

**ОПД.Р.03 СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА
РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ НА УСТОЙЧИВОСТЬ
И ДИНАМИЧЕСКУЮ НАГРУЗКУ**

Указания к выполнению расчетно-проектировочных работ
с заданиями

Указания содержат задания и примеры выполнения расчетно-проектировочных работ по расчету стержневых систем: на устойчивость и динамическую нагрузку с применением ЭВМ.

§ 1 ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНЫХ РАБОТ

Студенты IV курса специальности ПГС в соответствии с учебной программой выполняют:

— расчетно-проектировочную работу по исследованию стержневых систем на устойчивость, в которой необходимо осуществить расчет плоской рамы на устойчивость с последующей проверкой полученного результата на ЭВМ;

— расчетно-проектировочную работу по расчету стержневых систем на динамическую нагрузку, в которой требуется определить частоты собственных колебаний масс стержневой системы и построить эпюры внутренних усилий от неподвижной динамической нагрузки.

Эта работа может быть выполнена или в традиционной, или в матричной форме с обязательной последующей проверкой частот собственных колебаний и динамической эпюры изгибающих моментов на ЭВМ.

Расчетные схемы стержневых систем (рис. 1, 2) и исходные данные (табл. 1, 2) выбираются по шифру, соответствующему номеру зачетной книжки.

Расчетно-проектировочная работа выполняется на бумаге формата А-4 с необходимыми вычислениями и пояснениями. Чертежи должны быть выполнены без помарок, с четкими надписями и обязательным соблюдением масштабов длин и сил. При всех характерных ординатах эпюр должны быть проставлены числовые значения, а фигуры эпюр должны быть заштрихованы тонкими линиями, которые проводятся перпендикулярно линиям основания. ординаты эпюр изгибающих моментов откладываются со стороны растянутого волокна, при этом знак не указывается. На чертеже показывается схема задания с проставленными числовыми (но не буквенными) значениями размеров и нагрузки.

Работы, выполненные по заданию, не соответствующему шифру зачетной книжки студента, не зачитываются.

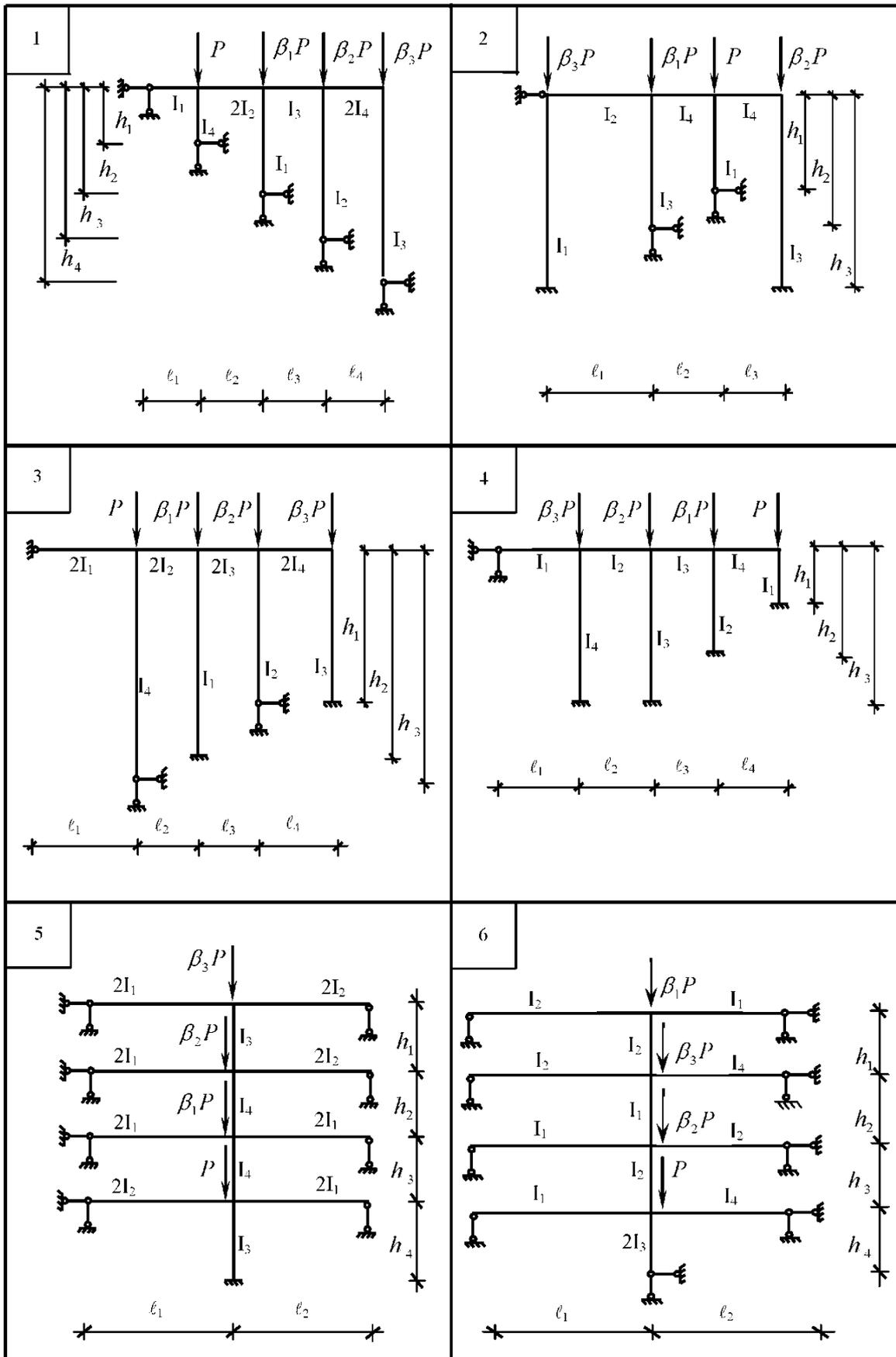


Рис. 1 (начало)

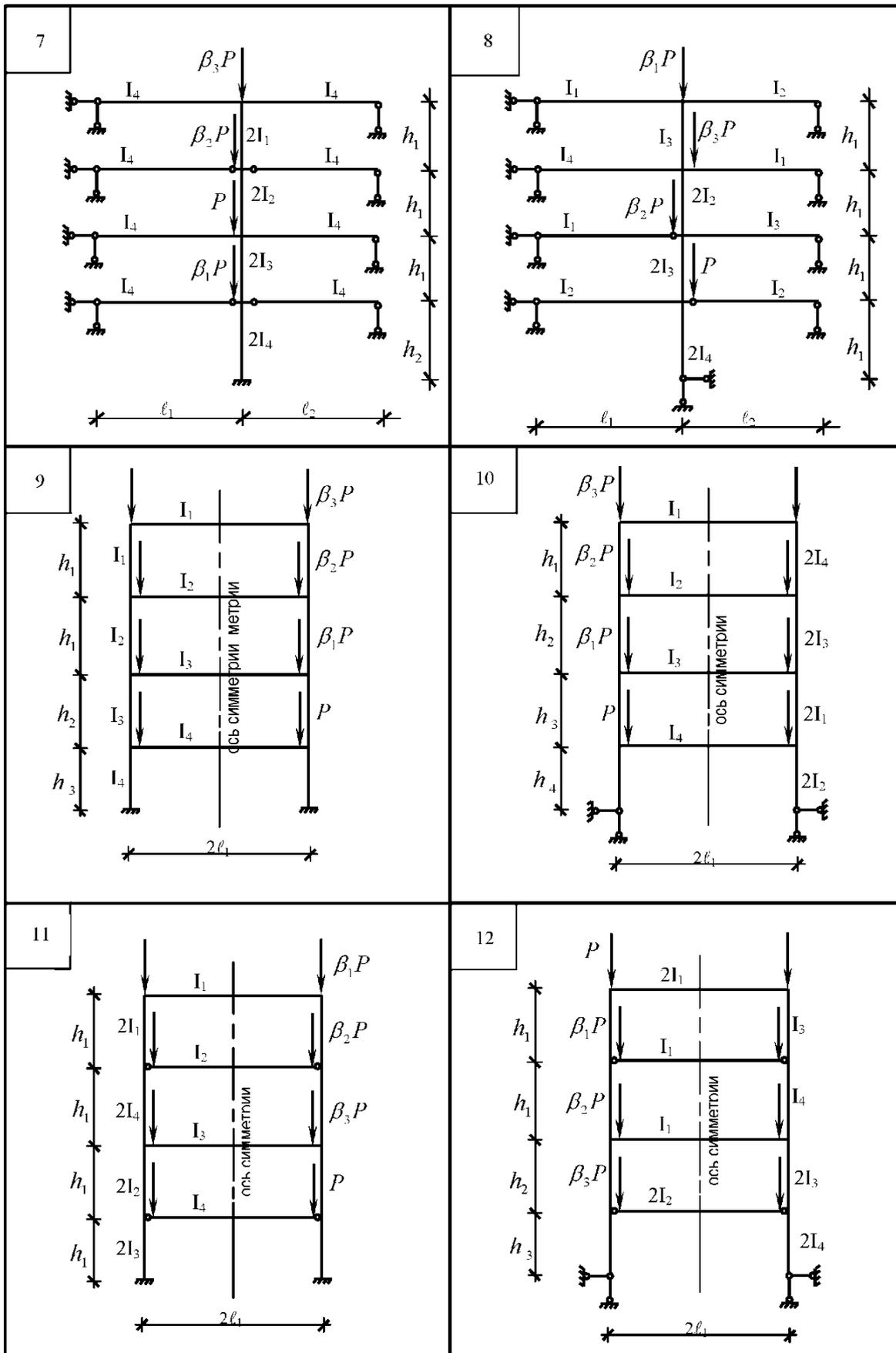


Рис. 1 (продолжение)

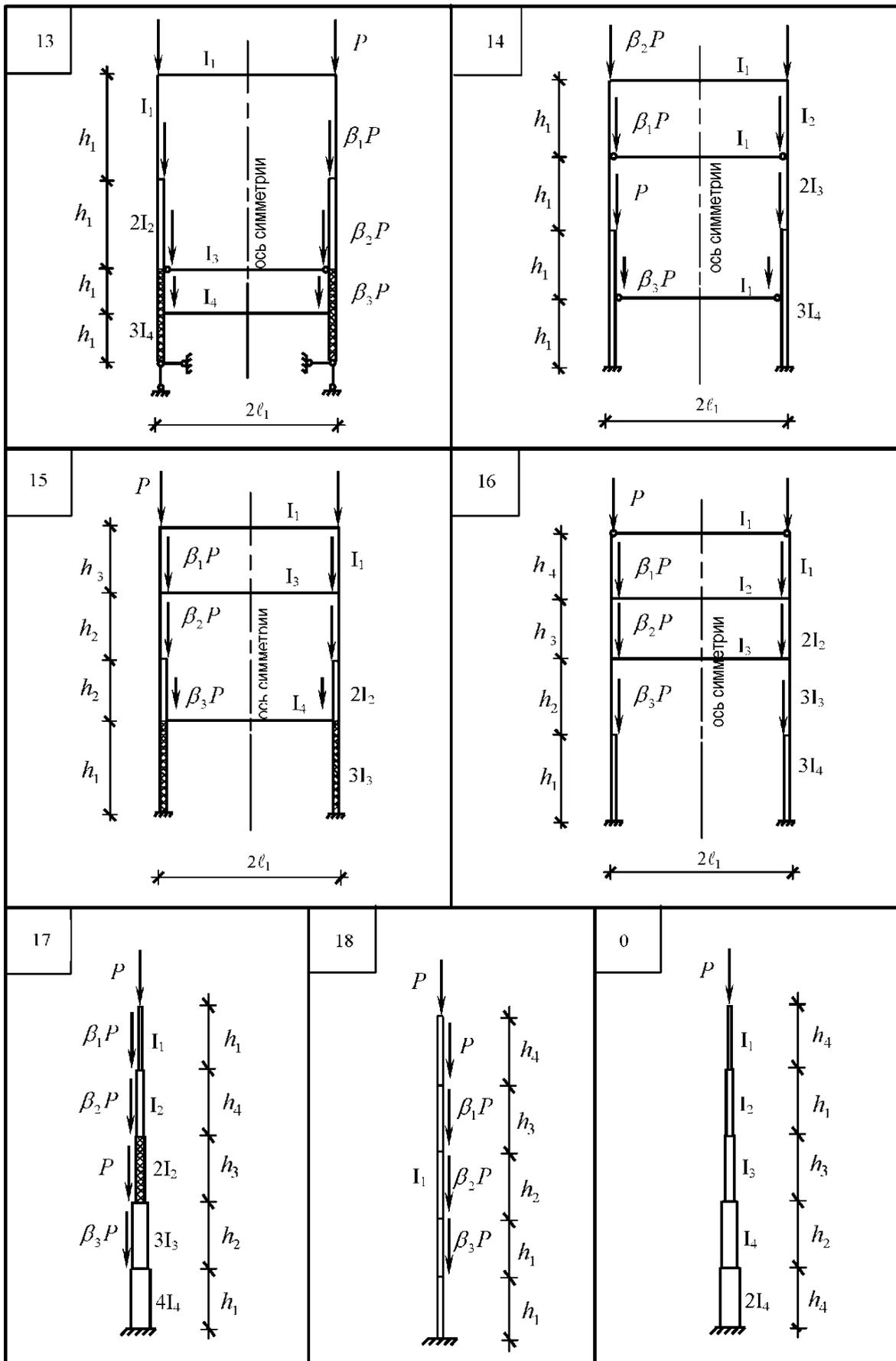


Рис.1 (окончание)

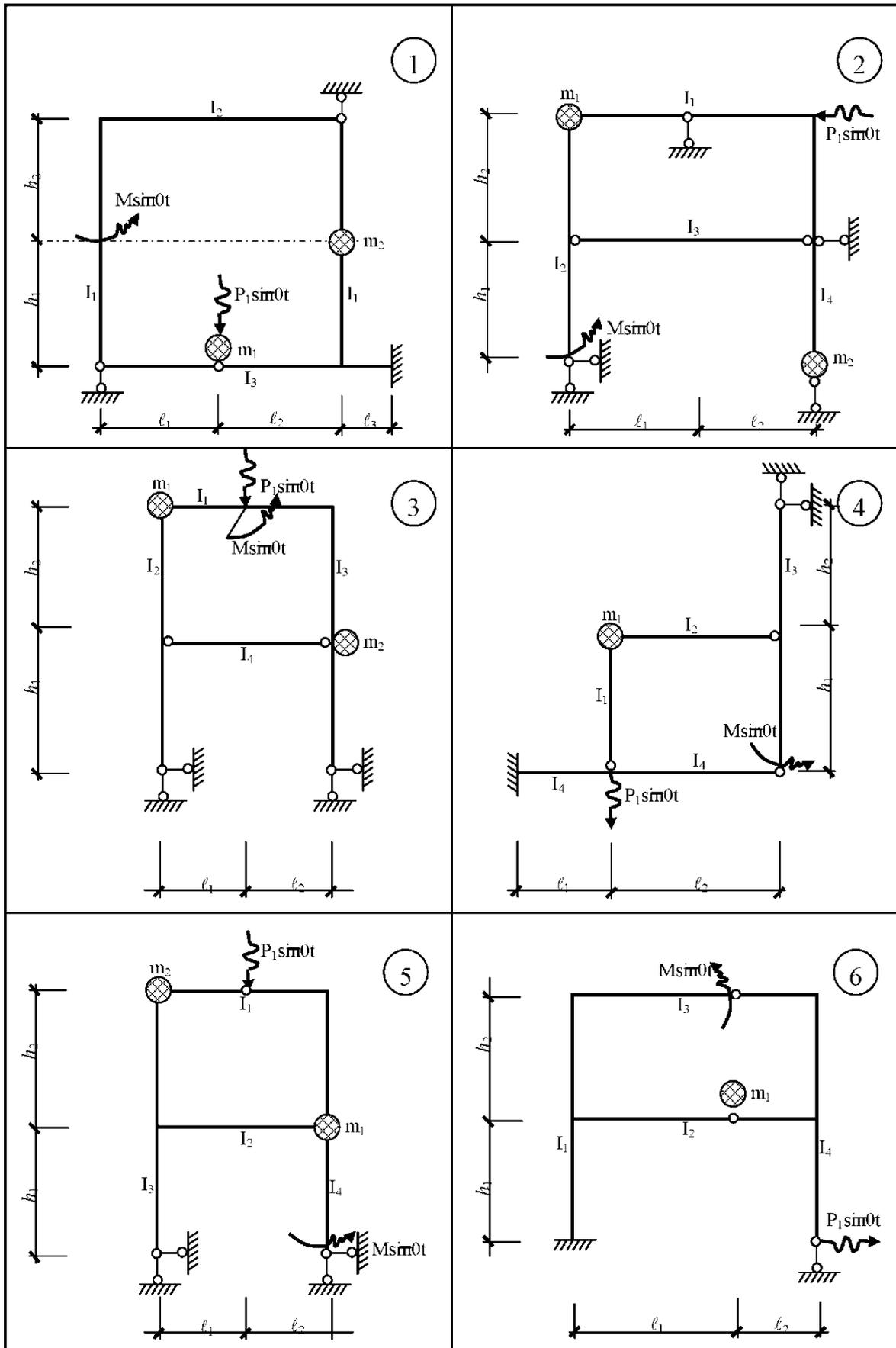


Рис. 2 (начало)

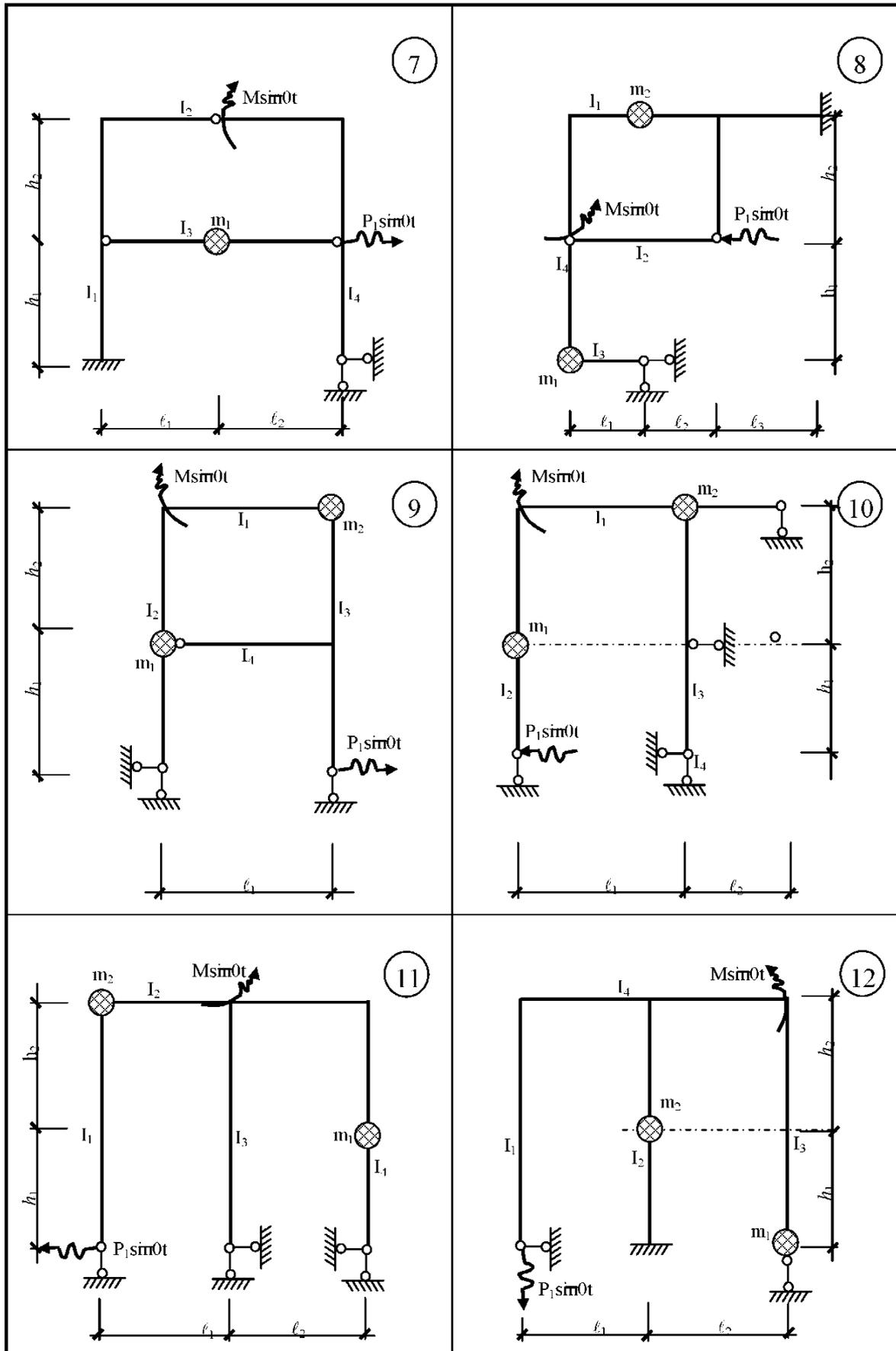


Рис. 2 (продолжение)

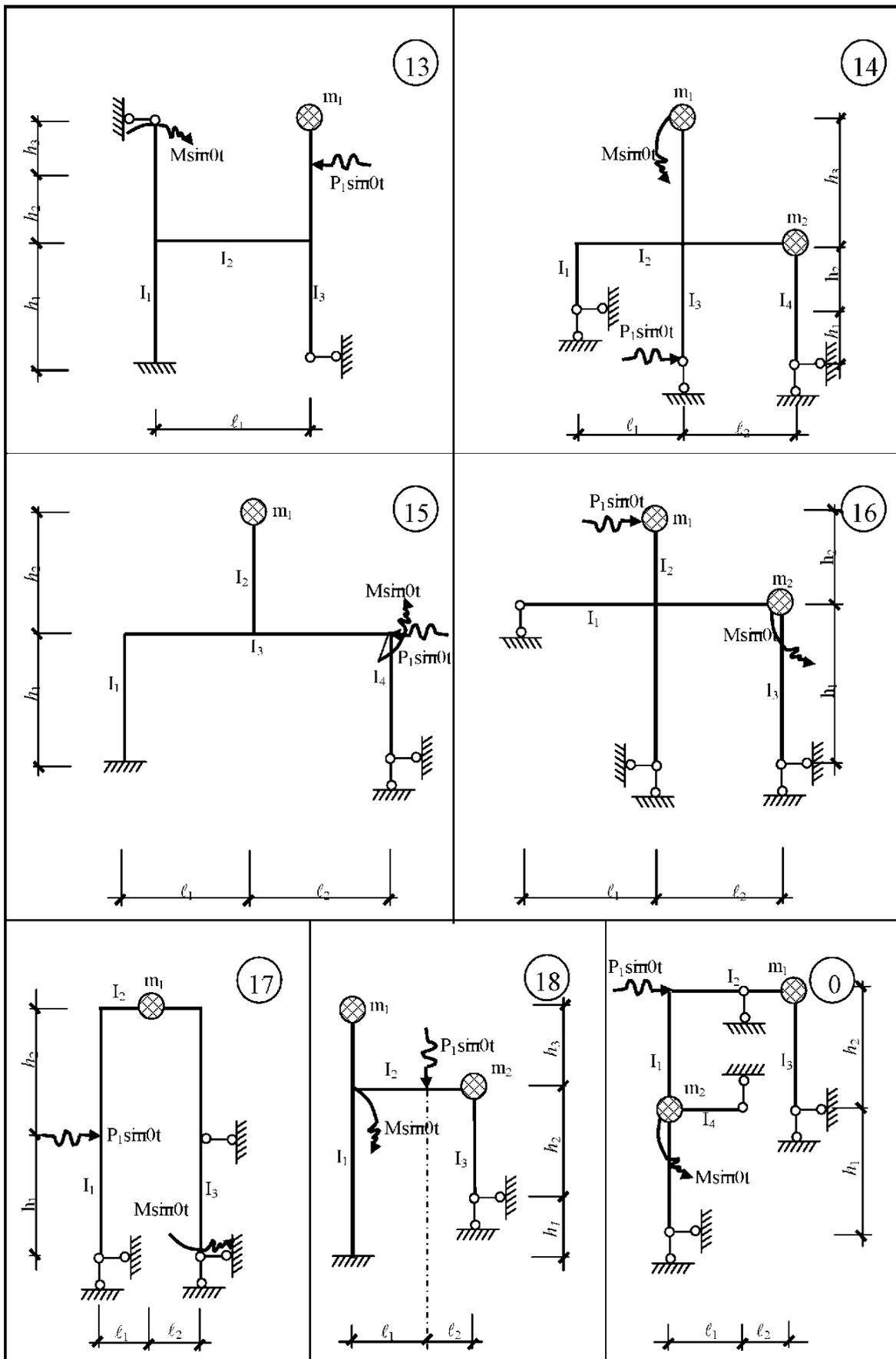


Рис. 2 (окончание)

Таблица 1

Предпоследняя цифра шифра	ℓ_3 , м	ℓ_4 , м	h_3 , м	h_4 , м	М, кН·м	Последняя цифра шифра	β_2	β_3	$\alpha_1 = \frac{I_2}{I_1}$	$\alpha_2 = \frac{I_3}{I_1}$	$\frac{M}{\kappa H \cdot c^2}$ М (масса)
0	3,0	3,5	2,8	8,0	10	0	1,2	1,4	3,0	1,1	40
1	3,5	3,6	3,2	7,6	11	1	2,0	3,2	2,8	1,2	38
2	4,0	3,7	3,6	7,2	12	2	0,8	1,6	2,6	1,3	36
3	4,5	3,8	4,0	6,6	13	3	1,4	2,1	2,4	1,4	34
4	5,0	3,9	4,2	6,4	14	4	3,2	1,5	2,2	1,5	32
5	5,5	4,1	4,6	5,8	15	5	0,6	2,4	2,0	1,6	30
6	6,0	4,2	4,8	5,4	16	6	1,5	2,2	1,8	1,7	28
7	6,5	4,3	5,0	4,8	17	7	2,8	1,9	1,6	1,8	26
8	7,0	4,4	5,2	4,2	18	8	1,6	2,8	1,4	1,9	24
9	7,5	4,6	5,4	3,8	19	9	2,4	1,8	1,2	2,0	22

Таблица 2

Сумма предпоследней и последней цифр шифра (номер схемы)	$I_1 = E \cdot J_1$, кН·м ²	P_1 , кН	$\frac{m_2}{m_1}$	h_1 , м	h_2 , м	l_1 , м	l_2 , м	$\frac{\theta}{\omega_{\max}}$	β_1	$\alpha_3 = \frac{I_4}{I_1}$
0	3600	9,6	0,5	3,5	3,0	6,0	2,4	0,75	1,1	1,1
1	4000	9,4	0,6	4,0	3,1	5,8	2,6	0,78	1,2	1,05
2	4400	9,2	0,7	4,5	3,2	5,6	2,8	0,80	1,3	1,15
3	4800	8,8	0,8	5,0	3,3	5,4	3,0	0,82	1,4	1,25
4	5200	8,6	0,9	5,5	3,4	5,2	3,2	0,84	1,5	1,35
5	5600	8,4	1,1	6,0	3,5	5,0	3,4	0,86	1,6	1,45
6	6000	8,2	1,2	6,5	3,6	4,8	3,6	0,88	1,7	1,55
7	6400	7,8	1,3	7,0	3,7	4,6	3,8	0,90	1,8	1,65
8	6600	7,6	1,4	7,5	3,8	4,4	4,0	0,92	1,9	1,75
9	6200	7,4	1,5	8,0	3,9	4,2	4,2	0,88	2,0	1,85
10	5800	7,2	1,6	7,5	4,0	4,0	4,4	0,86	2,1	1,95
11	5400	6,8	1,7	7,0	4,1	3,8	4,6	0,84	2,2	1,9
12	5000	6,6	1,8	6,5	4,2	3,6	4,8	0,82	2,3	1,8
13	4600	6,4	1,9	6,0	4,3	3,4	5,0	0,80	2,4	1,7
14	4200	6,2	2,1	5,5	4,4	3,2	5,2	0,78	2,5	1,6
15	3800	5,8	2,2	5,0	4,5	3,0	5,4	0,75	2,6	1,5
16	3400	5,6	2,3	4,5	4,6	2,8	5,6	0,90	2,7	1,4
17	3200	5,4	2,4	4,0	4,7	2,6	5,8	0,94	2,8	1,3
18	3200	5,2	2,5	3,5	4,8	2,4	6,0	0,96	2,9	1,2

§ 2 ПОРЯДОК РАСЧЕТА РАМ НА УСТОЙЧИВОСТЬ.

1. Найти погонные жесткости i_k для всех стержней по формуле

$$i_k = \frac{EJ_k}{\ell_k} = \frac{I_k}{\ell_k} \quad (1)$$

$$\text{где } f_{21} = \frac{-r_{21}}{r_{22} - \frac{r_{23} \cdot r_{32}}{r_{33} - \frac{r_{34} \cdot r_{43}}{r_{44} - \dots}}}$$

при этом уравнение устойчивости $\Delta = r_{11} + f_{21} \cdot r_{12}$

4. Построить эпюры изгибающих моментов, последовательно задаваясь единичными перемещениями наложенных связей. Для этого пользуются таблицами реакций (см. приложение 1). Если стержень не загружен сжимающими силами, необходимо все поправочные коэффициенты положить равными единице (эпюры изгибающих моментов для незагруженных стержней в приложении 1 показаны пунктирной линией).

5. Определить коэффициенты уравнения устойчивости путем составления уравнений равновесия для узлов и элементов системы.

6. Из трансцендентного уравнения устойчивости путем подбора найти значение параметра V_0 . Для этого надо задать ряд значений критического параметра V_0 , который изменяется в пределах от 0 до 2π . Определить значения поправочных коэффициентов и вычислить $\Delta = r_{11} + f_{21} \cdot r_{12}$.

Построить график функции в зависимости от изменения параметра V_0 , искомого значения которого соответствует точке пересечения графика функции Δ с осью V . Полученное приближенное решение задачи необходимо уточнить до 0,01. Для этого необходимо задать величину параметра V_0 , лежащего в окрестностях точного решения, определить значения поправочных коэффициентов. Если последние не удовлетворяют уравнению $\Delta = r_{11} + f_{21} \cdot r_{12}$, то надо принять другое значение параметра V_0 .

7. Для загруженных стержней найти величины критических сил

$$P_{kp}^i = \frac{V_i^2 I_i}{l_i^2}.$$

§ 3 ПРИМЕР РАСЧЕТА НА УСТОЙЧИВОСТЬ

симметричной рамы

Для показанной на рис. 3 рамы определить величину критической силы P , если $EJ=7200 \text{ кНм}^2$.

Решение

1. Определяем погонные жесткости стержней:

$$i_1 = \frac{4EJ}{18} = \frac{4 \cdot 7,2i_0}{18} = 1,6i_0; \quad i_2 = \frac{EJ}{3,6} = 2i_0;$$

$$i_3 = i_5 = i_7 = i_1 = 1,6i_0; \quad i_4 = \frac{1,5EJ}{3,6} = 3i_0;$$

$$i_6 = \frac{2EJ}{3,6} = 4i_0; \quad i_8 = \frac{3EJ}{3,6} = 6i_0.$$

Находим критические параметры:

$$V_2 = 3,6 \cdot \sqrt{(P/EJ)} = 0,725V_0; \quad V_4 = 3,6 \cdot \sqrt{(2,2P/1,5EJ)} = 0,879V_0;$$

$$V_6 = 3,6 \cdot \sqrt{(317/2EJ)} = 0,987V_0; \quad V_8 = 3,6 \cdot \sqrt{(5,7P/3EJ)} = V_0.$$

2. Вычисляем степень кинематической неопределимости.

Потеря устойчивости рассматриваемой рамы происходит по кососимметрической форме (с поворотом и горизонтальным смещением узлов (рис.4)). При этом углы поворота узлов – одного знака, а поперечные силы в стойках каждого этажа равны нулю. Следовательно, для заданной рамы с учетом симметрии степень кинематической неопределимости $n = n_x + n_y = 0 + 4 = 4$.

3. Для полу рамы, жесткость ригелей которой увеличена в два раза(рис.5), выбираем основную систему, приведенную на рис. 6. Записываем систему канонических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + r_{14}Z_4 = 0; & \quad r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + r_{24}Z_4 = 0; \\ r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + r_{34}Z_4 = 0; & \quad r_{41}Z_1 + r_{42}Z_2 + r_{43}Z_3 + r_{44}Z_4 = 0. \end{aligned} \right\}$$

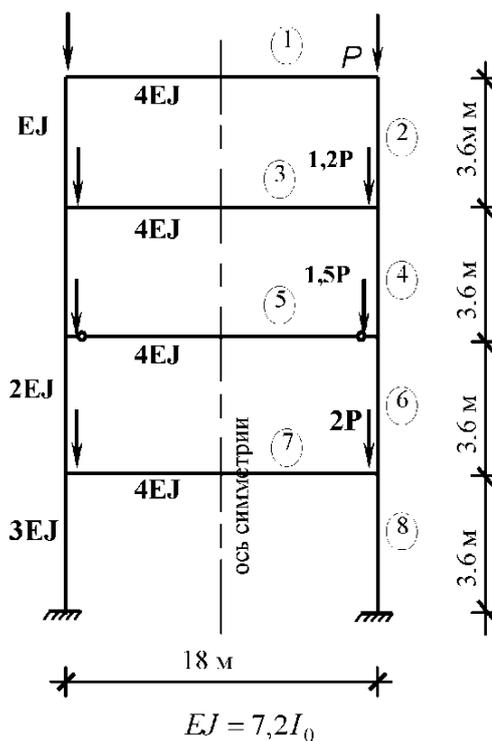


Рис. 3

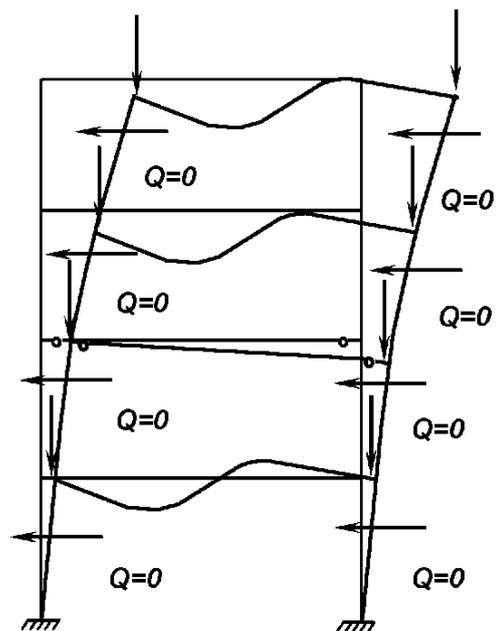


Рис. 4

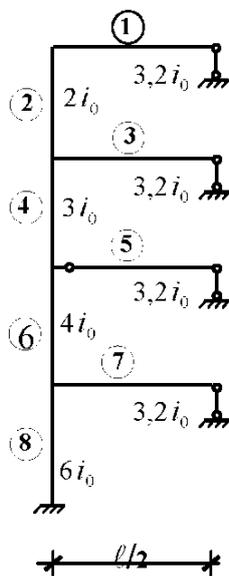


Рис. 5

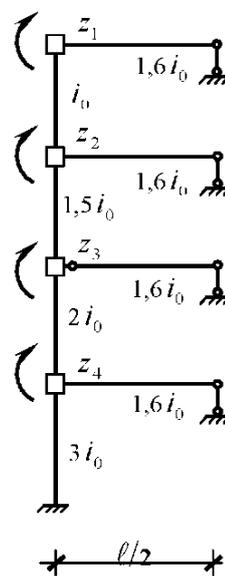


Рис. 6

4. Последовательно задаем единичные перемещения $Z_i=1$ ($i=1,2,3,4$) и с помощью таблицы реакций (см. приложение 1, случай 1, б) строим эпюры изгибающих моментов (рис. 7).

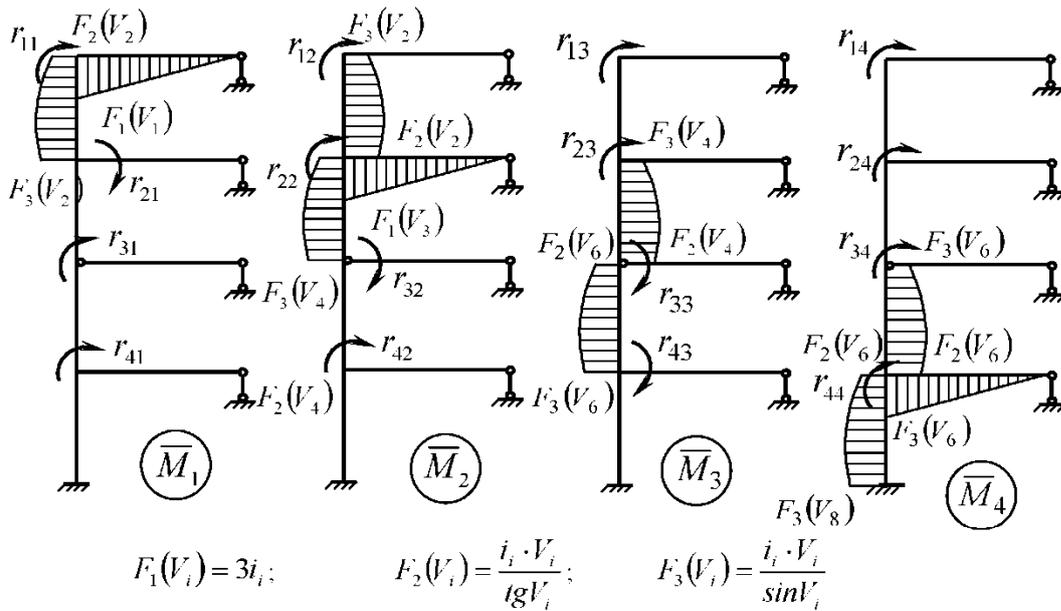


Рис. 7

5. Определяем коэффициенты канонических уравнений. Главные коэффициенты:

$$-r_{11} = F_1(V_1) + F_2(V_2) = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1,6i_0 + 2i_0 \cdot 0,725V_0}{\operatorname{tg}(0,725V_0)} = i_0 \left[\frac{9,6 + 2 \cdot 0,725V_0}{\operatorname{tg}(0,725V_0)} \right];$$

$$-r_{22} = F_1(V_3) + F_2(V_2) + F_2(V_4) = i_0 \left[\frac{9,6 + 2 \cdot 0,725V_0}{\operatorname{tg}(0,725V_0)} + \frac{3 \cdot 0,879V_0}{\operatorname{tg}(0,879V_0)} \right];$$

$$-r_{33} = F_3(V_4) + F_2(V_6) = i_0 \left[\frac{3 \cdot 0,879V_0}{\operatorname{tg}(0,879V_0)} + \frac{4 \cdot 0,987V_0}{\operatorname{tg}(0,987V_0)} \right];$$

$$-r_{44} = F_1(V_7) + F_2(V_6) + F_2(V_8) = i_0 \left[\frac{9,6 + 4 \cdot 0,987V_0}{\operatorname{tg}(0,987V_0)} + \frac{6V_0}{\operatorname{tg}V_0} \right];$$

Побочные коэффициенты:

$$-r_{12} = r_{21} = -F_3(V_2) = \frac{-i_2 V_2}{\sin V_2} = \frac{-2i_0 \cdot 0,725V_0}{\sin(0,725V_0)};$$

$$-r_{32} = r_{23} = -F_3(V_4) = \frac{-3i_0 \cdot 0,879V_0}{\sin(0,879V_0)};$$

$$-r_{43} = r_{34} = -F_3(V_6) = \frac{-4i_0 \cdot 0,879V_0}{\sin(0,879V_0)};$$

Остальные коэффициенты $r_{ij} = 0$.

6. Задаем ряд значений V_0 , вычисляем величину $\Delta = r_{11} + f_{21} \cdot r_{12}$ (см. табл. 3) и строим ее график (рис. 8).

Таблица 3

V_0	$\frac{r_{11}}{i_0}$	$\frac{r_{22}}{i_0}$	$\frac{r_{33}}{i_0}$	$\frac{r_{44}}{i_0}$	$\frac{r_{12}}{i_0}$	$\frac{r_{23}}{i_0}$	$\frac{r_{34}}{i_0}$	Δ
0	11,6	14,6	7	19,6	-2	-3	-4	11,296
0,5	11,512	14,316	6,474	18,761	-2,044	-3,099	-4,167	11,179
1,0	11,237	13,421	4,792	16,061	-2,187	-3,424	-4,731	10,757
1,2	11,068	12,863	3,723	14,327	-2,276	-3,638	-5,115	10,187
1,28	10,990	12,602	3,217	13,503	-2,319	-3,741	-5,302	-8,569

Уточняем корень и асимптоту уравнения (7)

1,27	11,000	12,636	3,283	13,610	-2,313	-3,727	-5,277	7,179
1,278	10,992	12,609	3,230	13,524	-2,318	-3,738	-5,297	0,605
1,282	10,988	12,596	3,204	13,481	-2,320	-3,743	-5,307	-222,4
1,283	10,987	12,592	3,197	13,470	-2,320	-3,745	-5,309	61,48
1,2783	10,992	12,608	3,228	13,521	-2,318	-3,738	-5,298	-0,168
1,2782	10,992	12,609	3,229	13,522	-2,318	-3,738	-5,298	0,102

Принимаем $V_0=1,2782$.

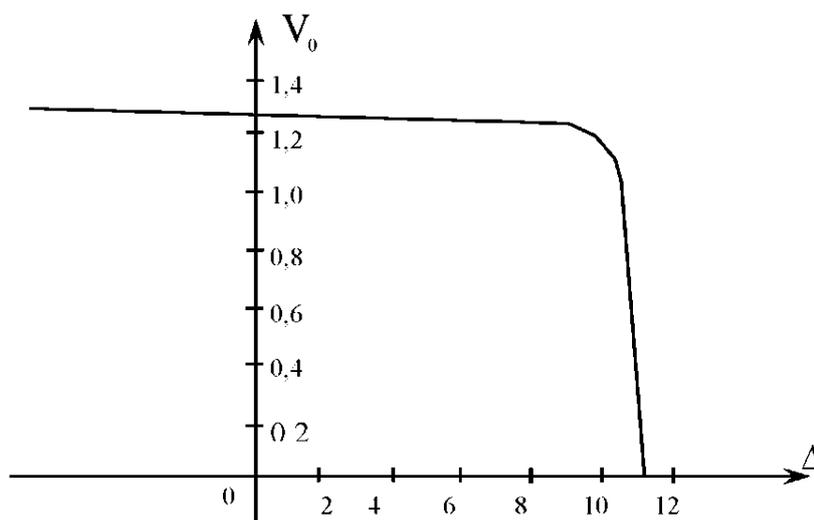
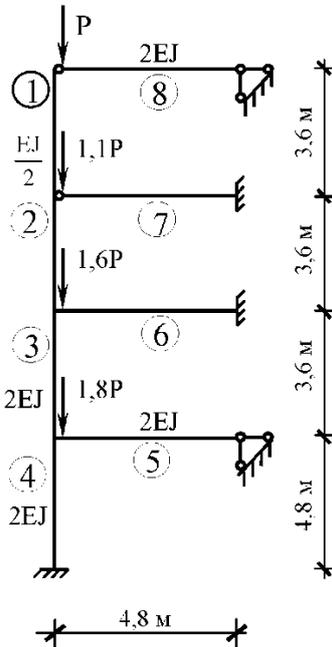


Рис. 8

7. Определяем величины критических сил для нагруженных стержней:

$$P_{кр,2} = \frac{(1,2782 \cdot 0,725)^2 \cdot 7200}{3,6^2} = 477,1 \text{ кН};$$



$$P_{кр,6} = \frac{(1,2782 \cdot 0,987)^2 \cdot 7200 \cdot 2}{3,6^2} = 1768,4 \text{ кН};$$

$$P_{кр,4} = \frac{(1,2732 \cdot 0,879)^2 \cdot 7200 \cdot 1,5}{3,6^2} = 1051,9 \text{ кН};$$

$$P_{кр,8} = \frac{1,2782^2 \cdot 7200 \cdot 3}{3,6^2} = 2723,0 \text{ кН}.$$

§ 4 ПРИМЕР РАСЧЕТА НА УСТОЙЧИВОСТЬ

не симметричной рамы

Для заданной рамы (рис. 9) определить величину критической силы P , если $EJ - 7200 \text{ кНм}^2$.

1. Определяем погонные жесткости:

$$i_1 = \frac{EJ}{2 \cdot 3,6} = \frac{i_0}{2}; \quad i_3 = \frac{2EJ}{3,6} = 2i_0;$$

$$i_2 = \frac{EJ}{3,6} = i_0;$$

$$i_4 = \frac{2EJ}{4,8} = 1,5i_0;$$

$$i_5 = \frac{2EJ}{4,8} = 1,5i_0;$$

$$i_6 = \frac{4EJ}{4,8} = 3i_0;$$

$$i_7 = \frac{4EJ}{4,8} = 3i_0;$$

$$i_8 = \frac{2EJ}{4,8} = 1,5i_0.$$

Находим критические параметры:

$$V_1 = 3,6 \cdot \sqrt{\frac{2P}{EJ}} = 0,640V_0; \quad V_2 = 3,6 \cdot \sqrt{\frac{2,1P}{EJ}} = 0,655V_0;$$

Рис. 9

$$V_3 = 3,6 \cdot \sqrt{\frac{3,7P}{2EJ}} = 0,615V_0; \quad V_4 = 4,8 \cdot \sqrt{\frac{5,5P}{2EJ}} = V_0.$$

2. Вычисляем степень кинематической неопределимости $n = n_y + n_x$;
 $n_y = 3$; $n_x = 0$; $n = 3$. Выбираем основную систему метода перемещений (рис.10).

3. Записываем систему кинематических уравнений и уравнение устойчивости:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{11} \cdot z_1 + \Gamma_{12} \cdot z_2 + \Gamma_{13} \cdot z_3 &= 0; \\ \Gamma_{21} \cdot z_1 + \Gamma_{22} \cdot z_2 + \Gamma_{23} \cdot z_3 &= 0; \\ \Gamma_{31} \cdot z_1 + \Gamma_{32} \cdot z_2 + \Gamma_{33} \cdot z_3 &= 0. \end{aligned} \right\}; \quad \Delta = \begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

4. Последовательно задаем единичные перемещения $z_i = 1$ ($i = 1,2,3,4$) и с помощью таблицы реакций (см. приложение 1 случаи 1 и 3) строим эпюры изгибающих моментов (рис.11).

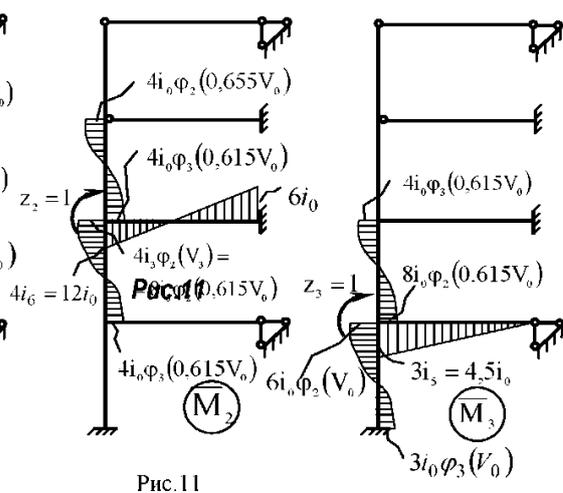
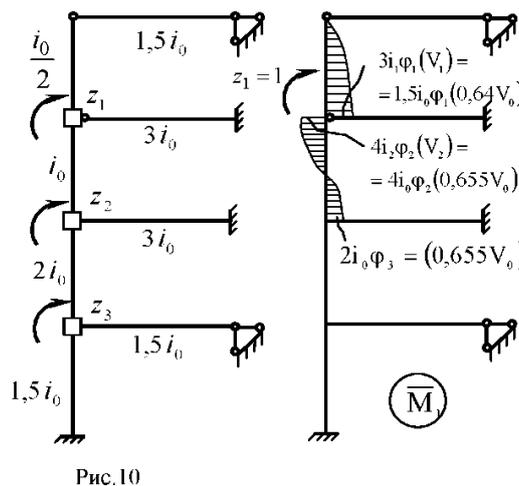
5. Определяем коэффициенты канонических уравнений.

Главные коэффициенты:

$$\Gamma_{11} = i_0 [1,5\varphi_1(0,64V_0) + 4\varphi_2(0,655V_0)];$$

$$\Gamma_{22} = i_0 [12 + 4\varphi_2(0,655V_0) + 8\varphi_2(0,615V_0)];$$

$$\Gamma_{33} = i_0 [4,5 + 8\varphi_2(0,615V_0) + 6\varphi_2(V_0)].$$



Побочные коэффициенты:

$$r_{12} = 2i_0 \cdot \varphi_3(0,655V_0); r_{13} = 0; r_{23} = 4i_0 \cdot \varphi_3(0,615V_0).$$

6. Задаем ряд значений V_0 , вычисляем величину $\Delta = r_{11} + f_{21} \cdot z_{12}$ (см. табл. 4).

Таблица 4

V_0	$\varphi_1(0,64V_0)$	$\varphi_2(0,655V_0)$	$\varphi_3(0,615V_0)$	$\varphi_4(V_0)$	$\frac{\Gamma_{11}}{i_0}$	$\frac{\Gamma_{22}}{i_0}$	$\frac{\Gamma_{33}}{i_0}$	$\frac{\Gamma_{12}}{i_0}$	$\frac{\Gamma_{23}}{i_0}$	Δ
0	1	1	1	1	5,5	24	18,5	2	4	5,327
2,5	0,8153	0,9045	0,9186	0,7720	4,841	22,9668	16,4808	2,1004	4,1696	4,6397
5	-0,0635	0,5769	0,6359	-0,4772	2,2123	19,3948	6,724	2,5264	4,8808	1,8097
5,4	-0,4137	0,4888	0,5627	-1,1583	1,3346	18,4568	2,0518	2,6638	5,0964	0,1108
5,42	-0,4352	0,4847	0,5585	-1,2043	1,286	18,4068	1,7422	2,6716	5,1084	-0,796
5,41	-0,4244	0,4865	0,5608	-1,1813	1,3094	18,4324	1,8986	2,656	5,1028	-0,1858
5,404	-0,4178	0,4878	0,5617	-1,1675	1,3245	18,4448	1,9886	2,6656	5,0988	0,0017

Принимаем $V_0 = 5,404$.

7. Вычисляем критические параметры и силы:

$$V_1 = 3,45856; \quad V_1^2 = 11,9616; \quad P_{кр,1} = \frac{11,9616 \cdot 7200}{2 \cdot 3,6^2} = 3322,7;$$

$$V_2 = 3,5396; \quad V_2^2 = 12,5289; \quad P_{кр,2} = \frac{12,5289 \cdot 7200}{3,6^2} = 6960,5;$$

$$V_3 = 3,32346; \quad V_3^2 = 11,0454; \quad P_{кр,3} = \frac{11,0454 \cdot 2 \cdot 7200}{3,6^2} = 12272,7;$$

$$V_4 = 5,404; \quad V_4^2 = 29,2032; \quad P_{кр,4} = \frac{29,2032 \cdot 2 \cdot 7200}{4,8^2} = 18252.$$

§ 5 РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ НА УСТОЙЧИВОСТЬ С ПРИМЕНЕНИЕМ ЭВМ.

Программа «USTOJ», созданная на кафедре прикладной механики Мордовского государственного университета имени Н. П. Огарева, позволяет рассчитывать плоские стержневые системы на устойчивость. Она базируется на методе перемещений и может применяться при расчете систем, кинематически неопределимых до десяти раз. Основная особенность программы заключается в том, что она

позволяет находить критические силы в плоских системах, для которых системы канонических уравнений устойчивости состоят из трехчленных уравнений.

Для заданной схемы в произвольном порядке нумеруются стержни (следует помнить, что 1-й стержень должен быть выбран из стержней сжатых продольной силой), определяется число неизвестных метода перемещений, строятся эпюры изгибающих моментов от единичных смещений наложенных связей.

Ввод исходной информации осуществляется в соответствии с запросом компьютера без соблюдения формата. Первоначально вводится информация общего характера: фамилия пользователя, имя решаемой задачи и т. д. Ее объем ограничен 70 символами, вводимыми в одну строку, например:

Иванов И. И. Устойчивость рамы, ПГС, д/о, группа 401.

Исходная информация, подготовленная для расчета, содержит:

- количество стержней системы;
- информацию о стержнях системы;
- число неизвестных метода перемещений;
- информацию о количестве кодовых чисел;
- информацию о кодовых числах;
- параметр точности решаемой задачи.

Информация о стержнях системы содержит сведения о длине, жесткости и продольной силе (в единицах Р). Она заносится для каждого стержня в одну строку. Так, для стержня 1 (рис. 12) имеем: 3.6 21600 5.7. Для схем, в которых учитывается симметрия (погонная жесткость ригелей должна быть увеличена в два раза), вводится половина длины ригеля. Например, для стержня 7 информация имеет вид: 9 28800 0.

Информация о количестве кодовых чисел к представляет собой вектор-столбец, каждый элемент которого равняется числу слагаемых в коэффициентах канонических уравнений, взятых в следующей последовательности:

$$r_{11}, r_{12}, r_{22}, r_{23}, r_{33}, \dots$$

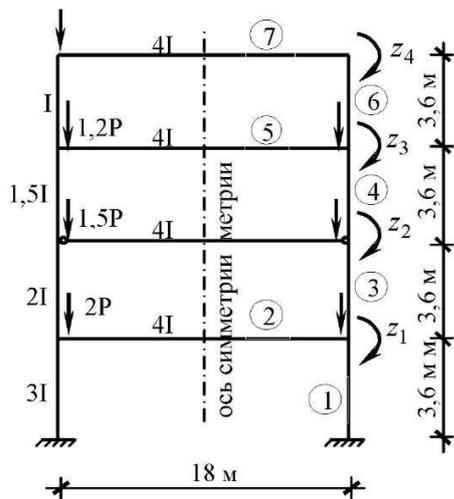


Рис.12

Информация о кодовых числах состоит из двух элементов: кодового числа и номера элемента, которые вводятся в одну строку. Кодовое число несет информацию о величине соответствующего слагаемого в коэффициенте r_{ij} (табл. 5).

Таблица 5

Вид элемента	Тип загрузки											
	A		B		C		A		B		C	
	M_a	к	M_a	к	M_a	к	M_B	к	M_B	к	M_B	к
	3i	1	$3i \cdot \varphi_1(V)$	2	$-iV \cdot \text{tg} V$	3	0	4	0	5	0	6
	4i	7	$4i \cdot \varphi_1(V)$	8	$-\frac{iV}{\text{tg} V}$	9	2i	10	$2i \cdot \varphi_3(V)$	11	$-\frac{iV}{\sin V}$	12

Здесь M_a и M_B — значение момента в сечениях a и B;

к — кодовое число типа закрепления;

A - для стержня, не нагруженного сжимающей силой;

B - для стержня, нагруженного сжимающей силой; стержень не имеет возможности перемещаться линейно;

C - для стержня, нагруженного сжимающей силой; стержень имеет возможность перемещаться линейно.

Файл набора данных (рис. 13) составлен для схем, показанных на рис. 12. Результаты расчета, выполненного по стандартной процедуре, отражены на рис. 14. Файл исходных данных приведен на рис. 13б, а результаты расчета на ЭВМ даны на рис.15.

Кузнецова Г. П. 7	Кузнецова Г. П. 6
3,6 21600 5.7	3,6 3600 1
9 28800 0	3,6 7200 2,1
3,6 14400 3.7	3,6 14400 3,7
3,6 10800 2.2	4,8 14400 5,5
9 28800 0	4,8 14400 0
3,6 7200 1	4,8 28800 0
9 28800 0	3
4	2
3	1
1	3
2	1
1	3
3	21
1	82
2	112
9 1	82
12	83
9 3	76
12 3	113
9 3	83
9 4	84
12 4	15
9 4	0.001
9 6	
15	
12 6	
9 6	
17	
0.001	
a)	б)

Рис. 13

Кузнецова Г.П.
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ КРИТИЧЕСКОЙ
СИЛЫ

КОЛИЧЕСТВО СТЕРЖНЕЙ РАМЫ=7

ИСХОДНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

N=1L=3.600E+00EJ=
2.160E+04P=5.700E+00

N=2L=9.000E+00EJ=
2.880E+04P=0.000E+00

N=3L=3.600E+00EJ=
1.440E+04P=3.700E+00

N=4L=3.600E+00EJ=
1.080E+04P=2.200E+00

N=5L=9.000E+00EJ=
2.880E+04P=0.000E+00

N=6L=3.600E+00EJ=
7.200E+03P=1.000E+00

N=7L=9.000E+00EJ=
2.880E+04P=0.000E+00

КРИТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ

N=1 V=.100E+01

N=2

V=.000E+00

N=3

V=.987E+00

N=4

V=.879E+00

N=5

V=.000E+00

N=6

V=.725E+00

N=7

V=.000E+00

**ПРИВЕДЕННЫЕ

ЖЕСТКОСТИ И ДЛИНЫ**

N=1PGI=

.600E+04L=.360E+01

N=2PGI=

.320E+04L=.900E+01

N=3PGI=

.400E+04L=.360E+01

N=4PGI=

.300E+04L=.360E+01

N=5PGI=

.320E+04L=.900E+01

N=6PGI=

.200E+04L=.360E+01

N=7PGI=

.320E+04L=.900E+01

КРИТИЧЕСКИЕ СИЛЫ 1PN= .27243E+04

2PN= .00000E+00

3PN= .17684E+04

4PN= .10515E+04

5PN= .00000E+00
 6PN= .47794E+03
 7PN= .00000E+00

Рис.14

Кузнецова Г.П.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ

КОЛИЧЕСТВО СТЕРЖНЕЙ РАМЫ=6

ИСХОДНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

N=1L=3.600E+00EJ=3.600E+03P=1.000E+00

N=2L=3.600E+00EJ=7.200E+03P=2.100E+00

N=3L=3.600E+00EJ=1.440E+04P=3.700E+00

N=4L=4.800E+00EJ=1.440E+04P=5.500E+00

N=5L=4.800E+00EJ=1.440E+04P=0.000E+00

N=6L=4.800E+00EJ=2.880E+04P=0.000E+00

КРИТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ

N=1 V=.100E+01

N=2

V= .102E+01

N=3

V= .962E+00

N=4

V= .156E+01

N=5

V= .000E+00

N=6

V= .000E+00

**ПРИВЕДЕННЫЕ

ЖЕСТКОСТИ И ДЛИНЫ**

N=1PGI=

.100E+04L=.360E+01

N=2PGI=

.200E+04L=.360E+01

N=3PGI=

.400E+04L=.360E+01

N=4PGI=

.300E+04L=.480E+01

N=5PGI=

.300E+04L=.480E+01

N=6PGI=

.600E+04L=.480E+01

КРИТИЧЕСКИЕ СИЛЫ

1PN=.33186E+04

2PN=.69690E+04

3PN=.12279E+05

4PN=.18252E+05

5PN=.00000E+00

6PN=.00000E+00

Рис.15

§6 ПОРЯДОК РАСЧЕТА НА ДИНАМИЧЕСКУЮ НАГРУЗКУ

Расчет задания состоит из двух частей. Первоначально требуется определить частоты собственных колебаний заданной рамы. Решение задачи необходимо осуществить в следующей последовательности:

1. Установить число степеней свободы K , т. е. число независимых параметров (связей), необходимых для закрепления всех сосредоточенных масс системы от линейных перемещений.

2. По направлению перемещений масс последовательно приложить единичные силы $P_i = 1$ ($i = 1, 2, 3, \dots, k$) и построить эпюры изгибающих моментов M_i . Так как, заданная система статически неопределимая, то при построении эпюр изгибающих моментов необходимо воспользоваться методом сил.

3. Записать вековое уравнение, для определения частот собственных колебаний, т. е.

$$\begin{vmatrix} (\delta_{11} m_1 - \lambda) & \delta_{12} m_2 & \dots & \delta_{1k} m_k \\ \delta_{21} m_1 & (\delta_{22} m_2 - \lambda) & \dots & \delta_{2k} m_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{k1} m_1 & \delta_{k2} m_2 & \dots & (\delta_{kk} m_k - \lambda) \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{где } \delta_{ij} = \sum_0^l \frac{M_i \cdot M_j}{EJ} dx; \quad \lambda = \frac{1}{\omega^2}.$$

4. Вычислить коэффициенты δ_{ij} , подставить их в вековое уравнение и решить его любым известным способом. В результате определить частоты собственных колебаний ω_i .

5. При найденной частоте собственных колебаний ω_{\max} принять частоту вынуждающей нагрузки в соответствии с заданием. Следует помнить, что в практических расчетах частота возмущающей силы (заданной нагрузки) определяется параметром технологического оборудования, установленного на строительных конструкциях, и является изначально заданной.

Во второй части работы требуется построить эпюру изгибающих моментов от действия динамической нагрузки. Решение задачи необходимо выполнить в следующей последовательности:

1. В заданной статически неопределимой системе построить эпюру изгибающих моментов от действия амплитудных значений динамической нагрузки M_p^a (при построении эпюры применить метод сил).

2. Записать систему канонических уравнений для определения амплитудных значений сил инерции, возникающих в массах системы, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}^* J_1 + \delta_{12} J_2 + \dots + \delta_{1k} J_k + \Delta_{1p} &= 0; \\ \delta_{21} J_1 + \delta_{22}^* J_2 + \dots + \delta_{2k} J_k + \Delta_{2p} &= 0; \\ \dots &\dots \\ \delta_{k1} J_1 + \delta_{k2} J_2 + \dots + \delta_{kk}^* J_k + \Delta_{kp} &= 0. \end{aligned} \right\}.$$

3. Вычислить коэффициенты:

$$\delta_{ii}^* = \delta_{ii} - \frac{1}{m_i \cdot \theta^2}; \quad \Delta_{ip} = \sum_0^l \int_0^1 \frac{M_i M_p^a}{EJ} dx,$$

4. Найти силы инерции J_i . В результате решения системы уравнений построить “исправленные” эпюры изгибающих моментов $M_i J_i$, а затем окончательную эпюру изгибающих моментов

$$M_p^{\hat{\circ}} = M_p^a + \sum_{i=1}^k M_i J_i.$$

5. По эпюре изгибающих моментов построить эпюру поперечных сил $Q_p^{\hat{\circ}}$, а затем эпюру продольных сил $N_p^{\hat{\circ}}$.

Выполнить проверку правильности построения эпюр внутренних усилий.

§7 ПРИМЕР РАСЧЕТА

Для заданной невесомой массы, несущей две сосредоточенные точечные нагрузки (рис.16), найти частоту свободных колебаний ω_1 и построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил от действия динамической нагрузки.

Если: $m_1 = 25 \frac{\text{кН} \cdot \text{с}^2}{\text{м}}$; $m_1 : m_2 = 5 : 3$; $M = 16 \text{кН} \cdot \text{м}$; $P = 6 \text{кН}$.

$EJ = I_1 = 3600 \text{кН} \cdot \text{м}^2$; $EJ_2 = I_2 = 2400 \text{кН} \cdot \text{м}^2$; $EJ_3 = I_3 = 1200 \text{кН} \cdot \text{м}^2$;

$I_1 : I_2 : I_3 = 3 : 2 : 1$; $m_2 = 15 \frac{\text{кН} \cdot \text{с}^2}{\text{м}}$; $\theta_1 = 0,85\omega_{\min}$ и $\theta_2 = 0,85\omega_{\max}$.

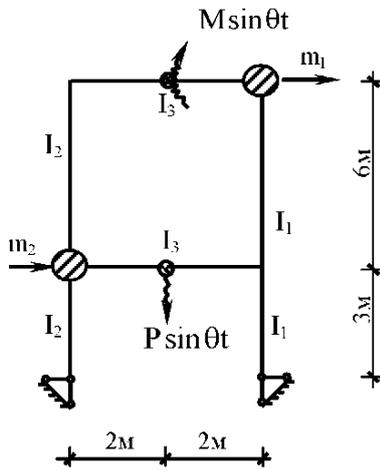


Рис.16

Решение

1. Определяем число степеней свободы $W=2$ (на рис.16 возможные перемещения масс показаны стрелками).

2. По направлению перемещения массы m_1 прикладываем силу $P_1 = 1$ и строим эпюру изгибающих моментов. Так как заданная система статически неопределимая, то находим степень кинематической неопределимости:

$$n = 3k - \text{ш} = 3 \cdot 4 - 10 = 2.$$

2.1.Выбираем основную систему метода сил (рис.17) и записываем систему канонических урав-

нений:
$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}^* x_1 + \delta_{12}^* x_2 + \Delta_{1P_1}^* &= 0; \\ \delta_{21}^* x_1 + \delta_{22}^* x_2 + \Delta_{2P_1}^* &= 0. \end{aligned} \right\}$$

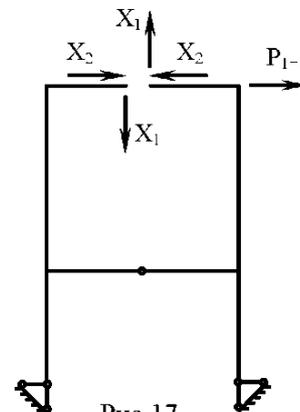


Рис.17

2.2. Вычисляем коэффициенты канонических уравнений метода сил, для этого строим эпюры изгибающих моментов от последовательного приложения к основной системе сил $x_1 = 1, x_2 = 1$ и $P_1 = 1$ (см. рис 18, 19 и 20):

$$\delta_{11}^* = \sum_1^4 \int_0^1 \frac{\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1}{EJ} dx = \frac{1}{I_1} \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2 + \frac{1}{I_2} \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2 + \frac{1}{I_3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 4 = \frac{1}{I_1} (24 + 36 + 32) = \frac{92}{I_1};$$

$$\delta_{12}^* = \delta_{21}^* = \sum_1^2 \int_0^1 \frac{\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_2}{EJ} dx = \frac{1}{I_1} \cdot 2 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 + \frac{1}{I_2} \cdot 2 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-6) = \frac{1}{I_1} (36 - 54) = -\frac{18}{I_1};$$

$$\delta_{22}^* = \sum_1^4 \int_0^1 \frac{\bar{M}_2 \cdot \bar{M}_2}{EJ} dx = \frac{1}{I_1} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{3}{2} \cdot 6 + \frac{1}{I_1} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{I_2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 +$$

$$+ \frac{1}{I_2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{1}{I_1} (72 + 36 + 108 + 54) = \frac{270}{I_1};$$

$$\Delta_{1P}^* = \sum_1^3 \int_0^1 \frac{M_{P1}^0 \cdot \bar{M}_1}{EJ} dx = \frac{1}{I_1} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot (-2) + \frac{1}{I_3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot (-2) \cdot 2 = \frac{-1}{I_1} (36 + 36) = -\frac{72}{I_1};$$

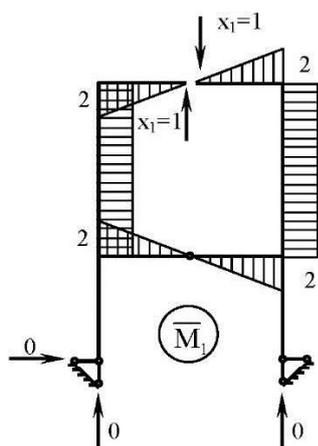


Рис.18

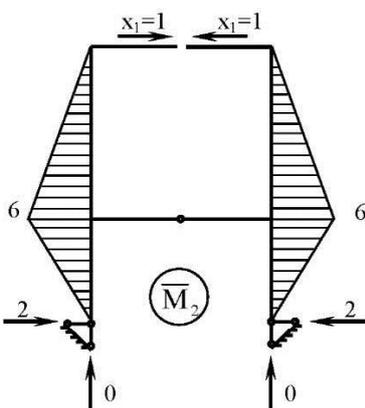


Рис.19

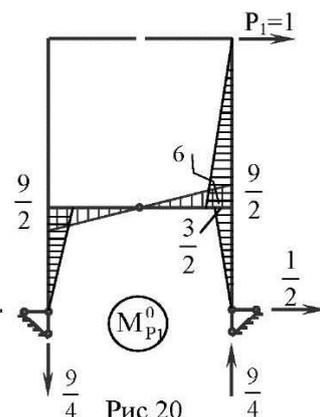


Рис.20

$$\Delta_{2P}^* = \sum_1^3 \int_0^1 \frac{M_{P1}^0 \cdot \bar{M}_2}{EJ} dx = \frac{1}{I_1} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot (-6) + \frac{1}{I_1} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot (-6) + \frac{1}{I_2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot (-6) =$$

$$= -\frac{1}{I_1} \left(72 + 9 + \frac{81}{2} \right) = -\frac{243}{2I_1}.$$

2.3. Полученные коэффициенты подставляем в систему канонических уравнений

$$\left. \begin{aligned} 92x_1 - 18x_2 &= 72; \\ -18x_1 + 270x_2 &= \frac{243}{2}. \end{aligned} \right\}$$

и решаем ее. В результате получим:

$$x_1 = 0,882; x_2 = 0,509.$$

2.4. Строим «исправленные» эпюры изгибающих моментов \bar{M}_1x_1 , \bar{M}_2x_2 и окончательную эпюру $M_1 = M_{P1}^0 + \bar{M}_1x_1 + \bar{M}_2x_2$ (рис.21,22,23).

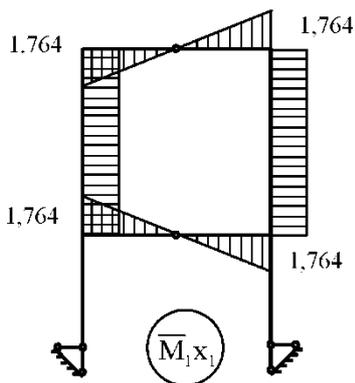


Рис.21

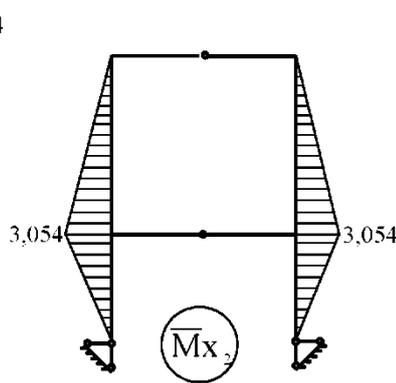


Рис.22

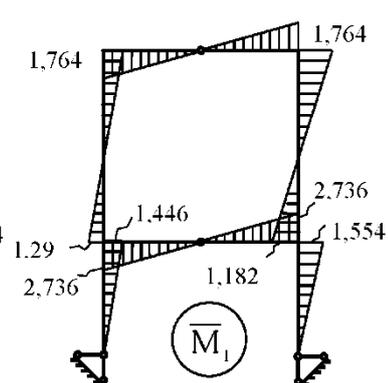


Рис.23

3. По направлению перемещения массы m_2 прикладываем единичную силу $P_2 = 1$ и строим эпюру изгибающих моментов.

3.1. Основную систему метода сил выберем, как показано на рис. 17. В этом случае часть коэффициентов системы канонических уравнений известна, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \frac{92}{I_1}x'_1 - \frac{18}{I_1}x'_2 + \Delta_{1P_2}^* &= 0; \\ -\frac{18}{I_1}x'_1 + 270x'_2 + \Delta_{2P_2}^* &= 0. \end{aligned} \right\}$$

3.2. Для определения свободных членов построим эпюру изгибающих моментов в основной системе от единичной силы $P_2 = 1$, приложенной по направлению перемещения массы m_2 (рис.24).

3.3. Вычисляем свободные члены:

$$\Delta_{1P_2}^* = \sum_1^2 \int_0^1 \frac{\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_{P_2}^0}{EJ} dx = \frac{1}{I_3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot (-2) \cdot 2 = -\frac{12}{I_1};$$

$$\Delta_{2P_2}^* = \sum_1^2 \int_0^1 \frac{\bar{M}_2 \cdot \bar{M}_{P_2}^0}{EJ} dx = \frac{1}{I_1} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{I_2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{I_1} \left(9 - \frac{27}{2}\right) = -\frac{9}{2I_1}.$$

3.4. Решаем систему канонических уравнений

$$\left. \begin{aligned} 92x'_1 - 18x'_2 &= 12; \\ -18x'_1 + 270x'_2 &= \frac{9}{2}. \end{aligned} \right\}$$

откуда находим $x'_1 = 0,135, x'_2 = 0,026$.

3.5. Строим «исправленные» эпюры $\bar{M}_1 x'_1, \bar{M}_2 x'_2$ (рис.25 и 26) и окончательную

эпюру изгибающих моментов $M_2 = M_{P_2}^0 + \bar{M}_1 x'_1 + \bar{M}_2 x'_2$ (рис.27).

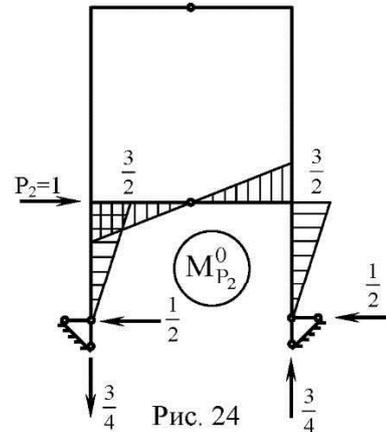


Рис. 24

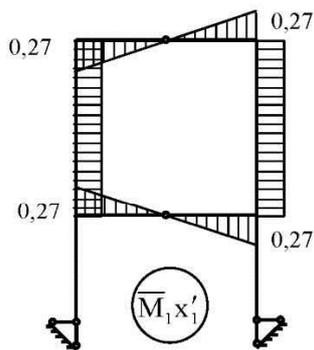


Рис.25

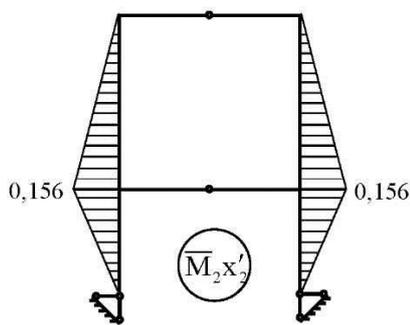


Рис.26

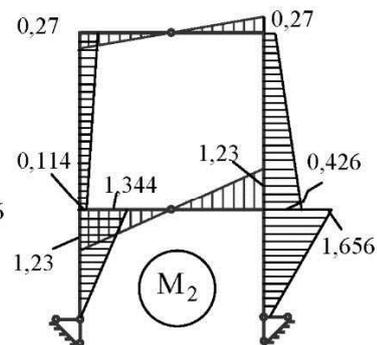


Рис.27

4. Находим частоты собственных колебаний.

4.1. Записываем вековое уравнение

$$D = \begin{vmatrix} (\delta_{11} m_1 - \lambda) & \delta_{12} m_2 \\ \delta_{21} m_1 & (\delta_{22} m_2 - \lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

4.2. Определяем коэффициенты δ_{ij} , входящие в вековое уравнение:

$$\begin{aligned}
\delta_{11} &= \sum_1^6 \int_0^l \frac{M_1 \cdot M_1}{EJ} dx = \frac{1}{I_1} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,554 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,554 + \\
&+ \frac{1}{I_1} \cdot \frac{6}{6} \cdot (2 \cdot 1,764 \cdot 1,764 + 2 \cdot 1,182 \cdot 1,182 - 2 \cdot 1,764 \cdot 1,182) + \frac{1}{I_2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,446 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,446 + \\
&+ \frac{1}{I_2} \cdot \frac{6}{6} (2 \cdot 1,764 \cdot 1,764 + 2 \cdot 1,29 \cdot 1,29 - 2 \cdot 1,29 \cdot 1,764) + \frac{1}{I_3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1,764 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,764 \cdot 2 + \\
&+ \frac{1}{I_3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2,736 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,736 \cdot 2 = \frac{1}{I_1} (2,415 + 4,847 + 3,136 + 7,500 + 12,447 + 29,943) = \\
&= \frac{60,288}{I_1};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{22} &= \sum_1^6 \int_0^l \frac{M_2 \cdot M_2}{EJ} dx = \frac{1}{I_1} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1,656 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,656 + \\
&+ \frac{1}{I_1} \cdot \frac{6}{6} \cdot (2 \cdot 0,426 \cdot 0,426 + 2 \cdot 0,27 \cdot 0,27 + 2 \cdot 0,27 \cdot 0,426) + \frac{1}{I_2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1,344 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,344 + \\
&+ \frac{1}{I_2} \cdot \frac{6}{6} (2 \cdot 0,27 \cdot 0,27 + 2 \cdot 0,114 \cdot 0,114 + 2 \cdot 0,27 \cdot 0,114) + \frac{1}{I_3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0,27 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,27 \cdot 2 + \\
&+ \frac{1}{I_3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1,23 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,23 \cdot 2 = \frac{1}{I_1} (2,742 + 0,739 + 2,710 + 0,351 + 0,292 + 6,052) = \\
&= \frac{12,886}{I_1};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{12} &= \sum_1^6 \int_0^l \frac{M_1 \cdot M_2}{EJ} dx = \frac{1}{I_1} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1,656 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,554 + \\
&+ \frac{1}{I_1} \cdot \frac{6}{6} \cdot (2 \cdot 1,764 \cdot 0,27 - 2 \cdot 1,182 \cdot 0,426 + 1,764 \cdot 0,426 - 0,27 \cdot 1,182) + \frac{1}{I_2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1,344 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,446 + \\
&+ \frac{1}{I_2} \cdot \frac{6}{6} (2 \cdot 0,27 \cdot 1,764 - 2 \cdot 0,114 \cdot 1,29 + 1,764 \cdot 0,114 - 1,29 \cdot 0,27) + \frac{1}{I_3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0,27 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,764 \cdot 2 + \\
&+ \frac{1}{I_3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1,23 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,736 \cdot 2 = \frac{1}{I_1} (2,573 + 0,378 + 2,915 + 0,768 + 1,905 + 13,462) = \frac{22}{I_1}.
\end{aligned}$$

4.3. Записываем вековое уравнение в развернутом виде, т. е.

$$\lambda^2 - (\delta_{11} m_1 + \delta_{22} m_2) \cdot \lambda + (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2) \cdot m_1 m_2 = 0$$

или

$$\lambda^2 - \frac{1700,49}{I_1} \lambda + \frac{109826,68}{I_1^2} = 0.$$

Отсюда:

$$\lambda_{1,2} = \frac{850,246 \pm 783,001}{I_1};$$

$$\lambda_1 = 0,45368; \lambda_2 = 0,01868;$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}} = 1,485 \text{ c}^{-1}; \omega_2 = \sqrt{\frac{1}{\lambda_2}} = 7,317 \text{ c}^{-1}.$$

5. Принимаем частоты возмущающей нагрузки: $\theta_1 = 0,85\omega_{\min} = 1,2626 \text{ c}^{-1}$;

$$\theta_2 = 0,85\omega_{\max} = 6,2195 \text{ c}^{-1}$$

6. Строим эпюру изгибающих моментов в заданной системе от амплитудного значения действующей на систему вибрационной нагрузки.

6.1. Выбираем основную систему метода сил, как показано на рис.17. С учетом известных коэффициентов система канонических уравнений принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{92}{I_1} x_1'' - \frac{18}{I_1} x_2'' + \Delta'_{1P} &= 0; \\ -\frac{18}{I_1} x_1'' + \frac{270}{I_1} x_2'' + \Delta'_{2P} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

6.2. Для определения свободных членов построим эпюру изгибающих моментов в основной системе метода сил от амплитудного значения динамической нагрузки (рис.28).

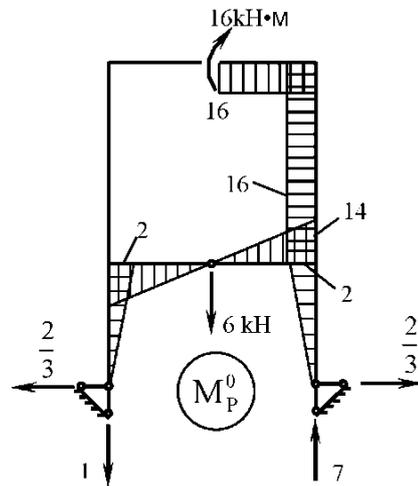


Рис.28

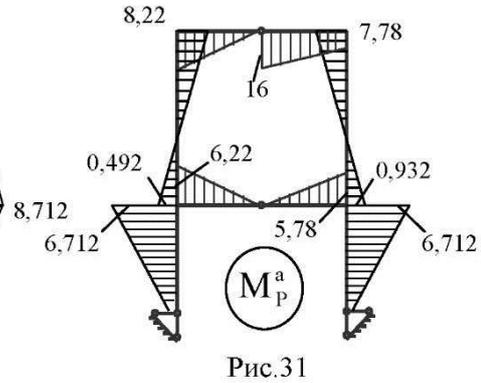
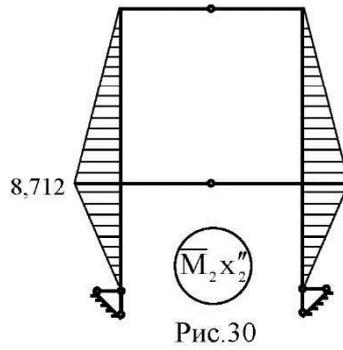
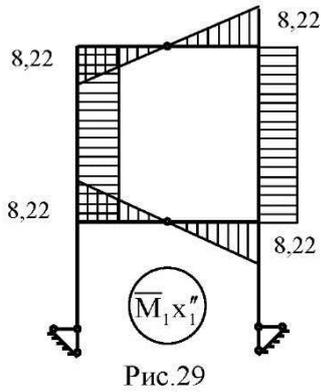
6.3. Находим свободные члены:

$$\begin{aligned} \Delta'_{1P} &= \sum_1^4 \int_0^z \frac{\bar{M}_1 \cdot M_P^0}{EJ} dx = \frac{1}{I_1} 16 \cdot 6 \cdot (-2) + \frac{1}{I_3} 16 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-2) + \\ &+ \frac{1}{I_3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 14 \cdot \frac{2}{3} \cdot (-2) + \frac{1}{I_3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot (-2) = \\ &= -\frac{1}{I_1} (192 + 96 + 56 + 8) = -\frac{352}{I_1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta'_{2P} &= \sum_1^3 \int_0^1 \frac{\bar{M}_2 M_P^0}{EJ} dx = \frac{1}{I_1} \cdot 16 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-6) + \frac{1}{I_1} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot (-6) + \frac{1}{I_2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot (-6) = \\ &= -\frac{1}{I_1} (288 + 12 + 18) = -\frac{318}{I_1}. \end{aligned}$$

6.4. Подставим найденные коэффициенты в систему уравнений и в результате ее решения имеем: $x_1'' = 4,11$; $x_2'' = 1,452$.

6.5. Строим «исправленные» эпюры $\bar{M}_1 x_1'$, $\bar{M}_2 x_2'$ (рис.29 и 30) и окончательную эпюру $M_2 = M_{P_2}^0 + \bar{M}_1 x_1' + \bar{M}_2 x_2'$ (рис.31).



7. Находим силы инерции, возникающие в массах системы.

7.1. Запишем систему уравнений для определения сил инерции:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}^{**} J_1 + \delta_{12} J_2 + \Delta_{1P} &= 0; \\ \delta_{21} J_1 + \delta_{22}^{**} J_2 + \Delta_{2P} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

$$\text{где } \delta_{ii}^{**} = \delta_{ii} - \frac{1}{m_i \theta^2}; \quad \Delta_{iP} = \sum_0^l \frac{M_i M_P^a}{EJ} dx.$$

7.2 Определяем коэффициенты входящие в систему уравнений при условии $\theta = \theta_1$:

$$\delta_{11}^{**} = \frac{60,288}{I_1} - \frac{1}{25 \cdot 1,262^2} \cdot \frac{I_1}{I_1} = \frac{1}{I_1} (60,288 - 90,416) = -\frac{30,128}{I_1};$$

$$\delta_{22}^{**} = \frac{12,886}{I_1} - \frac{1}{15 \cdot 1,262^2} \cdot \frac{I_1}{I_1} = \frac{1}{I_1} (12,886 - 150,693) = -\frac{137,807}{I_1};$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{1P} &= \sum_1^8 \int_0^l \frac{M_1 M_P^a}{EJ} dx = \frac{1}{I_1} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6,712 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,554 + \frac{1}{I_1} \cdot \frac{6}{6} (-2 \cdot 7,78 \cdot 1,764 - \\
&2 \cdot 1,182 \cdot 0,932 + 1,764 \cdot 0,932 + 1,182 \cdot 7,78) + \frac{1}{I_2} \cdot \frac{6}{6} (2 \cdot 8,22 \cdot 1,764 + 2 \cdot 1,29 \cdot 0,492 - \\
&8,22 \cdot 1,29 - 1,764 \cdot 0,492) - \frac{1}{I_2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6,712 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,446 + \frac{1}{I_3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5,78 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,736 - \\
&- \frac{1}{I_3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6,22 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,736 + \frac{1}{I_3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8,22 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,764 - \frac{1}{I_3} \cdot \frac{2}{6} (2 \cdot 7,78 \cdot 1,764 + 16 \cdot 1,764) = \\
&= \frac{1}{I_1} (10,430 - 18,813 + 28,196 - 14,558 + 31,628 - 34,036 + 29,000 - 55,672) = -\frac{23,828}{I_1}; \\
\Delta_{2P} &= \sum_1^8 \int_0^l \frac{M_2 M_P^a}{EJ} dx = \frac{1}{I_1} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6,712 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,656 + \frac{1}{I_1} \cdot \frac{6}{6} (2 \cdot 0,426 \cdot 0,932 - 2 \cdot 7,78 \cdot 0,27 - \\
&0,462 \cdot 7,78 + 0,27 \cdot 0,932) + \frac{1}{I_2} \cdot \frac{6}{6} (2 \cdot 8,22 \cdot 0,27 - 2 \cdot 0,114 \cdot 0,492 + 8,22 \cdot 0,114 - 0,492 \cdot 0,27) + \\
&\frac{1}{I_2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6,712 \cdot \frac{2}{3} (-1,344) + \frac{1}{I_3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5,78 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,23 - \frac{1}{I_3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6,22 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,23 + \frac{1}{I_3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8,22 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,27 - \\
&- \frac{1}{I_3} \cdot \frac{2}{6} (2 \cdot 0,27 \cdot 7,78 + 16 \cdot 0,27) = \frac{1}{I_1} (11,115 - 6,469 + 7,697 - 13,531 + 14,219 - 15,301 + \\
&+ 4,439 - 8,521) = -\frac{6,352}{I_1}.
\end{aligned}$$

7.3. Подставляем найденные коэффициенты в систему уравнений, т. е.

$$\left. \begin{aligned}
-30,128J_1 + 22J_2 &= 23,828; \\
22J_1 - 137,807J_2 &= 6,352.
\end{aligned} \right\}$$

Откуда находим:

$$J_1 = -0,933, \quad J_2 = -0,195.$$

8. Строим «исправленные» эпюры изгибающих моментов $M_1 J_1$ и $M_2 J_2$ (рис.32 и 33) и окончательную эпюру изгибающих моментов $M_P^o = M_P^a + M_1 J_1 + M_2 J_2$ (рис. 34).

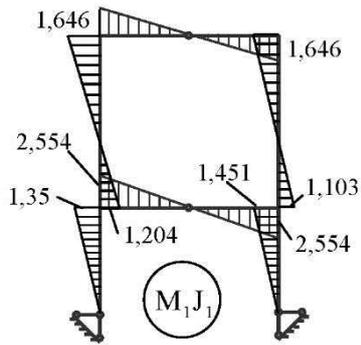


Рис.32

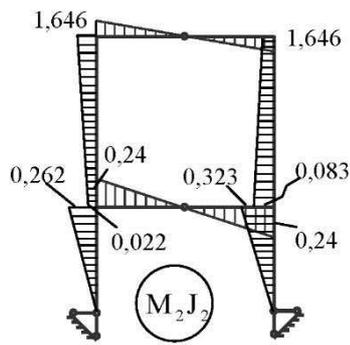


Рис.33

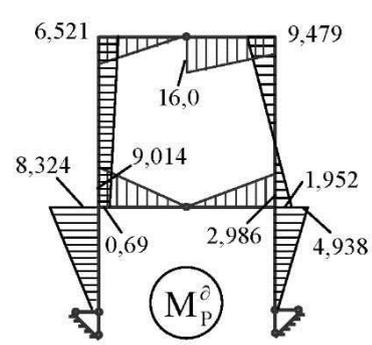


Рис.34

9. В соответствии с эпюрой изгибающих моментов строим эпюру поперечных сил (рис.35) и эпюру продольных сил (рис.36).

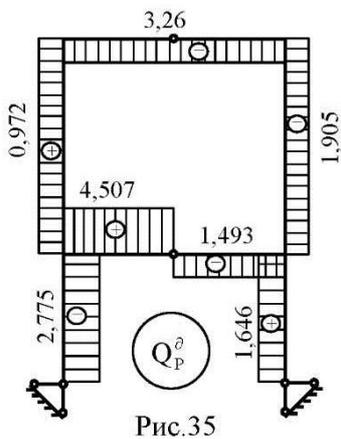


Рис.35

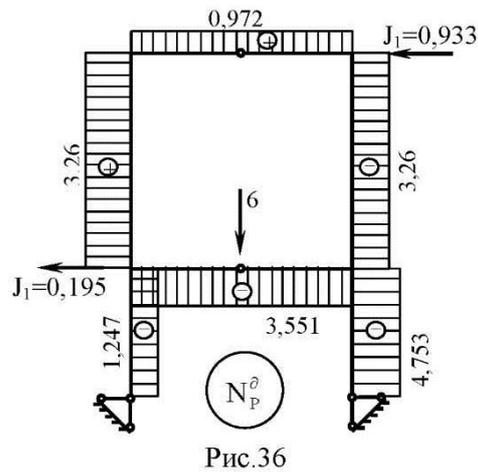


Рис.36

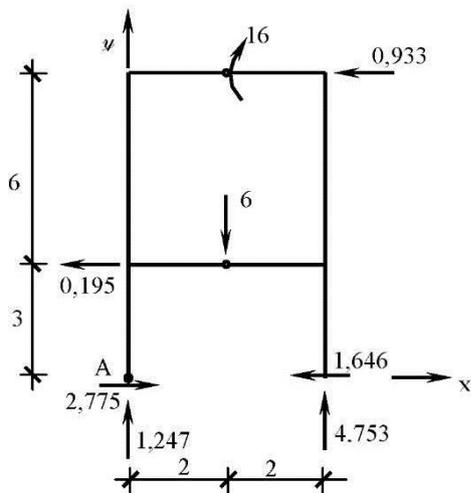


Рис.37

10. Выполним проверку правильности построения эпюр. Для этого рассмотрим равновесие системы в целом (рис.37).

$$\sum x = 0;$$

$$2,775 - 1,646 - 0,195 - 0,933 = 2,775 - 2,774 = 0,001 \approx 0.$$

$$\sum y = 0;$$

$$1,247 - 6 + 4,753 = 6 - 6 = 0.$$

$$\sum M_A = 0;$$

$$16 + 6 \cdot 2 - 0,195 \cdot 3 - 0,933 \cdot 9 - 4,753 \cdot 4 =$$

$$= 28 - 27,994 = 0,006 \approx 0.$$

Погрешность, обусловлена округлениями и составляет:

$$\Pi = \frac{28 - 27,994}{28} \cdot 100\% = 0,021\%.$$

11. Построим эпюру изгибающих моментов при условии, что $\theta = \theta_2 = 6,2195 \text{ с}^{-1}$.

Определяем коэффициенты:

$$\delta_{11}^{**} = \frac{60,288}{I_1} - \frac{1}{25 \cdot 6,2195^2} \cdot \frac{I_1}{I_1} = \frac{1}{I_1} (60,288 - 3,723) = \frac{56,565}{I_1};$$

$$\delta_{22}^{**} = \frac{12,886}{I_1} - \frac{1}{15 \cdot 6,2195^2} \cdot \frac{I_1}{I_1} = \frac{1}{I_1} (12,886 - 6,204) = \frac{6,682}{I_1}.$$

Решаем систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} 56,565 J_1^* + 22 J_2^* &= 23,828; \\ 22 J_1^* + 6,682 J_2^* &= 6,352. \end{aligned} \right\}$$

и находим силы инерции: $J_1^* = -0,1837$; $J_2^* = 1,5553$.

12. Строим «исправленные эпюры» $M_1 J_1^*$ и $M_2 J_2^*$ (рис.38 и рис.39) и оконча-

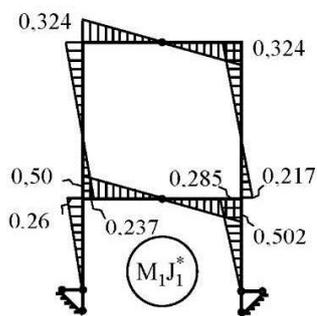


Рис.38

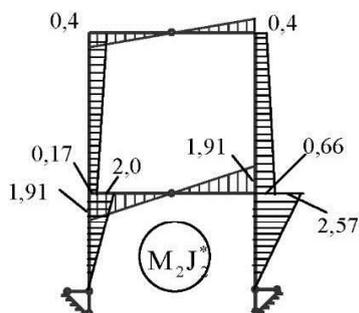


Рис.39

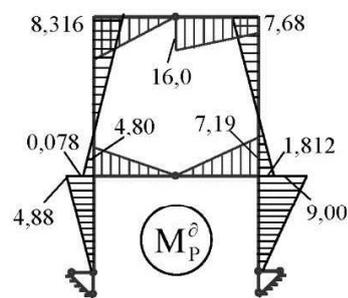


Рис.40

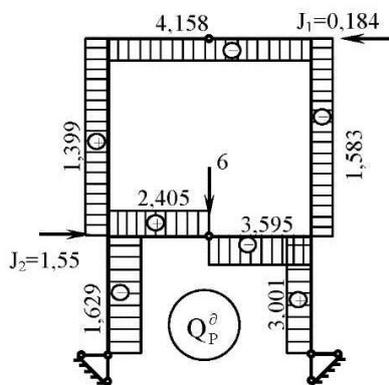


Рис.41

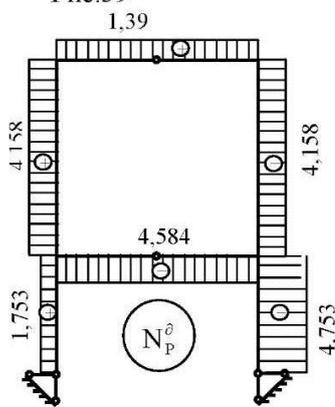


Рис.42

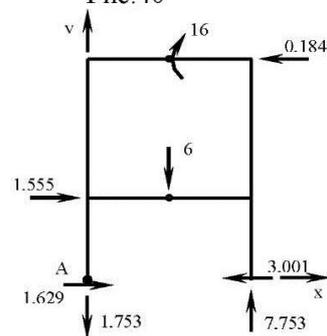


Рис.43

тельную эпюру изгибающих моментов $M_p^e = M_p^a + M_1 J_1 + M_2 J_2$ (рис.40).

13. По эпюре изгибающих моментов строим эпюру поперечных сил, а затем эпюру продольных сил (рис.41 и 42)

14. Выполним проверку исправности построения эпюр внутренних усилий (рис.43)

$$\sum x = 0;$$

$$2,775 - 1,646 - 0,195 - 0,933 = 2,775 - 2,774 = 0,001 \approx 0.$$

$$\sum y = 0;$$

$$-1,753 - 6 + 7,753 = 0.$$

$$\sum M_A = 0;$$

$$1,555 \cdot 3 + 16 + 6 \cdot 2 - 0,184 \cdot 9 - 7,753 \cdot 4 = \\ = 32,665 - 32,668 = -0,003 \approx 0.$$

§8. ПОРЯДОК РАСЧЁТА СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ В МАТРИЧНОЙ ФОРМЕ.

1. Установить число степеней свободы, т.е. число независимых параметров (связей), необходимых для закрепления всех сосредоточенных масс системы от линейных перемещений.

2. Найти степень статической неопределимости и выбрать основную систему метода сил. Построить эпюры изгибающих моментов: $M_{p,i}^o$ от единичных обобщённых сил, приложенных по направлению колебаний сосредоточенных масс; M_i от единичных неизвестных метода сил x_i , приложенных по направлению отброшенных связей.

3. Составить исходные матрицы:

-квазидиагональную матрицу податливости f , имеющую вид

$$f = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \delta_n \end{pmatrix}, \text{ где } \delta_i = \frac{l_i}{6EJ_i} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \text{ матрица податливости прямолинейного}$$

стержня постоянного сечения;

-если на одном из концов стержня имеет место шарнир, то $\delta_i = \frac{l_i}{3EJ_i} [1]$;

-матрицу усилий V_1 от последовательного приложения основных неизвестных $x_1 = 1; x_2 = 1; \dots; x_n = 1$;

-матрицу усилий V_0 от последовательного приложения (загрузки) единичных сил по направлению колебания масс.

4. Выполнить матричные операции в следующей последовательности:

а) транспортировать матрицы V_1 и V_0 ;

б) вычислить перемещение от единичных сил x_i :

$$Y = V_1' \cdot f \cdot V_1;$$

в) произвести обращение матрицы Y и сделать проверку по формуле

$$Y \cdot Y^{-1} = E, \text{ где } E - \text{ единичная матрица};$$

г) найти величины неизвестных X_i :

$$X = X_i = -Y^{-1} \cdot V_1' \cdot f \cdot V_0;$$

д) определить усилия в стержнях статически неопределимой рамы от действия единичных сил, приложенных по направлению перемещения масс:

$$V = V_0 + V_1 \cdot X.$$

5. Получить матрицу податливости заданной системы:

$$F = V_0' \cdot f \cdot V.$$

Если заданная система статически определима, то, очевидно, что $V = V_0$ и выполнение пункта 4 производить не нужно.

6. Составить диагональную матрицу сосредоточенных масс M^0 и подсчитать произведение матриц: $D = F \cdot M^0$.

7. Найти частоту свободных колебаний ω из характеристического уравнения:

$$[F \cdot M^0 - \lambda \cdot E] \cdot Z = 0.$$

Здесь $\lambda = \frac{1}{\omega^2}$; Z - вектор амплитуд перемещений. Данное уравнение решается

любым известным способом или с помощью ЭВМ.

8. Построить эпюру усилий от амплитудных значений динамических сил P^* , по которой составить матрицу B_p .

Так как заданная система статически неопределима, то первоначально необходимо построить эпюру M_p^0 и выполнить матричные операции, изложенные в пункте 4. В итоге найдем матрицу B_p . Если эпюру M_p^0 строить не от амплитудных значений, а от единичных сил, приложенных по направлению действия нагрузки, то в результате получим матрицу B_* . В этом случае

$$B_p = B_* \cdot P^*,$$

где P^* - матрица-столбец нагрузок.

9. Определить перемещения:

$$\Delta_p = B' \cdot f \cdot B_p.$$

10. Записать канонические уравнения для нахождения инерционных сил J :

$$F^0 \cdot J + \Delta_p = 0,$$

$$\text{где } F^0 = F - \frac{1}{m_i \cdot \theta^2} \cdot E;$$

m_i - i -я сосредоточенная масса, соответствующая i -й строке канонических уравнений;

θ - частота вынужденных колебаний.

11. Вычислить инерционные силы:

$$J = [F^0]^{-1} \cdot \Delta_p.$$

12. Найти амплитудные значения усилий (изгибающих моментов) от заданной динамической нагрузки:

$$S = B_p + B \cdot J$$

и выразить их в графической форме.

13. По эпюре изгибающих моментов построить эпюры поперечных и продольных сил и выполнить проверку.

§9. ПРИМЕР РАСЧЁТА СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ НА ДИНАМИЧЕСКУЮ НАГРУЗКУ В МАТРИЧНОЙ ФОРМЕ

Для рамы, показанной на рис.16, с исходными данными, приведёнными в §7, найти частоты собственных колебаний ω_1 и построить эпюру изгибающих моментов от действия исходных значений динамической нагрузки при условии $\theta = \theta_1$.

Решение.

Расчёт рассматриваемой рамы выполнен в §7. В дальнейшем мы будем использовать исходные результаты и производить сопоставление результатов расчёта.

Разбиваем заданную систему на элементы, как показано на рис.44.

Находим матрицы податливости отдельных элементов:

$$\delta_1 = \frac{3}{3I_2} [1] = \frac{3}{2I_1} [1] = \frac{1}{I_1} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix};$$

$$\delta_2 = \frac{6}{6I_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{3}{2I_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{I_1} \begin{bmatrix} 3 & 3/2 \\ 3/2 & 3 \end{bmatrix};$$

$$\delta_3 = \frac{2}{3I_3} [1] = \frac{2 \cdot 3}{3I_1} [1] = \frac{1}{I_1} = [2];$$

$$\delta_4 = \frac{2}{6I_3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{I_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix};$$

$$\delta_5 = \frac{6}{6I_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{I_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix};$$

$$\delta_6 = \frac{3}{3I_1} [1] = \frac{1}{I_1} [1];$$

$$\delta_7 = \frac{2}{3I_3} [1] = \frac{1}{I_1} [2];$$

$$\delta_8 = \delta_7 = \frac{1}{I_1} [2].$$

Составляем квазидиальную матрицу податливости отдельных элементов:

$$f = \frac{1}{I_1} \begin{bmatrix} 1,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

По эпюрам изгибающих моментов M_1 и M_2 (рис.18 и 19), построенным в основной системе метода сил от единичных неизвестных x_1 и x_2 , приложенных по направлению отброшенных связей, записываем матрицу V_1 , а по эпюрам изгибающих моментов $M_{p_1}^o$ и $M_{p_2}^o$ (рис.20 и 24), построенным от единичных обобщённых сил $P_1 = 1$ и $P_2 = 1$, приложенных по направлениям перемещений масс, составляем матрицу V_o :

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 2 & -6 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 6 \\ 0 & 6 \\ 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}; \quad B_0 = \begin{pmatrix} 4,5 & 1,5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -6 & 0 \\ -1,5 & 1,5 \\ -4,5 & -1,5 \\ 4,5 & 1,5 \end{pmatrix}.$$

Находим транспонированные матрицы:

$$B_1' = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & -2 & 2 & 2 & 0 & 2 & -2 \\ -6 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$B_0' = \begin{bmatrix} 4,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -1,5 & -4,5 & 4,5 \\ 1,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,5 & -1,5 & 1,5 \end{bmatrix}.$$

Определяем перемещение от единичных сил:

$$Y = B_1' \cdot f \quad \cdot B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & -2 & 2 & 2 & 0 & 2 & -2 \\ -6 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \frac{1}{I_1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \times B_1 =$$

$$= \frac{1}{I_1} \begin{bmatrix} 0 & 9 & 9 & 4 & -2 & -4 & 6 & 6 & 0 & 4 & -4 \\ -9 & -18 & -9 & 0 & 0 & 0 & 6 & 12 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ 2 & -6 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 6 \\ 0 & 6 \\ 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{I_1} \begin{vmatrix} 92 & -18 \\ -18 & 270 \end{vmatrix}.$$

Выполняем обращение матрицы Y . Для этого рядом с заданной матрицей записываем единичную. Путём сложения строк этой матрицы, взятых с некоторыми множителями, на месте исходной матрицы нужно получить единичную. Тогда на месте единичной матрицы будем иметь обратную.

$$\begin{vmatrix} 92 & -18 & 1 & 0 \\ -18 & 270 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ Умножим первую строку на множитель } \frac{18}{92} \text{ и прибавим её по}$$

второй строке.

$$18 - 3,52174 \quad 0,19565 \quad 0.$$

$$\begin{vmatrix} 92 & -18 & 1 & 0 \\ 0 & 266,47826 & 0,19565 & 1 \end{vmatrix} \text{ Разделим все элементы второй строки на величину}$$

266,47826.

$$\begin{vmatrix} 92 & -18 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0,0007342 & 0,0037526 \end{vmatrix} \text{ Умножим вторую строку на 18 и прибавим}$$

её к первой строке.

$$0 \quad 18 \quad 0,013216 \quad 0,067547.$$

Затем все элементы первой строки поделим на 92.

$$\left| \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0,0110128 & 0,0007342 \\ 0 & 1 & 0,0007342 & 0,0037526 \end{array} \right|$$

Проверка.

$$\begin{aligned} Y^{-1} \cdot Y &= \begin{pmatrix} (0,0110128 \cdot 92 - 0,0007342 \cdot 18) & (-0,0110128 \cdot 18 + 0,0007342 \cdot 270) \\ (0,0007342 \cdot 92 - 0,0037526 \cdot 18) & (-0,0007342 \cdot 18 + 0,0037526 \cdot 270) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 0,99996 & 0 \\ 0 & 0,99999 \end{vmatrix} \approx \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Вычисляем величины неизвестных X_i :

$$X = -Y^{-1} \cdot B_1 \cdot \cdot B_0 = -I_1 \begin{vmatrix} 0,0110128 & 0,0007342 \\ 0,0007342 & 0,0037526 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{I_1}.$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 9 & 9 & 4 & -2 & -4 & 6 & 6 & 0 & 4 & -4 \\ -9 & -18 & -9 & 0 & 0 & 0 & 6 & 12 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4,5 & 1,5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -6 & 0 \\ -1,5 & 1,5 \\ -4,5 & -1,5 \\ 4,5 & 1,5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0,0110128 & 0,0007342 \\ 0,0007342 & 0,0037526 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} -72 & -12 \\ -121,5 & -4,5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,8821 & 0,1355 \\ 0,5088 & -0,0257 \end{vmatrix}.$$

Определяем усилия в стержнях заданной рамы от действия единичных сил P_1 и P_2 .

$$B = B_0 + B_1 \cdot X = \begin{vmatrix} 4,5 & 1,5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -6 & 0 \\ -1,5 & 1,5 \\ -4,5 & -1,5 \\ 4,5 & 1,5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ 2 & -6 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 6 \\ 0 & 6 \\ 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0,8821 & 0,1355 \\ 0,5088 & 0,0257 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4,5 & 1,5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -6 & 0 \\ -1,5 & 1,5 \\ -4,5 & -1,5 \\ 4,5 & 1,5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3,053 & -0,154 \\ -1,289 & 0,116 \\ 1,764 & 0,271 \\ 1,764 & 0,271 \\ 0 & 0 \\ -1,764 & -0,271 \\ 1,764 & 0,271 \\ 4,817 & 0,425 \\ 3,053 & 0,154 \\ 1,764 & 0,271 \\ -1,764 & -0,271 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1,447 & 1,345 \\ -1,289 & 0,116 \\ 1,764 & 0,721 \\ 1,764 & 0,721 \\ 0 & 0 \\ -1,764 & -0,721 \\ 1,764 & 0,721 \\ -1,183 & 0,425 \\ 1,553 & 1,654 \\ -2,736 & -1,229 \\ 2,736 & 1,229 \end{vmatrix}$$

$M_1 \quad M_2$

Транспонируем матрицу B:

$$B' = \begin{bmatrix} 1,447 & -1,289 & 1,764 & 1,764 & 0 & -1,764 & 1,764 & -1,183 & 1,553 & -2,736 & 2,736 \\ 1,345 & 0,116 & 0,271 & 0,271 & 0 & -0,271 & 0,271 & 0,425 & 1,654 & -1,229 & 1,229 \end{bmatrix}$$

Вычисляем перемещения по направлению колебания масс:

$$F = B_0' \cdot f \cdot B = \begin{bmatrix} 4,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -1,5 & -4,5 & 4,5 \\ 1,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,5 & -1,5 & 1,5 \end{bmatrix} \times \frac{1}{I_1} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 1,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \times \mathbf{B} =$$

$$= \frac{1}{I_1} \begin{bmatrix} 6,75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -12 & -1,5 & -9 & 9 \\ 2,25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,5 & -3 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1,447 & 1,345 \\ -1,289 & 0,116 \\ 1,764 & 0,271 \\ 1,764 & 0,271 \\ 0 & 0 \\ -1,764 & -0,271 \\ 1,764 & 0,271 \\ -1,183 & 0,425 \\ 1,553 & -1,654 \\ -2,736 & -1,229 \\ 2,736 & 1,229 \end{bmatrix} = \frac{1}{I_1} \cdot \begin{bmatrix} 60,297 & 21,994 \\ 22,002 & 12,881 \end{bmatrix}$$

Составляем диагональную матрицу масс:

$$M^o = \begin{vmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 15 \end{vmatrix}$$

Вычисляем элементы матрицы:

$$D = F \cdot M^o = \frac{1}{I_1} \begin{vmatrix} 60,297 & 21,994 \\ 22,002 & 12,881 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 15 \end{vmatrix} = \frac{1}{I_1} \begin{vmatrix} 1507,4 & 329,9 \\ 550,1 & 193,2 \end{vmatrix}$$

Записываем вековое уравнение:

$$|D - \lambda \cdot E| = 0$$

или

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{1507,4}{I_1} - \lambda \right) & \frac{329,9}{I_1} \\ \frac{550,1}{I_1} & \left(\frac{193,2}{I_1} - \lambda \right) \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрываем определитель

$$\lambda^2 - \left(\frac{1507,4}{I_1} + \frac{193,2}{I_1} \right) \cdot \lambda + \left(\frac{193,2}{I_1} \cdot \frac{1507,4}{I_1} - \frac{329,9}{I_1} \cdot \frac{550,1}{I_1} \right) = 0$$

или

$$\lambda^2 - 1700,6 \cdot \lambda + 109751,7 = 0.$$

Решаем квадратное уравнение:

$$\lambda_{1,2} = \frac{850,3}{I_1} \pm \sqrt{850,3^2 - 109751,7} \cdot \frac{1}{I_1} = \frac{850,3}{I_1} \pm \frac{783,1}{I_1};$$

$$\lambda_1 = \frac{1633,4}{I_1} = 0,4537;$$

$$\lambda_2 = \frac{67,2}{I_1} = 0,018667.$$

Определяем частоты:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{0,4537}} = 1,4846;$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{0,018667}} = 7,3192.$$

Вычисляем частоту вынужденных колебаний в соответствии с заданием

$$\theta = 0,85 \cdot 1,4846 = 1,2619 = 1,262 \text{ с}^{-1}$$

По эпюре изгибающих моментов M_p^0 (рис.28), построенной в основной системе метода сил от амплитудных значений динамической нагрузки, составляем матрицу B_{op} :

$$B_{op} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 16 \\ 16 \\ -16 \\ -16 \\ -2 \\ -14 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Для нахождения матрицы B_p , элементы которой характеризуют величины изгибающих моментов в заданной статически неопределимой системе от действия амплитудных значений динамических нагрузок, необходимо выполнить ряд матричных операций, а именно:

$$Y = B_1' \cdot f \cdot B_1; X_1 = -Y^{-1} \cdot B_1' \cdot f \cdot B_{op}; B_p = B_{op} + B_1 \cdot X_1.$$

Часть матричных операций $Y = B_1' \cdot f \cdot B_1$;

$B_1' \cdot f = A$ выполнена ранее.

Находим неизвестные: $X_1 = -y^{-1} \cdot b_1' \cdot f \cdot B_{op} = -y^{-1} \cdot A \cdot B_{op}$

$$\begin{aligned}
X_1 &= -I_1 \begin{bmatrix} 0,0110128 & 0,0007342 \\ 0,0007342 & 0,0037526 \end{bmatrix} \cdot I_1 \begin{bmatrix} 0 & 9 & 9 & 4 & -2 & -4 & 6 & 6 & 0 & 4 & -4 \\ -9 & -18 & -9 & 0 & 0 & 0 & 6 & 12 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot B_{\sigma,p} = \\
&= \begin{bmatrix} -0,0066 & 0,0859 & 0,0925 & 0,0441 & -0,0220 & -0,0441 & 0,0705 & 0,0749 & 0,0044 & 0,0441 & -0,0441 \\ -0,0338 & -0,0609 & -0,0272 & 0,0029 & -0,0015 & -0,0029 & 0,0269 & 0,0494 & 0,0225 & 0,0029 & -0,0029 \end{bmatrix} \times \\
&\times \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 16 \\ 16 \\ -16 \\ -16 \\ -2 \\ -14 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,111 \\ 1,450 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Находим матрицу B_p ;

$$B_p = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 16 \\ 16 \\ -16 \\ -16 \\ -2 \\ -14 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 2 & -6 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 6 \\ 0 & 6 \\ 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4,111 \\ 1,450 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 16 \\ 16 \\ -16 \\ -16 \\ -2 \\ -14 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8,7 \\ -0,478 \\ 8,222 \\ 8,222 \\ 0 \\ -8,222 \\ 8,222 \\ 16,922 \\ 8,7 \\ 8,222 \\ -8,222 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6,7 \\ -0,478 \\ 8,222 \\ 8,222 \\ 16 \\ 7,778 \\ -7,778 \\ 0,922 \\ 6,7 \\ -5,778 \\ -6,222 \end{bmatrix}.$$

Определяем перемещения:

$$\Delta \mathbf{f} = \mathbf{b}' \cdot \mathbf{B}_p = \begin{bmatrix} 1,447 & -1,289 & 1,764 & 1,764 & 0 & -1,764 & 1,764 & -1,183 & 1,553 & -2,736 & 2,736 \\ 1,345 & 0,116 & 0,271 & 0,271 & 0 & -0,271 & 0,271 & 0,425 & 1,654 & -1,229 & 1,229 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6,7 \\ 0,478 \\ 8,222 \\ 8,222 \\ 16 \\ 7,778 \\ -7,778 \\ 0,922 \\ 6,7 \\ -5,778 \\ -6,222 \end{bmatrix} = \frac{1}{I_1} \begin{bmatrix} -23,821 \\ -6,355 \end{bmatrix}$$

Составляем каноническое уравнение для инерциальных сил:

$$\mathbf{F}^o \cdot \mathbf{J} + \Delta_p = 0,$$

$$\text{где } \mathbf{F}^o = \mathbf{F} - \frac{1}{m_i \theta^2} \mathbf{E};$$

$$\frac{1}{m_1 \theta^2} = \frac{1}{25 \cdot 1,5926} = 0,02512;$$

$$\frac{1}{m_2 \theta^2} = \frac{1}{15 \cdot 1,5926} = 0,04186;$$

$$\mathbf{F}^o = \mathbf{F} - \frac{1}{m_i \theta^2} \mathbf{E} = \frac{1}{I_1} \begin{bmatrix} 60,297 & 21,994 \\ 22,002 & 12,881 \end{bmatrix} - \frac{1}{I_1} \begin{bmatrix} 0,02512 \cdot I_1 & 0 \\ 0 & 0,04186 \cdot I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30,135 & 21,994 \\ 22,002 & -137,815 \end{bmatrix}$$

Выполняем обращение матрицы \mathbf{F}^o :

$$\begin{array}{cc} \mathbf{E}_o & \mathbf{E} \\ \begin{bmatrix} -30,135 & 21,994 \\ 22,002 & -137,815 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{Умножаем вторую строку на } \frac{21,994}{137,816} \text{ и сложим с}$$

первой.

$$\begin{array}{ccc} 3,511 & 21,994 & 0,1596 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|cc} -26,624 & 0 & 1 & 0,1596 \\ 22,022 & -137,816 & 0 & 1 \end{array} \quad \text{Разделим первую строку на } -26,624.$$

$$\left| \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -0,03756 & -0,005995 \\ 22,002 & -137,816 & 0 & 1 \end{array} \right| \text{ Умножим I-ю строку на } -22,002 \text{ и сложим со}$$

второй.

$$-22,002 \quad 0 \quad 0,8264 \quad 0,131879$$

$$\left| \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -0,03756 & -0,005995 \\ 0 & -137,816 & 0,8264 & 1,131879 \end{array} \right| \text{ Поделим вторую строку на } -137,816.$$

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} -0,037560 & -0,005995 \\ -0,005996 & -0,008213 \end{array} \right] \cdot I_1$$

Проверка.

$$\begin{aligned} [F^o]^{-1} \cdot [F^o] &= I_1 \begin{bmatrix} -0,037560 & -0,005996 \\ -0,005996 & -0,008213 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{I_1} \begin{bmatrix} -30,135 & 21,994 \\ 22,002 & -137,815 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (0,03756 \cdot 30,135 - 0,005996 \cdot 22,002) & (-0,03756 \cdot 21,994 + 0,005996 \cdot 137,815) \\ (0,005996 \cdot 30,135 - 0,008213 \cdot 22,002) & (-0,005996 \cdot 21,994 + 0,008213 \cdot 137,815) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0,99995 & 0,000240 \\ 0,00001 & 0,999998 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Определяем силы инерции:

$$J = -[F^o]^{-1} \cdot \Delta_p = I_1 \begin{bmatrix} 0,03756 & 0,005996 \\ 0,005996 & 0,008213 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{I_1} \begin{bmatrix} -23,821 \\ -6,355 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,9328 \\ -0,1950 \end{bmatrix}.$$

Находим амплитудные значения изгибающих моментов от периодической динамической нагрузки:

$$S = B_0 + B \cdot J = \begin{bmatrix} -6,7 \\ -0,478 \\ 8,222 \\ 8,222 \\ 16 \\ 7,778 \\ -7,778 \\ 0,922 \\ 6,7 \\ -5,778 \\ -6,222 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1,447 & 1,3545 \\ -1,289 & 1,116 \\ 1,764 & 0,271 \\ 1,764 & 0,271 \\ 0 & 0 \\ -1,764 & -0,271 \\ 1,764 & 0,271 \\ -1,183 & 0,425 \\ 1,553 & 1,654 \\ -2,736 & -1,229 \\ 2,736 & 1,229 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0,9328 \\ -0,195 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6,7 \\ -0,478 \\ 8,222 \\ 8,222 \\ 16 \\ 7,778 \\ -7,778 \\ 0,922 \\ 6,7 \\ -5,778 \\ -6,222 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1,612 \\ 1,179 \\ -1,698 \\ -1,698 \\ 0 \\ 1,698 \\ -1,698 \\ 1,021 \\ -1,771 \\ 2,792 \\ -2,792 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8,312 \\ 0,701 \\ 6,524 \\ 6,524 \\ 16 \\ 9,476 \\ -9,476 \\ 1,943 \\ 4,929 \\ -2,986 \\ -9,014 \end{bmatrix}.$$

Сопоставляя поперечные результаты (см. табл. 3), не трудно заметить, максимальные расхождения в значениях изгибающих моментов в характерных сечениях, обусловленные погрешностью вычислений, не превышают одного процента.

§10. ОПИСАНИЕ ПРОГРАММЫ ДИНАМИКА DINAMIKA

Программа DINAMIKA, созданная на кафедре Прикладной механики Мордовского университета, базируется на матричной форме расчёта стержневых систем в последовательности метода сил см. §8. Она позволяет определять собственные частоты и внутренние усилия (изгибающие моменты) в невесомых статически неопределимых стержневых системах, несущих сосредоточенные точечные массы и нагруженных периодической гармонической нагрузкой.

Использование программ, соответствующей полуавтоматизированному подходу, требует предварительных расчётов, а именно:

Для заданной невесомой стержневой системы, несущей ряд сосредоточенных точечных масс, определяется степень статической неопределимости (n) и степень свободы масс (K). Выбирается основная система метода сил, в которой строятся эпюры изгибающих моментов: от единичных сил, приложенных по направлению отброшенных связей; от единичных сил, приложенных по направлению колебаний сосредоточенных масс; от амплитудных значений заданной динамической нагрузки.

Заданная статически неопределимая система разбивается на отдельные стержни-элементы и применимо правило знаков для изгибающих моментов. Следует напомнить, что правило знаков и нумерация стержней-элементов выбираются произвольно. Каждый произвольный элемент характеризуется двумя сечениями. Если сечение примыкает к шарниру и в нём не приложен сосредоточенный момент, то в расчёте оно не учитывается. Поэтому общее количество сечений не меньше или равно удвоенному количеству стержней-элементов, на которые разбивается основная система.

Затем составляют исходные матрицы:

-квазидиагональная матрица податливости не объединённых между собой элементов системы, её порядок $f(m, m)$;

-матрица усилий $B_1(m, n)$ по эпюрам изгибающих моментов, построенным от последовательного приложения неизвестных метода сил ($X_i = 1$);

-матрица усилий $B_2(m, k)$ по эпюрам изгибающих моментов, построенным от последовательного приложения единичных сил по направлению колебаний масс;

-матрица усилий $B_{op}(m, l)$ по эпюрам изгибающих моментов, построенным от амплитудных значений заданной динамической нагрузки (l - количество загрузений);

-диагональная матрица масс системы $M(K, K)$.

Программа ДИНАМИКА предусматривает бесформатный ввод данных в следующей последовательности:

-первоначально вводится информация общего характера:

фамилия пользователя, имя решаемой задачи и т.д. Её объём ограничен 70 символами, вводимыми в одну строку;

-степень статической неопределимости (n) (число неизвестных метода сил);

-число сечений системы (m);

-матрицу $B_1(m, n)$

(все матрицы вводятся по строкам);

-матрицу $B_o(m, K)$;

-матрицу $f(m, m)$;

-матрицу масс $M(K, K)$;

-матрицу $B_{op}(m, \ell)$;

-жёсткость EJ_p (EJ_p -расчётная жёсткость, которая фигурирует в вводе множителя при матрице податливости $f(m, m)$);

-массы системы m_1 и m_2 ;

-множитель частоты вынужденных колебаний

$$C = \frac{\omega_{\max}}{\theta} = \frac{1}{\theta \omega_{\max}},$$

где величина $\frac{\theta}{\omega_{\max}}$ - является заданной (см. табл.2).

Файл исходных данных для примера, распространённого в §7 приведён на рис.45

Результаты счёта, в виде распечатки, даны на рис.46. Здесь приводятся частоты собственных колебаний W_1 и значения изгибающих моментов S_θ в характерных сечениях заданной рамы от действия динамической нагрузки. Полученных результаты сопоставили с найденными ранее (см. табл. 4).

Кузнецова Г.П. Пояснения

2

11

2

1

0 -6
 2 -6
 2 0
 2 0
 0 0
 -2 0
 2 0
 2 6
 0 6
 2 0
 -2 0

 4.5 1.5
 0 0
 0 0
 0 0

Табл. 4
 Расхождения в десятых долях обусловленные
 погрешностью вычислений

№ Сече- ния	Значения изгибающих моментов	
	Традиц. форма расчета	На ЭВМ
1	-4,887	-4,886
2	-0,078	-0,074
3	8,316	8,319
4	8,316	8,319
5	16,000	16,000
6	7,684	7,681
7	-7,684	-7,681
8	1,812	1,807
9	2,003	8,995
10	-7,191	-9,188
11	-4,809	-4,812

0 0
 0 0
 0 0
 -6 0
 -1.5 1.5
 -4.5 -1.5
 4.5 1.5

 1.5 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
 0 3 1.5 0 0 0 0 0 0 0 0
 0 1.5 3 0 0 0 0 0 0 0 0
 0 0 0 2 0 0 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 2 1 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 1 2 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0 0 2 1 0 0 0
 0 0 0 0 0 0 1 2 0 0 0
 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 0
 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2

25 0
0 15

2
0
0
0
16
16
-16
-16
-2
-14
2

3600

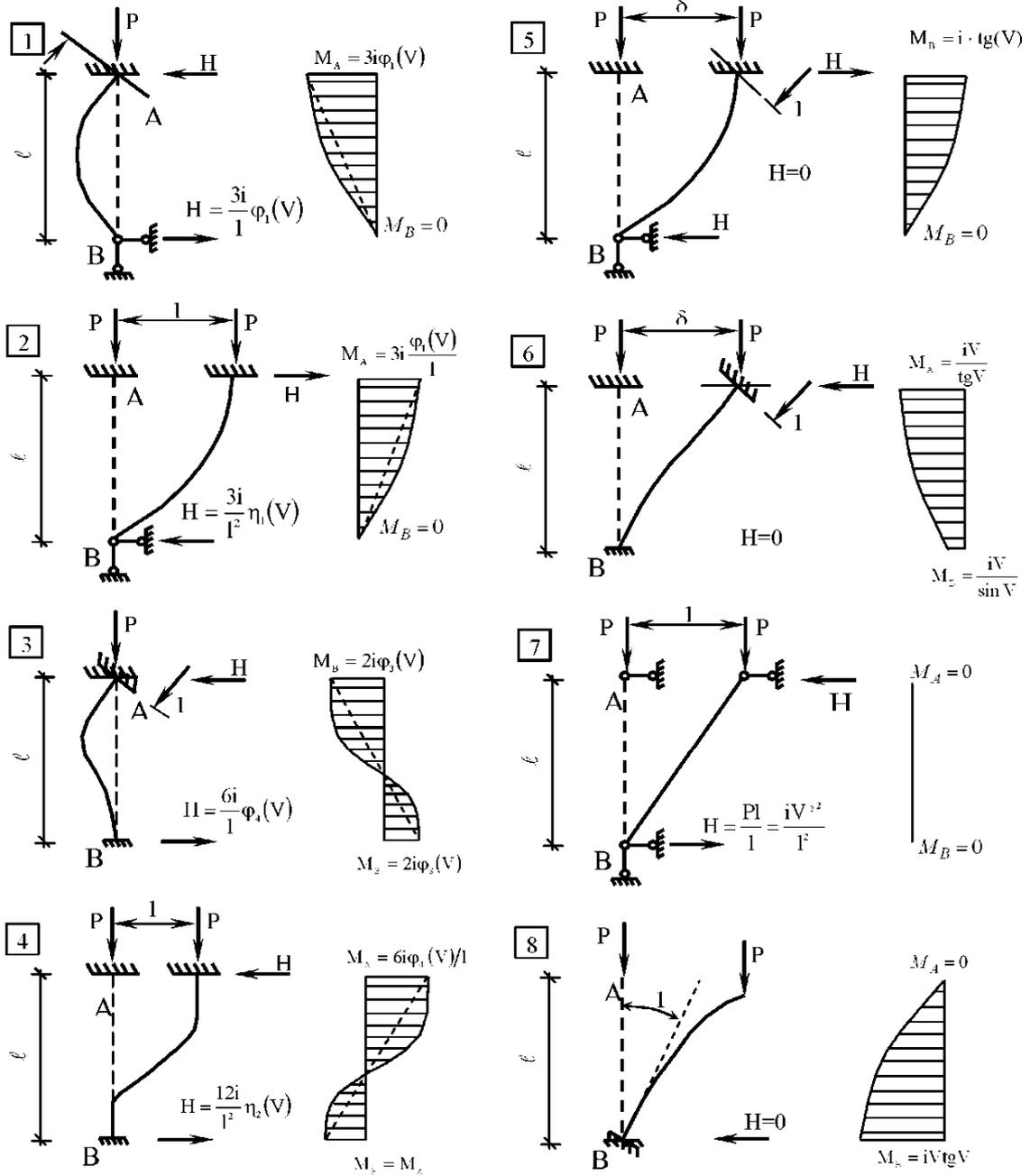
25 L 15
1.1764705

Рис. 45. Файл исходных данных

Кузнецова Г.П.
W1=1.48465 W2=7.31804
Матрица So
-4.885954 - .074072 8.318755 8.318755 16.000000
7.681245 -7.681245 1.806704 8.994822 -7.188118
-4.811882

Рис. 46

Реактивные моменты и реакции в стержнях от единичных смещений



Приложение 2

Поправочные множители и обозначения

$$\varphi_1(V) = V^2 / [3(1 - V/\operatorname{tg} V)];$$

$$\varphi_2(V) = [1 - V/\operatorname{tg} V] / \{4[-1 + (\operatorname{tg} 0,5V)/(0,5V)]\};$$

$$\varphi_3(V) = [V/\sin V - 1] / \{2[-1 + (\operatorname{tg} 0,5V)/0,5V]\};$$

$$\varphi_4(V) = \varphi_1(0,5V);$$

$$\eta_1(V) = \varphi_1(V) - V^2/3;$$

$$\eta_2 = \eta_1(0,5V) = \varphi_4(V) - V^2/12;$$

$$i = EJ/l;$$

$$V = \sqrt{(Pl^2)/EJ} = \sqrt{Pl/i}.$$

$$\varphi_1(V) = V^2 / [3(1 - V/\operatorname{tg} V)];$$

$$\varphi_2(V) = [1 - V/(\operatorname{tg} V)] / [4(\operatorname{tg}(V/2)/(V/2) - 1)];$$

$$\varphi_3(V) = [V/(\sin V) - 1] / [2(\operatorname{tg}(V/2)/(V/2) - 1)];$$

$$\varphi_4(V) = \varphi_1(0,5V);$$

$$\eta_1(V) = -\varphi_1(V) - V^2/3;$$

$$\eta_2(V) = \varphi_4(V) - V^2/12;$$

Приложение 3

V	$\varphi_1 = (V)$	$\varphi_2 = (V)$	$\varphi_3 = (V)$	$\varphi_4 = (V)$	$\eta_1 (V)$	$\eta_2 (V)$
0.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.20	0.9973	0.9986	1.0009	0.9992	0.9840	0.9959
0.40	0.9895	0.9945	1.0026	0.9973	0.9362	0.9840
0.60	0.9756	0.9881	1.0061	0.9941	0.8556	0.9641
0.80	0.9567	0.9787	1.0111	0.9895	0.7434	0.9362
1.00	0,9313	0,9662	1,0172	0,9832	0,5980	0,8999
1.10	0,9164	0,9590	1,0209	0,9798	0,5131	0,8790
1.20	0,8998	0,9511	1,0251	0,9756	0,4198	0,8556
1.30	0,8814	0,9424	1,0296	0,9714	0,3181	0,8306
1.40	0,8613	0,9329	1,0348	0,9669	0,2080	0,8025
1.50	0,8393	0,9226	1,0403	0,9620	0,0893	0,7745
$\pi/2$	0,8225	0,9145	1,0445	0,9580	0,0000	0,7525
1.60	0,8153	0,9116	1,0463	0,9567	-0,0380	0,7434
1.70	0,7891	0,8998	1,0529	0,9540	-0,1742	0,7102
1.80	0,7609	0,8871	1,0600	0,9449	-0,3191	0,6749
1.90	0,7297	0,8735	1,0676	0,9383	-0,4736	0,6375
2.00	0,6961	0,8590	1,0760	0,9313	-0,6372	0,5980
2.02	0,6891	0,8560	1,0777	0,9299	-0,6710	0,5899
2.04	0,6819	0,8530	1,0795	0,9285	-0,7053	0,5817
2.06	0,6747	0,8499	1,0813	0,9270	-0,7398	0,5734
2.08	0,6672	0,8468	1,0831	0,9255	-0,7749	0,5650
2.10	0,6597	0,8437	1,0850	0,9240	-0,8103	0,5565
2.12	0,6521	0,8405	1,0868	0,9225	-0,8465	0,5480
2.14	0,6443	0,8372	1,0887	0,9210	-0,8822	0,5394
2.16	0,6364	0,8339	1,0907	0,9195	-0,9188	0,5307
2.18	0,6284	0,8306	1,0926	0,9180	-0,9557	0,5220
2.20	0,6202	0,8273	1,0946	0,9164	-0,9931	0,5131
2.22	0,6119	0,8239	1,0966	0,9148	-1,0309	0,5041
2.24	0,6034	0,8204	1,0988	0,9132	-1,0691	0,4951
2.26	0,5948	0,8170	1,1009	0,9116	-1,1077	0,4860
2.28	0,5861	0,8134	1,1029	0,9100	-1,1457	0,4768
2.30	0,5772	0,8099	1,1050	0,9083	-1,1861	0,4675
2.32	0,5681	0,8063	1,1072	0,9066	-1,2260	0,4581
2.34	0,5589	0,8026	1,1095	0,9049	-1,2263	0,4486
2.36	0,5496	0,7989	1,1117	0,9032	-1,3069	0,4391
2.38	0,5401	0,7952	1,1140	0,9015	-1,3480	0,4295
2.40	0,5304	0,7915	1,1164	0,8998	-1,3896	0,4198
2.42	0,5205	0,7877	1,1188	0,8981	-1,4316	0,4101
2.44	0,5105	0,7838	1,1212	0,8963	-1,4743	0,4002
2.46	0,5003	0,7799	1,1236	0,8945	-1,5169	0,3902
2.48	0,4899	0,7760	1,1261	0,8927	-1,5602	0,3802
2.50	0,4793	0,7720	1,1286	0,8909	-1,6040	0,3701
2.52	0,4685	0,7679	1,1311	0,8890	-1,6381	0,3598
2.54	0,4576	0,7638	1,1337	0,8871	-1,6929	0,3495
2.56	0,4464	0,7596	1,1363	0,8852	-1,7381	0,3391
2.58	0,4350	0,7555	1,1390	0,8833	-1,7838	0,3286
2.60	0,4234	0,7513	1,1417	0,8814	-1,8299	0,3181

V	$\varphi_1 = (V)$	$\varphi_2 = (V)$	$\varphi_3 = (V)$	$\varphi_4 = (V)$	$\eta_1 (V)$	$\eta_2 (V)$
2.62	0,4116	0,7470	1,1445	0,8795	-1,8765	0,3075
2.64	0,3996	0,7427	1,1473	0,8776	-1,9236	0,2968
2.66	0,3873	0,7383	1,1501	0,8756	-1,9712	0,2860
2.68	0,3748	0,7339	1,1530	0,8736	-2,0193	0,2751
2.70	0,3620	0,7294	1,1559	0,8716	-2,0679	0,2641
2.72	0,3491	0,7249	1,1589	0,8696	-2,1170	0,2531
2.74	0,3358	0,7204	1,1619	0,8676	-2,1667	0,2420
2.76	0,3223	0,7158	1,1650	0,8655	-2,2169	0,2307
2.78	0,3085	0,7111	1,1681	0,8634	-2,2676	0,2192
2.80	0,2944	0,7064	1,1712	0,8613	-2,3189	0,2080
2.82	0,2801	0,7016	1,1744	0,8592	-2,3707	0,1968
2.84	0,2654	0,6967	1,1777	0,8571	-2,4231	0,1850
2.86	0,2505	0,6918	1,1810	0,8550	-2,4760	0,1734
2.88	0,2352	0,6869	1,1844	0,8528	-2,5296	0,1616
2.90	0,2195	0,6819	1,1878	0,8506	-2,5838	0,1498
2.92	0,2036	0,6768	1,1913	0,8484	-2,6385	0,1379
2.94	0,1878	0,6717	1,1948	0,8462	-2,6939	0,1261
2.96	0,1706	0,6665	1,1984	0,8439	-2,7499	0,1138
2.98	0,1535	0,6613	1,2020	0,8416	-2,8066	0,1016
3.00	0,1361	0,6560	1,2057	0,8393	-2,8639	0,0893
3.02	0,1182	0,6506	1,2095	0,8370	-2,9219	0,0770
3.04	0,1000	0,6454	1,2133	0,8347	-2,9805	0,0646
3.06	0,0812	0,6398	1,2172	0,8323	-3,0400	0,0520
3.08	0,0621	0,6343	1,2212	0,8299	-3,0991	0,0394
3.10	0,0424	0,6287	1,2252	0,8275	-3,1609	0,0267
3.12	0,0223	0,6230	1,2292	0,8251	-3,2225	0,0139
π	0,0000	0,6168	1,2336	0,8224	-3,2898	0,000
3.16	-0,0195	0,6115	1,2376	0,8203	-3,3480	-0,0118
3.18	-0,0412	0,6057	1,2419	0,8178	-3,4120	-0,0249
3.20	-0,0635	0,5997	1,2463	0,8153	-3,4768	-0,0380
3.22	-0,0864	0,5937	1,2507	0,8128	-3,5425	-0,0512
3.24	-0,1100	0,5876	1,2552	0,8102	-3,6092	-0,0646
3.26	-0,1342	0,5815	1,2597	0,8076	-3,6767	-0,0780
3.28	-0,1591	0,5753	1,2644	0,8050	-3,7453	-0,0915
3.30	-0,1847	0,5691	1,2691	0,8024	-3,8147	-0,1051
3.32	-0,2111	0,5628	1,2739	0,7998	-3,8852	-0,1187
3.34	-0,2383	0,5564	1,2788	0,7972	-3,9568	-0,1324
3.36	-0,2663	0,5499	1,2838	0,7945	-4,0295	-0,1463
3.38	-0,2931	0,5433	1,2889	0,7918	-4,1032	-0,1602
3.40	-0,3248	0,5366	1,2940	0,7891	-4,1781	-0,1742
3.42	-0,3555	0,5299	1,2992	0,7863	-4,2543	-0,1884
3.44	-0,3878	0,5231	1,3045	0,7835	-4,3318	-0,2026
3.46	-0,4202	0,5162	1,3099	0,7807	-4,4107	-0,2169
3.48	-0,4542	0,5092	1,3155	0,7779	-4,4910	-0,2313
3.50	-0,4894	0,5021	1,3212	0,7751	-4,5727	-0,2457
3.52	-0,5259	0,4950	1,3270	0,7723	-4,6560	-0,2602
3.54	-0,5638	0,4878	1,3328	0,7695	-4,7410	-0,2748
3.56	-0,6031	0,4805	1,3387	0,7667	-4,8276	-0,2894
3.58	-0,6439	0,4731	1,3447	0,7638	-4,9160	-0,3042

V	$\varphi_1 = (V)$	$\varphi_2 = (V)$	$\varphi_3 = (V)$	$\varphi_4 = (V)$	$\eta_1 (V)$	$\eta_2 (V)$
3.60	-0,6862	0,4656	1,3508	0,7609	-5,0062	-0,3191
3.62	-0,7303	0,4580	1,3571	0,7580	-5,0984	-0,3340
3.64	-0,7763	0,4503	1,3635	0,7550	-5,1928	-0,3491
3.66	-0,8243	0,4425	1,3700	0,7520	-5,2895	-0,3643
3.68	-0,8745	0,4345	1,3766	0,7488	-5,3886	-0,3797
3.70	-0,9270	0,4265	1,3834	0,7457	-5,4899	-0,3951
3.72	-0,9819	0,4184	1,3903	0,7425	-5,5947	-0,4107
3.74	-1,0395	0,4102	1,3973	0,7393	-5,7020	-0,4263
3.76	-1,0999	0,4010	1,4044	0,7361	-5,8124	-0,4420
3.78	-1,1634	0,3935	1,4117	0,7329	-5,9262	-0,4578
3.80	-1,2303	0,3850	1,4191	0,7297	-6,0436	-0,4736
3.82	-1,3009	0,3764	1,4267	0,7265	-6,1650	-0,4895
3.84	-1,3754	0,3677	1,4344	0,7232	-6,2906	-0,5056
3.86	-1,4543	0,3588	1,4423	0,7199	-6,4203	-0,5217
3.88	-1,5380	0,3498	1,4503	0,7166	-6,5561	-0,5379
3.90	-1,6268	0,3407	1,4584	0,7133	-6,6968	-0,5542
3.92	-1,7214	0,3315	1,4667	0,7099	-6,8435	-0,5706
3.94	-1,8227	0,3221	1,4752	0,7065	-6,9972	-0,5871
3.96	-1,9310	0,3126	1,4838	0,7031	-7,1582	-0,6037
3.98	-2,0473	0,3030	1,4928	0,6996	-7,3274	-0,6204
4.00	-2,1725	0,2933	1,5018	0,6961	-7,5058	-0,6372
4.02	-2,3074	0,2834	1,5110	0,6926	-7,6942	-0,6541
4.04	-2,4547	0,2734	1,5204	0,6891	-7,8952	-0,6710
4.06	-2,6142	0,2632	1,5301	0,6855	-8,1087	-0,6881
4.08	-2,7888	0,2529	1,5400	0,6819	-8,3376	-0,7053
4.10	-2,9806	0,2424	1,5501	0,6783	-8,5839	-0,7225
4.12	-3,1915	0,2318	1,5604	0,6747	-8,8496	-0,7398
4.14	-3,4262	0,2210	1,5709	0,6710	-9,1394	-0,7573
4.16	-3,6877	0,2101	1,5816	0,6673	-9,4562	-0,7749
4.18	-3,9824	0,1990	1,5925	0,6635	-9,8065	-0,7925
4.20	-4,3155	0,1877	1,6036	0,6597	-10,196	-0,8103
4.22	-4,6970	0,1762	1,6150	0,6559	-10,633	-0,8231
4.24	-5,1369	0,1646	1,6267	0,6521	-11,129	-0,8460
4.26	-5,6516	0,1528	1,6482	0,6482	-11,701	-0,8641
4.28	-6,2607	0,1409	1,6510	0,6443	-12,367	-0,8822
4.30	-6,9949	0,1288	1,6637	0,6404	-13,158	-0,9004
4.32	-7,8956	0,1165	1,6767	0,6364	-14,116	-0,9188
4.34	-9,0306	0,1040	1,6899	0,6324	-15,309	-0,9372
4.36	-10,503	0,0912	1,7033	0,6284	-16,840	-0,9557
4.38	-12,523	0,0781	1,6243	0,6243	-18,918	-0,9744
4.40	-15,330	0,0648	1,6202	0,6202	-21,783	-0,9931
4.42	-19,703	0,0513	1,6161	0,6161	-26,215	-1,011
4.44	-27,349	0,0376	1,7602	0,6119	-33,920	-1,0309
4.46	-44,148	0,0237	1,7754	0,6077	-50,779	-1,0499
4.48	-111,57	0,0096	1,7910	0,6034	-118,26	-1,0691
4.50	+227,80	-0,0048	1,8070	0,5991	+221,05	-1,0884
4.52		-0,0194	1,8234	0,5948		-1,1077
4.54		-0,0343	1,8402	0,5905		-1,1231
4.56		-0,0495	1,8575	0,5861		-1,1457

V	$\varphi_1 = (V)$	$\varphi_2 = (V)$	$\varphi_3 = (V)$	$\varphi_4 = (V)$	$\eta_1 (V)$	$\eta_2 (V)$
4.58		-0,0650	1,8752	0,5817		-1,1662
4.60		-0,0808	1,8933	0,5772		-1,1861
4.62		-0,0969	1,9119	0,5727		-1,2060
4.64		-0,1133	1,9310	0,5681		-1,2250
4.66		-0,1301	1,9507	0,5635		-1,2461
4.68		-0,1472	1,9710	0,5589		-1,2663
4.70		-0,1646	1,9919	0,5543		-1,2865
3 π /2		-0,1755	2,0052	0,5514		-1,2992
4.72		-0,1824	2,0134	0,5496		-1,3069
4.74		-0,2005	2,0355	0,5449		-1,3274
4.76		-0,2190	2,0582	0,5402		-1,3480
4.78		-0,2379	2,0816	0,5354		-1,3686
4.80		-0,2572	2,1056	0,5305		-1,3896
4.82		-0,2770	2,1304	0,5255		-1,4105
4.84		-0,2973	2,1560	0,5205		-1,4316
4.86		-0,3181	2,1824	0,5155		-1,4528
4.88		-0,3385	2,2096	0,5105		-1,4743
4.90		-0,3612	2,2377	0,5054		-1,4954
4.92		-0,3834	2,2667	0,5003		-1,5169
4.94		-0,4061	2,2966	0,4951		-1,5385
4.96		-0,4293	2,3275	0,4899		-1,5602
4.98		-0,4530	2,3594	0,4846		-1,5821
5.00		-0,4772	2,3924	0,4793		-1,6040
5.02		-0,5022	2,4266	0,4739		-1,6261
5.04		-0,5280	2,4620	0,4685		-1,6483
5.06		-0,5545	2,4986	0,4630		-1,6706
5.08		-0,5818	2,5365	0,4576		-1,6929
5.10		-0,6099	2,5757	0,4520		-1,7155
5.12		-0,6388	2,6164	0,4464		-1,7381
5.14		-0,6685	2,6587	0,4407		-1,7609
5.16		-0,6999	2,7027	0,4350		-1,7838
5.18		-0,7306	2,7485	0,4292		-1,8058
5.20		-0,7630	2,7961	0,4234		-1,8299
5.22		-0,7964	2,8454	0,4175		-1,8532
5.24		-0,7310	2,8968	0,7116		-1,8765
5.26		-0,8668	2,9504	0,4056		-1,9000
5.28		-0,9039	3,0064	0,3996		-1,9236
5.30		-0,9423	3,0648	0,3931		-1,9477
5.32		-0,9821	3,1257	0,3873		-1,9712
5.34		-1,0233	3,1893	0,3811		-1,9952
5.36		-1,0660	3,2559	0,3748		-2,0193
5.38		-1,1103	3,3257	0,3685		-2,0435
5.40		-1,1583	3,3989	0,3621		-2,0679
5.42		-1,2043	3,4757	0,3556		-2,0924
5.44		-1,2544	3,5563	0,3491		-2,1170
5.46		-1,3067	3,6409	0,3425		-2,1418
5.48		-1,3612	3,7298	0,3358		-2,1667
5.50		-1,4181	3,8234	0,3291		-2,1917
5.52		-1,4777	3,9222	0,3223		-2,2169

V	$\varphi_1 = (V)$	$\varphi_2 = (V)$	$\varphi_3 = (V)$	$\varphi_4 = (V)$	$\eta_1 (V)$	$\eta_2 (V)$
5.54		-1,5402	4,0267	0,3154		-2,2422
5.56		-1,6059	4,1374	0,3085		-2,2676
5.58		-1,6751	4,2549	0,3015		-2,2932
5.60		-1,7481	4,3794	0,2944		-2,3189
5.62		-1,8252	4,5118	0,2873		-2,3447
5.64		-1,9065	4,6526	0,2801		-2,3707
5.66		-1,9920	4,8026	0,2727		-2,3969
5.68		-2,0833	4,9629	0,2654		-2,4231
5.70		-2,1804	5,1346	0,2580		-2,4495
5.72		-2,2838	5,3190	0,2505		-2,4760
5.74		-2,3944	5,5173	0,2429		-2,5027
5.76		-2,5130	5,7314	0,2352		-2,5296
5.78		-2,6406	5,9628	0,2374		-2,5466
5.80		-2,7777	6,2140	0,2195		-2,5838
5.82		-2,9262	6,4873	0,2116		-2,6111
5.84		-3,0876	6,7859	0,2036		-2,6385
5.86		-3,2634	7,1132	0,1955		-2,6661
5.88		-3,4563	7,4738	0,1873		-2,6939
5.90		-3,6678	7,8726	0,1790		-2,7218
5.92		-3,9018	8,3163	0,1706		-2,7499
5.94		-4,1603	8,8122	0,1621		-2,7782
5.96		-4,4547	9,3706	0,1535		-2,8066
59.8		-4,7816	10,004	0,1448		-2,8352
6.00		-5,1589	10,727	0,1361		-2,8639
6.02		-5,5845	11,561	0,1272		-2,8928
6.04		-6,0653	12,534	0,1182		-2,9219
6.06		-6,6753	13,683	0,1091		-2,9512
6.08		-7,3699	15,060	0,0999		-2,9805
6.10		-8,2355	16,739	0,0906		-3,0102
6.12		-9,2939	18,832	0,0812		-3,0420
6.14		-10,646	21,511	0,0717		-3,0699
6.16		-12,440	25,065	0,0621		-3,0991
6.18		-14,921	29,999	0,0523		-3,1304
6.20		-18,594	37,308	0,0425		-3,1609
6.22		-24,575	49,255	0,0324		-3,1916
6.24		-36,100	72,272	0,0223		-3,2225
6.26		-67,436	135,03	0,0121		-3,2535
6.28		-492,67	984,32	0,0017		-3,2848
2π		-∞	+∞	0		-3,2898