

**ОПД.Р.03 СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА  
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ.  
МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ И  
САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ**

Методические указания

Методические указания содержат материалы для проведения практических занятий и самостоятельной работы студентов по дисциплине «Численные методы расчета строительных конструкций» по направлению 270800 «Строительство» профиля подготовки «Промышленное и гражданское строительство», «Городское строительство и хозяйство» всех форм обучения.

## ВВЕДЕНИЕ

Численные методы расчета строительных конструкций изучаются студентами в VII семестре. Цель дисциплины – дать общие сведения об использовании существующих программных комплексов и положенных в их основу методов расчета стержневых систем, пластин и оболочек. В первой части дисциплины изучаются методы конечных разностей (МКР), Ритца, Бубнова–Галеркина на примерах решения задач прочности, жесткости и устойчивости [1 – 3]. Основы метода конечных элементов (МКЭ) [4 – 6] излагаются во второй части курса.

Общие сведения о программном комплексе SCAD [7, 8], входящего в состав вычислительной системы SCAD Office, порядок создания расчетной модели и вывода результатов приводятся в первом разделе методических указаний.

Второй раздел содержит различные задачи для проведения практических занятий по изучению МКЭ. С помощью ПК SCAD выполняется расчет шарнирно опертой балки, фермы, плоской рамы, арки, панели, пространственной стержневой системы. На этих примерах изучаются различные приемы создания расчетной модели, порядок построения линий влияния и т. п. После расчета выполняются проверка и анализ полученных результатов.

Варианты заданий для расчетно-графической работы «Расчет стержневых систем методом конечных элементов» приводятся в третьем разделе. В первой задаче требуется часть расчетов по МКЭ выполнить вручную, во второй задаче расчет полностью производится в ПК SCAD, в том числе и при изменениях в расчетной схеме.

Указания к выполнению и оформлению расчетно-графической работы содержатся в четвертом разделе, необходимые для расчета справочные данные приводятся в приложении. При составлении вариантов использованы материалы ранее изданных методических указаний [9].

# **1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ПРОГРАММНОМ КОМПЛЕКСЕ SCAD**

ПК SCAD предназначен для расчета конструкций на прочность, жесткость, устойчивость при действии статических и динамических воздействий. В основу расчета положен метод конечных элементов. С его помощью рассчитываются плоские и пространственные стержневые системы, пластины и оболочки, мембраны, массивные тела. Также могут быть рассчитаны комбинированные системы: рамно-связевые конструкции многоэтажных зданий, пластины с ребрами, плиты на упругом основании и т. д.

Статические воздействия могут быть силовыми, температурными или заданными перемещениями отдельных точек конструкции. Динамическое нагружение задается в виде вибрационной нагрузки от технологического оборудования, пульсации ветра, ударных и сейсмических воздействий. Рассчитываемые системы могут иметь произвольные очертания, различные ослабления (вырезы) и условия закрепления. Библиотека конечных элементов содержит большое количество различных элементов.

По результатам расчета осуществляется выбор невыгодных комбинаций нагрузок, проверка или подбор поперечных сечений стержней.

## **Подготовка исходных данных**

Исходные данные задаются в режиме диалога при помощи графического препроцессора. Файл с исходными данными, имеющий расширение spr (сокращение от Scad PProject) формируется автоматически. Предусмотрена возможность подготовки исходных данных в виде текстового файла с расширением txt, в том числе и для обмена информацией с программными комплексами Lira, Stark ES.

Для подготовки исходных данных необходимо рассчиты-

ваемую задачу разбить на узлы и конечные элементы. Элементы, имеющие одинаковые жесткостные характеристики, объединяют в один тип жесткости.

Расчетная схема располагается в правой декартовой системе координат (рис. 1.1, *а*). Местная система координат для стержневого КЭ имеет следующую ориентацию: ось  $x_1$  направлена от начала стержня к его концу, а оси  $y_1$  и  $z_1$  являются главными центральными осями инерции сечения (рис. 1.1, *б*). Если одна из главных осей инерции сечения не параллельна плоскости  $xOy$ , задается угол чистого вращения – угол поворота главных центральных осей инерции сечения.

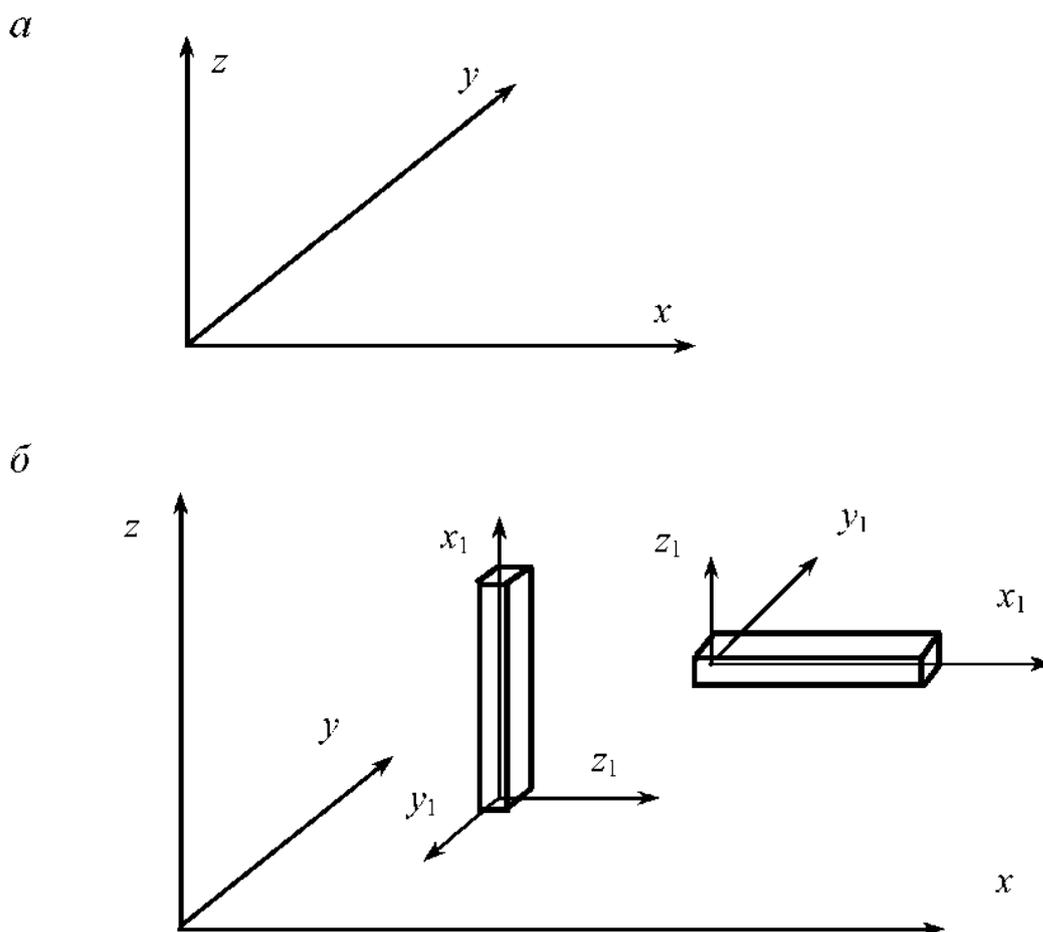


Рис. 1.1

Координаты узлов задаются в общей системе координат. Предусмотрена возможность задания узлов по дуге окружности, с использованием повторителей и т. п.

Для пространственной схемы каждый узел системы имеет шесть степеней свободы, которые нумеруются следующим образом:

- 1 – линейное перемещение вдоль оси  $x$ ;
- 2 – линейное перемещение вдоль оси  $y$ ;
- 3 – линейное перемещение вдоль оси  $z$ ;
- 4 – поворот вокруг оси  $x$ ;
- 5 – поворот вокруг оси  $y$ ;
- 6 – поворот вокруг оси  $z$ .

Шарниры используются для описания прикрепления стержней к узлам в виде устранения линейных или угловых связей по осям местной системы координат.

Для стержневых КЭ указываются:

$EA$  – жесткость на растяжение–сжатие (кН);

$EJ_y$  – жесткость на изгиб относительно оси  $y_1$  (кН·м<sup>2</sup>);

$EJ_z$  – жесткость на изгиб относительно оси  $z_1$  (кН·м<sup>2</sup>);

$GJ_k$  – жесткость на кручение (кН·м<sup>2</sup>);

$GA_y$  – жесткость на сдвиг вдоль оси  $y_1$  (кН);

$GA_z$  – жесткость на сдвиг вдоль оси  $z_1$  (кН).

Для КЭ пластины указываются характеристики материала, толщина и вид напряженно-деформированного состояния.

В ряде случаев для заранее определенных типов сечений (такие сечения называются параметрическими) можно выбрать материал и указать размеры; в этом случае все характеристики будут вычислены программой автоматически.

Для стальных конструкций поперечное сечение может быть назначено с использованием базы данных из сортамента прокатных профилей.

Связи накладываются в общей системе координат и имеют

следующие обозначения:

$X$  – линейная связь вдоль оси  $x$ ;

$Y$  – линейная связь вдоль оси  $y$ ;

$Z$  – линейная связь вдоль оси  $z$ ;

$U_x$  – связь от поворота вокруг оси  $x$ ;

$U_y$  – связь от поворота вокруг оси  $y$ ;

$U_z$  – связь от поворота вокруг оси  $z$ .

Нагрузки в виде сосредоточенных сил, моментов прикладываются в узлы по направлениям общей системы координат или к элементам с указанием координаты сечения от начала элемента. Распределенные нагрузки прикладываются к элементам и задаются по направлениям местной или общей системы координат. Нагрузки, приложенные одновременно, относят к одному загрузению.

Положительные силы и распределенные нагрузки направлены противоположно соответствующим осям. Положительные моменты – по часовой стрелке, если смотреть с конца соответствующей оси.

Для создания и работы со сложными (и не только) расчетными схемами имеется большое количество инструментов для ввода, проверки и корректировки исходных данных, например:

копирование схемы, сборка из нескольких подсхем, объединение в группы узлов (элементов), фрагментация, масштабирование и т. д.

## Тип схемы

Тип схемы позволяет существенно упрощать ввод данных, например, для плоской рамы (балки) нет необходимости ставить опорные связи из плоскости; для фермы не нужно устанавливать шарниры по концам КЭ и т. п. Наиболее часто используемые типы схемы приведены в табл. 1.1.

Таблица 1. 1

Тип схемы	Плоскость	Количество степеней свободы	Линейные перемещения			Угловые перемещения			Система
			$x$	$y$	$z$	$x$	$y$	$z$	
1	$xOz$	2	+	-	+	-	-	-	Плоская ферма, панель
2	$xOz$	3	+	-	+	-	+	-	Плоская рама, балка, арка
3	$xOy$	3	-	-	+	+	+	-	Балочный ростверк, плита
4	-	3	+	+	+	-	-	-	Пространственная ферма (структура), массивное тело
5	-	6	+	+	+	+	+	+	Система общего вида (пространственная стержневая система, оболочка и т. п.)

### Последовательность решения задачи

1. Создать новый проект (выбрать тип схемы, задать единицы измерения для координат узлов, размеров сечений, нагрузок).

2. Подготовить расчетную схему:

- ввести координаты узлов;
- задать элементы;
- описать жесткости;
- установить опорные связи;
- задать нагрузки.

3. Произвести расчет задачи.

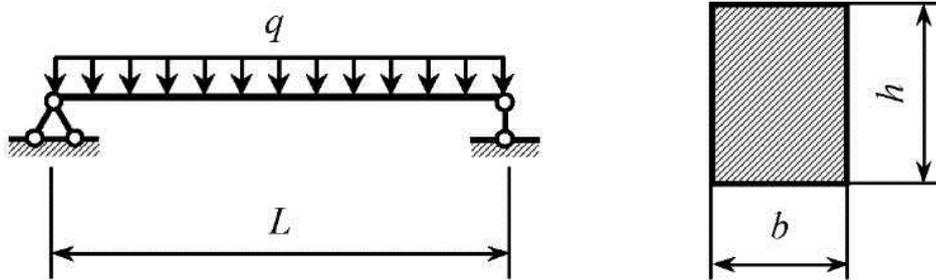
4. Вывести результаты расчета (эпюры усилий, деформированную схему, поля напряжений). Проверить полученные результаты, используя деформированную схему и известные из сопротивления материалов свойства эпюр внутренних усилий.

## 2. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

### Практическое занятие № 1

1. Для балки (рис. 2.1) построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.
2. Определить прогиб посередине пролета балки.
3. Сравнить полученные результаты (максимальный прогиб, ординаты эпюр внутренних усилий) с известными из дисциплины «Сопротивление материалов» величинами.

*Поперечное сечение*



*Рис. 2.1*

*Таблица 2.1*

### Исходные данные для расчета балки

Номер группы	$L$ , м	$b$ , см	$h$ , см	$q$ , кН/м	Материал
1	4,0	20,0	40	24	Бетон В15
2	4,5	22,5	45	22	Бетон В15
3	5,0	25,0	50	20	Бетон В15
4	5,5	27,5	55	18	Бетон В20
5	6,0	30,0	60	16	Бетон В20
6	6,5	32,5	65	14	Бетон В20
7	7,0	35,0	70	12	Бетон В22
8	8,0	40,0	80	10	Бетон В22

## Практическое занятие № 2

1. Для стальной фермы (рис. 2.2) определить усилия в стержнях от постоянной нагрузки.

2. Построить линии влияния для отмеченных стержней (подвижная нагрузка перемещается по нижнему поясу фермы).

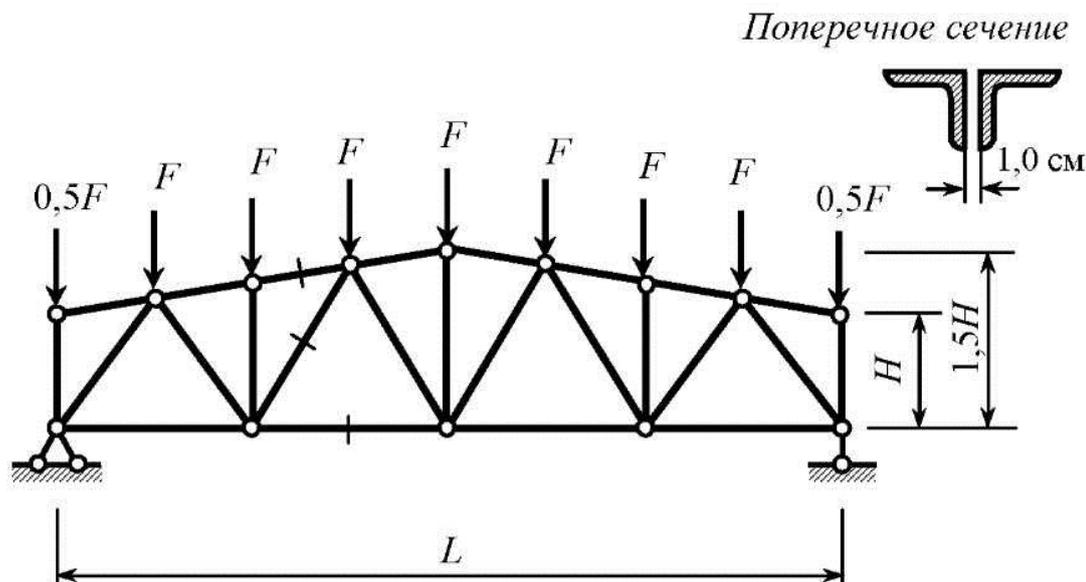


Рис. 2.2

Таблица 2.2

### Исходные данные для расчета фермы

Номер группы	$L$ , м	$H$ , м	$F$ , кН	Верхний пояс	Нижний пояс	Решетка
1	16	2,0	6,5	110×8	80×7	63×6
2	18	2,2	7,0	125×8	90×8	70×6
3	20	2,4	7,5	125×9	100×10	75×6
4	22	2,6	8,0	140×9	110×8	80×7
5	24	2,8	8,5	140×10	125×8	90×7
6	26	3,0	9,0	140×12	125×10	90×9
7	28	3,2	9,5	160×10	140×10	100×8
8	30	3,4	10,0	160×12	160×10	100×12

### Практическое занятие № 3

1. Для заданной рамы (рис. 2.3) определить усилия в стержнях и перемещения узлов.

2. Для наклонного стержня построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил.

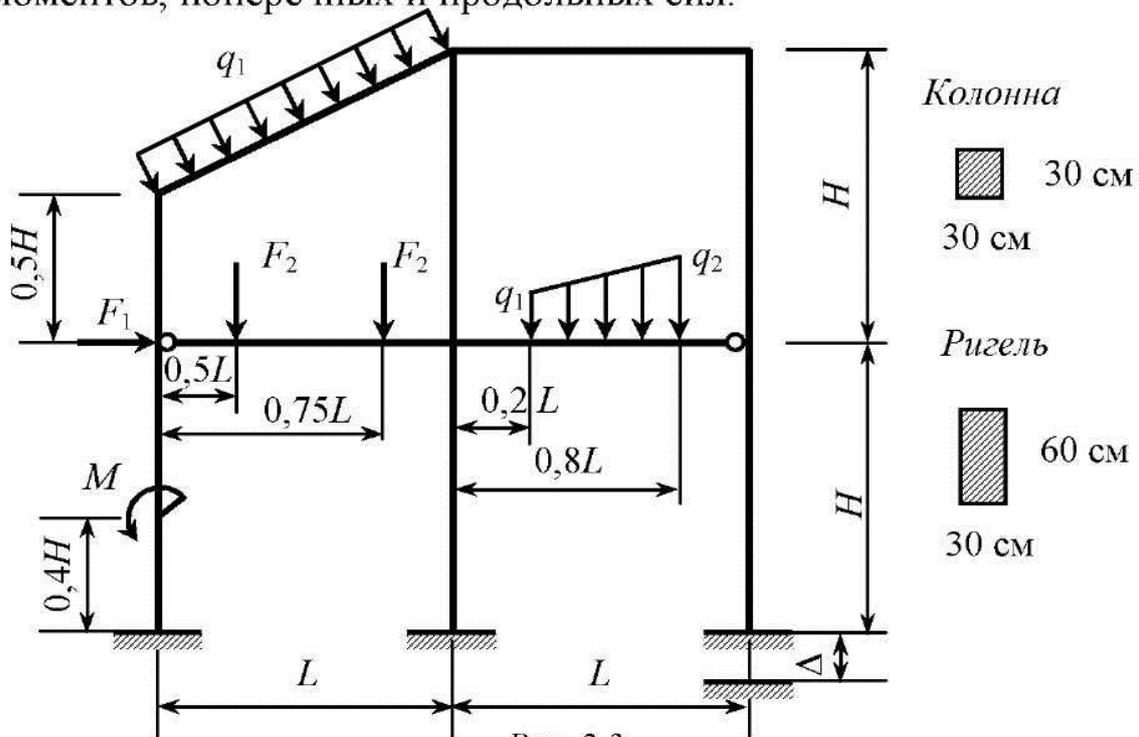


Рис. 2.3

Таблица 2.3

#### Исходные данные для расчета рамы

Номер группы	$L$ , м	$H$ , м	$F_1$ , кН	$F_2$ , кН	$q_1$ , кН/м	$q_2$ , кН/м	$M$ , кН·м	$\Delta$ , см	Материал
1	6,0	5,8	20	30	2,0	3,0	12	1,5	Бетон В15
2	6,2	6,0	18	28	2,8	3,2	10	2,0	Бетон В15
3	6,4	6,2	16	26	3,6	4,6	8	2,5	Бетон В15
4	6,6	6,4	14	24	3,4	4,4	6	3,0	Бетон В20
5	6,8	6,6	12	22	4,2	5,2	20	3,5	Бетон В20
6	7,0	6,8	10	20	5,0	7,0	18	4,0	Бетон В20
7	7,2	7,0	8	18	6,8	7,8	16	4,5	Бетон В22
8	7,4	7,2	6	16	5,6	6,6	14	5,0	Бетон В22

## Практическое занятие № 4

**Задача № 1.** Выполнить расчет деревянной арки (рис. 2.4, а), вписав в нее ломаную из восемнадцати и тридцати шести звеньев.

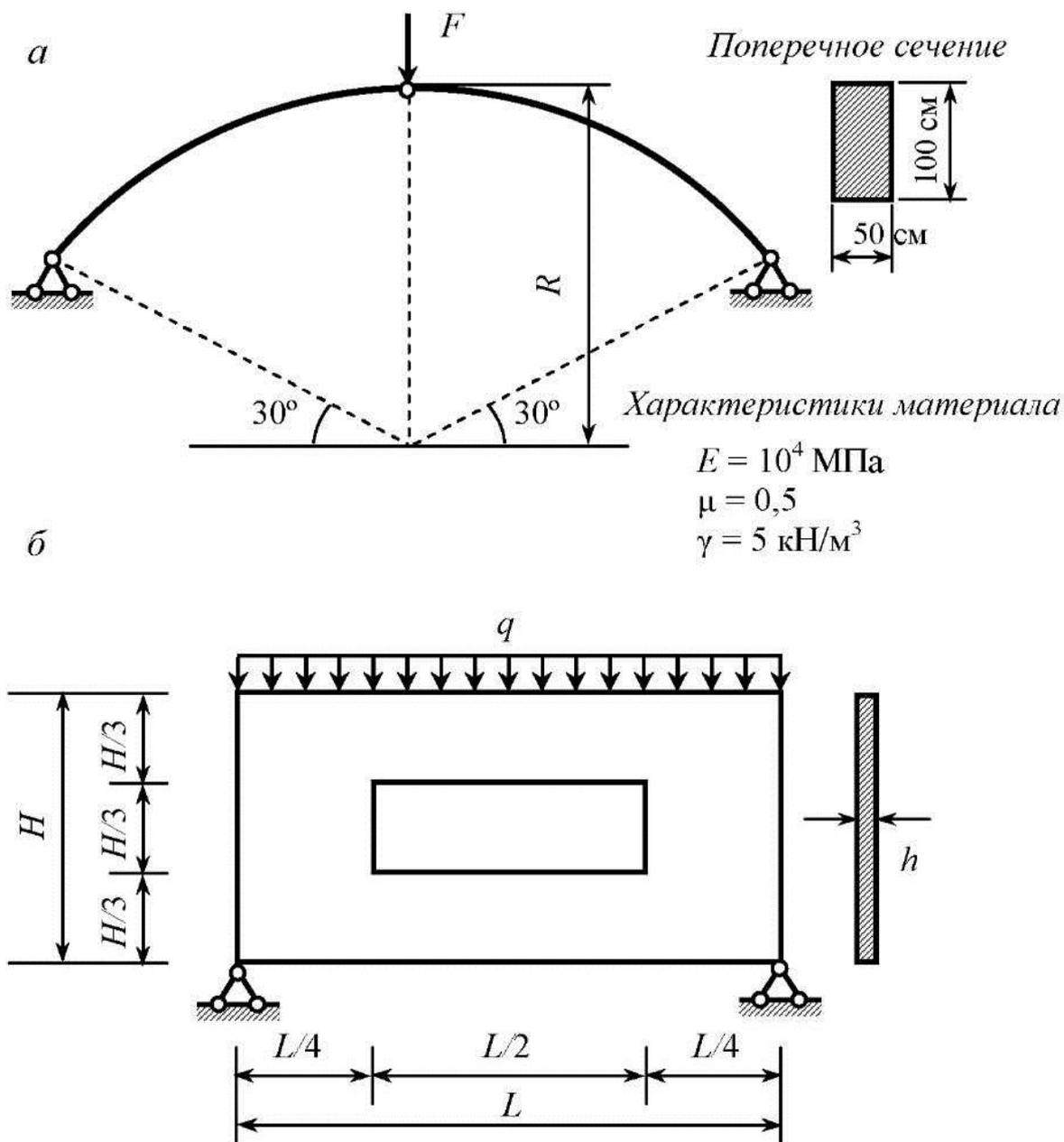


Рис. 2.4

**Задача № 2.** Определить напряжения в панели с отверстием (рис. 2.4, б), разбив ее на четыре части по горизонтали и три по вертикали (использовать для расчета прямоугольный конечный элемент балки-стенки).

*Таблица 2.4*

**Исходные данные для расчета арки и панели**

Номер группы	$R$ , м	$F$ , кН	$L$ , м	$H$ , м	$h$ , м	$q$ , кН/м	Материал панели
1	15	20	6,0	3,0	0,30	10,0	Бетон В15
2	16	18	6,2	3,1	0,32	12,0	Бетон В15
3	17	16	6,4	3,2	0,34	14,0	Бетон В15
4	18	14	6,6	3,3	0,36	16,0	Бетон В20
5	20	12	6,8	3,4	0,38	18,0	Бетон В20
6	21	10	7,0	3,5	0,40	20,0	Бетон В20
7	22	8	7,2	3,6	0,42	22,0	Бетон В22
8	23	6	7,4	3,7	0,44	24,0	Бетон В22

**Последовательность выполнения задачи № 1:**

– воспользоваться инструментом «генерация узлов по дуге» или «ввод элементов по дуге» (в этом случае одновременно задать жесткости элементов).

**Последовательность выполнения задачи № 2:**

- задать координаты четырех узлов на контуре панели;
- ввести конечный элемент пластины;
- изменить тип конечного элемента с № 44 на № 21;
- назначить жесткость конечному элементу;
- разделить панель на четыре части по горизонтали и три по вертикали;
- удалить элементы в месте отверстия;
- установить опорные связи;
- и приложить нагрузку.

## Практическое занятие № 5

1. Создать расчетную схему плоской рамы (рис. 2.5, а). Нагрузки  $q_1$ ,  $F_1$  приложить в первом нагружении.

2. Создать расчетную схему пространственной рамы. Нагрузки  $q_2$  приложить во втором нагружении (рис. 2.5, б).

3. Выполнить расчет пространственной рамы.

Таблица 2.5

### Исходные данные для расчета рамы

Номер группы	$L$ , м	$H$ , м	$F_1$ , кН	$q_1$ , кН/м	$q_2$ , кН/м	Колонна	Ригель, распорка
1	6,0	5,8	20	2,0	3,0	30К1*	30Ш1**
2	6,2	6,0	18	2,8	2,8	30К2	30Ш2
3	6,4	6,2	16	3,6	2,6	30К3	30Ш3
4	6,6	6,4	14	3,4	2,4	35К1	35Ш1
5	6,8	6,6	12	4,2	2,2	35К2	35Ш2
6	7,0	6,8	10	5,0	2,0	35К3	35Ш3
7	7,2	7,0	8	6,8	1,8	40К1	40Ш1
8	7,4	7,2	6	7,6	1,6	40К2	40Ш2

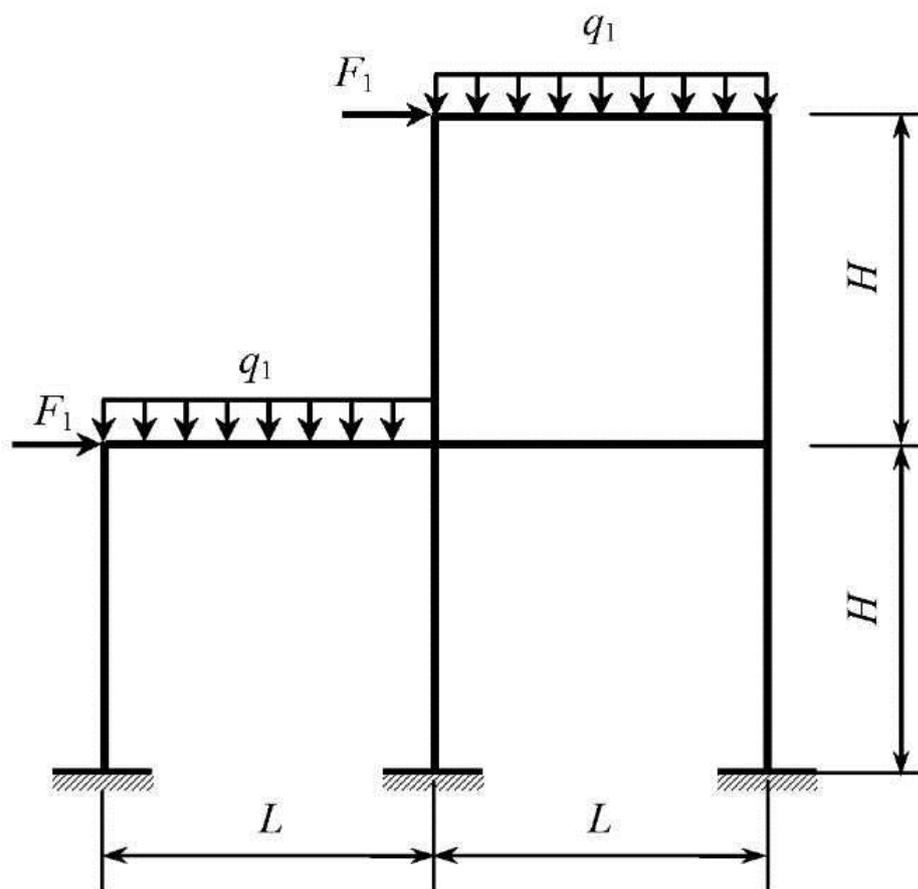
\* двутавр колонный

\*\* двутавр широкополочный

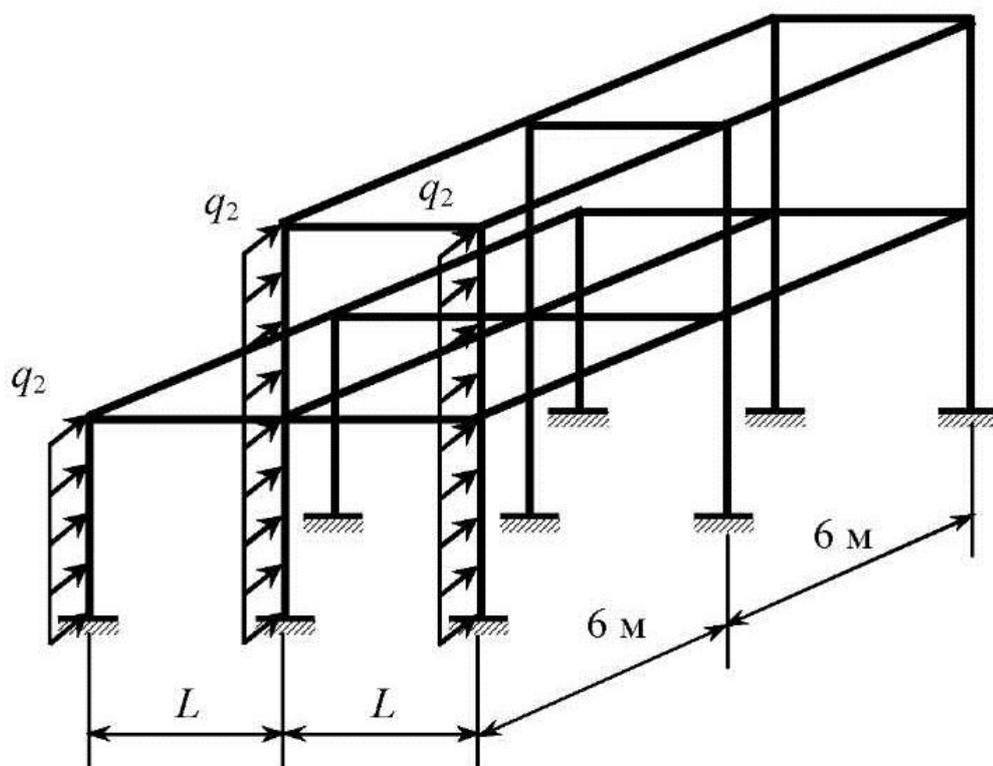
### Последовательность выполнения задачи:

- выбрать тип схемы № 5;
- создать плоскую раму (задать узлы, ввести элементы, задать жесткости, приложить нагрузки  $q_1$ ,  $F_1$  в нагружении №1);
  - при установке опорных связей учесть, что колонны имеют жесткое защемление в плоскости и из плоскости рамы;
  - скопировать плоскую раму в направлении оси  $y$  с шагом 6 м два раза (выбрать опцию «копирование нагрузок»);
  - установить распорки;
  - приложить нагрузки  $q_2$  в нагружении №2.

*a*



*б*



*Рис. 2.5*

### 3. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

#### Задача № 1

Для заданной рамы (рис. 3.1) требуется:

1. Выполнить расчет в SCAD, построить эпюры внутренних усилий, определить перемещения узлов.
2. Для вертикального стержня сформировать матрицу жесткости в местной системе координат, направляющих косинусов, вычислить матрицу жесткости элемента в общей системе координат.
3. По известным перемещениям по концам элемента вычислить внутренние усилия в элементе и построить их эпюры.

*Таблица 3.1*

#### Исходные данные для задачи № 1

Номер группы	$L$ , м	$F$ , кН	$q$ , кН/м	$M$ , кН·м	$EA$	$EJ$
1	3,0	20	4,4	6	100	1
2	3,2	18	4,2	8	100	1
3	3,4	16	4,0	10	100	1
4	3,6	14	3,8	12	100	1
5	3,8	12	3,6	14	200	1
6	4,0	10	3,4	16	200	1
7	4,2	8	3,2	18	200	1
8	4,4	6	3,0	20	200	1

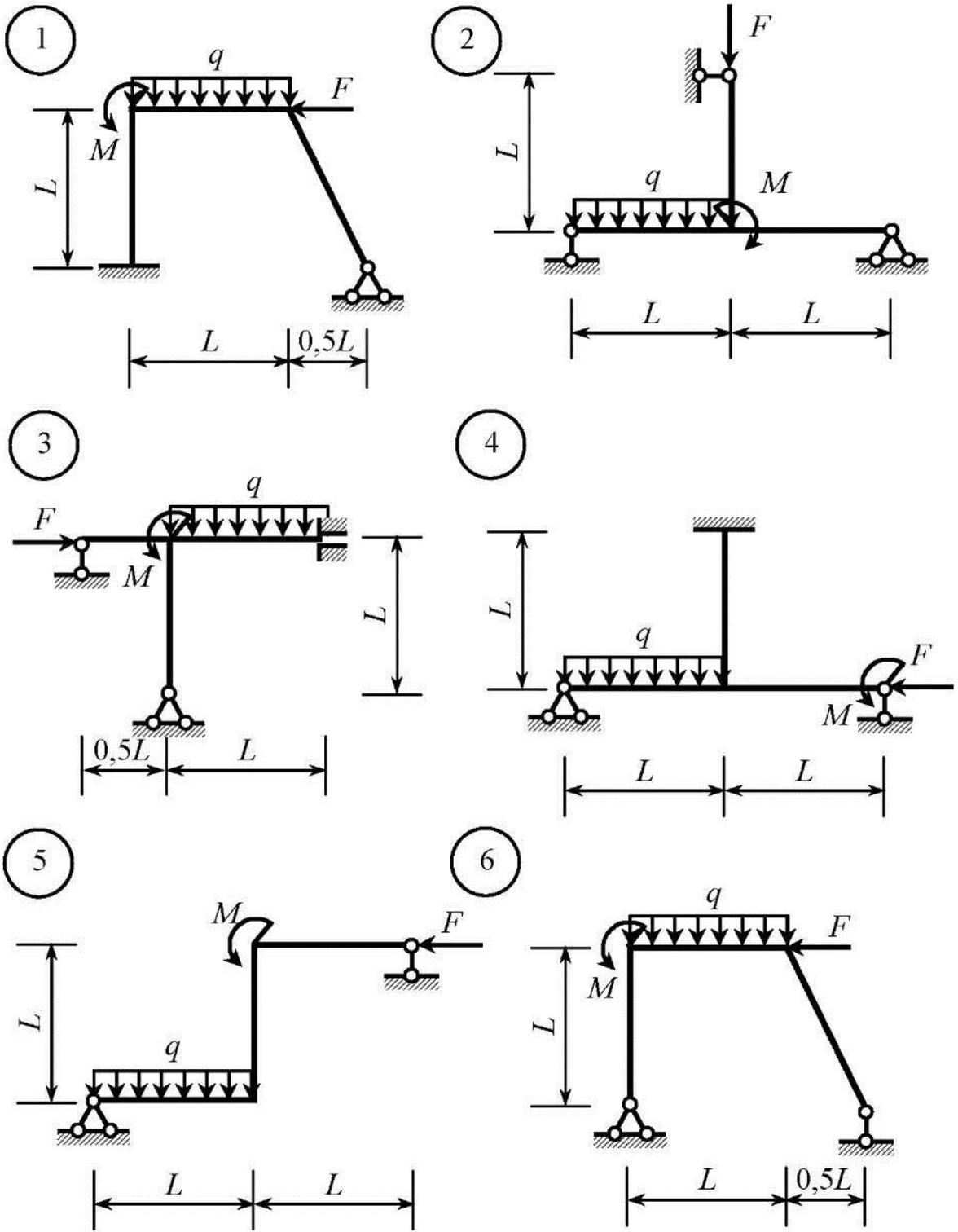
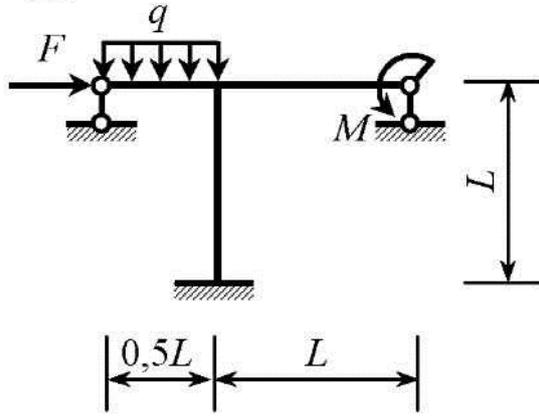
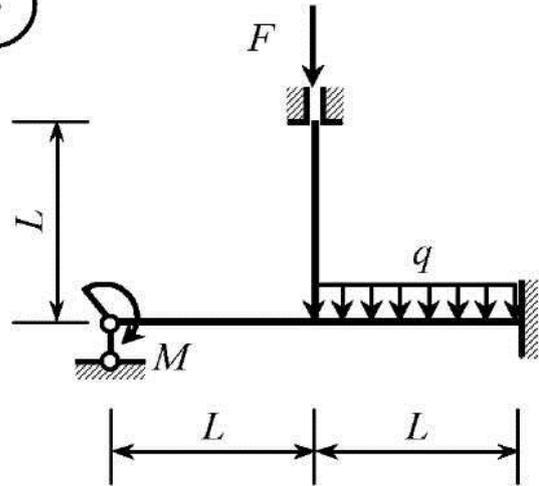


Рис. 3.1 (продолжение см. на с. 18–20, окончание – на с. 21)

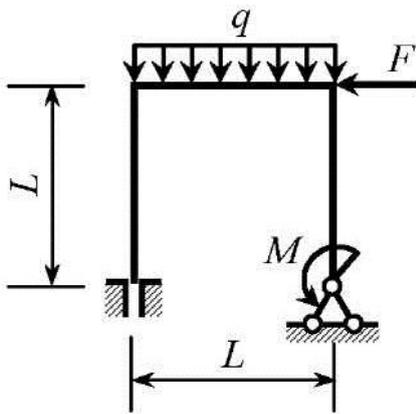
7



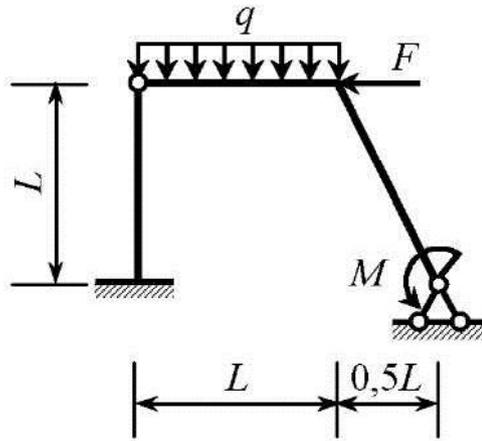
8



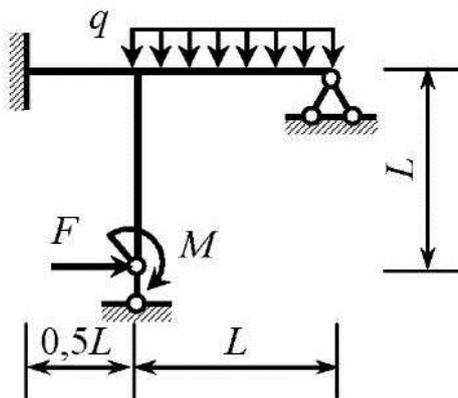
9



10



11



12

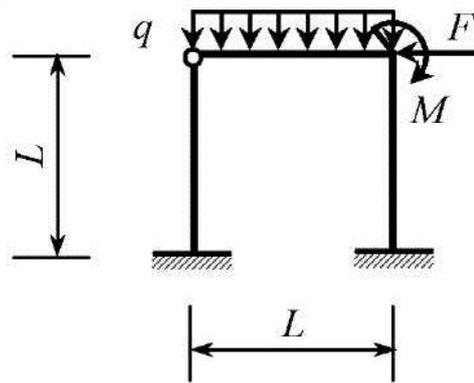


Рис. 3.1. Продолжение (начало см. на с. 17, продолжение на с. 19, 20, окончание – на с. 21)

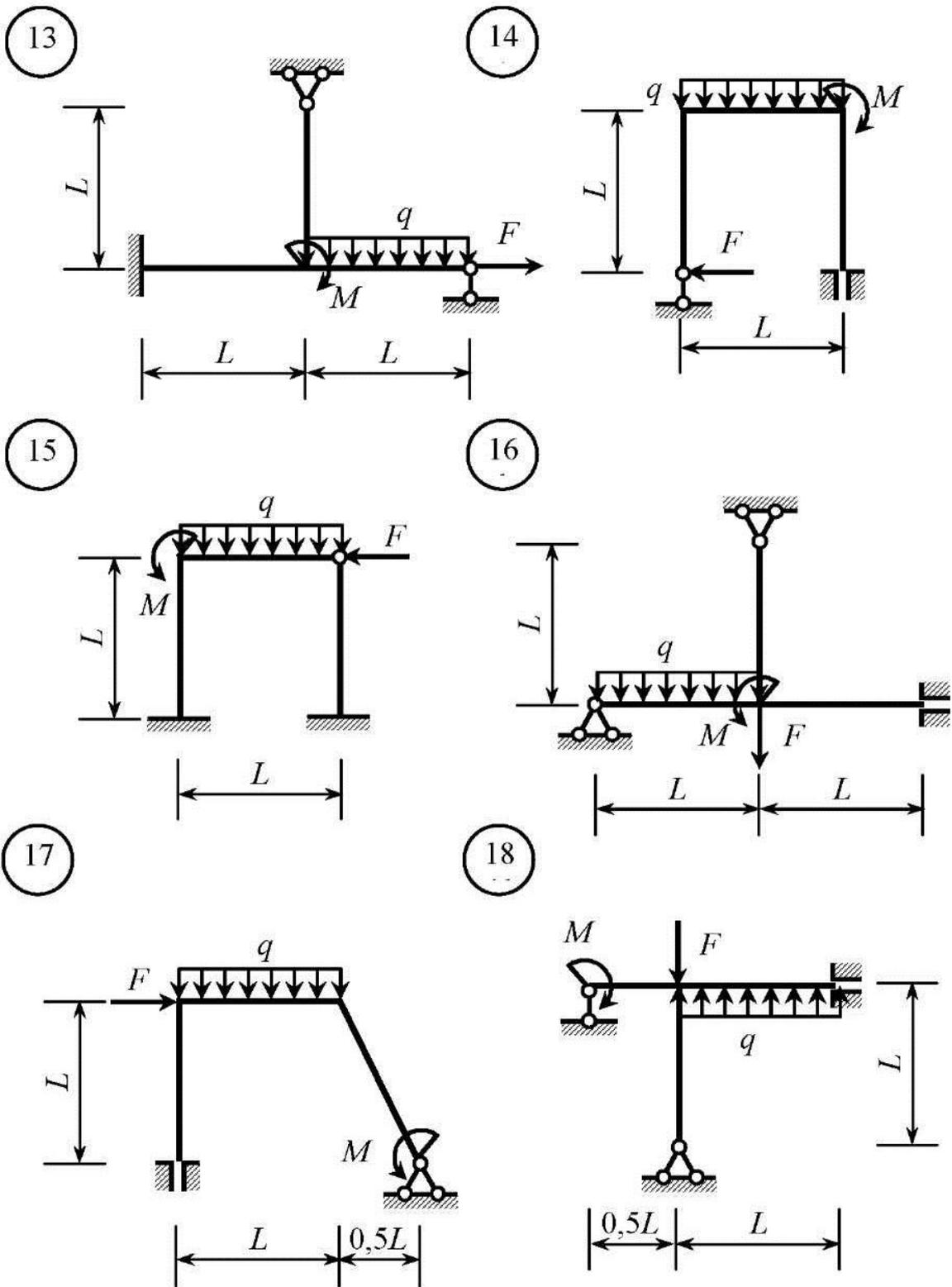
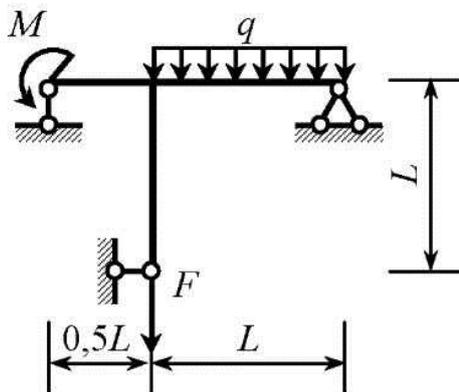
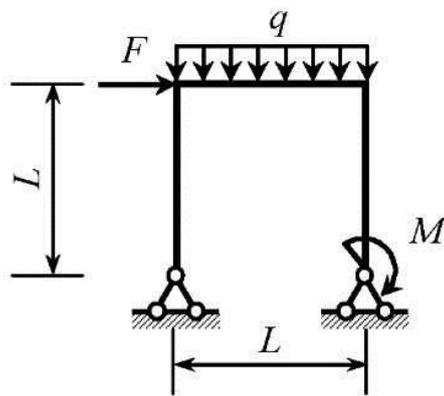


Рис. 3.1. Продолжение (начало см. на с. 17, 18, продолжение – на с. 20, окончание – на с. 21)

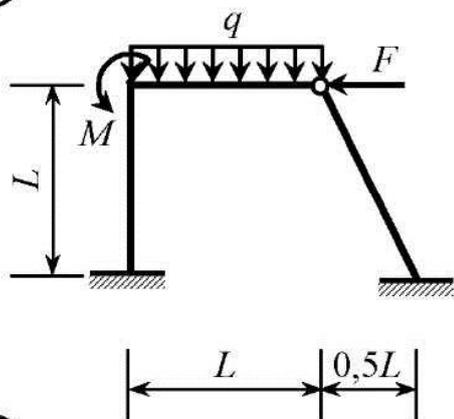
19



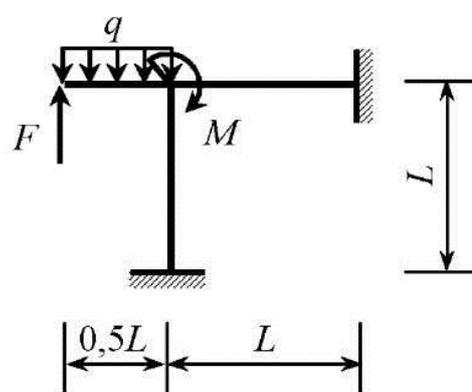
20



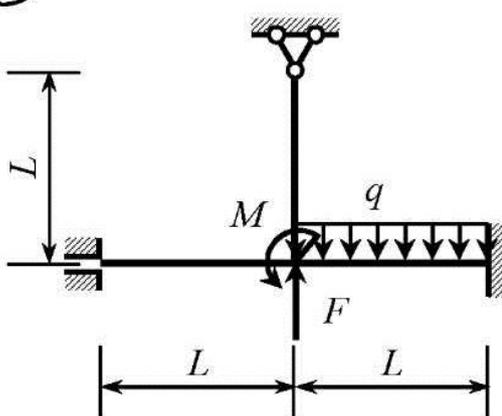
21



22



23



24

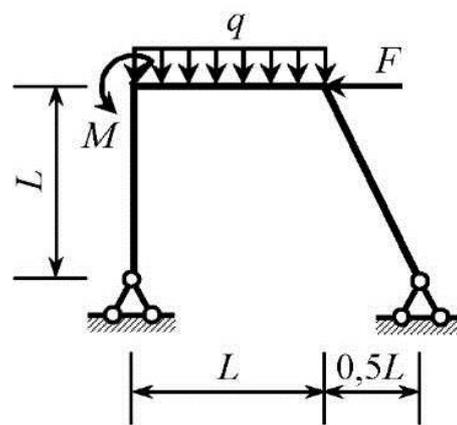


Рис. 3.1. Продолжение (начало см. на с. 17–19, окончание – на с. 21)

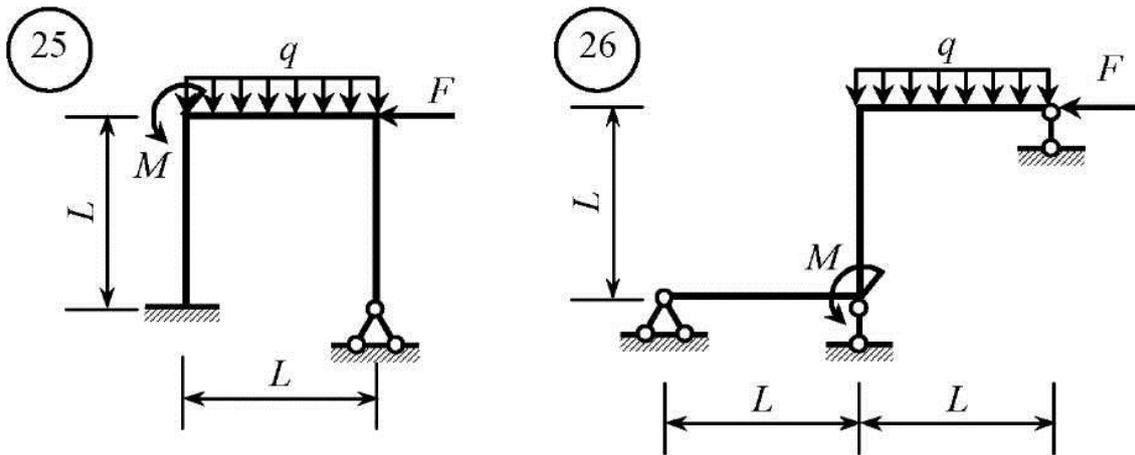


Рис. 3.1. Окончание (начало см. на с. 17–20)

### Задача № 2

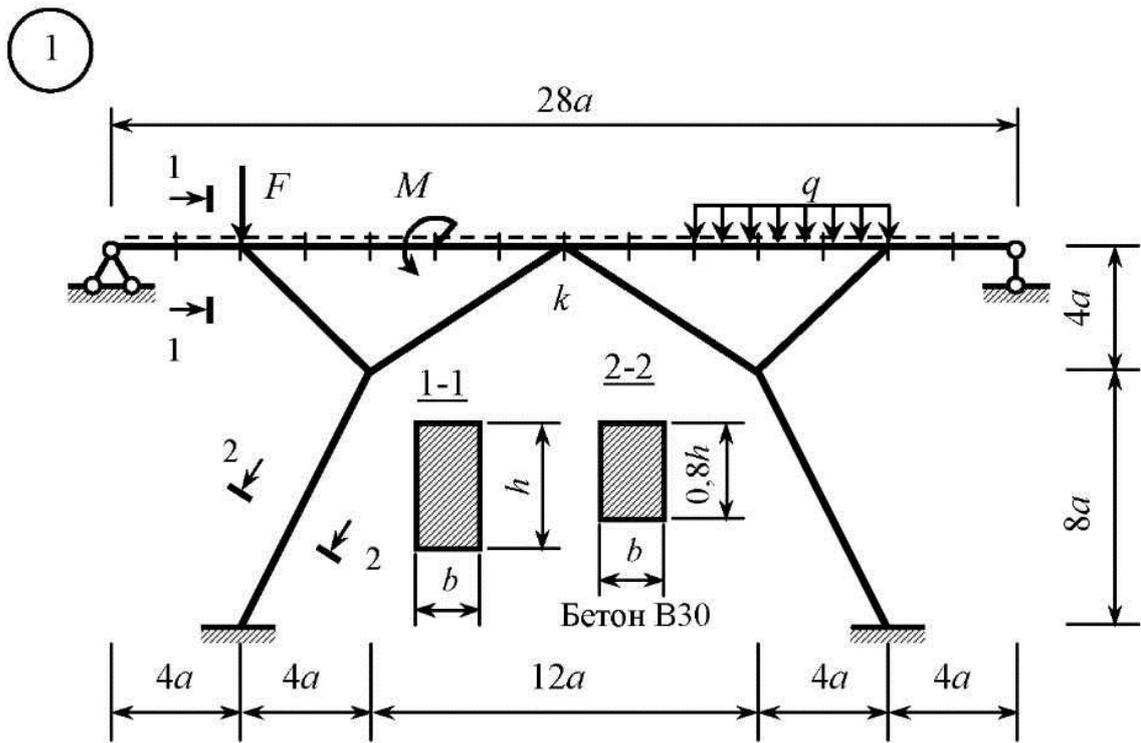
Для заданной плоской стержневой системы (рис. 3.2) требуется:

1. Выполнить расчет в SCAD.
2. Показать деформированную схему сооружения.
3. Построить эпюры внутренних усилий.
4. Сделать статическую проверку полученного решения.
5. Произвести расчет системы при изменениях в расчетной схеме или построить линии влияния (указывается по каждому варианту индивидуально).

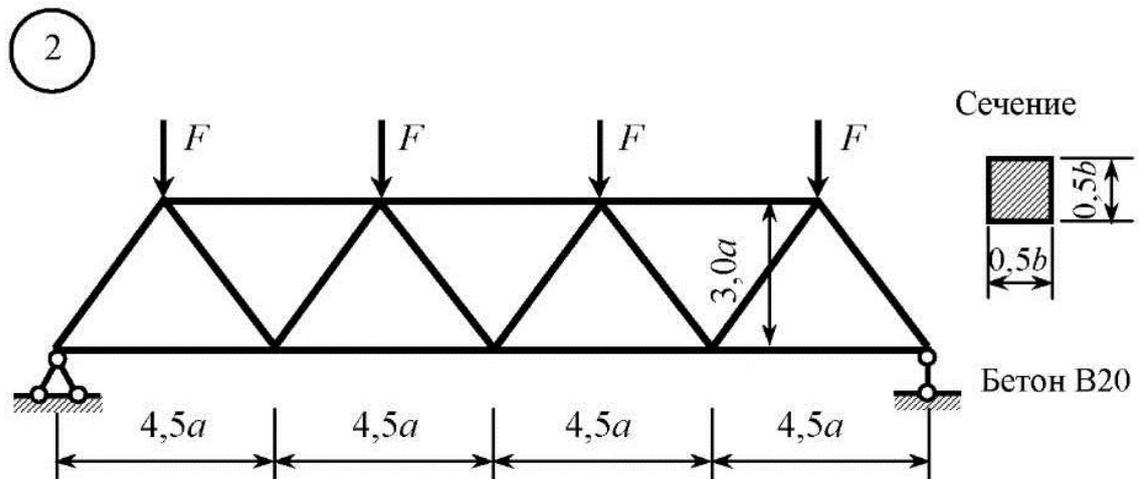
Таблица 3.2

### Исходные данные для задачи № 2

Номер группы	$a$ , м	$F$ , кН	$q$ , кН/м	$M$ , кН·м	$b$ , см	$h$ , см	Уголок
1	0,6	30	6	10	40	60	100×10
2	0,8	40	8	12	40	80	110×8
3	1,0	50	10	14	50	100	125×10
4	1,2	60	12	16	60	120	140×12
5	1,4	70	14	18	70	140	160×12
6	1,6	80	16	20	80	160	180×12
7	1,8	90	18	22	90	180	220×14
8	2,0	100	20	24	100	200	250×16

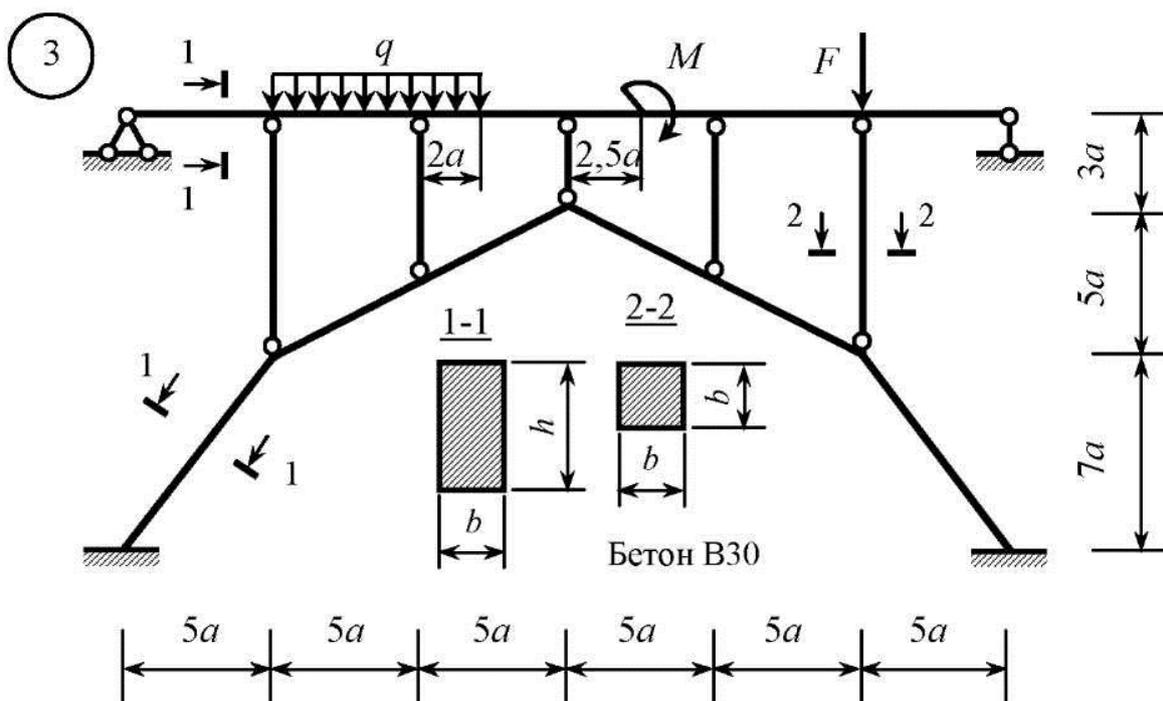


Построить линию влияния изгибающего момента в сечении «к»

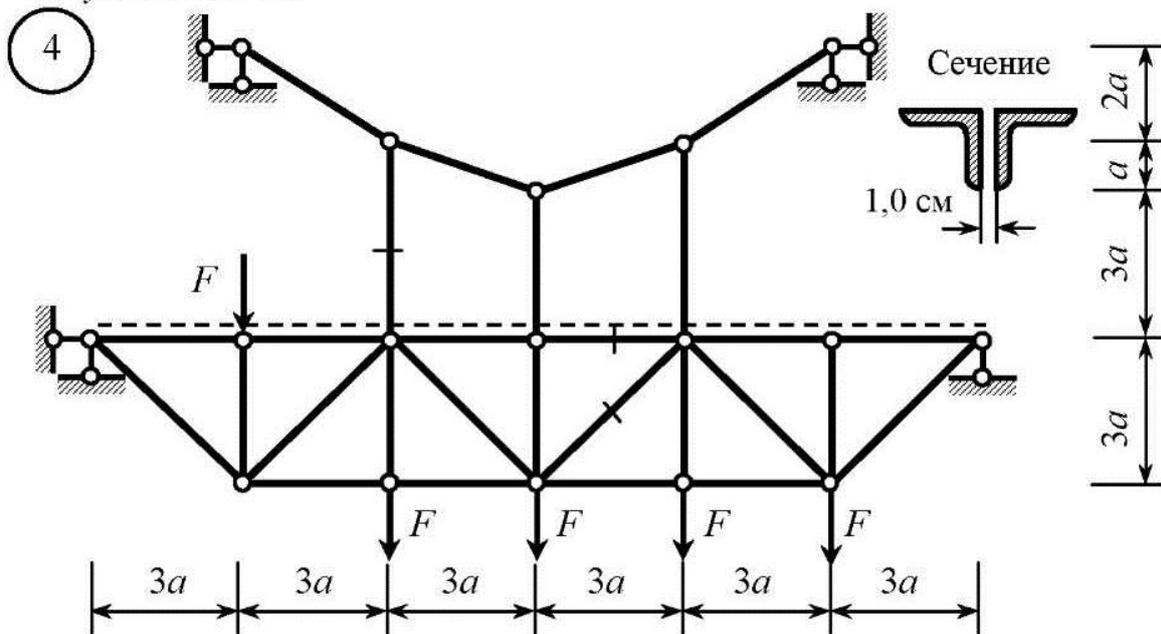


Произвести расчет при изменениях в расчетной схеме:  
 а) шарнирном присоединении решетки к узлам (пояса неразрезные);  
 б) все узлы шарнирные

Рис. 3.2 (продолжение см. на с. 23–33, окончание – на с. 34)

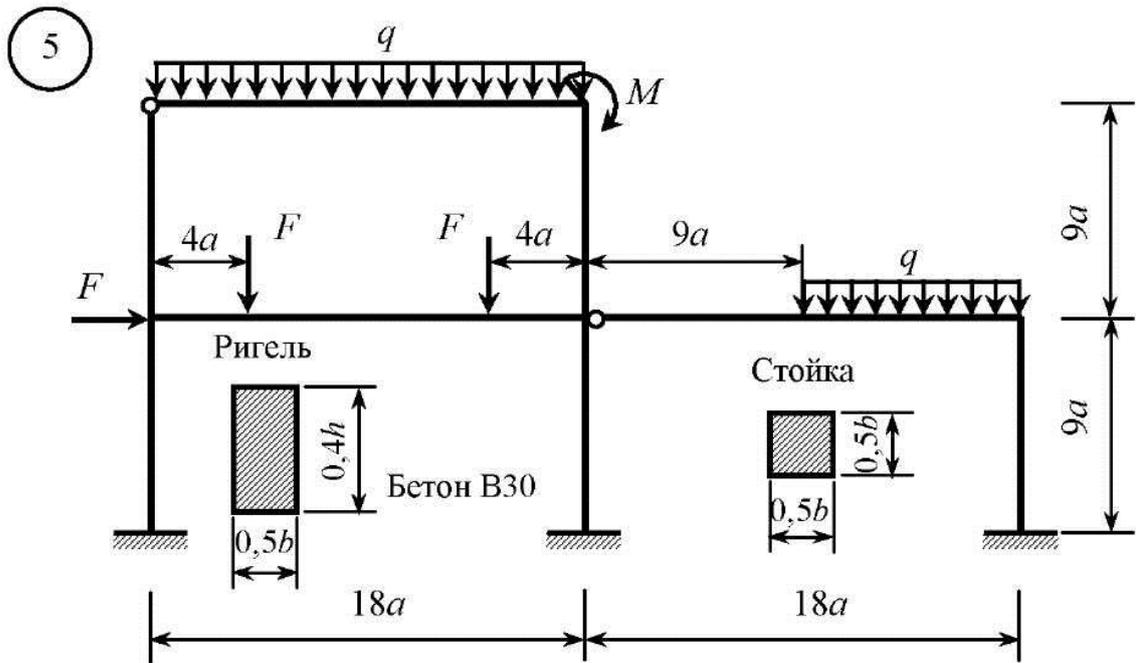


Произвести расчет при изменениях в расчетной схеме:  
все узлы жесткие

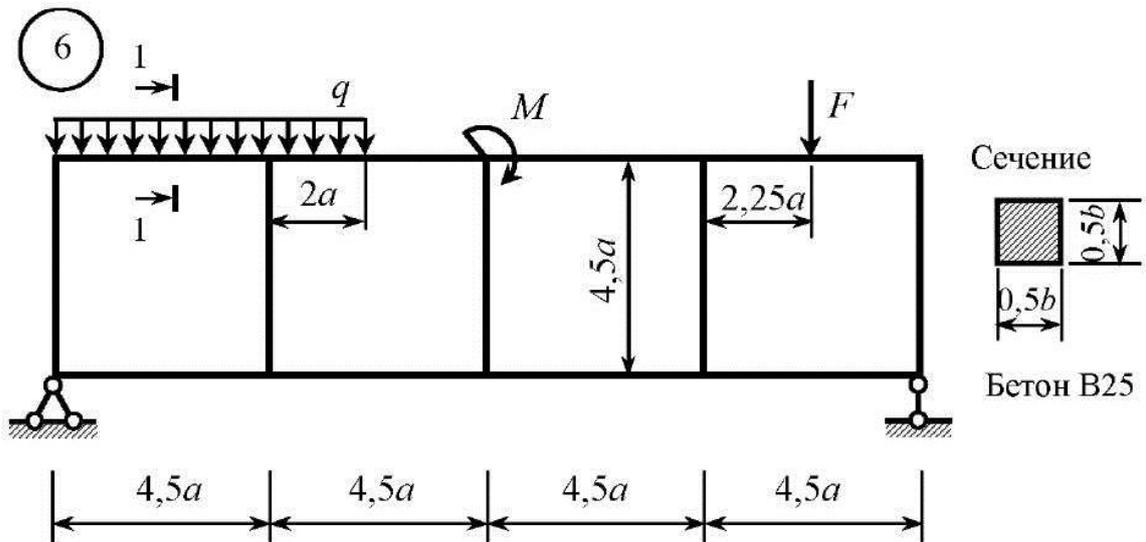


Построить линии влияния продольных сил в отмеченных стержнях

Рис. 3.2. Продолжение (начало см. на с. 22, продолжение – на с. 24–33, окончание – на с. 34)

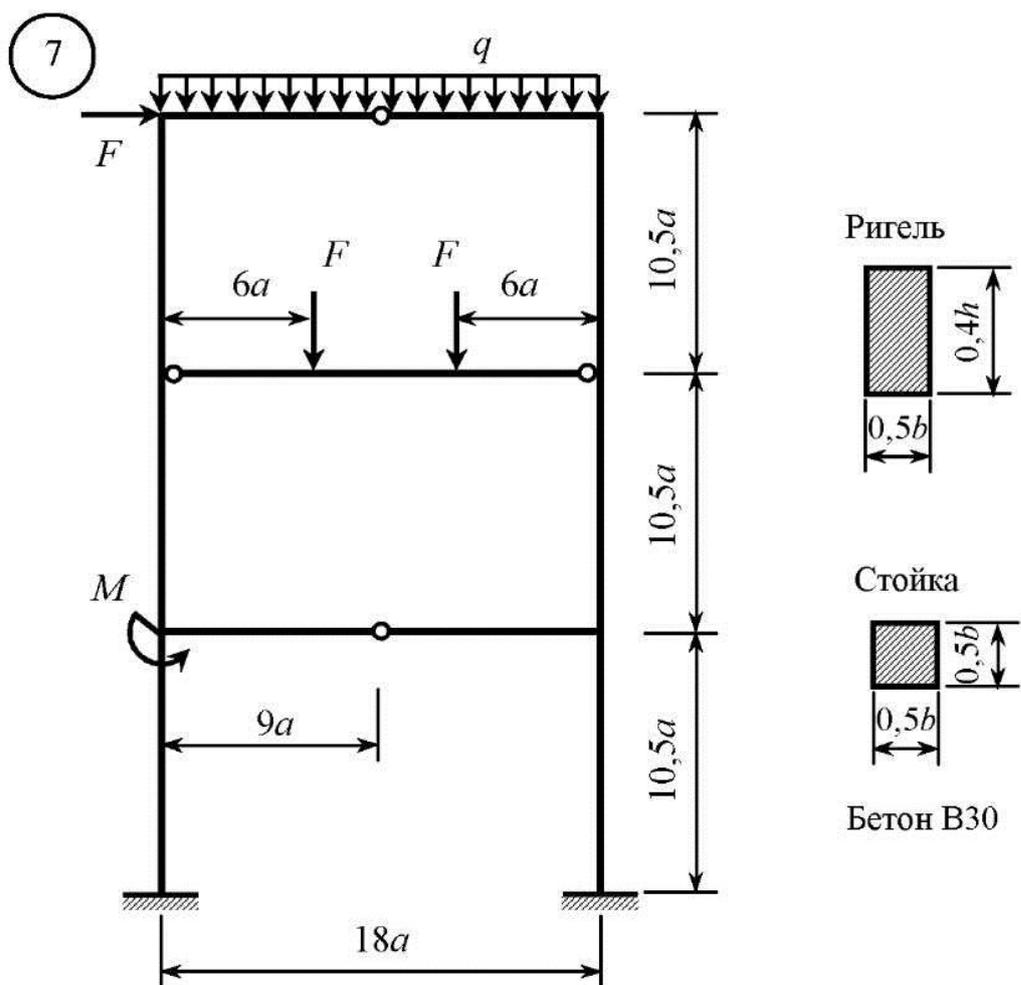


Произвести расчет при изменениях в расчетной схеме:  
высота сечения ригеля увеличена в 1,5 раза

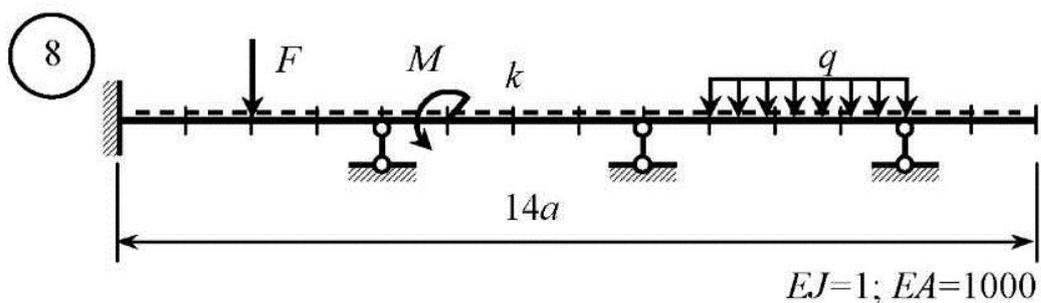


Произвести расчет при изменениях в расчетной схеме:  
в среднее сечение стоек вставить шарнир

Рис. 3.2. Продолжение (начало см. на с. 22–23, продолжение – на с. 25–33,  
окончание – на с. 34)



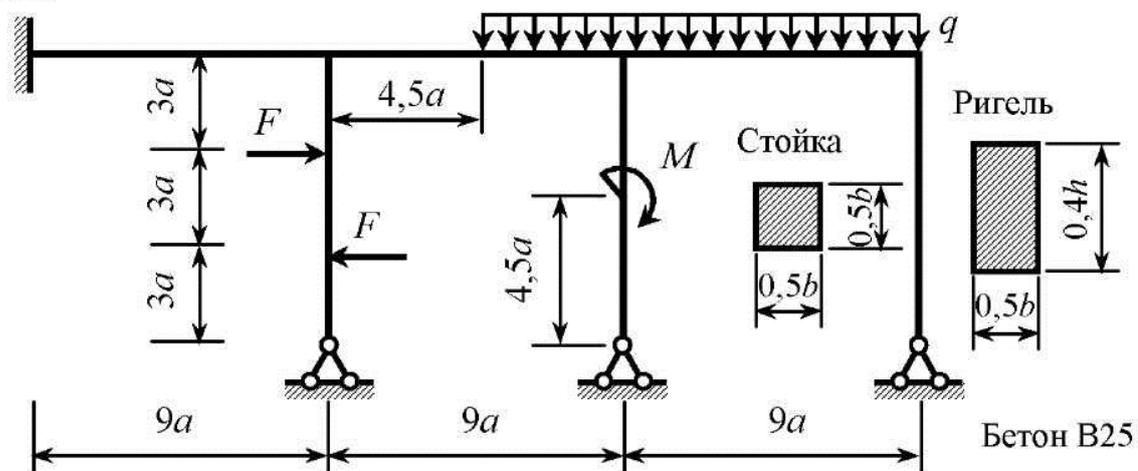
Произвести расчет при изменениях в расчетной схеме:  
все узлы жесткие



Построить линии влияния изгибающего момента и поперечной силы в сечении «к»

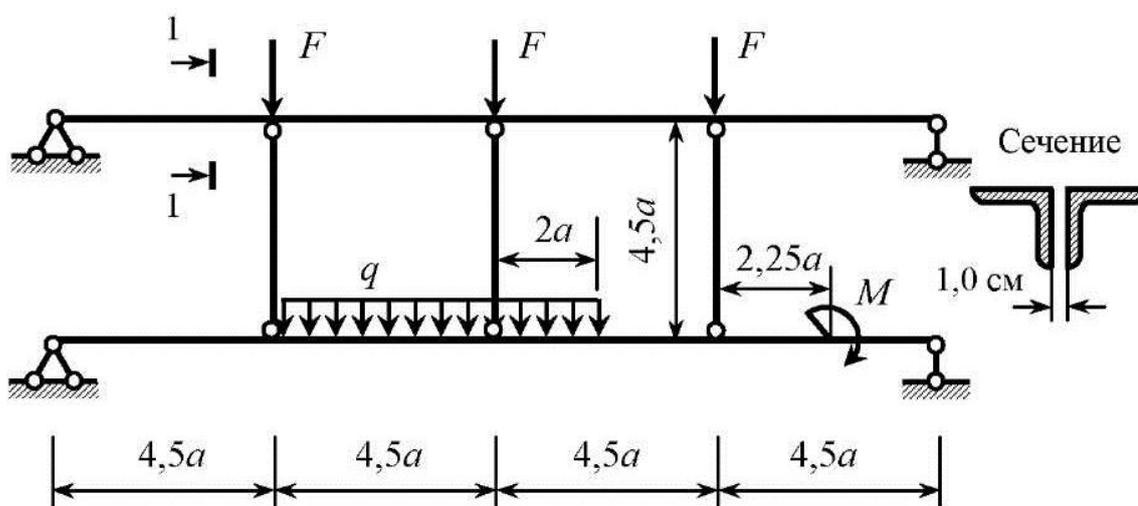
Рис. 3.2. Продолжение (начало см. на с. 22–24, продолжение – на с. 26–33, окончание – на с. 34)

9



Произвести расчет при изменениях в расчетной схеме:  
высота сечения ригеля увеличена в 1,5 раза

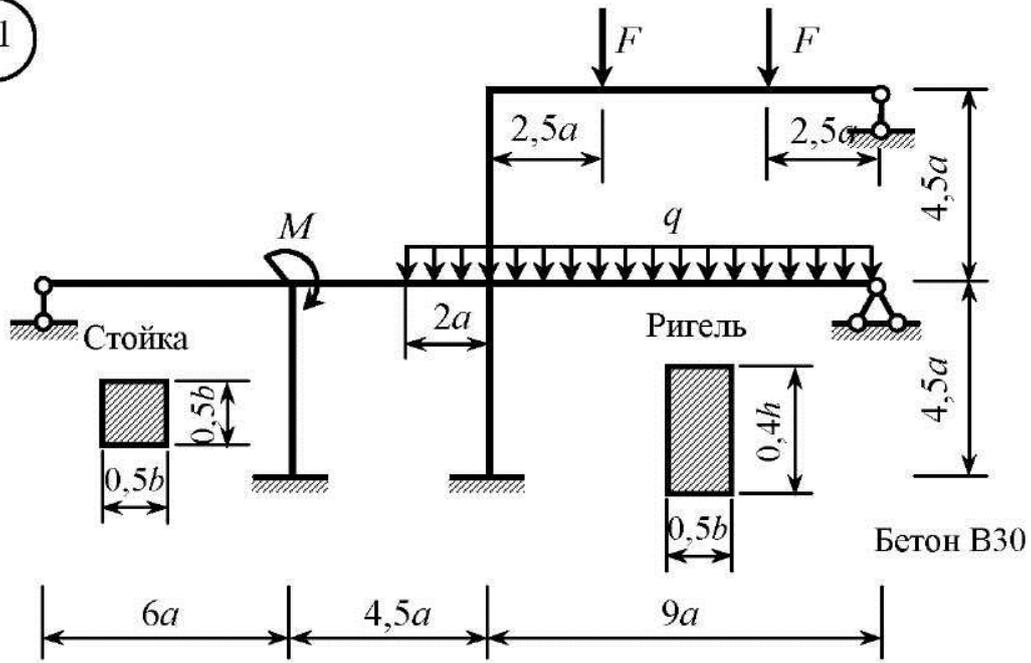
10



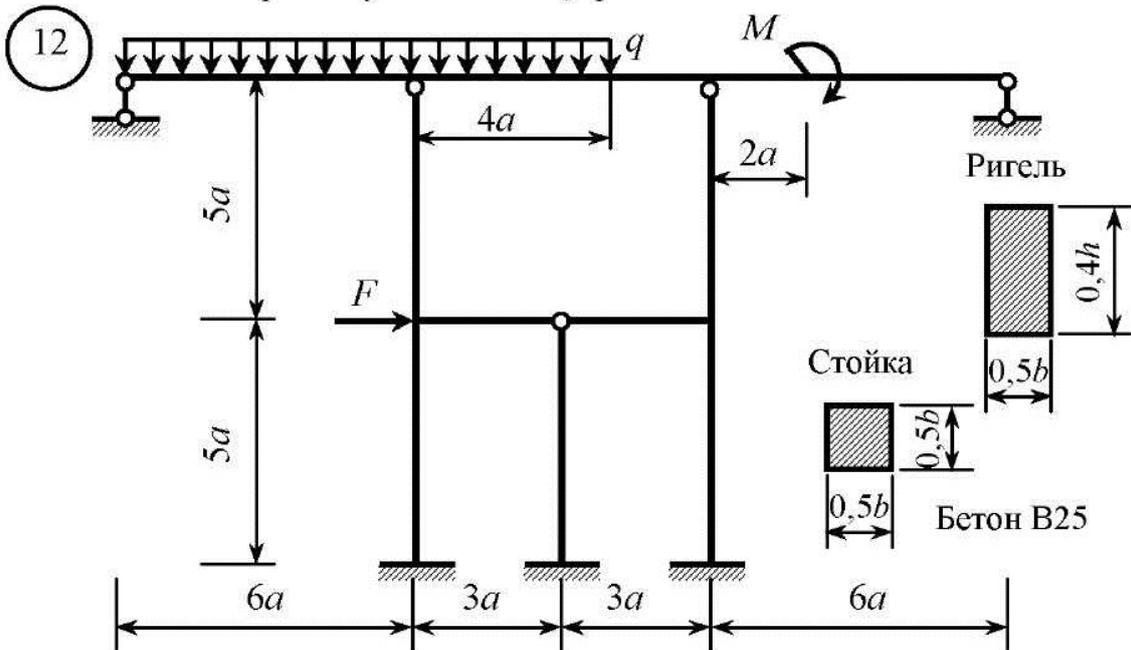
Произвести расчет при изменениях в расчетной схеме:  
все узлы жесткие

Рис. 3.2. Продолжение (начало см. на с. 22–25, продолжение – на с. 26–33, окончание – на с. 34)

11

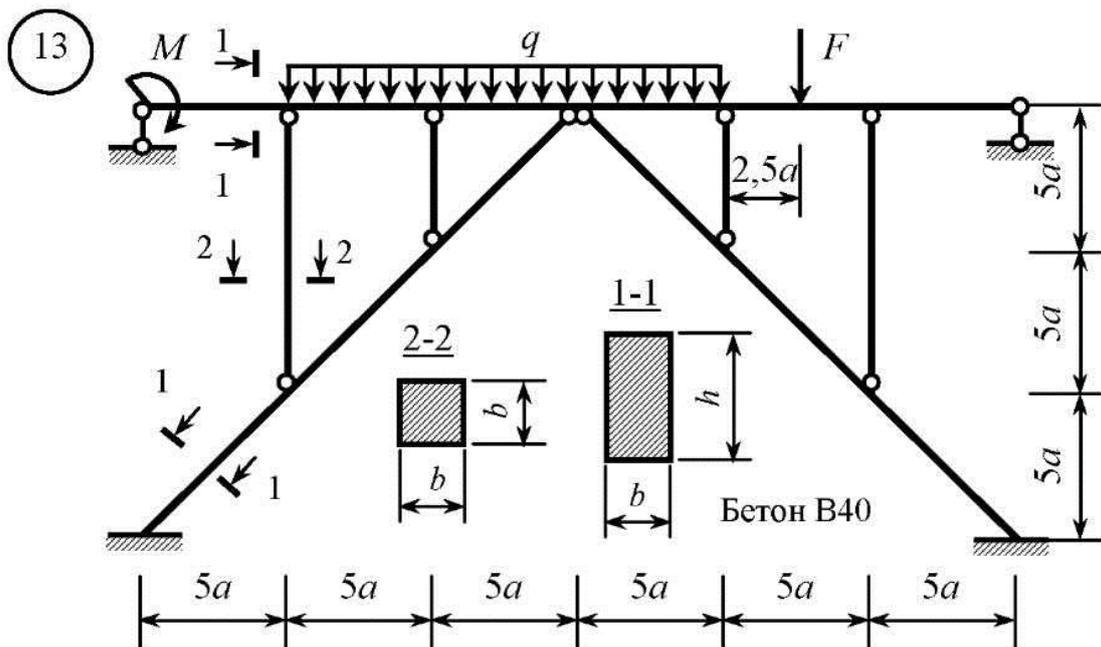


Произвести расчет при изменениях в расчетной схеме:  
высота сечения ригеля увеличена в 1,5 раза

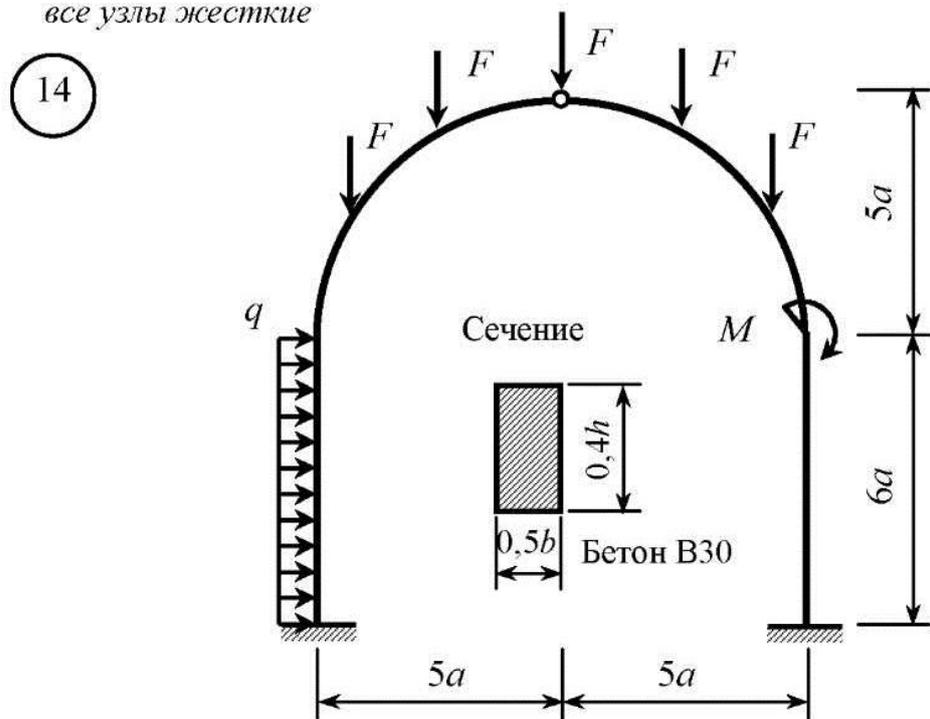


Произвести расчет при изменениях в расчетной схеме:  
все узлы жесткие

Рис. 3.2. Продолжение (начало см. на с. 22–26, продолжение – на с. 28–33, окончание – на с. 34)



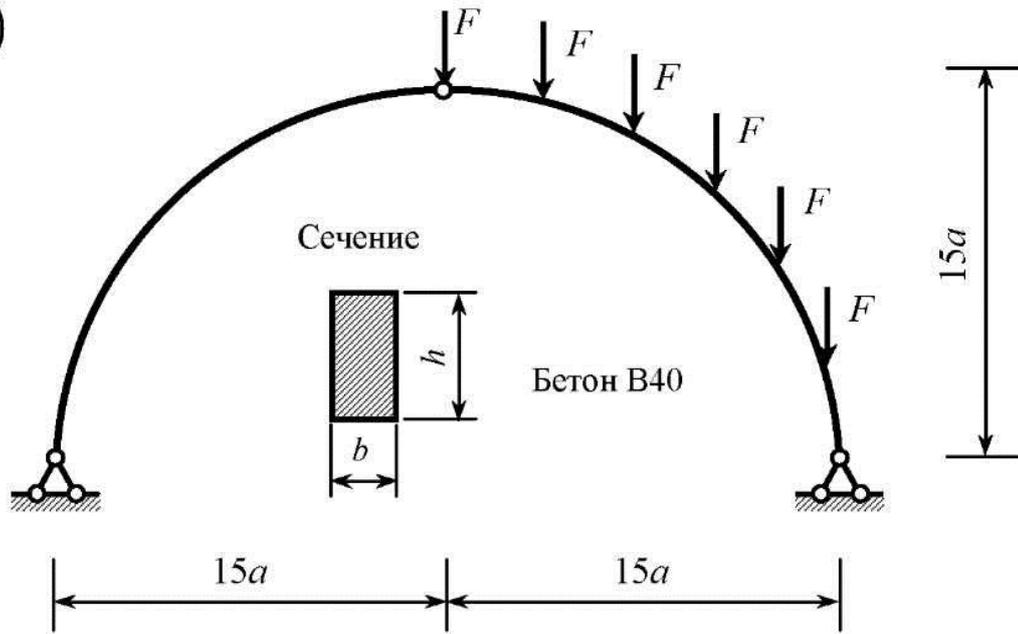
Произвести расчет при изменениях в расчетной схеме:  
все узлы жесткие



Произвести расчет при изменениях в расчетной схеме:  
вписать в арочную часть ломаную линию из двенадцати звеньев

Рис. 3.2. Продолжение (начало см. на с. 22–27, продолжение – на с. 29–33,  
окончание – на с. 34)

15



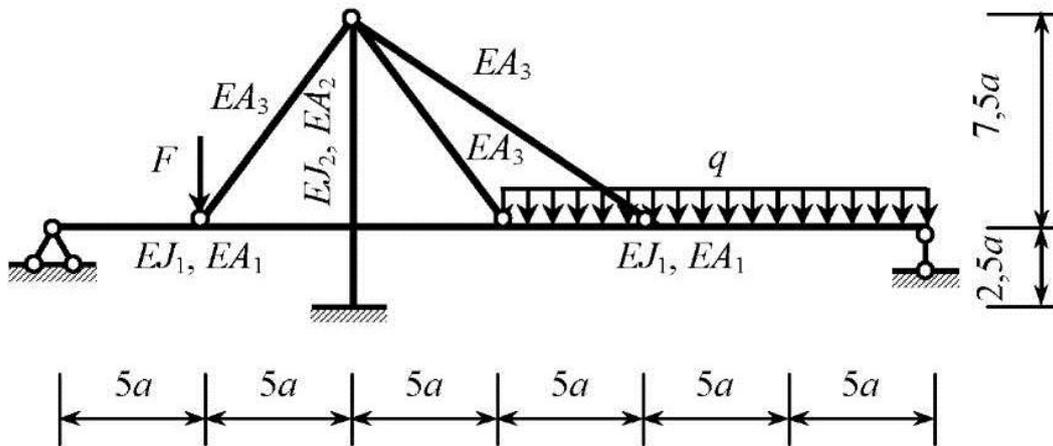
Произвести расчет при изменениях в расчетной схеме:  
вписать в арочную часть ломаную линию из двадцати четырех звеньев

16

$$EJ_1 = 35 \cdot 10^5 \text{ кНм}^2; EA_1 = 46 \cdot 10^6 \text{ кН};$$

$$EJ_2 = 12 \cdot 10^6 \text{ кНм}^2; EA_2 = 36 \cdot 10^6 \text{ кН};$$

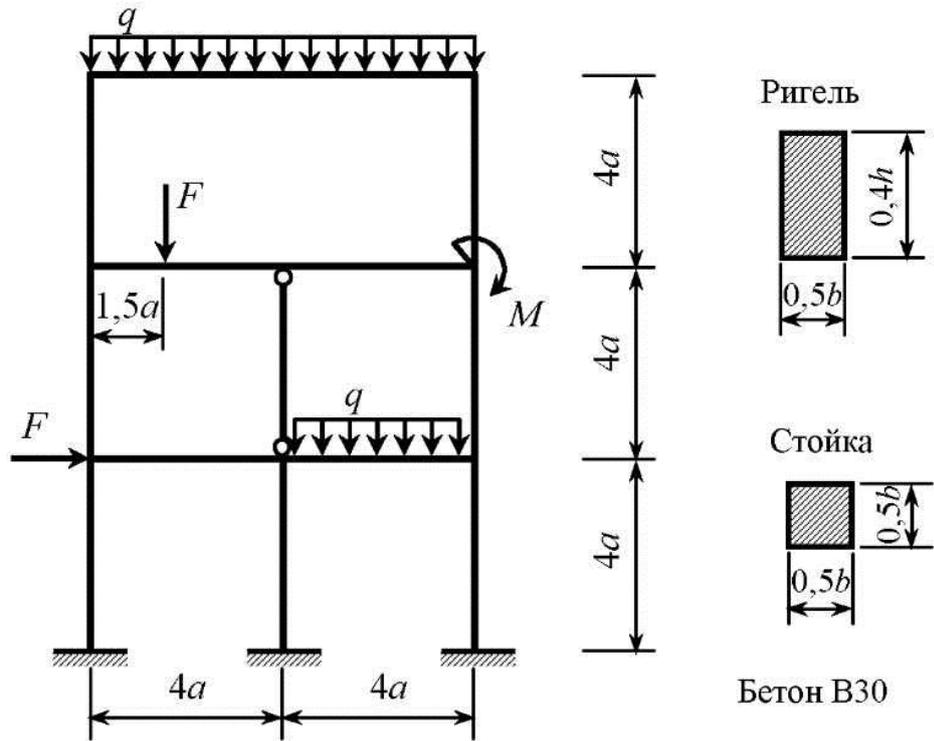
$$EA_3 = 10 \cdot 10^5 \text{ кН}$$



Произвести расчет при изменениях в расчетной схеме:  
увеличить жесткость вант в 2 раза

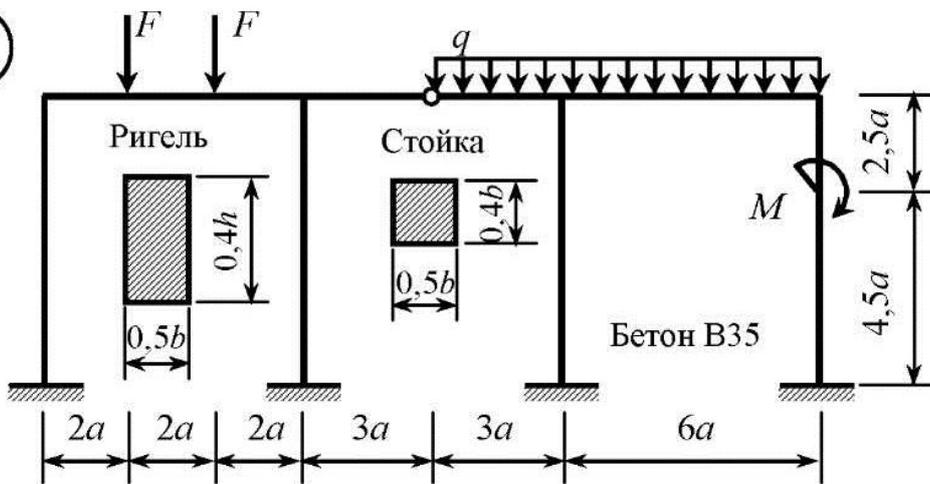
Рис. 3.2. Продолжение (начало см. на с. 22–28, продолжение – на с. 30–33, окончание – на с. 34)

17



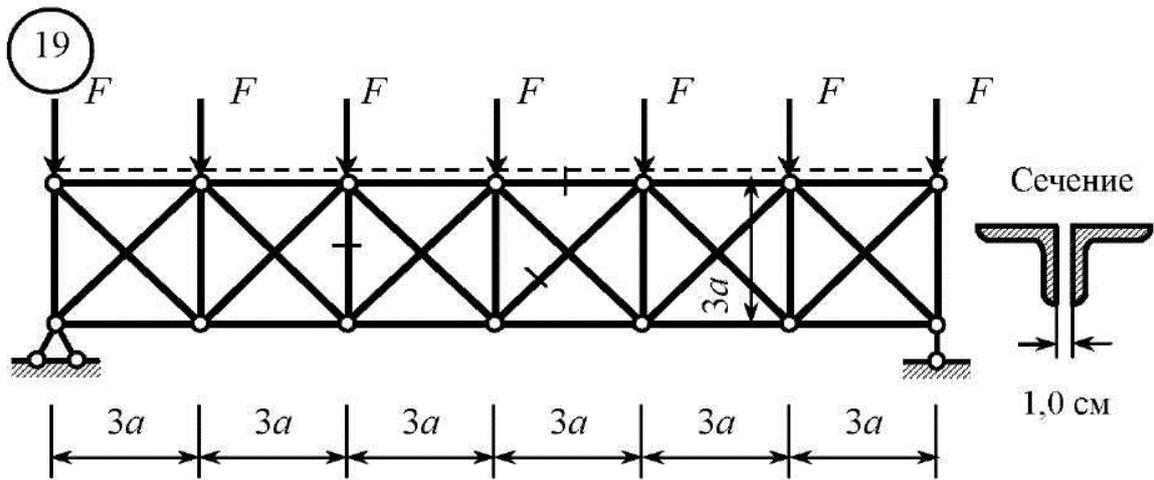
Произвести расчет при изменениях в расчетной схеме:  
все узлы жесткие

18



Произвести расчет при изменениях в расчетной схеме:  
высота сечения ригеля увеличена в 1,5 раза

Рис. 3.2. Продолжение (начало см. на с. 22–29, продолжение – на с. 31–33,  
окончание – на с. 34)



Построить линии влияния продольных сил в отмеченных стержнях

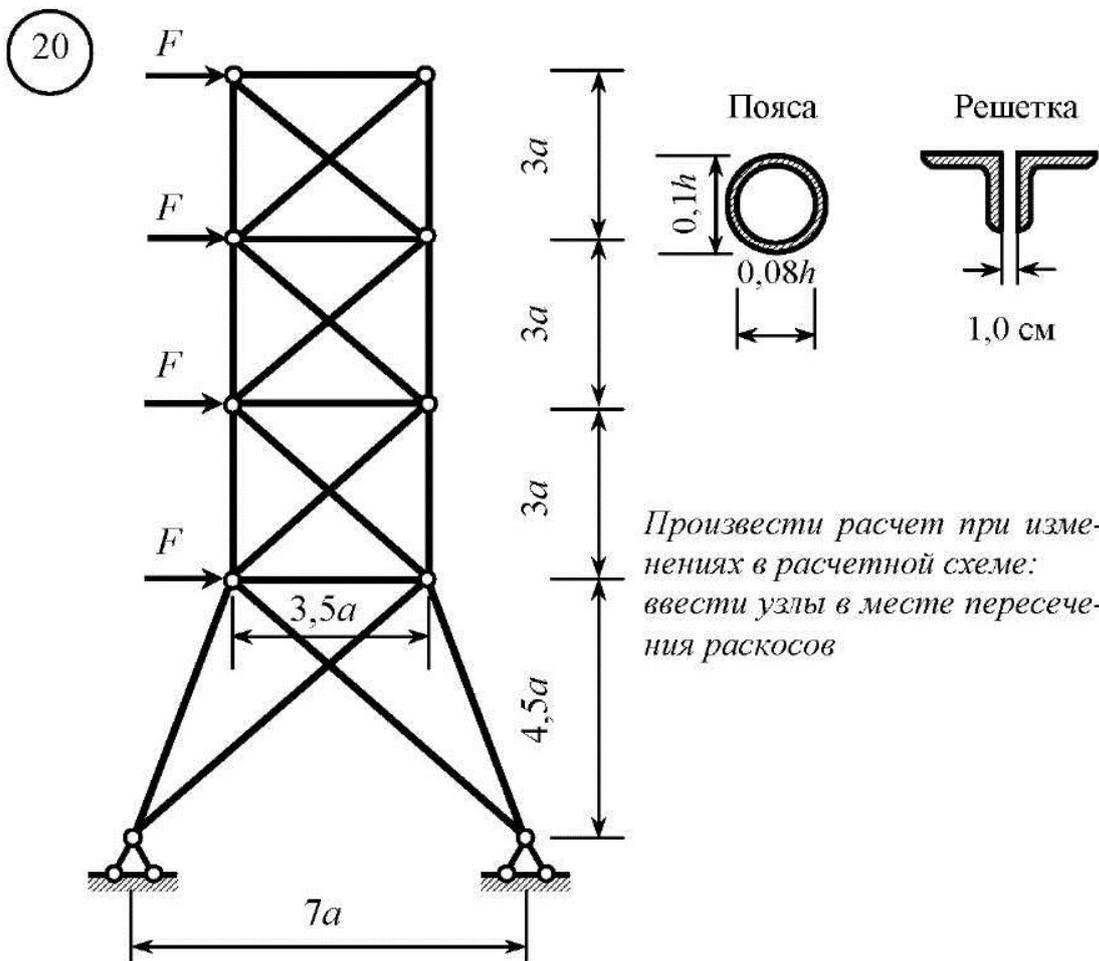
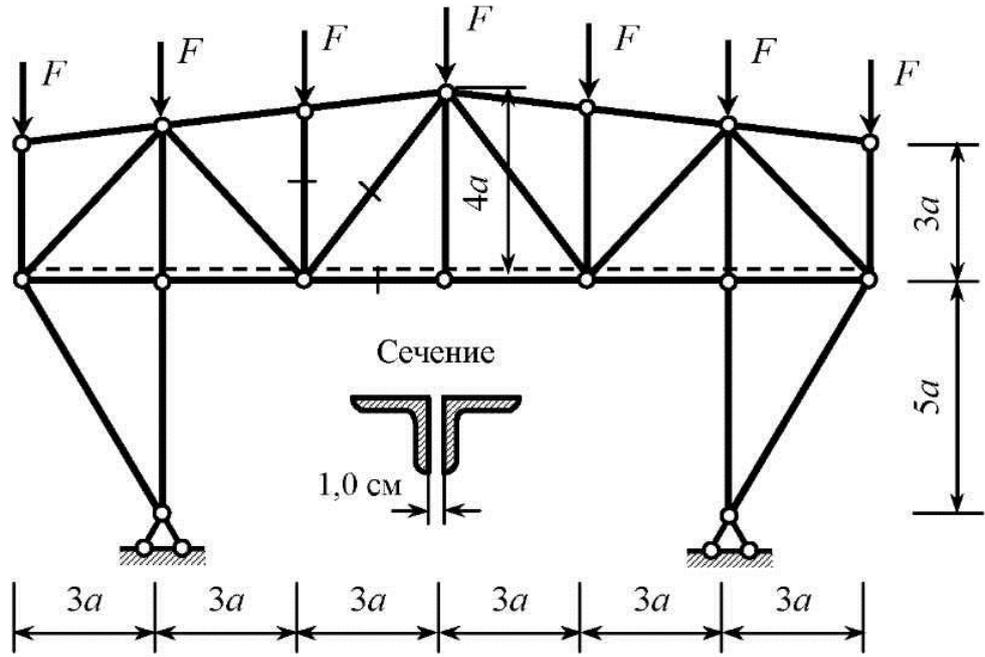


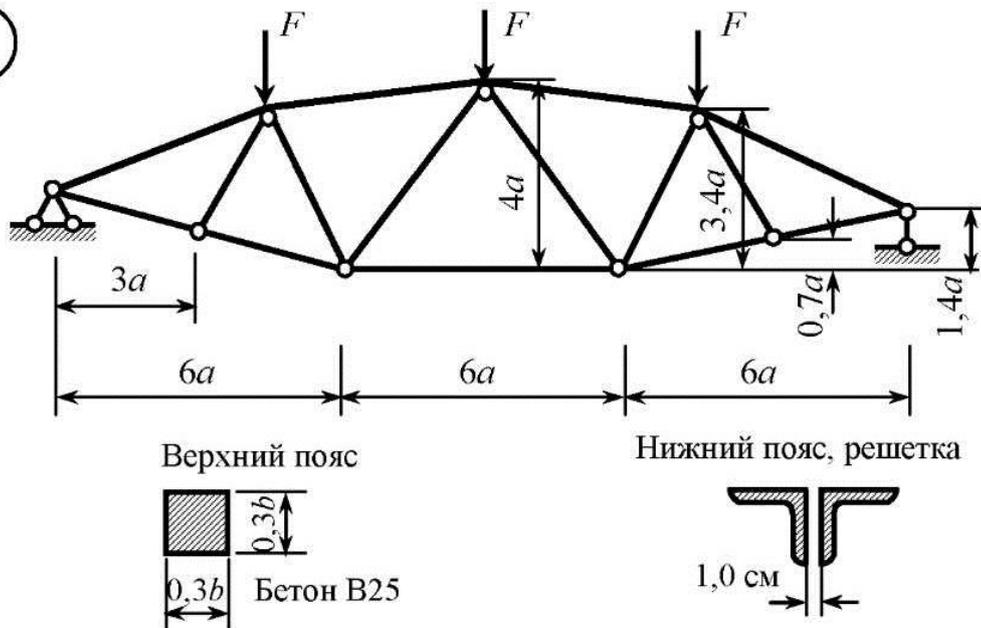
Рис. 3.2. Продолжение (начало см. на с. 22–30, продолжение – на с. 32, 33, окончание – на с. 34)

21



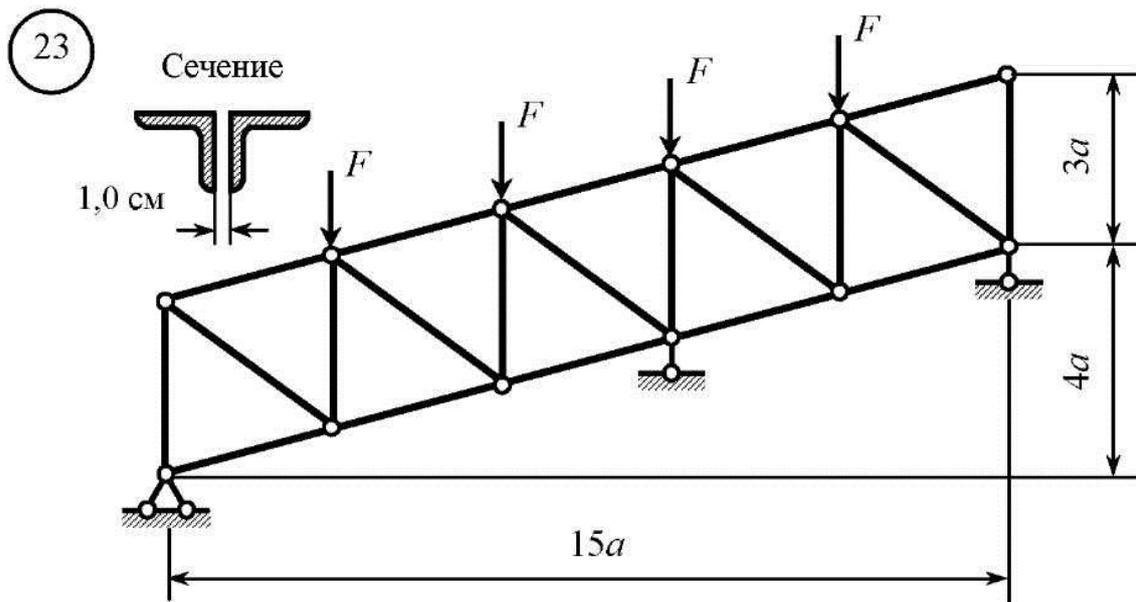
Построить линии влияния продольных сил в отмеченных стержнях

22

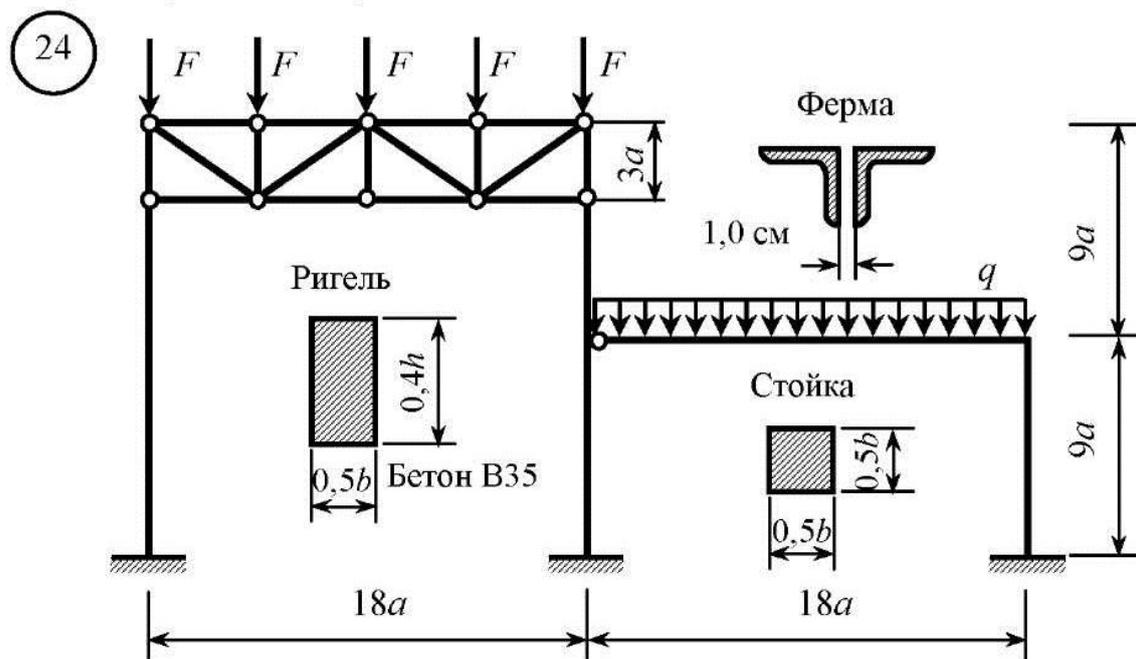


Произвести расчет при изменениях в расчетной схеме:  
размеры поперечного сечения верхнего пояса увеличены в 2 раза

Рис. 3.2. Продолжение (начало см. на с. 22–31, продолжение – на с. 33, окончание – на с. 34)



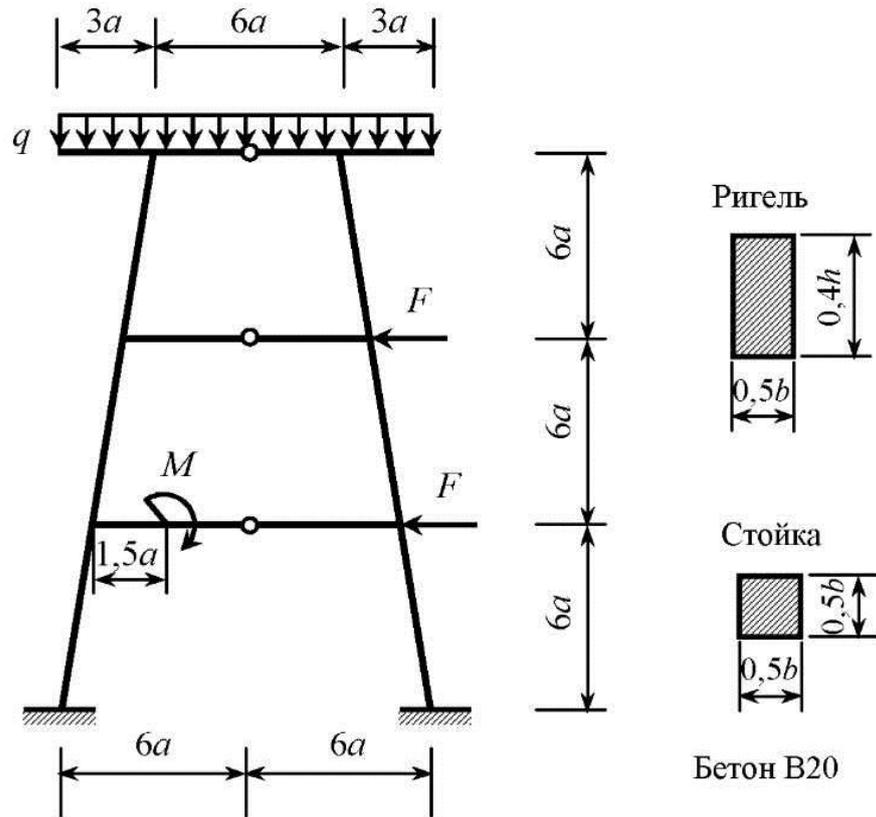
Произвести расчет при изменениях в расчетной схеме:  
промежуточная опора смещается вниз на 3 см



Произвести расчет при изменениях в расчетной схеме:  
все узлы жесткие

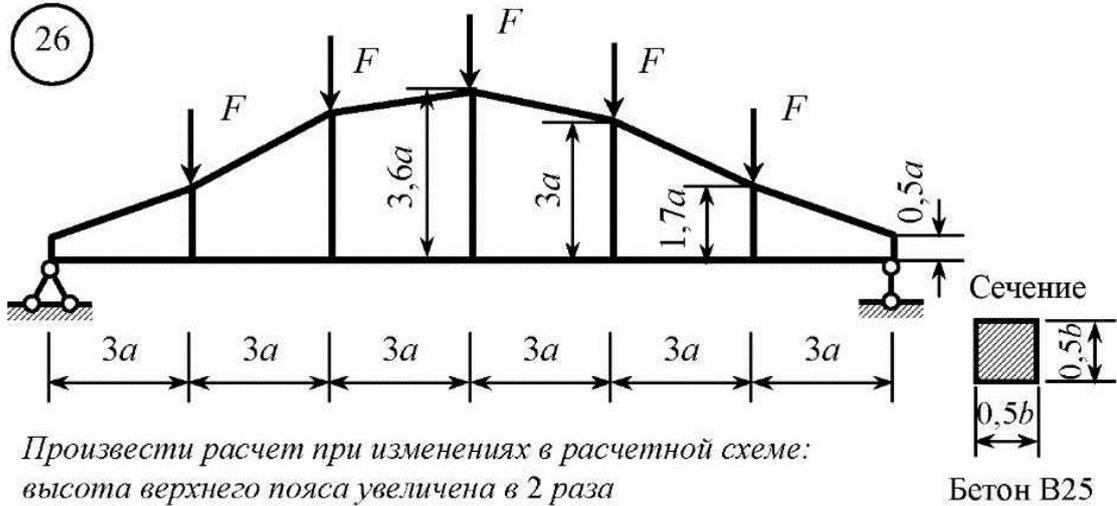
Рис. 3.2. Продолжение (начало см. на с. 22–32, окончание – на с. 34)

25



Произвести расчет при изменениях в расчетной схеме:  
все узлы жесткие

26



Произвести расчет при изменениях в расчетной схеме:  
высота верхнего пояса увеличена в 2 раза

Рис. 3.2. Окончание (начало см. на с. 22–33)

## 4. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

### Пример решения задачи № 1

Схема рамы и исходные данные для расчета показаны на рис. 4.1, а.

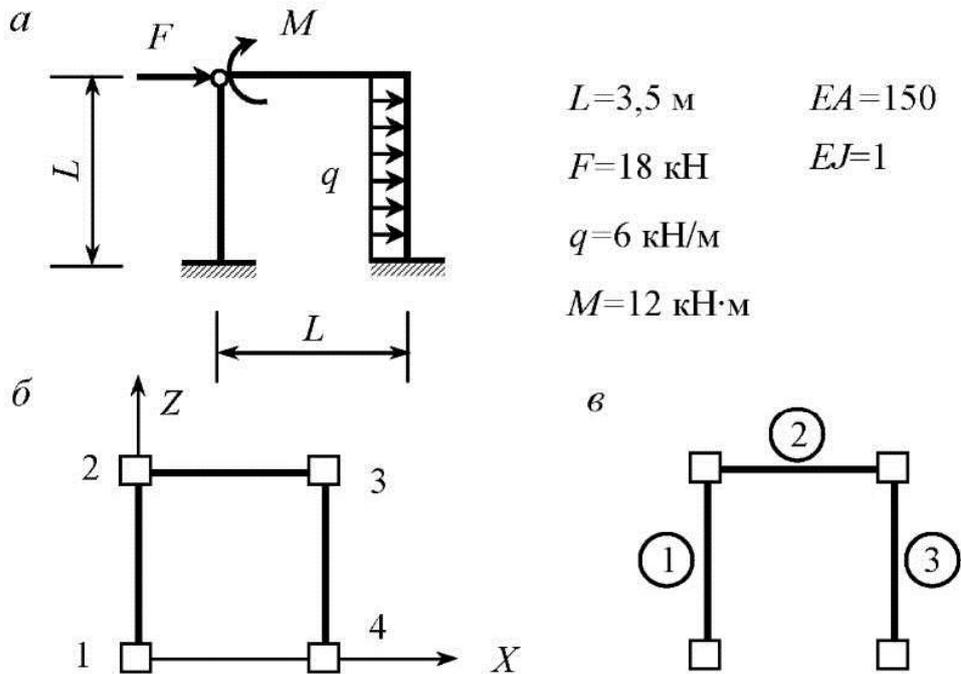


Рис. 4.1

Создаем в SCAD расчетную модель (тип схемы № 2 «плоская рама»). Задаем координаты узлов и соединяем их стержнями согласно принятой нумерации (рис. 4.1, б, в).

Назначаем жесткости стержней:

- способ задания «численное описание»;
- тип элемента «стержень плоской рамы (тип 2)»;
- продольная жесткость  $EF = 150$  кН;
- изгибная жесткость  $EJ_y = 1$  кН·м<sup>2</sup>;

Устанавливаем шарнир для первого элемента:

- освобождение угловых связей;
- конец элемента (узел 2);
- направление – вокруг оси  $y$  ( $U_y$ ).

Прикладываем нагрузки:

- «узловые нагрузки» – сила, направленная по оси  $X$ , величина  $F = -18$  кН, приложена к узлу № 2;
- «нагрузки на стержни», направление по оси  $X$ , величина  $q = -6$  кН/м, приложена к элементу № 3;
- «нагрузки на стержни» момент по оси  $Y$ , величина  $M = -12$  кН·м, привязка к началу элемента «0», приложен к элементу № 2.

Выполняем расчет.

Выводим результаты расчета:

- «единицы измерений», «выходные», «перемещения» в м, «усилия и напряжения» в кН, формат числа 1,123 (т. к. некоторые результаты расчета могут быть существенно меньше единицы).

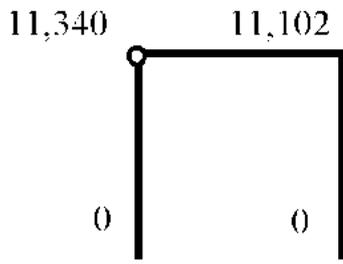
Недостающие ординаты выясняем с помощью функций

- «информация об элементе», «эпюры усилий» (для эпюр с ординатами разных знаков);
- «результаты», «печать таблиц», «усилия и напряжения» (для эпюр с ординатами одного знака).

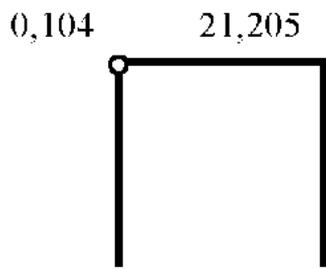
В результате получаем значения узловых перемещений по горизонтали, вертикали, углы поворота (рис. 4.2, *a*–*b*) и эпюры внутренних усилий (рис. 4.2, *г*–*д*).

Правило знаков для линейных перемещений (рис. 4.2, *a*), совпадает с принятым в лекционном курсе, а для угловых перемещений – противоположное (рис. 4.3, *б*, *в*). Показываем узловые перемещения на одной схеме (рис. 4.2, *г*). Для углов поворота, полученных в SCAD, следует поменять знаки на обратные, а для горизонтальных и вертикальных перемещений знаки оставить без изменений.

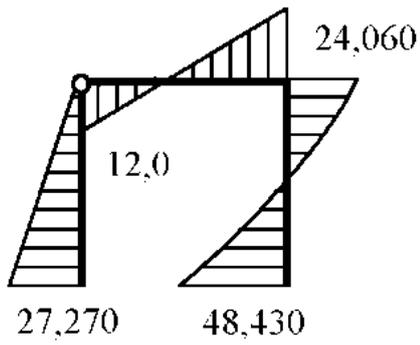
*a*



*b*

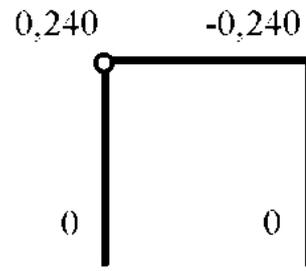


*d*

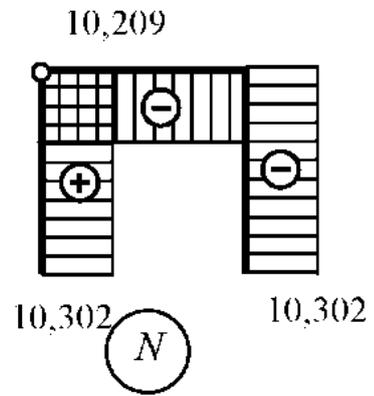


[кН·м]

*б*

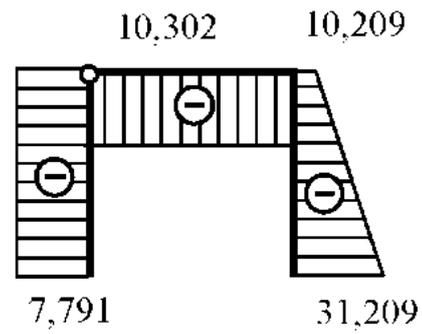


*z*



[кН]

*e*

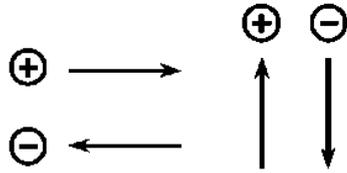


[кН]

Рис. 4.2

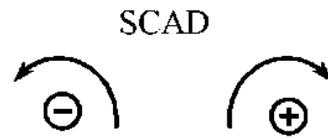
а

Правило знаков  
для линейных перемещений

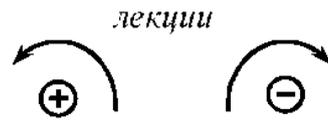


Правило знаков  
для угловых перемещений

б



в



з

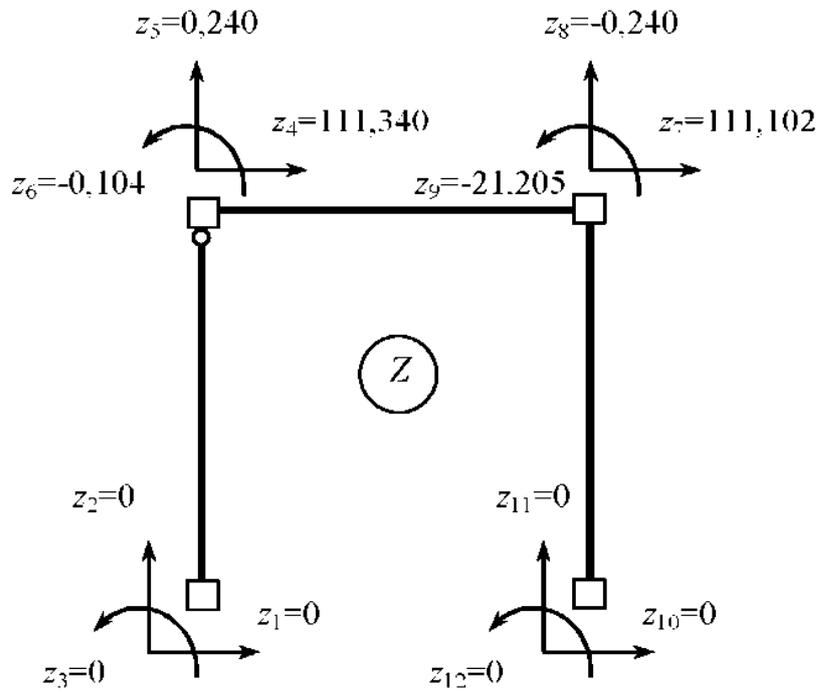


Рис. 4.3

Для вертикального конечного элемента формируем матрицу жесткости в местной и общей системе координат.

## Конечный элемент № 1

Показываем стержень в общей (рис. 4.4, а) и местной системе координат (рис. 4.4, б). Принимаем, что узел № 1 является начальным, а узел № 2 – конечным.

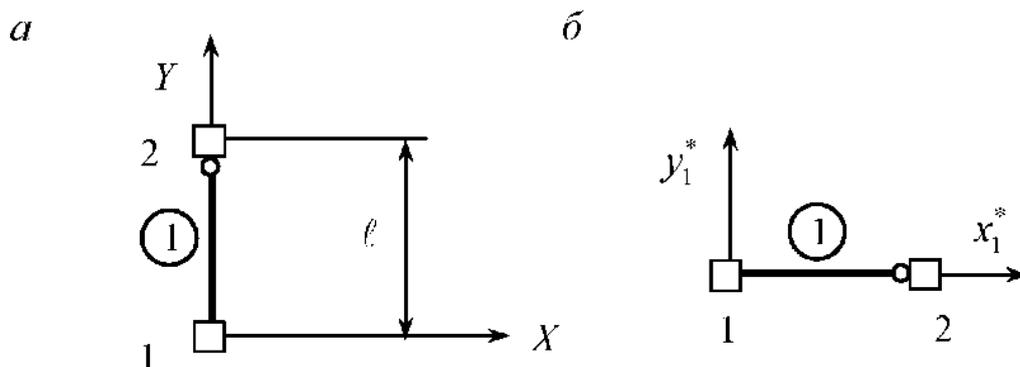


Рис. 4.4

Вычисляем при длине стержня  $\ell = 3,5$  м :

$$\cos \alpha = \frac{X_{\text{к}} - X_{\text{н}}}{\ell} = \frac{X_2 - X_1}{\ell} = \frac{0 - 0}{3,5} = 0;$$

$$\sin \alpha = \frac{Y_{\text{к}} - Y_{\text{н}}}{\ell} = \frac{Y_2 - Y_1}{\ell} = \frac{3,5 - 0}{3,5} = 1.$$

Матрица направляющих косинусов для стержня с шарниром в конце элемента (см. приложение)

$$[C] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица жесткости стержня с шарниром в конце элемента  
(см. приложение)

$$[k^*] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 \\ 0 & \frac{3EJ}{\ell^3} & \frac{3EJ}{\ell^2} & 0 & -\frac{3EJ}{\ell^3} \\ 0 & \frac{3EJ}{\ell^2} & \frac{3EJ}{\ell} & 0 & -\frac{3EJ}{\ell^2} \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 \\ 0 & -\frac{3EJ}{\ell^3} & -\frac{3EJ}{\ell^2} & 0 & \frac{3EJ}{\ell^3} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{150}{3,5} & 0 & 0 & -\frac{150}{3,5} & 0 \\ 0 & \frac{3 \cdot 1}{3,5^3} & \frac{3 \cdot 1}{3,5^2} & 0 & -\frac{3 \cdot 1}{3,5^3} \\ 0 & \frac{3 \cdot 1}{3,5^2} & \frac{3 \cdot 1}{3,5} & 0 & -\frac{3 \cdot 1}{3,5^2} \\ -\frac{150}{3,5} & 0 & 0 & \frac{150}{3,5} & 0 \\ 0 & -\frac{3 \cdot 1}{3,5^3} & -\frac{3 \cdot 1}{3,5^2} & 0 & \frac{3 \cdot 1}{3,5^3} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 42,857 & 0 & 0 & -42,857 & 0 \\ 0 & 0,070 & 0,245 & 0 & -0,070 \\ 0 & 0,245 & 0,857 & 0 & -0,245 \\ -42,857 & 0 & 0 & 42,857 & 0 \\ 0 & -0,070 & -0,245 & 0 & 0,070 \end{bmatrix}.$$

Переводим матрицу жесткости в общую систему координат по формуле  $[k] = [C] \cdot [k^*] \cdot [C]^T$ . Перемножаем матрицы  $[C] \times [k^*]$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 42,857 & 0 & 0 & -42,857 & 0 \\ 0 & 0,070 & 0,245 & 0 & -0,070 \\ 0 & 0,245 & 0,857 & 0 & -0,245 \\ -42,857 & 0 & 0 & 42,857 & 0 \\ 0 & -0,070 & -0,245 & 0 & 0,070 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -0,070 & -0,245 & 0 & 0,070 \\ 42,857 & 0 & 0 & -42,857 & 0 \\ 0 & 0,245 & 0,857 & 0 & -0,245 \\ 0 & 0,070 & 0,245 & 0 & -0,070 \\ -42,857 & 0 & 0 & 42,857 & 0 \end{bmatrix}.$$

Полученную матрицу умножаем на матрицу  $[C]^T$

$$\begin{bmatrix} 0 & -0,070 & -0,245 & 0 & 0,070 \\ 42,857 & 0 & 0 & -42,857 & 0 \\ 0 & 0,245 & 0,857 & 0 & -0,245 \\ 0 & 0,070 & 0,245 & 0 & -0,070 \\ -42,857 & 0 & 0 & 42,857 & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0,070 & 0 & -0,245 & -0,070 & 0 \\ 0 & 42,857 & 0 & 0 & -42,857 \\ -0,245 & 0 & 0,857 & 0,245 & 0 \\ -0,070 & 0 & 0,245 & 0,070 & 0 \\ 0 & -42,857 & 0 & 0 & 42,857 \end{bmatrix}.$$

*Допускается вычислять результат перемножения матриц в программных продуктах Microsoft Excel, OpenOffice Calc, MATLAB, Scilab и т. д. В этом случае следует сформировать исходные матрицы вручную и привести матрицу результат (без промежуточных вычислений).*

Вычисляем внутренние усилия по МКЭ с использованием перемещений узлов, полученных в SCAD.

Из полученных перемещений (рис. 4.3, з) выбираем вектор перемещений по концам конечного элемента № 1:

$$\{Z\} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 111,340 \\ 0,240 \end{bmatrix}.$$

Переводим перемещения в местную систему координат по формуле  $\{Z^*\} = [C]^T \cdot \{Z\}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 111,340 \\ 0,240 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,240 \\ -111,340 \end{bmatrix}.$$

Находим вектор реакций в местной системе координат перемножением матрицы жесткости элемента  $[k^*]$  на вектор перемещений  $\{Z^*\}$  по формуле  $\{r^*\} = [k^*] \cdot \{Z^*\}$

$$\begin{bmatrix} 42,857 & 0 & 0 & -42,857 & 0 \\ 0 & 0,070 & 0,245 & 0 & -0,070 \\ 0 & 0,245 & 0,857 & 0 & -0,245 \\ -42,857 & 0 & 0 & 42,857 & 0 \\ 0 & -0,070 & -0,245 & 0 & 0,070 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,240 \\ -111,340 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 42,857 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-42,857) \cdot 0,240 + 0 \cdot (-111,340) \\ 0 \cdot 0 + 0,070 \cdot 0 + 0,245 \cdot 0 + 0 \cdot 0,240 + (-0,070) \cdot (-111,340) \\ 0 \cdot 0 + 0,245 \cdot 0 + 0,857 \cdot 0 + 0 \cdot 0,240 + (-0,245) \cdot (-111,340) \\ -42,857 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 42,857 \cdot 0,240 + 0 \cdot (-111,340) \\ 0 \cdot 0 + (-0,070) \cdot 0 + (-0,245) \cdot 0 + 0 \cdot 0,240 + 0,070 \cdot (-111,340) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -10,286 \\ 7,794 \\ 27,278 \\ 10,286 \\ -7,794 \end{bmatrix}.$$

Показываем реакции в начале и в конце элемента с учетом знака (рис. 4.5, *a*). Положительные реакции направляем в ту же сторону, что и перемещения (рис. 4.3, *a*, *б*), а отрицательные в обратную сторону.

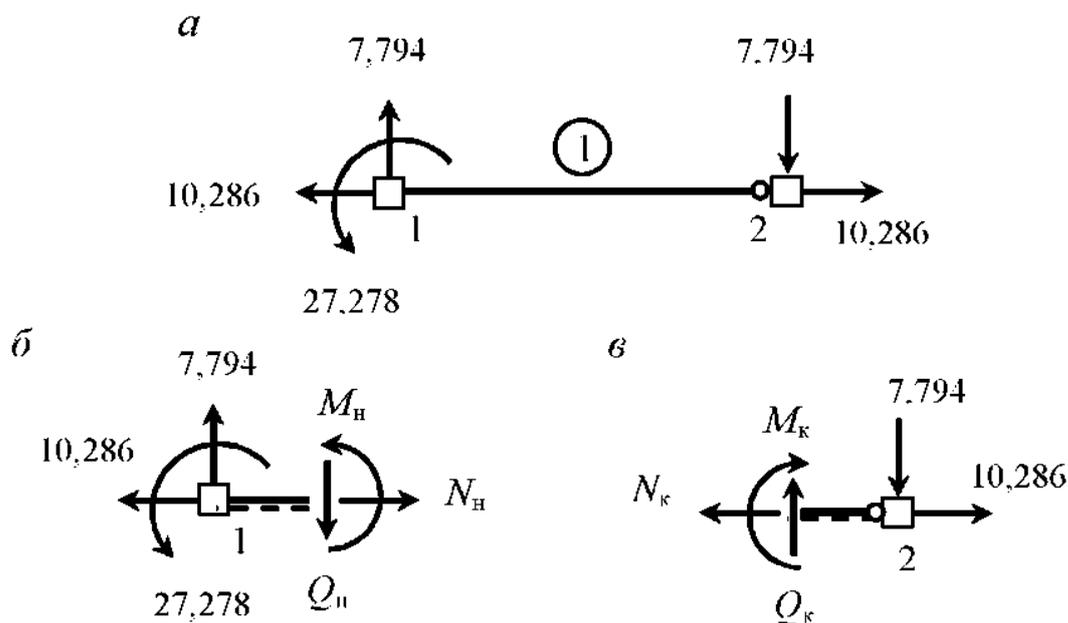


Рис. 4.5

По полученным реакциям находим продольные, поперечные силы и изгибающие моменты в начале элемента (рис. 4.5, *б*):

$$N_H = 10,286 \text{ кН};$$

$$Q_H = 7,794 \text{ кН};$$

$$M_H = -27,278 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Внутренние усилия в конце элемента (рис. 4.5, *в*):

$$N_K = 10,286 \text{ кН};$$

$$Q_K = 7,794 \text{ кН};$$

$$M_K = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Строим по этим расчетам эпюры в элементе № 1 (рис. 4.6). За исключением знака поперечной силы эти эпюры совпадают с эпюрами, построенными в SCAD.

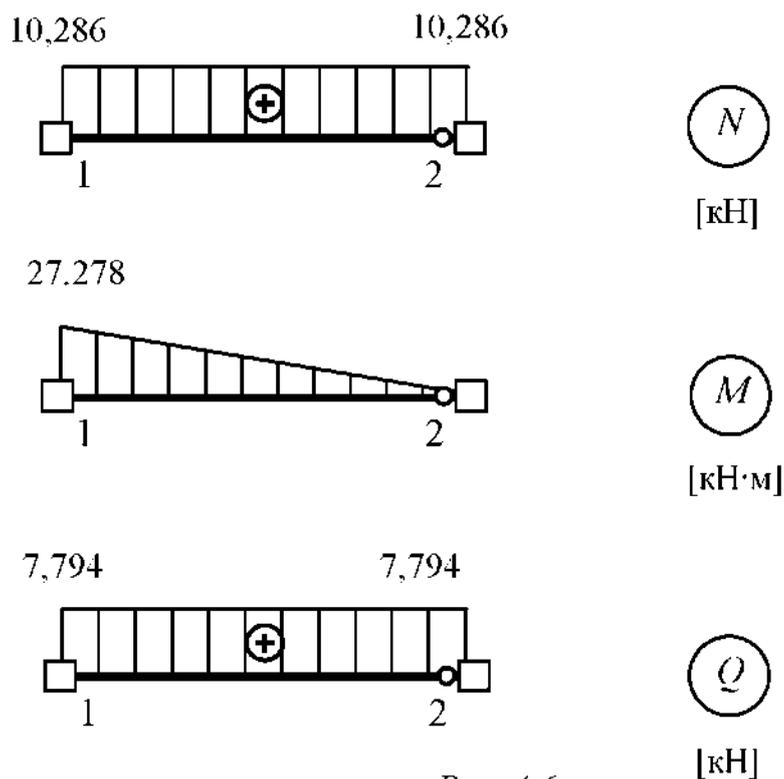


Рис. 4.6

*Не следует повторять в расчетно-графической работе все положения методических указаний (они нужны для уяснения рассматриваемого материала). Оформление работы должно быть выдержано в стиле краткой пояснительной записки к производимым расчетам.*

## Методические указания к оформлению задачи № 2

*Исходные данные для расчета.* Приводится расчетная схема с указанием геометрических размеров, нагрузок, размеров поперечных сечений, условий опирания. Записывается кратко цель расчета.

*Дискретизация системы.* Производится общий анализ рассматриваемой задачи: наличие стержней с криволинейной осью,

учитывается характер изменений в расчетной схеме. Приводятся схемы нумерации узлов и конечных элементов.

*Результаты расчета.* Приводится деформированная схема сооружения, указываются места и величины максимальных перемещений узлов по вертикали и горизонтали. Вычерчиваются эпюры внутренних усилий с указанием ординат в характерных сечениях.

*Статическая проверка полученного решения.* Проверяется равновесие одного узла или равновесие всей системы под действием заданной нагрузки и опорных реакций.

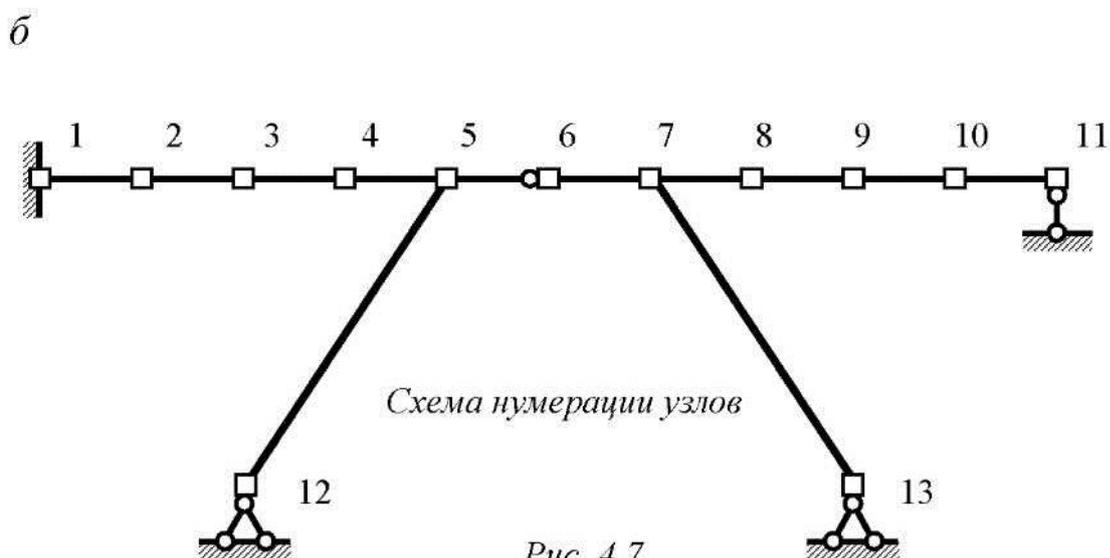
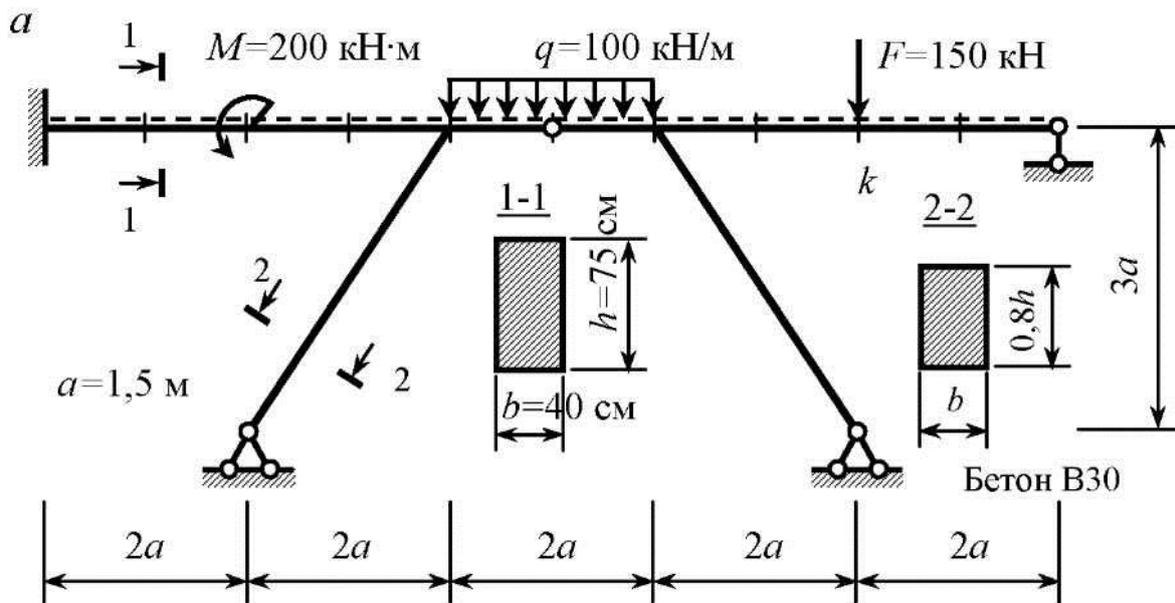
*Решение задачи при изменениях в расчетной схеме, построение линий влияния.* Производится анализ изменений в результатах расчета (указывается в процентном отношении изменение внутренних усилий, делается вывод о влиянии внесенных изменений на прочность и жесткость сооружения). При расчете на подвижную нагрузку необходимо описать порядок определения ординат и построить требуемые линии влияния.

## Пример выполнения задачи № 2

Схема рамы и исходные данные для расчета показаны на рис. 4.7, *а*. Дополнительно требуется построить линию влияния изгибающего момента в сечении «*k*» и произвести расчет при увеличении высоты ригеля в два раза.

Назначаем узлы (рис. 4.7, *б*), в том числе в сечениях, где будет расположена единичная сила при построении линии влияния. Схема нумерации конечных элементов показана на рис. 4.8, *а*.

После выполнения расчета показываем деформированную схему (рис. 4.8, *б*) и эпюры изгибающих моментов (рис. 4.8, *в*), поперечных и продольных сил (рис. 4.9, *а, б*).



Для статической проверки вырезаем узел (рис. 4.9, *в*) и составляем уравнения равновесия:

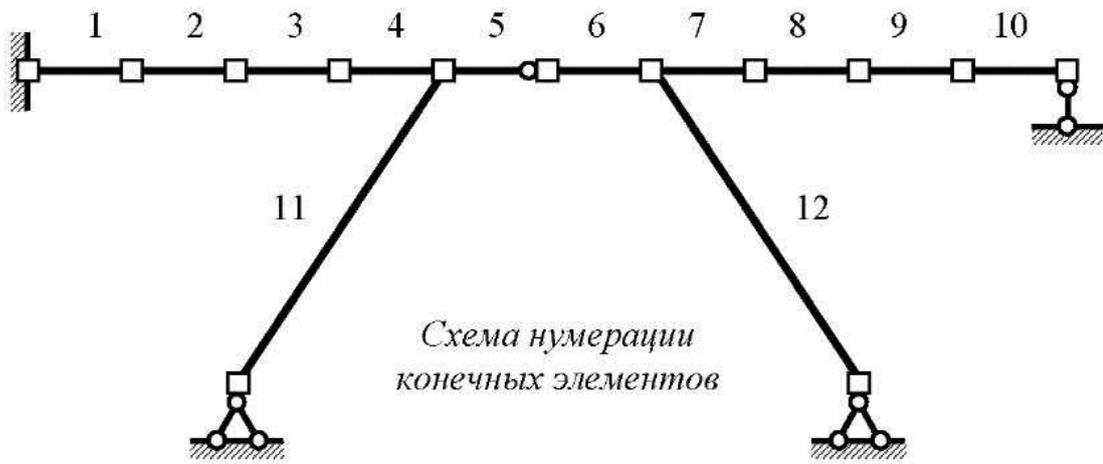
$$\sum x = 182,97 + 0,0 + 1,16 \cdot 0,832 - 331,59 \cdot 0,555 = 0,096 \approx 0;$$

$$\sum y = -175,4 - 101,14 + 1,16 \cdot 0,555 + 331,59 \cdot 0,832 = -0,013 \approx 0;$$

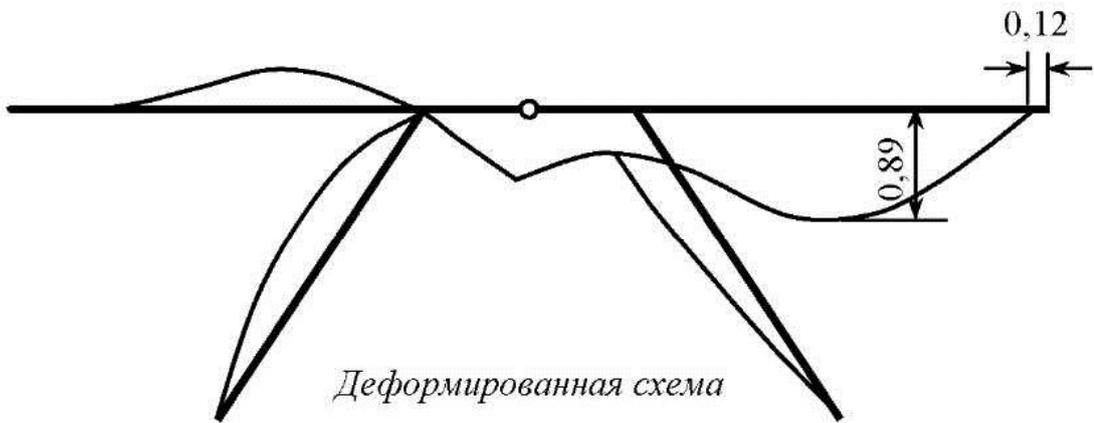
$$\sum m = 150,6 + 6,25 - 156,85 = 0,0.$$

Условия равновесия выполняются.

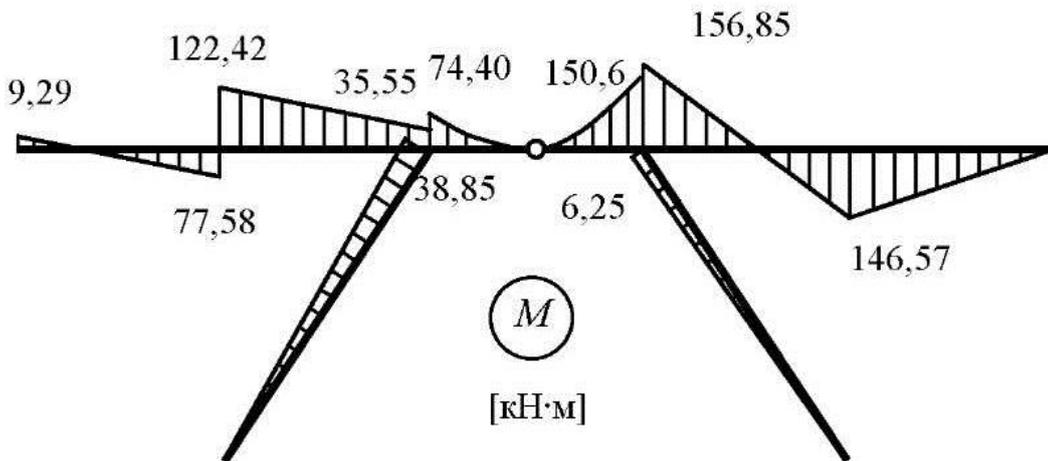
*a*



*б*

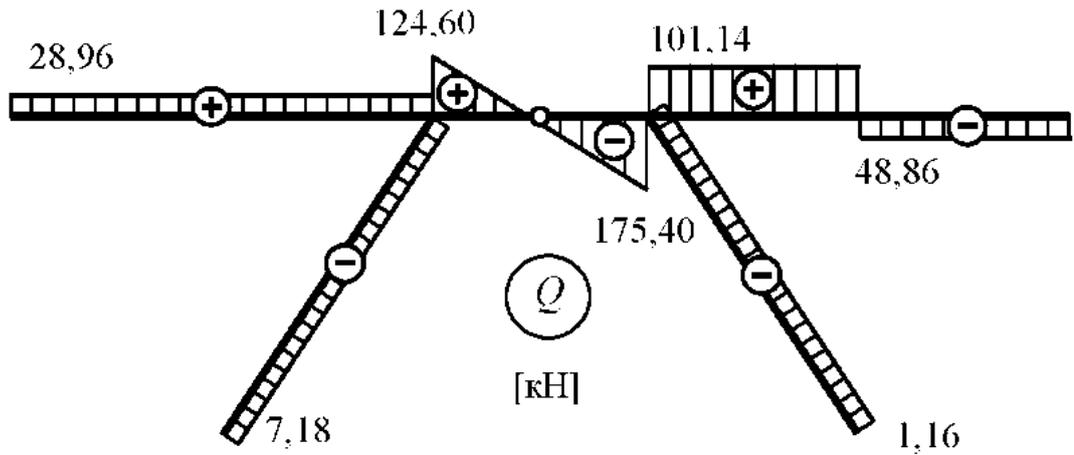


*в*

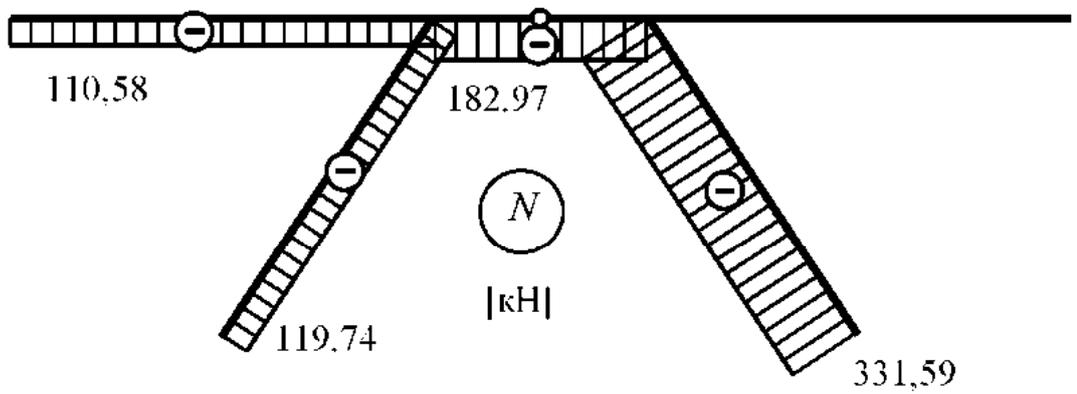


*Рис. 4.8*

*a*

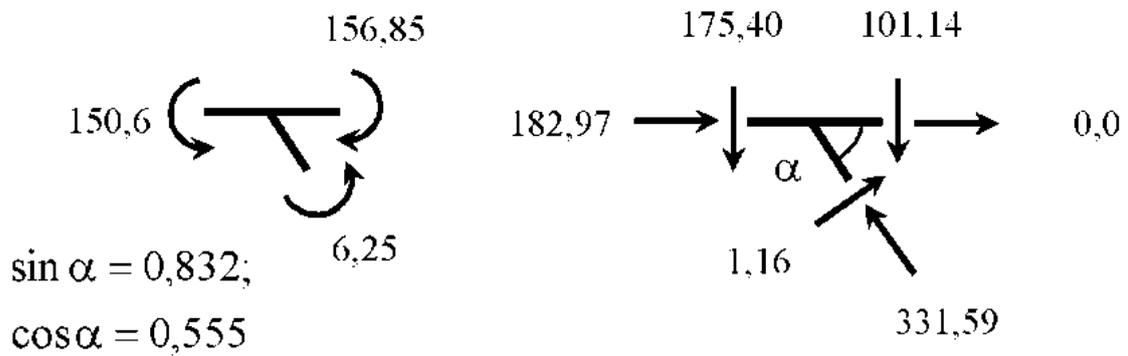


*б*



*в*

*Статическая проверка*



*Рис. 4.9*

Для построения линии влияния изгибающего момента в узле № 9 прикладываем единичную силу в узлах 2–10. По результатам расчета заполняем табл. 4.1 и строим линию влияния (рис. 4.10).

Таблица 4.1

**Ординаты линии влияния изгибающего момента**

$M_9$	Единичная сила в узле								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	0,02	0,04	0,04	-0,04	-0,23	0,05	0,52	1,22	0,57

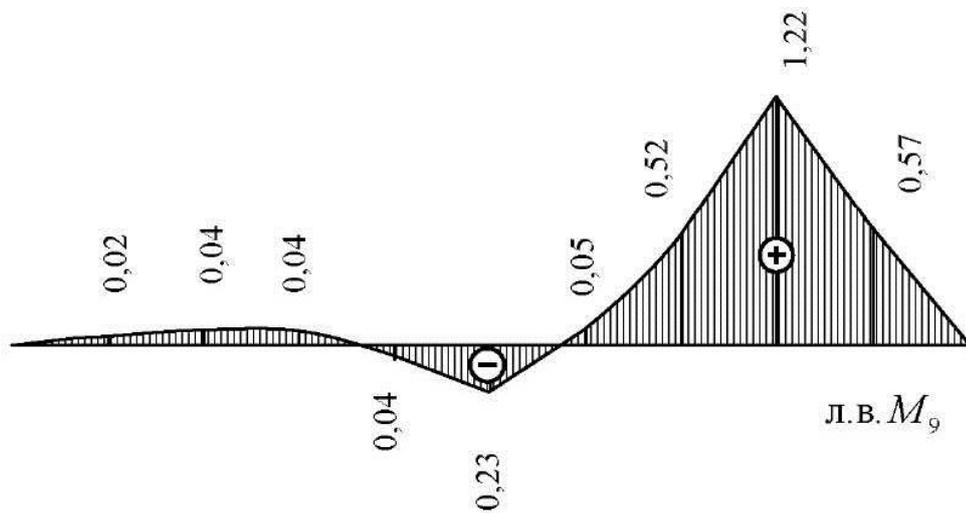


Рис. 4.10

Выполняем расчет при увеличении высоты сечения ригеля в два раза. Результаты расчета показаны на рис. 4.11. Сравнивая полученные внутренние усилия, делаем вывод, то при увеличении изгибной жесткости ригеля максимальный изгибающий момент в ригеле увеличился на 17 %, а максимальная продольная сила в наклонном стержне уменьшилась на 14 %.

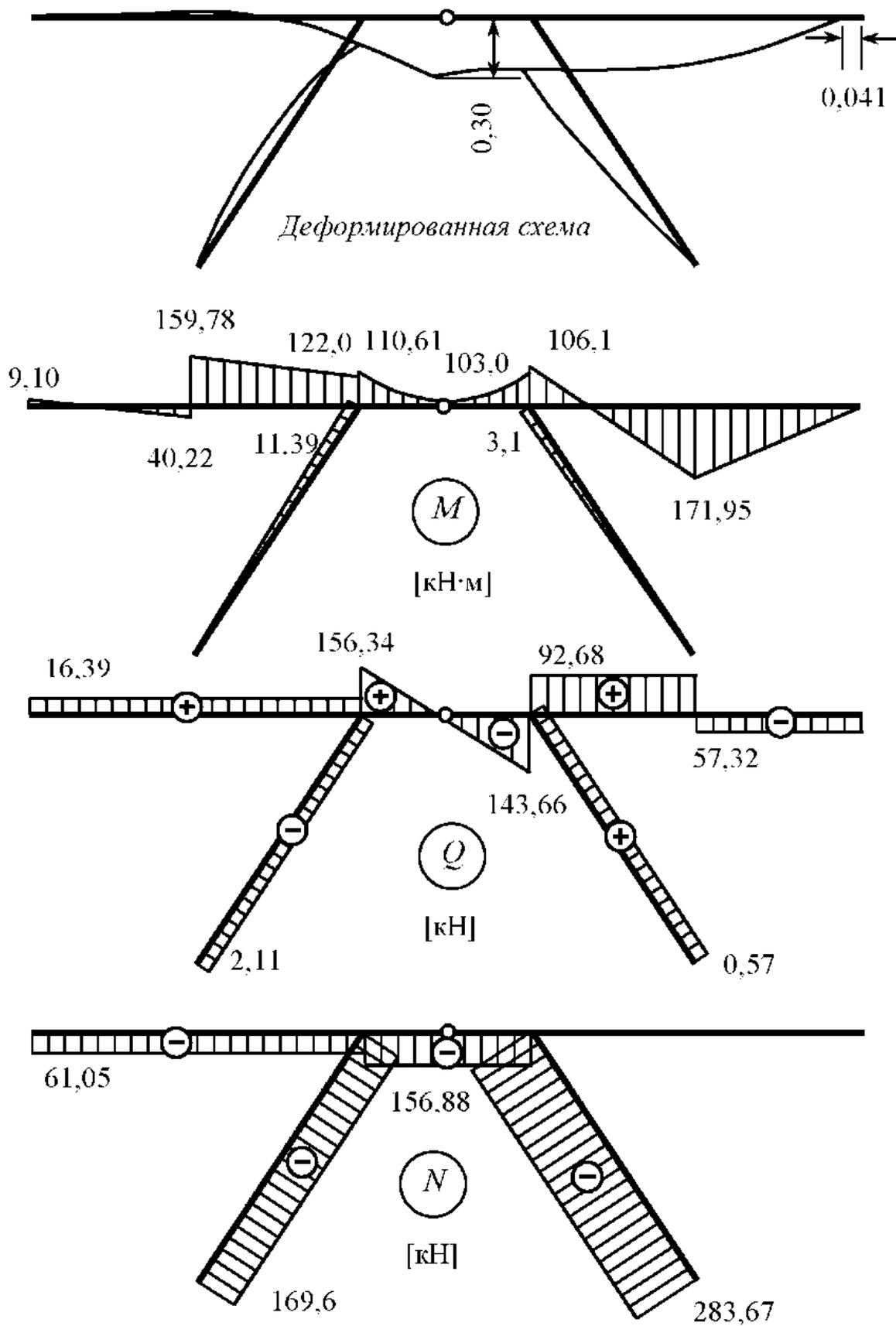


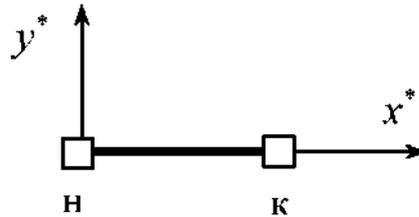
Рис. 4.11

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Ильин, В. П.* Численные методы решения задач строительной механики : учеб. пособие для вузов / В.П. Ильин, В.В. Карпов, А.М. Масленников. – М. : Изд-во АСВ, 2005. – 426 с.
2. *Александров, А.В.* Основы теории упругости и пластичности : учеб. для вузов / А.В. Александров, В.Д. Потапов. – М. : Высш. шк., 2007. – 400 с.
3. *Икрин, В.А.* Сопротивление материалов с элементами теории упругости и пластичности : учеб. для вузов / В.А. Икрин. – М. : Изд-во АСВ, 2005. – 424 с.
4. *Трушин, С.И.* Метод конечных элементов. Теория и задачи : учеб. пособие / С.И. Трушин. – М. : Изд-во АСВ, 2008. – 256 с.
5. *Агапов, В.П.* Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости конструкций : учеб. пособие / В.П. Агапов. – М. : Изд-во АСВ, 2004. – 248 с.
6. *Константинов, И.А.* Строительная механика : учеб. для вузов / И.А. Константинов, В.В. Лалин, И.И. Лалина. – М. : Проспект, КНОРУС, 2010. – 432 с.
7. SCAD Office. Вычислительный комплекс SCAD / В.С. Карпиловский [и др.]. – М. : Изд-во АСВ, 2007. – 592 с.
8. *Семенов, А.А.* Проектно-вычислительный комплекс SCAD в учебном процессе. Часть I. Статический расчет : учеб. пособие / А.А. Семенов, А.И. Габитов. – М. : Изд-во АСВ, 2005. – 152 с.
9. *Тухфатуллин, Б.А.* Расчет стержневых и континуальных систем методом конечных элементов : методические указания / Б.А. Тухфатуллин. – Томск : Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2000. – 30 с.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

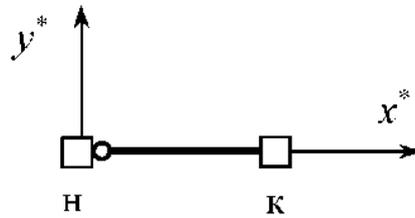
Матрицы жесткости  $[k^*]$  и направляющих косинусов  $[C]$  для стержня, жестко примыкающего к узлам в начале и в конце:



$$[k^*] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} & 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} & 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} & 0 & \frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} & 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix},$$

$$[C] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

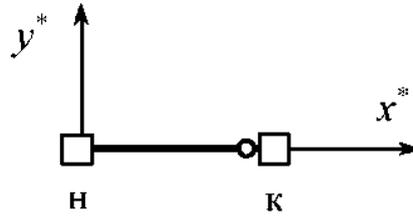
Матрицы жесткости  $[k^*]$  и направляющих косинусов  $[C]$  для стержня с шарниром в начале элемента:



$$[k^*] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EJ}{l^3} & 0 & -\frac{3EJ}{l^3} & \frac{3EJ}{l^2} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EJ}{l^3} & 0 & \frac{3EJ}{l^3} & -\frac{3EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{3EJ}{l^2} & 0 & -\frac{3EJ}{l^2} & \frac{3EJ}{l} \end{bmatrix},$$

$$[C] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрицы жесткости  $[k^*]$  и направляющих косинусов  $[C]$  для стержня с шарниром в конце элемента:



$$[k^*] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & \frac{3EJ}{l^3} & \frac{3EJ}{l^2} & 0 & -\frac{3EJ}{l^3} \\ 0 & \frac{3EJ}{l^2} & \frac{3EJ}{l} & 0 & -\frac{3EJ}{l^2} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{3EJ}{l^3} & -\frac{3EJ}{l^2} & 0 & \frac{3EJ}{l^3} \end{bmatrix},$$

$$[C] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение .....	3
1. Общие сведения о программном комплексе SCAD.....	4
2. Материалы для проведения практических занятий.....	9
3. Варианты заданий для расчетно-графической работы.....	16
4. Пример выполнения расчетно-графической работы.....	35
Библиографический список.....	52
Приложение.....	53