Пример решения задачи № 7. Расчет рамы со смещаемыми узлами

Расчетная схема рамы представлена на рис. 58.

Число жестких узлов $n_y = 1$ (узел C), число независимых линейных перемещений определим по шарнирной схеме (рис. 59).

$$n_n = 2V - C - C_0 = 2 \cdot 6 - 5 - 6 = 1.$$

Степень кинематической неопределенности

$$n = n_y + n_n = 1 + 1 = 2.$$

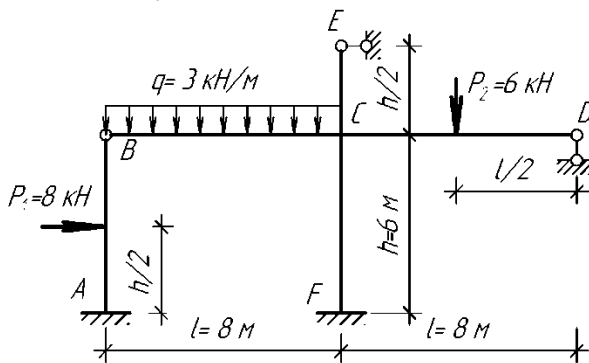


Рис. 58. Расчетная схема рамы

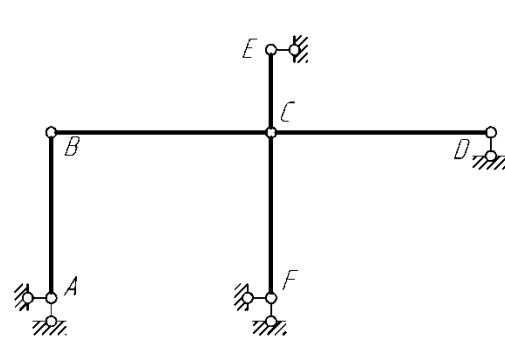
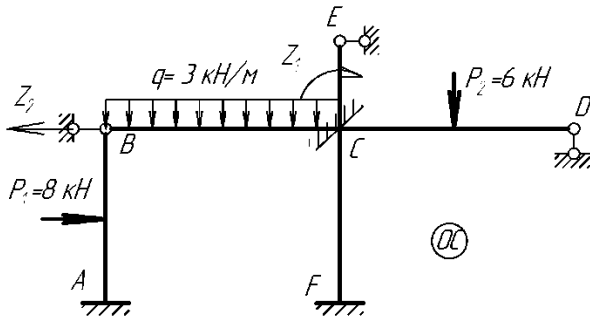


Рис. 59. Шарнирная схема рамы

Заданная рама два раза кинематически неопределима. Образует основную систему, введя в узел C заделку, препятствующую возможному угловому смещению, в дополнительной связи возникает реакция, которую обозначим через Z_1 . Вторая дополнительная связь в виде горизонтального опорного стержня будет препятствовать линейному смещению узлов рамы (рис. 60). Реакция в дополнительном опорном стержне Z_2 .



Канонические уравнения метода перемещений запишутся в виде

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1P} = 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P} = 0. \end{cases}$$

Рис. 60. Основная система метода перемещений

Для определения коэффициентов при неизвестных строим единичные эпюры. Первую эпюру получаем, придав единичное угловое перемещение в первую связь узел C (рис. 61). Изображаем деформированную схему рамы, на стержни которой со стороны растянутых волокон накладываем эпюры моментов балок из табл. 12 (схемы № 1 и 6). Определяем значения опорных моментов и реакций по формулам табл. 12.

Коэффициент r_{11} определяем из рассмотрения условия равенству нулю моментов в узле C : $r_{11} - EJ - \frac{3}{8}EJ - \frac{2}{3}EJ - \frac{3}{8}EJ = 0$, $r_{11} = \frac{29}{12}EJ$.

Коэффициент r_{21} определяем из условия равенства нулю горизонтальных сил: $r_{21} + \frac{1}{3}EJ - \frac{1}{6}EJ = 0$, $r_{21} = -\frac{1}{6}EJ$.

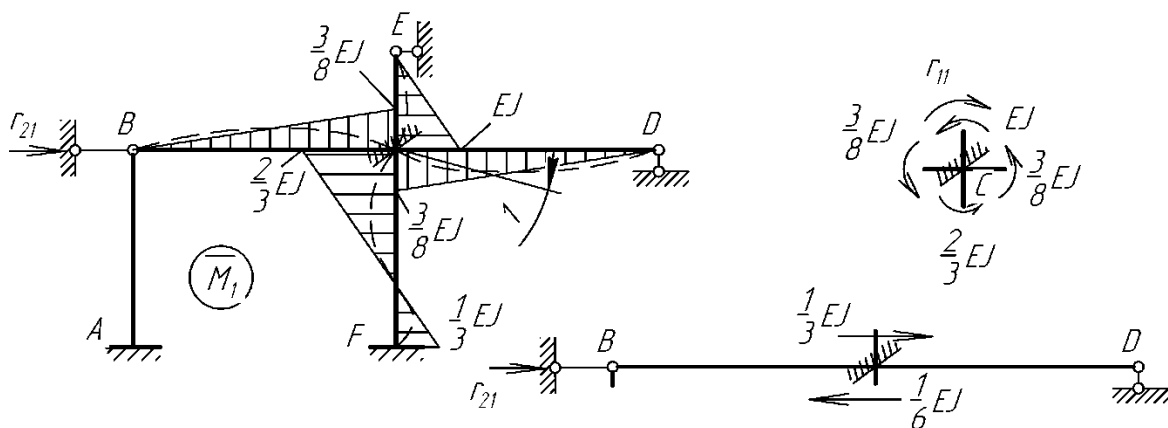


Рис. 61. Схема определения коэффициентов r_{11} и r_{21}

Вторую единичную эпюру получим, если придадим единичное линейное перемещение во второй связи (рис. 62). Так же изображаем деформированную схему рамы, на стержни которой со стороны растянутых волокон накладываем эпюры из табл. 12 (балки № 2 и 7). Значения опорных моментов и реакций определяем по формулам табл. 12.

Коэффициент r_{22} определяем, рассматривая условие равенства нулю горизонтальных сил: $r_{22} - \frac{3}{6^3} EJ - \frac{3}{3^3} EJ - \frac{12}{6^3} EJ = 0$, $r_{22} = \frac{29}{72} EJ$.

Коэффициент r_{12} определим, рассматривая условие равенства нулю моментов в узле C: $r_{12} + \frac{1}{3} EJ - \frac{1}{6} EJ = 0$, $r_{12} = -\frac{1}{6} EJ$.

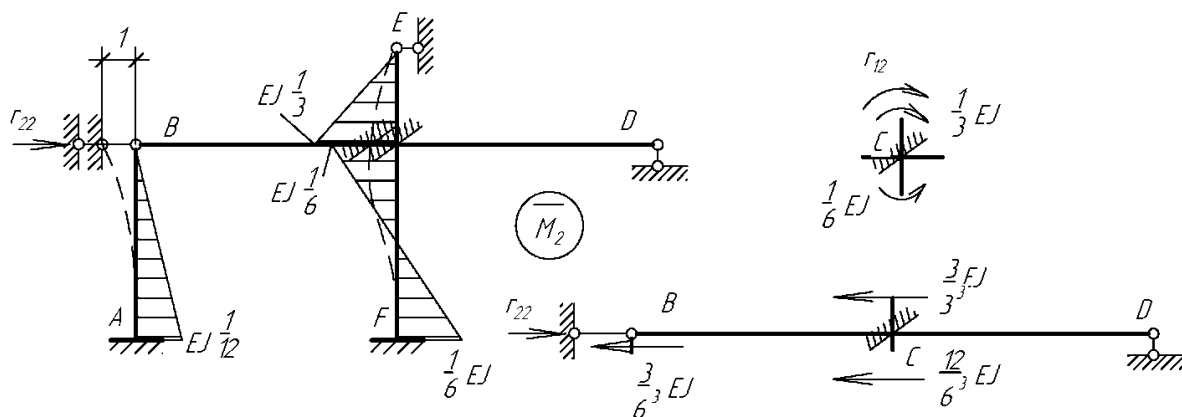


Рис. 62. Схема определения коэффициентов r_{12} и r_{22}

Для определения свободных членов канонического уравнения необходимо построить в основной системе эпюры от заданных внешних сил (рис. 63).

Из табл. 12 переносим эпюры моментов от силового воздействия (балки № 4 и 5), определяем численные значения опорных моментов и реакций.

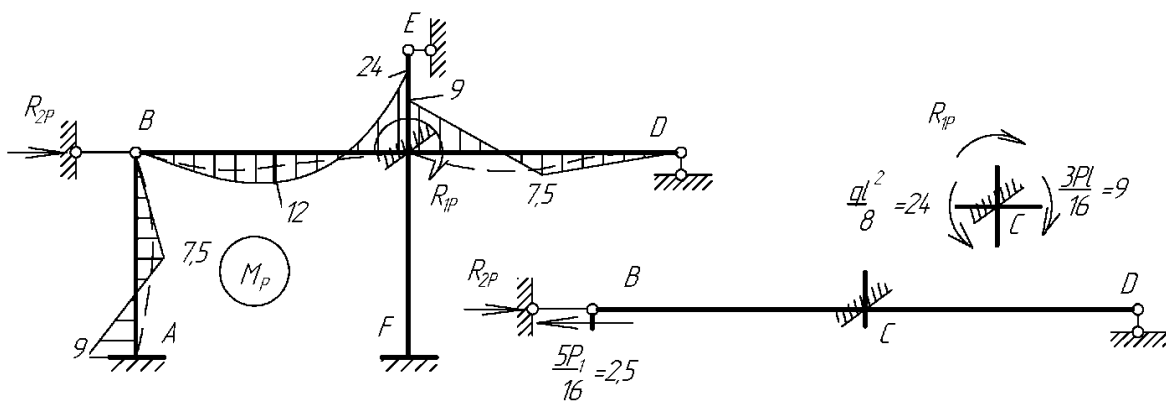


Рис. 63. Схема определения свободных членов R_{1p} и R_{2p}

Рассматриваем равновесие узла C , определяем R_{1p} :

$$\sum M_C = 0, R_{1p} + 9 - 24 = 0, R_{1p} = 15.$$

Рассматриваем условие равновесие горизонтальных сил:

$$\sum x = 0, -2,5 + R_{2p} = 0, R_{2p} = 2,5.$$

Найденные значения коэффициентов подставляем в каноническое уравнение метода перемещений, решая систему уравнений определяем неизвестные Z_1 и Z_2 .

$$\begin{cases} \frac{29}{12} EJZ_1 - \frac{1}{6} EJZ_2 + 15 = 0, \\ -\frac{1}{6} EJZ_1 + \frac{29}{72} EJZ_2 + 2,5 = 0. \end{cases} \quad Z_1 = -\frac{7,65}{EJ}, \quad Z_2 = -\frac{21}{EJ}.$$

Строим «исправленные» эпюры, для этого ординаты единичных эпюр умножаем на найденные значения Z_1 и Z_2 (рис. 64, а и б).

Для получения окончательной эпюры изгибающих моментов необходимо произвести сложение «исправленных» эпюр и грузовой эпюры, построенной в основной системе метода перемещений $M_{ок} = \bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 + M_p$. Окончательная эпюра моментов в заданной системе представлена на рис. 64, в.

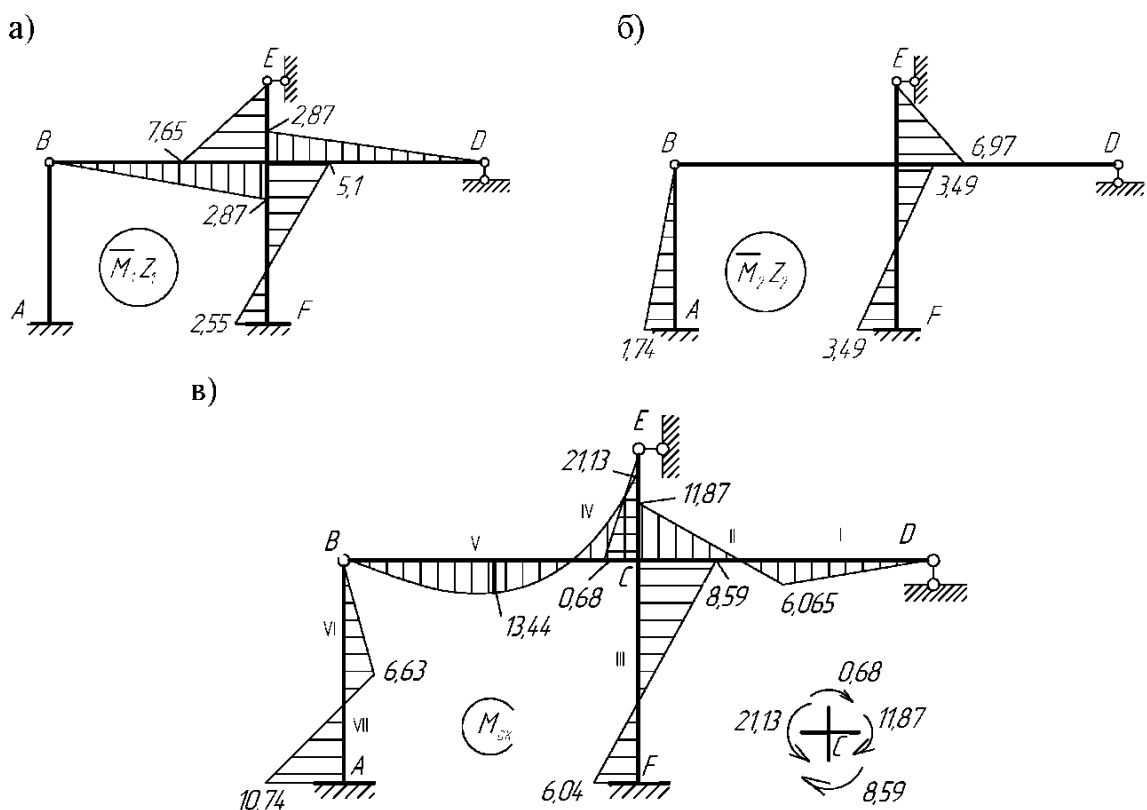


Рис. 64. Схема построения окончательной эпюры изгибающих моментов в заданной системе

Условие равенства нулю моментов в узлах рамы является необходимым условием правильности построения окончательной эпюры моментов. В нашем случае $\sum M_c = 0,68 + 11,87 + 8,59 - 21,13 = -0,01$. Такое отклонение допустимо, т. к. относительная погрешность составляет 0,02 %.

Произведем кинематическую проверку. Для этого построим единичную эпюру изгибающих моментов в основной системе метода сил и перемножим ее с окончательной эпюрой моментов в заданной системе с использованием таблицы выражений интеграла Мора для различных сочетаний эпюр (табл. 8).

Статическая неопределенность заданной системы:

$n = 2Ш + C_0 - 3D = 2 + 8 - 3 \cdot 2 = 4$. Следовательно заданная рама имеет 4 «лишних» связи.

Для построения суммарной единичной эпюры удаляем «лишние» связи, их действие заменяем единичными усилиями и получаем основную систему метода сил (рис. 65).

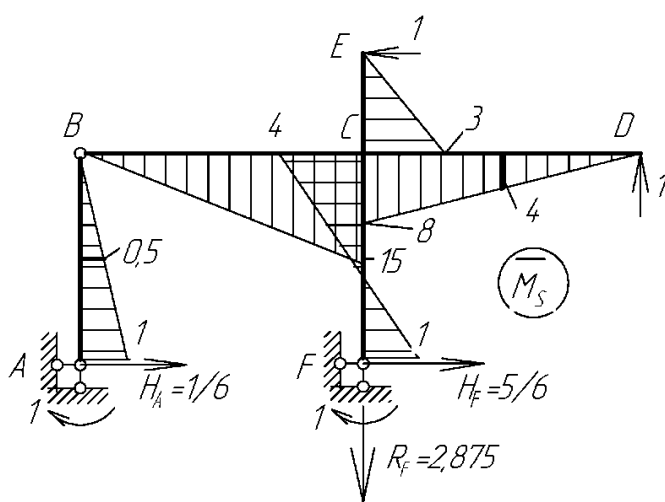


Рис. 65. Суммарная единичная эпюра в основной системе метода сил

$$\begin{aligned}
 \sum \int \frac{\bar{M}_s \cdot M_{ок}}{EJ} &= \frac{1}{6EJ} [10,74(-2 \cdot 1 - 0,5) - 6,63(-0,5 \cdot 2 - 1)] \cdot 3 + \frac{1}{3EJ} \cdot 0,5 \cdot 6,63 \cdot 3 + \\
 &+ \frac{1}{3EJ} \cdot 21,13 \cdot 15 \cdot 8 - \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 15 \cdot 8 - \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 0,68 \cdot 3 + \frac{1}{6EJ} [8,59(-4 \cdot 2 + 1) - 6,04(2 \cdot 1 - 4)] \cdot 6 + \\
 &+ \frac{1}{6EJ} [11,87(-8 \cdot 2 - 4) - 6,065(-4 \cdot 2 - 8)] \cdot 4 + \frac{1}{3EJ} 6,065 \cdot 4 \cdot 4 = \\
 &= -\frac{993,615}{EJ} + \frac{995,662}{EJ} = \frac{2,047}{EJ}.
 \end{aligned}$$

При перемножении эпюр по формуле $\sum \int \frac{\bar{M}_s \cdot M_{ок}}{EJ}$ грузовую эпюру изгибающих моментов на участке BC предварительно раслоили на треугольную эпюру и параболу (рис. 66).

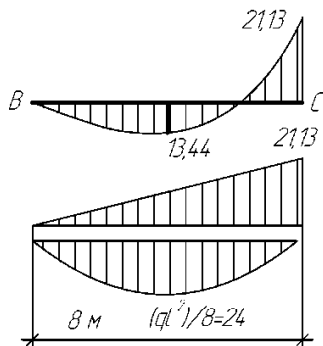


Рис. 66. Схема раслоения эпюры

Относительная погрешность составила:
 $\varepsilon = \frac{|A-B|}{\min\{A, B\}} \cdot 100\% = \frac{2,047}{993,615} \cdot 100\% \approx 0,2\%$,
 что допускается.

По окончательной эпюре изгибающих моментов строим эпюру поперечных сил по участкам (рис. 67).

$$Q_I = \frac{0 - 6,065}{4} = -1,52 \text{ кН.}$$

$$Q_{II} = \frac{6,065 - (-11,87)}{4} = 4,48 \text{ кН.}$$

$$Q_{III} = \frac{6,04 - (-8,59)}{6} = 2,44 \text{ кН.} \quad Q_{IV} = \frac{0 - (-0,68)}{3} = 0,23 \text{ кН.}$$

$$Q_V^{up} = \frac{-21,13 - 0}{8} - \frac{3 \cdot 8}{2} = -14,64 \text{ кН.} \quad Q_V^{down} = \frac{-21,13 - 0}{8} + \frac{3 \cdot 8}{2} = 9,36 \text{ кН.}$$

$$Q_{VI} = \frac{0 - 6,63}{3} = -2,21 \text{ кН.} \quad Q_{VII} = \frac{6,63 - (-10,74)}{3} = 5,79 \text{ кН.}$$

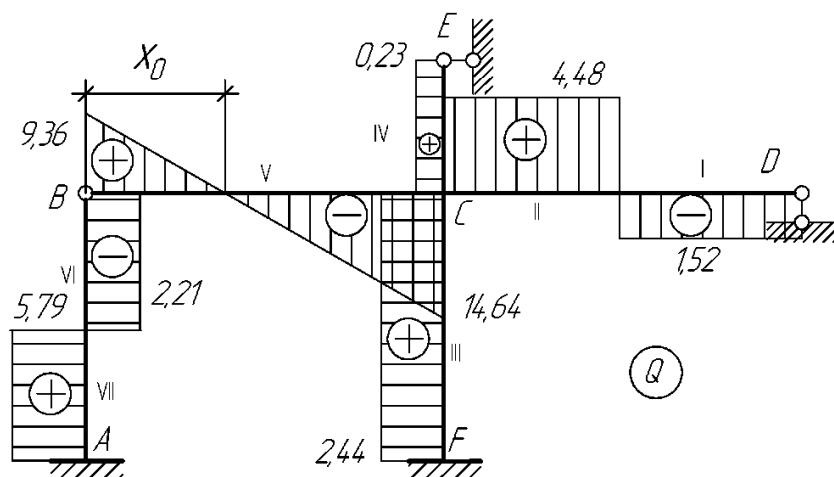


Рис. 67. Эпюра поперечных сил

Поперечная сила обращается в нуль на участке рамы BC при

$$x_0 = \frac{9,36}{q} = \frac{9,36}{3} = 3,12 \text{ м.}$$

В этом случае экстремальное значение изгибающего момента составит:

$$M_{\max} = 9,36 \cdot 3,12 - \frac{3 \cdot 3,12^2}{2} = 14,6 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

По эпюре поперечных сил построим эпюру продольных сил, используя метод вырезания узлов (рис. 68).

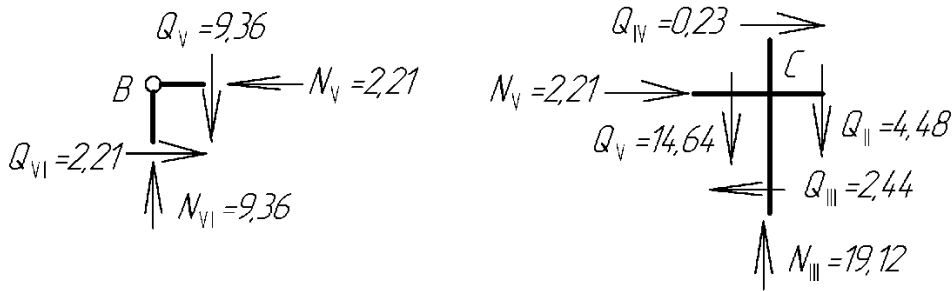


Рис. 68. Схема вырезания узлов для определения продольных сил

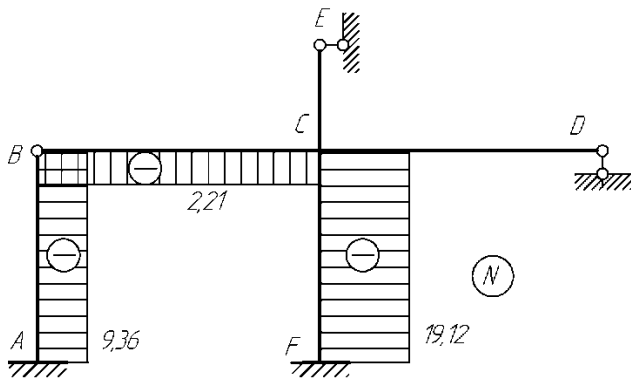


Рис. 69. Эпюра продольных сил

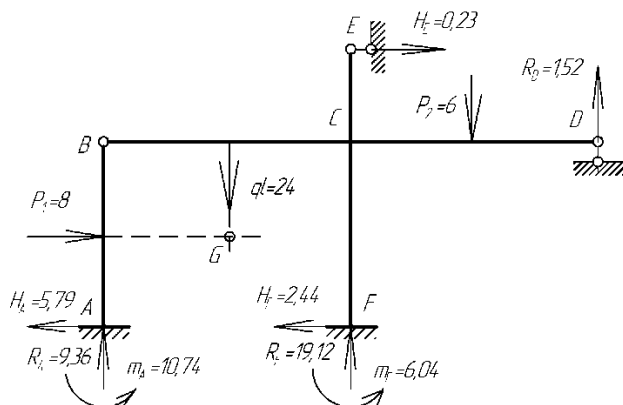


Рис. 70. Схема сил, приложенных к раме

Эпюра продольных сил представлена на рис. 69.

Приложим к раме все внешние нагрузки в том числе и реакции внешних связей (рис. 70).

Произведем статическую проверку.

$$\sum y = 0.$$

$$R_A + R_F + R_D - ql - P_2 = 0.$$

$$9,36 + 19,12 + 1,52 - 24 - 6 = 0.$$

$$\sum x = 0.$$

$$-H_A + P_1 + H_E - F = 0.$$

$$-5,79 + 8 + 0,23 - 2,44 = 0.$$

Проверки по силам выполняются.

$$\sum m_G = 0.$$

$$m_A + m_F - H_A \cdot 3 - R_A \cdot 4 - H_F \cdot 3 +$$

$$+ R_F \cdot 4 - H_E \cdot 6 - P_2 \cdot 8 + R_D \cdot 12 = 0$$

$$10,74 + 6,04 - 5,79 \cdot 3 - 9,36 \cdot 4 - 2,44 \cdot 3 + 19,12 \cdot 4 - 0,23 \cdot 6 - 6 \cdot 8 + 1,52 \cdot 12 = \\ = 111,5 - 111,51 = -0,01.$$

Относительная погрешность составляет примерно 0,01 %, что допускается.

Пример расчета рамы без линейного смещения узлов.

Схема рамы представлена на рис. 71. Число угловых перемещений равно числу жестких узлов $n_y = 2$. Число независимых линейным перемещений определяем по шарнирной схеме (рис. 72).

$n_x = 2Y - C - C_0 = 2 \cdot 6 - 5 - 7 = 0$. Таким образом, степень кинематической неопределимости рамы составляет 2. Для предотвращения возможных угловых перемещений в жесткие узлы (B и C) устанавливаем жесткие заделки и получаем основную систему метода перемещений (рис. 73).

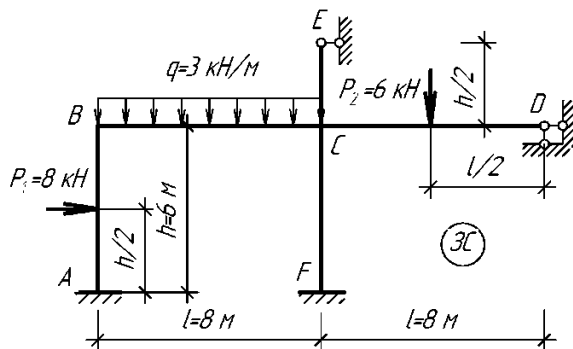


Рис. 71. Заданная расчетная схема рамы

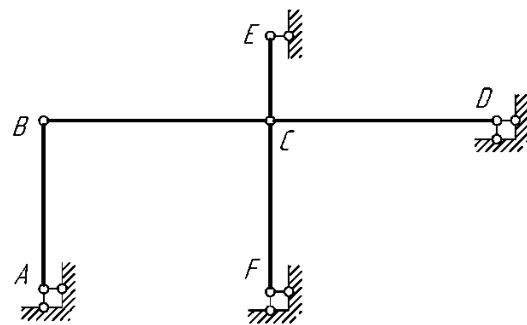


Рис. 72. Шарнирная схема рамы

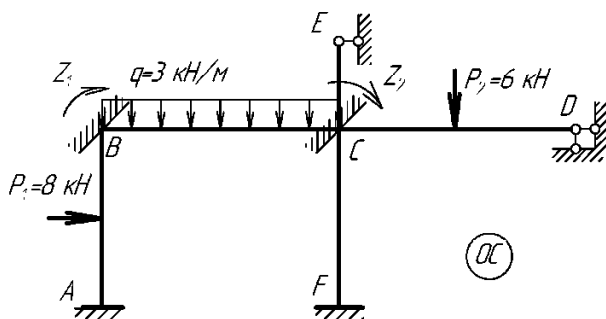


Рис. 73. Основная схема метода перемещений

В дополнительных связях возникают реакции Z_1 и Z_2 , которые определим из канонических уравнений метода перемещений:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} = 0, \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} = 0. \end{cases}$$

Для определения коэффициентов при неизвестных необходимо построить единичные эпюры, которые получаем путем последовательного введения единичного углового перемещения в наложенные связи.

Первая единичная эпюра (рис. 74) получена путем введения единичного углового смещения в первой связи. На деформированную схему рамы накладываем эпюры из табл. 12 (балка № 6).

Условие равновесия узла B :

$$\sum M_B = 0, r_{11} - \frac{EJ}{2} - \frac{2EJ}{3} = 0, r_{11} = \frac{7EJ}{6}.$$

Условие равновесия узла C :

$$\sum M_C = 0, r_{21} - \frac{EJ}{4} = 0, r_{21} = \frac{EJ}{4}.$$

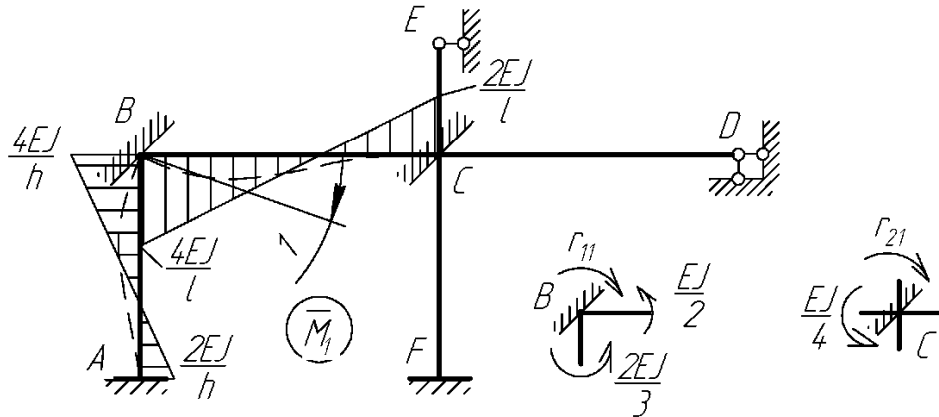


Рис. 74. Схема определения коэффициентов r_{11} и r_{21}

Придаем единичное угловое перемещение во второй связи, строим вторую единичную эпюру, используя схемы балок из табл. 12 (рис. 75).

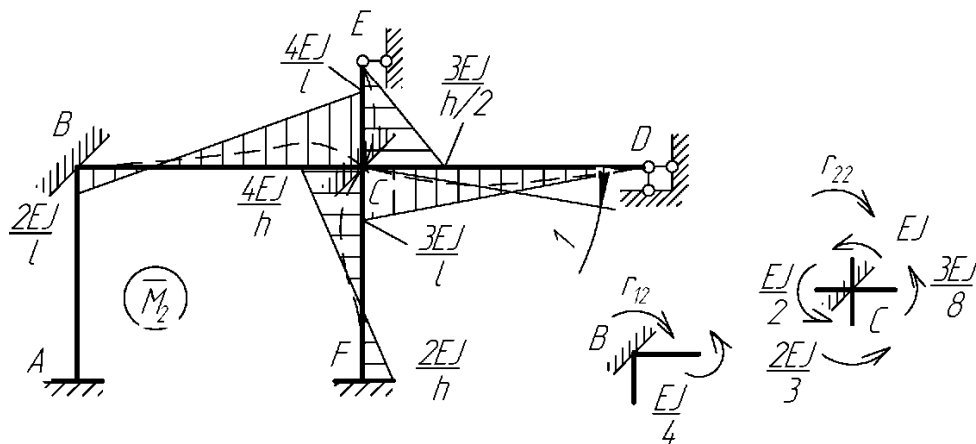


Рис. 75. Схема определения коэффициентов r_{22} и r_{12}

Равновесие узла B :

$$\sum M_B = 0, r_{12} - \frac{EJ}{4} = 0, r_{12} = \frac{EJ}{4}.$$

Равновесие узла C:

$$\sum M_C = 0, r_{22} - EJ - \frac{3EJ}{8} - \frac{2EJ}{3} - \frac{EJ}{2} = 0, r_{22} = \frac{61EJ}{24}.$$

В основной системе строим эпюры изгибающих моментов от заданной внешней нагрузки и получаем грузовую эпюру (рис. 76). Рассматривая равновесие узлов определяем свободные члены канонических уравнений.

Равновесие узла B:

$$\sum M_B = 0, R_{1P} + 16 - 6 = 0, R_{1P} = -10.$$

Равновесие узла C:

$$\sum M_C = 0, R_{2P} + 9 - 16 = 0, R_{2P} = 7.$$

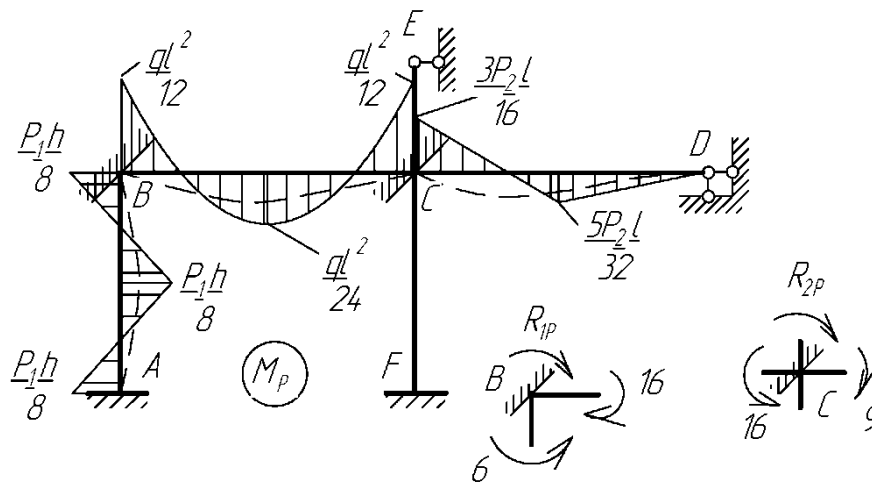


Рис. 76. Схема определения свободных членов R_{1P} и R_{2P}

Подставляем найденные коэффициенты и свободные члены в каноническое уравнение метода перемещений и определяем неизвестные Z_1 и Z_2 .

$$\begin{cases} \frac{7EJ}{6} Z_1 + \frac{EJ}{4} Z_2 - 10 = 0, \\ \frac{EJ}{4} Z_1 + \frac{61EJ}{24} Z_2 + 7 = 0. \end{cases} \quad Z_1 = \frac{9,36}{EJ}, \quad Z_2 = -\frac{3,67}{EJ}.$$

Строим «исправленные» эпюры, умножив ординаты единичных эпюр на соответствующие значения Z_1 и Z_2 (рис. 77).

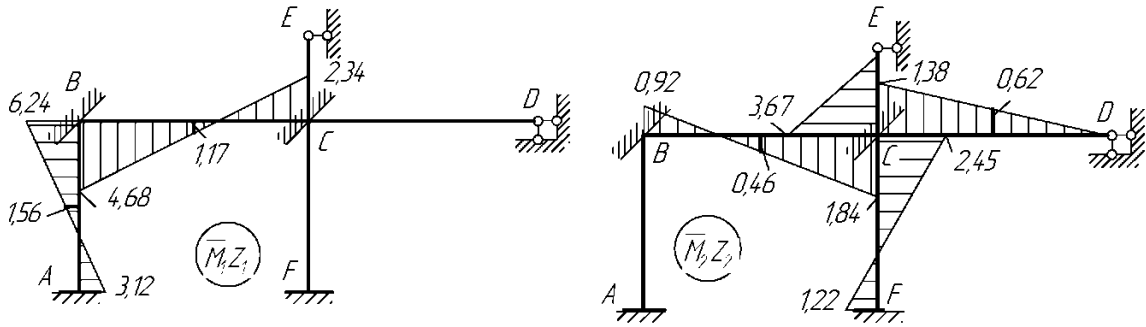


Рис. 77. «Исправленные» эпюры моментов

Производим суммирование «исправленных» эпюр и грузовой эпюры моментов $\overline{M}_1 Z_1 + \overline{M}_2 Z_2 + M_p = M_{ок}$.

Получаем окончательную эпюру изгибающих моментов в заданной системе (рис. 78). Необходимое условие – равенство нулю моментов сил в узлах рамы выполнено.

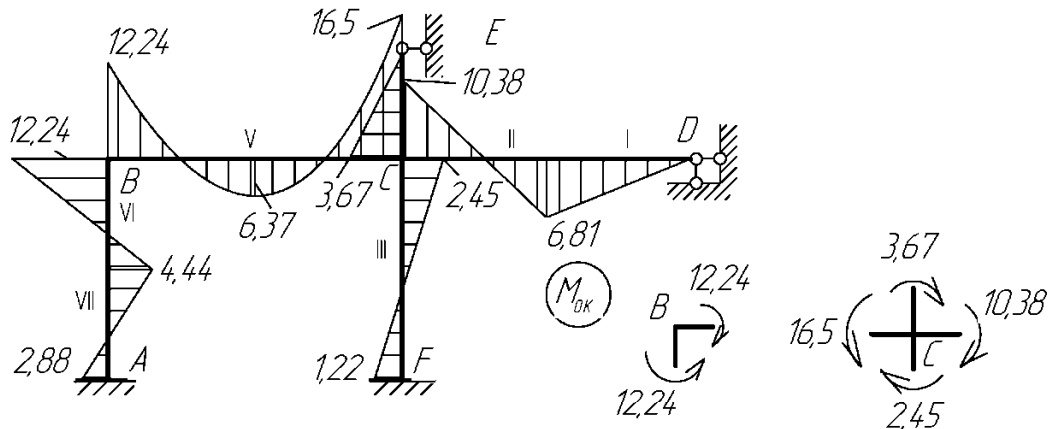


Рис. 78. Окончательная эпюра изгибающих моментов в заданной системе

Произведем кинематическую проверку. Для этого построим единичную эпюру изгибающих моментов в основной системе метода сил и перемножим ее с окончательной эпюрой моментов в заданной системе с использованием таблицы выражений интеграла Мора для различных сочетаний эпюр (табл. 8).

Статическая неопределимость заданной системы:

$n = 2III + C_0 - 3D = 2 \cdot 0 + 9 - 3 \cdot 1 = 6$. Следовательно заданная рама имеет 6 «лишних» связей.

Для построения суммарной единичной эпюры удаляем «лишние» связи, их действие заменяем единичными усилиями и получаем основную систему метода сил (рис. 79).

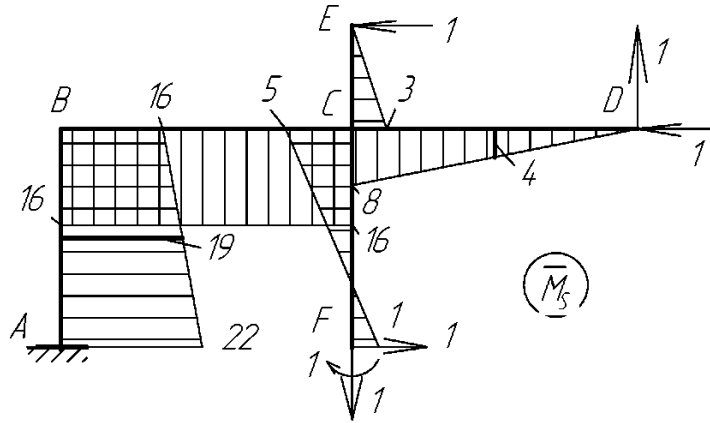


Рис. 79. Суммарная единичная эпюра в основной системе метода сил

$$\begin{aligned} \sum \int \frac{\bar{M}_s \cdot M_{ок}}{EJ} &= \frac{1}{6EJ} [4,44(2 \cdot 19 + 22) - 2,88(2 \cdot 22 + 19)] \cdot 3 + \\ &+ \frac{1}{6EJ} [4,44(2 \cdot 19 + 16) - 12,24(2 \cdot 16 + 19)] \cdot 3 - \frac{(12,24 + 16,5)}{2EJ} \cdot 16 \cdot 8 + \frac{2}{3EJ} \cdot 24 \cdot 16 \cdot 8 - \\ &- \frac{1}{3EJ} \cdot 3 \cdot 3,67 \cdot 3 + \frac{1}{6EJ} [2,45(-2 \cdot 5 + 1) - 1,22(2 \cdot 1 - 5)] \cdot 6 + \\ &+ \frac{1}{6EJ} [10,38(-2 \cdot 8 - 4) - 6,8(-2 \cdot 4 - 8)] \cdot 4 + \frac{1}{3EJ} \cdot 6,81 \cdot 4 \cdot 4 = \frac{2126,8}{EJ} - \frac{2126,75}{EJ} = \frac{0,05}{EJ}. \end{aligned}$$

При перемножении эпюр по формуле $\sum \int \frac{\bar{M}_s \cdot M_{ок}}{EJ}$ грузовую эпюру изгибающих моментов на участке BC предварительно расслоили на трапецию и параболу (рис. 80).

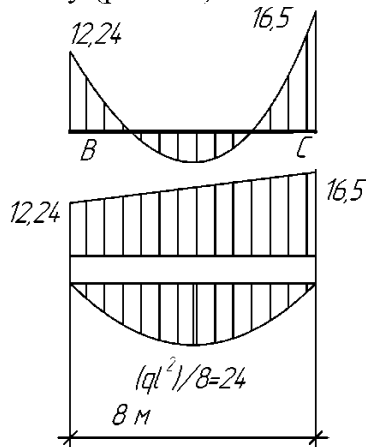


Рис. 80. Схема расслоения эпюры

Относительная погрешность составила:

$$\varepsilon = \frac{|A - B|}{\min\{A, B\}} \cdot 100\% = \frac{0,05}{2126,75} \cdot 100\% \approx 0,002\%,$$

что допускается.

По окончательной эпюре изгибающих моментов строим эпюру поперечных сил по участкам (рис. 81).

$$Q_I = \frac{0 - 6,81}{4} = -1,7 \text{ кН.}$$

$$Q_{II} = \frac{6,81 - (-10,38)}{4} = 4,3 \text{ кН.}$$

$$Q_{III} = \frac{1,22 - (-2,45)}{6} = 0,61 \text{ кН.} \quad Q_{IV} = \frac{0 - (-3,67)}{3} = 1,22 \text{ кН.}$$

$$Q_V^{пр} = \frac{-16,5 - (-12,24)}{8} - \frac{3 \cdot 8}{2} = -12,53 \text{ кН.}$$

$$Q_V^{лев} = \frac{-16,5 - (-12,24)}{8} + \frac{3 \cdot 8}{2} = 11,47 \text{ кН.}$$

$$Q_{VI} = \frac{-12,24 - 4,44}{3} = -5,56 \text{ кН.} \quad Q_{VI} = \frac{4,44 - (-2,88)}{3} = 2,44 \text{ кН.}$$

На участке BC поперечная сила обращается в нуль, для сечения, расположенного на расстоянии $x_0 = 11,47/q = 11,47/3 = 3,8$ м экстремальное значение изгибающего момента составит:

$$M_{max} = 11,47 \cdot 3,8 - q \cdot 3,8^2 / 2 - 12,24 = 9,69 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

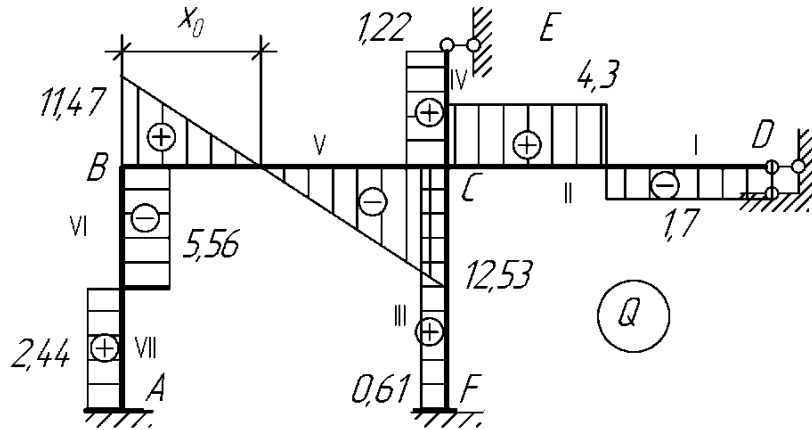


Рис. 81. Эпюра поперечных сил

Методом вырезания узлов (рис. 82) и уравнивая силы, определим значения продольных сил. Эпюра продольных сил представлена на рис. 83.

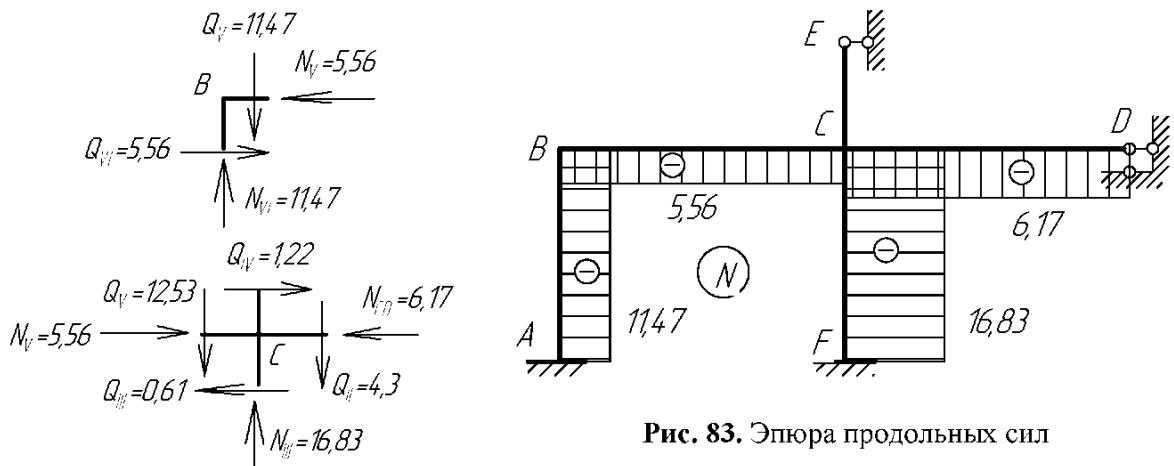


Рис. 83. Эпюра продольных сил

Рис. 82. Схема вырезания узлов рамы

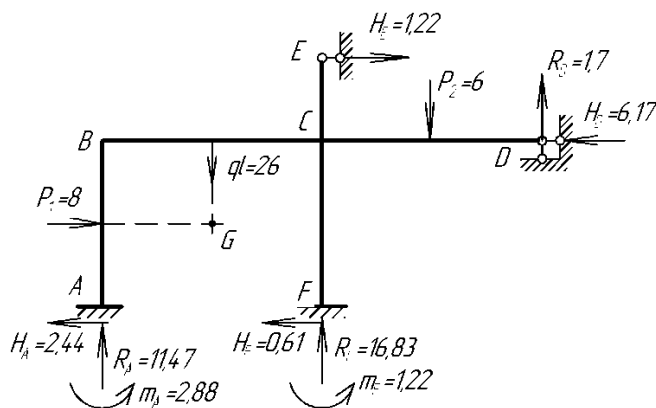


Рис. 84. Схема рамы с внешними силами

Прикладываем к раме все внешние силы (рис. 84) и проводим статическую проверку.

$$\sum y = 0.$$

$$R_A + R_F + R_D - P_2 - ql = 11,47 + 16,83 + 1,7 - 6 - 24 = 0.$$

$$\sum x = 0.$$

$$-H_A - H_F + P_1 + H_E - H_D = -2,44 - 0,61 + 8 + 1,22 - 6,17 = 0.$$

$$\sum M_G = 0.$$

$$\begin{aligned} H_E \cdot 6 + P_2 \cdot 8 - R_D \cdot 12 - H_D \cdot 3 - m_F - R_F \cdot 4 + R_A \cdot 4 + H_F \cdot 3 + H_A \cdot 3 - m_A = \\ = 1,22 \cdot 6 + 6 \cdot 8 - 1,7 \cdot 12 - 6,17 \cdot 3 - 1,22 - 16,83 \cdot 4 + 11,47 \cdot 4 + 0,61 \cdot 3 + 2,44 \cdot 3 - 2,88 = \\ = 110,35 - 110,33 = 0,02 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Относительная погрешность при проверке выполнимости условия равенству нулю моментов сил относительно произвольной точки G составляет примерно 0,02 %.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Анохин, Н. Н. Строительная механика в примерах и задачах [Текст] : учеб. пособие для студ. вузов, обучающихся по строит. спец. / Н. Н. Анохин. – 2-е изд., доп. и перераб. – М. : АСВ, 2007. Ч. 1. Статически определимые системы. – 335 с.
2. Анохин, Н. Н. Строительная механика в примерах и задачах [Текст] : учеб. пособие для студ. вузов, обучающихся по строит. спец. / Н. Н. Анохин. – 2-е изд., доп. и перераб. – М. : АСВ, 2007. Ч. 2. Статически неопределимые системы. – 464 с.
3. Дарков, А. В. Строительная механика [Текст] : учебник / А. В. Дарков, Н. Н. Шапошников. – 11-е изд., стер. – СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2008. – 656 с.
4. Саргсян, А. Е. Строительная механика. Основы теории с примерами расчетов [Текст] : учебник для вузов / А. Е. Саргсян. – СПб., 2001. – 320 с.
5. Саргсян, А. Е. Строительная механика. Основы теории с примерами расчетов [Текст] : учебник для вузов / А. Е. Саргсян. – М.: Высш. шк., 2000. – 431 с.