

**ОПД.Р.03 СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА**  
**ЧАСТЬ 1**

Методические указания и контрольные задания  
для студентов заочной формы обучения

## Предисловие

Одним из основных курсов, обеспечивающих подготовку инженеров строительных специальностей, является курс «Строительная механика». Строительная механика – это наука, изучающая методы и порядок расчета строительных конструкций и сооружений на прочность, жесткость и устойчивость при статических и динамических воздействиях.

В курсе излагаются методы расчета как статически определимых, так и статически неопределимых систем. Для закрепления и углубления знаний и для развития навыков самостоятельной работы студентов в курсе строительной механики предусматриваются индивидуальные контрольные работы. Эти работы принимаются преподавателями с защитой в специально отводимое для этого время.

Глубина проработки и степень охвата вопросов, входящих в программу при изложении курсов, определяется числом часов, отводимых по учебному плану данной специальности. Методические вопросы о сокращении тех или иных тем или разделов курса при недостаточном числе отводимых часов по учебному плану, а также изменения в последовательности изложения учебного материала предоставляется решать кафедре «Механика деформируемого твердого тела» и методическому совету заочного факультета

Изложенная в данных методических указаниях программа курса «Строительная механика» основана на программах, изданных ранее учебно-методическим управлением по высшему образованию. При разработке задач использованы методические указания Митропольского М.Н., опубликованные издательством «Высшая школа» в 1990г.

**1. ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ  
«СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА»**  
для студентов строительных специальностей  
заочной и дистанционной формы обучения  
Тихоокеанского государственного университета

**1.1. Введение**

Строительная механика, основные принципы и методы. Значение курса строительной механики для инженерного образования. Краткий исторический очерк развития строительной механики.

Задачи и методы строительной механики как науки о расчете на прочность, жесткость и устойчивость сооружений.

Понятие о расчетной схеме сооружений. Многообразие расчетных схем, их зависимость от требуемой точности расчета и используемой вычислительной техники.

Основные элементы сооружений: стержни, пластины, оболочки и массивные тела.

**1.2. Кинематический анализ сооружений**

Понятие о степени свободы сооружений. Аналитические признаки неизменяемости сооружений. Правила образования простейших неизменяемых систем. Мгновенно изменяемые системы. Статический и геометрический признаки мгновенно изменяемости. Порядок кинематического анализа сооружений.

**1.3. Общая теория линий влияния**

Понятие о линии влияния. Линии влияния опорных реакций и внутренних усилий в простых балках. Линии влияния при узловой передаче нагрузки. Влияние неподвижной нагрузки (сосредоточенная сила, сосредоточенный момент, распределенная нагрузка). Влияние системы сосредоточенных сил. Определение невыгодного положения системы сосредоточенных сил. Понятие об эквивалентной нагрузке. Определение наибольших внутренних усилий по эквивалентной нагрузке. Кинематический способ построения линий влияния.

**1.4. Многопролетные статически определимые балки**

Построение эпюр внутренних усилий. Построение линий влияния внутренних усилий.

## **1.5. Понятие о матричном методе расчета сооружений**

Понятие о числовых матрицах. Виды матриц. Операции над матрицами. Матрица влияния внутренних усилий для простых балок. Построение эпюр внутренних усилий при помощи матриц влияния. Расчет многопролетных статически определимых балок с использованием теории матриц.

## **1.6. Трехшарнирные арки**

Виды трехшарнирных арок. Определение опорных реакций. Определение внутренних усилий в трехшарнирных арках. Понятие о рациональном очертании оси арки. Линии влияния внутренних усилий. Расчет трехшарнирных арок с затяжкой на уровне опор и выше уровня опор. Применение теории матриц к расчету трехшарнирных арок.

## **1.7. Статически определимые фермы**

Понятие о ферме. Классификация ферм. Способы определения продольных усилий в стержнях простейших балочных консольных ферм. Определение продольных усилий в стержнях сложных ферм. Линии влияния усилий в стержнях простых и сложных ферм. Линии влияния усилий в стержнях шпренгельных ферм. Линии влияния усилий в распорных фермах. Определение расчетных усилий в стержнях фермы.

Расчет составных ферм. Понятие о расчете пространственных ферм. Применение теории матриц к расчету ферм.

## **1.8. Определение перемещений. Общие теоремы об упругих системах. Метод Мора**

Действительная работа внешних и внутренних сил. Возможная работа внешних сил. Теорема о взаимности перемещений. Возможная работа внутренних сил. Теорема взаимности работ. Формула Мора для определения перемещений. Способ Верещагина. Применение формулы Мора при определении перемещений в балках, рамах, арках и фермах. Определение перемещений при осадке опор и температурном воздействии.

## **1.9. Статически неопределимые системы. Основы расчета статически неопределимых рам. Метод сил**

Статическая неопределимость. Основная система метода сил. Канонические уравнения метода сил. Расчет статически неопределимых рам методом сил на действие внешних нагрузок. Определение

коэффициентов и свободных членов канонических уравнений. Расчет статически неопределимых рам на действие температуры. Расчет статически неопределимых рам на осадку опор. Определение перемещений в статически неопределимых системах. Построение эпюр поперечных сил, а так же продольных сил по эпюре изгибающих моментов. Проверка правильности расчета. Расчет симметричных статически неопределимых рам. Группировка неизвестных. Упрощения при расчете симметричных рам на симметричные или кососимметричные нагрузки.

### **1.10. Особенности расчета статически неопределимых ферм методом сил\***

Степень статической неопределимости. Канонические уравнения метода сил. Определение коэффициентов и свободных членов канонических уравнений. Определение расчетных внутренних усилий.

### **1.11. Особенности расчета двухшарнирных и бесшарнирных арок методом сил\***

Характеристика двухшарнирных и бесшарнирных арок. Очертание оси арки. Изменение сечений арки по длине. Основные системы для расчета двухшарнирных и бесшарнирных арок. Канонические уравнения. Определение коэффициентов и свободных членов канонических уравнений. Построение эпюр внутренних усилий.

### **1.12. Неразрезные балки\***

Расчет на постоянную нагрузку. Выбор основной системы метода сил. Уравнения трех моментов. Определение коэффициентов и свободных членов уравнений. Построение расчетной эпюры изгибающих моментов. Расчет неразрезной балки при действии временной нагрузки о одном пролете. Построение объемлющей эпюры изгибающих моментов.

### **1.13. Основы расчета статически неопределимых рам методом перемещений\***

Кинематическая неопределимость. Основная система метода перемещений. Канонические уравнения метода перемещений. Статический метод определения коэффициентов и свободных членов канонических уравнений. Определение коэффициентов и свободных членов путем перемножения эпюр. Проверка коэффициентов и свободных членов. Расчет на действие температуры и осадку опор. Использование симметрии при расчете рам методом перемещений.

### 1.14. Понятие о комбинированном и смешанном методах расчета статически неопределимых рам\*

Комбинированный метод расчета статически неопределимых рам. Установление целесообразности применения комбинированного метода. Выбор основной системы. Составление канонических уравнений. Смешанный метод расчета статически неопределимых рам. Выбор основной системы. Канонические уравнения смешанного метода.

### 1.15. Метод конечных элементов\*

Идея метода конечных элементов. Расчет шарнирно-стержневых систем методом конечных элементов. Расчет плоских рам методом конечных элементов.

**Примечание:** темы помеченные значком \* изучаются только студентами специальностей ПГС, ГСХ, СХС, АД, МТ.

## ЛИТЕРАТУРА ПО КУРСУ

### *Основная*

1. Дарков А.В., Н.Н. Шапошников. Строительная механика. М: Высшая школа, 1986. 607 с.
2. Киселев В.А. Строительная механика. Общий курс. М: Стройиздат, 1986, 520 с.
3. Клейн Г.К. и др. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики (Статика стержневых систем). М: Высшая школа. 1980, 384 с.
4. Вайсфельд А.А., Иванников Л.М., Киселев В.Е., Ловцов А.Д., Лукашевич А.А. Строительная механика. Часть II. Примеры выполнения контрольных работ для студентов строительных специальностей заочной и дистанционной формы обучения. – Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2007. – 24 с.

### *Дополнительная*

1. Леонтьев, Н.Н. Основы строительной механики стержневых систем. [Текст] Н.Н. Леонтьев, Д.Н. Соболев, А.А. Амосов. - М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 1996. - 542 с.
2. Киселев В.Е. Строительная механика. Методические указания к выполнению контрольных работ по курсу «Строительная механика» для студентов строительных специальностей заочной формы обучения. Часть 1. Хабаровск, ХГТУ, 2003. 17 с.
3. Даниловский Ю.М. Расчет трехшарнирных систем. Часть 1. Методические указания к изучению раздела курса «Строительная механика»

для студентов архитектурно-строительных и дорожных специальностей. Хабаровск, ХГТУ, 2004. 20 с.

4. Ловцов А.Д. Метод конечных элементов. Методические указания и варианты заданий к выполнению лабораторных работ № 1 и 2 для студентов строительных специальностей. Хабаровск, ХГТУ, 1998. 12 с.

5. Ловцов А.Д. Метод конечных элементов. Методические указания и варианты заданий к выполнению лабораторных работ № 3 и 4 для студентов строительных специальностей. Хабаровск, ХГТУ, 2000. 12 с.

6. Лукашевич А.А. Расчет строительных конструкций по методу конечных элементов. Методические указания к выполнению курсовых и расчетно-проектировочных работ для студентов строительных и механических специальностей. Хабаровск, ХГТУ, 1998. 20 с.

7. Иванников Л.М., Иовенко В.В., Ловцов А.Д., Лукашевич А.А., Шишкин А.И. Решение задач строительной механики на ПЭВМ. Часть 1. Методические указания к выполнению курсовых и расчетно-проектировочных работ для студентов строительных и механических специальностей. Хабаровск, ХГТУ, 1995. 40 с.

8. Иванников Л.М., Иовенко В.В., Ловцов А.Д., Шишкин А.И. Решение задач строительной механики на ПЭВМ. Часть II. Методические указания к выполнению курсовых и расчетно-проектировочных работ для студентов строительных и механических специальностей. Хабаровск, ХГТУ, 1996. 44 с.

9. Лукашевич А.А. Современные численные методы строительной механики: Учебное пособие. – Хабаровск, ХГТУ, 2003. 135 с.

### *Советы студенту*

⇒ *Приступая к расчету, следует досконально разобраться в теории, связанной с заданием, по учебникам, методическим пособиям, конспектам, ознакомиться с последовательностью выполнения задания, ответить на контрольные вопросы, приведенные в методических указаниях.*

⇒ *Все расчеты, в том числе и черновые записи, вести четко и аккуратно на одной стороне листа, оставляя вторую сторону для замечаний преподавателя, исправлений и дополнений решения.*

⇒ *Не забывать о самоконтроле правильности решения задачи.*

⇒ *Сопровождать расчет на всех его этапах необходимыми схемами, построением эпюр, выполненных с обязательным соблюдением масштаба. Хорошее графическое оформление не только помогает правильно произвести расчет, но и облегчает контроль правильности решения.*

## 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОТДЕЛЬНЫМ РАЗДЕЛАМ ПРОГРАММЫ

### Тема 1. Введение и основные понятия строительной механики.

Литература: [1, введение, § 1.1]; [2, § 1—4,7];

Для успешного усвоения курса строительной механики необходимо, прежде всего, повторить основные положения курсов теоретической механики (раздел статики) и сопротивления материалов, касающихся условий равновесия сил на плоскости и в пространстве; понятий прочности, жесткости и устойчивости; использования метода сечений для определения внутренних усилий.

В начале изучения курса строительной механики студенты должны уяснить основные понятия данной дисциплины. Необходимо твердо усвоить основные типы опор, применяемые в расчетных схемах, уметь определять возникающие в них реакции и направления возможных перемещений.

#### Вопросы для самопроверки

1. Что является предметом изучения курса *строительная механика*?
2. Что такое *расчетная схема* сооружения?
3. Дайте определение *стержневой системы*?
4. Приведите *классификацию* стержневых систем.
5. Что такое *узел*? Какие *виды узлов* используются в расчетных схемах сооружений?
6. Приведите свойства *шарнирного узла*.
7. Приведите свойства *жесткого узла*.
8. Перечислите основные *типы опор* (опорных связей).
9. Сущность и свойства *шарнирно-подвижной опоры*?
10. Сущность и свойства *шарнирно-неподвижной опоры*?
11. Сущность и свойства *жесткой заделки*?

### Тема 2. Кинематический анализ сооружений

Литература: [1, § 1.2—1.3]; [2, §5, 6, 8-17]; [3, § 1.1-1.3];

Изучая понятие расчетной схемы, надо усвоить, что выбор расчетной схемы является важным этапом расчета сооружения, так как он влияет как на простоту расчета, так и на его точность. Выбор расчетной схемы тесно связан с допущениями и предпосылками, лежащими к основе дальнейшего расчета.

Сооружение, выполненное из отдельных элементов, может



воспринимать любую нагрузку только в том случае, если оно сохраняет свою форму и положение. Другими словами, сооружение должно быть неподвижным и геометрически неизменяемым. Подвижность сооружения характеризуется его степенью свободы, т. е. числом геометрических параметров, которые характеризуют положение элементов сооружения на плоскости или в пространстве. Геометрически неизменяемыми называются такие сооружения, форма которых не может изменяться без деформации их отдельных элементов.

При анализе расчетных схем сооружений важны следующие понятия: *геометрическая неизменяемость, диск, кинематическая связь, степень свободы, степень статической неопределимости*. Отдельные геометрически неизменяемые плоские элементы сооружения называются дисками. Каждый брус или стержень можно рассматривать как диск.

Диск имеет на плоскости три степени свободы: он может перемещаться поступательно в двух направлениях и поворачиваться вокруг любой точки. Для обеспечения неподвижности диска на него нужно наложить три связи. Связи чаще всего накладывают в виде опорных стержней и шарниров. Стержень лишает диск одной степени свободы, т. е. препятствует перемещению диска в направлении стержня. Шарнир лишает диск двух степеней свободы, т. е. возможности перемещаться в двух направлениях, оставляя возможность поворачиваться. Шарнир может быть простым и кратным. Простой шарнир соединяет два диска, кратный шарнир соединяет  $n$  дисков и эквивалентен  $n-1$  простым шарнирам, где  $n$  – число соединяемых дисков.

Обозначим степень свободы системы (степень подвижности)  $W$ , число дисков —  $D$ , число простых шарниров —  $Ш$ , число опорных стержней —  $C_0$ . Тогда степень свободы всей системы выразится так:

$$W = 3 \times D - 2 \times Ш - C_0.$$

Анализ результатов, полученных по этой формуле, дает следующее:

При  $W > 0$  система подвижная, не имеет достаточного количества связей и поэтому явно геометрически изменяема.

При  $W = 0$  система обладает достаточным количеством связей и может быть неподвижной и геометрически неизменяемой.

При  $W < 0$  система обладает лишними связями и может быть неподвижной и геометрически неизменяемой.

Однако во втором и третьем случаях систему можно считать пригодной для сооружения только при правильном размещении связей, т. е. нельзя ограничиваться определением степени свободы

Особое значение имеет проверка правильности образования геометрически неизменяемых систем.

### Вопросы для самопроверки

1. Что такое **геометрическая неизменяемость** системы?
2. Что такое **степень свободы** стержневой системы (дать определение)?
3. Приведите формулу для определения **числа степеней свободы**
4. Каков необходимый **признак геометрической неизменяемости**?
5. Какие правила **расположения опорных связей** (для геометр. неизменяемости одного диска)?
6. Какова цель проведения **кинематического анализа системы**?
7. Какой **порядок** проведения **кинематического анализа системы**?
8. Какие системы называются **мгновенно-изменяемыми**? Признаки мгновенной изменяемости.
9. Произведите кинематический анализ схем, изображенных на рис. 1

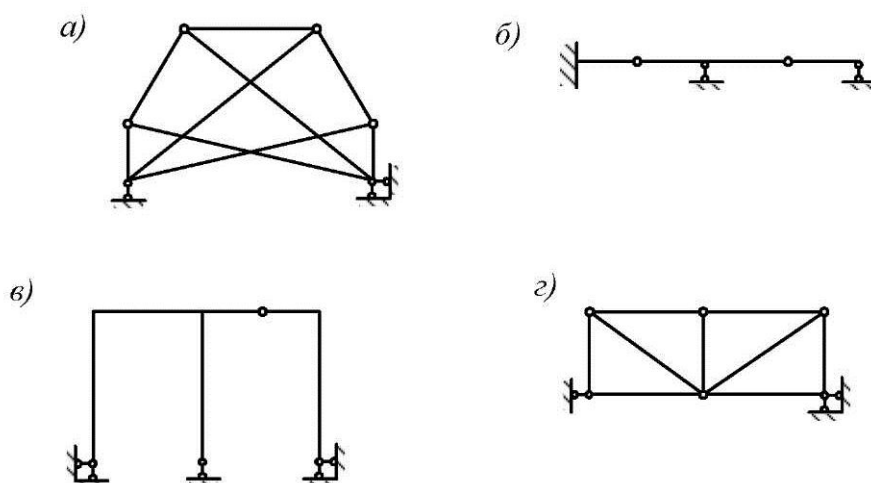


Рис. 1. Выполнить кинематический анализ расчетных схем

### Тема 3. Методы определения усилий от подвижной нагрузки

Литература: [1, § 2.2-2.5, 2.7-2.11]; [2, § 26-32, 34, 42, 43]; [3 § II.1-II.3];

При расчете мостов, кранов, подкрановых балок приходится иметь дело с подвижной нагрузкой, которая может перемещаться в пределах сооружения. При этом величины усилий, возникающих в элементах сооружения, будут зависеть от положения нагрузки.

Расчет на подвижную нагрузку производится при помощи линий влияния. Пусть по балке (рис. 2.) перемещается нагрузка, распределенная равномерно на отрезке «с». Следует выяснить, при каком положении этой нагрузки, т. е. при каком значении переменной  $z$  изгибающий момент, например, в сечении  $D$ , будет иметь наибольшее значение. Для ответа на этот вопрос необходимо рассмотреть все возможные положения заданной

нагрузки. Для этого балку загружают одной сосредоточенной вертикальной силой  $F = 1$ .

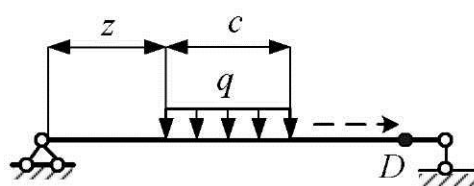


Рис.2. К расчету балки на подвижную нагрузку

Величина искомого изгибающего момента зависит от положения единичной силы на балке. Эту зависимость можно выразить в виде некоторой функции  $M_D = f(z)$  и построить ее график, изображающий влияние силы  $F = 1$  на величину изгибающего момента (или другого усилия) в рассматриваемом сечении. После этого задача по определению максимального значения искомого усилия от заданной нагрузки  $q$  (см. рис. 2.) или любой другой нагрузки легко решается.

Приступая к изучению этого раздела, необходимо уяснить смысл линии влияния и ее отличия от эпюры. Линии влияния опорных реакций балки на двух опорах с консолями являются основными; остальные линии влияния строятся на базе основных. Поэтому вид и исходные ординаты линий влияния опорных реакций необходимо запомнить.

При изучении построения линий влияния внутренних усилий важно усвоить общий метод: рассмотрения двух положений единичной силы – слева и справа от рассматриваемого сечения. Следует обратить внимание на особенности построения линий влияния внутренних усилий, например изгибающего момента и поперечной силы в сечениях на консоли.

Изучая вопрос определения усилий по линиям влияния, надо обратить внимание на загрузку линии влияния сосредоточенной силой и сосредоточенным моментом. При этом важно запомнить следующее правило для знаков: положительным считается момент, действующий по ходу часовой стрелки. Угол наклона линии влияния положительный, если он отсчитывается от горизонтали против хода часовой стрелки (при этом положительные ординаты линии влияния откладываются вверх).

Определение невыгодного положения нагрузки на сооружении связано с достаточно громоздкими вычислениями. Здесь необходимо обратить особое внимание на загрузку треугольной линии влияния и на понятие об эквивалентной нагрузке.

Для статически определимых многопролетных балок построение линий влияния удобнее производить, рассматривая «поэтажную» схему.

### Вопросы для самопроверки

1. Что такое *линия влияния (лв.)*? Для чего используются *линии*

влияния?

2. Чему равна **ордината** в сечении "n" линии влияния  $M_k$ ?
3. **Формула** для определения усилия по линии влияния от заданной нагрузки ( $F, q, M$ )?
4. **Нулевые точки** для линии влияния усилия, где они находятся?
5. Как и где нужно **располагать единичную силу**  $F = 1$  при построении линии влияния?
6. Чему равна **ордината** лв.  $M_k$  под сечением "к" в пролете балки?
7. Чему равны **ординаты** лв.  $Q_k$  под сечением "к" в пролете балки?
8. Перечислите **свойства линии влияния**  $M$  и  $Q$  в пролете балки?
9. Какой **1-й этап** построения линии влияния для многопролетной балки?
10. Какой **2-й этап** построения линии влияния для многопролетной балки?
11. Постройте линию влияния нормального напряжения в крайнем волокне какого-либо сечения балки на двух опорах.
12. Для балки (рис. 3) покажите вид линий влияния изгибающих моментов и поперечных сил в сечениях 1 – 4.

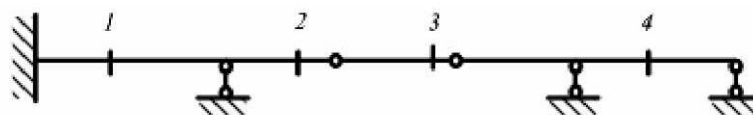


Рис. 3. Расчетная схема балки для построения линий влияния усилий

#### Тема 4. Многопролетные статически определимые балки

Литература: [1, § 2.1, 2.7-2.11]; [2, § 44, 49, 50]; [3 § III.1-III.3];

Общие сведения о нагрузках и внутренних усилиях известны из курса сопротивления материалов, однако важность этого вопроса требует повторения основных понятий и в первую очередь метода сечений и правил построения эпюр внутренних сил, зависимостей между эпюрами и нагрузкой. При расчете многопролетных статически определимых балок целесообразно использовать схему взаимодействия элементов – «поэтажную схему».

Такая схема позволяет свести расчет сложной балки к расчету простых балок с консолями. Для составления схемы взаимодействия в первую очередь необходимо выделить основные балки и опирающиеся на них второстепенные.

Основная балка работает как при воздействии нагрузки непосредственно на саму балку, так и на опирающиеся на нее второстепенные балки. Второстепенные балки работают, только если

нагрузка расположена непосредственно на этих элементах.

Второстепенные балки в свою очередь передают нагрузку на основные по отношению к ним элементам. При расчете отдельных балок надо учесть равенство по величине и противоположность по направлению сил взаимодействия в шарнирах, связывающих отдельные балки. При помощи «поэтажной схемы» удобно рассчитывать и некоторые типы статически определимых рам (например, рис. 1, в).

### Вопросы для самопроверки

1. Приведите правила знаков для *изгибающего момента и поперечной силы*.

2. Что называется *многопролетной статически определимой балкой* (дать определение)?

3. Как строится *поэтажная схема* многопролетной статически определимой балки?

4. Каков *порядок* вычисления реакций при расчете многопролетной статически определимой балки ?

5. Как проверить *статическую определимость и геометрическую неизменяемость* многопролетной статически определимой балки?

6. Какие *зависимости* между изгибающим моментом, поперечной силой и нагрузкой используются при проверке правильности построения эпюр?

7. Для балки (рис. 4) постройте эпюры внутренних усилий.

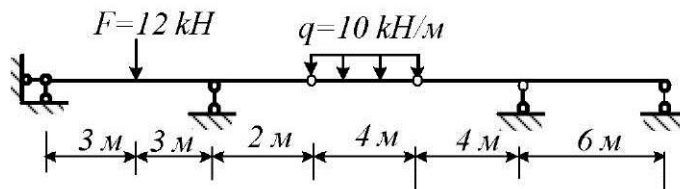


Рис. 4. Расчетная схема балки и схема нагрузок

### Тема 5. Понятие о матричном методе статического расчета сооружений.

Литература: [1, § 9.1-9.5, 13.1-13.7]; [2, § 53,107]; [3, § II.5,IV.5,V.4].

Широкое развитие современной вычислительной техники значительно облегчает решение сложных задач строительной механики. Открывается возможность расчета сооружений по уточненным расчетным схемам, с более полным учетом физических свойств материала и особенностей

работы конструкции. Практически отпадают трудности математического порядка (решение систем уравнений и пр.), которые часто приводили к поискам упрощенных расчетных схем, приближенных методов решения.

В настоящее время широкое распространение получили численные методы анализа, хорошо приспособленные для реализации на вычислительных машинах. Для лучшего усвоения методов решения задач строительной механики необходимо повторить из курса высшей математики основы матричной алгебры и линейные преобразования векторов.

Надо повторить основные правила операций над матрицами: сложение матриц, умножение матриц на скаляр, перемножение матриц, обращение матриц, транспонирование и пр. Необходимый материал по этим вопросам излагается в курсах высшей математики. Достаточно подробно основные сведения из теории матриц систематизированы в учебнике [1].

В сложных случаях, когда решается задача определения внутренних усилий (или перемещений) в нескольких сечениях от действия различных сочетаний нагрузок, большой эффект дает применение матриц влияния. Надо иметь в виду, что применение матриц влияния занимает большое место во всех последующих темах и поэтому важно добиться полного усвоения этого вопроса.

#### *Вопросы для самопроверки*

1. Дайте определение **числовой матрице**.
2. Какая матрица называется **квадратной, прямоугольной, единичной, матрицей-вектором**?
3. Как **складываются, вычитаются и перемножаются** матрицы?
4. Что такое **обратная матрица** и для чего она используется?
5. Каков смысл **коэффициентов матрицы влияния** изгибающих моментов?

#### **Тема 6. Трехшарнирные системы**

Литература: [1, § 3.1—3.6]; [2, § 66,67,70,75,76]; [3, § IV.1-IV.5]; [7],[8]

Особенностью работы трехшарнирных систем является наличие горизонтальной составляющей опорных реакций даже при вертикальной нагрузке. Для определения этих составляющих (т. н. распора) необходимо составить дополнительное уравнение. При определении внутренних усилий в сечениях трехшарнирных арок не следует ограничиваться одним частным случаем действия вертикальной нагрузки.

Линии влияния внутренних усилий строятся на основе линий влияния моментов и поперечных сил в сечениях простых балок. Полезно

ознакомиться с построением линий влияния при помощи нулевых точек. Матричные методы расчета трехшарнирных арок можно изучить по учебнику [1]. Расчет трехшарнирных арочных ферм по существу складывается из элементов расчета трехшарнирных арок или рам и балочных ферм. Изучение расчета статически определимых комбинированных и вантовых систем достаточно ограничить общими понятиями.

### Вопросы для самопроверки

1. Какая стержневая система называется *аркой* ?
2. Приведите *классификацию арок* по их очертанию.
3. Какого вида арка называется *трехшарнирной аркой*?
4. Какое основное преимущество *арки* по сравнению с *балкой*?
5. Назовите основные параметры, определяющие *геометрию арки* (и их обозначение).
6. Какие *арки* считаются "*пологими*", а какие "*подъемистыми*"?
7. Что такое *распор* в трехшарнирной арке, как он определяется?
8. Формула для определения *изгибающего момента* в арке?
9. Формула для определения *поперечной силы* в арке?
10. Формула для определения *продольной силы* в арке?
11. Каков *порядок расчета арки*?
12. Как определить *tg* и *cos* угла наклона касательной в арке?
13. Что такое *рациональное очертание* арки, как оно находится?

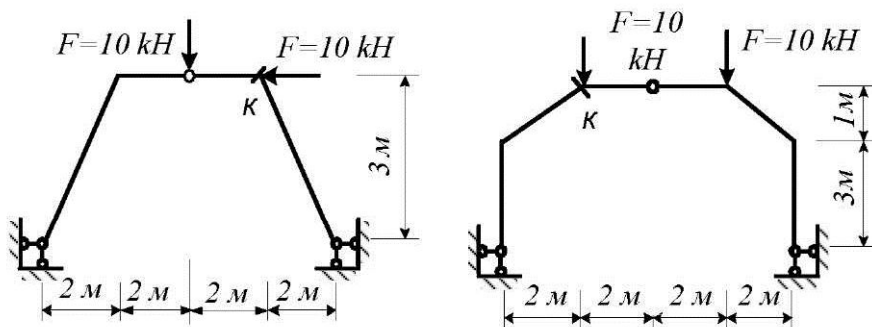


Рис. 5. Расчетные схемы распорных рам

14. Определить значения распора *в трехшарнирных рамах*, изображенных на рис. 5.
15. Найти значения *M*, для сечения «к» рам на рис. 5.
16. Найти значения *Q* для сечения «к» рам на рис. 5.
17. Найти значения *N* для сечения «к» рам на рис. 5.

### Тема 7. Плоские статически определимые фермы

Литература: [1, § 4.1—4.9]; [2, § 54-57,59,60,63,64]; [3, § V.1-V.4]; [7].

Основные приемы расчета ферм уже известны студенту из курса теоретической механики. Прежде чем приступить к непосредственному решению задачи, необходимо убедиться в том, что рассматриваемая расчетная схема является геометрически неизменяемой и статически определимой. Анализ геометрической неизменяемости и статической определимости удобно проводить по формуле, устанавливающей соотношение между числом узлов и стержней. При этом необходимо учитывать, что стержни соединяются в узлах шарнирно.

Расчетная задача обычно ставится двойко: либо требуется рассчитать всю ферму, т. е. найти по определенной системе усилия во всех стержнях фермы, либо надо найти усилие в одном лишь ее стержне. Большое значение имеет умение устанавливать нулевые стержни, тем самым уменьшая объем дальнейших вычислений. Следует обратить внимание на частные случаи равновесия узлов и хорошо запомнить признаки нулевых стержней, руководствуясь которыми можно производить определение нулевых стержней.

Принципиальная сторона аналитического расчета ферм на заданную неподвижную нагрузку крайне проста и, в общем, известна студенту из курса теоретической механики. При аналитическом определении усилий в стержнях фермы используется метод сечений. При определении усилий в стержнях надо стремиться к тому, чтобы усилие в каждом стержне определялось независимо от усилий в других стержнях. Достигнуть этого удастся почти во всех случаях путем правильного использования метода сечений.

В зависимости от очертания фермы – геометрии внешнего контура и решетки, метод сечений применяется в двух вариантах: способ сквозных сечений или способ вырезания узлов. Необходимо стремиться, чтобы в отсеченной части фермы не было больше трех неизвестных усилий в стержнях. При использовании способа сквозных сечений составляются условия равновесия в виде суммы моментов относительно моментной точки или суммы проекций на ось. При использовании способа вырезания узлов, составляются уравнения равновесия в виде суммы проекций на ось. Технику определения усилий в стержнях можно подробно разобрать, например в [1, 2].

Построение линий влияния усилий в стержнях фермы, как и расчет на постоянную нагрузку, проводится теми же способами по общей методике, изложенной в предыдущей теме. Особенностью здесь является наличие передаточных прямых, вызванное узловой передачей нагрузки.

Расчет сложных (шпренгельных) ферм требует умения выделить основную и дополнительную решетки. Для этого необходимо знать все типы шпренгелей и схемы их взаимодействия с основной решеткой, т. е.



схемы передачи нагрузки со шпренгелей в узлы основной решетки. Здесь особенно полезно разобрать примеры из пособий [3], [7].

### Вопросы для самопроверки

1. Какая стержневая система называется **плоской фермой**?
2. Когда **продольная сила** в стержне фермы считается положительной?
3. Почему узлы фермы считаются **шарнирными**, а не жесткими?
4. Какие **требования** предъявляются к стержням и узлам фермы?
5. Какого типа должна быть **внешняя нагрузка** на ферму?
6. Перечислите **разновидности стержней** фермы.
7. Назовите основные **типоразмеры** фермы (их обозначение).
8. Приведите **классификацию** ферм по их **очертанию пояса**.
9. Приведите **классификацию** ферм по типу **решетки**.
10. По какой формуле определяется **число степеней** свободы фермы?
11. Какие существуют **способы определения усилий** в стержнях фермы?
12. Какова идея (сущность) способа "**вырезания узла**" в ферме?
13. Сущность способа "**сквозных сечений (моментной точки)**"?
14. Сущность способа "**сквозных сечений (проекций)**" в ферме?
15. Что такое "**моментная**" точка при определении усилия в стержне?

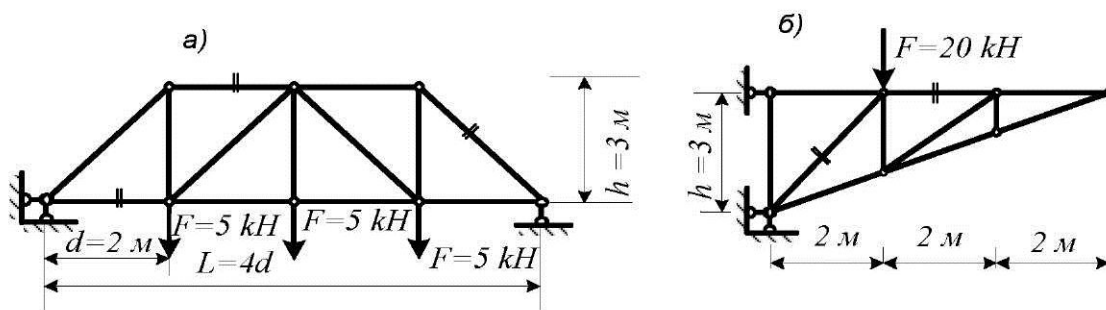


Рис. 6. Расчетные схемы простых ферм  
а) балочная ферма, б) консольная ферма

16. Назовите признаки "**нулевых**" стержней фермы
17. Приведите **формулу Мора** для расчета перемещений фермы
18. Назовите **способы** построения линий влияния усилий в ферме.
19. **Линия влияния** продольного усилия в стержне ферм – что это?
20. Что показывает **ордината** линии влияния усилия в ферме?
21. Определите усилия в стержнях, помеченных знаком «**''**», в фермах, приведенных на рис. 6.а и рис. 6.б. Определите нулевые стержни.
22. Выделите основную и дополнительную решетки для

шпренгельных ферм, показанных на рис.7. а. и 7 б.

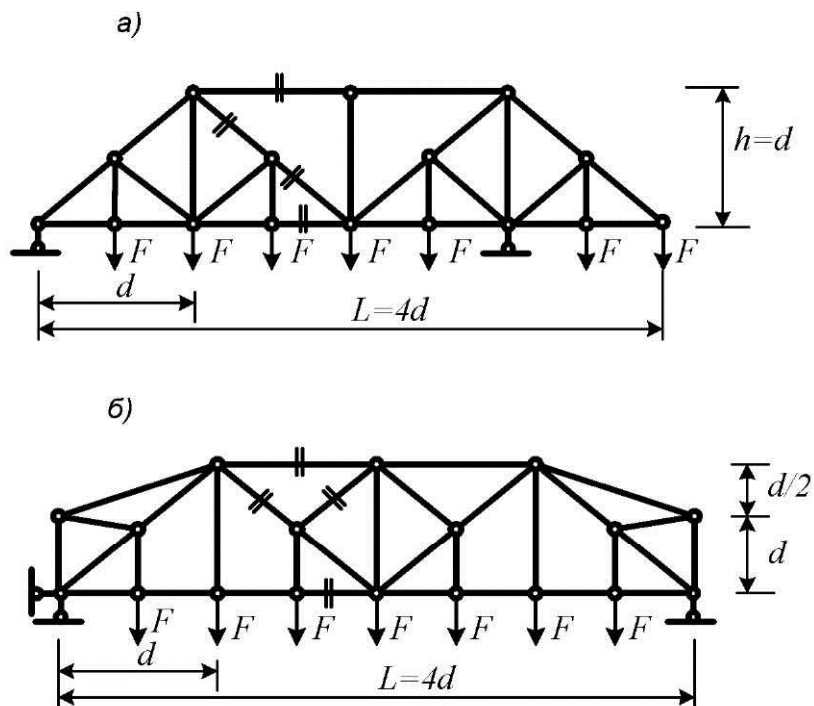


Рис. 7. Расчетные схемы шпренгельных ферм  
а) ферма с одноярусными шпренгелями,  
б) ферма с двухярусными шпренгелями

## Тема 8. Определение перемещений методом Мора

Литература: [1, § 5.1—5.9]; [2, § 95-107,109]; [3, § VIII.1-VIII.9]; [7].

Данная тема является весьма важной, так как она служит основой для построения расчета статически неопределимых систем. Успешное овладение теоретическим материалом и свободное использование его для решения практических задач способствует развитию знаний, необходимых для расчета широкого класса статически неопределимых конструкций, как-то: рамы, арки, фермы.

Кроме того, материал, излагаемый в настоящей теме, имеет самостоятельное значение, так как позволяет определять перемещения в любых стержневых системах при действии на них сил, при температурном воздействии и смещениях опор.

Приступая к изучению темы, необходимо освоиться с новыми понятиями: обобщенная сила (совокупность ряда сил, действующих на сооружение) и обобщенное перемещение (совокупность ряда перемещений, вызываемых одной или несколькими силами). Следует хорошо уяснить разницу между действительной работой внешних или внутренних сил и работой возможной (виртуальной).

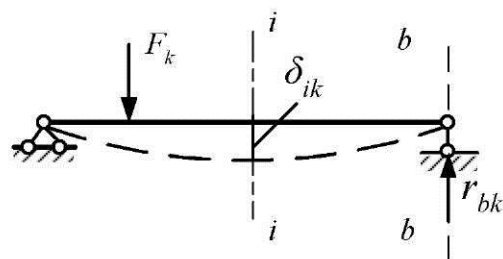


Рис. 8. Обозначение перемещений и реакций

В случае статического нагружения системы зависимость между внешней нагрузкой и перемещениями подчиняется закону Гука, поэтому система не сразу принимает на себя всю нагрузку, а постепенно, по мере роста перемещений и лишь в момент прекращения роста перемещений сооружение воспринимает полную величину нагрузки. При возможном перемещении, которое мысленно приписывается системе в процессе деформации, силы не меняют своей величины (т. к. эти перемещения возникают от другого фактора).

Следует особое внимание обратить на то, что перемещения и реакции обозначаются буквами с двумя индексами. Первый индекс показывает направление перемещения или реакции, второй — причину, вызвавшую перемещение или реакцию. Например,  $\delta_{ik}$  обозначает (рис. 8) перемещение по  $i$ -ому направлению, вызванное силой  $F_k$ . Из теоремы Бетти о взаимности работ следует теорема Максвелла о взаимности перемещений и теорема Рэлея о взаимности реакций, которым следует уделить особое внимание.

Для определения перемещений используется формула Мора. При действии на сооружение внешних сил формула Мора для определения перемещений состоит из суммы интегралов, учитывающих влияние момента, поперечной и продольной силы в сечениях элементов сооружения на деформацию сооружения в целом и имеет вид:

$$\Delta_{nF} = \sum \int_0^l \frac{\bar{N}_n N_F}{EA} dz + \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_n M_F}{EI} dz + \sum \int_0^l \frac{k \bar{Q}_n Q_F}{GA} dz.$$

При определении перемещений в фермах с узловой нагрузкой учитывается влияние лишь продольных сил (момент и поперечная сила в сечениях элементов не возникают). При определении перемещений в балках и рамах обычно пренебрегают влиянием поперечных и продольных сил, деформация от учета которых значительно меньше деформаций от учета момента, и в формуле перемещений остаются лишь интегралы, учитывающие изгибающие моменты.

Таким образом, геометрическая задача определения перемещений точек системы сводится к статической задаче, а именно построению эпюр внутренних усилий в грузовом состоянии « $F$ », тоже во вспомогательном

состоянии « $n$ » от силы  $F_n = 1$  и последующему вычислению интегралов в формуле Мора. Последняя операция условно называется «перемножением эпюр». При перемножении эпюр удобно использовать способы Верещагина и Симпсона изложенные в [5] и приспособленные для вычисления интегралов следующего вида:

$$J = \int_a^b f(z)F(z)dz \cdot$$

К таким интегралам относится и интеграл Мора, поскольку любое из внутренних усилий является функцией координаты “ $z$ ”

### Вопросы для самопроверки

1. Что понимается под **обобщенной силой**?
2. Расшифруйте запись:  $\delta_{i,j} = \delta_{j,i}$
3. Какой вид имеет **формула Мора** для определения **перемещений в балках и рамах**?
4. Какой вид имеет **формула Мора** для определения **перемещений в фермах**?
5. Какой вид имеет **формула Мора** для определения **перемещений в арках**?
6. Запишите **правило Верещагина** для вычисления интеграла Мора.
7. Запишите **формулу Симпсона** для вычисления интеграла Мора.
8. Для рам, изображенных на рис. 9, определите горизонтальное и угловое перемещение узла “ $k$ ” (жесткость ригеля вдвое больше жесткости стоек).

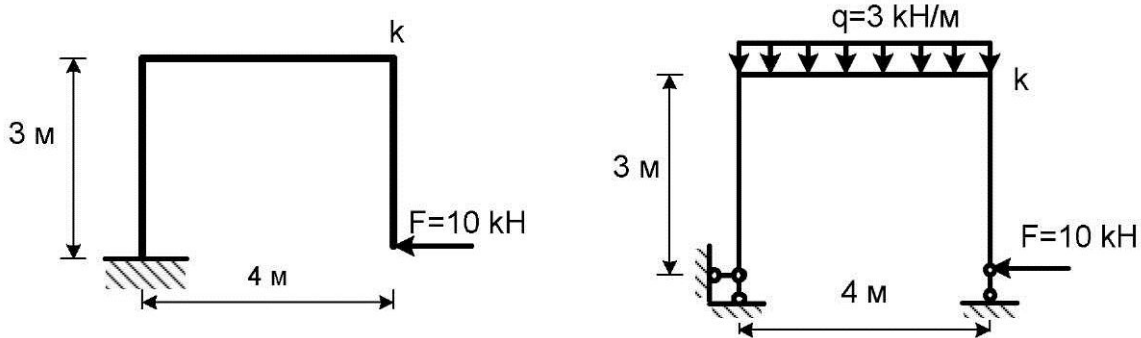


Рис. 9. Схемы рам для определения перемещений

## Тема 9. Расчет статически неопределимых систем методом сил

Литература: [1, § 6.1—6.15]; [2, § 122—138]; [3, § IX.1-IX.2, IX.4-IX.7]

Изучение темы следует начать с понятия статической неопределимости и методов подсчета числа лишних связей. Приступая к

расчету статически неопределимой рамы по методу сил, необходимо выяснить, прежде всего, степень статической неопределимости рассматриваемой конструкции. Для определения числа лишних неизвестных можно воспользоваться формулой, известной из анализа геометрической структуры сооружений:

$$n = 2Ш + С_0 - 3Д,$$

где  $Л$  – число лишних связей,  $Ш$  – число простых шарниров,  $С_0$  – число опорных стержней и  $Д$  – число дисков, образующих конструкцию.

В том случае, когда в расчетной схеме имеются замкнутые контуры, число лишних неизвестных определяется по формуле:

$$n = 3К - Ш,$$

где  $К$  – число замкнутых контуров, причем за контур принимается участок, либо ограниченный элементами рамы, либо элементами рамы и землей.

Для примера на рис. 10 изображена рама, число замкнутых контуров в которой равно трем (пронумеровано римскими цифрами), число простых шарниров равно восьми (кратность шарниров показана арабскими цифрами) и степень статической неопределимости конструкции по методу сил равна единице. Обратите внимание на то, что при пользовании последней формулой в

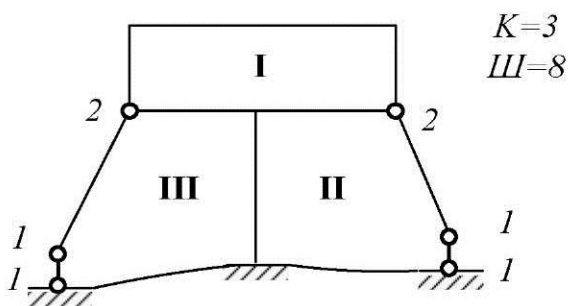


Рис. 10. Пример определения числа лишних связей системы

число шарниров включаются опорные шарниры, в то время как в первой формуле учитываются лишь те шарниры, которые связывают между собой диски.

Число лишних неизвестных можно определить также и путем отбрасывания лишних связей до тех пор, пока система не станет статически определимой. При этом необходимо следить, чтобы отбрасывание связей не нарушало геометрической неизменяемости системы.

Возможности для выбора основной системы неограниченны, но всегда следует останавливаться на такой основной системе, которая приводит к наиболее простому расчету. Внимательно изучите принципы выбора основной системы [1].

Выбор основной системы является важным этапом расчета, так как

удачная основная система часто позволяет значительно облегчить весь расчет. Однако для того чтобы научиться оценивать возможные основные системы, сначала надо изучить весь ход расчета. Поэтому вначале желательно просто попрактиковаться в выборе различных основных систем для одной и той же рамы (например, рис. 11 а, б).

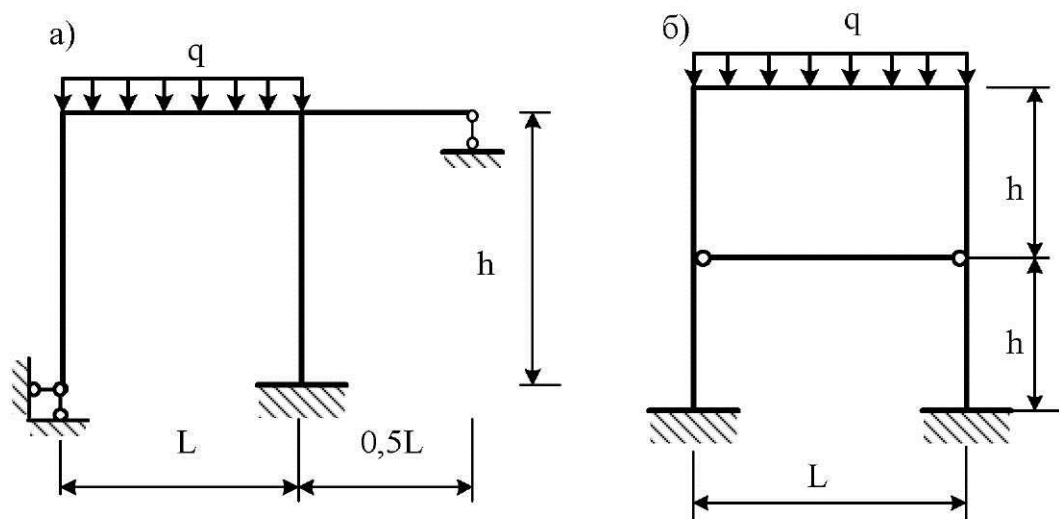


Рис. 11. Расчетные схемы статически неопределимых рам

Выбирая ту или иную основную систему, необходимо провести ее анализ, не допуская мгновенно изменяемых систем. На основной системе необходимо показывать лишние неизвестные.

При написании канонических уравнений метода сил важно добиться полного понимания их физического смысла и смысла каждого члена уравнения. Подсчет коэффициентов и свободных членов канонических уравнений производится по методу Мора с использованием способов «перемножения эпюр» – Верещагина или Симпсона, предусматривающих построение единичных и грузовых эпюр изгибающих моментов в основной системе. Построение этих эпюр требует особого внимания, так как именно здесь чаще всего отмечаются ошибки.

После подсчета коэффициентов и свободных членов уравнений необходимо произвести их проверку, что позволяет устранить возможные ошибки и избежать повторных расчетов. Проверять следует и решения системы канонических уравнений. Построение окончательной эпюры изгибающих моментов производится по формуле

$$M = M_F + M_1 + M_2 + M_3 + \dots + M_n,$$

где

$$M_1 = \bar{M}_1 x_1; \quad M_2 = \bar{M}_2 x_2; \quad M_3 = \bar{M}_3 x_3; \quad M_n = \bar{M}_n x_n.$$

Суммирование эпюр от неизвестных и эпюры от нагрузки производится по каждому участку (для эпюр, имеющих линейный характер, достаточно суммирование в двух сечениях, а криволинейных – трех). Место и величину экстремального значения момента можно, в случае необходимости, уточнить после построения эпюры поперечных сил, из которой легко установить то сечение, где момент достигает максимума (минимума).

Прежде чем переходить к построению эпюры поперечных сил, необходимо произвести проверку полученной эпюры моментов. Для метода сил особенно важно произвести кинематическую проверку.

Эпюры поперечных сил обычно строятся по эпюрам моментов на основе зависимости Журавского в виде:

$$Q = \frac{M_k - M_n}{l} \pm \frac{ql}{2},$$

где  $M_k, M_n$  – изгибающие моменты в начале и конце участка. Важно при этом знать правила знаков поперечных сил и моментов для балки, известные из курса сопротивления материалов.

Построение эпюры продольных сил производится по эпюре поперечных сил. После построения эпюр  $M, Q$  и  $N$  необходимо проверить равновесие рамы в целом.

#### *Вопросы для самопроверки*

1. Какая система является *статически неопределимой*?
2. Что такое *степень статической неопределимости* системы?
3. Перечислите *свойства статически неопределимой* системы.
4. *Канонические уравнения метода сил* – из каких условий получаются?
5. Запишите *каноническое уравнение метода сил* с одним неизвестным.
6. Запишите *канонические уравнения метода сил* с тремя неизвестными.
7. Как определяются *коэффициенты канонических уравнений  $\delta_{ij}$  метода сил*?
8. Как определяются *свободные члены  $\Delta_{iF}$  канонических уравнений метода сил*?
9. Обязательные требования к *основной системе метода сил* ?
10. Формула для построения *окончательной эпюры моментов*?
11. Формула для определения *поперечных сил (окончательных) через изгибающие моменты*?
12. Способ определения *продольных сил (окончательных)*?
13. Сущность *кинематической проверки* в методе сил?
14. Какова сущность *статической проверки* в методе сил?

15. Укажите основные *этапы расчета по методу сил?*
16. Порядок действий на этапе выбора *основной системы метода сил?*
17. Порядок действий на этапе построения *окончательных эпюр в методе сил?*
18. Порядок действий на этапе *проверочных расчетов в методе сил?*
19. Как определить *перемещения* в статически неопределимой системе?
20. К каким упрощениям ведет *учет симметрии* статически неопределимой системы?
21. Что такое *группировка неизвестных* в методе сил?
22. В чем преимущества и недостатки *статически неопределимых систем?*
23. Для рамы на рис. 12, после расчета, построена окончательная эпюра моментов. По данной эпюре постройте эпюру поперечных сил.
24. Для рамы на рис. 12, после построения эпюры поперечных сил, постройте эпюру поперечных сил.

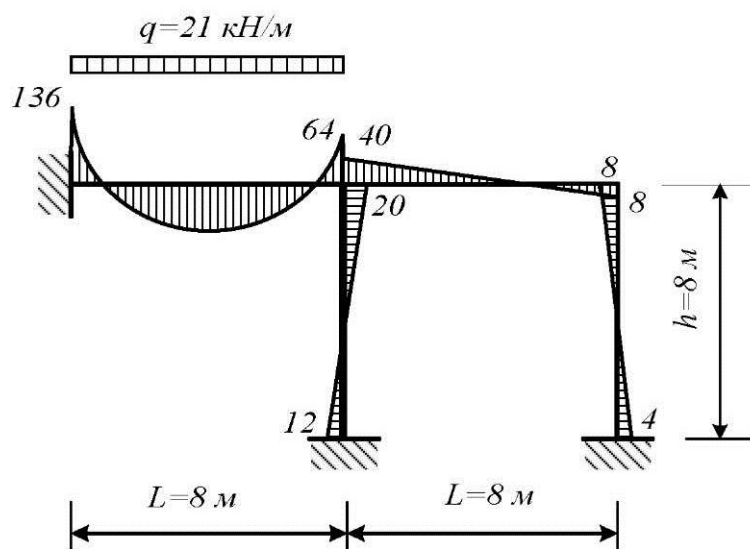


Рис. 12. Эпюра М (кНм)

## Тема 10. Особенности расчета статически неопределимых ферм методом сил\*

Литература: [2, § 159—163]; [3, § XII.1, XII.2].

В отличие от рам, для определения степени статической неопределимости фермы необходимо использовать зависимость между



числом стержней, узлов и опорных связей. При узловой нагрузке на ферму в ее стержнях возникают лишь продольные усилия. При выборе основной системы полезно использовать симметрию. Следует помнить, что в тех случаях, когда за лишнее неизвестное принято усилие в стержне фермы, стержень не выбрасывается, а разрезается и поэтому при определении главных коэффициентов следует включать слагаемое, учитывающее усилие в разрезанном стержне.

### *Вопросы для самопроверки*

1. Определите число лишних неизвестных в фермах, приведенных на рис. 13 а, б. Выберите варианты основных систем.

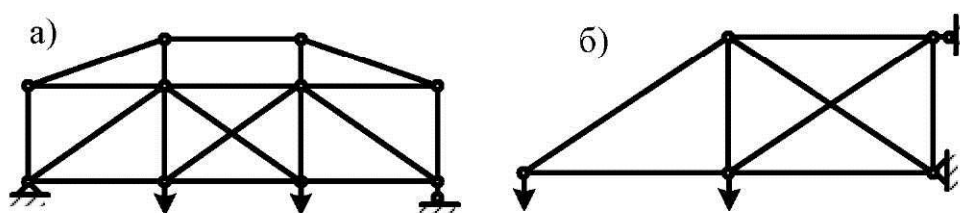


Рис. 13. Расчетные схемы ферм: а) балочная ферма,  
б) консольная ферма

2. Почему при узловой нагрузке на ферму перемещения определяются только через продольную силу?

### **Тема 11. Особенности расчета двухшарнирных и бесшарнирных арок методом сил.\***

Литература [2, §, 170—173]; [3, § XI.1-XI.3].

Особенностью расчета статически неопределимых арок является то, что поперечное сечение арки меняется по длине и эпюры криволинейны. Это влечет за собой неприменимость способа Верещагина и сложность, а порой и невозможность, непосредственного интегрирования формулы Мора. Поэтому интегрирование заменяется суммированием, с использованием правила Симпсона, предварительно ось арки разбивается на небольшие участки, в пределах которых поперечное сечение арки постоянно. Часто в арках необходимо учитывать продольную силу при определении перемещений, входящих в канонические уравнения.

### **Тема 12. Неразрезные балки\***

Литература: [2, § 144-152]; [3, § X.1—X.8].

Уравнения трех моментов для расчета неразрезных балок получены благодаря удачному выбору основной системы метода сил. При использовании этих уравнений очень важно помнить, при каком направлении опорных моментов они выведены. Без этого при решении задач нельзя будет правильно учесть знаки полученных неизвестных. Необходимо обратить внимание на использование уравнений трех моментов при наличии загруженной консоли и в случае заделки одного или обоих концов.

Расчет на временную нагрузку выполняется последовательным нагружением временной нагрузкой каждого пролета балки. При этом эпюры изгибающих моментов удобно строить с помощью способа моментных фокусных отношений.

Построенные в дальнейшем объемлющие эпюры изгибающих моментов и поперечных сил характеризуют расчетное сочетание действий постоянной и временных нагрузок.

#### *Вопросы для самопроверки*

1. Какую балку мы называем неразрезной?
2. Как выбирается основная система при расчете неразрезных балок с помощью уравнения трех моментов.
3. Составьте уравнение трех моментов для балки, на рис. 14.
4. Постройте эпюры  $M$  и  $Q$  для балки, показанной на рис. 14.

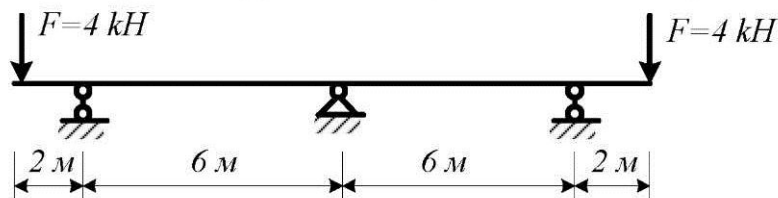


Рис. 14. Неразрезная балка

### **Тема 13. Расчет статически неопределимых систем методом перемещений\***

Литература: [1, § 7.1—7.11]; [2, § 190-197]; [3, § XIII.1-XIII.6].

В отличие от метода сил, где за неизвестные принимаются усилия в лишних связях, в методе перемещений за неизвестные принимаются перемещения – повороты жестких узлов рамы и их линейные смещения. Если в методе сил основная система создавалась путем отбрасывания лишних связей, то в методе перемещений основная система получается путем наложения на систему дополнительных связей (заделок и опорных стержней) с тем, чтобы каждый элемент рамы обратить в однопролетную несмещаемую балку.

Нужно твердо усвоить идею метода перемещений, смысл основной системы и правила определения степени угловой и линейной подвижности рамы (степени кинематической неопределимости). Следует обратить внимание на физический смысл канонических уравнений метода перемещений, на смысл коэффициентов и свободных членов. Число лишних неизвестных по методу сил и методу перемещений в общем случае различно.

Построение единичных и грузовых эпюр изгибающих моментов в основной системе производится по специальным таблицам[1]. В единичных эпюрах, построенных в основной системе от единичных поворотов узлов или единичных смещений, и в грузовых эпюрах отсутствует равновесие узлов.

При определении коэффициентов и свободных членов канонических уравнений следует обращать внимание на знаки побочных коэффициентов. Большое практическое значение при решении задач имеет проверка полученных значений коэффициентов и свободных членов. В методе перемещений проводятся обычно две проверки окончательной эпюры моментов: статическая и кинематическая. В окончательной эпюре изгибающих моментов равновесие узлов должно соблюдаться. Однако это гарантирует лишь правильность решения системы канонических уравнений. Окончательно правильность расчета подтверждает выполненная еще кинематическая проверка. Для этого окончательная эпюра моментов умножается на единичную эпюру моментов, построенную от любого лишнего неизвестного метода сил в основной системе метода сил. В результате полученное перемещение должно быть равно нулю.

Расчет симметричных рам сильно упрощается, если применить группировку неизвестных.

#### *Вопросы для самопроверки*

1. Какова основная идея **метода перемещений**?
2. Какие величины являются **неизвестными** в методе перемещений?
3. Как определить **число неизвестных** в методе перемещений?
4. Из каких условий выводятся **канонические уравнения** метода перемещений?
5. Как определить коэффициенты **канонических уравнений** метода перемещений?
6. В чем заключается **статический способ** определения коэффициентов канонических уравнений метода перемещений?
7. В чем заключается **кинематический способ** определения коэффициентов канонических уравнений метода перемещений?
8. Запишите **канонические уравнения** метода перемещений с двумя неизвестными.
9. Выберите основную систему для рам, на рис. 15, *а, б, в*. Подсчитайте

количество неизвестных метода сил и перемещений.

10. Укажите все промежуточные и окончательные проверки, применяемые в методе перемещений.

11. Как используется теорема о взаимности реакций в методе перемещений

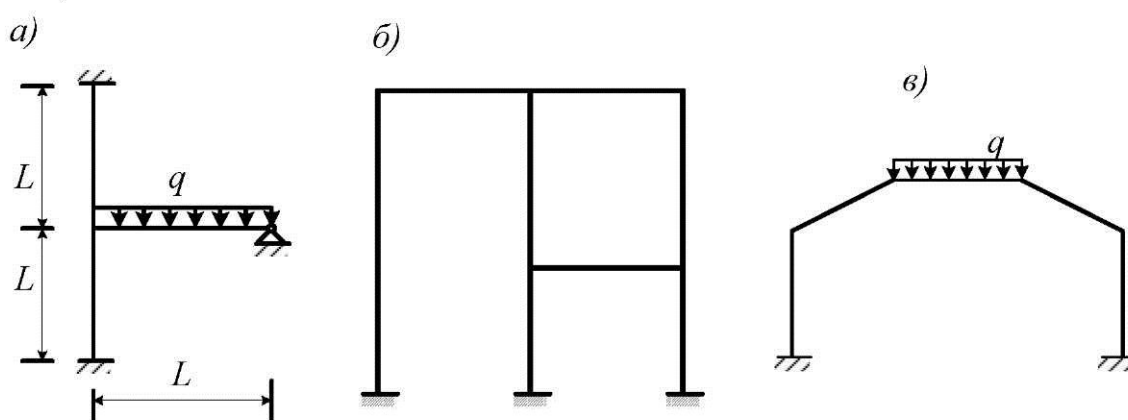


Рис. 15. Расчетные схемы для расчета рам методом перемещений

#### 14. Понятия о комбинированном и смешанном методах расчета статически неопределимых рам.\*

Литература: [1, § 7.12—7.13]; [2, § 206—209]; [3, § XIV.1-XIV.3].

Весьма эффективными являются комбинированный и смешанный методы расчета статически неопределимых рам.

Комбинированный метод целесообразно использовать при расчете симметричных рам. Сущность метода заключается в том, что, произведя разложение нагрузки на симметричную и кососимметричную, расчет выполняется отдельно: на симметричную нагрузку по методу перемещений; на кососимметричную нагрузку по методу сил. При этом учитывается то, что если основная система симметрична, то при симметричной нагрузке кососимметричные неизвестные обращаются в нуль, а при кососимметричной нагрузке – симметричные неизвестные обращаются в нуль. Суммируя эпюры изгибающих моментов от симметричного и кососимметричного нагружения получим окончательную эпюру моментов от заданной нагрузки.

Смешанный метод расчета статически неопределимых рам основан на удачном сочетании преимуществ метода сил для одной части рамы и метода перемещений для другой. При изучении смешанного метода важно усвоить схему определения коэффициентов канонических уравнений, а также использовать теоремы о взаимности реакций и перемещений.

## Вопросы для самопроверки

1. В чем заключается преимущество *группировки неизвестных* при расчете симметричных рам?
2. В каком случае целесообразно использовать *комбинированный метод расчета рам*?
3. В каком случае целесообразно использовать *смешанный метод расчета рам*?
4. Сформулируйте *теорему о взаимности реакций и перемещений*.
5. Выберите *рациональный метод расчета* и покажите основную систему для рам, изображенных на рис. 16.

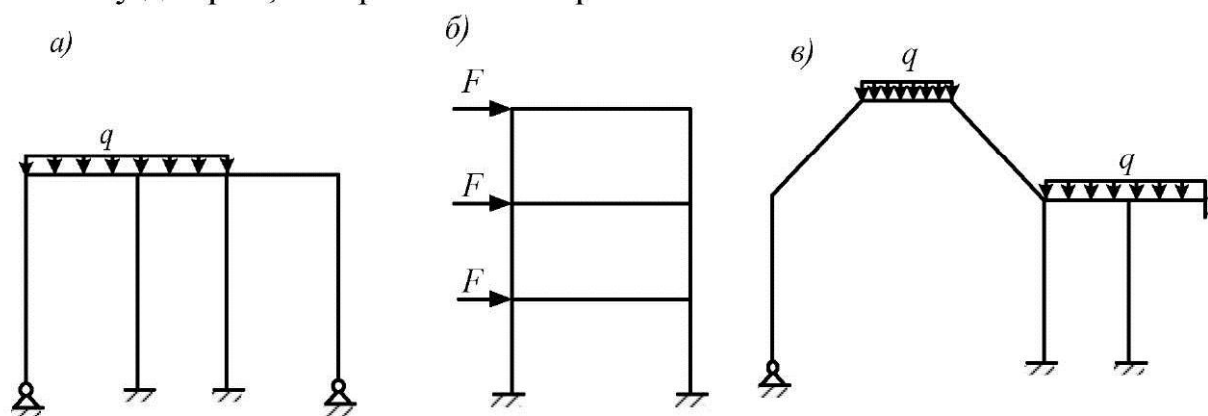


Рис. 16. Схемы рам для выбора рационального метода расчета

## 15. Метод конечных элементов

Литература: [1, § 11.1—11.8]; [3, § 235—242]; [9], [10], [11], [12], [13], [14].

В настоящее время *метод конечных элементов* (МКЭ) является основным и самым распространенным современным численным методом, предназначенным для расчета инженерных конструкций и сооружений. Метод конечных элементов основан на представлении реальной конструкции такой расчетной схемой, для которой решение задачи сводится к решению системы алгебраических уравнений при заданных начальных и граничных условиях. МКЭ позволяет вести расчет не только стержневых систем, но и пластин, оболочек, объемных (массивных) тел.

Суть МКЭ заключается в том, что заданная система разбивается на отдельные элементы конечных размеров, называемые *конечными элементами* (КЭ). Сам процесс разбивки называется *дискретизацией*. В зависимости от типа конструкции и характера ее деформации КЭ могут иметь различную форму. Так, при расчете стержневых систем: фермы, балки, рамы – конечные элементы представляют собой участки стержней. Для двумерных конструкций (пластины, плиты, оболочки) чаще всего применяют треугольные и прямоугольные (плоские и изогнутые) КЭ, а для

трехмерных сооружений (основания, массивы) – КЭ в форме тетраэдра или параллелепипеда.

В отличие от реального сооружения в дискретной модели конечные элементы связываются между собой только в отдельных точках (*узлах*) определенным конечным числом узловых параметров. Элементы объединяются в заданную систему на основе условий равновесия и равенства деформаций и перемещений в этих узлах.

Таким образом, в методе конечных элементов непрерывная система условно заменяется системой с конечным числом определяемых параметров (*степеней свободы*), в которой внимание сосредоточено на анализе сил и перемещений узловых точек системы.

Наибольшее распространение получил метод конечных элементов в форме метода перемещений, в котором за узловые неизвестные принимаются перемещения (и возможно производные от перемещений) в узлах дискретной схемы.

Число узлов и число перемещений в узле (степень свободы узла), принятые для конечного элемента, могут быть различными, однако не должны быть меньше минимально необходимых для описания напряженно-деформированного состояния КЭ в рамках принятой физической модели. Число независимых перемещений во всех узлах элемента определяет степень свободы КЭ. Степень свободы всей конструкции и соответственно порядок системы разрешающих уравнений определяется суммарным числом перемещений всех ее узлов. Поскольку основными неизвестными МКЭ в форме метода перемещений считаются узловые перемещения, степень свободы КЭ и всей конструкции в целом является чрезвычайно важным понятием в МКЭ. Понятия о степени свободы узла, КЭ и конструкции и степени их же *кинематической неопределимости* идентичны.

По сравнению с другими численными методами МКЭ в лучшей степени алгоритмизирован и более гибок при описании геометрии и граничных условий рассматриваемой задачи. Кроме того, к достоинствам метода следует отнести его физическую наглядность и универсальность.

Применительно к стержневым системам МКЭ в форме метода перемещений может рассматриваться как матричная форма классического метода перемещений, отличающаяся только более глубокой формализацией алгоритма и ориентацией его на использование ЭВМ.

### *Вопросы для самопроверки*

1. Перечислите основные *современные численные методы расчета конструкций*.
2. В чем суть (основная идея) *метода конечных элементов*?
3. Что такое *дискретизация* расчетной области конструкции при расчете МКЭ?

4. В чем суть *дискретной модели* рассчитываемой конструкции по МКЭ?

5. Перечислите основные шаги общего алгоритма статического расчета по МКЭ?

### 3. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

#### *Общие указания о порядке выполнения контрольных работ*

Количество контрольных работ для студентов различных специальностей, установленное учебным планом, и состав каждой работы выбираются в соответствии с таблицей 1

Таблица 1.

Количество контрольных работ	Номера задач, входящих в контрольные работы	
	Контрольная работа № 1	Контрольная работа № 2
1	1, 3, 4	
2	1, 2, 3	4

**Примечание.** В случае изменения учебных планов кафедра имеет право вносить изменения в перечень задач к контрольным работам.

Исходные данные для решения задач выбираются студентом из таблиц вариантов (№ 1 – 0) в соответствии с его личным учебным шифром (номером зачетной книжки). Шифром считаются три последние цифры, например если номер зачетной книжки ПГС-060441752, то учебным шифром будет 752. Каждая таблица вариантов разделена на три части. Для получения исходных данных надо выписать из таблицы три строчки: одну, отвечающую первой цифре шифра; вторую, отвечающую второй (средней) цифре, и третью, отвечающую последней – третьей цифре шифра.

Например, для номера зачетной книжки ПГС-060441752 при решении первой задачи «Расчет статически определимой многопролетной балки», согласно табл. 2, получим следующие исходные данные:  $a = 3,4$  м;  $q = 2,6$  кН/м;  $F = 22$  кН;  $M = 12$  кНм; номер схемы (по рис.13) – 2.

### **Работы, выполненные не по шифру, не проверяются.**

Основной формой изучения курса строительной механики для студентов-заочников является самостоятельная работа с учебниками и учебными пособиями. Прежде чем приступить к выполнению работы необходимо изучить соответствующий раздел курса и решение рекомендованных задач. При несамостоятельном выполнении студентом контрольных работ, студент оказывается не подготовленным к защите контрольной работы и к экзамену.

Контрольная работа должна выполняться в тетради с размещением на ней всех чертежей и необходимых расчетов. Можно выполнять контрольные работы и на миллиметровке. Для более удачного размещения чертежей и расчетов рекомендуется использовать масштаб от 1 : 200 до 1 : 100 (в зависимости от общих размеров схемы).

Перед решением каждой задачи необходимо вычертить заданную схему и указать на ней все размеры и нагрузки. Решение задачи должно сопровождаться краткими, последовательными пояснениями, четкими схемами со всеми размерами. Надо помнить, что язык техники – формулы и чертежи. На эпюрах и линиях влияния должны быть проставлены значения всех характерных ординат и размерности.

На титульном листе пояснительной записки, указывается: фамилия и инициалы студента, факультет, специальность, номер зачетной книжки (учебный шифр), а также год издания используемых методических указаний.

Получив после рецензирования (очного или заочного) контрольную работу, студент обязан выполнить все указанные преподавателем исправления и дополнения, даже если работа зачтена. В случае, если работа отправлена на доработку и исправления, то необходимо внести требуемые исправления на том же листе (если позволяет место) или на отдельном и представить всю работу целиком на повторную рецензию. Нельзя стирать или заклеивать отмеченные преподавателем ошибки.

### **Задача 1.**

#### **Расчет многопролетной статически определимой балки**

Задание. Для балки, выбранной согласно варианту (рис. 17), требуется:

- а) построить эпюры  $M$  и  $Q$  (аналитически);
- б) построить линии влияния  $M$  и  $Q$  для заданного сечения, а также линию влияния одной опорной реакции  $R$  (по выбору студента);
- в) определить по линиям влияния значения  $M$ ,  $Q$  и  $R$  от заданной



нагрузки;

г) определить прогиб и угол поворота заданного сечения балки.

Исходные данные выбираются в соответствии с шифром из табл. 2.

Таблица 2

Первая цифра шифра	$a$ , м	Вторая цифра шифра	$q$ , кН/м	$F$ , кН	$M$ , кНм.	Последняя цифра шифра	номер схемы балки
1	3,2	1	1,2	10	18	1	1
2	3,8	2	2,0	12	20	2	2
3	4,2	3	1,8	16	24	3	3
4	4,6	4	2,4	24	10	4	4
5	4,8	5	2,6	22	12	5	5
6	4,5	6	1,4	20	8	6	6
7	3,4	7	1,5	15	14	7	7
8	2,8	8	1,6	18	22	8	8
9	3,0	9	2,0	14	25	9	9
0	2,6	0	2,5	25	16	0	0

### ***Методические указания к выполнению расчета многопролетной статически определимой балки***

Решению задачи должно предшествовать изучение тем: «Введение и основные понятия строительной механики», «Кинематический анализ сооружений», «Методы определения усилий от подвижной нагрузки», «Многопролетные статически определимые балки», а также повторение правил построения и проверки эпюр  $M$  и  $Q$  из курса сопротивления материалов.

Для построения эпюр  $M$  и  $Q$  удобнее пользоваться схемой взаимодействия («поэтажной» схемой), которую следует расположить непосредственно под схемой заданной балки. При построении «поэтажной» схемы нужно вначале выделить основные балки, что легко делается мысленным удалением шарниров, соединяющих балки между собой. Те балки, которые окажутся способными самостоятельно нести нагрузку (защемленные или имеющие две наземные опоры), будут основными. Вспомогательные балки имеют только одну наземную опору или не имеют их вовсе. Недостающими опорами для них служат соединительные шарниры.

После построения «поэтажной» схемы заданную балку можно рассматривать как ряд простых балок. Особенность задачи заключается в том, что для расчета нижележащих балок необходимо знать силы взаимодействия в шарнирах, которые являются опорными реакциями для

вышележащих балок и нагрузкой для нижележащих. Для расчета схемы каждой отдельной балки должны быть вычерчены отдельно, а эпюры  $M$  и  $Q$  можно строить на общей базе под «поэтажной» схемой.

Ординаты эпюры моментов откладываются со стороны растянутых волокон (положительные вниз от оси). При построении эпюры поперечных сил положительные ординаты откладываются вверх и на эпюрах обязательно проставляются знаки.

Для построения линий влияния следует вычертить еще раз «поэтажную» схему, но уже без нагрузки. Обычно линии влияния строятся в два этапа. На первом этапе строится линия влияния искомого усилия в пределах той отдельной балки, к которой относится исследуемое сечение (или опора). На втором этапе добавляется продолжение линии влияния, обусловленное взаимодействием отдельных балок.

Определению прогибов и углов поворота заданных сечений должно предшествовать изучение темы 8. Все перемещения следует определять по формуле Мора с использованием правила Верещагина или Симпсона. Построение единичных эпюр моментов следует сопровождать расчетами. Грузовую и единичные эпюры изгибающих моментов при «умножении» рекомендуется делить на части таким образом, чтобы в пределах каждого участка «умножения» закон изменения изгибающего момента был постоянен.

Все расчеты должны сопровождаться необходимыми расчетными формулами, в общем и численном виде.

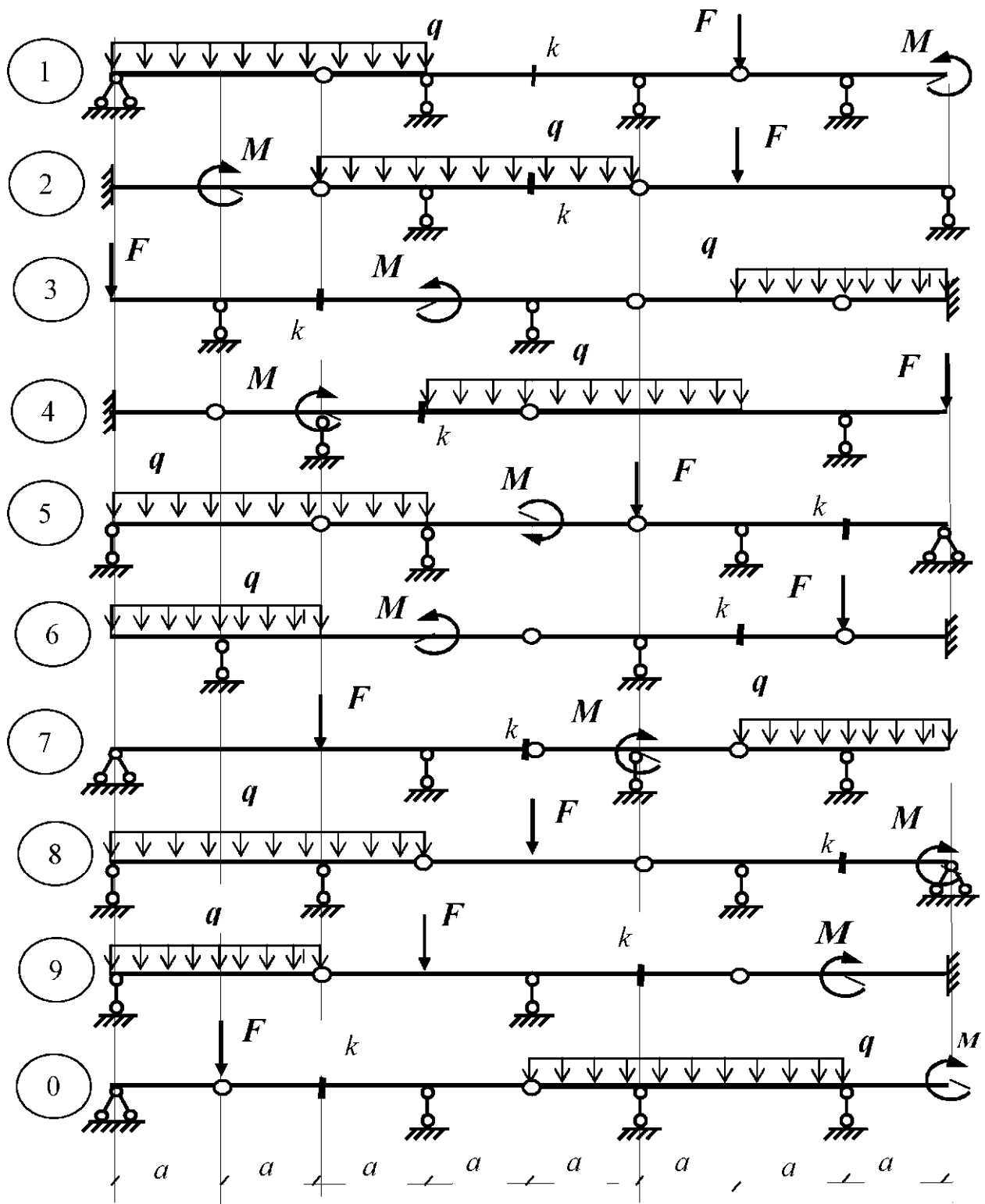


Рис. 17. Варианты схем к расчету статически определимой многопролетной балки

## Задача 2.

### Расчет трехшарнирной арки или трехшарнирной рамы

Задание. Для заданной трехшарнирной арки или рамы (рис. 18) с заданными исходными данными требуется:

- 1) построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил и подобрать размеры прямоугольного поперечного сечения из условия прочности по нормальным напряжениям с соотношением  $b/h$  согласно шифру;
  - 2) в опасном сечении (установленном в пункте 1) построить линии влияния изгибающих моментов, поперечных и продольных сил.
  - 3) При помощи линий влияния определить внутренние усилия в опасном сечении и сравнить с результатами расчета в п.1).
- Исходные данные, согласно шифру, выбираются по табл.3.

Таблица 3.

Первая цифра шифра	$q_1$ , кН/м	$q_2$ , кН/м	$F_1$ , кН	$F_2$ , кН	$F_3$ , кН	$F_4$ , кН	Вторая цифра шифра	$l$ , м	$f$ , м	$b/h$	Последняя цифра шифра	номер схемы арки
1	0	3,2	10	0	0	0	1	12	4	0,5	1	1
2	3,8	0	0	0	0	12	2	24	12	0,3	2	2
3	0	4,2	0	16	0	0	3	18	6	0,4	3	3
4	4,6	0	0	0	24	0	4	27	10	0,6	4	4
5	0	4,8	22	0	0	0	5	12	4	0,5	5	1
6	4,5	0	0	0	0	20	6	9	3	0,6	6	2
7	0	3,4	15	0	0	0	7	15	5	0,4	7	3
8	2,8	0	0	0	18	0	8	18	6	0,5	8	4
9	0	3,0	0	14	0	0	9	24	12	0,4	9	1
0	2,6	0	0	0	25	0	0	12	6	0,6	0	2

### *Методические указания к расчету трехшарнирной арки или трехшарнирной рамы*

Решению задачи должно предшествовать изучение темы 6. Схему арки надо вычертить, определив по уравнению ее оси достаточное число точек (не менее шести, включая замковый шарнир) и проведя через них плавную кривую. На схему надо нанести все заданные размеры и нагрузку. Для отмеченных сечений надо вычислить координаты и, кроме того,

значения синусов и косинусов углов наклона касательных и составить таблицу геометрических характеристик.

Ординаты точек оси арки и углы наклона касательных определяются по следующим уравнениям:

а) при очертании оси по параболе

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x); \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx};$$

б) при очертании оси по окружности

$$y = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2} - x\right)^2} - R + f,$$

где:

$$R = \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f}; \quad \sin \varphi = \frac{l-2x}{2R} \quad \cos \varphi = \frac{y+R-f}{R}.$$

Для трехшарнирных рам ординаты и необходимые углы наклона определяются непосредственно из чертежа.

Вычисление значений опорных реакций, моментов, поперечных и продольных сил в заданных точках надо иллюстрировать необходимыми формулами.

Опасным принято называть сечение, в котором напряжения достигает наибольших (наименьших) значений. Напряжения определяются по формулам внецентренного сжатия

$$\sigma_{\min}^{\max} = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W}.$$

В формуле для определения напряжений  $A$  – площадь поперечного сечения арки или рамы, а  $W$  – осевой момент сопротивления сечения.

Следовательно, положение "опасного" сечения определяется комбинацией  $M$ ,  $N$  и находится по соответствующим эпюрам. Для "опасных" сечений требуется построить эпюры нормальных напряжений. При этом сечение принимается постоянным по длине арки и является прямоугольным с отношением  $b/h$  согласно таблице 3.

Выбрав "опасное" сечение "К", необходимо построить линии влияния  $M_k$ ,  $Q_k$  и  $N_k$ . Для построения линий влияния  $M_k$ ,  $Q_k$  и  $N_k$  надо сначала построить линию влияния распора и подсчитать значение ее характерной ординаты. На окончательных линиях влияния должны быть проставлены числовые значения всех характерных ординат, определение которых должно быть приведено в расчете.

Линии влияния надо строить под схемой арки (рамы) в том же линейном масштабе. Загрузив линии влияния заданной нагрузкой, найти величину усилий в опасном сечении и составить таблицу сравнения результатов пунктов 1 и 3.

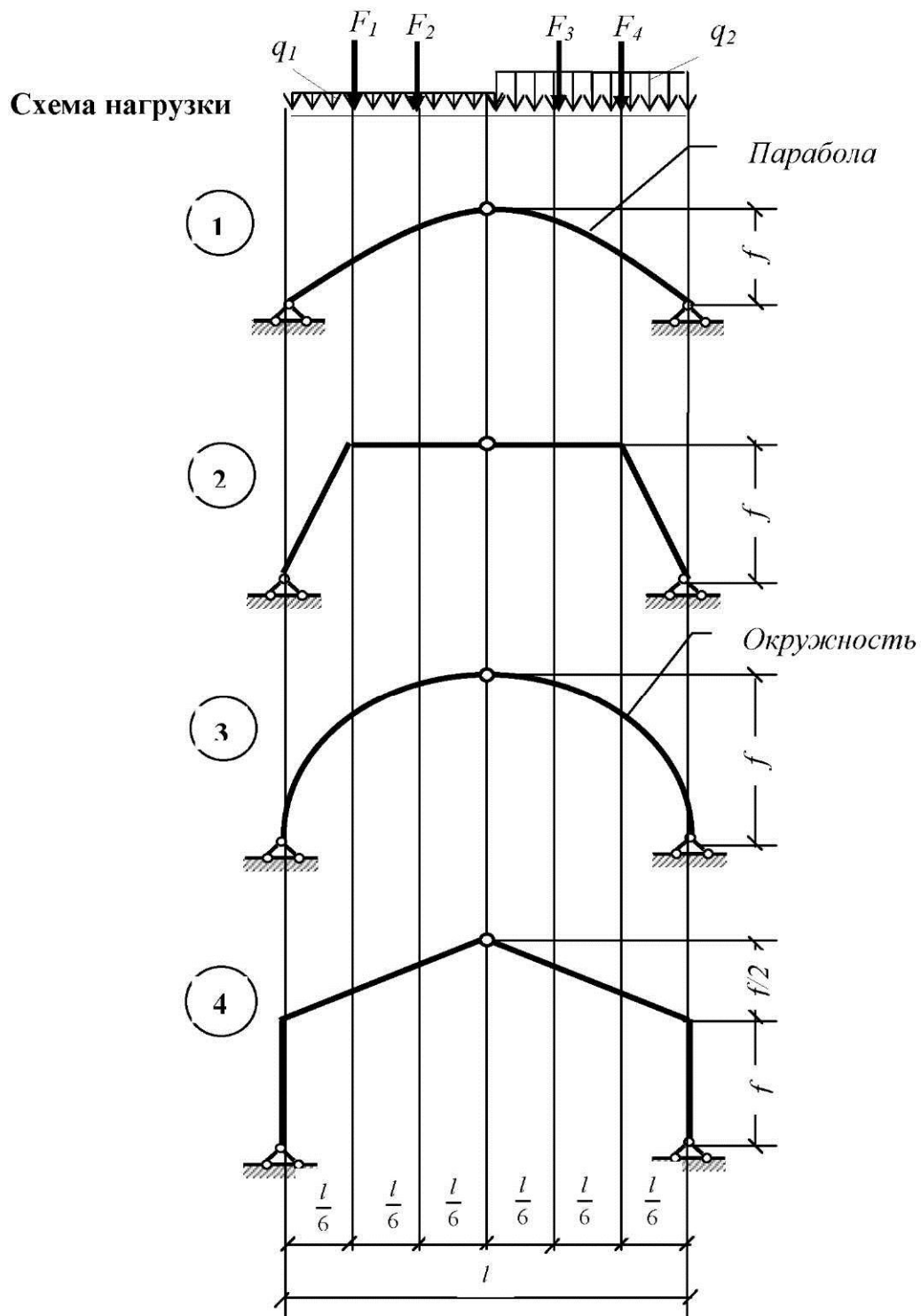


Рис. 18. Расчетные схемы распорных систем и схема нагрузок для задачи № 2

### Задача 3

#### Расчет плоской статически определимой фермы

Для простой плоской фермы (рис. 19)\*, нагруженной в узлах верхнего пояса сосредоточенными силами  $F$  с выбранными из табл. 4 исходными данными требуется:

- определить (аналитически) усилия в стержнях заданной панели, включая правую стойку (4 стержня);
- построить линии влияния усилий в тех же стержнях;
- по линиям влияния подсчитать значения усилий от заданной нагрузки и сравнить со значениями, полученными аналитически.

Для плоской шпренгельной фермы (рис. 20)\*\* нагруженной постоянной нагрузкой  $F$  в узлах пояса, отмеченного пунктиром, с выбранными по шифру из таблицы 4а размерами, требуется:

- определить (аналитически) усилия в стержнях заданной панели, включая правую стойку (4 стержня);
- построить линии влияния усилий в тех же стержнях;
- установить наиболее опасное положение временной нагрузки для каждого стержня заданной панели отдельно и найти величины максимальных и минимальных усилий;
- определить максимальные и минимальные значения расчетных усилий во всех стержнях заданной панели (с учетом постоянной нагрузки).

#### Примечания:

\* Для всех специальностей, исключая МТ.

\*\* Для специальности МТ.

Таблица 4

Первая цифра шифра	$l$ , м	$F$ , кН	Вторая цифра шифра	№ панели (считая слева)	Последняя цифра шифра (№ схемы)	$h$ , м
1	30	1.8	1	2	1	3.0
2	28	1.5	2	3	2	5.5
3	27	1.2	3	4	3	3.5
4	24	1.0	4	5	4	4.0
5	21	1.9	5	2	5	6.0
6	18	2.0	6	3	6	4.2
7	32	1.1	7	4	7	4.6
8	33	1.3	8	5	8	4.5
9	22	1.4	9	2	9	5.0
0	23	1.6	0	3	0	4.4

Таблица 4а

Первая цифра шифра	$d$ , м	Постоянная нагрузка $F$ , кН	Вторая цифра шифра	№ панели (считая слева)	$h$ , м	Последняя цифра шифра (№ схемы)	Временная нагрузка $F_{вр}$ , кН
1	3,0	12,0	1	2	3,2	1	16,0
2	3,5	12,5	2	3	4,0	2	17,0
3	4,0	13,0	3	4	3,8	3	18,0
4	4,5	13,5	4	5	3,3	4	18,5
5	3,6	11,5	5	2	3,6	5	17,5
6	4,2	11,0	6	3	3,0	6	19,0
7	2,7	20,0	7	4	4,2	7	20,0
8	3,2	19,0	8	5	4,1	8	22,5
9	3,3	18,0	9	2	3,7	9	24,0
0	3,4	17,5	0	3	3,5	0	23,0

**Методические указания  
к расчету плоской статически определимой фермы**

Решению задачи должно предшествовать изучение темы 7. По условию задачи требуется определить усилия не во всех стержнях фермы, а только в стержнях заданной панели. В этом случае удобно воспользоваться способом сквозных сечений.

Сущность способа состоит в следующем: ферму рассекают на две части таким образом, чтобы в разрез попало не более трех стержней с неизвестными усилиями; одну из частей мысленно отбрасывают, а ее действие на оставшуюся заменяют усилиями. Затем составляют уравнения моментов относительно моментных точек, (находящихся на пересечении двух из трех стержней), или уравнения проекций, если два из пересекаемых стержней параллельны. Таким образом, можно получить три уравнения и в каждом будет по одному неизвестному.

Особенность расчета шпренгельных ферм является то, что для некоторых стержней нельзя провести удачного сечения (пересекающего не более трех стержней). В связи с этим появляется необходимость переходить к схеме взаимодействия шпренгеля с основной решеткой. Для этого необходимо предварительно выделить основную и дополнительную решетки и установить схемы их взаимодействия с основной решеткой, т.е.



схемы передачи нагрузки со шпренгелей в узлы основной фермы.

Для успешного расчленения заданной фермы на основную и шпренгель необходимо твердо усвоить типы шпренгелей. Более подробно см, например [1].

Следует иметь в виду, что в большинстве случаев (для всех заданных ферм) усилия в элементах, входящих и в шпренгель и в основную решетку удается определить, рассматривая непосредственно заданную ферму. В связи с этим рекомендуется сначала рассмотреть заданную схему и найти все усилия, для которых возможно провести удачное сечение.

Остальные усилия определяются из рассмотрения только шпренгеля или только основной решетки. При этом в работе обязательно нужно приводить схемы шпренгеля и основной решетки отдельно с указанием узловой нагрузки, полученной в результате передачи местной нагрузки со шпренгеля в узлы основной решетки.

Производя определение усилий, надо приводить все схемы, разрезы и указывать все величины, входящие в расчетные формулы. Геометрические характеристики (плечи, углы и пр.) должны быть определены аналитически, а не графически.

Построение линий влияния усилий в стержнях ферм начинают с построения линий влияния опорных реакций. Для балочных ферм, эти линии влияния имеет такой же вид, как и линии влияния опорных реакций балок того же пролета. Затем груз  $F = 1$  устанавливается в произвольном узле фермы по одну сторону от сечения (например, *слева*). Для определения усилия составляется уравнение равновесия правой отсеченной части фермы, которое является аналитическим выражением *левой* ветви линии влияния.

При составлении уравнений статики используются те же способы, что и для определения усилий от неподвижной нагрузки. Обычно требуется две последовательные установки силы  $F = 1$  – слева и справа от сечения. Поскольку в ферме нагрузка прикладывается только в узлах, то в пределах рассеченной панели левую и правую ветвь линии влияния следует соединить прямой.

При построении линий влияния в шпренгельной ферме, схемы фермы (заданная, основная и шпренгель) должны быть вычерчены заново, без нагрузки. Должны быть приведены все сечения и расчеты, а на полученных линиях влияния должны быть проставлены числовые значения ординат под каждым узлом фермы.

Максимальное расчетное усилие определяется суммой усилий от постоянной нагрузки и максимального усилия от временной нагрузки. Минимальное расчетное усилие равно сумме усилия от постоянной нагрузки и минимального усилия от временной нагрузки. Максимальные и минимальные расчетные усилия должны быть определены для всех восьми стержней и сведены в таблицу.

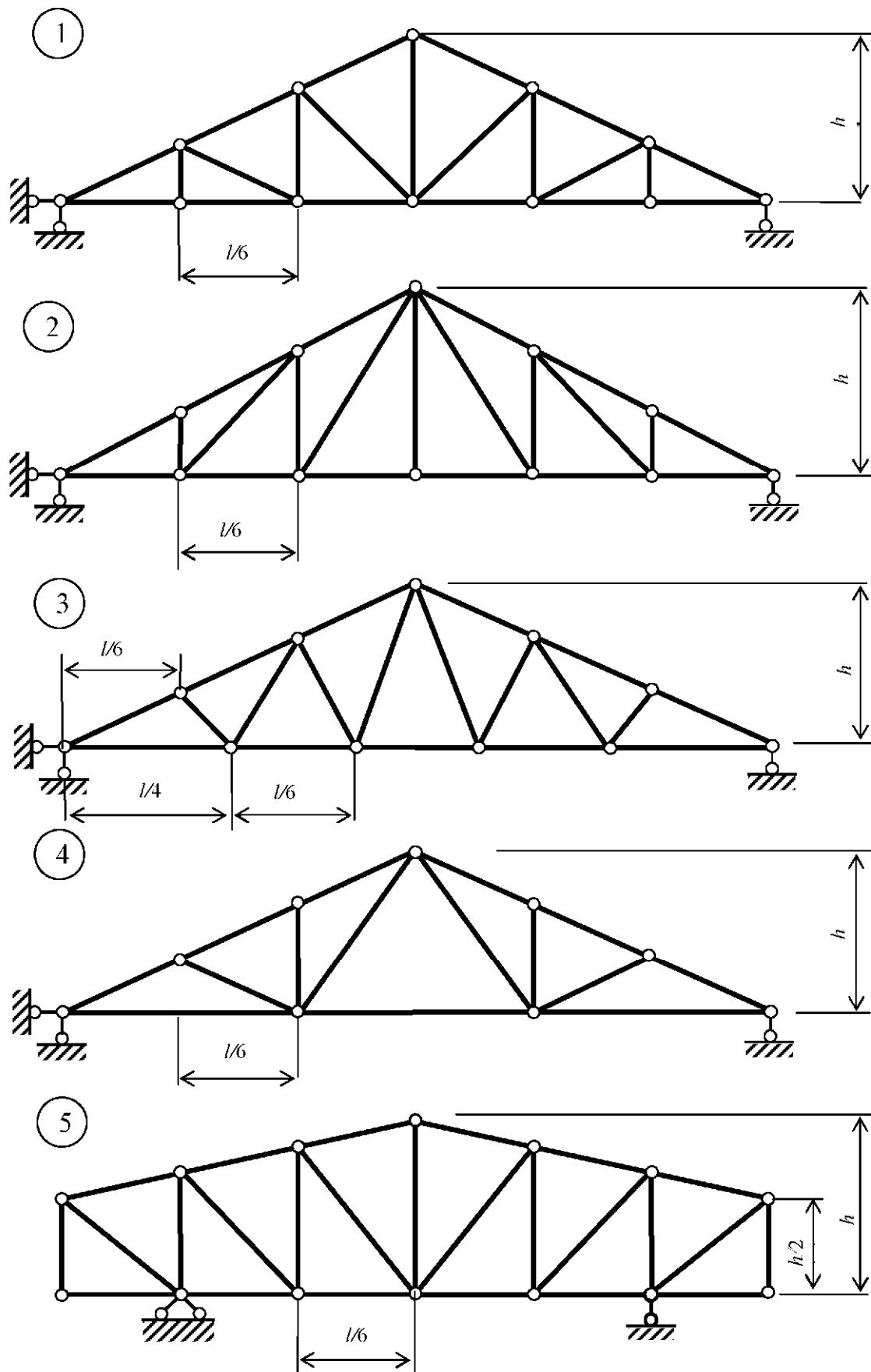


Рис. 19. Расчетные схемы 1-5 простых ферм

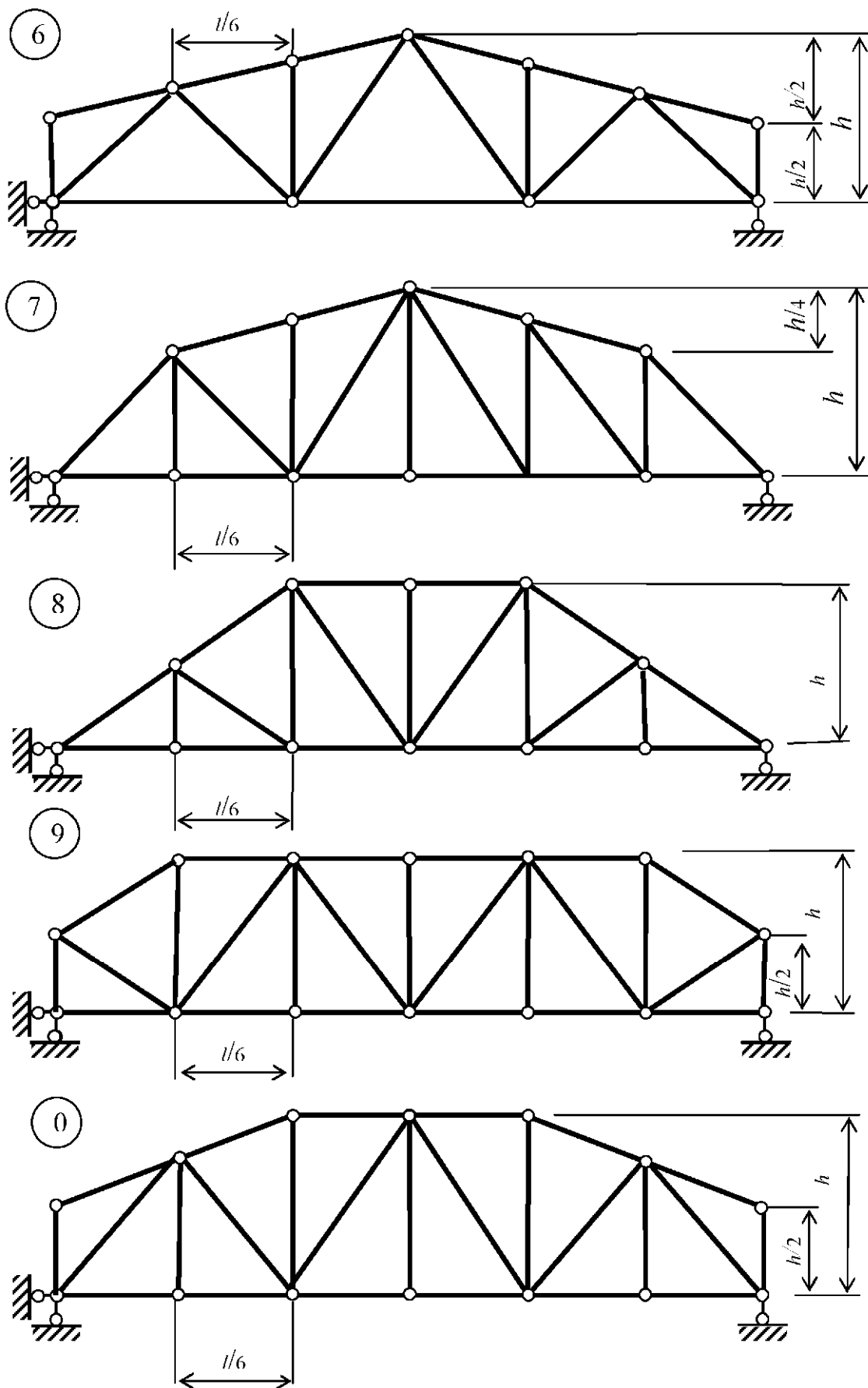


Рис. 19 (окончание). Расчетные схемы 6-0 простых ферм

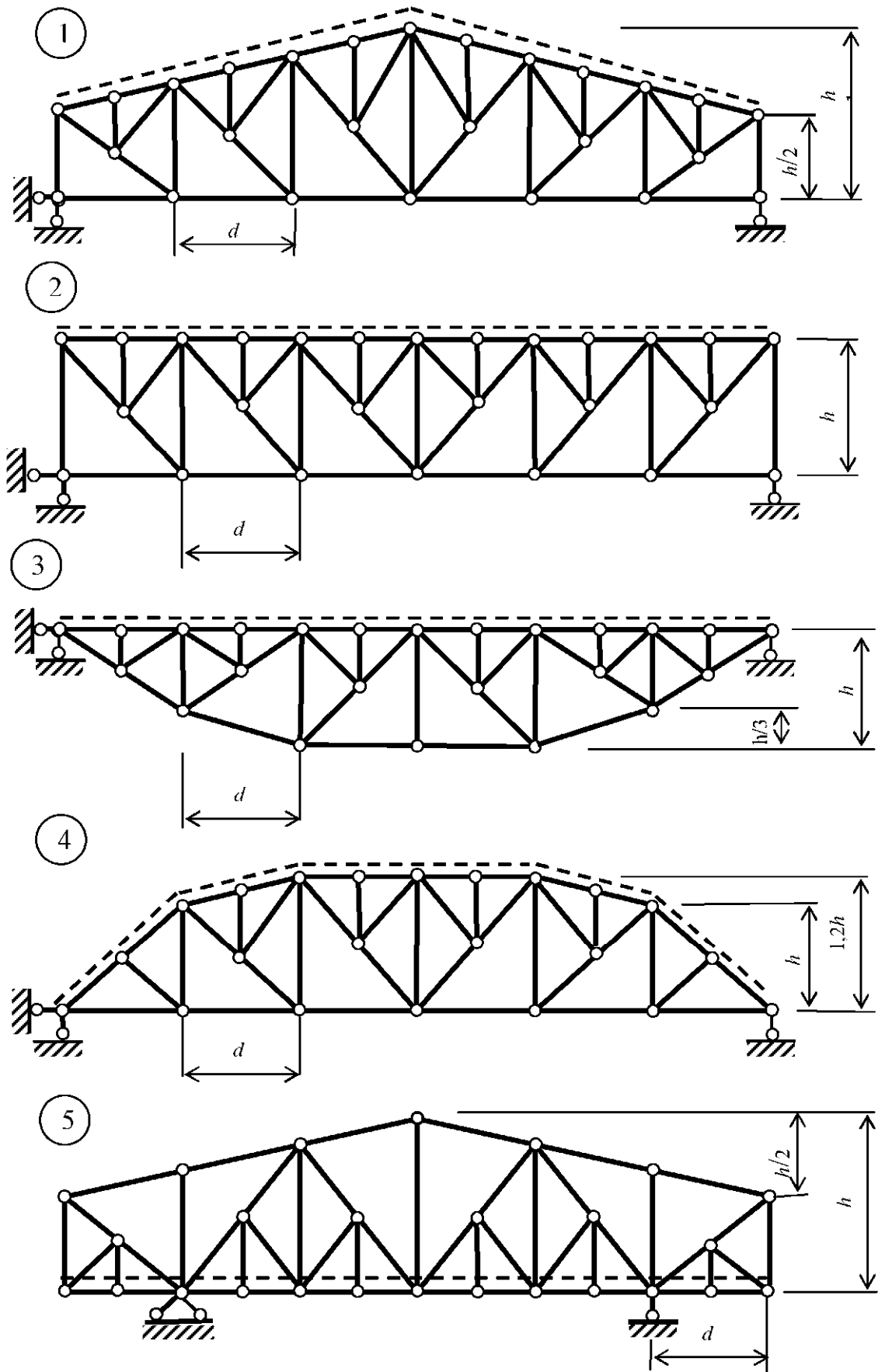


Рис.20. Расчетные схемы 1-5 шпренгельных ферм

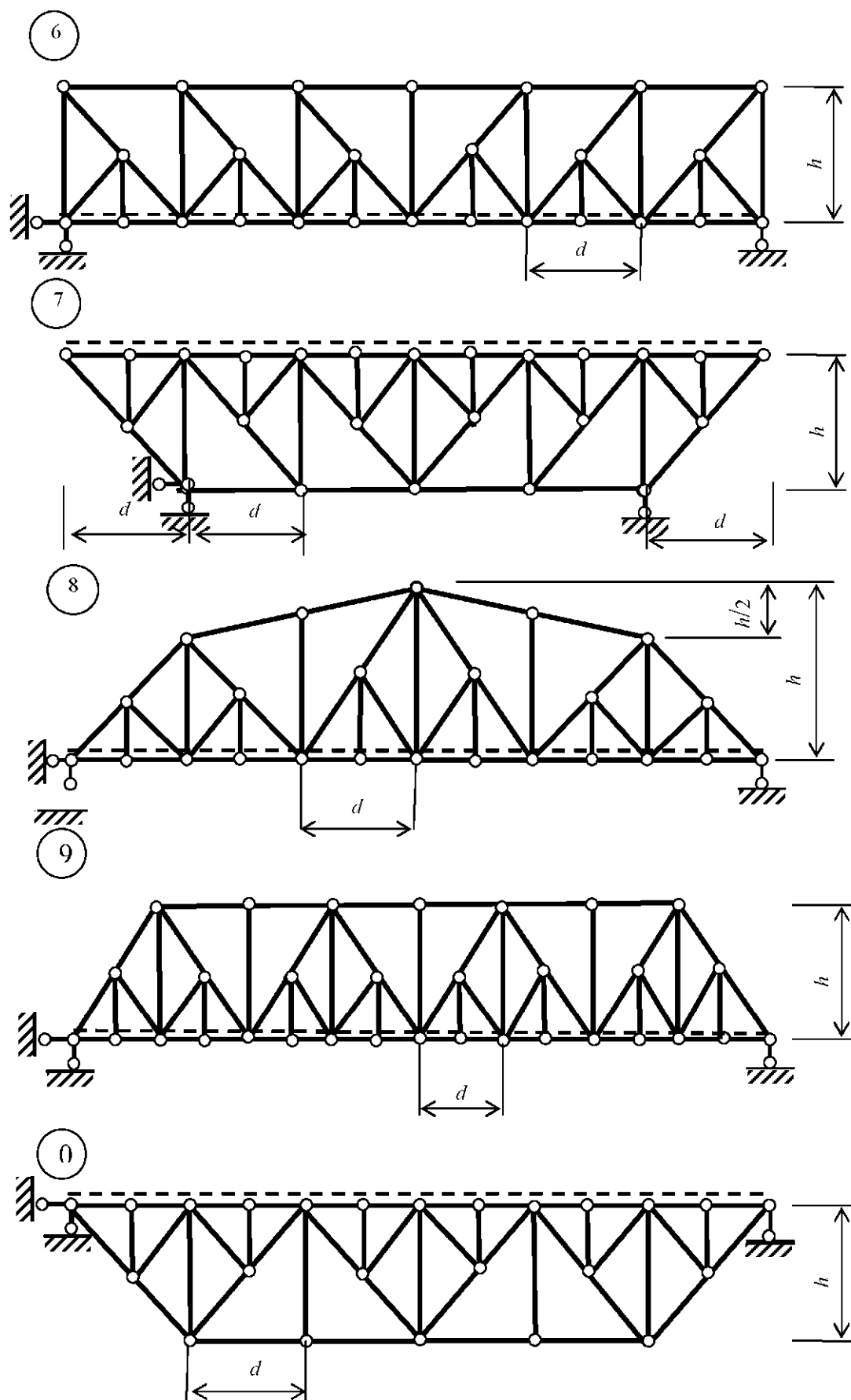


Рис. 20 (окончание). Расчетные схемы 6-0 шпренгельных ферм

#### Задача 4.

#### Расчет плоской статически неопределимой рамы

Для рамы (рис. 21) с выбранными по шифру из табл. 5 размерами и нагрузкой требуется:

- 1) выполнить расчет рамы с использованием метода сил, построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил;
- 2) выполнить расчет рамы с использованием метода перемещений, построить эпюру изгибающих моментов и сравнить с результатами предыдущего расчета.

Примечание: пункт 1) выполняют студенты всех специальностей; пункт 2) – студенты специальности ПГС, ГСХ, АД, МТ.

Таблица 5

Первая цифра шифра	$F_1$	$F_2$	$b$ м	Вторая цифра шифра	$q_1$	$q_2$	$h$ м	Третья цифра шифра, (№ схемы)	$I_1 : I_2$ (1 – ригель, 2 – стойка)
	кН				кН/м				
1	8	0	3,0	1	2	0	6,0	1	1 : 2
2	0	5	3,5	2	0	2	7,2	2	2 : 3
3	6	0	4,0	3	4	0	8,1	3	1 : 3
4	0	8	4,5	4	0	4	9,0	4	3 : 2
5	7	0	5,0	5	6	0	5,4	5	2 : 1
6	0	6	3,0	6	0	6	7,5	6	3 : 1
7	5	0	3,5	7	4	0	8,7	7	1 : 2
8	0	7	4,0	8	0	4	6,3	8	3 : 2
9	8	0	4,5	9	6	0	7,8	9	2 : 1
0	0	5	5,0	0	0	6	9,6	0	1 : 3

#### Методические указания к расчету плоской статически неопределимой рамы

Решению задач должно предшествовать изучение тем 9, 13.

Порядок расчета статически неопределимой рамы методом сил:

1. Определяется число «лишних» неизвестных (равное степени статической неопределимости рамы) и выбирается основная система (ОС) метода сил. Желательно, чтобы выбранная ОС была проста для дальнейших расчетов. Например, если при отбрасывании связей (включая «разрезание» рамы по шарнирам или иным внутренним связям) заданная рама распадается на несколько простых рам или балок, являющихся статически определимыми и геометрически неизменяемыми системами, то

полученная таким образом ОС будет наиболее эффективна.

2. Строятся грузовая и единичные эпюры изгибающих моментов.

3. Определяются коэффициенты и свободные члены канонических уравнений (единичные  $\delta_{ij}$  и грузовые  $\Delta_{iF}$  перемещения в ОС):

$$\delta_{ij} = \sum \frac{(\bar{M}_i \times \bar{M}_j)}{EI}; \quad \Delta_{iF} = \sum \frac{(\bar{M}_i \times M_F)}{EI},$$
 где  $\bar{M}_i$  – единичная эпюра (от  $X_i = 1$ ),  $M_F$  – эпюра изгибающих моментов от заданной нагрузки,  $EI$  – жесткость сечения. При «перемножении» эпюр следует пользоваться способами Верещагина или Симпсона.

4. Выполняется проверка коэффициентов и свободных членов:

$$\sum \frac{(\bar{M}_S \times \bar{M}_S)}{EI} = \sum \sum \delta_{ij}; \quad \sum \frac{(\bar{M}_S \times M_F)}{EI} = \sum \Delta_{iF},$$
 где  $\bar{M}_S = \sum \bar{M}_i$  – суммарная единичная эпюра. В результате решения системы канонических уравнений определяются значения неизвестных метода сил:  $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots$

5. Строится окончательная эпюра изгибающих моментов:  $M = M_F + \sum X_i \cdot \bar{M}_i$ . Выполняется кинематическая проверка – путем «умножения»  $M$  на суммарную эпюру  $\bar{M}_S$ , результат умножения должен быть равен нулю (или быть близким к нулю):  $\sum \frac{(\bar{M} \times \bar{M}_S)}{EI} = 0$ .

6. Строятся эпюры поперечных и продольных сил. Ординаты эпюры  $Q$  определяются по формуле:  $Q = \frac{M_{np} - M_{лев}}{l} \pm \frac{ql}{2}$ . Эпюра  $N$  строится по эпюре  $Q$  путем вырезания узлов, начиная с узла, в котором число неизвестных продольных сил не превышает двух. При вырезании каждого узла необходимо учитывать, что положительная поперечная сила вращает узел по ходу часовой стрелки, а отрицательная – против часовой стрелки.

7. После построения всех окончательных эпюр выполняется статическая проверка расчета – путем проверки равновесия всей рамы:  $\Sigma F_x = 0$ ;  $\Sigma F_y = 0$ ;  $\Sigma M = 0$ .

Порядок расчета статически неопределимой рамы методом перемещений:

1. Определяется число неизвестных метода перемещений (равное степени кинематической неопределимости рамы) и выбирается основная система метода перемещений. В основной системе связи должны быть поставлены не только по направлению возможных линейных перемещений, но и для устранения угловых перемещений.

2. Строятся грузовая и единичные эпюры изгибающих моментов, при этом используются таблицы реакций, имеющиеся в учебниках.

3. Определяются коэффициенты канонических уравнений – единичные  $r_{ij}$  и грузовые  $R_{ij}$  реакции в ОС, при этом значения ординат на всех единичных эпюрах должны быть выражены через какую-либо одну жесткость ( $EI_1$  или  $EI_2$ ). При определении коэффициентов следует

внимательно следить за их знаками, а также использовать теорему о взаимности реакций.

4. Выполняется проверка коэффициентов канонических уравнений:  $\sum \frac{(\bar{M}_S \times \bar{M}_S)}{EI} = \sum \sum r_{ij}$ ;  $\sum \frac{(\bar{M}_S \times M'_F)}{EI} = -\sum R_{ip}$ , где  $M'_F$  – грузовая эпюра изгибающих моментов в основной системе метода сил. В результате решения системы канонических уравнений определяются значения неизвестных метода перемещений:  $Z_1, Z_2, \dots, Z_i$ . Окончательная эпюра изгибающих моментов строится путем суммирования грузовой эпюры с эпюрами моментов от  $Z_i$ :  $M = M'_F + \sum Z_i \cdot \bar{M}_i$ . Суммирование эпюр рекомендуется производить по характерным точкам. Эпюры поперечных и продольных сил могут быть построены по эпюре моментов так же, как и при расчете рамы методом сил.

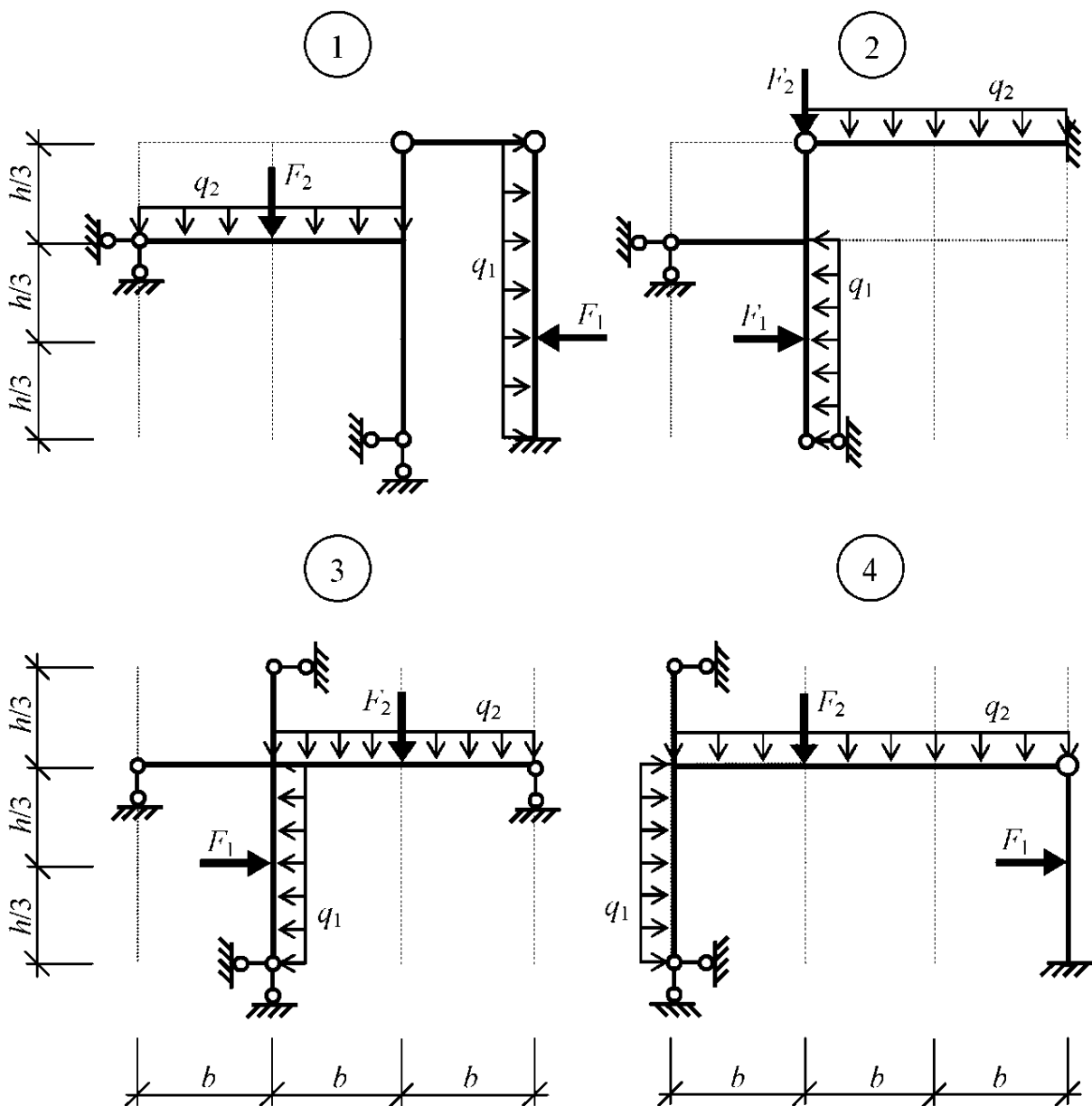


Рис. 21. Расчетные схемы статически неопределимых рам



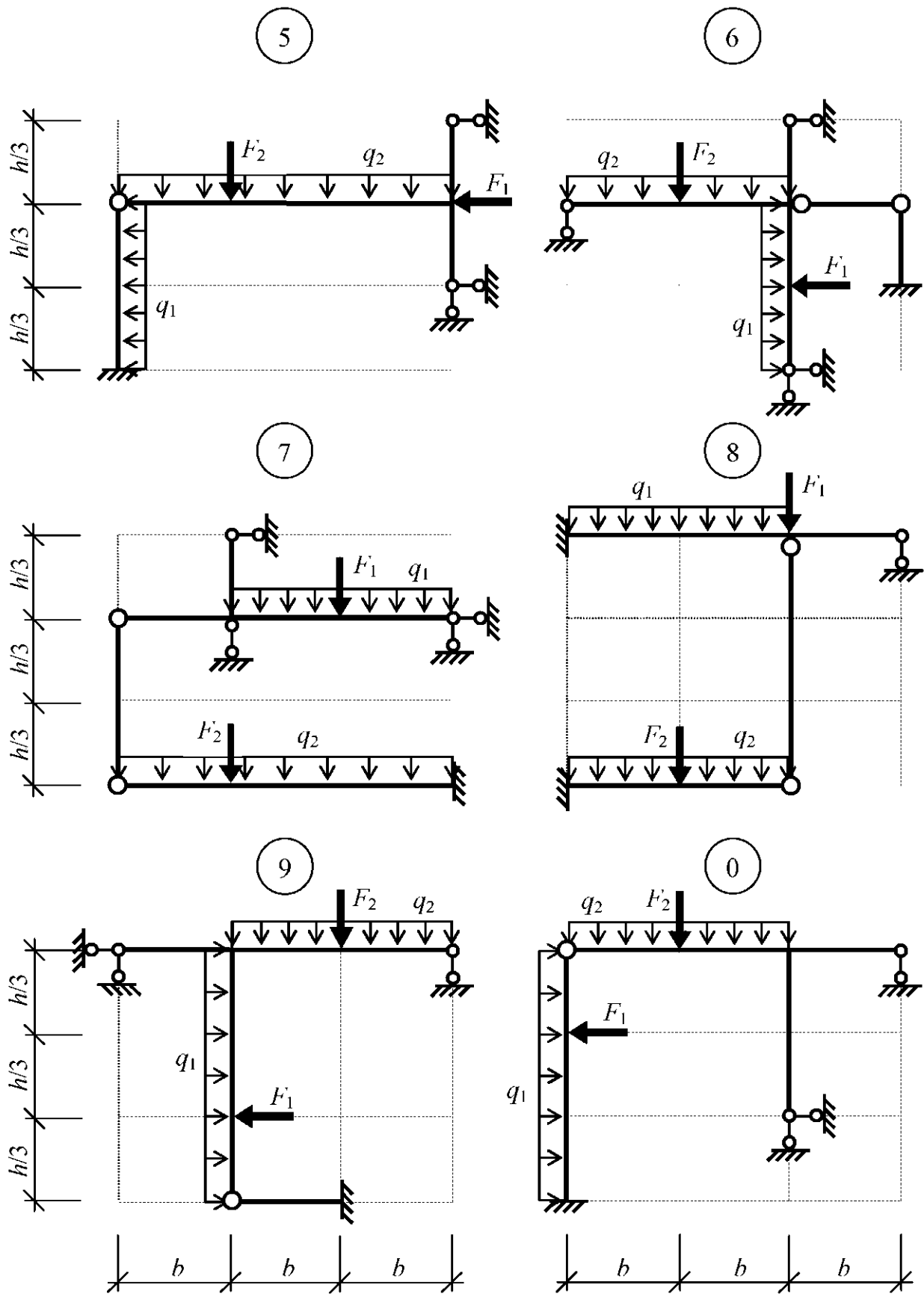


Рис. 21 окончание. Расчетные схемы статически неопределимых рам

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	3
<b>1. Программа дисциплины</b>	
«Строительная механика».....	4
Литература по курсу.....	7
<b>2. Методические указания по отдельным разделам программы.....</b>	<b>9</b>
Тема 1. Введение и основные понятия строительной механики.....	9
Тема 2. Кинематический анализ сооружений.....	9
Тема 3. Методы определения усилий от подвижной нагрузки	11
Тема 4. Многопролетные статически определимые балки.....	13
Тема 5. Понятие о матричном методе расчета сооружений.....	14
Тема 6. Трехшарнирные системы.....	15
Тема 7. Плоские статически определимые фермы.....	17
Тема 8. Определение перемещений методом Мора.....	19
Тема 9. Расчет статически неопределимых систем методом сил.....	21
Тема 10. Особенности расчета статически неопределимых ферм методом сил*.....	26
Тема 11. Особенности расчета двухшарнирных и бесшарнирных арок методом сил*.....	26
Тема 12. Неразрезные балки*.....	27
Тема 13. Расчет статически неопределимых рам методом перемещений*.....	27
Тема 14. Понятие о комбинированном и смешанном методах расчета статически неопределимых рам*.....	29
Тема 15. Метод конечных элементов*.....	30
<b>3. Контрольные задания.....</b>	<b>32</b>
<b>Задача 1.</b>	
<b>Расчет многопролетной статически определимой балки.....</b>	<b>34</b>
<b>Задача 2.</b>	
<b>Расчет трехшарнирной арки или трехшарнирной рамы.....</b>	<b>37</b>
<b>Задача 3</b>	
<b>Расчет плоской статически определимой фермы.....</b>	<b>40</b>
<b>Задача 4.</b>	
<b>Расчет плоской статически неопределимой рамы.....</b>	<b>47</b>
<b>Оглавление.....</b>	<b>51</b>