

### **ОПД.Р.03 СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА**

Методические указания к контрольным заданиям  
для студентов заочного обучения строительных специальностей

Методические указания содержат 8 контрольных заданий по строительной механике по темам: многопролетные статически определимые балки, трехшарнирные арки, фермы, статически неопределимые рамы, статически неопределимые балки (метод сил, метод перемещений), устойчивость рам, колебания рам.

Содержание и объем расчетно-проектировочных работ соответствуют рабочей программе по строительной механике по программам высшего профессионального образования для заочного обучения направления «Строительство».

Эти указания помогут студентам при выполнении своих расчетно-проектировочных заданий по строительной механике.

## Введение

Исходные данные для решения задачи выбираются студентами по таблице в соответствии с их личным учебным шифром (номер зачетной книжки). Шифром считается три последние цифры.

Работы, выполненные не по шифру и не в соответствии с таблицами, *не засчитываются и возвращаются без рассмотрения.*

Прежде чем приступить к выполнению работы необходимо изучить соответствующий раздел курса и решение рекомендованных задач.

Перед решением каждой задачи необходимо вычертить заданную расчетную схему и привести все нагрузки и размеры в числах.

Решение задачи должно сопровождаться краткими последовательными пояснениями, четкими схемами со всеми размерами.

На эпюрах внутренних силовых факторов и на их линиях влияния должны быть проставлены значения всех характерных ординат и размерностей.

# 1 Расчет статически определимой многопролетной балки (шарнирно-консольная балка – ШКБ, балка Семиколенова)

*Задание.* Для балки (рисунок 1.1) с выбранными по шифру из таблицы 1.2 размерами требуется:

- а) построить эпюры  $M$  и  $Q$ ;
- б) построить линии влияния (л.вл.)  $M$  и  $Q$  для заданного сечения, а также линию влияния одной опорной реакции (по выбору студента);
- в) определить по линиям влияния  $M$ ,  $Q$  и  $R$  от заданной нагрузки.

## 1.1 Порядок выполнения расчета


1.1.1 Произвести кинематический анализ балки.

Для этого использовать формулу Чебышева:

$$W = 3 \cdot D - 2 \cdot Ш - C_{опор},$$

где  $W$  - степень свободы балки;

$D$  - число дисков (стержней);

$Ш$  - число опорных стержней, число одиночных связей типа  (в заделке – три одиночные связи).

1.1.2 Построить поэтажную схему балки.

Основные балки должны располагаться на нижнем этаже схемы. Основная балка должна иметь две или три одиночных связи с землей.

1.1.3 Вычислить реакции опор по «этажам» схемы.

1.1.4 Вычислить ВСФ по «этажам». ВСФ строятся от общей нулевой линии.

1.1.5 Построить линии влияния внутренних усилий ( $M_{n-n}$ ,  $Q_{n-n}$ ) и от реакции  $R_k$ .

1.1.6 Вычислить усилия по линиям влияния.

1.1.7 Сравнить результаты, полученные при аналитическом расчете и расчете по линиям влияния. (Составить таблицу 1.1 - Таблицу результатов)).

Таблица 1.1 - Таблица результатов

Наименование силового фактора	Аналитический расчет усилий	Расчет усилий по л.вл.	% расхождения
Изгибающий момент $M_{n-n}$ (кНм)			
Поперечная сила $Q_{n-n}$ (кН)			
Опорные реакции $R_k$ (кН)			

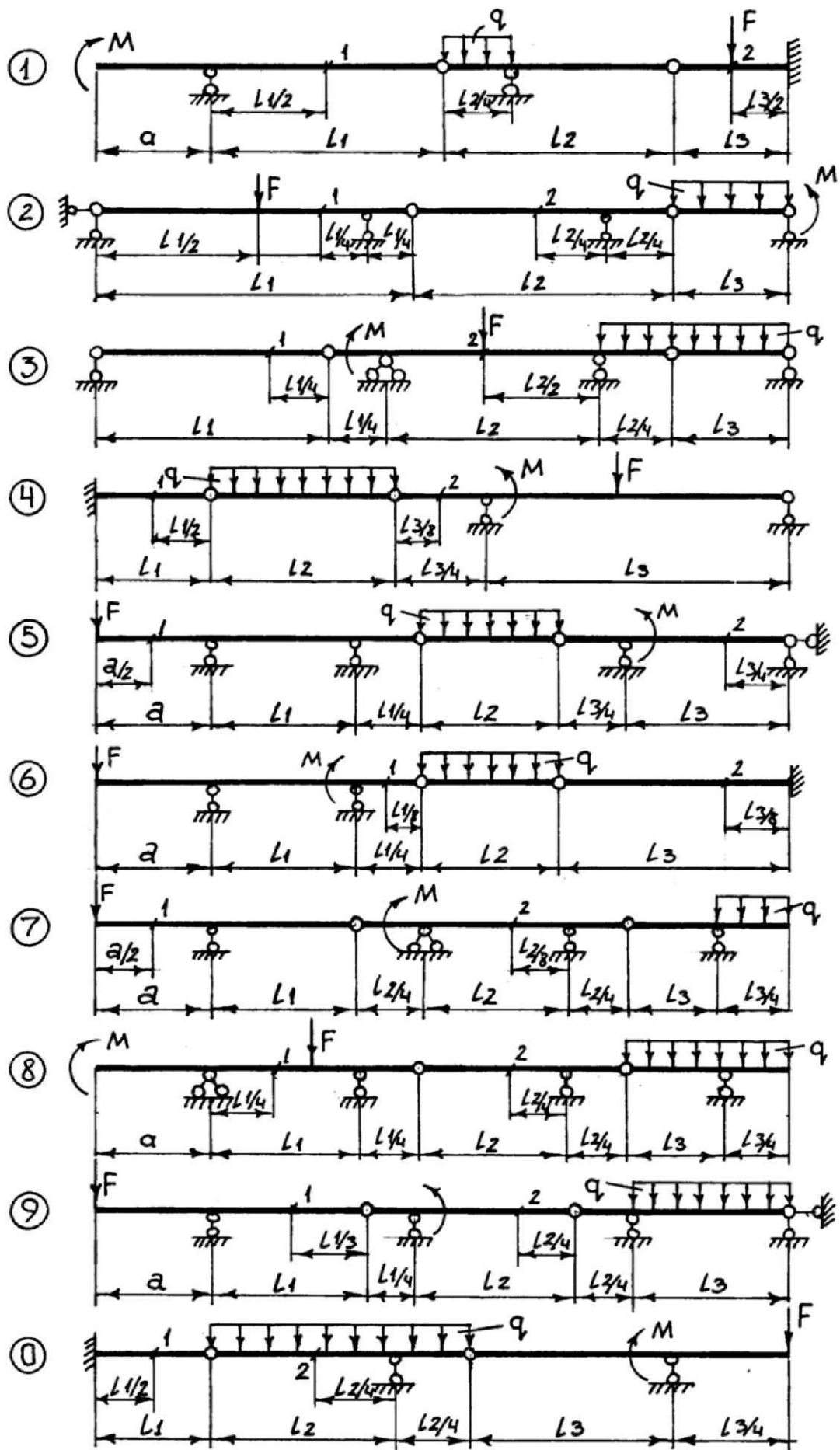


Рисунок 1.1 – Шарнирно-консольная балка

Таблица 1.2 - Шарнирно-консольная балка

Первая цифра шифра	$l_1$ м	$l_2$ м	$l_3$ м	$a$ м	Вторая цифра шифра	$q$ кН/м	$F$ кН	Третья цифра шифра (№ схемы)	$M$ кНм	№ сечения
0	12	6	9	2,0	0	1,0	6	0	4,0	1
1	6	9	12	1,5	1	2,0	8	1	3,0	2
2	9	12	6	0,8	2	1,5	5	2	8,0	2
3	9	9	12	1,2	3	2,5	8	3	6,0	1
4	6	9	12	1,0	4	0,5	4	4	2,0	1
5	12	6	9	1,8	5	1,8	7	5	2,5	2
6	12	6	9	2,0	6	2,0	10	6	1,5	1
7	9	9	12	1,5	7	2,5	8	7	4,5	2
8	6	9	12	1,2	8	1,5	6	8	5,0	1
9	9	6	12	1,6	9	1,0	5	9	6,5	2

## 2 Расчет трехшарнирной арки или трехшарнирной рамы

*Задание.* Для сплошной трехшарнирной арки или рамы (рисунок 2.1) с выбранными по шифру из таблицы 2.1 размерами и нагрузкой требуется определить изгибающие моменты, поперечные и нормальные силы в сечениях  $K_1$  и  $K_2$ .

### 2.1 Порядок выполнения расчета

2.1.1 Произвести кинематический анализ арки (рамы).

2.1.2 Вычислить реакции опор:

а) вычислить вертикальные реакции опор:  $\sum M_A = 0$ ;  $\sum M_B = 0$ ,

где  $A$  и  $B$  – опоры арки (рамы);

б) вычислить распор  $H$  или усилие в затяжке:  $\sum M_C^{лев} = 0$ ;  $M_C^{прав} = 0$ ;

где  $C$  – ключевой шарнир арки.

2.1.3 Вычислить внутренние усилия в искомых сечениях.

### 2.2 Сечение $K_1$

а) вычислить геометрические и тригонометрические параметры сечения. Ордината точек оси арки и угол наклона касательной определяются по следующим уравнениям:

1) При очертании оси по параболе:  $Y = \frac{4 \cdot f}{\ell^2} \times (\ell - x)$ ;

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dY}{dX} = \frac{4 \cdot f}{\ell^2} (\ell - 2x);$$

2) При очертании оси по окружности:  $Y = \sqrt{R^2 - \left(\frac{\ell}{2} - x\right)^2} - R + f$ ,

$$\text{где } R = \frac{f}{2} + \frac{\ell^2}{8f}; \quad \sin x = \frac{\ell - 2x}{2R}; \quad \cos \alpha = \frac{Y + R - f}{R}.$$

Для трехшарнирной рамы ординаты и необходимые углы наклона определяются непосредственно из чертежа.

б) вычислить балочные ВСФ (балочная поперечная сила  $Q^0$  и балочный изгибающий момент  $M^0$ ). При вычислении используется метод сечений.

в) вычислить ВСФ в арке по следующим формулам:

$$M_{арк} = M^0 - H \cdot Y_k;$$

$$Q_{арк} = Q^0 \cos \alpha - H \sin \alpha;$$

$$N_{арк} = -\left[ Q^0 \sin \alpha + H \cos \alpha \right],$$

где  $Y_k$  - ордината исследуемого сечения;

$\alpha$  - угол наклона касательной в сечении к оси  $X$

### 2.3 Сечение $K_2$

Повторить все пункты для сечения  $K_1$ . Только учесть, что угол наклона « $\alpha$ » касательной имеет знак (-) и синус этого угла имеет знак (-). А знак косинуса этого угла (четная функция) имеет знак (+).

Таблица 2.1 – Арка

Первая цифра шифра	$\ell$ м	$\alpha$	$\beta_1$	$\beta_2$	Вторая цифра шифра	$q_1$ кН/м	$q_2$ кН/м	$F$ кН	Третья цифра шифра	№ схемы	Очертание оси	$\frac{f}{\ell}$
0	18	0,50	0,15	0,70	0	4	0	10	0	1	Парабола	0,35
1	36	0,25	0,20	0,65	1	0	6	15	1	2	Окружность	0,40
2	28	0,20	0,25	0,75	2	5	0	20	2	3	Парабола	0,25
3	20	0,30	0,30	0,66	3	0	8	18	3	4	Рама	0,30
4	30	0,40	0,35	0,80	4	7	0	25	4	1	Парабола	0,35
5	24	0,35	0,40	0,85	5	0	8	12	5	2	Окружность	0,28
6	32	0,45	0,22	0,84	6	3	0	14	6	3	Парабола	0,35
7	34	0,60	0,20	0,82	7	0	5	20	7	4	Рама	0,25
8	26	0,70	0,45	0,72	8	8	0	15	8	1	Парабола	0,30
9	22	0,80	0,34	0,65	9	0	4	25	9	2	Парабола	0,4

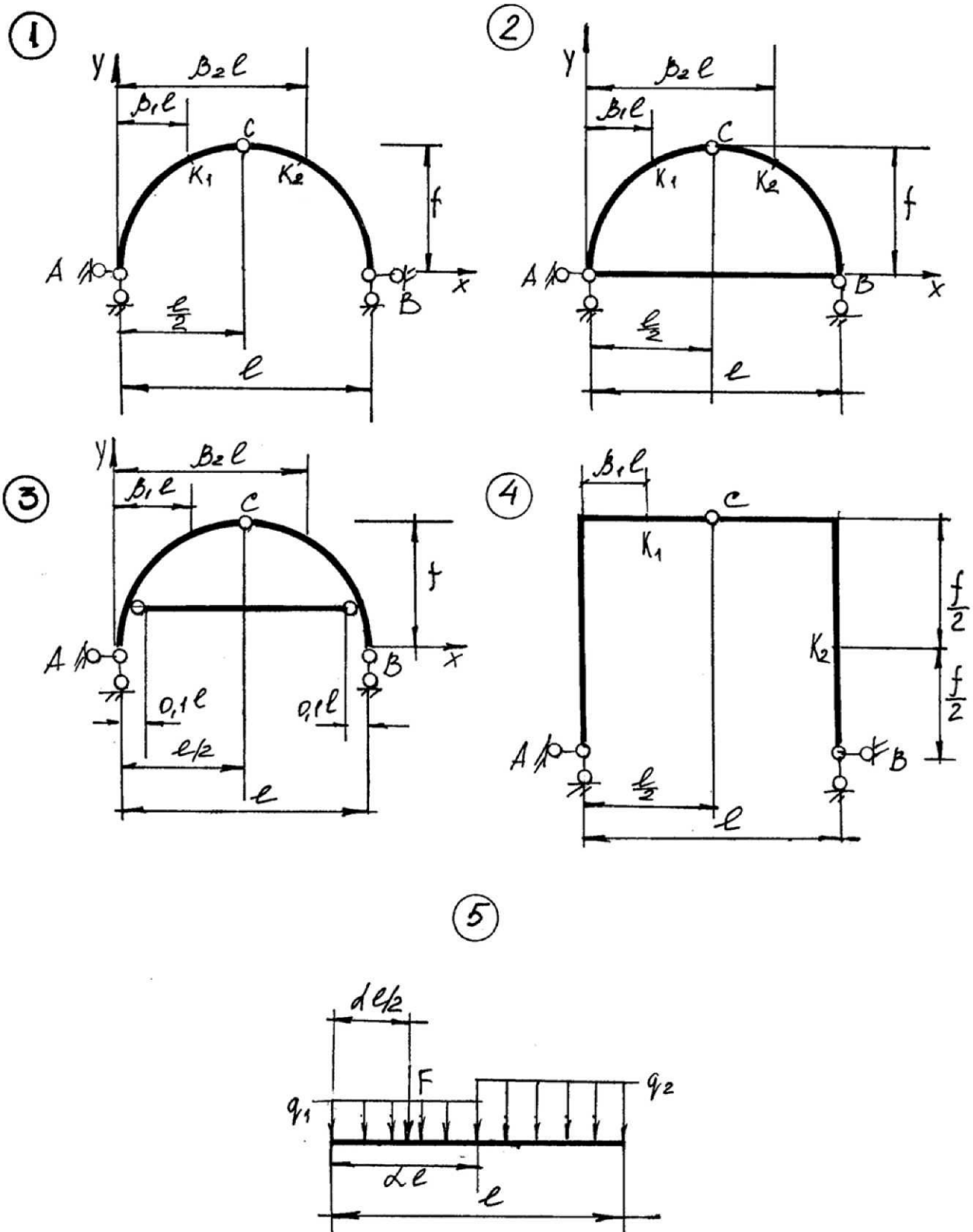


Рисунок 2.1 – Трехшарнирная арка, трехшарнирная рама



### 3 Расчет плоской статически определимой фермы

*Задание.* Для фермы (рисунок 3.1, рисунок 3.2) с выбранными по шифру из таблицы 3.1 размерами и нагрузкой требуется:

а) определить (аналитически) усилия от постоянной и временной нагрузок в стержнях заданной панели, включая левую стойку.

#### 3.1 Порядок выполнения расчета

3.1.1 Произвести кинематический анализ фермы по формуле:

$$W = 2Y - C,$$

где  $W$  - степень свободы;

$Y$  - число шарнирных узлов;

$C$  - число стержней фермы, включая опорные стержни.

3.1.2 Вычислить реакции опор.

а) расчет на постоянную нагрузку;

б) расчет на временную нагрузку.

Постоянные и временные нагрузки для схем рисунка 3.1 (схемы 3,5,6,8) – приложены в узлах верхнего пояса, а для остальных схем – в узлах нижнего пояса, в рисунке 3.2. (схемы 2,7,0) – нагрузки приложены в узлах верхнего пояса, а для остальных схем – в узлах нижнего пояса.

Постоянная нагрузка прикладывается во всех узлах указанного пояса.

Временная нагрузка прикладывается во всех узлах левой или правой половины указанного пояса.

Реакции опор вычисляются как в балках.

3.1.3 Вычислить усилия в стержнях заданной панели.

Панелью фермы считается расстояние между соседними узлами пояса.

Усилие в каждом стержне (от постоянной и временной нагрузок отдельно) следует определять непосредственно через нагрузки и опорные реакции, а не одно через другое, т.е. для каждого усилия надо найти свой способ из трех известных (моментной точки, проекций, вырезания узлов).

При определении необходимо показывать используемые сечения, приводить соответствующие уравнения. Необходимые геометрические характеристики и размеры надо определять аналитически.

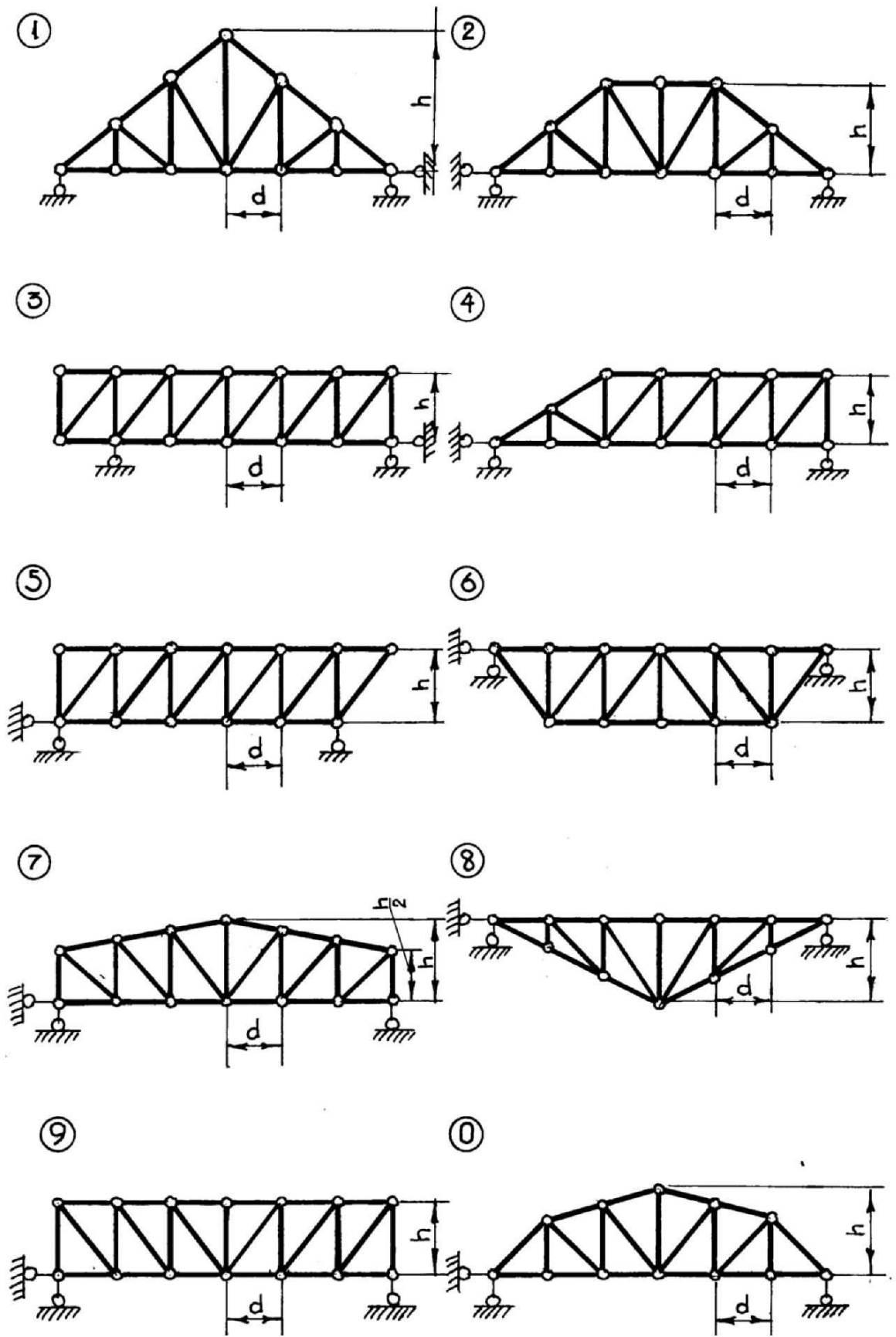


Рисунок 3.1 – Ферма

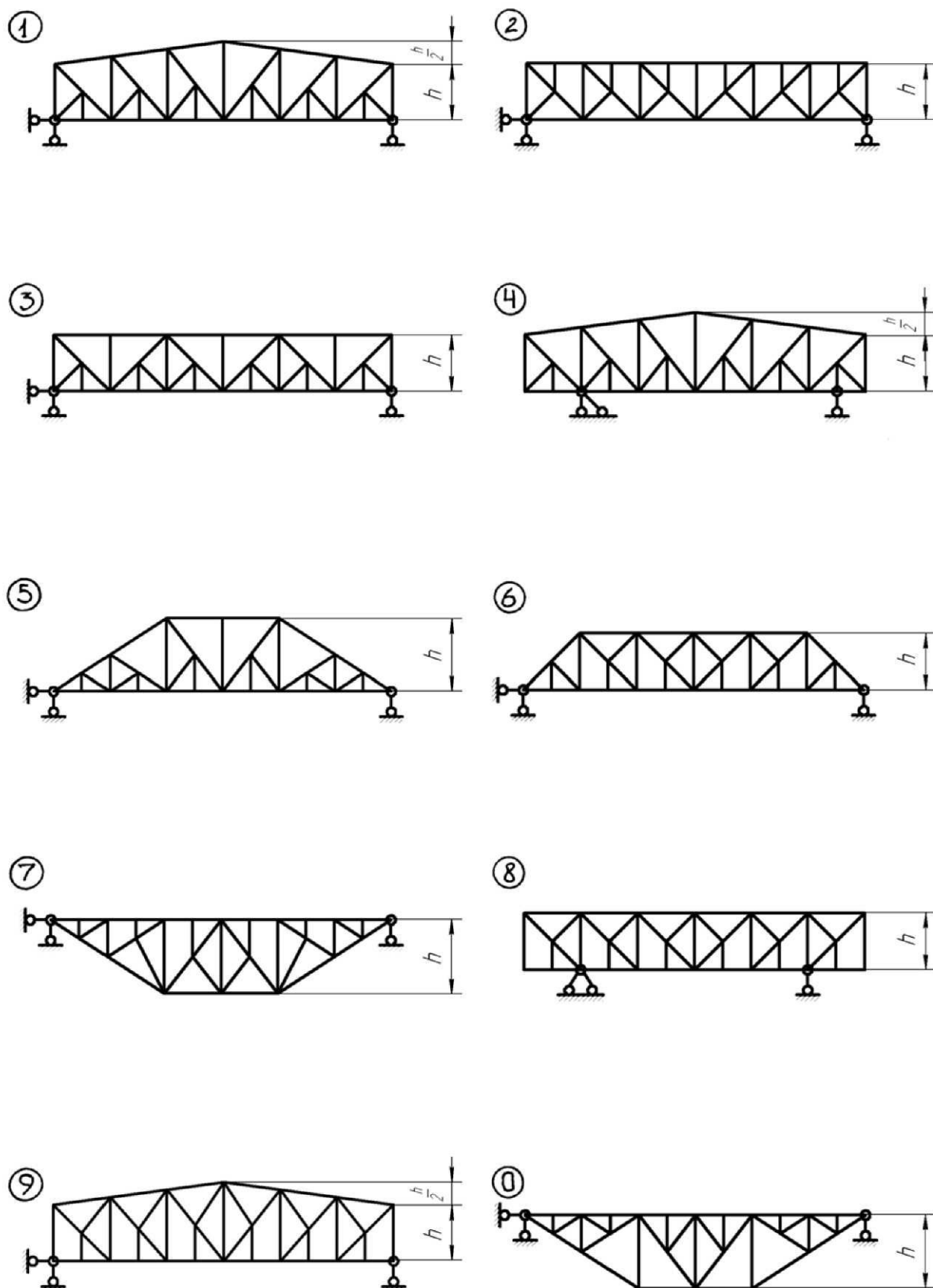


Рисунок 3.2 – Шпренгельные фермы

Таблица 3.1 – Ферма

Первая цифра шифра (№ схемы)	№ панели (считая слева)	$L$ , м	Вторая цифра шифра	Нагрузка, $F$ , кН		Третья цифра шифра	$h$ , м
				постоянная	временная		
0	3	36	0	2,0	1,0	0	4,0
1	4	32	1	1,5	1,4	1	5,0
2	5	18	2	1,0	2,0	2	4,0
3	2	21	3	1,2	1,3	3	3,0
4	3	24	4	1,6	1,2	4	4,5
5	4	27	5	1,4	1,5	5	5,5
6	5	28	6	1,8	2,0	6	4,8
7	4	30	7	1,5	1,4	7	4,0
8	3	33	8	2,0	1,8	8	5,0
9	2	34	9	1,0	1,5	9	6

## 4 Расчет плоской статически неопределимой рамы методом сил

*Задание.* Для рамы (рисунок 4.1) с выбранными по шифру из таблицы 4.1 размерами и нагрузкой требуется:

- раскрыть статическую неопределимость рамы;
- построить окончательные эпюры изгибающих моментов  $M_{окон}$ , поперечных сил  $Q_{окон}$  и продольных сил  $N_{окон}$ ;
- проверить правильность построенных эпюр ВСФ.


### 4.1 Порядок выполнения расчета

4.1.1 Определить степень статической неопределимости системы. Она определяется как:

$$n = C_{опор} - Ш - 3,$$

где  $n$  - степень статической неопределимости (число лишних связей);

$Ш$  - число простых шарниров;

$C_{опор}$  - число опорных стержней (  )

3 - число уравнений статики для плоской системы.

#### 4.1.2 Выбрать основную систему метода сил (ОСМС).

Основная система получается путем отбрасывания лишних связей. ОСМС должна быть геометрически неизменяемой и, как правило, статически определимой.

4.1.3 Составить эквивалентную систему метода сил (ЭСМС). Эквивалентная система получается путем приложения к основной системе неизвестных усилий  $X_j$  в направлении отброшенных связей:

#### 4.1.4 Составить системы канонических уравнений.

Идея метода сил: отрицание перемещений в направлении отброшенных связей. Например, для системы с 2-мя лишними связями эти уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0 \end{cases}$$

где  $\delta_{ij}$  - коэффициенты перемещения от единичных нагрузок;

$\Delta_{iF}$  - свободные члены перемещения от внешних нагрузок.

Первый индекс « $i$ » означает «адрес» перемещения, второй индекс « $j$ » и « $F$ » означает «причину» этого перемещения.

4.1.5 Построить грузовую эпюру  $M_F$  и эпюру единичных моментов  $\bar{M}_1, \bar{M}_2$  и  $\bar{M}_S$ .

$\bar{M}_S = \bar{M}_1 + \bar{M}_2$  - суммарная единичная эпюра моментов.

Все эпюры моментов строятся в основной системе.

4.1.6 Вычислить единичные перемещения  $\delta_{ij}$  и перемещения от внешних нагрузок  $\Delta_{iF}$ .

Единичное перемещение  $\delta_{ij}$  вычисляется умножением единичной эпюры  $\bar{M}_i$  на единичную эпюру  $\bar{M}_j$ .

Перемещение  $\Delta_{iF}$  вычисляется умножением единичной эпюры  $\bar{M}_i$  на грузовую эпюру  $M_F$ .

По теореме о взаимности перемещений:  $\delta_{ij} = \delta_{ji} (\delta_{12} = \delta_{21})$ .

Рекомендуется перемещения вычислять по формуле Симпсона:

$$\delta_{ij} = \int_{\ell} \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EJ} \cdot dx = \sum \frac{\ell}{6EJ} \left[ \bar{M}_i^a \cdot \bar{M}_j^a + 4\bar{M}_i^{cp} \cdot \bar{M}_j^{cp} + \bar{M}_i^{np} \cdot \bar{M}_j^{np} \right];$$
$$\Delta_{iF} = \int_{\ell} \frac{\bar{M}_i M_F}{EJ} \cdot dx = \sum \frac{\ell}{6EJ} \left[ \bar{M}_i^a \cdot M_F^a + 4\bar{M}_i^{cp} \cdot M_F^{cp} + \bar{M}_i^{np} \cdot M_F^{np} \right],$$

где  $\ell$  - длина участка эпюры моментов;

$\bar{M}_i^a, \bar{M}_j^a$  и  $M_F^a$  - соответственно левые ординаты единичных эпюр  $\bar{M}_i, \bar{M}_j$  и грузовой эпюры  $M_F$  на соответствующем участке эпюры моментов;

$\bar{M}_i^{cp}, \bar{M}_j^{cp}$  и  $M_F^{cp}$  соответственно средние ординаты единичных эпюр  $\bar{M}_i, \bar{M}_j$  и грузовой эпюры  $M_F$  на соответствующем участке эпюры моментов;

$\bar{M}_i^{np}, \bar{M}_j^{np}$  и  $M_F^{np}$  - соответственно правые ординаты единичных эпюр  $\bar{M}_i, \bar{M}_j$  и грузовой эпюры  $M_F$  на соответствующем участке эпюры моментов.

4.1.7 Проверить правильность вычисления перемещений  $\delta_{ij}$  и  $\Delta_{IF}$ .

а)  $\sum \delta = \delta_{SS}$ ,

где  $\sum \delta = \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{22}$ ;

$$\delta_{SS} = \int_{\ell} \frac{\bar{M}_S \cdot \bar{M}_S}{EJ} \cdot dx,$$

б)  $\sum \Delta = \Delta_{SF}$ ,

где  $\sum \Delta = \Delta_{1F} + \Delta_{2F}$ ;

$$\Delta_{SF} = \int_{\ell} \frac{\bar{M}_S \cdot M_F}{EJ} \cdot dx.$$

4.1.8 Решить систему канонических уравнений (нахождение  $X_i$ ).

4.1.9 Вычислить реакции опор.

Вычисляются реакции опор в основной системе с учетом найденных неизвестных усилий  $X_i$ .

4.1.10 Вычислить и построить окончательные эпюры изгибающих моментов  $M_{окон}$ , поперечных сил  $Q_{окон}$  и продольных сил  $N_{окон}$  (с учетом усилий  $X_i$ ).

4.1.11 Проверить решение задачи:

а) кинематическая (деформационная) проверка.

Если задача решена правильно, то должно выполняться следующее

условие:  $\Delta = \int_{\ell} \frac{M_{окон} \cdot \bar{M}_S}{EJ} \cdot dx = 0.$

Погрешность расчета не должна быть больше 1,0%.

б) статическая проверка

1) должны выполняться условия равновесия для всей рамы:

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum M_K = 0,$$

где  $K$  - любое сечение рамы.

2) должны выполняться условия равновесия узлов (применяя метод вырезания узлов).

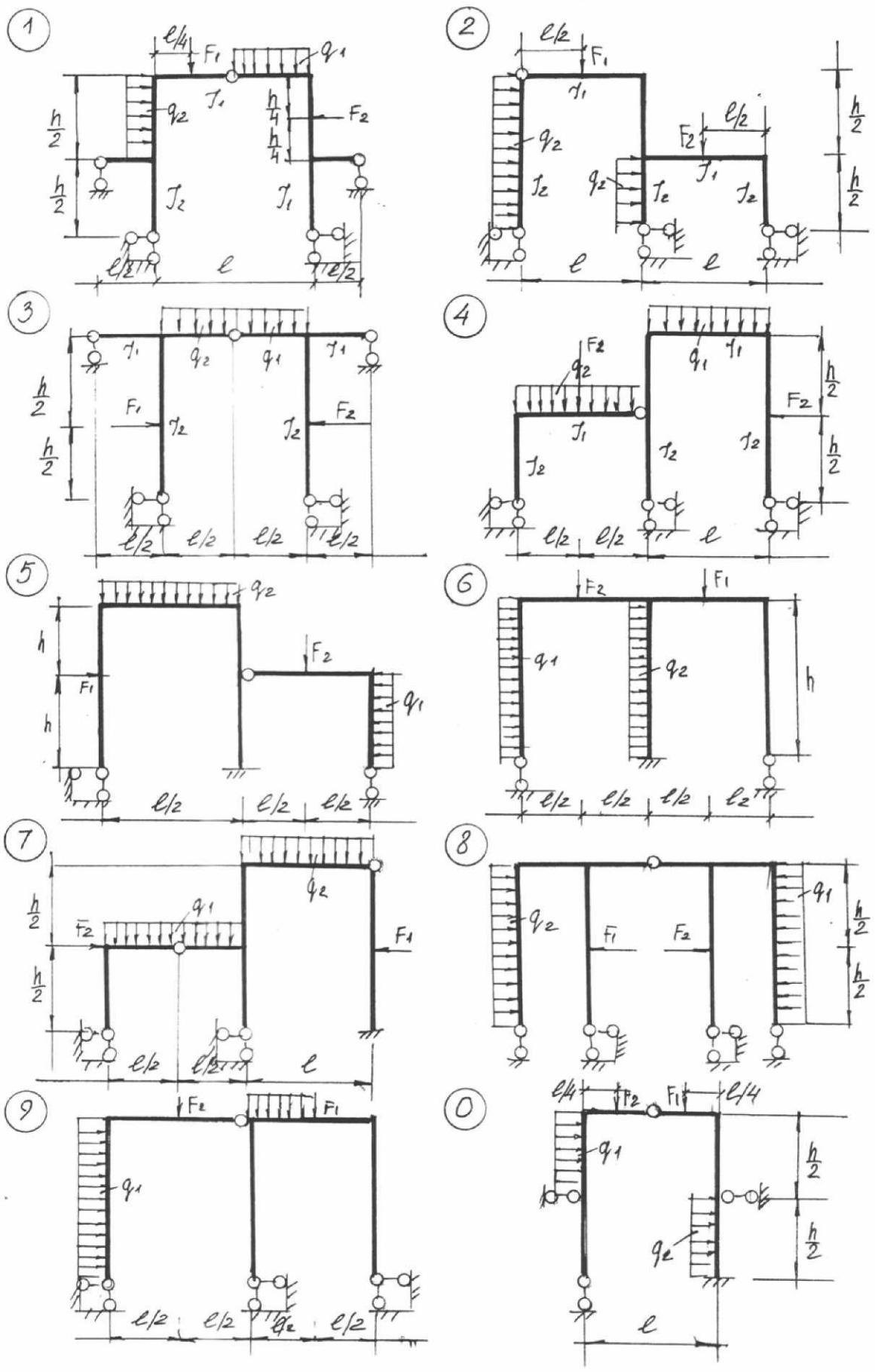


Рисунок 4.1 – Метод сил



Таблица 4.1 – Рама. Метод сил

Первая цифра шифра	$F_1$ кН	$F_2$ кН	$\ell$ м	Вторая цифра шифра	$q_1$ кН/м	$q_2$ кН/м	$h$ м	Третья цифра шифра (№ схемы)	$\frac{J_{ст}}{J_p}$
0	10	0	6	0	0	5	8	0	1:2
1	0	20	9	1	8	0	6	1	2:3
2	20	0	12	2	0	6	8	2	1:3
3	0	10	6	3	5	0	6	3	1:3
4	30	0	12	4	0	4	9	4	3:4
5	40	0	12	5	2	0	6	5	1:4
6	0	60	9	6	0	2	9	6	1:3
7	60	0	6	7	4	0	6	7	2:3
8	0	40	9	8	0	6	9	8	1:4
9	15	0	6	9	6	0	8	9	1:2

## 5 Расчет неразрезной балки методом сил

*Задание.* Для балки (рисунок 5.1) с выбранными по шифру из таблицы 5.1 размерами и нагрузкой требуется:

- а) раскрыть статическую неопределимость балки;
- б) построить окончательные эпюры изгибающих моментов  $M_{окон}$  и поперечных сил  $Q_{окон}$ ;
- в) проверить правильность построенных эпюр ВСФ.

### 5.1 Порядок выполнения расчета

5.1.1 Определить степень статической неопределимости системы. Она определяется как:

$$n = C_{опор} - Ш - 3,$$

где  $n$  - степень статической неопределимости (число лишних связей);

$Ш$  - число простых шарниров;

$C_{опор}$  - число опорных стержней;

3 - число уравнений статики для плоской системы.

5.1.2 Выбрать основную систему метода сил (ОСМС).

Основная система получается путем отбрасывания лишних связей. ОСМС должна быть геометрически неизменяемой и, как правило, статически определимой.

5.1.3 Составить эквивалентную систему метода сил (ЭСМС). Эквивалентная система получается путем приложения к основной системе неизвестных усилий  $X_i$  в направлении отброшенных связей:

5.1.4 Составить систему канонических уравнений.

Идея метода сил: отрицание перемещений в направлении отброшенных связей. Например, для системы с 2-мя лишними связями эти уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0 \end{cases}$$

где  $\delta_{ij}$  - коэффициенты, перемещения от единичных нагрузок;

$\Delta_{iF}$  - свободные члены, перемещения от внешних нагрузок.

Первый индекс « $i$ » означает «адрес» перемещения, второй индекс « $j$ » и « $F$ » означает «причину» этого перемещения.

5.1.5 Построить грузовые эпюры  $M_F$  и единичные эпюры моментов  $\bar{M}_1, \bar{M}_2$  и  $\bar{M}_S$ .

$\bar{M}_S = \bar{M}_1 + \bar{M}_2$  - суммарная единичная эпюра моментов.

Все эпюры моментов строятся в основной системе.

5.1.6 Вычислить единичные перемещения  $\delta_{ij}$  и перемещения от внешних нагрузок  $\Delta_{iF}$ .

Единичное перемещение  $\delta_{ij}$  вычисляется умножением единичной эпюры  $\bar{M}_i$  на единичную эпюру  $\bar{M}_j$ .

Перемещение  $\Delta_{iF}$  вычисляется умножением единичной эпюры  $\bar{M}_i$  на грузовую эпюру  $M_F$ .

По теореме о взаимности перемещений:  $\delta_{ij} = \delta_{ji} (\delta_{12} = \delta_{21})$ .

Рекомендуется перемещения вычислять по формуле Симпсона:

$$\delta_{ij} = \int_{\ell} \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EJ} \cdot dx = \sum \frac{\ell}{6EJ} \left[ \bar{M}_i^{\lambda} \cdot \bar{M}_j^{\lambda} + 4\bar{M}_i^{cp} \cdot \bar{M}_j^{cp} + \bar{M}_i^{np} \cdot \bar{M}_j^{np} \right];$$

$$\Delta_{iF} = \int_{\ell} \frac{\bar{M}_i M_F}{EJ} \cdot dx = \sum \frac{\ell}{6EJ} \left[ \bar{M}_i^{\lambda} \cdot M_F^{\lambda} + 4\bar{M}_i^{cp} \cdot M_F^{cp} + \bar{M}_i^{np} \cdot M_F^{np} \right],$$

где  $\ell$  - длина участка эпюры моментов;

$\bar{M}_i^{\lambda}, \bar{M}_j^{\lambda}$  и  $M_F^{\lambda}$  - соответственно левые ординаты единичных эпюр  $\bar{M}_i, \bar{M}_j$  и грузовой эпюры  $M_F$  на соответствующем участке эпюры моментов;

$\bar{M}_i^{cp}, \bar{M}_j^{cp}$  и  $M_F^{cp}$  соответственно средние ординаты единичных эпюр  $\bar{M}_i, \bar{M}_j$  и грузовой эпюры  $M_F$  на соответствующем участке эпюры моментов;

$\bar{M}_i^{np}, \bar{M}_j^{np}$  и  $M_F^{np}$  - соответственно правые ординаты единичных эпюр  $\bar{M}_i, \bar{M}_j$  и грузовой эпюры  $M_F$  на соответствующем участке эпюры моментов.

5.1.7 Проверка правильности вычисления перемещений  $\delta_{ij}$  и  $\Delta_{iF}$ .

а)  $\sum \delta = \delta_{SS}$ ,

где  $\sum \delta = \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{22}$ ;

$$\delta_{SS} = \int_{\ell} \frac{\bar{M}_S \cdot \bar{M}_S}{EJ} \cdot dx.$$

б)  $\sum \Delta = \Delta_{SF}$ ,

где  $\sum \Delta = \Delta_{1F} + \Delta_{2F}$ ;

$$\Delta_{SF} = \int_{\ell} \frac{\bar{M}_S \cdot M_F}{EJ} \cdot dx.$$

5.1.8 Решить системы канонических уравнений (нахождение  $X_i$ ).

5.1.9 Вычислить реакции опор.

Вычисляются реакции опор в основной системе с учетом найденных неизвестных усилий  $X_i$ .

5.1.10 Вычислить и построить окончательные эпюры изгибающих моментов  $M_{окон}$ , поперечных сил  $Q_{окон}$  продольных сил  $N_{окон}$  (с учетом усилий  $X_i$ ).

5.1.11 Проверить решение задачи:

а) кинематическая (деформационная) проверка.

Если задача решена правильно, то должно выполняться следующее

условие: 
$$\Delta = \int_l \frac{M_{\text{окол}} \cdot \bar{M}_S}{EJ} \cdot dx = 0.$$

Погрешность расчета не должна быть больше 1,0%.

Таблица 5.1 - Неразрезная балка. Метод сил

Первая цифра шифра (№ схемы)	$l_1$ м	$l_2$ м	$l_3$ м	Вторая цифра шифра	$a$ м	$q_1$ кН м	Последняя цифра шифра	$q_2$ кН/ м	$R_1$ кН	$R_2$ кН
0	9	6	12	0	1,5	0	0	2,0	8	9
1	6	12	9	1	2,0	2,0	1	0	4	6
2	12	6	9	2	2,2	0	2	1,8	6	5
3	9	12	6	3	3,0	1,0	3	0	4	10
4	6	12	9	4	4,0	0	4	1,6	5	12
5	12	6	9	5	4,0	1,5	5	0	10	7
6	7,5	9	12	6	1,8	0	6	1,0	12	8
7	9	6	12	7	2,0	1,8	7	0	7	10
8	6	9	12	8	3,0	0	8	2,5	8	6
9	7,5	12	6	9	3,0	1,4	9	0	9	8

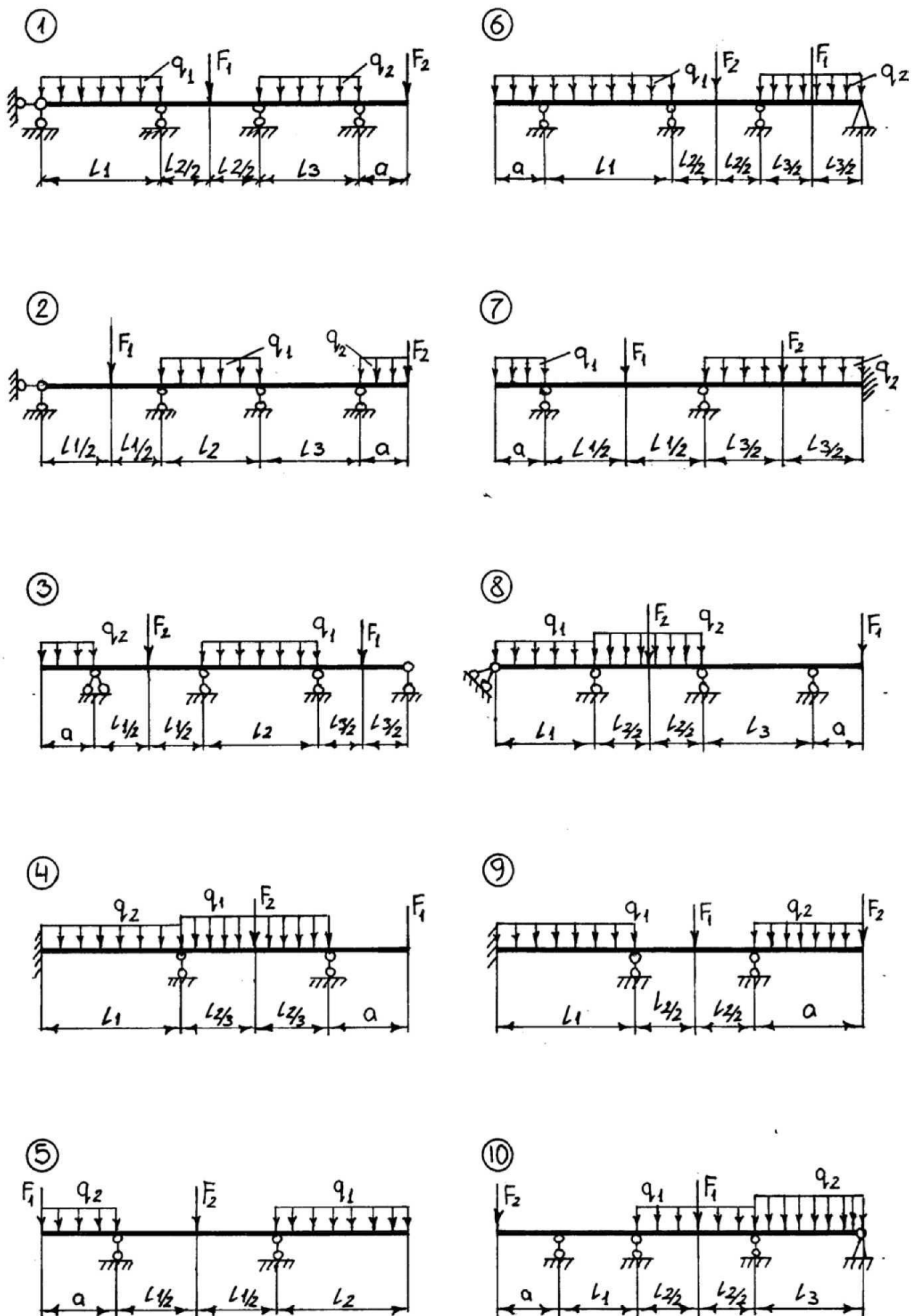


Рисунок 5.1 – Нерезренная балка

## 6 Расчет статически неопределимой рамы методом перемещений

*Задание.* Для рамы (рисунок 6.1) с выбранными по шифру из таблицы 6.1 размерами и нагрузкой требуется:

- раскрыть статическую неопределимость рамы методом перемещений;
- построить окончательные эпюры изгибающих моментов  $M_{окон}$ , поперечных сил  $Q_{окон}$  и продольных сил  $N_{окон}$ ;
- проверить правильность построенных эпюр ВСФ.

### 6.1 Порядок выполнения расчета

6.1.1 Определить степень кинематической неопределимости рамы.

Примечание: Стержни с бесконечной жесткостью. Считать угловые перемещения жестких узлов, примыкающих к таким стержням, равными нулю. Степень определяется как:



$$m = m_y + m_n,$$

где  $m$  - степень кинематической неопределимости (число неизвестных угловых и линейных перемещений жестких узлов системы);

$m_y$  - число угловых перемещений жестких узлов (оно равно числу жестких узлов);

$m_n$  - число независимых линейных перемещений жестких узлов.

6.1.2 Выбрать основную систему методом перемещений (ОСМП).

Основная система получается из заданной системы путем введения в жесткие узлы дополнительных связей 2-х видов: а) «плавающая» заделка , которая препятствует только угловому перемещению, но не препятствует линейному перемещению жесткого узла; б) опорный стержень (одиночная связь типа «»). Эта связь препятствует только линейному перемещению жесткого узла.

6.1.3 Составить эквивалентную систему метода перемещений (ЭСМП).

Эквивалентная система получается из основной системы путем введения в дополнительные связи неизвестных перемещений  $Z_i$ .

6.1.4 Составить систему канонических уравнений метода перемещений.

Идея метода: отрицание усилий во введенных дополнительных связях. Так, например, для системы с 2-мя неизвестными перемещениями эти уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} r_{11}z_1 + r_{12}z_2 + R_{1F} = 0; \\ r_{21}z_1 + r_{22}z_2 + R_{2F} = 0, \end{cases}$$

где  $r_{ij}$  - коэффициенты, усилия от единичных перемещений;

$R_{iF}$  - свободные члены, усилия от внешних нагрузок.

Первый индекс « $i$ » - означает «адрес» усилия.

Второй индекс « $j$ » и « $F$ » означают «причину» возникновения усилия.

6.1.5 Построить грузовые эпюры  $M_{F1}$ ;  $M'_{F'}$ . Построить единичные эпюры:  $\bar{M}_1$ ,  $\bar{M}_2$  и  $\bar{M}_S$ .

$\bar{M}_S = \bar{M}_1 + \bar{M}_2$  - суммарная единичная эпюра моментов.

$M_F$  и  $M'_{F'}$  - соответственно грузовая эпюра метода перемещений и грузовая эпюра метода сил.

Эпюры  $\bar{M}_1$ ,  $\bar{M}_2$  и  $M_F$  строятся по таблице [ 1 ], [ 2 ].

6.1.6 Вычислить усилия  $r_{ij}$  и  $R_{iF}$ .

Все коэффициенты  $r_{ij}$ , а также свободные члены  $R_{ik}$  уравнений разделяются на две группы:

1) коэффициенты, представляющие реактивные моменты во введенных заделках;

2) коэффициенты, представляющие реактивные усилия во введенных стержнях.

Коэффициенты и свободные члены, представляющие реактивные моменты во введенных заделках, определяются вырезанием узлов и составлением уравнения равновесия в виде:  $\sum M = 0$ .

Коэффициенты и свободные члены, представляющие реактивные усилия во введенных стержнях, можно определить при помощи разреза элементов рамы и составления уравнения равновесия сил, действующих на отсеченную часть:  $\sum T = 0$ . Направление оси  $T$  выбирается так, чтобы уравнение получилось более простым (с одним неизвестным).

6.1.7 Проверить вычисление коэффициентов и свободных членов системы канонических уравнений метода перемещений:

а)  $\sum r = r_{ss}$ ;

где  $\sum r = r_{11} + r_{12} + r_{21} + r_{22}$ ; 
$$r_{ss} = \int \frac{\bar{M}_s \cdot \bar{M}_s}{EJ} \cdot dx.$$

б)  $\sum R = -R_{sp}$ ;

где  $\sum R = R_{1F} + R_{2F}$ ; 
$$R_{sp} = \int \frac{\bar{M}_s \cdot M'_F}{EJ} \cdot dx.$$

6.1.8 Решить систему канонических уравнений (нахождение неизвестных перемещений  $Z_i$ ).

6.1.9 Вычислить и построить окончательные эпюры ВСФ:

а) Эпюра  $M_{окон} = M_F + \bar{M}_1 \cdot Z_1 + \bar{M}_2 \cdot Z_2 \dots$

б) Эпюра  $Q_{окон}$  строится по формулам Журавского:

$$Q_{окон} = Q^0 + \frac{M_{пр} - M_{лев}}{\ell},$$

где  $Q^0$  - поперечная сила в сечении простой балки от заданной нагрузки в пролете;

$M_{пр}$  и  $M_{лев}$  - соответственно правые и левые ординаты изгибающих моментов на Эп.  $M_{окон}$ ;

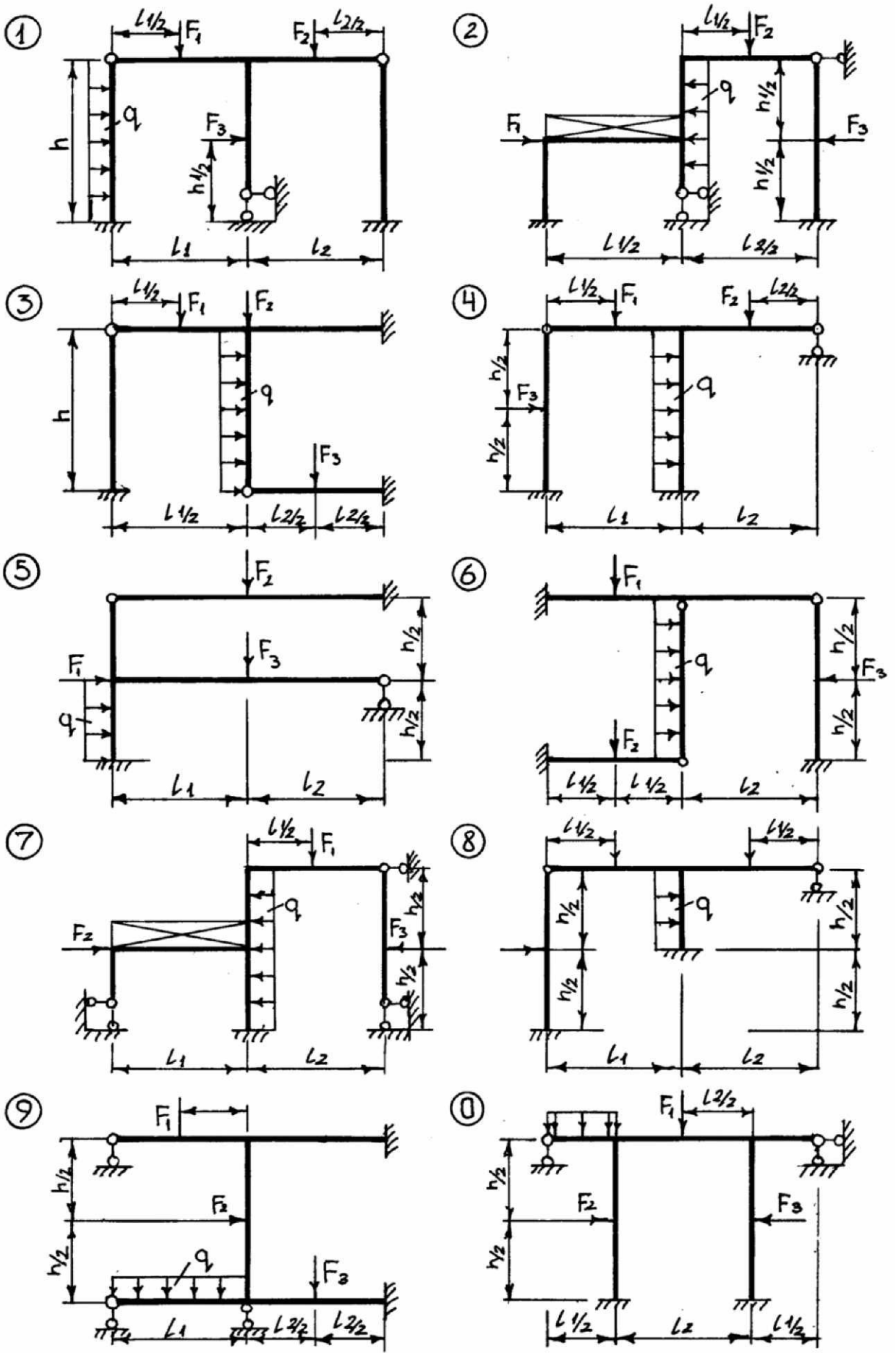


Рисунок 6.1 – Метод перемещений



$l$  - длина участка.

в) Эпюра  $N_{окон}$  строится при использовании эпюры  $Q_{окон}$  методом вырезания узлов.

6.1.10 Проверить правильность построенных эпюр ВСФ:

а) статическая проверка;

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum M_K = 0,$$

где  $K$  - любое сечение рамы;

б) кинематическая (деформационная) проверка. Если задача решена правильно, то должно выполняться условие:  $\Delta = \int_l \frac{M_{окон} \cdot \bar{M}'_{лев}}{EJ} \cdot dx = 0,$

где  $\bar{M}'$  - единичная эпюра метода сил. Относительная погрешность расчета допускается в пределах  $\pm 1\%$ .

Таблица 6.1 – Рама. Метод перемещений

Первая цифра шифра	$F_1$ кН	$F_2$ кН	$F_3$ кН	$q$ кН/м	Вторая цифра шифра	$l_1$ м	$l_2$ м	$h$ м	Третья цифра шифра (№ схемы)	$\frac{J_{ст}}{J_p}$
0	0	0	40	10	0	12	15	6	0	1:3
1	30	0	0	15	1	18	18	6	1	2:1
2	0	20	0	5	2	24	12	8	2	1:4
3	50	0	0	10	3	18	15	8	3	4:1
4	0	40	0	15	4	24	15	4	4	3:4
5	40	0	50	20	5	15	15	45	5	2:3
6	0	50	0	10	6	24	24	8	6	3:2
7	30	0	35	5	7	18	12	6	7	1:4
8	0	25	0	10	8	12	12	4	8	2:3
9	25	0	40	5	9	15	15	8	9	1:3

## 7 Расчет стержневых систем (рам) на устойчивость (продольный изгиб)

*Задание.* Для рамы (рисунок 7.1) с выбранными по шифру из таблицы 7.1 размерами и нагрузкой требуется:

- а) определить критические нагрузки сжатых стержней рамы;
- б) определить расчетные длины сжатых стержней рамы.

### 7.1 Порядок выполнения расчета

7.1.1 Определить степень кинематической неопределимости рамы.

Степень кинематической неопределимости равна:

$$m = m_y + m_n,$$

где  $m_y$  - число угловых перемещений жестких узлов;

$m_n$  - число независимых линейных перемещений жестких узлов.

7.1.2 Выбрать основную систему метода перемещений (ОСМП).

В жесткие узлы вводятся дополнительные связи, препятствующие угловым и линейным перемещениям узлов.

7.1.3 Составить эквивалентную систему метода перемещений (ЭСМП).

В дополнительные связи вводятся неизвестные перемещения  $Z_i$ .

7.1.4 Составить выражение для критических параметров  $\nu_i$  всех сжатых

стержней рамы:  $\nu_i = \ell_i \sqrt{\frac{F_i}{EJ_i}}$ ,

где  $i$  - номер стержня;

$EJ_i$  - изгибная жесткость « $i$ » - го стержня;

$F_i$  и  $\ell_i$  - соответственно сжимающая сила и длина « $i$ » -го стержня.

Все параметры  $\nu_i$  надо выразить через критический параметр  $\nu_0$ , приняв за последний любой из параметров  $V_v$ . ( $V_i = K_i \nu_0$ )

$K_i$  - коэффициент, учитывающий зависимость  $\nu_i$  от  $\nu_0$ .

7.1.5 Составить систему канонических уравнений метода перемещений.

Составить уравнения устойчивости в общем виде.

Например, для рамы с 2-мя неизвестными перемещениями уравнение устойчивости имеет вид:

$$\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad r_{11} \cdot r_{22} - r_{12} \cdot r_{21} = 0,$$

где  $r_i$  - усилия от единичных перемещений (коэффициенты).

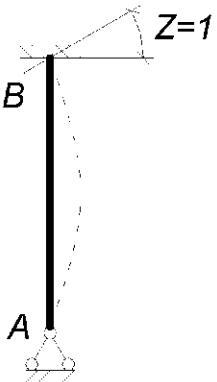
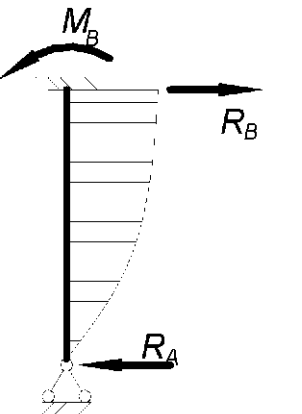
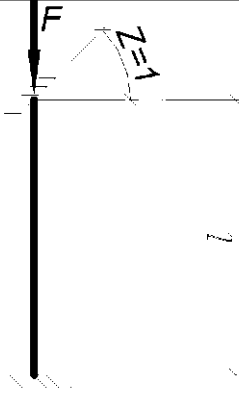
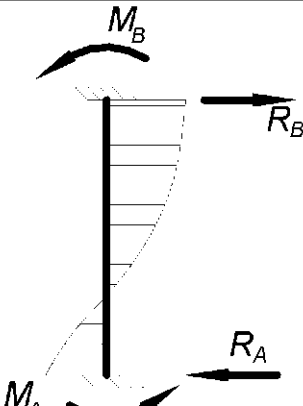
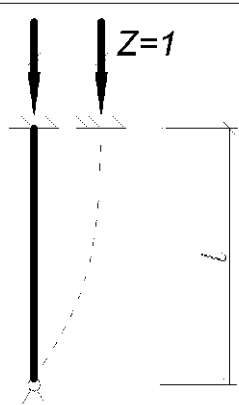
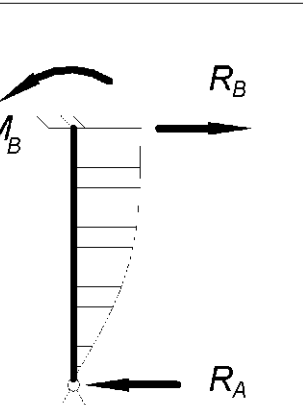
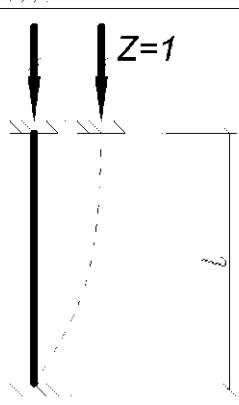
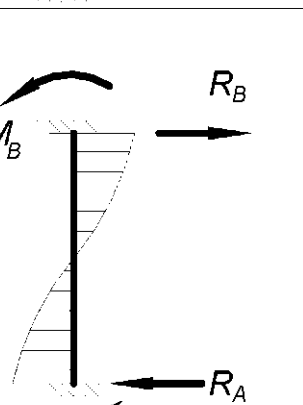
7.1.6 Построить в основной системе метода перемещений эпюры изгибающих моментов от единичных смещений дополнительных связей с учетом сжимающих продольных сил. Для построения эпюр  $\bar{M}_i$  используется таблица 7.2.

7.1.7 Определить реакции (коэффициенты)  $r_{ij}$  в дополнительных связях.

Используются единичные эпюры моментов  $\bar{M}_i$ .

Коэффициенты, представляющие активные моменты во введенных заделках, определяются вырезанием узлов и составлением уравнения равновесия вида:  $\sum M = 0$ .

Таблица 7.2 – Устойчивость

Схема воздействия	Эп. мом-в и напр. р-й	
		$M_B = \frac{3EI}{L} f_1(v)$ $R_A = R_B = \frac{3EI}{L^2} f_1(v)$
		$M_A = \frac{2EI}{L} f_3(v)$ $M_B = \frac{4EI}{L} f_2(v)$ $R_A = R_B = \frac{6EI}{L^2} \eta_3(v)$
		$M_B = \frac{3EI}{L^2} f_2(v)$ $R_A = R_B = \frac{3EI}{L^3} \eta_1(v)$
		$M_A = M_B = \frac{6EI}{L^2} f_4(v)$ $R_A = R_B = \frac{12EI}{L^3} \eta_2$

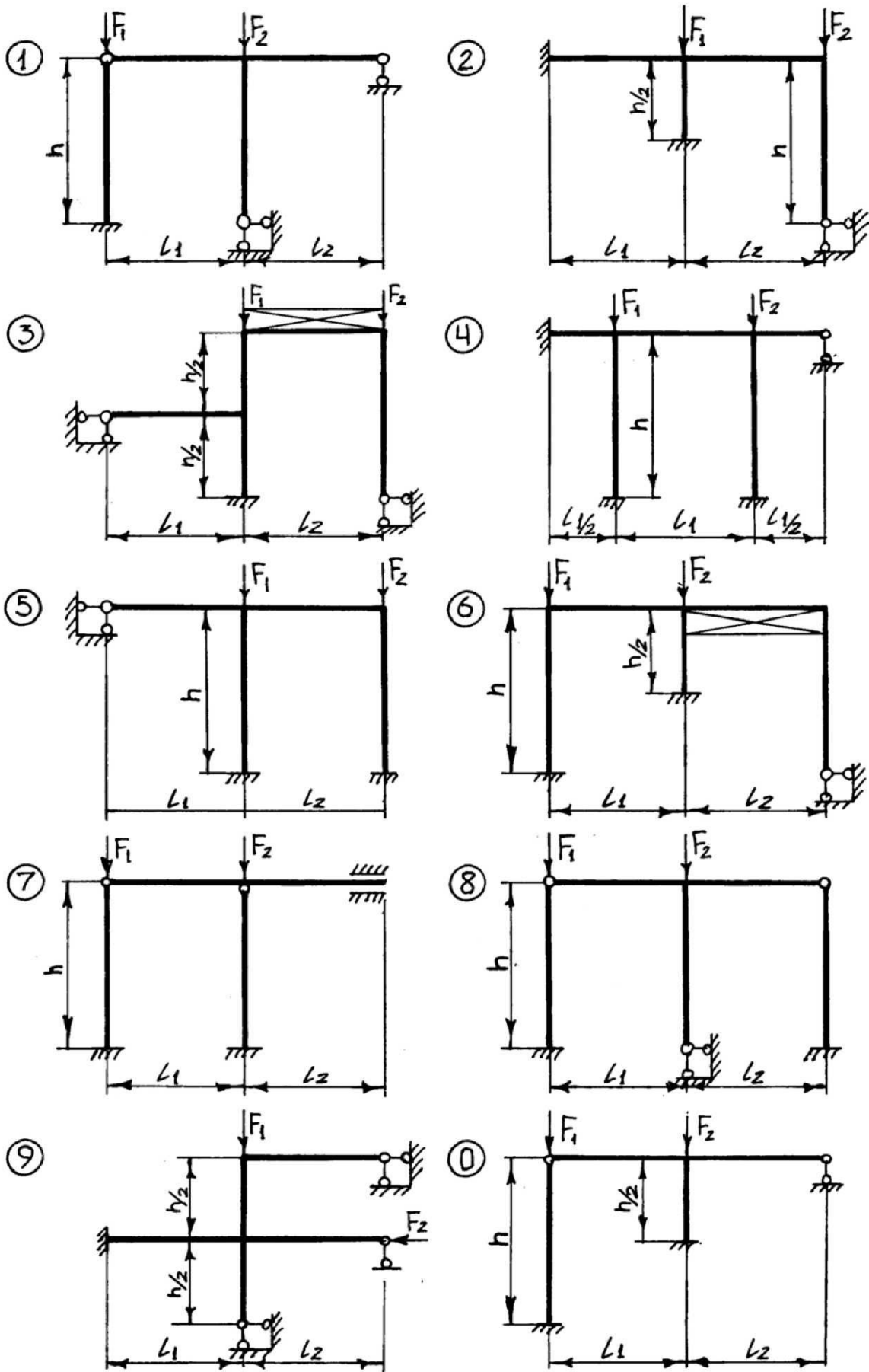


Рисунок 7.1 – Устойчивость

Коэффициенты, представляющие реактивные силы во введенных стержнях, определяются при помощи разреза элементов рамы и составлением уравнений равновесия сил, действующих на отсеченную часть:  $\sum T = 0$ .

7.1.8 Составить уравнения устойчивости в развернутом виде.

Используются полученные значения коэффициентов  $r_{ij}$ .

7.1.9 Решить уравнения устойчивости.

Вычисляется критический параметр  $\nu_0$  путем последовательных приближений (или на компьютере). Используется таблица 1 (приложение).

7.1.10 Определить критические нагрузки.

Критические нагрузки сжатых элементов определяются как:

$$F_{cr(i)} = \frac{\nu_i^2 \cdot EJ_i}{\ell_i^2};$$

7.1.11 Вычислить расчетные длины сжатых стержней:  $\ell_{расч(i)} = \frac{\pi \ell_i}{\nu_i}$

Таблица 7.1 - Устойчивость

Первая цифра шифра	$\ell_1$ м	$\ell_2$ м	$h$ м	Вторая цифра шифра	$\alpha = \frac{F_1}{F_2}$	Третья цифра шифра (№ схемы)	$J_1 : J_2$
0	6	24	6	0	1,5	0	1,4
1	9	18	10	1	1,6	1	1,2
2	12	18	9	2	1,7	2	1,3
3	24	6	12	3	1,8	3	0,8
4	18	18	11	4	1,9	4	0,9
5	9	15	8	5	2,0	5	1,5
6	12	24	12	6	2,5	6	1,6
7	18	9	10	7	1,5	7	1,8
8	6	15	9	8	2,0	8	1,5
9	15	18	9	9	1,6	9	2,0

## 8 Динамический расчет плоской системы

*Задание.* Для плоской рамы (рисунок 8.1) с размерами и нагрузкой, выбранными по шифру и таблицы 8.1 требуется:

- определить круговую частоту свободных вертикальных и горизонтальных колебаний, приняв раму как систему с двумя степенями свободы;
- вычислить силы инерции  $J_i$ .

### 8.1 Порядок выполнения расчета

8.1.1 Определить степень свободы системы.

8.1.2 Определить частоту возмущающей силы:

$$\theta = \frac{\pi \cdot n}{30},$$

где  $n$  - частота оборотов двигателя.

8.1.3 Составить частотное уравнение (вековое уравнение).

Например, для системы с 2-мя степенями свободы имеем:

$$\begin{vmatrix} (\delta_{11}m_1 - \lambda_i) & \delta_{12}m_2 \\ \delta_{21}m_1 & (\delta_{22}m_2 - \lambda_i) \end{vmatrix} = (\delta_{11}m_1 - \lambda_i)(\delta_{22}m_2 - \lambda_i) - \delta_{12}\delta_{21}m_1m_2 = 0,$$

где  $\lambda_i = \frac{1}{\omega_i^2}$ ;  $\omega_i$  - частота свободных колебаний:  $\omega_i = \sqrt{\frac{1}{\lambda_i}}$

8.1.4 Построить единичные эпюры изгибающих моментов  $\bar{M}_i$ .

8.1.5 Вычислить коэффициенты  $\delta_{ij}$

$$\delta_{ij} = \int_l \frac{\bar{M}_i \cdot \bar{M}_j}{EJ} \cdot dx$$

Можно использовать формулы Верещагина и Симпсона.

8.1.6 Решить частотное уравнение.

Определяется спектр свободных колебаний  $\omega_1, \omega_2$  ( $\omega_1 < \omega_2$ ).

8.1.7 Проверить конструкции на резонанс.

Необходимо, чтобы  $\omega_1 \neq \theta$  и  $\omega_2 \neq \theta$ .

8.1.8 Составить систему канонических уравнений для определения сил инерции.

Для систем с 2-мя степенями свободы это система имеет вид:

$$\begin{cases} \delta_{11}^* J_1 + \delta_{12} J_2 + \Delta_{1F} = 0 \\ \delta_{21} J_1 + \delta_{22}^* J_2 + \Delta_{2F} = 0 \end{cases},$$

где  $\delta_{ii}^* = (\delta_{ii} - \frac{1}{m_i \theta^2})$ ;

$\Delta_{iF}$  - перемещение массы  $m_i$  от вибрационной нагрузки;

$J_i$  - силы инерции.

8.1.9 Вычислить свободные члены  $\Delta_{iF}$ .

Необходимо дополнительно построить эпюру  $M_F$  от максимального значения возмущающей силы  $F$ .

Считать  $\Delta_{iF} = \int_{\ell} \frac{\bar{M}_i M_F}{EJ} \cdot dx$  по правилу Верещагина или по формуле

Симпсона.

8.1.10 Решить систему канонических уравнений для определения сил инерции.

Вычисляются силы инерции  $J_1$  и  $J_2$ .

8.1.11 Вычислить динамические параметры системы.

Например:  $M_{дин} = M_F + \bar{M}_1 \cdot J_1 + \bar{M}_2 \cdot J_2$ .

Строится эпюра  $M_{дин}$ .

Таблица 8.1 – Динамика

Первая цифра шифра	$\ell$ м	Вторая цифра шифра	$Q$ кН	$F$ кН	Третья цифра шифра (№ схемы)	$E \cdot J$ кНм <sup>2</sup>
0	6	0	10	2,0	0	25000
1	9	1	20	2,5	1	24000
2	12	2	25	1,6	2	23000
3	18	3	24	1,8	3	22000
4	15	4	22	1,5	4	21000
5	12	5	18	3,0	5	20000
6	9	6	16	1,8	6	21500
7	6	7	25	1,5	7	22500
8	18	8	21	2,0	8	23500
9	15	9	22	2,5	9	24500



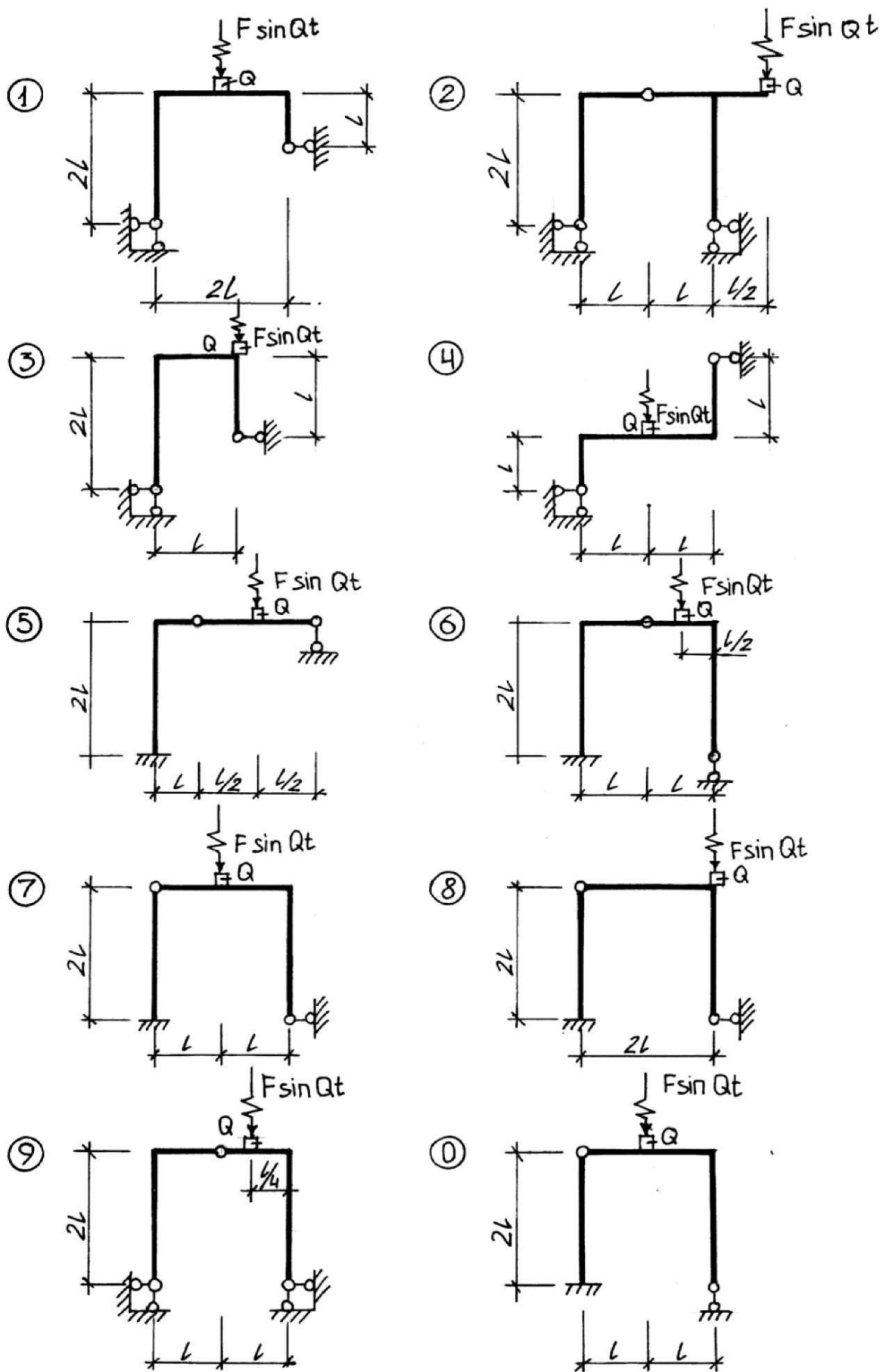


Рисунок 8.1 – Динамика

## Список использованных источников

- 1 Леонтьев, Н.Н. Основы строительной механики стержневых систем. [Текст]/ Н.Н. Леонтьев, Д.Н. Соболев, А.А. Амосов. – М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 1996. – 542 с.
- 2 Дарков, А.В. Строительная механика. [Текст]/ А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников. – М.: Высшая школа, 1986. – 512 с.
- 3 Бутенко Ю.И. и др. Строительная механика стержневых систем и оболочек. [Текст]/ Ю.И. Бутенко. – Киев.: «Вища школа», 1980. – 488 с.
- 4 Митропольский М.Н. Методические указания и контрольные задания. [Текст]/ М.Н. Митропольский. – М.: Высшая школа, 1982. – 63 с.
- 5 Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики (Статически определимые и неопределимые системы). [Текст]/ Под общей редакцией Г.К. Клейна. – М.: Высшая школа, 1973. – 358 с.
- 6 Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики (Основы теории устойчивости, динамики сооружений). [Текст]/ Под общей редакцией Г.К. Клейна. – М.: Высшая школа, 1972. – 318 с.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

(справочное)

Таблица А.1 – Значения функций

$\nu$	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,20	0,9973	0,9986	1,0009	0,9992	0,9840	0,9959
0,40	0,9895	0,9945	1,0026	0,9973	0,9362	0,9840
0,60	0,9756	0,9881	1,0061	0,9941	0,8556	0,9641
0,80	0,9567	0,9787	1,0111	0,9895	0,7434	0,9362
1,00	0,9313	0,9662	1,0172	0,9832	0,5980	0,8999
1,10	0,9164	0,9590	1,0209	0,9798	0,5131	0,8790
1,20	0,8998	0,9511	1,0251	0,9756	0,4198	0,8556
1,30	0,8814	0,9424	1,0296	0,9714	0,3181	0,8306
1,40	0,8613	0,9329	1,0348	0,9669	0,2080	0,8025
1,50	0,8393	0,9226	1,0403	0,9620	0,0893	0,7745
$\pi/2$	0,8225	0,9149	1,0445	0,9581	0	0,7525
1,60	0,8153	0,9116	1,0463	0,9567	-0,0380	0,7434
1,70	0,7891	0,8998	1,0529	0,9510	-0,1742	0,7102
1,80	0,7609	0,8871	1,0600	0,9449	-0,3191	0,6749
1,90	0,7297	0,8735	1,0676	0,9383	-0,4736	0,6375
2,00	0,6961	0,8590	1,0760	0,9313	-0,6372	0,5980
2,02	0,6891	0,8560	1,0777	0,9299	-0,6710	0,5899
2,04	0,6819	0,8530	1,0795	0,9285	-0,7053	0,5817
2,06	0,6777	0,8499	1,0813	0,9270	-0,7398	0,5734
2,08	0,6672	0,8468	1,0832	0,9255	-0,7749	0,5650
2,10	0,6597	0,8437	1,0850	0,9240	-0,8103	0,5565
2,12	0,6521	0,8405	1,0868	0,9225	-0,8460	0,5480
2,14	0,6443	0,8372	1,0887	0,9210	-0,8822	0,5394
2,16	0,6364	0,8339	1,0907	0,9195	-0,9188	0,5307
2,18	0,6284	0,8306	1,0926	0,9180	-0,9557	0,5220
2,20	0,6202	0,8273	1,0946	0,9164	-0,9931	0,5131
2,22	0,6119	0,8239	1,0966	0,9148	-0,0309	0,5041
2,24	0,6034	0,8204	1,0988	0,9132	-1,0691	0,4951
2,26	0,5948	0,8170	1,1009	0,9116	-1,1077	0,4860
2,28	0,5861	0,8134	1,1029	0,9100	-1,1457	0,4768
2,30	0,5772	0,8099	1,1050	0,9083	-1,1861	0,4675
2,32	0,5681	0,8063	1,1072	0,9066	-1,2260	0,4581
2,34	0,5589	0,8026	1,1095	0,9049	-1,2663	0,4486
2,36	0,5496	0,7989	1,1117	0,9032	-1,3069	0,4391
2,38	0,5401	0,7952	1,1140	0,9015	-1,3480	0,4295

Продолжение таблицы А.1

$\nu$	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
2,40	0,5304	0,7915	1,1164	0,8998	-1,3896	0,4198
2,42	0,5205	0,7877	1,1188	0,8981	-1,4316	0,4101
2,44	0,5105	0,7838	1,1212	0,8963	-1,4743	0,4002
2,46	0,5003	0,7799	1,1236	0,8945	-1,5169	0,3902
2,48	0,4899	0,7760	1,1261	0,8927	-1,5602	0,3802
2,50	0,4793	0,7720	1,1286	0,8909	-1,6040	0,3701
2,52	0,4685	0,7679	1,1311	0,8890	-1,6483	0,3598
2,54	0,4576	0,7638	1,1337	0,8871	-1,6929	0,3495
2,56	0,4464	0,7597	1,1363	0,8852	-1,7381	0,3391
2,58	0,4350	0,7555	1,1390	0,8833	-1,7838	0,3286
2,60	0,4234	0,7513	1,1417	0,8814	-1,8299	0,3181
2,62	0,4116	0,7470	1,1445	0,8795	-1,8765	0,3075
2,64	0,3996	0,7427	1,1473	0,8776	-1,9236	0,2968
2,66	0,3873	0,7383	1,1501	0,8756	-1,9712	0,2860
2,68	0,3748	0,7339	1,1530	0,8736	-2,0193	0,2751
2,70	0,3621	0,7294	1,1559	0,8716	-2,0679	0,2641
2,72	0,3491	0,7249	1,1589	0,8696	-2,1170	0,2531
2,74	0,3358	0,7204	1,1619	0,8676	-2,1667	0,2420
2,76	0,3223	0,7158	1,1650	0,8655	-2,2169	0,2307
2,78	0,3085	0,7111	1,1681	0,8634	-2,2676	0,2192
2,80	0,2944	0,7064	1,1712	0,8613	-2,3189	0,2080
2,82	0,2801	0,7016	1,1744	0,8592	-2,3707	0,1968
2,84	0,2654	0,6967	1,1777	0,8571	-2,4231	0,1850
2,86	0,2505	0,6918	1,1810	0,8550	-2,4760	0,1734
2,88	0,2352	0,6869	1,1844	0,8528	-2,5296	0,1616
2,90	0,2195	0,6819	1,1878	0,8506	-2,5838	0,1498
2,92	0,2036	0,6768	1,1913	0,8484	-2,6385	0,1379
2,94	0,1873	0,6717	1,1948	0,8462	-2,6939	0,1261
2,96	0,1706	0,6665	1,1984	0,8439	-2,7499	0,1138
2,98	0,1535	0,6613	1,2020	0,8416	-2,8066	0,1016
3,00	0,1361	0,6560	1,2057	0,8393	-2,8639	0,0893
3,02	0,1182	0,6506	1,2095	0,8370	-2,9219	0,0770
3,04	0,1000	0,6452	1,2133	0,8347	-2,9805	0,0646
3,06	0,0812	0,6398	1,2172	0,8323	3,0400	0,0520
3,08	0,0621	0,6343	1,2212	0,8299	3,0991	0,0394
3,10	0,0424	0,6287	1,2252	0,8275	-3,1609	0,0267
3,12	0,0223	0,6230	1,2292	0,8251	-3,2225	0,0139
3,14	0,0017	0,6173	1,2334	0,8227	-3,2848	0,0011
$\pi$	0	0,6168	1,2336	0,8224	-3,2898	0
3,16	-0,0195	0,6115	1,2376	0,8203	-3,3480	-0,0118
3,18	-0,0412	0,6057	1,2419	0,8178	-3,4120	-0,0249

Продолжение таблицы А.1

$\nu$	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
3,20	-0,0635	0,5997	1,2463	0,8153	-3,4768	-0,0380
3,22	-0,0864	0,5937	1,2507	0,8128	-3,5425	0,0512
3,24	-0,1100	0,5876	1,2552	0,8102	-3,6092	-0,0646
3,26	0,1342	0,5815	1,2597	0,8076	3,6767	0,0780
3,28	0,1591	0,5753	1,2644	0,8050	-3,7453	0,0915
3,30	0,1847	0,5691	1,2691	0,8024	-3,8147	0,1051
3,32	0,2111	0,5628	1,2739	0,7998	-3,8852	0,1187
4,32	-7,8956	0,1165	1,6767	0,6364	-14,116	-0,9188
4,34	-9,0306	0,1040	1,6899	0,6324	-15,309	-0,9372
4,36	-10,503	0,0912	1,7033	0,6284	-16,840	-0,9557
4,38	-12,523	0,0781	1,7170	0,6243	-18,918	-0,9744
4,40	-15,330	0,0648	1,7310	0,6202	-21,783	-0,9931
4,42	-19,703	0,0513	1,7454	0,6161	-26,215	-1,0119
4,44	-27,349	0,0376	1,7602	0,6119	-33,920	-1,0309
4,46	-44,148	0,0237	1,7754	0,6077	-50,779	-1,0499
4,48	-111,57	0,0096	1,7910	0,6034	-118,26	-1,0691
4,50	+227,80	-0,0048	1,8070	0,5991	+221,05	-1,0884
4,52		-0,0194	1,8234	0,5948		-1,1077
4,54		-0,0343	1,8402	0,5905		-1,1271
4,56		-0,0495	1,8575	0,5861		-1,1457
4,58		-0,0650	1,8752	0,5817		-1,1662
4,60		-0,0808	1,8933	0,5772		-1,1861
4,62		-0,0969	1,9119	0,5727		-1,2060
4,64		-0,1133	1,9310	0,5681		-1,2250
4,66		-0,1301	1,9507	0,5635		-1,2461
4,68		-0,1472	1,9710	0,5589		-1,2663
4,70		-0,1646	1,9919	0,5543		-1,2865
$\frac{3}{2}\pi$		-0,1755	2,0052	0,5514		-1,2992
4,72		-0,1824	2,0134	0,5496		-1,3069
4,74		-0,2005	2,0355	0,5449		-1,3274
4,76		-0,2190	2,0582	0,5402		-1,3480
4,78		-0,2379	2,0816	0,5354		-1,3686
4,80		-0,2572	2,1056	0,5305		-1,3896
4,82		-0,2770	2,1304	0,5255		-1,4105
4,84		-0,2973	2,1560	0,5205		-1,4316
4,86		-0,3181	2,1824	0,5155		-1,4528
4,88		-0,3395	2,2096	0,5105		-1,4743
4,90		-0,3612	2,2377	0,5054		-1,4954
4,92		-0,3834	2,2667	0,5003		-1,5169
4,94		-0,4061	2,2966	0,4951		-1,5385

Продолжение таблицы А.1

$\nu$	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
4,96		-0,4293	2,3275	0,4899		-1,5602
4,98		-0,4530	2,3594	0,4846		-1,5821
5,00		-0,4772	2,3924	0,4793		-1,6040
5,02		-0,5022	2,4266	0,4739		-1,6261
5,04		-0,5280	2,4620	0,4685		-1,6483
5,06		-0,5545	2,4986	0,4630		-1,6706
5,08		-0,5818	2,5365	0,4576		-1,6929
5,10		-0,6099	2,5757	0,4520		-1,7155
5,12		-0,6388	2,6164	0,4464		-1,7381
5,14		-0,6685	2,6587	0,4407		-1,7609
5,16		-0,6999	2,7027	0,4350		-1,7838
5,20		0,7630	2,7961	0,4234		-1,8299
5,22		-0,7964	2,8454	0,4175		-1,8532
5,24		-0,8310	2,8968	0,4116		-1,8765
5,26		-0,8668	2,9504	0,4056		-1,9000
5,28		-0,9039	3,0064	0,3996		-1,9236
5,30		-0,9423	3,0648	0,3931		-1,9477
5,32		-0,9821	3,1257	0,3873		-1,9712
5,34		-1,0233	3,1893	0,3811		-1,9952
5,36		-1,0660	3,2559	0,3748		-2,0193
5,38		-1,1103	3,3267	0,3685		-2,0435
5,40		-1,1563	3,3989	0,3621		-2,0679
5,42		-1,2043	3,4757	0,3556		-2,0924
5,44		-1,2544	3,5563	0,3491		-2,1170
5,46		-1,3067	3,6409	0,3425		-2,1418
5,48		-1,3612	3,7298	0,3358		-2,1667
5,50		-1,4181	3,8234	0,3291		-2,1917
5,52		-1,4777	3,9222	0,3223		-2,2169
5,54		-1,5402	4,0267	0,3154		-2,2422
5,56		-1,6059	4,1374	0,3085		-2,2676
5,58		-1,6751	4,2549	0,3015		-2,2932
5,60		-1,7481	4,3794	0,2944		-2,3189
5,62		-1,8252	4,5118	0,2873		-2,3447
5,64		-1,9065	4,6526	0,2801		-2,3707
5,66		-1,9920	4,8026	0,2727		-2,3969
5,68		-2,0833	4,9629	0,2654		-2,4231
5,70		-2,1804	5,1346	0,2580		-2,4495
5,72		-2,2833	5,3190	0,2505		-2,4760
5,74		-2,3944	5,5173	0,2429		-2,5027
5,76		-2,5130	5,7314	0,2352		-2,5296
5,78		-2,6406	5,9628	0,2374		-2,5466

Продолжение таблицы А.1

$\nu$	$\varphi_1(\nu)$	$\varphi_2(\nu)$	$\varphi_3(\nu)$	$\varphi_4(\nu)$	$\eta_1(\nu)$	$\eta_2(\nu)$
5,80		-2,7777	6,2140	0,2195		-2,5838
5,82		-2,9262	6,4873	0,2116		-2,6111
5,84		-3,0876	6,7859	0,2036		-2,6385
5,86		-3,2634	7,1132	0,1955		-2,6661
5,88		-3,4563	7,4738	0,1873		-2,6939
5,90		-3,6678	7,8726	0,1790		-2,7218
5,92		-3,9018	8,3163	0,1706		-2,7499
5,94		-4,1603	8,8122	0,1621		-2,7782
5,96		-4,4547	9,3706	0,1535		-2,8066
5,98		-4,7816	10,004	0,1448		-2,8352
6,00		-5,1589	10,727	0,1361		-2,8639
6,02		-5,5845	11,561	0,1272		-2,8928
6,04		-6,0653	12,534	0,1182		-2,9219
6,06		-6,6753	13,683	0,1091		-2,9512
6,08		-7,3699	15,060	0,0999		-2,9805
6,10		-8,2355	16,739	0,0906		-3,0102
6,12		-9,2939	18,832	0,0812		-3,0420
6,14		-10,646	21,511	0,0717		-3,0699
6,16		-12,440	25,065	0,0621		-3,0991
6,18		-14,921	29,999	0,0523		-3,1304
6,20		-18,594	37,308	0,0424		-3,1609
6,22		-24,575	49,255	0,0324		-3,1916
6,24		-36,100	72,272	0,0223		-3,2225
6,26		-67,436	135,03	0,0121		-3,2535
6,28		-492,67	984,32	0,0017		-3,2848
$2\pi$		$-\infty$	$+\infty$	0		-3,2898