

**ОПД.Р.03 СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА
РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ
СИСТЕМ**

Учебное пособие

Учебное пособие содержит рабочую программу, методические указания, примеры решения задач, контрольные вопросы и варианты заданий для расчетно-графических работ по темам «Расчет статически неопределимых систем методом сил», «Расчет статически неопределимых систем методом перемещений», «Расчет статически неопределимой фермы в матричной форме».

Учебное пособие предназначено для студентов всех направлений подготовки инженеров, специалистов и бакалавров, изучающих дисциплину «Строительная механика».

ВВЕДЕНИЕ

Системы, для расчета которых одних уравнений равновесия недостаточно, являются статически неопределимыми. Результаты расчета таких систем зависят от соотношения жесткостей отдельных элементов, а в случае температурного воздействия или смещения опор и от величин жесткостей.

Во второй части строительной механики изучаются методы расчета статически неопределимых систем – метод сил, метод перемещений, смешанный метод [1, 2, 4]. Внешнее воздействие на систему может быть силовым, температурным, кинематическим.

В настоящее время широкое распространение получили матричные методы расчета конструкций, в которых самые трудоемкие этапы расчета статически неопределимых систем сводятся к последовательности матричных операций. Исходные матрицы, содержащие информацию о системе, формируются, как правило, вручную.

В учебном пособии приведены рабочая программа дисциплины, примеры решения, контрольные вопросы, задачи для самостоятельного решения и ответы к ним, а также варианты заданий к расчетно-графическим работам:

- расчет статически неопределимой рамы методом сил;
- расчет статически неопределимой рамы методом перемещений;
- расчет статически неопределимой фермы методом сил в матричной форме.

В приложениях приводится необходимая для расчета информация справочного характера:

- справочные данные для перемножения эпюр по способу Верещагина;
- эпюры моментов и опорные реакции для расчета рам методом перемещений;
- справочные данные об операциях с матрицами;
- основные условные обозначения.

1. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ

Метод сил. Сущность метода сил. Степень статической неопределимости системы. Основная и эквивалентная система метода сил. Канонические уравнения метода сил. Проверка коэффициентов и свободных членов уравнений. Проверка расчета. Определение перемещений в статически неопределимых системах. Расчет на изменение температуры и осадку опор. Свойства статически неопределимых систем.

Метод перемещений. Сущность метода и основные допущения. Степень кинематической неопределимости системы. Основная система метода перемещений. Канонические уравнения метода перемещений. Использование симметрии системы. Расчет на изменение температуры и осадку опор. Построение линий влияния.

Расчет статически неопределимых ферм. Выбор расчетной схемы и метода расчета ферм, применение метода сил и метода перемещений. Определение усилий от неподвижной нагрузки и построение линий влияния. Расчет статически неопределимых ферм с использованием ПЭВМ.

Смешанный метод. Сопоставление методов сил и перемещений, их обобщение. Основная система, неизвестные и канонические уравнения смешанного метода.

Расчет неразрезных балок. Применение метода сил и метода перемещений для расчета неразрезной балки. Построение огибающих эпюр и линий влияния. Матричная форма расчета неразрезных балок переменного сечения.

Расчет статически неопределимых арок. Виды статически неопределимых арок. Выбор расчетной схемы и метода расчета статически неопределимых арок. Особенности расчета двухшарнирных и бесшарнирных арок.

2. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ РАМЫ МЕТОДОМ СИЛ

Расчет статически неопределимых систем нельзя выполнить, используя только уравнения равновесия, т. к. количество неизвестных опорных реакций (внутренних усилий) в них больше числа уравнений.

Внутренние усилия и перемещения в статически неопределимых системах, как правило, меньше аналогичных усилий и перемещений в статически определимых системах. Это означает, что статически неопределимые системы обладают большим запасом по прочности и жесткости, чем определимые.

Сравним, например, максимальные изгибающие моменты в статически определимой шарнирно опертой балке (рис. 2.1, *а*) и балке, защемленной по концам (рис. 2.1, *б*). Максимальный момент в статически неопределимой балке в полтора раза меньше, чем в статически определимой балке, а прогиб балки в середине пролета меньше в пять раз. Кроме того, при выходе из строя (разрушении) одной связи статически определимая балка становится геометрически изменяемой. Для превращения статически неопределимой балки в геометрически изменяемую систему необходим выход из строя трех связей.

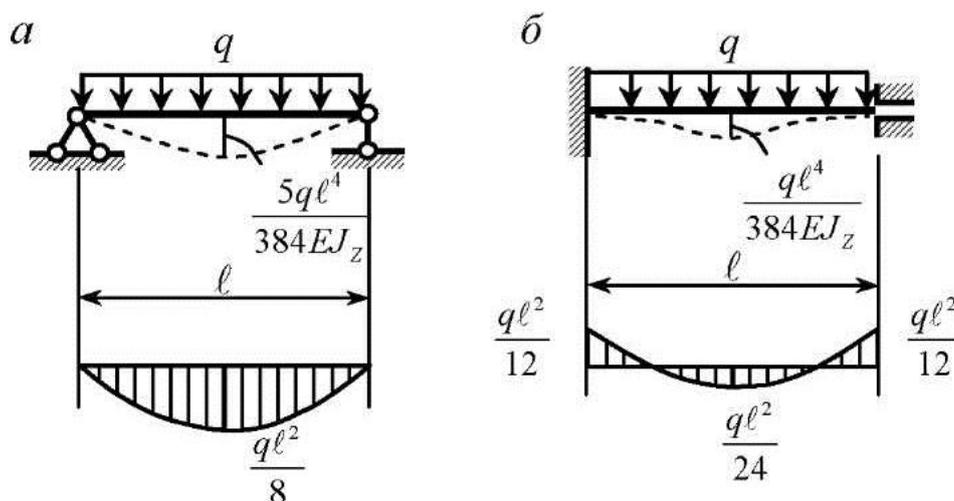


Рис. 2.1

В статически неопределимых системах распределение внутренних усилий зависит от соотношения жесткостей. Таким образом, задача определения размеров сечений из условия прочности, в отличие от статически определимых систем, не решается в одно приближение и требует перерасчета каждый раз, когда изменяются размеры поперечных сечений.

При температурном или кинематическом воздействии – смещении связей (осадки опор) в статически неопределимых системах возникают дополнительные усилия, причем с ростом величин жесткостей эти усилия возрастают, что также приходится учитывать при проектировании.

Расчет статически неопределимых рам и неразрезных балок может быть произведен различными методами: методом сил, методом перемещений, смешанным методом [1, 2, 4].

В методе сил за неизвестные усилия принимают реакции в отброшенных «лишних» связях системы.

Число неизвестных, равное количеству «лишних» связей, называется степенью статической неопределимости.

Степень статической неопределимости можно установить из условия, что замкнутый контур трижды статически неопределим, а простой шарнир или ползун, введенные в такой контур, понижают степень статической неопределимости на единицу (рис. 2.2, а). Тогда формула для определения степени статической неопределимости будет иметь вид

$$L = 3K - Ш_0 - П, \quad (2.1)$$

где K – число замкнутых контуров; $Ш_0$ – число простых шарниров; $П$ – число ползунов.

В статически неопределимой системе различают два вида связей: условно необходимые (условно лишние) и абсолютно необходимые (рис. 2.2, б). Усилия в абсолютно необходимых связях являются статически определимыми, и принимать их в качестве неизвестных не следует.

Для перехода от заданной системы к основной системе следует отбросить лишние условно необходимые связи и заменить их действие неизвестными силами X_1, X_2, \dots, X_n .

Основная система метода сил должна быть геометрически неизменяемой. Выбор основной системы является важным этапом расчета, так как от него зависят простота и точность расчета.

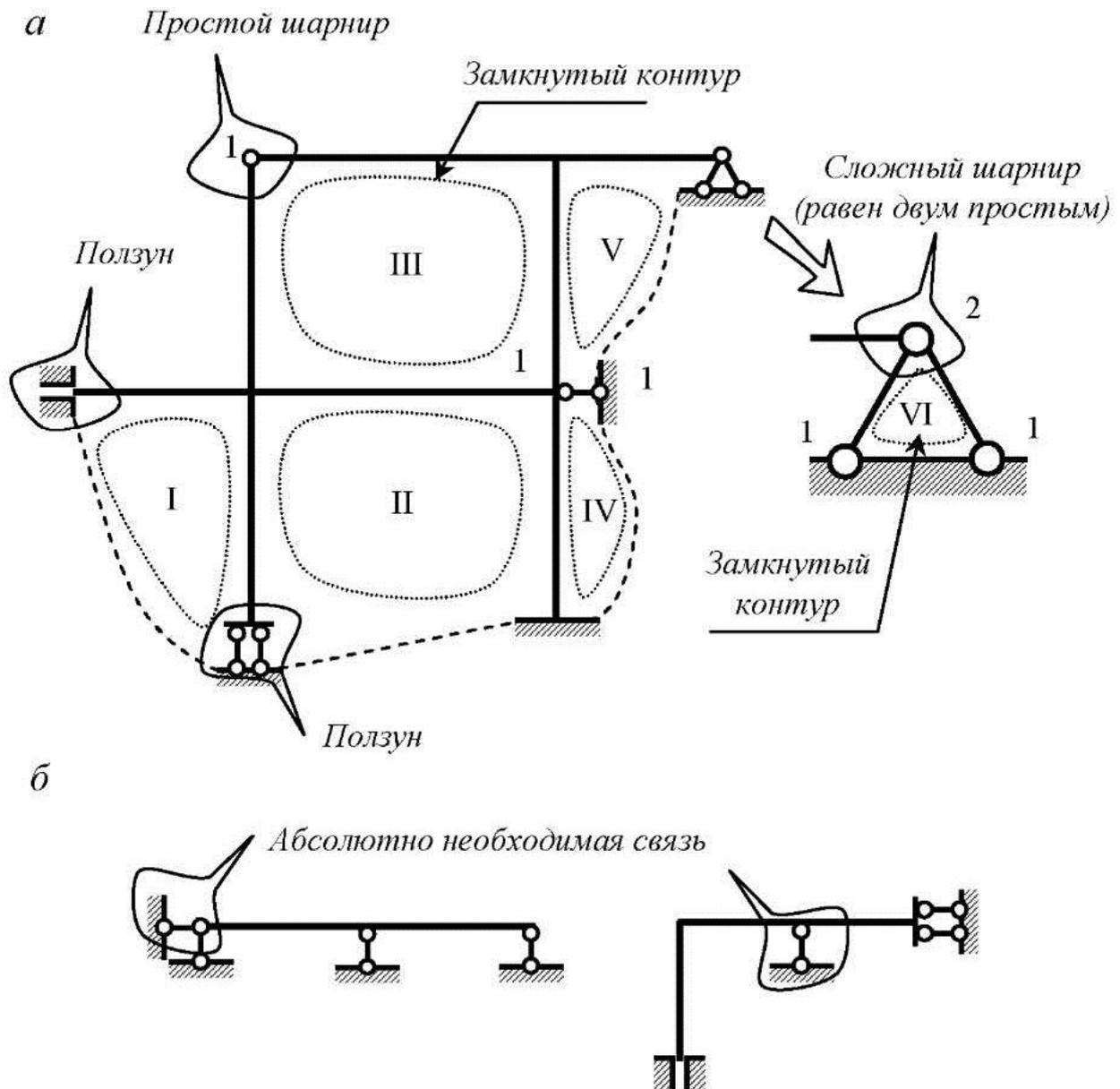


Рис. 2.2

Для вычисления интегралов (2.3) в случае прямолинейных стержней с постоянной по длине жесткостью используют способ Верещагина (графоаналитический прием «перемножения» эпюр).

Перемножение эпюр производится следующим образом. Система разбивается на отдельные прямолинейные участки, в пределах которых жесткость сечения постоянная и хотя бы одна из перемножаемых эпюр линейная. Для другой эпюры необходимо определить положение центра тяжести и площадь на данном участке. Затем площадь эпюры ω умножают на ординату y под ее центром тяжести на линейной эпюре (рис. 2.3) и делят на жесткость участка. Если обе перемножаемые эпюры линейные, то все равно, из какой эпюры брать площадь, а из какой эпюры ординату. В случае, когда одна эпюра криволинейная или ломаная, то площадь обязательно берется с непрямолинейной эпюры. Если площадь и ордината находятся по одну сторону от оси стержня, то результат перемножения эпюр положительный, в противном случае – отрицательный. Суммируя результаты перемножений по участкам, получают искомое перемещение:

$$\Delta = \sum \int \frac{M_i \cdot M_j}{EJ} ds = \sum_{k=1}^n \frac{\omega_k y_k}{EJ_k} \quad (2.4)$$

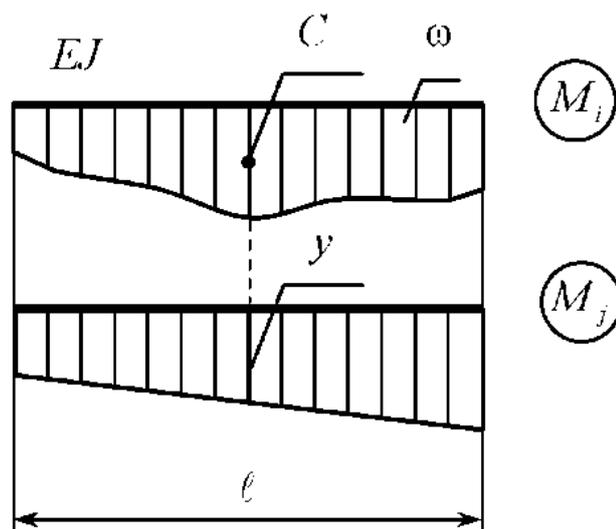


Рис. 2.3

Сложную эпюру в пределах участка необходимо разделить на простые фигуры (прямоугольник, треугольник, параболу), для которых известны площадь и положение центра тяжести (рис. 2.4).

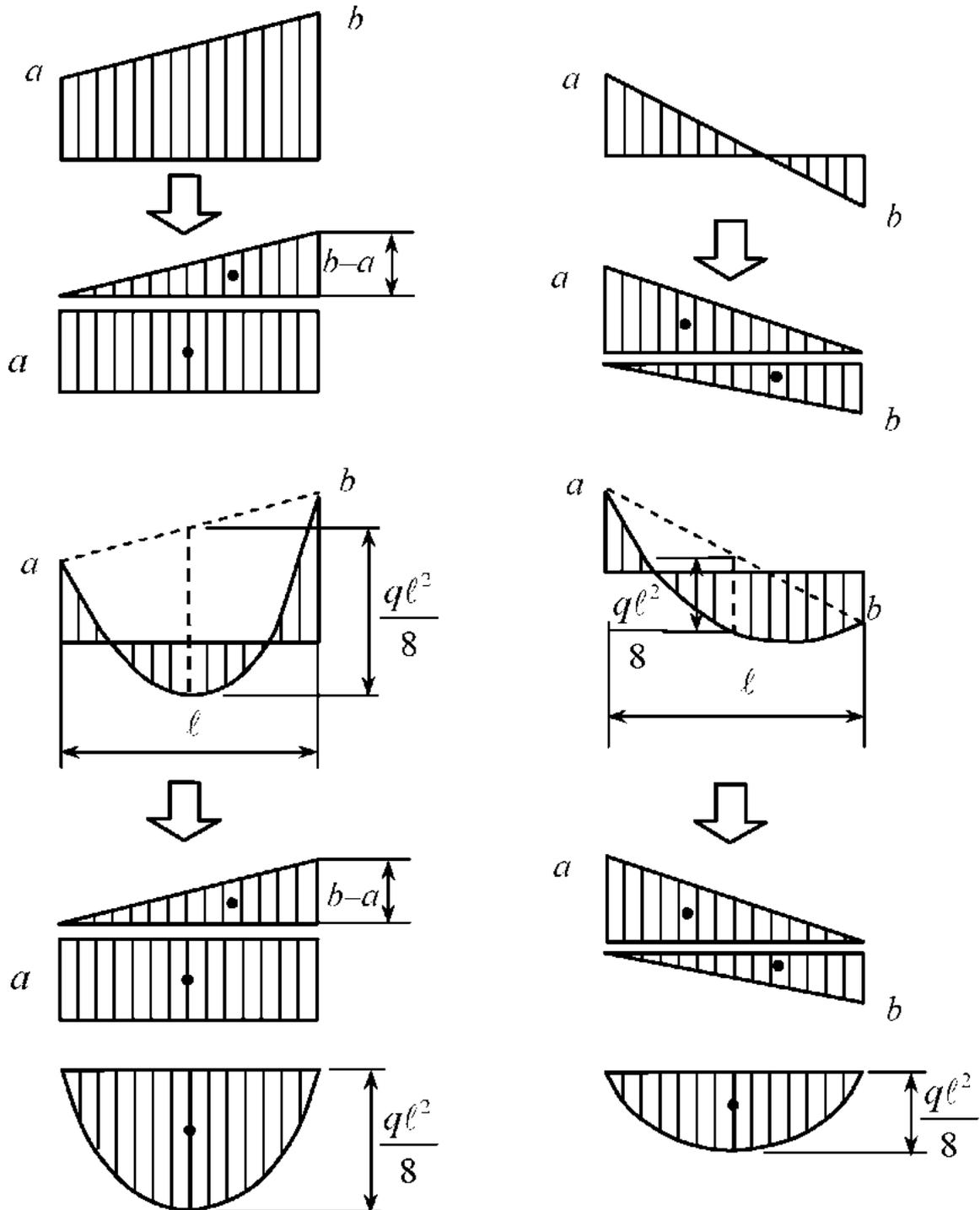


Рис. 2.4

После разбиения площадь каждой простой фигуры умножают на соответствующую ординату под ее центром тяжести. Для удобства вычисления ординаты эпюру также можно разделить на простые фигуры. Такой прием получил название «расслоение» эпюр. Формулы для вычисления площадей простых фигур и положение их центра тяжести приведены в прил. 1.

В ряде случаев оказывается проще вычислить интеграл Мора по формуле Симпсона [5]. Это формула численного интегрирования, для произвольной подынтегральной функции требуется разбивать интервал интегрирования на большое число участков. Если одна из перемножаемых эпюр на участке линейная, а вторая эпюра – линейная или очерчена по квадратной параболе, то формула Симпсона дает точный результат уже при двух участках разбиения. Для перемножаемых эпюр M_i и M_j , показанных на рис. 2.5, формула Симпсона имеет вид

$$\int \frac{M_i \cdot M_j}{EJ} ds = \frac{\ell}{6EJ} (ad + 4be + cf). \quad (2.5)$$

Знак перед перемножаемыми ординатами определяется аналогично способу Верещагина.

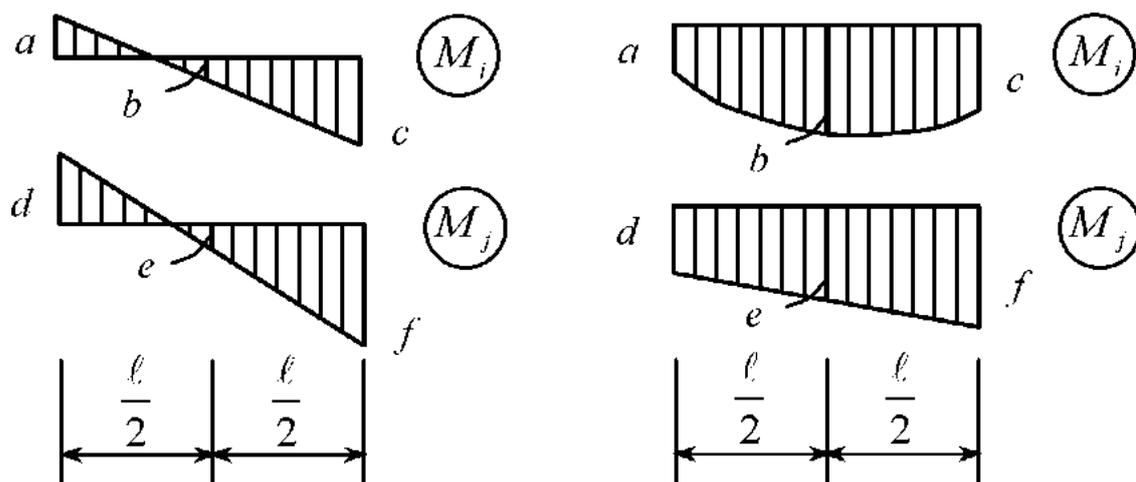


Рис. 2.5

Вычисленные коэффициенты при неизвестных и грузовые коэффициенты перед решением системы уравнений (2.2) следует проверить. Одновременная проверка всех коэффициентов при неизвестных состоит в том, что

$$\sum \sum \delta_{ik} = \sum \int \frac{\bar{M}_s \cdot \bar{M}_s}{EJ} ds, \quad (2.6)$$

где \bar{M}_s – суммарная единичная эпюра

$$\bar{M}_s = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n. \quad (2.7)$$

Построчные проверки состоят в том, что

$$\delta_{i1} + \delta_{i2} + \dots + \delta_{in} = \sum \int \frac{\bar{M}_s \cdot \bar{M}_i}{EJ} ds. \quad (2.8)$$

Проверка грузовых коэффициентов сводится к выполнению условия

$$\Delta_{1F} + \Delta_{2F} + \dots + \Delta_{nF} = \sum \int \frac{\bar{M}_s \cdot M_F}{EJ} ds. \quad (2.9)$$

После проверки коэффициентов решают систему канонических уравнений метода сил (2.2) и находят величины реакций в отброшенных связях X_1, X_2, \dots, X_n .

Окончательную эпюру изгибающих моментов в заданной системе можно построить двумя способами. По первому способу найденные значения усилий X_1, X_2, \dots, X_n и заданную нагрузку прикладывают к основной системе. Окончательную эпюру изгибающих моментов M строят обычным способом, как для статически определимой системы.

По второму способу на основании принципа независимости действия сил окончательная эпюра изгибающих моментов строится как алгебраическая сумма ординат единичных эпюр \bar{M}_i , умноженных на соответствующие найденные значения X_i и ординат эпюры M_F :

$$M = M_F + \bar{M}_1 \cdot X_1 + \bar{M}_2 \cdot X_2 + \dots + \bar{M}_n \cdot X_n. \quad (2.10)$$

В случае, если какое-либо неизвестное X_i имеет знак минус, соответствующую единичную эпюру \bar{M}_i следует перевернуть (поменять направление растянутых волокон на обратное).

Построенная эпюра M , в свою очередь, должна быть проверена. Статическая проверка состоит в том, что все узлы рамы должны быть уравновешены, то есть сумма моментов в любом узле равна нулю. Такая проверка необходима, но недостаточна, так как может служить лишь контролем правильности суммирования отдельных уравновешенных эпюр.

Достаточной проверкой служит кинематическая (деформационная) проверка, которая производится из условия деформирования заданной системы. Если эпюра M построена верно, то суммарное перемещение заданной системы по направлению всех устраненных лишних связей от всех неизвестных и заданной нагрузки должно быть равно нулю:

$$\Delta_s = \sum \Delta_i = \sum \int \frac{M \cdot \bar{M}_s}{EJ} ds = 0. \quad (2.11)$$

Точно так же должно выполняться любое из условий:

$$\Delta_i = \sum \int \frac{M \cdot \bar{M}_i}{EJ} ds = 0. \quad (2.12)$$

Для построения эпюры Q используют дифференциальную зависимость между изгибающими моментами и поперечными силами. При действии на участок длиной ℓ равномерно распределенной нагрузки q поперечная сила в начале участка $Q_{\text{лев}}$ и в конце участка $Q_{\text{прав}}$ определяются по формулам:

$$Q_{\text{лев}} = \frac{q\ell}{2} + \frac{M_{\text{прав}} - M_{\text{лев}}}{\ell},$$

$$Q_{\text{прав}} = -\frac{q\ell}{2} + \frac{M_{\text{прав}} - M_{\text{лев}}}{\ell},$$

где $M_{\text{прав}}$ – момент на правом конце участка; $M_{\text{лев}}$ – момент на левом конце участка.

Если на участке нагрузка q отсутствует, то поперечная сила по длине участка постоянна и равна $Q = \frac{M_{\text{прав}} - M_{\text{лев}}}{\ell}$. Для определения поперечной силы рекомендуется развернуть участок рамы до горизонтального положения. Равномерно-распределенная нагрузка q при этом должна быть направлена сверху вниз. Если на участке нет распределенной нагрузки, то поворачивать участок рамы можно как по часовой стрелке, так и против часовой стрелки. Изгибающие моменты, отложенные со стороны нижних волокон, подставляются в формулу как положительные, со стороны верхних волокон – как отрицательные (рис. 2.6).

Эпюра N строится по эпюре поперечных сил путем вырезания узлов рамы, начиная с узла, в котором количество неизвестных продольных сил не превышает двух. Для каждого узла составляют два уравнения равновесия, из которых находят продольные силы.

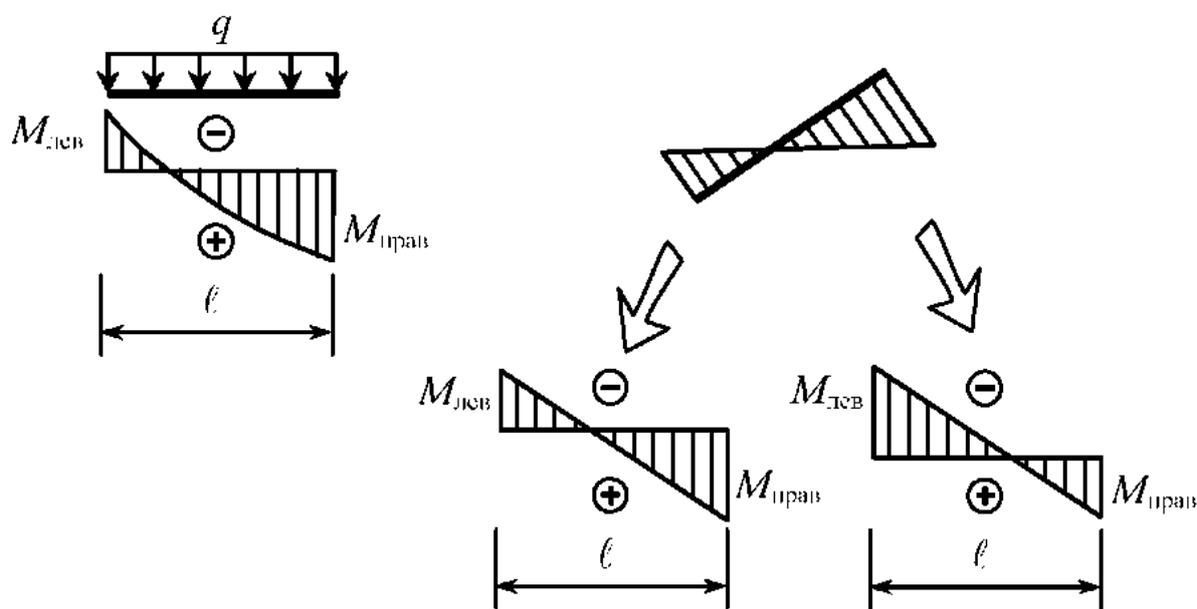


Рис. 2.6

Пример 2.1. Для рамы (рис. 2.7, а), необходимо построить эпюры M , Q , N и произвести промежуточные и окончательные проверки.

Определяем число замкнутых контуров (обозначены на рис. 2.7, б римскими цифрами), простых шарниров (арабские цифры) и ползунов $K=3$, $\Pi_0=6$, $\Pi=1$. Степень статической неопределимости (количество лишних связей) $L=3 \cdot 3 - 6 - 1 = 2$. Рама дважды статически неопределима. Основную систему получаем из заданной, отбрасывая две лишние связи в опоре F (рис. 2.7, в). Загружая основную систему реакциями в отброшенных связях X_1 , X_2 и заданной нагрузкой, получаем эквивалентную систему (рис. 2.7, г).

Возможный вариант основной системы показан на рис. 2.7, д. Раму, полученную из заданной устранением двух связей в опоре A , выбрать в качестве основной системы нельзя, т. к. эта система – мгновенно изменяемая (рис. 2.7, е).

Канонические уравнения метода сил (2.2) имеют вид

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0. \end{cases}$$

Загружая основную систему силами $X_1=1$, $X_2=1$ и внешней нагрузкой, строим единичные эпюры \bar{M}_1 , \bar{M}_2 и грузовую эпюру M_F (направление растянутых волокон показано на рис. 2.8 пунктирной линией). Для каждого нагружения основной системы находим опорные реакции заново.

Строим эпюру \bar{M}_1 от $X_1=1$ (рис. 2.8, а, б).

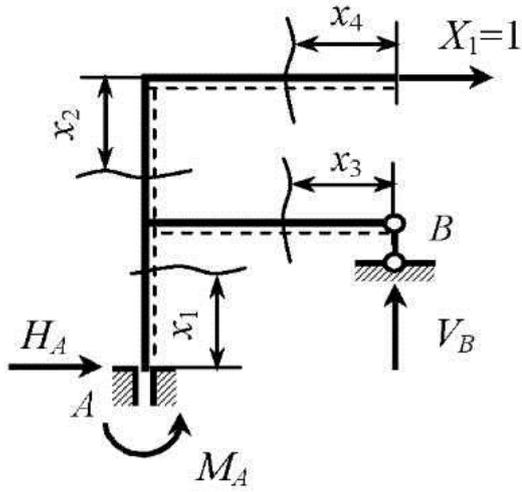
Находим опорные реакции:

$$\sum x = X_1 + H_A = 0; \quad H_A = -X_1 = -1; \quad \sum y = V_B = 0;$$

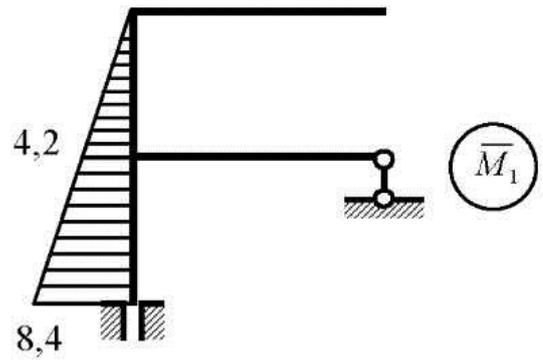
$$\sum m_A = M_A - X_1 \cdot 8,4 + V_B \cdot 6,6 = 0;$$

$$M_A = X_1 \cdot 8,4 - V_B \cdot 6,6 = 8,4.$$

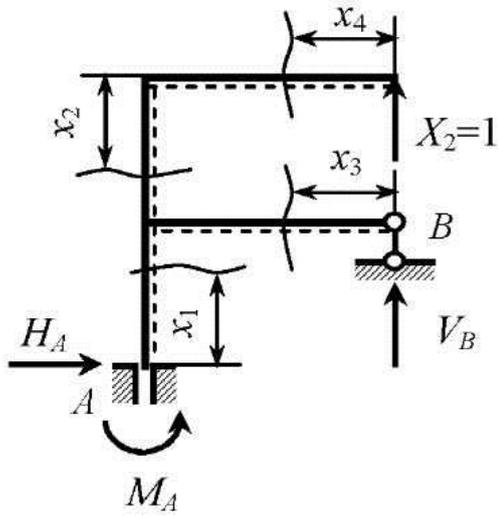
a



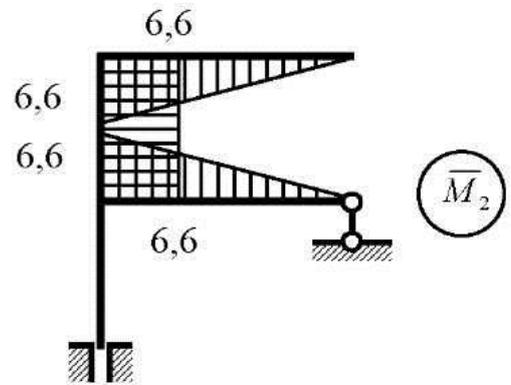
b



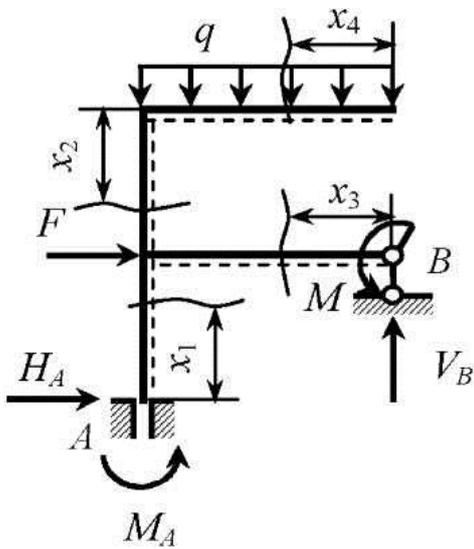
в



г



д



е

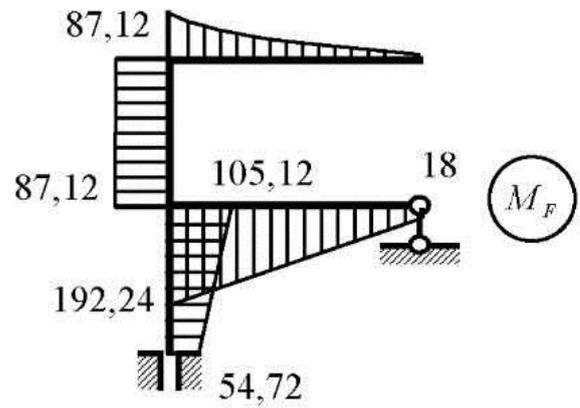


Рис. 2.8

Определим изгибающие моменты по сечениям рамы, разделив ее на четыре участка:

$$0 \leq x_1 \leq 4,2 \text{ м}; \quad \bar{M}_1 = -M_A - H_A \cdot x_1;$$

$$\text{при } x_1 = 0 \quad \bar{M}_1 = -8,4; \quad \text{при } x_1 = 4,2 \quad \bar{M}_1 = -4,2.$$

$$0 \leq x_2 \leq 4,2 \text{ м}; \quad \bar{M}_1 = -X_1 \cdot x_2;$$

$$\text{при } x_2 = 0 \quad \bar{M}_1 = 0; \quad \text{при } x_2 = 4,2 \quad \bar{M}_1 = -4,2.$$

$$0 \leq x_3 \leq 6,6 \text{ м}; \quad \bar{M}_1 = V_B \cdot x_3 = 0.$$

$$0 \leq x_4 \leq 6,6 \text{ м}; \quad \bar{M}_1 = 0.$$

Строим эпюру \bar{M}_2 от $X_2 = 1$ (рис. 2.8, в, з).

$$\sum x = H_A = 0; \quad \sum y = V_B + X_2 = 0; \quad V_B = -X_2 = -1;$$

$$\sum m_A = M_A + X_2 \cdot 6,6 + V_B \cdot 6,6 = 0;$$

$$M_A = -X_2 \cdot 6,6 - V_B \cdot 6,6 = 0.$$

$$0 \leq x_1 \leq 4,2 \text{ м}; \quad \bar{M}_2 = -M_A - H_A \cdot x_1 = 0.$$

$$0 \leq x_2 \leq 4,2 \text{ м}; \quad \bar{M}_2 = X_2 \cdot 6,6 = 6,6.$$

$$0 \leq x_3 \leq 6,6 \text{ м}; \quad \bar{M}_2 = V_B \cdot x_3;$$

$$\text{при } x_3 = 0 \quad \bar{M}_2 = 0; \quad \text{при } x_3 = 4,2 \quad \bar{M}_2 = -6,6.$$

$$0 \leq x_4 \leq 6,6 \text{ м}; \quad \bar{M}_2 = X_2 \cdot x_4;$$

$$\text{при } x_4 = 0 \quad \bar{M}_2 = 0; \quad \text{при } x_4 = 6,6 \quad \bar{M}_2 = 6,6.$$

Строим эпюру M_F от заданной нагрузки (рис. 2.8, д, е).

$$\sum x = H_A + F = 0; \quad H_A = -F = -12 \text{ кН};$$

$$\sum y = V_B - q \cdot 6,6 = 0; \quad V_B = q \cdot 6,6 = 26,4 \text{ кН};$$

$$\sum m_A = M_A - F \cdot 4,2 + V_B \cdot 6,6 - q \cdot 6,6 \cdot 3,3 + M = 0;$$

$$\text{при } x_1 = 4,2 \quad M_F = 105,12 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$0 \leq x_2 \leq 4,2 \text{ м}; \quad M_F = -q \cdot 6,6 \cdot 3,3 = -87,12 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$0 \leq x_3 \leq 6,6 \text{ м}; \quad M_F = V_B \cdot x_3 + M;$$

$$\text{при } x_3 = 0 \quad M_F = 18 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

при $x_3 = 4,2$ $M_F = 192,24$ кН·м.

$M_A = F \cdot 4,2 - V_B \cdot 6,6 + q \cdot 6,6 \cdot 3,3 - M = -54,72$ кН·м.

$0 \leq x_1 \leq 4,2$ м; $M_F = -M_A - H_A \cdot x_1$;

при $x_1 = 0$ $M_F = 54,72$ кН·м;

$0 \leq x_4 \leq 6,6$ м; $M_F = -q \frac{x_4^2}{2}$;

при $x_4 = 0$ $M_F = 0$; при $x_4 = 6,6$ $M_F = -87,12$ кН·м.

Строим суммарную единичную эпюру (рис. 2.9) по формуле

$$\bar{M}_S = \bar{M}_1 + \bar{M}_2.$$

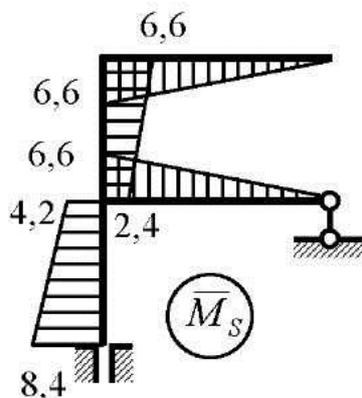


Рис. 2.9

Находим коэффициенты при неизвестных и грузовые коэффициенты. Для вычисления перемещений δ_{ik} и Δ_{iF} воспользуемся способом Верещагина. Разделим раму на участки, в пределах которых жесткость постоянная и хотя бы одна из перемножаемых эпюр прямолинейная. Сложные эпюры (трапеции, криволинейные эпюры) разделим на простые фигуры, для которых в прил. 1 приведены справочные данные. На рис. 2.6–2.9 приведены формулы для вычисления площадей эпюр ω и ординат под их центрами тяжести y .

Перемножаем эюру \bar{M}_1 саму на себя (рис. 2.10):

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1}{EJ} ds = \frac{1}{EJ} \left[\frac{4,2 \cdot 4,2}{2} (4,2 + \frac{2}{3} 4,2) + 4,2 \cdot 4,2 (4,2 + \frac{1}{2} 4,2) \right] + \frac{1}{EJ} \frac{4,2 \cdot 4,2}{2} \frac{2}{3} 4,2 = \frac{197,568}{EJ}.$$

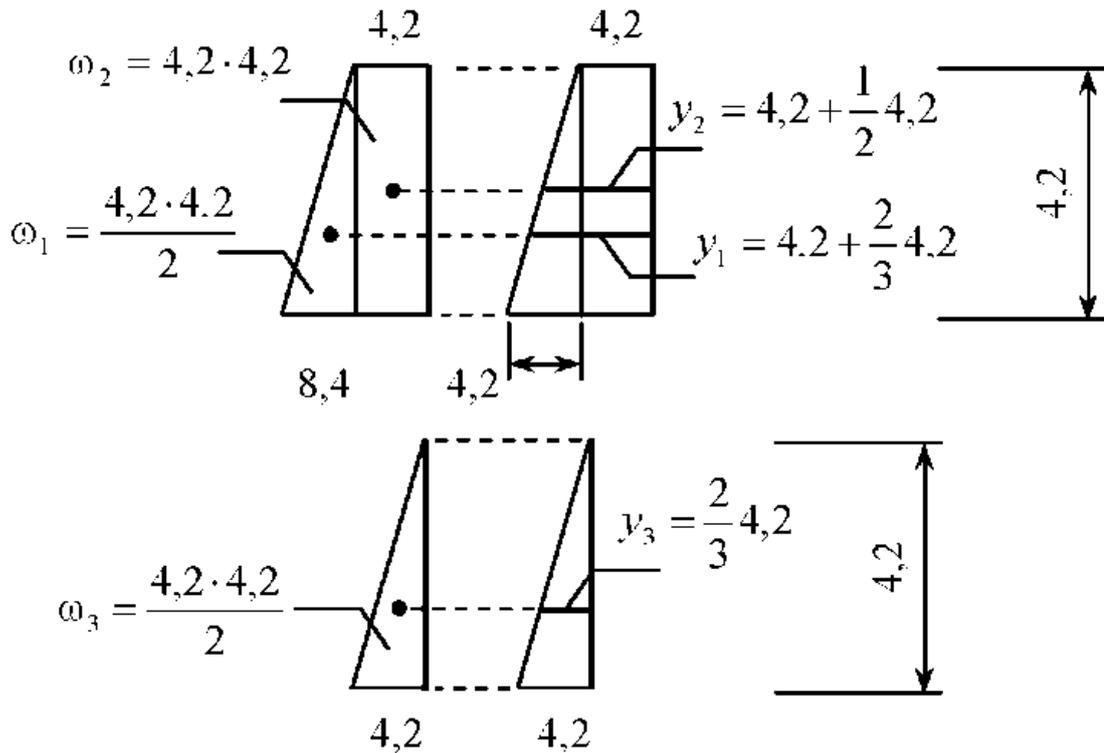


Рис. 2.10

Перемножаем эюру \bar{M}_1 на эюру \bar{M}_2 (рис. 2.11):

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_2}{EJ} ds = -\frac{1}{EJ} \frac{4,2 \cdot 4,2}{2} 6,6 = -\frac{58,212}{EJ}.$$

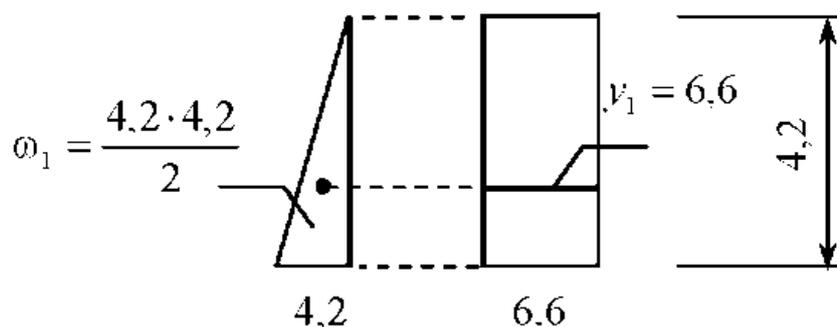


Рис. 2.11

Перемножаем эюру \bar{M}_2 саму на себя (рис. 2.12):

$$\delta_{22} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 \cdot \bar{M}_2}{EJ} ds = \frac{1}{2EJ} \frac{6,6 \cdot 6,6}{2} \frac{2}{3} 6,6 + \frac{1}{EJ} 6,6 \cdot 4,2 \cdot 6,6 + \frac{1}{2EJ} \frac{6,6 \cdot 6,6}{2} \frac{2}{3} 6,6 = \frac{278,784}{EJ}.$$

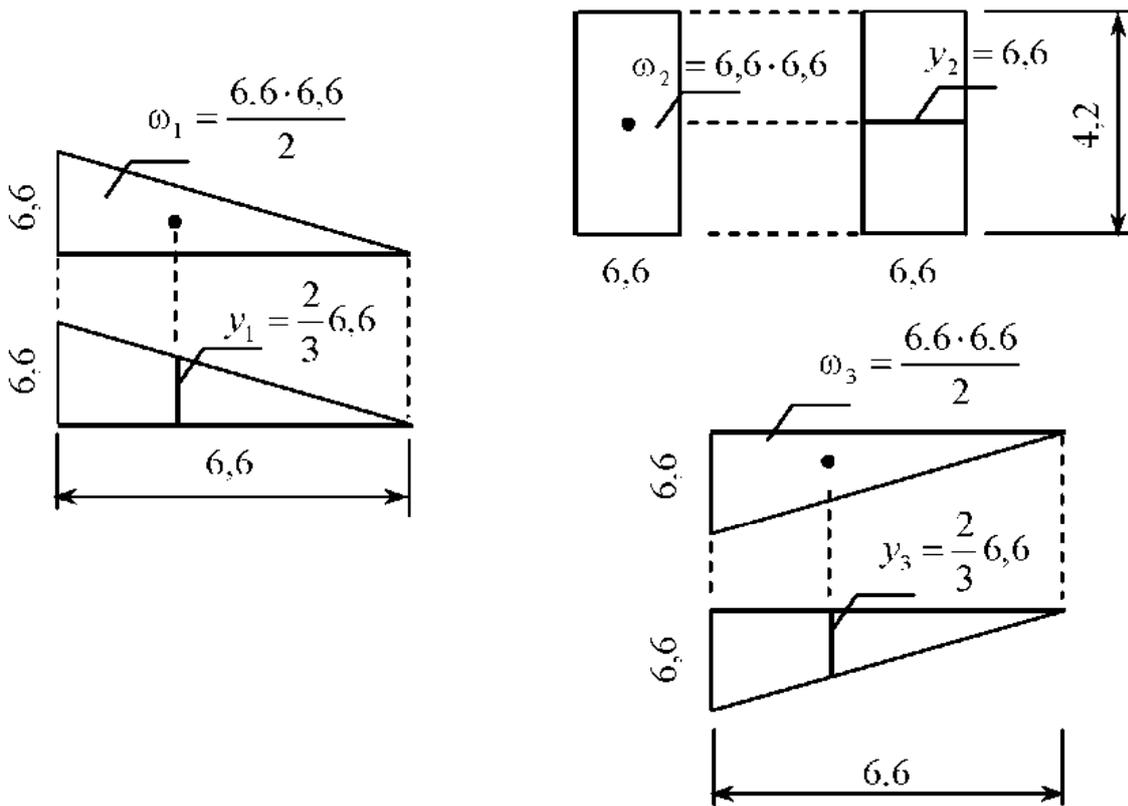


Рис. 2.12

Находим сумму коэффициентов при неизвестных:

$$\delta_{11} + \delta_{22} + 2\delta_{12} = \frac{1}{EJ} (197,568 + 278,784 - 2 \cdot 58,212) = \frac{359,928}{EJ}.$$

Для одновременной проверки всех коэффициентов при неизвестных перемножаем суммарную единичную эюру \bar{M}_s саму на себя (рис. 2.13):

$$\delta_{ss} = \sum \int \frac{\bar{M}_s \cdot \bar{M}_s}{EJ} ds = \frac{1}{EJ} \left[\frac{4,2 \cdot 4,2}{2} \left(4,2 + \frac{2}{3} 4,2 \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + 4,2 \cdot 4,2 \left(4,2 + \frac{1}{2} 4,2 \right) \Big] + \frac{1}{EJ} \left[\frac{4,2 \cdot 4,2}{2} \left(2,4 + \frac{2}{3} 4,2 \right) + \right. \\
& + 2,4 \cdot 4,2 \left(2,4 + \frac{1}{2} 4,2 \right) \Big] + \frac{1}{2EJ} \frac{6,6 \cdot 6,6}{2} \frac{2}{3} 6,6 + \\
& + \frac{1}{2EJ} \frac{6,6 \cdot 6,6}{2} \frac{2}{3} 6,6 = \frac{1}{EJ} (172,878 + 91,224 + \\
& + 47,916 + 47,916) = \frac{359,934}{EJ}.
\end{aligned}$$

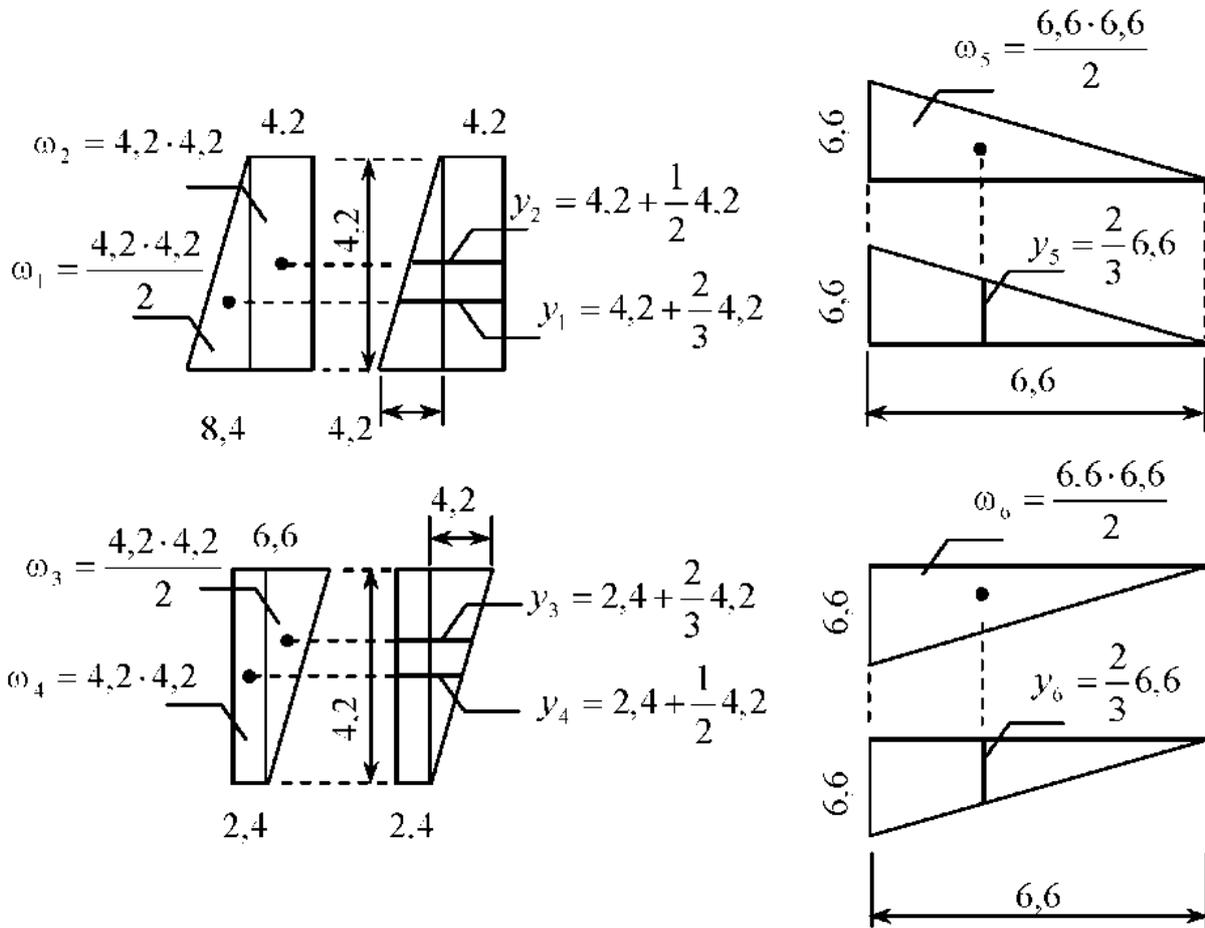


Рис. 2.13

Результаты совпали, следовательно, коэффициенты при неизвестных вычислены верно.

Перемножением грузовой эпюры моментов M_F на единичные эпюры \bar{M}_1 , \bar{M}_2 находим коэффициенты (рис. 2.14, 2.15):

$$\Delta_{1F} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \cdot M_F}{EJ} ds = -\frac{1}{EJ} \left[\frac{50,4 \cdot 4,2}{2} \left(4,2 + \frac{1}{3} 4,2 \right) + \right. \\ \left. + 54,72 \cdot 4,2 \cdot \left(4,2 + \frac{1}{2} 4,2 \right) \right] + \frac{1}{EJ} 87,12 \cdot 4,2 \frac{4,2}{2} = \frac{-1272,20}{EJ};$$

$$\Delta_{2F} = \sum \int \frac{M_F \cdot \bar{M}_2}{EJ} ds = -\frac{1}{2EJ} \frac{1}{3} 87,12 \cdot 6,6 \frac{3}{4} 6,6 - \frac{1}{EJ} 87,12 \times \\ \times 4,2 \cdot 6,6 - \frac{1}{2EJ} \left[18 \cdot 6,6 \frac{6,6}{2} + \frac{174,24 \cdot 6,6}{2} \frac{2}{3} 6,6 \right] = \frac{-4350,33}{EJ}.$$

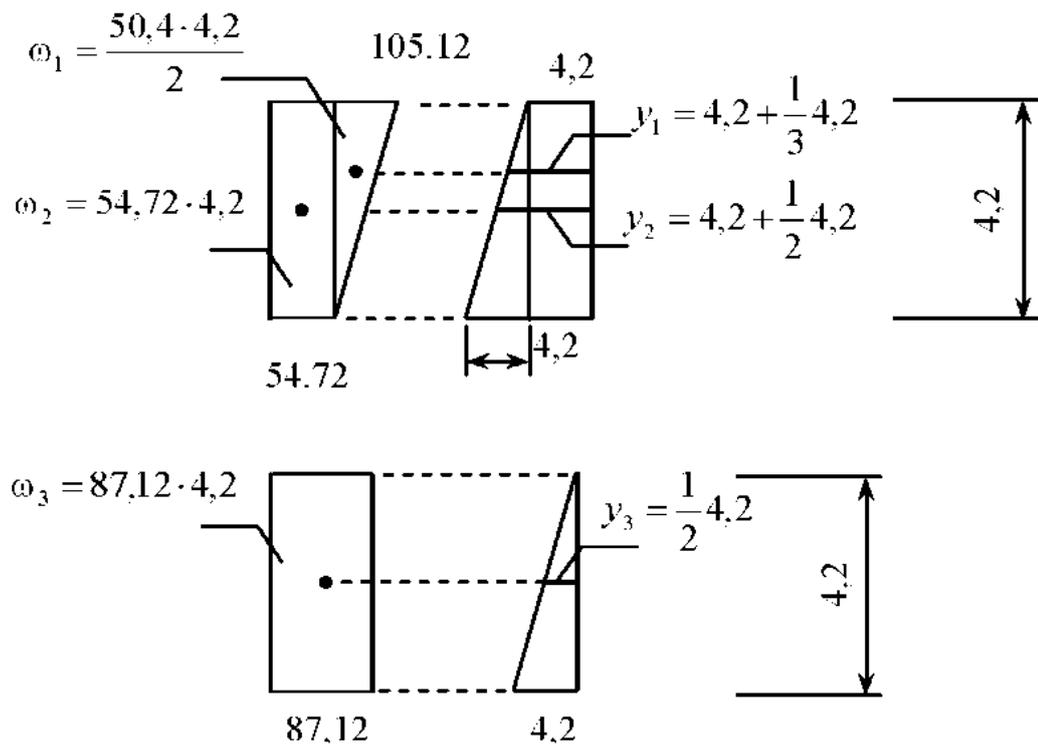


Рис. 2.14

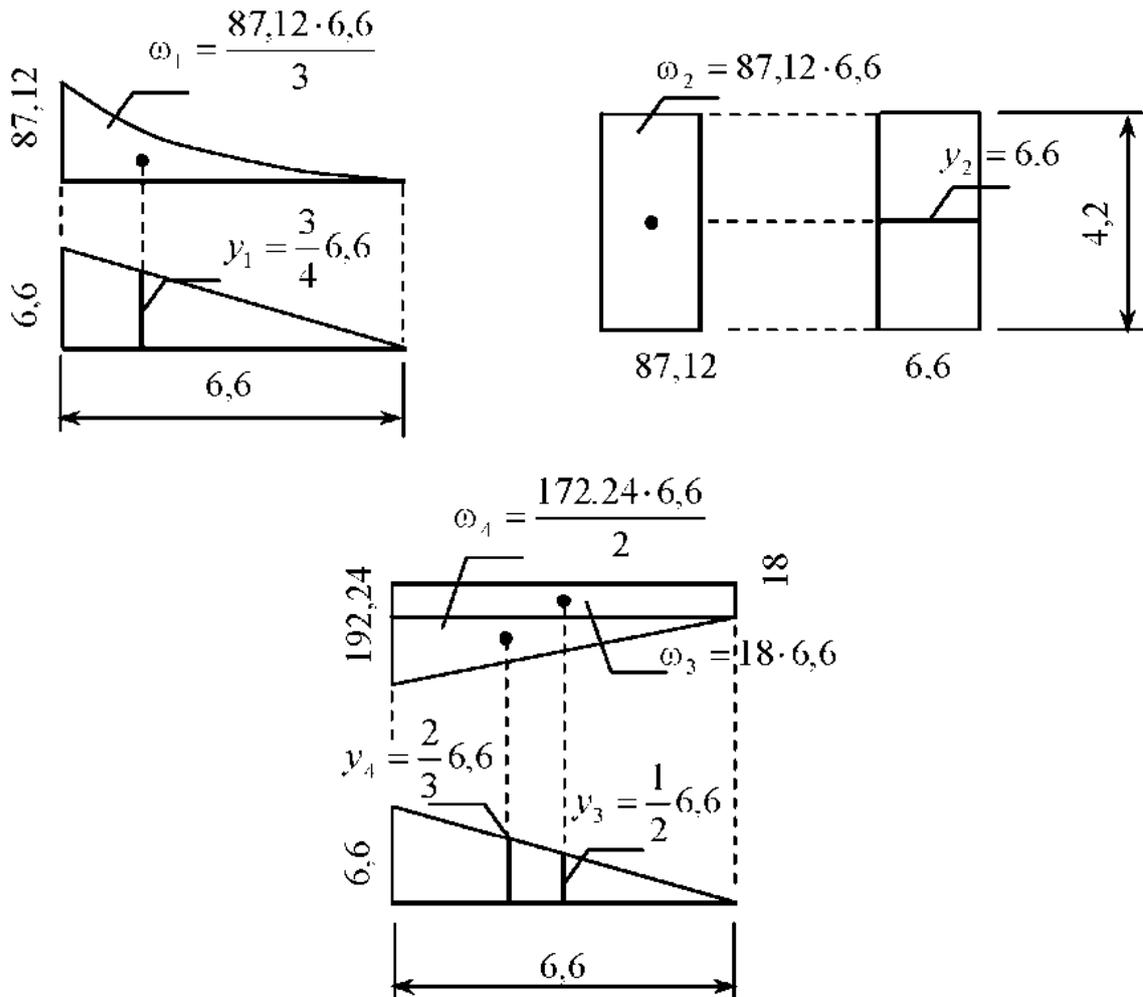


Рис. 2.15

Находим сумму грузовых коэффициентов:

$$\Delta_{1F} + \Delta_{2F} = \frac{1}{EJ} (-1272,20 - 4350,33) = -\frac{5622,53}{EJ}.$$

Перемножаем эпюру грузовую эпюру M_F на суммарную единичную эпюру \bar{M}_S (рис. 2.16):

$$\begin{aligned} \Delta_{SF} = \sum \int \frac{M_F \cdot \bar{M}_S}{EJ} ds = & -\frac{1}{EJ} \left[\frac{50,4 \cdot 4,2}{2} (4,2 + \frac{1}{3} 4,2) + \right. \\ & \left. + 54,72 \cdot 4,2 (4,2 + \frac{1}{2} 4,2) \right] - \frac{1}{EJ} 87,12 \cdot 4,2 (2,4 + \frac{4,2}{2}) - \frac{1}{2EJ} \times \end{aligned}$$

$$\times \left[18 \cdot 6,6 \frac{6,6}{2} + \frac{174,24 \cdot 6,6}{2} \frac{2}{3} 6,6 \right] - \frac{1}{2EJ} \frac{1}{3} 87,12 \cdot 6,6 \frac{3}{4} 6,6 =$$

$$= \frac{-5622,54}{EJ}$$

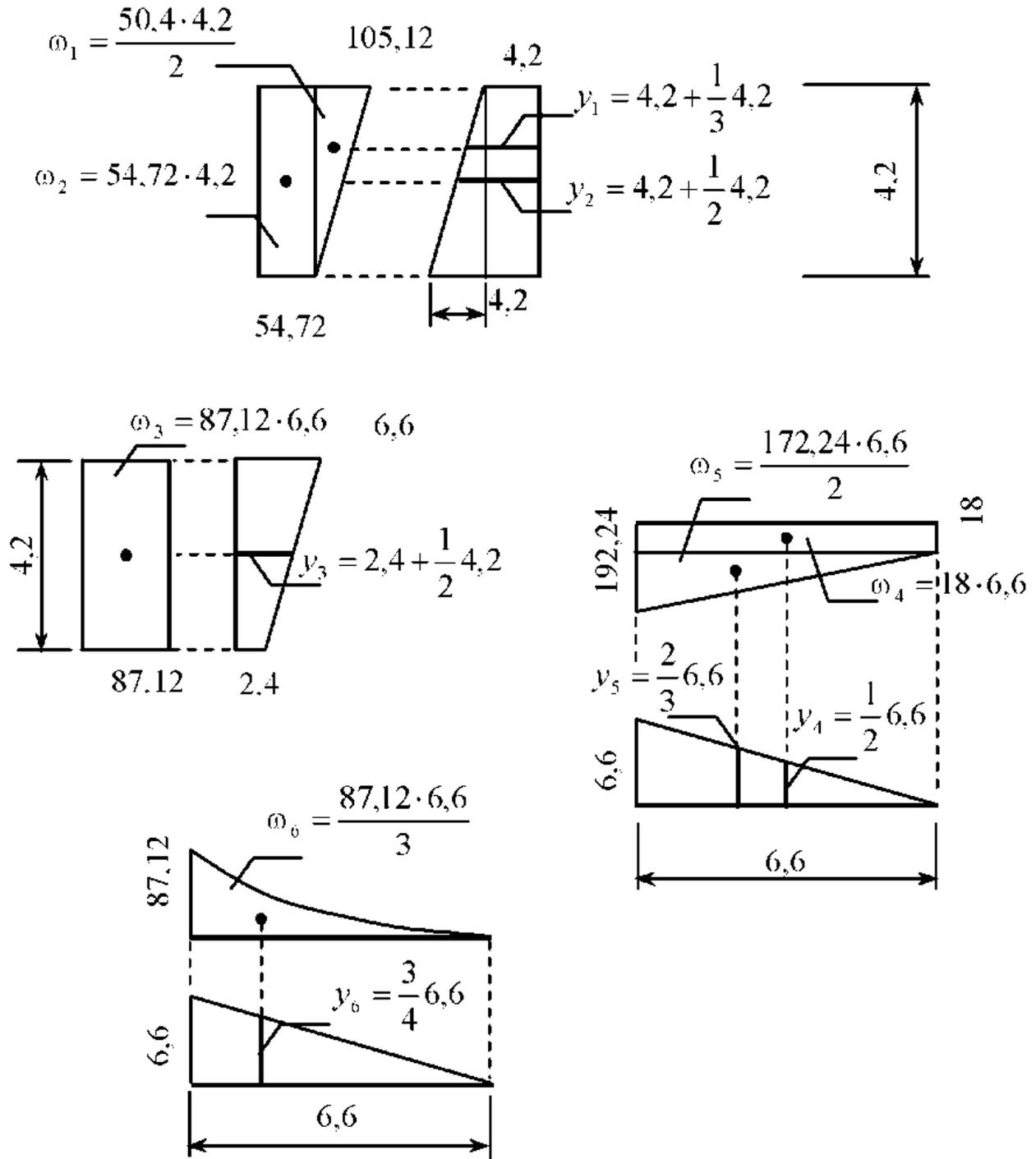


Рис. 2.16

Грузовые коэффициенты вычислены верно.

Подставляем найденные значения коэффициентов в канонические уравнения:

$$\begin{cases} \frac{197,568}{EJ} X_1 - \frac{58,212}{EJ} X_2 - \frac{1272,20}{EJ} = 0, \\ -\frac{58,212}{EJ} X_1 + \frac{278,784}{EJ} X_2 - \frac{4350,33}{EJ} = 0. \end{cases}$$

Умножаем уравнения на EJ и переносим грузовые коэффициенты вправо от знака равенства:

$$\begin{cases} 197,568 X_1 - 58,212 X_2 = 1272,20, \\ -58,212 X_1 + 278,784 X_2 = 4350,33. \end{cases}$$

Решаем систему уравнений методом Крамера [5]:

$$D = \begin{vmatrix} 197,568 & -58,212 \\ -58,212 & 278,784 \end{vmatrix} = 197,568 \cdot 278,784 - (-58,212)^2 = 51690;$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1272,20 & -58,212 \\ 4350,33 & 278,784 \end{vmatrix} = 1272,20 \cdot 278,784 - 4350,33 \times (-58,212) = 607910;$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 197,568 & 1272,20 \\ -58,212 & 4350,33 \end{vmatrix} = 197,568 \cdot 4350,33 - 1272,20 \times (-58,212) = 933543;$$

$$X_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{607910}{51690} = 11,76 \text{ кН};$$

$$X_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{933543}{51690} = 18,06 \text{ кН}.$$

Проверяем правильность решения:

$$197,568 \cdot 11,76 - 58,212 \cdot 18,06 = 1272,10;$$

$$-58,212 \cdot 11,76 + 278,784 \cdot 18,06 = 4350,26.$$

Окончательную эпюру изгибающих моментов строим согласно выражению (2.10)

$$M = M_F + \bar{M}_1 \cdot X_1 + \bar{M}_2 \cdot X_2 = M_F + M_1 + M_2.$$

Эпюры M_1 и M_2 , полученные умножением соответствующих единичных эпюр \bar{M}_1 и \bar{M}_2 на найденные значения неизвестных, показаны на рис. 2.17, а, б, а окончательная эпюра M – на рис. 2.17, в. Статическая проверка удовлетворяется, так как узлы C и D находятся в равновесии (рис. 2.17, г).

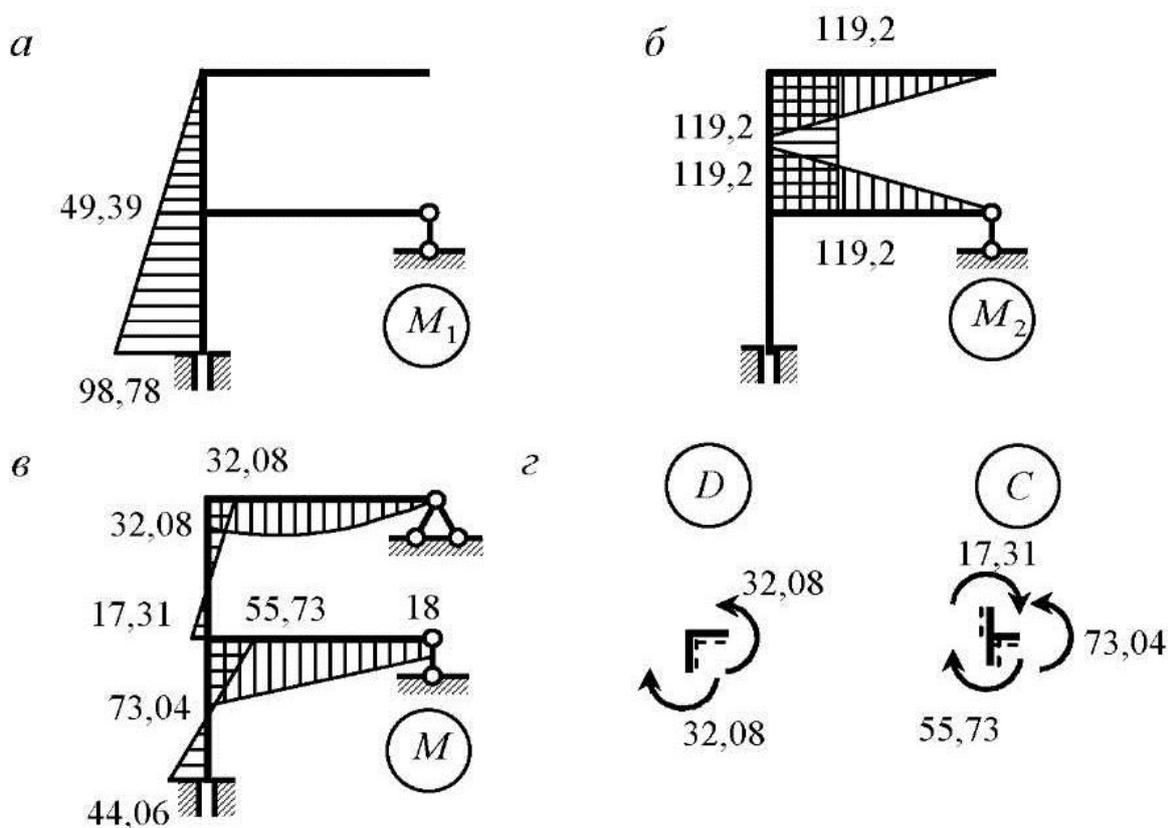


Рис. 2.17

Выполняем кинематическую проверку (рис. 2.18)

$$\Delta_s = \sum \int \frac{\bar{M}_s \cdot M}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \left[\frac{44,06 \cdot 4,2}{2} \left(4,2 + \frac{2}{3} \cdot 4,2 \right) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{55,73 \cdot 4,2}{2} \left(4,2 + \frac{1}{3} 4,2\right) \Big] + \frac{1}{EJ} \left[\frac{32,08 \cdot 4,2}{2} \left(2,4 + \frac{2}{3} 4,2\right) - \right. \\
& \left. - \frac{17,31 \cdot 4,2}{2} \left(2,4 + \frac{1}{3} 4,2\right) \right] - \frac{1}{2EJ} \left[18 \cdot 6,6 \frac{6,6}{2} + \frac{55,04 \cdot 6,6}{2} \frac{2}{3} 6,6 \right] + \\
& + \frac{1}{2EJ} \left[\frac{32,08 \cdot 6,6}{2} \frac{2}{3} 6,6 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6,6^2}{3 \cdot 8} 6,6 \frac{6,6}{2} \right] = \frac{1}{EJ} (-7,703 + \\
& + 212,180 - 595,610 + 391,023) = \frac{603,203 - 603,313}{EJ} = \frac{-0,11}{EJ}.
\end{aligned}$$

Погрешность вычислений составляет $\frac{0,11}{603,203} 100\% = 0,02\%$, следовательно, окончательная эпюра изгибающих моментов построена верно.

Для построения эпюры поперечных сил рассмотрим каждый стержень рамы отдельно (рис. 2.19, а):

$$Q_{AC} = \frac{55,73 - (-44,06)}{4,2} = 23,76 \text{ кН};$$

$$Q_{CB} = \frac{18 - 73,04}{6,6} = -8,34 \text{ кН};$$

$$Q_{CD} = \frac{32,08 - (-17,31)}{4,2} = 11,76 \text{ кН};$$

$$Q_{DE, \text{лев}} = \frac{4 \cdot 6,6}{2} + \frac{0 - 32,08}{6,6} = 8,34 \text{ кН};$$

$$Q_{DE, \text{прав}} = -\frac{4 \cdot 6,6}{2} + \frac{0 - 32,08}{6,6} = -18,06 \text{ кН}.$$

Эпюра поперечных сил Q показана на рис. 2.19, б.

Для построения эпюры продольных сил вырезаем узлы D и C (рис. 2.19, в). Взамен отброшенных стержней прикладываем известные поперечные силы и неизвестные продольные силы.

При этом положительные поперечные силы направляем так, чтобы они вращали узлы по часовой стрелке. Продольные силы направляем так, чтобы они растягивали стержень.

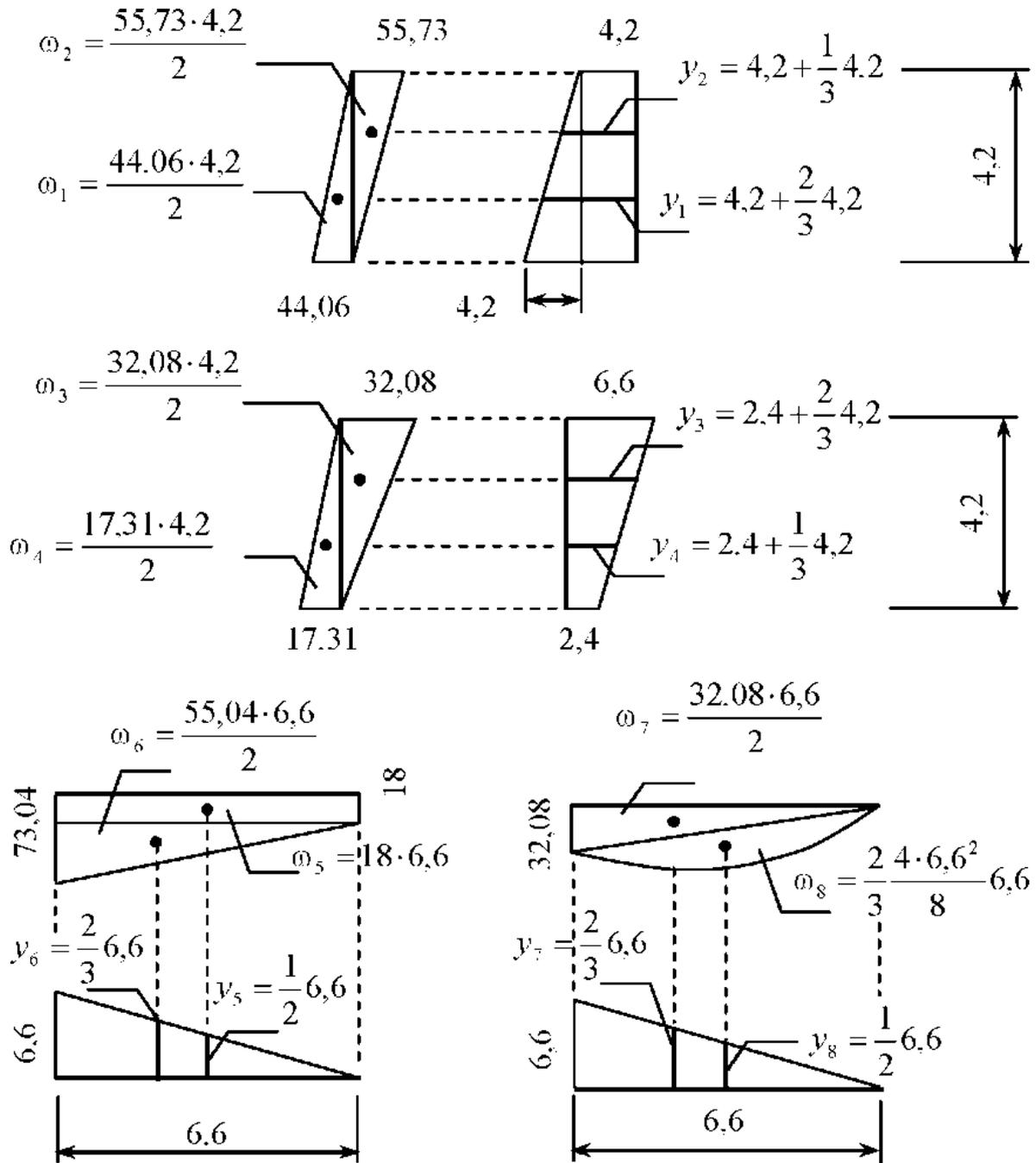


Рис. 2.18

Для узла D составляем уравнения равновесия:

$$\sum x = N_{DE} - 11,76 = 0; \quad N_{DE} = 11,76 \text{ кН};$$

$$\sum y = -N_{DC} - 8,34 = 0; \quad N_{AB} = -8,34 \text{ кН}.$$

Для узла C составляем уравнения равновесия:

$$\sum x = N_{CB} + 11,76 + 12 - 23,76 = 0; \quad N_{CB} = 0;$$

$$\sum y = N_{CA} + 8,34 - 8,34 = 0; \quad N_{CA} = 0.$$

Эпюра N изображена на рис. 2.19, z .

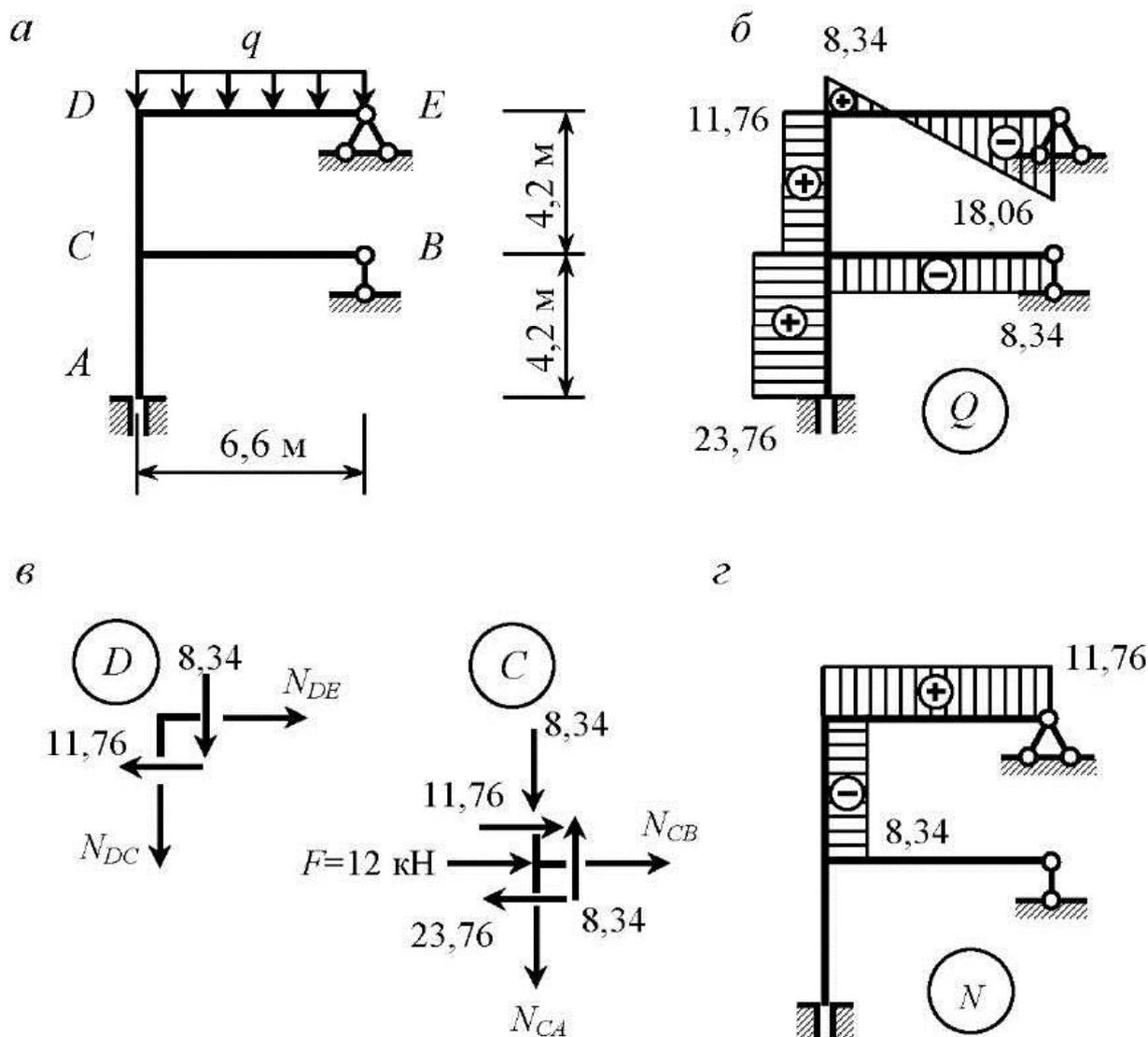


Рис. 2.19

Составим уравнения равновесия, приложив к раме заданную нагрузку и опорные реакции (рис. 2.20). Направления и величины опорных реакций определены по эпюрам M , Q и N .

$$\begin{aligned}\sum x &= -H_A + F + H_E = -23,76 + 12 + 11,76 = 0; \\ \sum y &= V_B + V_E - q \cdot 6,6 = 8,34 + 18,06 - 4 \cdot 6,6 = 0; \\ \sum m_A &= M_A - F \cdot 4,2 + M + V_B \cdot 6,6 + V_E \cdot 6,6 - H_E \cdot 8,4 - q \cdot 6,6 \times \\ &\times 3,3 = 44,06 - 12 \cdot 4,2 + 18 + 8,34 \cdot 6,6 + 18,06 \cdot 6,6 - 11,76 \times \\ &\times 8,4 - 4 \cdot 6,6 \cdot 3,3 = 236,3 - 236,304 = -0,004 \approx 0.\end{aligned}$$

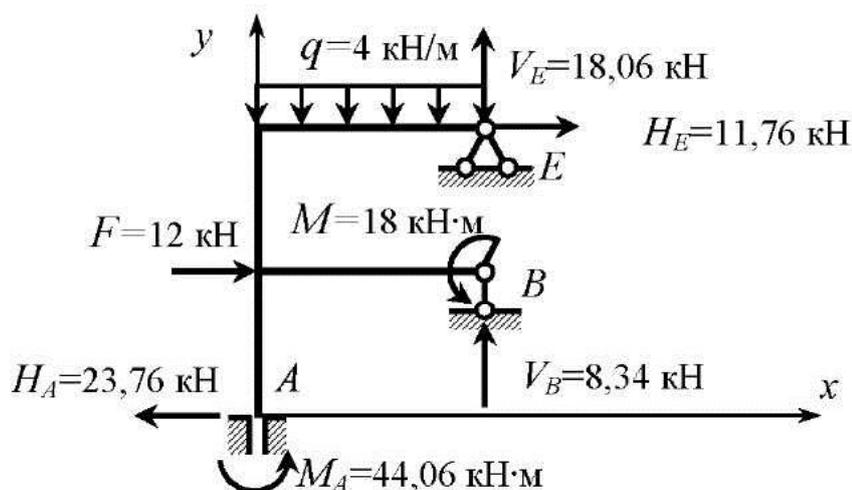


Рис. 2.20

Пример 2.2. Для рамы (рис. 2.21, *а*), требуется построить эпюры внутренних усилий и выполнить необходимые проверки.

Находим число замкнутых контуров, простых шарниров и ползунов: $K = 3$, $\Pi_0 = 7$, $\Pi = 0$ (рис. 2.21, *б*). Количество лишних связей $L = 3 \cdot 3 - 7 - 0 = 2$. Рама дважды статически неопределима. Все внешние связи являются абсолютно необходимыми. Для выбора основной системы устраняем две внутренние связи в шарнире D (рис. 2.21, *в*). Реакции в отброшенных связях направлены противоположно друг к другу и прикладываются к концевым сечениям вертикального и горизонтального стержней.

Эквивалентная система получена при загрузении основной системы реакциями в отброшенных связях X_1 , X_2 и заданной нагрузкой (рис. 2.21, з). Канонические уравнения указывают на отсутствие взаимных смещений смежных сечений в месте разреза, так как наличие в этом месте шарнира D в заданной системе таких смещений не допускает:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0. \end{cases}$$

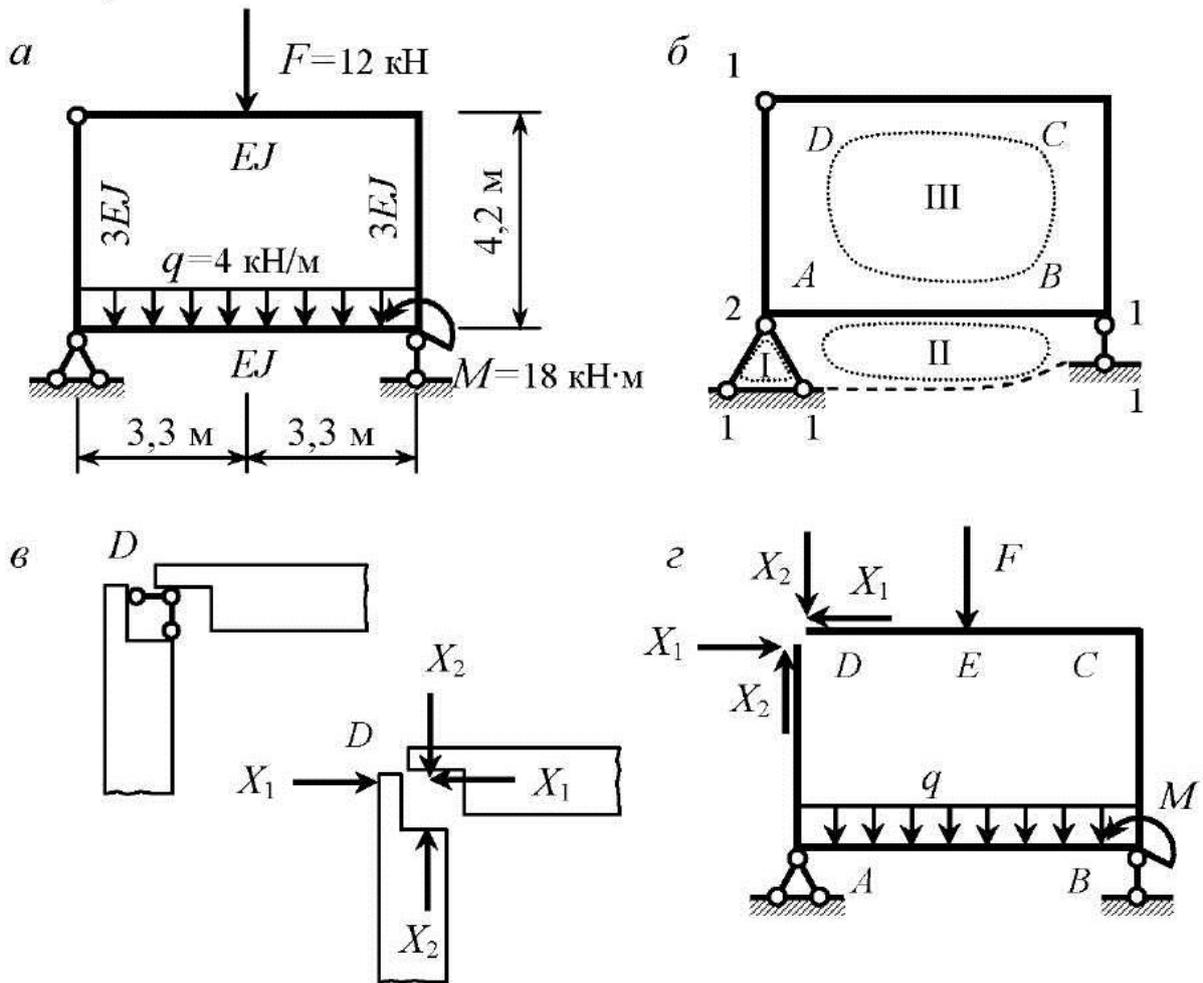


Рис. 2.21

Для построения единичных эпюр \bar{M}_1 , \bar{M}_2 и грузовой эпюры M_F загружаем основную систему силами $X_1=1$, $X_2=1$ и внешней нагрузкой.

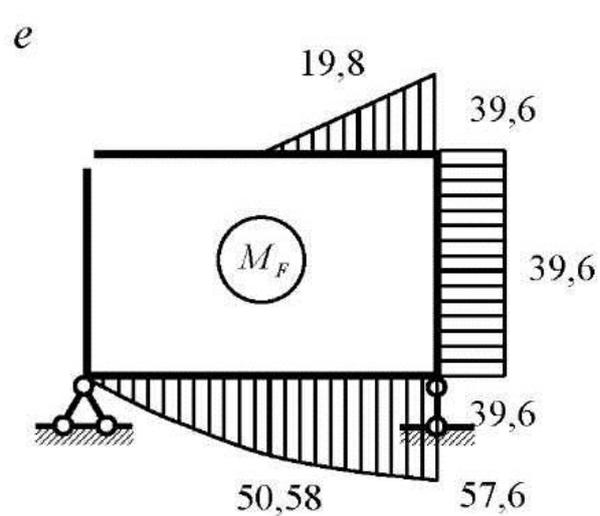
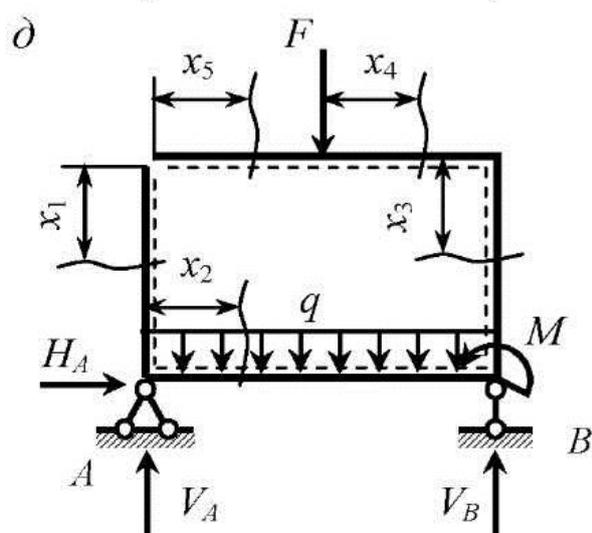
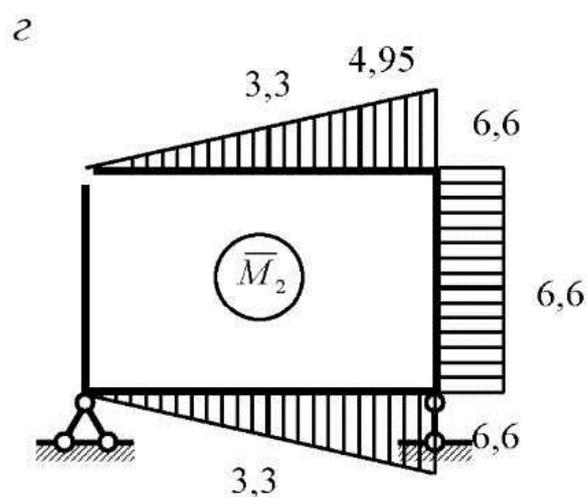
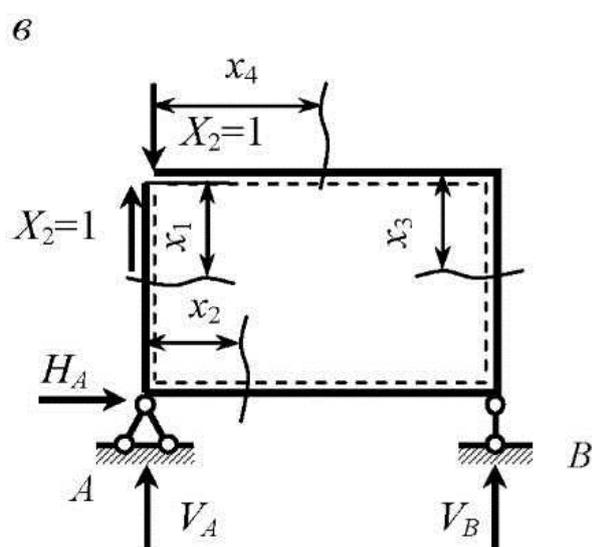
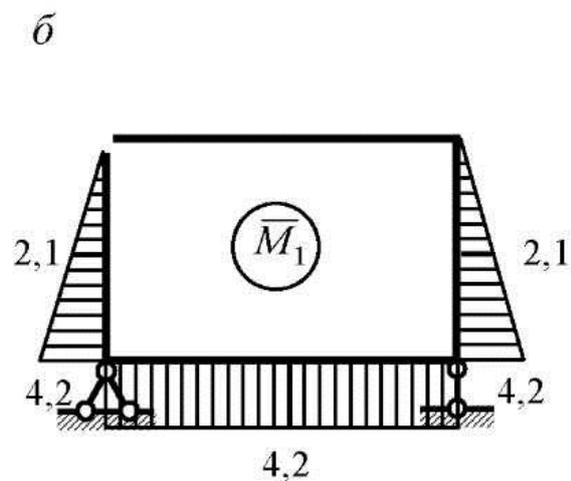
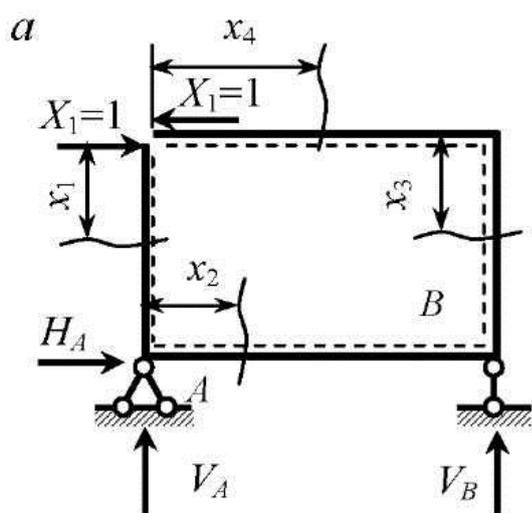


Рис. 2.22

Строим эпюру \bar{M}_1 от $X_1 = 1$ (рис. 2.22, а, б).

Находим опорные реакции:

$$\sum x = X_1 - X_1 + H_A = 0; \quad H_A = X_1 - X_1 = 0;$$

$$\sum m_A = X_1 \cdot 4,2 - X_1 \cdot 4,2 + V_B \cdot 6,6 = 0;$$

$$V_B = \frac{X_1 \cdot 4,2 - X_1 \cdot 4,2}{6,6} = 0;$$

$$\sum y = V_A + V_B = 0; \quad V_A = -V_B = 0.$$

Найдем изгибающие моменты, разделив раму на четыре участка:

$$0 \leq x_1 \leq 4,2 \text{ м}; \quad \bar{M}_1 = -X_1 \cdot x_1;$$

$$\text{при } x_1 = 0 \quad \bar{M}_1 = 0; \quad \text{при } x_1 = 4,2 \quad \bar{M}_1 = -4,2.$$

$$0 \leq x_2 \leq 6,6 \text{ м}; \quad \bar{M}_1 = -X_1 \cdot 4,2 - V_A \cdot x_2 = -4,2.$$

$$0 \leq x_3 \leq 4,2 \text{ м}; \quad \bar{M}_1 = -X_1 \cdot x_3;$$

$$\text{при } x_3 = 0 \quad \bar{M}_1 = 0; \quad \text{при } x_3 = 4,2 \quad \bar{M}_1 = -4,2.$$

$$0 \leq x_4 \leq 6,6 \text{ м}; \quad \bar{M}_1 = 0.$$

Строим эпюру \bar{M}_2 от $X_2 = 1$ (рис. 2.22, в, г).

$$\sum x = H_A = 0; \quad \sum m_A = V_B \cdot 6,6 = 0; \quad V_B = 0;$$

$$\sum y = V_A + V_B + X_2 - X_2 = 0; \quad V_A = -X_2 + X_2 - V_B = 0.$$

$$0 \leq x_1 \leq 4,2 \text{ м}; \quad \bar{M}_2 = 0.$$

$$0 \leq x_2 \leq 6,6 \text{ м}; \quad \bar{M}_2 = -X_1 \cdot x_2 - V_A \cdot x_2;$$

$$\text{при } x_2 = 0 \quad \bar{M}_2 = 0; \quad \text{при } x_2 = 6,6 \quad \bar{M}_2 = -6,6.$$

$$0 \leq x_3 \leq 4,2 \text{ м}; \quad \bar{M}_2 = -X_2 \cdot 6,6 = -6,6;$$

$$0 \leq x_4 \leq 6,6 \text{ м}; \quad \bar{M}_2 = -X_2 \cdot x_4;$$

$$\text{при } x_4 = 0 \quad \bar{M}_2 = 0; \quad \text{при } x_4 = 6,6 \quad \bar{M}_2 = -6,6.$$

Строим эпюру M_F от заданной нагрузки (рис. 2.22, д, е).

$$\sum x = H_A = 0; \quad \sum m_A = -F \cdot 3,3 + V_B \cdot 6,6 - q \cdot 6,6 \cdot 3,3 + M = 0;$$

$$V_B = \frac{F \cdot 3,3 + q \cdot 6,6 \cdot 3,3 - M}{6,6} = 16,473 \text{ кН.}$$

$$\sum y = V_A - F - q \cdot 6,6 + V_B = 0;$$

$$V_A = F + q \cdot 6,6 - V_B = 21,927 \text{ кН.}$$

Найдем изгибающие моменты от внешней нагрузки, разделив раму на пять участков:

$$0 \leq x_1 \leq 4,2 \text{ м; } M_F = 0;$$

$$0 \leq x_2 \leq 6,6 \text{ м; } M_F = -V_A \cdot x_2 + q \frac{x_2^2}{2};$$

$$\text{при } x_2 = 0 \quad M_F = 0; \quad \text{при } x_2 = 3,3 \quad M_F = -50,58 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\text{при } x_2 = 6,6 \quad M_F = -57,6 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

$$0 \leq x_3 \leq 6,6 \text{ м; } M_F = -F \cdot 3,3 = -39,6 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

$$0 \leq x_4 \leq 3,3 \text{ м; } M_F = -F \cdot x_4;$$

$$\text{при } x_4 = 0 \quad M_F = 0; \quad \text{при } x_4 = 3,3 \quad M_F = -39,6 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

$$0 \leq x_5 \leq 3,3 \text{ м; } M_F = 0.$$

Для вычисления коэффициентов канонических уравнений используем формулу Симпсона (2.5):

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \sum \int \frac{\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1}{EJ} ds = \frac{4,2}{6 \cdot 3EJ} [0 \cdot 0 + 4 \cdot 2,1 \cdot 2,1 + 4,2 \cdot 4,2] + \\ &+ \frac{6,6}{6EJ} [4,2 \cdot 4,2 + 4 \cdot 4,2 \cdot 4,2 + 4,2 \cdot 4,2] + \\ &+ \frac{4,2}{6 \cdot 3EJ} [0 \cdot 0 + 4 \cdot 2,1 \cdot 2,1 + 4,2 \cdot 4,2] = \frac{132,888}{EJ}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{12} = \delta_{21} &= \sum \int \frac{\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_2}{EJ} ds = \frac{6,6}{6EJ} [4,2 \cdot 0 + 4 \cdot 4,2 \cdot 3,3 + 4,2 \cdot 6,6] + \\ &+ \frac{4,2}{6 \cdot 3EJ} [0 \cdot 6,6 + 4 \cdot 2,1 \cdot 6,6 + 4,2 \cdot 6,6] = \frac{110,880}{EJ}; \end{aligned}$$

$$\delta_{22} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 \cdot \bar{M}_2}{EJ} ds = \frac{6,6}{6EJ} [0 \cdot 0 + 4 \cdot 3,3 \cdot 3,3 + 6,6 \cdot 6,6] +$$

$$+ \frac{4,2}{6 \cdot 3EJ} [6,6 \cdot 6,6 + 4 \cdot 6,6 \cdot 6,6 + 6,6 \cdot 6,6] +$$

$$+ \frac{6,6}{6EJ} [0 \cdot 0 + 4 \cdot 3,3 \cdot 3,3 + 6,6 \cdot 6,6] = \frac{252,648}{EJ}.$$

С помощью суммарной единичной эпюры (рис. 2.23, а) проверяем коэффициенты при неизвестных:

$$\delta_{11} + \delta_{22} + 2\delta_{12} = \frac{1}{EJ} (132,888 + 252,648 + 2 \cdot 110,880) = \frac{607,296}{EJ};$$

$$\delta_{ss} = \sum \int \frac{\bar{M}_s \cdot \bar{M}_s}{EJ} ds = \frac{4,2}{6 \cdot 3EJ} [0 \cdot 0 + 4 \cdot 2,1 \cdot 2,1 + 4,2 \cdot 4,2] +$$

$$+ \frac{6,6}{6EJ} [4,2 \cdot 4,2 + 4 \cdot 7,5 \cdot 7,5 + 10,8 \cdot 10,8] +$$

$$+ \frac{4,2}{6 \cdot 3EJ} [6,6 \cdot 6,6 + 4 \cdot 8,7 \cdot 8,7 + 10,8 \cdot 10,8] +$$

$$+ \frac{6,6}{6EJ} [0 \cdot 0 + 4 \cdot 3,3 \cdot 3,3 + 6,6 \cdot 6,6] = \frac{607,296}{EJ}.$$

Находим грузовые коэффициенты:

$$\Delta_{1F} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \cdot M_F}{EJ} ds = \frac{6,6}{6EJ} [4,2 \cdot 0 + 4 \cdot 4,2 \cdot 50,58 + 4,2 \cdot 57,6] +$$

$$+ \frac{4,2}{6 \cdot 3EJ} [0 \cdot 39,6 + 4 \cdot 2,1 \cdot 39,6 + 4,2 \cdot 39,6] = \frac{1317,254}{EJ};$$

$$\Delta_{2F} = \sum \int \frac{M_F \cdot \bar{M}_2}{EJ} ds = \frac{6,6}{6EJ} [0 \cdot 0 + 4 \cdot 3,3 \cdot 50,58 + 6,6 \cdot 57,6] +$$

$$+ \frac{4,2}{6 \cdot 3EJ} [6,6 \cdot 39,6 + 4 \cdot 6,6 \cdot 39,6 + 6,6 \cdot 39,6] +$$

$$+ \frac{3,3}{6EJ} [3,3 \cdot 0 + 4 \cdot 4,95 \cdot 19,8 + 6,6 \cdot 39,6] = \frac{1877,872}{EJ}.$$

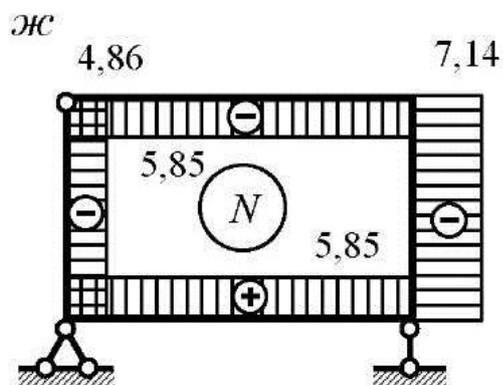
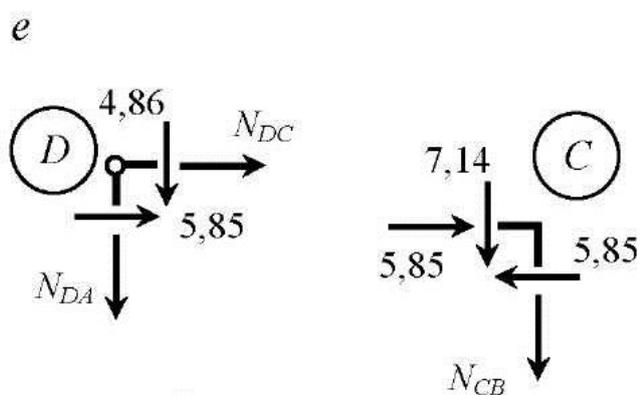
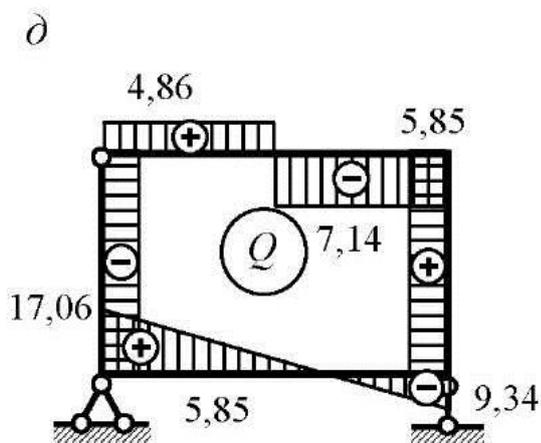
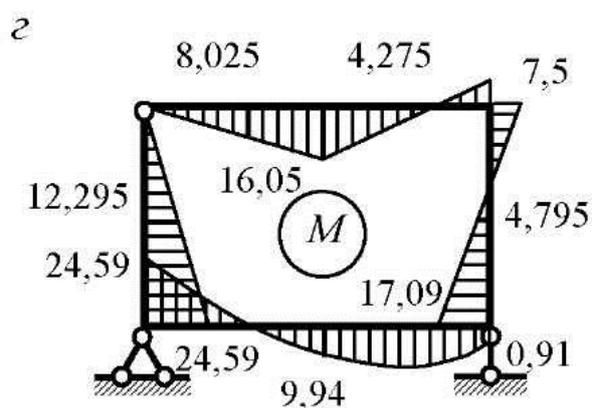
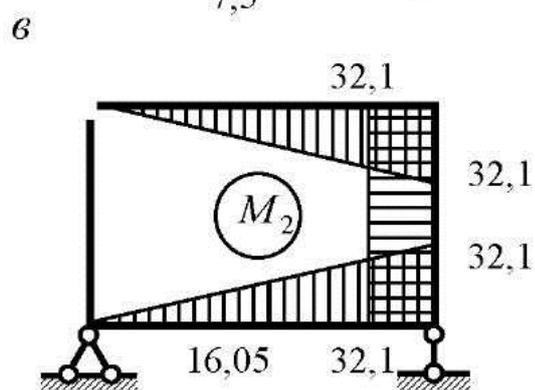
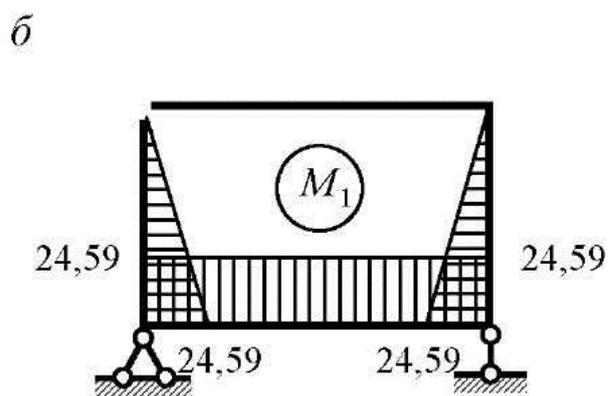
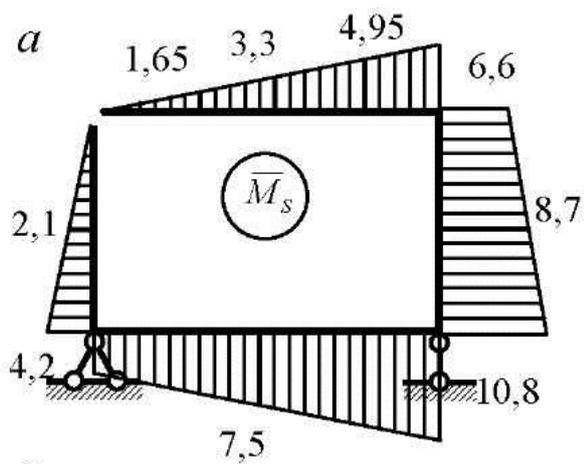


Рис. 2.23

Проверяем правильность вычисления грузовых коэффициентов:

$$\Delta_{1F} + \Delta_{2F} = \frac{1}{EJ} (1317,254 + 1877,872) = \frac{3195,126}{EJ};$$

$$\begin{aligned} \Delta_{SF} &= \sum \int \frac{M_F \cdot \bar{M}_S}{EJ} ds = \frac{6,6}{6EJ} [4,2 \cdot 0 + 4 \cdot 7,5 \cdot 50,58 + 10,8 \cdot 57,6] + \\ &+ \frac{4,2}{6 \cdot 3EJ} [6,6 \cdot 39,6 + 4 \cdot 8,7 \cdot 39,6 + 10,8 \cdot 39,6] + \\ &+ \frac{3,3}{6EJ} [3,3 \cdot 0 + 4 \cdot 4,95 \cdot 19,8 + 6,6 \cdot 39,6] = \frac{3195,126}{EJ}. \end{aligned}$$

Решаем систему канонических уравнений метода сил:

$$\begin{cases} \frac{132,888}{EJ} X_1 + \frac{110,880}{EJ} X_2 + \frac{1317,254}{EJ} = 0, \\ \frac{110,880}{EJ} X_1 + \frac{252,648}{EJ} X_2 + \frac{1877,872}{EJ} = 0. \end{cases}$$

$$X_1 = -5,855 \text{ кН}; \quad X_2 = -4,863 \text{ кН}.$$

Проверяем правильность решения:

$$132,888(-5,855) + 110,88(-4,863) + 1317,254 = -0,015;$$

$$110,88(-5,855) + 252,648(-4,863) + 1877,872 = 0,042.$$

Эпюры $M_1 = \bar{M}_1 \cdot X_1$, $M_2 = \bar{M}_2 \cdot X_2$ и окончательная эпюра изгибающих моментов M показаны на рис. 2.23, б, в, г.

Выполняем деформационную проверку:

$$\begin{aligned} \Delta_S &= \sum \int \frac{\bar{M}_S \cdot M}{EJ} dx = \frac{4,2}{6 \cdot 3EJ} [0 \cdot 0 - 4 \cdot 2,1 \cdot 12,295 - 4,2 \cdot 24,59] + \\ &+ \frac{6,6}{6EJ} [-4,2 \cdot 24,59 + 4 \cdot 7,5 \cdot 9,94 + 10,8 \cdot 0,91] + \\ &+ \frac{4,2}{6 \cdot 3EJ} [6,6 \cdot 7,5 - 4 \cdot 8,7 \cdot 4,795 - 10,8 \cdot 17,09] + \\ &+ \frac{3,3}{6EJ} [-3,3 \cdot 16,05 - 4 \cdot 4,95 \cdot 4,275 + 6,6 \cdot 7,5] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{3,3}{6EJ} [0 \cdot 0 - 4 \cdot 1,65 \cdot 8,025 - 3,3 \cdot 16,05] = -\frac{48,196}{EJ} + \frac{225,225}{EJ} - \\
 & - \frac{70,452}{EJ} - \frac{48,461}{EJ} - \frac{58,262}{EJ} = \frac{225,225}{EJ} - \frac{225,371}{EJ} = -\frac{0,146}{EJ} \approx 0.
 \end{aligned}$$

Эпюры поперечных сил и продольных сил построены аналогично примеру 2.1 (рис. 2.23, д–ж).

Проверку равновесия рамы при действии на нее заданной нагрузки и опорных реакций в данном примере выполнять не требуется, т. к. все внешние связи в заданной системе являются абсолютно необходимыми и их величины были найдены при построении грузовой эпюры.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.3. Определить количество лишних связей и выбрать основные системы метода сил (рис. 2.24).

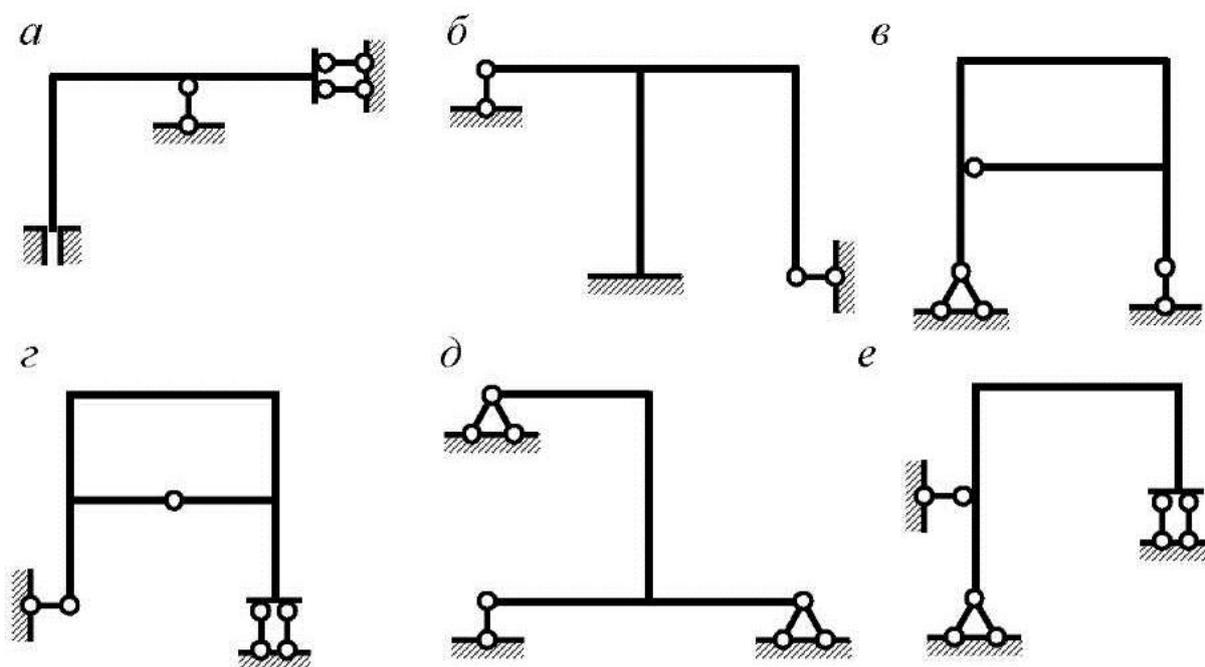


Рис. 2.24

Задача 2.4. Построить эпюру изгибающих моментов от заданной нагрузки (рис. 2.25). Жесткости сечений всех стержней одинаковы и равны EJ .

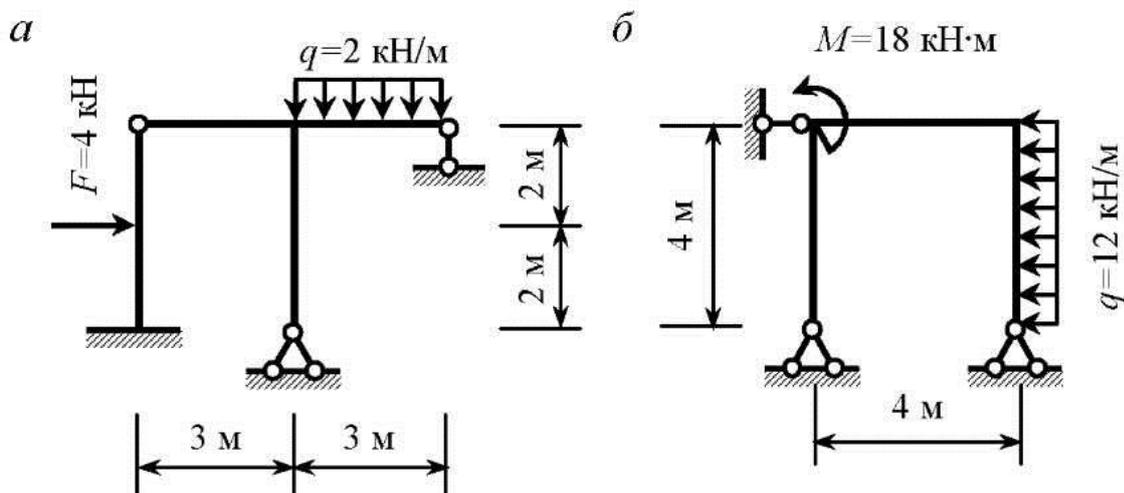


Рис. 2.25

Контрольные вопросы

1. Какие системы называют статически неопределимыми?
2. Какие методы используются для расчета статически неопределимых систем?
3. Как устанавливается степень статической неопределимости?
4. Дайте определения связям, абсолютно и условно необходимым.
5. Каким требованиям должна отвечать основная система в методе сил?
6. Как составляются канонические уравнения в методе сил, и какие требования они отражают?
7. В чем заключается физический смысл коэффициентов при неизвестных в канонических уравнениях метода сил?
8. Как определяются коэффициенты канонических уравнений метода сил?
9. В чем заключается способ Верещагина?
10. В каких случаях можно использовать для перемножения эпюр формулу Симпсона?

11. Как проверить правильность вычисления коэффициентов при неизвестных и грузовых коэффициентов?

12. Какими способами можно построить окончательные эпюры внутренних усилий?

13. Почему статическая проверка в методе сил является необходимой, но недостаточной?

14. В чем заключается кинематическая (деформационная) проверка?

15. Почему внутренние усилия при силовом воздействии не зависят от абсолютных значений жесткостей, а определяются их соотношением?

16. В каком случае внутренние усилия будут зависеть от абсолютных значений жесткостей?

17. Какова последовательность расчета статически неопределимых систем методом сил?

3. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ РАМЫ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

В ряде случаев расчет статически неопределимых систем методом сил требует большого объема вычислений. Если выбрать в качестве неизвестных перемещения узлов (вертикальные, горизонтальные и угловые), то расчет таких систем удастся существенно упростить. Такой подход получил название метода перемещений [1, 2, 4].

Например, для рамы, изображенной на рис. 3.1, *а*, количество лишних связей (число неизвестных по методу сил) равно восьми, а количество неизвестных угловых перемещений равно всего двум (рис. 3.1, *б*).

Еще одним преимуществом метода перемещений является то, что одновременно с определением внутренних усилий (точнее, до этого этапа) находятся перемещения, необходимые для проверки выполнения условия жесткости. В методе сил для вычисления перемещений необходимо выполнить дополнительный расчет (как правило, не один).

Построение единичных эпюр и грузовой эпюры изгибающих моментов, вычисление коэффициентов уравнений и проверки расчета в методе перемещений оказывается существенно проще, чем в методе сил.

Основные этапы метода перемещений достаточно просто программируются и положены в основу подавляющего числа программных комплексов для расчета конструкций на ПЭВМ (в форме метода конечных элементов).

Следует отметить, что существуют и обратные примеры. Например, для рамы (рис. 3.1, *б*) количество неизвестных метода перемещений равно семи, в то время как при расчете по методу сил – всего одно неизвестное.

Кроме того, таблицы реакций и внутренних усилий для расчета рам методом перемещений (прил. 2) получены расчетом по методу сил.

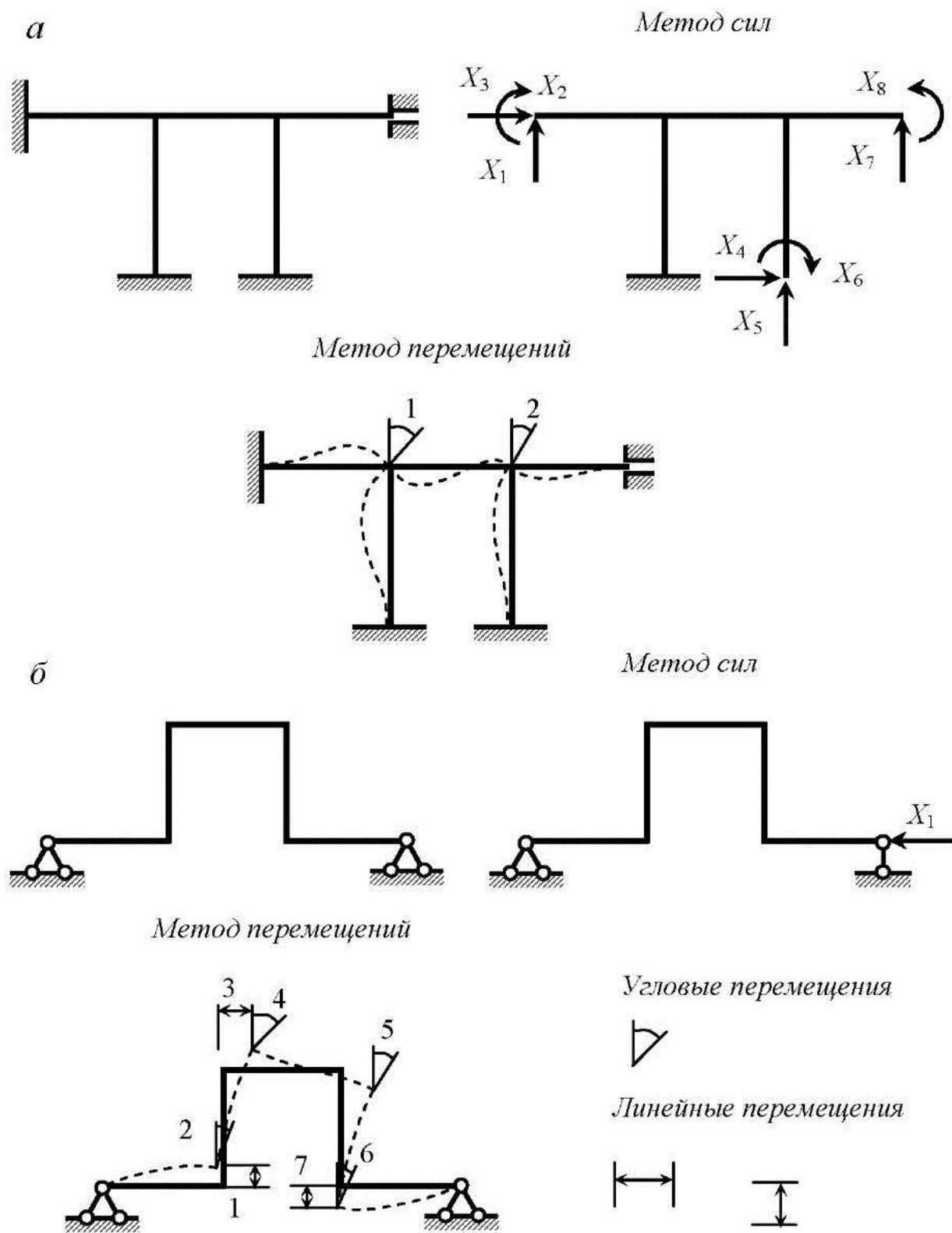


Рис. 3.1

Общее число неизвестных метода перемещений, называемое степенью кинематической неопределимости системы, определяют по формуле

$$n = n_y + n_l, \quad (3.1)$$

где n_y – число неизвестных углов поворота; n_l – число неизвестных линейных перемещений узлов.

Число неизвестных углов поворота равно числу «жестких» узлов, следовательно, определение n_y сводится к простому подсчету числа жестких узлов рамы.

При определении числа линейных перемещений узлов n_l не учитывается сближение концов стержня. В результате число независимых линейных перемещений узлов заданной системы будет равно числу степеней свободы шарнирной схемы, полученной из заданной системы введением шарниров во все узлы (включая опорные). При этом все статически определимые консоли, если они имеются в заданной системе, должны быть предварительно отброшены. Если число степеней свободы для шарнирной схемы больше нуля, то это означает, что схема представляет геометрически изменяемую систему. Направления перемещений узлов этой системы совпадают с направлениями линейных перемещений заданной системы.

При расчете рам методом перемещений основная система получается из заданной введением дополнительных связей. При этом связи вводятся таким образом, чтобы основная система представляла собой совокупность неподвижных однопролетных стержней с жестко заделанными или шарнирно опертыми концами. Для этого в «жесткие» узлы вводятся связи, препятствующие повороту, – плавающие заделки. Кроме этого, в заданную систему необходимо ввести связи, препятствующие линейным перемещениям узлов рамы, – линейные связи. В отличие от метода сил, основная система метода перемещений выбирается единственным образом.

При вычислении реакций r_{ik} и R_{iF} могут быть использованы два способа: статический способ вычисления и способ перемножения эпюр.

Статический способ основан на использовании уравнений равновесия для определения реакций во введенных связях. Коэффициенты при неизвестных и свободные члены уравнений (3.2), представляющие реактивные моменты в плавающих заделках, определяются из условия равновесия вырезанных из основной системы узлов. Коэффициенты при неизвестных и свободные члены уравнений (3.2), представляющие реактивные силы во введенных линейных связях, можно определить с помощью уравнений равновесия сил, действующих на отсеченную часть основной системы. При составлении уравнений равновесия искомая реакция направляется в сторону соответствующего перемещения.

Способ перемножения эпюр целесообразно применять при расчете рам с наклонными стойками. Реакции r_{ik} и R_{iF} находят по формулам [1, 2, 4]:

$$r_{ik} = \sum \int \frac{\bar{M}_i \cdot \bar{M}_k}{EJ} ds, \quad R_{iF} = - \sum \int \frac{M_F^0 \cdot \bar{M}_i}{EJ} ds, \quad (3.3)$$

где \bar{M}_i , \bar{M}_k – эпюры от единичных перемещений, построенные в основной системе метода перемещений; M_F^0 – эпюра моментов от нагрузки, построенная в статически определимой системе, образованной из заданной рамы (при этом обязательно следует устранить связь по направлению соответствующего перемещения). Это означает, что при определении грузовой реакции, соответствующей угловому перемещению, необходимо в жесткий узел врезать шарнир.

Способ перемножения эпюр может быть использован в качестве контроля правильности вычисления коэффициентов и свободных членов канонических уравнений, найденных статическим способом.

После определения из канонических уравнений неизвестных перемещений Z_1, Z_2, \dots, Z_n эпюра изгибающих моментов от нагрузки в заданной системе строится по формуле

$$M = M_{\text{пр}} + \bar{M}_1 \cdot Z_1 + \bar{M}_2 \cdot Z_2 + \dots + \bar{M}_n \cdot Z_n, \quad (3.4)$$

а эпюры поперечных и продольных сил строятся аналогично расчету рамы методом сил (глава 2 настоящего учебного пособия).

Проверка построенной окончательной эпюры изгибающих моментов заключается в проверке выполнения условий равновесия. Если реакции во всех добавленных связях равны нулю, то эпюра M построена правильно. Поскольку единичные эпюры и грузовая эпюра в основной системе удовлетворяют условиям равновесия только совместно с реакциями связей, то такая проверка, в отличие от статической проверки в методе сил, является достаточной. В том случае, если проверка не выполняется для какой-либо одной добавленной связи, следует прежде всего проверить правильность вычисления главного и грузового коэффициентов для этой связи.

Наряду со статической проверкой может быть использована и кинематическая проверка (универсальная или построчная), применяемая в методе сил. Для этого необходимо окончательную эпюру M умножить на единичные эпюры (или их сумму), построенные в основной системе метода сил для заданной рамы.

Пример 3.1. Для рамы, показанной на рис. 3.2, *а*, требуется построить эпюры внутренних усилий M , Q , N и выполнить проверки расчета.

Подсчитаем число неизвестных перемещений (рис. 3.2, *б*). Рама имеет два жестких узла D и E , следовательно, число неизвестных угловых перемещений также равно двум $n_y = 2$.

Число линейных смещений определим по шарнирной схеме, образованной из заданной рамы (рис. 3.2, *в*)

$$n_x = 3D - 2Ш_0 - C_0 = 3 \cdot 4 - 2(1 + 2) - 5 = 1.$$

Действительно, узлы рамы D и E не могут перемещаться по вертикали из-за опорных закреплений в узлах A , B и C . Возможно только горизонтальное перемещение, которое будет одинаковым для узлов D и E , так как они связаны между собой стержнем DE .

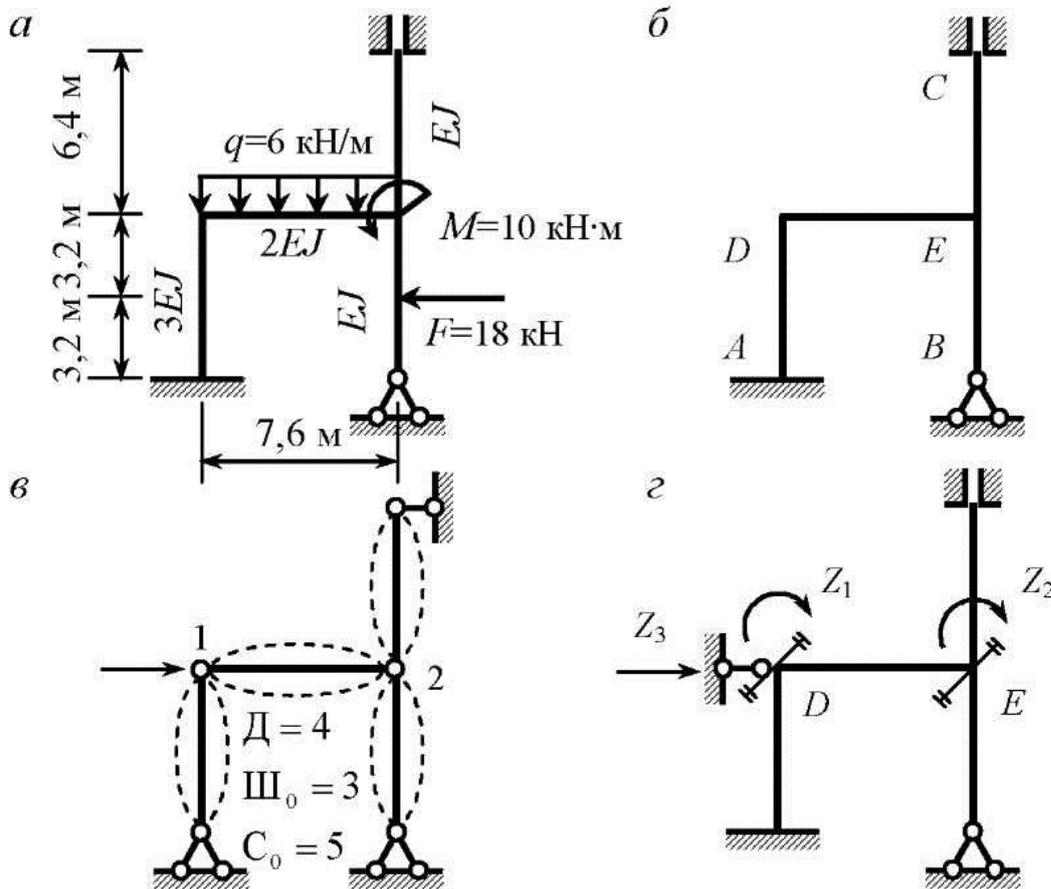


Рис. 3.2

Таким образом, степень кинематической неопределимости будет равна трем: $n = n_y + n_n = 2 + 1 = 3$.

Основную систему метода перемещений получим, добавляя в жесткие узлы D и E плавающие заделки и горизонтальную связь, препятствующую смещению узлов по горизонтали в узел D (рис. 3.2, б). Для получения эквивалентной системы прикладываем к основной системе перемещения Z_1 , Z_2 , Z_3 и заданную нагрузку.

Система канонических уравнений метода перемещений имеет вид:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + R_{1F} = 0, \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2F} = 0, \\ r_{31}Z_1 + r_{32}Z_3 + r_{33}Z_3 + R_{3F} = 0. \end{cases}$$

Прикладываем в основной системе угол поворота $Z_1 = 1$. Чертим деформированную схему (рис. 3.3, а) и с помощью таблиц (прил. 2) строим эпюру изгибающих моментов \bar{M}_1 (рис. 3.3, б).

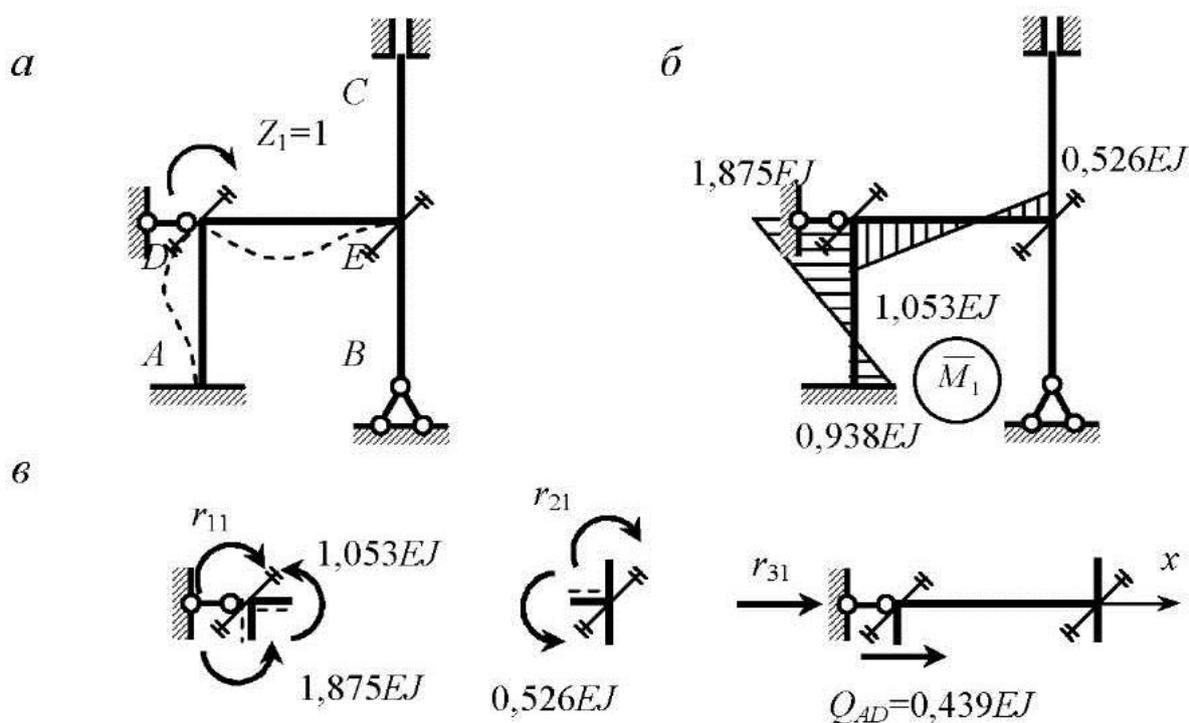


Рис. 3.3

Вычисляем ординаты эпюры \bar{M}_1 :

$$M_{AD}^{(D)} = \frac{4EJ_{AD}}{\ell_{AD}} = \frac{4 \cdot 3EJ}{6,4} = 1,875EJ;$$

$$M_{AD}^{(A)} = \frac{2EJ_{AD}}{\ell_{AD}} = \frac{2 \cdot 3EJ}{6,4} = 0,938EJ;$$

$$M_{DE}^{(D)} = \frac{4FJ_{DE}}{\ell_{DE}} = \frac{4 \cdot 2FJ}{7,6} = 1,053EJ;$$

$$M_{DE}^{(E)} = \frac{2EJ_{DE}}{\ell_{DE}} = \frac{2 \cdot 2EJ}{7,6} = 0,526EJ.$$

Для определения реакций r_{11}, r_{21}, r_{31} вырезаем узлы D, E и проводим замкнутое сечение, рассекающее вертикальные стойки (рис. 3.3, в). Поперечную силу в стержне AD определим по формуле

$$Q_{AD} = \frac{M_{AD}^{(A)} - M_{AD}^{(D)}}{\ell_{AD}} = \frac{-0,938EJ - 1,875EJ}{6,4} = -0,439EJ.$$

Из условий равновесия получаем:

$$\sum m_D = -r_{11} + 1,875EJ + 1,053EJ = 0;$$

$$r_{11} = 1,875EJ + 1,053EJ = 2,928EJ;$$

$$\sum m_E = -r_{21} + 0,526EJ = 0; \quad r_{21} = 0,526EJ;$$

$$\sum x = r_{31} + 0,439EJ = 0; \quad r_{31} = -0,439EJ.$$

Эпюра моментов \bar{M}_2 , построенная от угла поворота $Z_2 = 1$, показана на рис. 3.4, б.

Ординаты эпюры:

$$M_{DE}^{(E)} = \frac{4FJ_{DE}}{\ell_{DE}} = \frac{4 \cdot 2FJ}{7,6} = 1,053EJ;$$

$$M_{DE}^{(D)} = \frac{2EJ_{DE}}{\ell_{DE}} = \frac{2 \cdot 2EJ}{7,6} = 0,526EJ;$$

$$M_{CE}^{(E)} = \frac{4EJ_{CE}}{\ell_{CE}} = \frac{4EJ}{6,4} = 0,625EJ;$$

$$M_{CE}^{(C)} = \frac{2EJ_{CE}}{\ell_{CE}} = \frac{3EJ}{6,4} = 0,313EJ;$$

$$M_{BE}^{(E)} = \frac{3FJ_{BE}}{\ell_{BE}} = \frac{3FJ}{6,4} = 0,469EJ.$$

Поперечные силы в стержнях BE и CE определяем по формулам:

$$Q_{BE} = \frac{M_{BE}^{(B)} - M_{BE}^{(E)}}{l_{BE}} = \frac{0 - 0,469EJ}{6,4} = -0,073EJ;$$

$$Q_{CE} = \frac{M_{CE}^{(E)} - M_{CE}^{(C)}}{l_{CE}} = \frac{-0,625EJ - 0,313EJ}{6,4} = -0,146EJ.$$

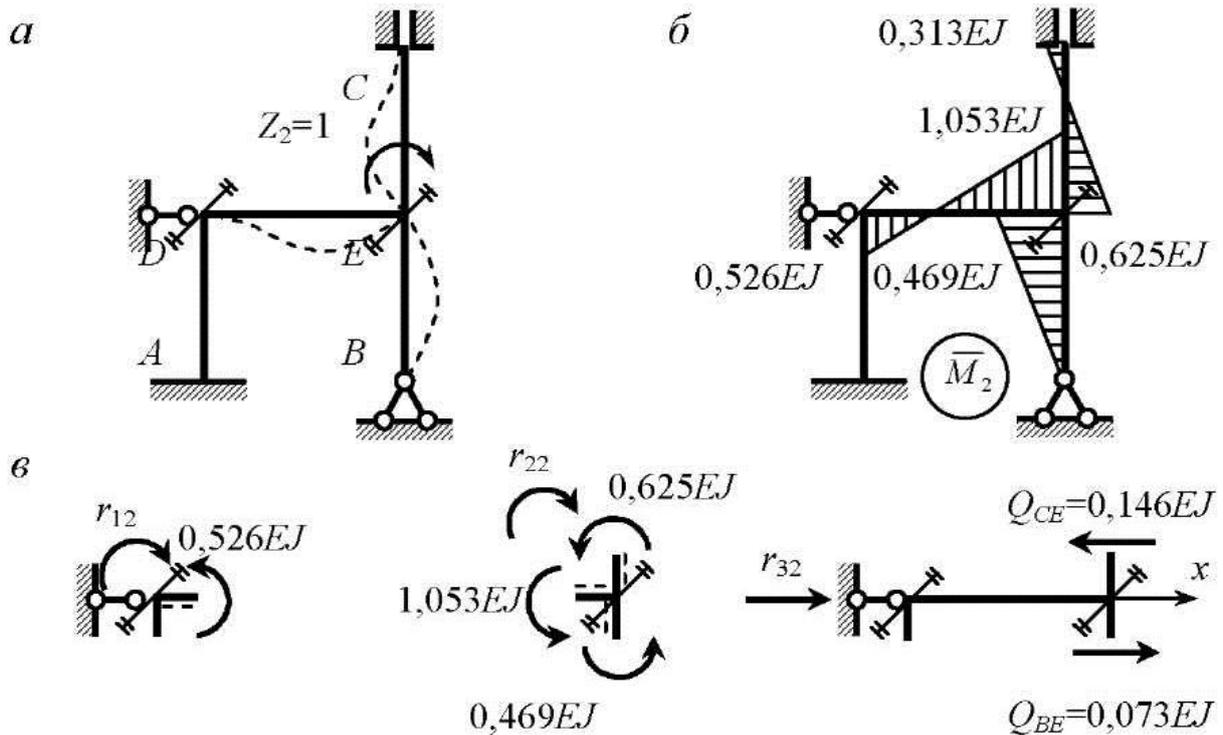


Рис. 3.4

Реакции в связях r_{12}, r_{22}, r_{32} находим из условий равновесия (рис. 3.4, в):

$$\sum m_D = -r_{12} + 0,526EJ = 0; \quad r_{21} = 0,526EJ = r_{12};$$

$$\sum m_E = -r_{22} + 1,053EJ + 0,469EJ + 0,625EJ = 0;$$

$$r_{22} = 1,053EJ + 0,469EJ + 0,625EJ = 2,147EJ;$$

$$\sum x = r_{32} + 0,073EJ - 0,146EJ = 0;$$

$$r_{32} = 0,146EJ - 0,073EJ = 0,073EJ.$$

Для построения эпюры моментов \bar{M}_3 прикладываем в основной системе горизонтальное перемещение $Z_3 = 1$ (рис. 3.5, а).

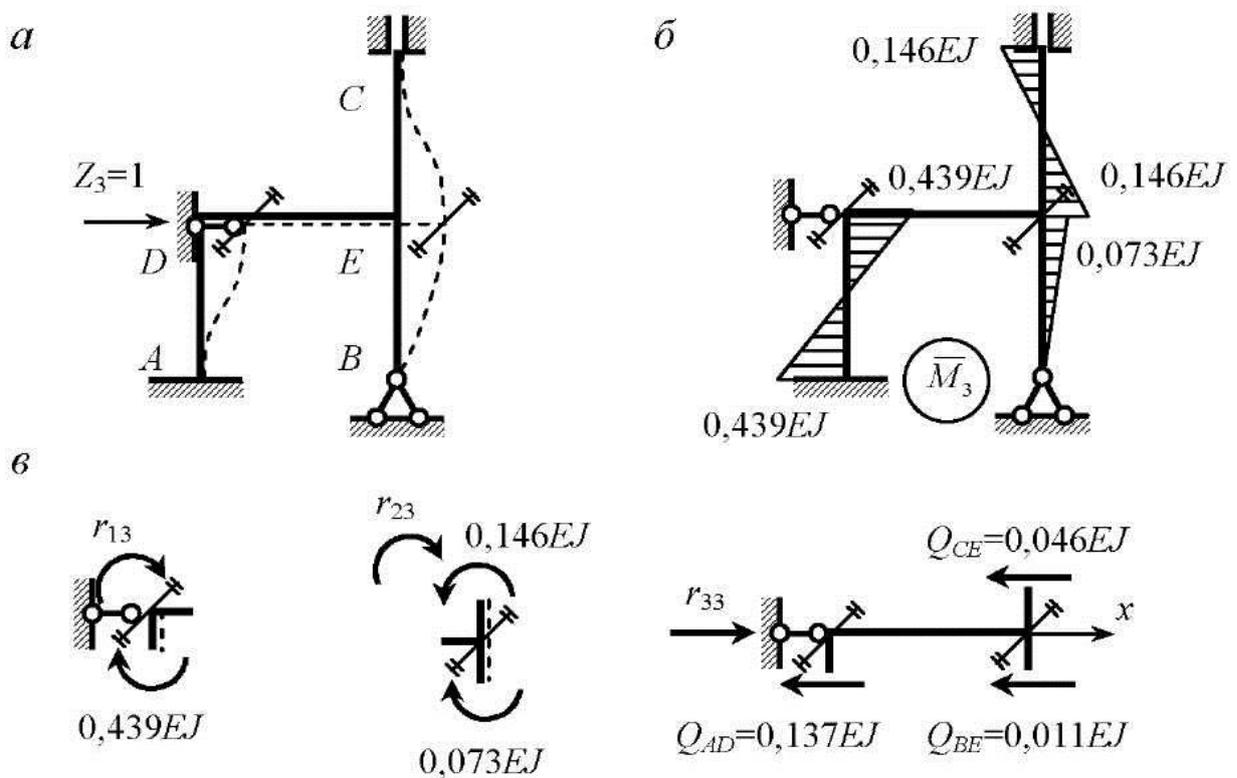


Рис. 3.5

Вычисляем ординаты эпюры \bar{M}_3 (рис. 3.5, б):

$$M_{AD}^{(D)} = M_{AD}^{(A)} = \frac{6EJ_{AD}}{\ell_{AD}^2} = \frac{6 \cdot 3EJ}{6,4^2} = 0,439EJ;$$

$$M_{EC}^{(E)} = M_{CE}^{(C)} = \frac{6EJ_{CE}}{\ell_{CE}^2} = \frac{6EJ}{6,4^2} = 0,146EJ;$$

$$M_{BE}^{(E)} = \frac{3EJ_{BE}}{\ell_{BE}^2} = \frac{3EJ}{6,4^2} = 0,073EJ.$$

Находим поперечные силы в стержнях AD , BE и CE :

$$Q_{AD} = \frac{M_{AD}^{(A)} - M_{AD}^{(D)}}{\ell_{AD}} = \frac{0,439EJ - (-0,439EJ)}{6,4} = 0,137EJ;$$

$$Q_{BE} = \frac{M_{BE}^{(E)} - M_{BE}^{(B)}}{\ell_{BE}} = \frac{0,073EJ - 0}{6,4} = 0,011EJ;$$

$$Q_{CE} = \frac{M_{CE}^{(E)} - M_{CE}^{(C)}}{\ell_{CE}} = \frac{-0,146EJ - 0,146EJ}{6,4} = -0,046EJ.$$

Реакции в связях r_{13}, r_{23}, r_{33} определяем из условий равновесия:

$$\sum m_D = -r_{13} - 0,439EJ = 0; \quad r_{13} = -0,439EJ = r_{31};$$

$$\sum m_E = -r_{23} + 0,146EJ - 0,073EJ = 0;$$

$$r_{23} = 0,146EJ - 0,073EJ = 0,073EJ = r_{32};$$

$$\sum x = r_{33} - 0,137EJ - 0,011EJ - 0,046EJ = 0;$$

$$r_{33} = 0,137EJ + 0,011EJ + 0,046EJ = 0,194EJ.$$

Грузовую эпюру M_{fc} строим, прикладывая к основной системе заданные нагрузки (рис. 3.6, а).

Ординаты грузовой эпюры (рис. 3.6, б):

$$M_{DE}^{(D)} = M_{DE}^{(D)} = \frac{q\ell_{DE}^2}{12} = \frac{6 \cdot 7,6^2}{12} = 28,88 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{BE}^{(G)} = \frac{5F\ell_{BE}}{32} = \frac{5 \cdot 18 \cdot 6,4}{32} = 18,0 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{BE}^{(E)} = \frac{3F\ell_{BE}}{16} = \frac{3 \cdot 18 \cdot 6,4}{16} = 21,6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Находим поперечную силу в стержне GE :

$$Q_{GE} = \frac{M_{GE}^{(G)} - M_{GE}^{(E)}}{\ell_{GE}} = \frac{18 - (-21,6)}{3,2} = 12,375 \text{ кН}.$$

Реакции в связях R_{1F}, R_{2F}, R_{3F} определяем из условий равновесия:

$$\sum m_D = -R_{1F} - 28,88 = 0; \quad R_{1F} = -28,88 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\sum m_E = -R_{2F} + 28,88 - 21,6 + 10 = 0;$$

$$R_{2F} = 28,88 - 21,6 + 10 = 17,28 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\sum x = R_{3F} - 12,375 = 0; \quad R_{3F} = 12,375 \text{ кН}.$$

Запишем канонические уравнения (3.2), разделив каждое слагаемое на EJ :

$$\begin{cases} 2,928 \cdot Z_1 + 0,526 \cdot Z_2 - 0,439 \cdot Z_3 - \frac{28,88}{EJ} = 0, \\ 0,526 \cdot Z_1 + 2,147 \cdot Z_2 + 0,073 \cdot Z_3 + \frac{17,28}{EJ} = 0, \\ -0,439 \cdot Z_1 + 0,073 \cdot Z_2 + 0,194 \cdot Z_3 + \frac{12,375}{EJ} = 0. \end{cases}$$

Решение этих уравнений дает:

$$Z_1 = \frac{2,922}{EJ}; \quad Z_2 = \frac{-6,909}{EJ}; \quad Z_3 = \frac{-54,578}{EJ}.$$

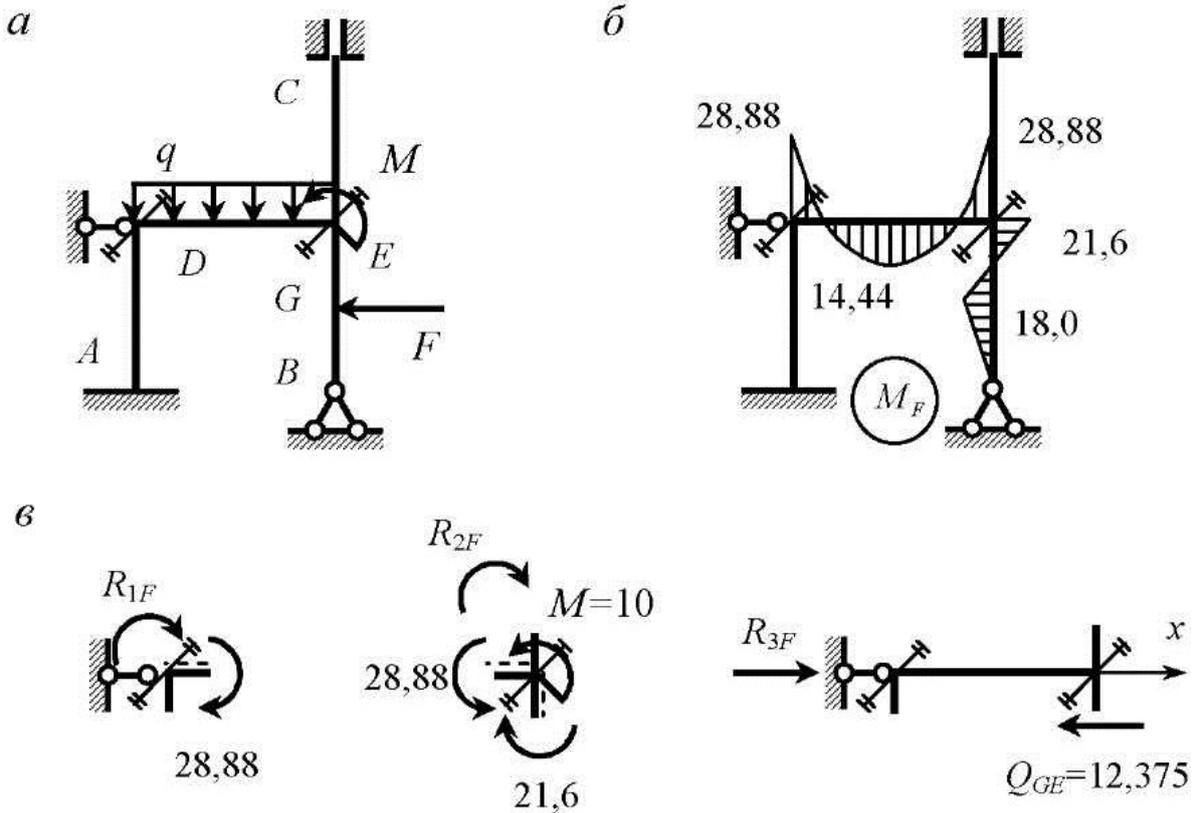


Рис. 3.6

Проверяем правильность решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 2,928 \frac{2,922}{EJ} + 0,526 \frac{(-6,909)}{EJ} - 0,439 \frac{(-54,578)}{EJ} - \frac{28,88}{EJ} = \frac{0,001}{EJ}, \\ 0,526 \frac{2,922}{EJ} + 2,147 \frac{(-6,909)}{EJ} + 0,073 \frac{(-54,578)}{EJ} + \frac{17,28}{EJ} = -\frac{0,001}{EJ}, \\ -0,439 \frac{2,922}{EJ} + 0,073 \frac{(-6,909)}{EJ} + 0,194 \frac{(-54,578)}{EJ} + \frac{12,375}{EJ} = -\frac{0,0002}{EJ}. \end{cases}$$

Единичные эпюры умножаем на найденные значения неизвестных Z_1 , Z_2 и Z_3 (рис. 3.7, а-в). Окончательную эпюру изгибающих моментов (рис. 3.7, г) построим по формуле (3.4)

$$M = M_F + \bar{M}_1 \cdot Z_1 + \bar{M}_2 \cdot Z_2 + \bar{M}_3 \cdot Z_3 = M_F + M_1 + M_2 + M_3.$$

Выполним статическую проверку эпюры M . Для этого вырежем узлы D , E и среднюю часть рамы.

Находим поперечные силы в стержнях AD , EG и CE :

$$Q_{AD} = \frac{M_{AD}^{(A)} - M_{AD}^{(D)}}{l_{AD}} = \frac{-26,70 - 29,440}{6,4} = -8,77 \text{ кН};$$

$$Q_{EG} = \frac{M_{EG}^{(G)} - M_{GE}^{(E)}}{l_{GE}} = \frac{18,37 - (-20,86)}{3,2} = 12,26 \text{ кН};$$

$$Q_{CE} = \frac{M_{CE}^{(E)} - M_{CE}^{(C)}}{l_{CE}} = \frac{12,29 - (-10,13)}{6,4} = 3,50 \text{ кН}.$$

Условия равновесия для узлов D , E , и отсеченной части рамы (рис. 3.7, д) выполняются:

$$\sum m_D = -R_1 + 29,44 - 29,44 = 0; \quad R_1 = 29,44 - 29,44 = 0;$$

$$\sum m_E = -R_2 + 23,14 - 20,86 + 10 - 12,29 = 0;$$

$$R_2 = 23,14 - 20,86 + 10 - 12,29 = -0,01 \approx 0;$$

$$\sum x = R_3 - 8,77 + 12,26 - 3,5 = 0;$$

$$R_3 = 8,77 - 12,26 + 3,5 = 0,01 \approx 0.$$

Следовательно, окончательная эпюра моментов построена правильно.

Для построения эпюры Q рассмотрим каждый участок рамы отдельно.

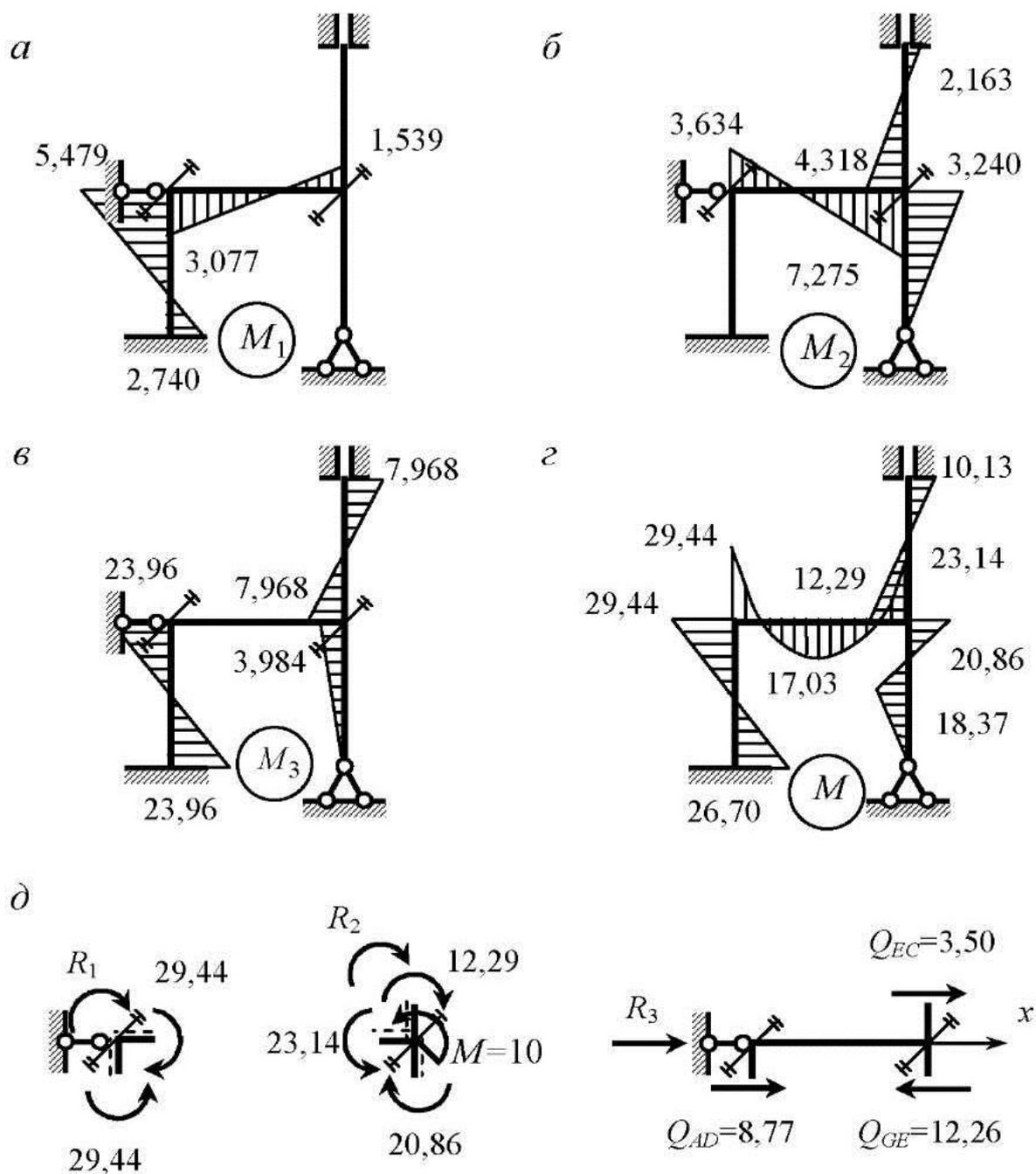


Рис. 3.7

$$Q_{AD} = \frac{-26,70 - 29,44}{6,4} = -8,77 \text{ кН};$$

$$Q_{DE, \text{лев}} = \frac{6 \cdot 7,6}{2} + \frac{-23,14 - (-29,44)}{7,6} = 23,63 \text{ кН};$$

$$Q_{DE, \text{прав}} = -\frac{6 \cdot 7,6}{2} + \frac{-23,14 - (-29,44)}{7,6} = -21,97 \text{ кН};$$

$$Q_{BG} = \frac{0 - 18,37}{3,2} = -5,74 \text{ кН};$$

$$Q_{GE} = \frac{18,37 - (-20,86)}{3,2} = 12,26 \text{ кН};$$

$$Q_{CE} = \frac{12,29 - (-10,13)}{6,4} = 3,50 \text{ кН}.$$

Эпюра поперечных сил показана на рис. 3.8, а.

Продольные силы находим из условия равновесия узлов рамы (рис. 3.8, б). Узел D:

$$\sum x = N_{DE} + 8,77 = 0; N_{DE} = -8,77 \text{ кН};$$

$$\sum y = -N_{AD} - 23,63 = 0; N_{AD} = -23,63 \text{ кН}.$$

Из условия равновесия отсеченной части стержня CE находим $\sum y = -N_{CE} = 0; N_{CE} = 0$.

$$\text{Узел E: } \sum y = -N_{BE} - 21,97 = 0; N_{BE} = -21,97 \text{ кН}.$$

По полученным значениям строим в заданной раме эпюру продольных сил (рис. 3.8, в).

Для проверки построенных эпюр Q и N запишем уравнения равновесия для рамы (рис. 3.8, г):

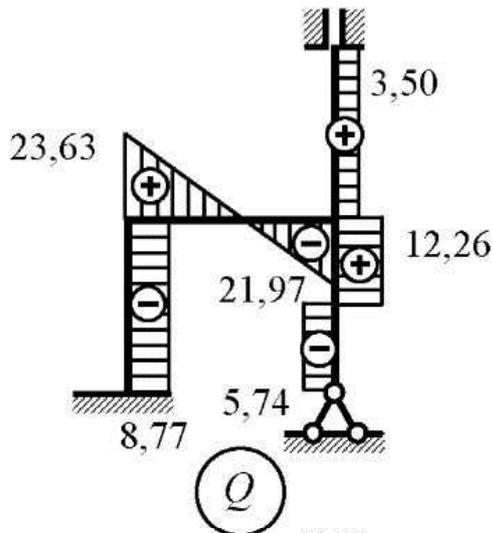
$$\begin{aligned} \sum x &= H_A + H_B + H_C - F = 8,77 + 5,74 + 3,50 - 18 = \\ &= 18,01 - 18 = 0,01 \approx 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum y &= V_A + V_B - q \cdot 7,6 = 23,63 + 21,97 - 6 \cdot 7,6 = \\ &= 45,60 - 45,60 = 0. \end{aligned}$$

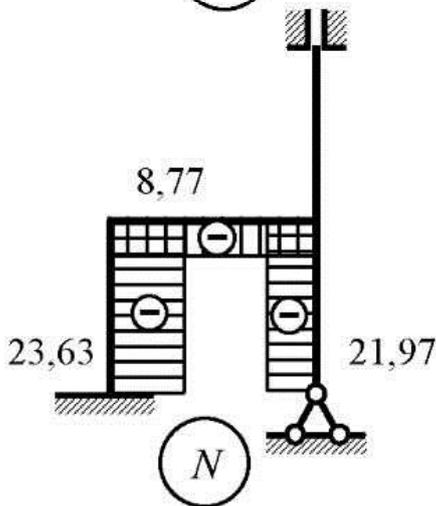
$$\sum m_A = -M_A + F \cdot 3,2 + M + M_C + V_B \cdot 7,6 - H_C \cdot 12,8 - q \times 7,6 \cdot 3,8 = -26,70 + 18 \cdot 3,2 + 10 + 10,13 + 21,97 \cdot 7,6 - 3,50 \times 12,8 - 6 \cdot 7,6 \cdot 3,8 = 244,702 - 244,78 = -0,078 \approx 0.$$

Условия равновесия выполняются.

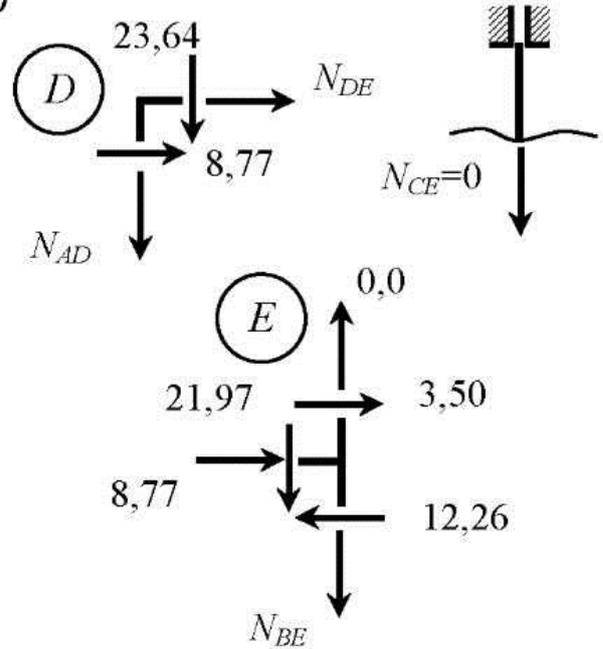
а



б



б



в

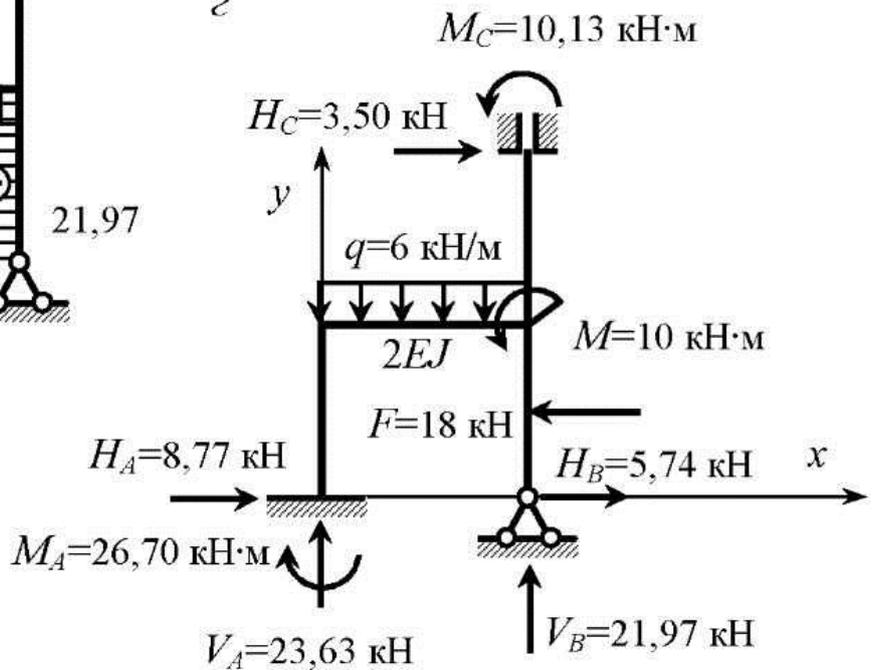


Рис. 3.8

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.2. Определить количество неизвестных и выбрать основную систему метода перемещений (рис. 3.9).

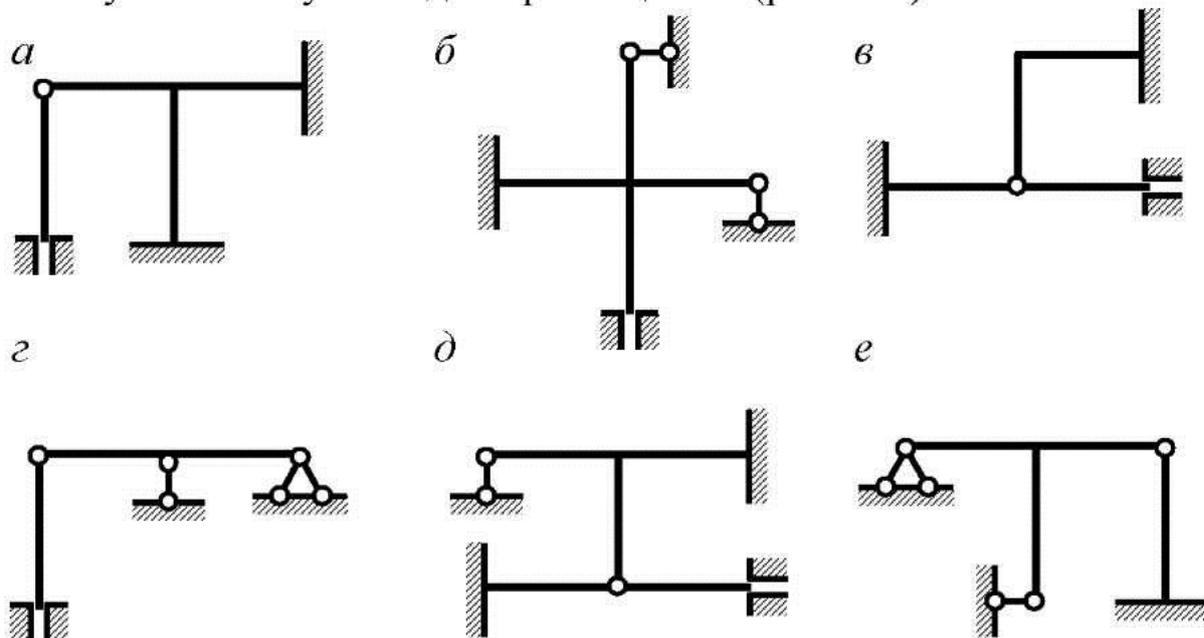


Рис. 3.9

Задача 3.3. Построить эпюру изгибающих моментов от заданной нагрузки (рис. 3.10). Жесткости сечений вертикальных стержней EJ , горизонтальных $2EJ$.

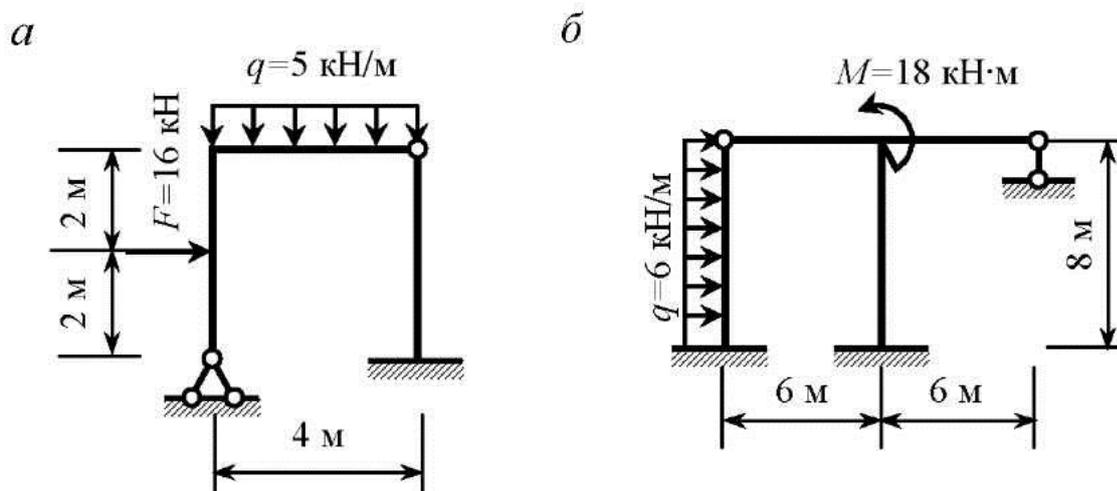


Рис. 3.10

Контрольные вопросы

1. Как определяется количество неизвестных в методе перемещений?
2. Какими гипотезами пользуются при расчете рам методом перемещений?
3. Каким требованиям должна отвечать основная система в методе перемещений?
4. На какие части можно разделить основную систему метода перемещений и почему?
5. Из какого расчета получены табличные эпюры метода перемещений?
6. Как составляются канонические уравнения метода перемещений, и какие условия они выражают?
7. Каким образом строятся единичные эпюры и грузовая эпюра при расчете рам методом перемещений?
8. В чем заключается физический смысл коэффициентов при неизвестных в канонических уравнениях?
9. Как определяются реакции в связях, препятствующих угловым перемещениям?
6. Как определяются реакции в связях, препятствующих линейным перемещениям?
10. Когда целесообразно определять коэффициенты канонических уравнений перемножением эпюр?
11. Как проверить правильность вычисления коэффициентов канонических уравнений метода перемещений?
12. Почему статическая проверка является достаточной проверкой правильности построенных эпюр?
13. Каким образом выполняется деформационная проверка в методе перемещений?
14. Почему внутренние усилия при силовом воздействии не зависят от абсолютных значений жесткостей, а определяются их соотношением?
17. Какова последовательность расчета методом перемещений?

4. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ ФЕРМЫ МЕТОДОМ СИЛ В МАТРИЧНОЙ ФОРМЕ

Современные технологии расчета строительных конструкций подразумевают широкое применение программных комплексов для ПЭВМ. Положенные в их основу численные методы строительной механики невозможно использовать без представления исходной информации и результатов расчета в матричной форме. Разрешающая система уравнений представляет собой систему линейных алгебраических уравнений. Коэффициенты при неизвестных зависят от упругих и топологических свойств конструкции, а грузовые коэффициенты определяются внешними воздействиями (силовыми, температурными, кинематическими). Неизвестные величины – усилия (метод сил), перемещения узлов (метод перемещений), усилия и узловые перемещения (смешанный метод).

В расчетно-графической работе № 3 предлагается изучить особенности расчета сооружений в матричной форме на примере статически неопределимой фермы. Расчет выполняется в два этапа. На первом этапе производится выбор основной системы и составление исходных матриц. Второй этап расчета сводится к последовательности операций над исходными матрицами.

Степень статической неопределимости фермы вычисляют по формуле $l = C + C_0 - 2U$, где C – количество стержней фермы, C_0 – количество опорных связей, U – количество узлов.

Основную систему метода сил получают, удаляя опорные связи или разрезая «лишние» стержни так, чтобы полученная после этого ферма была статически определимой и геометрически неизменяемой.

Под разрезом подразумевают устранение в сечении только одной продольной связи, поэтому две части стержня соединяются ползуном (рис. 4.1). Затем вычисляют продольные силы в основной системе от единичных значений усилий в удаленных

связях (стержнях) и от заданной нагрузки. По результатам этого расчета формируются исходные матрицы.

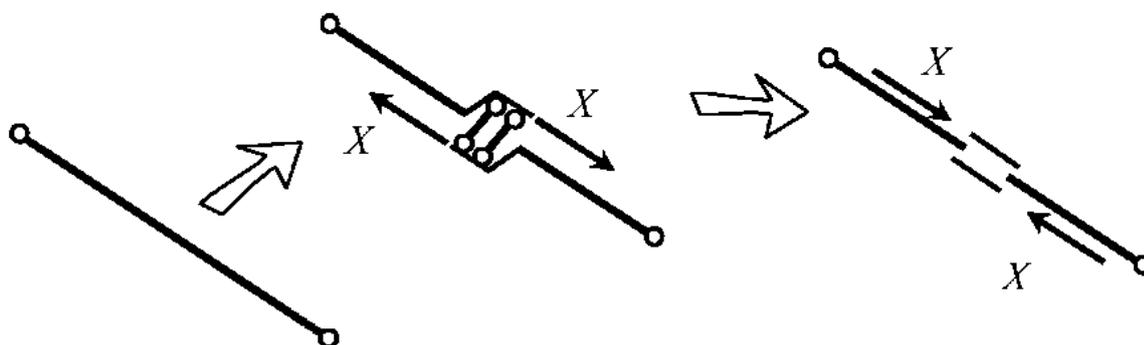


Рис. 4.1

Матрица усилий $[\bar{N}]$ в основной системе от единичных значений неизвестных

$$[\bar{N}] = \begin{bmatrix} \bar{n}_{11} & \bar{n}_{12} & \dots & \bar{n}_{1j} & \dots & \bar{n}_{1c} \\ \bar{n}_{21} & \bar{n}_{22} & \dots & \bar{n}_{2j} & \dots & \bar{n}_{2c} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{n}_{i1} & \bar{n}_{i2} & \dots & \bar{n}_{ij} & \dots & \bar{n}_{ic} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{n}_{c1} & \bar{n}_{c2} & \dots & \bar{n}_{cj} & \dots & \bar{n}_{cc} \end{bmatrix},$$

где n_{ij} – усилие в i -м стержне от $X_j = 1$. Вектор усилий в основной системе от заданной нагрузки

$$\{N^{(F)}\} = \begin{bmatrix} n_1^{(F)} \\ n_2^{(F)} \\ \dots \\ n_i^{(F)} \\ \dots \\ n_c^{(F)} \end{bmatrix},$$

где $n_i^{(F)}$ – усилие в i -м стержне от заданной нагрузки.

Диагональная матрица податливости стержней

$$[B] = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{ii} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{cc} \end{bmatrix}, \quad b_{ii} = \frac{\ell_i}{EA_i},$$

где ℓ_i – длина i -го стержня; A_i – площадь поперечного сечения i -го стержня; E – модуль упругости материала.

Разрешающая система уравнений метода сил, записанная в матричной форме, имеет вид

$$[\Delta]\{x\} + \{\Delta_F\} = 0.$$

Матрица коэффициентов канонических уравнений метода сил $[\Delta]$ вычисляется как произведение матриц

$$[\Delta] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix} = [\bar{N}]^T [B] [\bar{N}].$$

Вектор грузовых коэффициентов $\{\Delta_F\}$ вычисляется по формуле

$$\{\Delta_F\} = \begin{bmatrix} \Delta_{1F} \\ \Delta_{2F} \\ \dots \\ \Delta_{nF} \end{bmatrix} = [\bar{N}]^T [B] \{N^{(F)}\}.$$

Вектор неизвестных можно найти с помощью обратной матрицы

$$\{x\} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = -[\Delta]^{-1} \{\Delta_F\}.$$

Усилия в статически неопределимой ферме от заданной нагрузки вычисляются по формуле

$$\{N\} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \dots \\ N_n \end{bmatrix} = \{N^{(F)}\} + [\bar{N}]\{x\}.$$

Для проверки правильности расчета необходимо найти перемещения Δ_s по направлениям отброшенных связей (деформационная проверка). В матричном виде эта проверка выполняется по формуле

$$\{\Delta_s\} = [\bar{N}]^T [B]\{N\} = 0.$$

Пример 4.1. Для заданной статически неопределимой фермы (рис. 4.2, а) требуется определить усилия в стержнях от постоянной нагрузки. Все расчеты выполнить в матричной форме.

Исходные данные для расчета:

- $F = 10$ кН;
- соотношение жесткостей стержней верхнего пояса (ВП), нижнего пояса (НП), решетки (Р)

$$EA_{\text{ВП}} : EA_{\text{НП}} : EA_{\text{Р}} = 3 : 2,5 : 1.$$

Принимаем для расчета величины жесткостей:

$$EA_{\text{ВП}} = 3; \quad EA_{\text{НП}} = 2,5; \quad EA_{\text{Р}} = 1.$$

Подсчитаем количество стержней фермы:

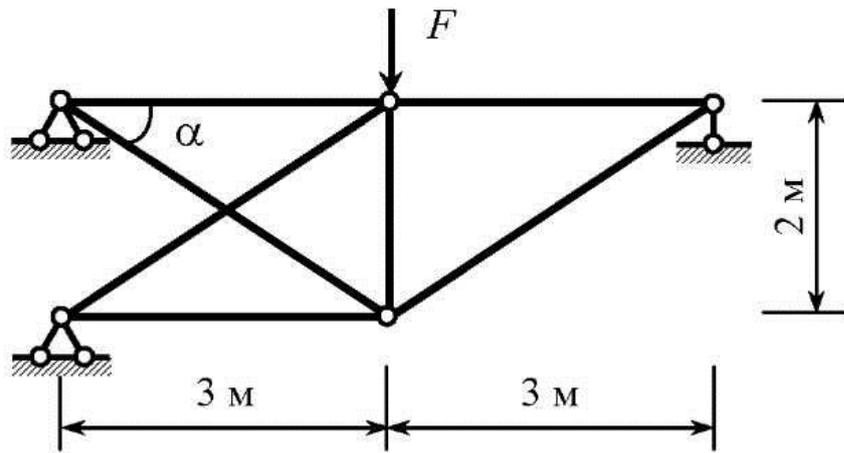
- $C = 7$,
- опорных связей $C_0 = 5$,
- узлов $У = 5$.

Степень статической неопределимости

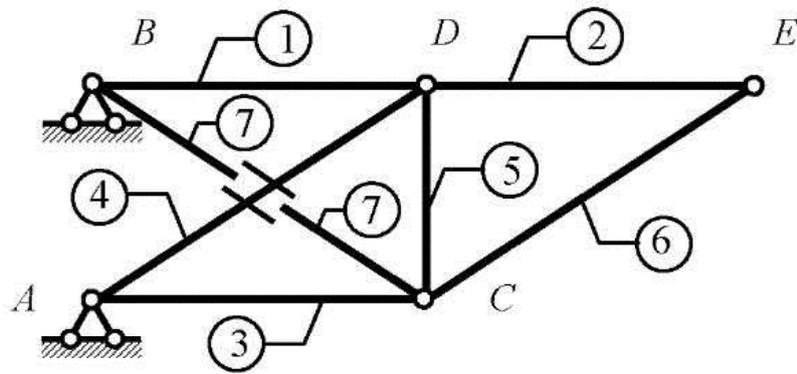
$$л = C + C_0 - 2У = 7 + 5 - 2 \cdot 5 = 2.$$

Ферма два раза статически неопределима.

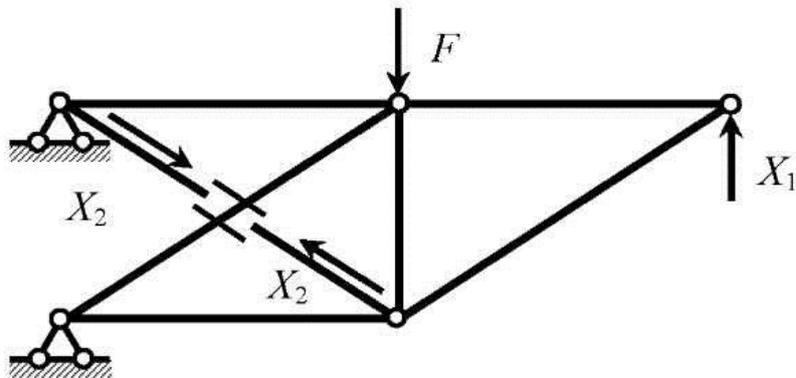
a



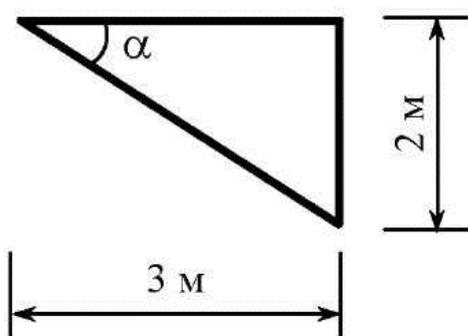
b



в



г



$$\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{2}{3,605} = 0,555;$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{3}{3,605} = 0,832;$$

Рис. 4.2

Для выбора основной системы отбрасываем опорную связь в узле E и разрезаем стержень № 7 (рис. 4.2, б). Загружаем основную систему реакцией в отброшенной связи X_1 , продольными усилиями в разрезанном стержне X_2 – получаем эквивалентную систему метода сил (рис. 4.2, в).

Для формирования матриц $[\bar{N}]$, $\{N^{(F)}\}$ рассчитываем основную систему на действие единичных значений неизвестных и заданной нагрузки.

Прикладываем к основной системе реакцию в отброшенной связи $X_1 = 1$ (рис. 4.3, а). Составляем уравнение равновесия для стержня BD (рис. 4.3, б):

$$\sum m_D^{(BD)} = -V_B \cdot 3 + N_7 \cdot \sin \alpha \cdot 3 = 0; \quad V_B = N_7 \cdot \sin \alpha = 0.$$

Определяем остальные опорные реакции:

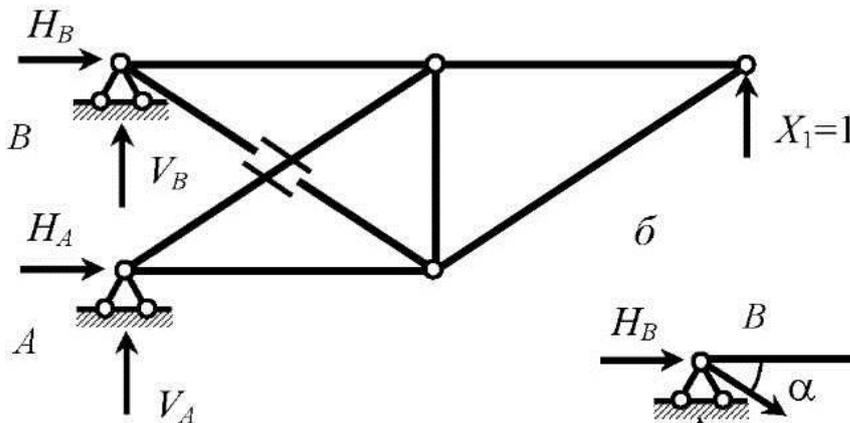
$$\sum m_A = X_1 \cdot 6 - H_B \cdot 2 = 0; \quad H_B = X_1 \cdot 3 = 3;$$

$$\sum y = X_1 + V_A + V_B = 0; \quad V_A = -X_1 - V_B = -1;$$

$$\sum x = H_A + H_B = 0; \quad H_A = -H_B = -3.$$

Усилия в стержнях определяем методом вырезания узлов. Расчет ведем в табличной форме (табл. 4.1).

а



б

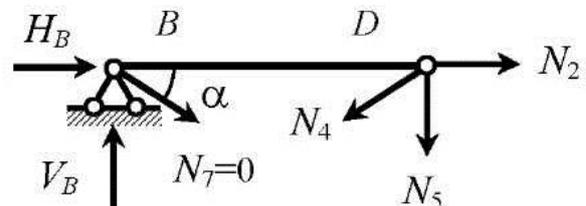
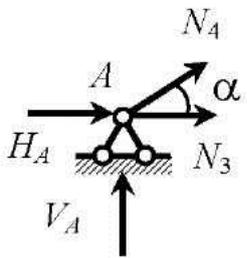
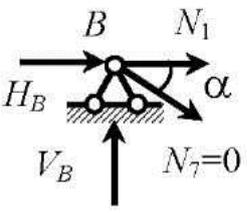
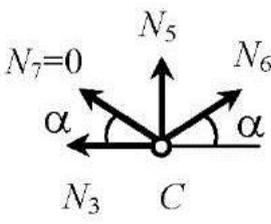
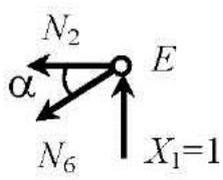


Рис. 4.3

Таблица 4.1

Схема узла	Уравнения равновесия	Усилия
	$\sum x = H_A + N_3 + N_4 \cdot \cos \alpha = 0;$ $\sum y = V_A + N_4 \cdot \sin \alpha = 0;$ $N_4 = -\frac{V_A}{\sin \alpha};$ $N_3 = -H_A - N_4 \cdot \cos \alpha.$	$N_4 = 1,802;$ $N_3 = 1,5.$
	$\sum x = H_B + N_1 + N_7 \cdot \cos \alpha = 0;$ $\sum y = V_B - N_7 \cdot \sin \alpha = 0;$ $N_1 = -H_B - N_7 \cdot \cos \alpha.$	$N_1 = -3,0.$
	$\sum x = -N_3 + N_6 \cdot \cos \alpha - N_7 \cdot \cos \alpha = 0;$ $\sum y = N_5 + N_6 \cdot \sin \alpha + N_7 \cdot \sin \alpha = 0;$ $N_6 = \frac{N_3}{\cos \alpha} + N_7;$ $N_5 = -N_6 \cdot \sin \alpha - N_7.$	$N_6 = 1,802;$ $N_5 = -1,0.$
	$\sum x = -N_2 - N_6 \cdot \cos \alpha = 0;$ $\sum y = X_1 - N_6 \cdot \sin \alpha = 0;$ $N_2 = -N_6 \cdot \sin \alpha.$	$N_2 = -1,5.$

Прикладываем к основной системе продольные усилия в разрезанном стержне $X_2 = 1$ (рис. 4.4, а).

Определяем опорные реакции из уравнения равновесия (рис. 4.4, б):

$$\sum m_D^{(BD)} = -V_B \cdot 3 + X_2 \cdot \sin \alpha \cdot 3 = 0;$$

$$V_B = X_2 \cdot \sin \alpha = 0,555;$$

$$\sum m_B = H_A \cdot 2 = 0;$$

$$H_A = 0;$$

$$\sum y = -X_2 \cdot \sin \alpha + X_2 \cdot \sin \alpha + V_A + V_B = 0;$$

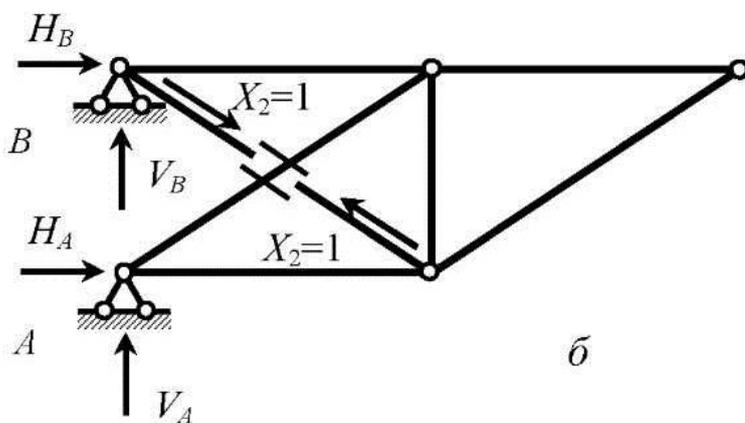
$$V_A = -V_B = -0,555;$$

$$\sum x = -X_2 \cdot \cos \alpha + X_2 \cdot \cos \alpha + H_A + H_B = 0;$$

$$H_B = -H_A = 0.$$

Усилия в стержнях основной системы от действия $X_2 = 1$ вычислены в табл. 4.2.

а



б

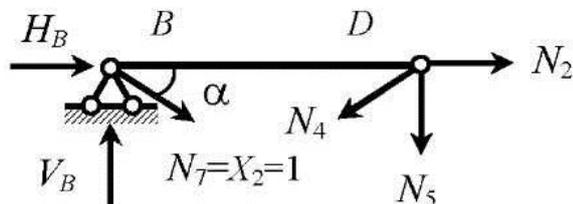
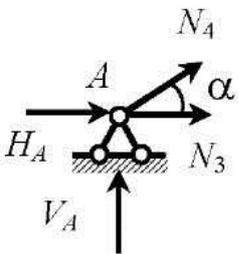
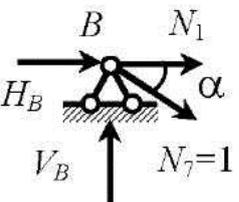
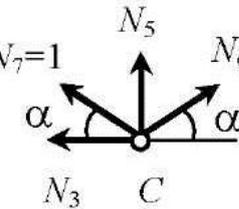
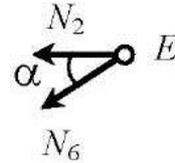


Рис. 4.4

Таблица 4.2

Схема узла	Уравнения равновесия	Усилия
	$\sum x = H_A + N_3 + N_4 \cdot \cos \alpha = 0;$ $\sum y = V_A + N_4 \cdot \sin \alpha = 0;$ $N_4 = -\frac{V_A}{\sin \alpha};$ $N_3 = -H_A - N_4 \cdot \cos \alpha.$	$N_4 = 1,0;$ $N_3 = -0,832.$
	$\sum x = H_B + N_1 + N_7 \cdot \cos \alpha = 0;$ $\sum y = V_B - N_7 \cdot \sin \alpha = 0;$ $N_1 = -H_B - N_7 \cdot \cos \alpha.$	$N_1 = -0,832.$
	$\sum x = -N_3 + N_6 \cdot \cos \alpha - N_7 \cdot \cos \alpha = 0;$ $\sum y = N_5 + N_6 \cdot \sin \alpha + N_7 \cdot \sin \alpha = 0.$ $N_6 = \frac{N_3}{\cos \alpha} + N_7;$ $N_5 = -N_6 \cdot \sin \alpha - N_7.$	$N_6 = 0;$ $N_5 = -0,555.$
	$\sum x = -N_2 - N_6 \cdot \cos \alpha = 0;$ $\sum y = -N_6 \cdot \sin \alpha = 0;$ $N_2 = -N_6 \cdot \sin \alpha.$	$N_2 = 0.$

Прикладываем к основной системе заданную нагрузку и определяем опорные реакции (рис. 4.5, а, б):

$$\sum m_D^{(BD)} = -V_B \cdot 3 + N_7 \cdot \sin \alpha \cdot 3 = 0;$$

$$V_B = N_7 \cdot \sin \alpha = 0;$$

$$\sum m_B = H_A \cdot 2 - F \cdot 3 = 0;$$

$$H_A = 1,5F = 15 \text{ кН};$$

$$\sum y = -F + V_A + V_B = 0;$$

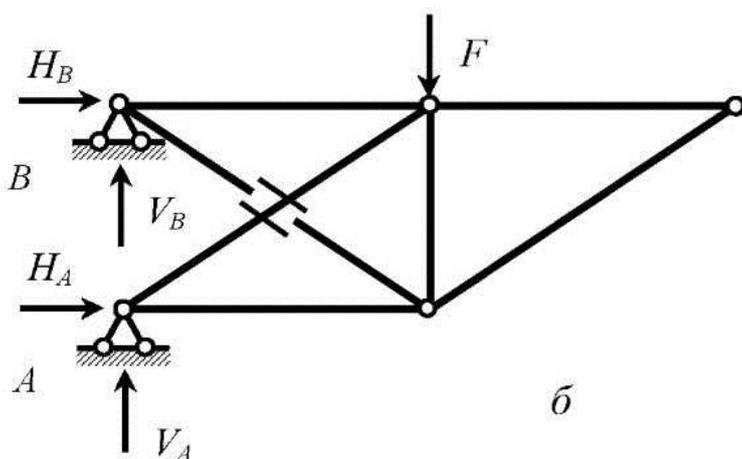
$$V_A = F - V_B = 10 \text{ кН};$$

$$\sum x = H_A + H_B = 0;$$

$$H_B = -H_A = -15 \text{ кН}.$$

Вычисляем усилия в стержнях основной системы от заданной нагрузки (табл. 4.3).

а



б

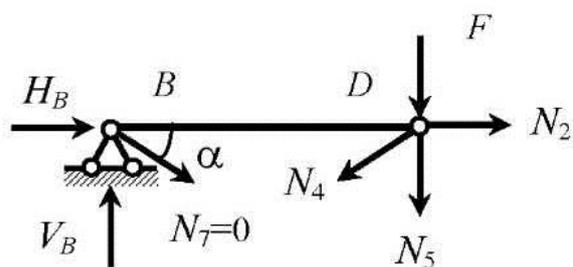
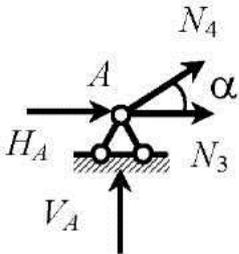
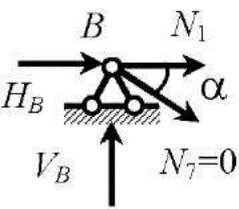
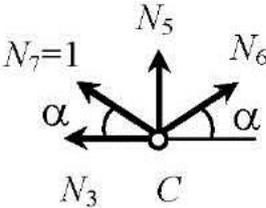
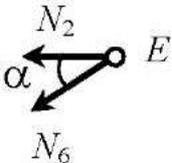


Рис. 4.5

Таблица 4.3

Схема узла	Уравнения равновесия	Усилия
	$\sum x = H_A + N_3 + N_4 \cdot \cos \alpha = 0;$ $\sum y = V_A + N_4 \cdot \sin \alpha = 0;$ $N_4 = -\frac{V_A}{\sin \alpha};$ $N_3 = -H_A - N_4 \cdot \cos \alpha.$	$N_4 = -18,02;$ $N_3 = 0.$
	$\sum x = H_B + N_1 + N_7 \cdot \cos \alpha = 0;$ $\sum y = V_B - N_7 \cdot \sin \alpha = 0;$ $N_1 = -H_B - N_7 \cdot \cos \alpha.$	$N_1 = 15,0.$
	$\sum x = -N_3 + N_6 \cdot \cos \alpha - N_7 \cdot \cos \alpha = 0;$ $\sum y = N_5 + N_6 \cdot \sin \alpha + N_7 \cdot \sin \alpha = 0.$ $N_6 = \frac{N_3}{\cos \alpha} + N_7;$ $N_5 = -N_6 \cdot \sin \alpha - N_7.$	$N_6 = 0;$ $N_5 = 0.$
	$\sum x = -N_2 - N_6 \cdot \cos \alpha = 0;$ $\sum y = -N_6 \cdot \sin \alpha = 0;$ $N_2 = -N_6 \cdot \sin \alpha.$	$N_2 = 0.$

По данным табл. 4.1, 4.2, 4.3 формируем матрицу единичных усилий $[\bar{N}]$ и вектор грузовых усилий $\{N^{(r)}\}$:

$$[\bar{N}] = \begin{bmatrix} -3,00 & -0,832 \\ -1,5 & 0 \\ 1,5 & -0,832 \\ 1,802 & 1,0 \\ -1,0 & -0,555 \\ 1,802 & 0 \\ 0 & 1,0 \end{bmatrix}, \quad \{N^{(r)}\} = \begin{bmatrix} 15,0 \\ 0 \\ 0 \\ -18,02 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Вычисляем диагональные элементы матрицы податливостей по формуле $b_{ii} = \frac{\ell_i}{EA_i}$:

$$b_{11} = \frac{\ell_1}{EA_{\text{ВП}}} = \frac{3,0}{3,0} = 1,0 = b_{22}; \quad b_{33} = \frac{\ell_3}{EA_{\text{НП}}} = \frac{3,0}{2,5} = 1,2;$$

$$b_{44} = \frac{\ell_4}{EA_p} = \frac{3,605}{1,0} = 3,605 = b_{66} = b_{77}; \quad b_{55} = \frac{\ell_5}{EA_p} = \frac{2,0}{1,0} = 2,0.$$

Матрица податливости

$$[B] = \begin{bmatrix} 1,0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3,605 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2,0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3,605 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3,605 \end{bmatrix}.$$

Транспонированная матрица единичных усилий

$$[\bar{N}]^T = \begin{bmatrix} -3,0 & -1,5 & 1,5 & 1,802 & -1,0 & 1,802 & 0 \\ -0,832 & 0 & -0,832 & 1,0 & -0,555 & 0 & 1,0 \end{bmatrix}.$$

Находим перемножением матриц $[\bar{N}]^T [B] =$

$$= \begin{bmatrix} -3,0 & -1,5 & 1,8 & 6,496 & -2,0 & 6,496 & 0 \\ -0,832 & 0 & -0,998 & 3,605 & -1,111 & 0 & 3,605 \end{bmatrix}.$$

Матрица коэффициентов при неизвестных

$$[\Delta] = [\bar{N}]^T [B] [\bar{N}] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix},$$

$$\delta_{11} = -3,0(-3,0) - 1,5(-1,5) + 1,8 \cdot 1,5 + 6,496 \cdot 1,802 - 2,0(-1,0) + 6,496 \cdot 1,802 + 0 \cdot 0 = 39,362;$$

$$\delta_{12} = -3,0(-0,832) - 1,5 \cdot 0 + 1,8(-0,832) + 6,496 \cdot 1,0 - 2,0 \times (-0,555) + 6,496 \cdot 0 + 0 \cdot 1,0 = 8,605;$$

$$\delta_{21} = -0,832(-3,0) + 0(-1,5) - 0,998 \cdot 1,5 + 3,605 \cdot 1,802 - 1,111 \times (-1,0) + 0 \cdot 1,802 + 3,605 \cdot 0 = 8,605;$$

$$\delta_{22} = -0,832(-0,832) + 0 \cdot 0 - 0,998(-0,832) + 3,605 \times 1,0 - 1,111(-0,555) + 0 \cdot 0 + 3,605 \cdot 1,0 = 9,349;$$

$$[\Delta] = \begin{bmatrix} 39,362 & 8,605 \\ 8,605 & 9,349 \end{bmatrix}.$$

Вектор грузовых коэффициентов

$$\{\Delta_F\} = [\bar{N}]^T [B] [N^{(F)}] = \begin{bmatrix} \Delta_{1F} \\ \Delta_{2F} \end{bmatrix},$$

$$\Delta_{1F} = -3,0 \cdot 15,0 - 1,5 \cdot 0 + 1,8 \cdot 0 + 6,496(-18,02) - 2,0 \cdot 0 + 6,496 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = -162,058;$$

$$\Delta_{2F} = -0,832 \cdot 15,0 + 0 \cdot 0 - 0,998 \cdot 0 + 3,605(-18,02) - 1,111 \times 0 + 0 \cdot 0 + 3,605 \cdot 0 = -77,442;$$

$$\{\Delta_F\} = \begin{bmatrix} -162,058 \\ -77,442 \end{bmatrix}.$$

Вычисляем определитель матрицы коэффициентов канонических уравнений

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} 39,362 & 8,605 \\ 8,605 & 9,349 \end{vmatrix} = 39,362 \cdot 9,349 - (8,605)^2 = 293,949.$$

Находим вектор неизвестных с использованием обратной матрицы

$$\begin{aligned} \{x\} &= -[\Delta]^{-1} \{\Delta^{(F)}\} = -\frac{1}{293,949} \begin{bmatrix} 9,349 & -8,605 \\ -8,605 & 39,362 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -162,058 \\ -77,442 \end{bmatrix} = \\ &= -\frac{1}{293,949} \begin{bmatrix} 9,349(-162,058) - 8,605(-77,442) \\ -8,605(-162,058) + 39,362(-77,442) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,888 \\ 5,626 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Продольные усилия в стержнях заданной статически неопределимой фермы (рис. 4.6):

$$\{N\} = \{N^{(F)}\} + [\bar{N}]\{x\} = \begin{bmatrix} 15,0 \\ 0 \\ 0 \\ -18,02 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3,00 & -0,832 \\ -1,5 & 0 \\ 1,5 & -0,832 \\ 1,802 & 1,0 \\ -1,0 & -0,555 \\ 1,802 & 0 \\ 0,0 & 1,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,888 \\ 5,626 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 15,0 - 3,0 \cdot 2,888 - 0,832 \cdot 5,626 \\ 0 - 1,5 \cdot 2,888 + 0 \cdot 5,626 \\ 0 + 1,5 \cdot 2,888 - 0,832 \cdot 5,626 \\ -18,02 + 1,802 \cdot 2,888 + 1,0 \cdot 5,626 \\ 0 - 1,0 \cdot 2,888 - 0,555 \cdot 5,626 \\ 0 + 1,802 \cdot 2,888 + 0 \cdot 5,626 \\ 0 + 0 \cdot 2,888 + 1,0 \cdot 5,626 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,655 \\ -4,332 \\ -0,349 \\ -7,190 \\ -6,027 \\ 5,204 \\ 5,626 \end{bmatrix}.$$

Выполняем деформационную проверку

$$\{\Delta_s\} = [\bar{N}]^T [B]\{N\} =$$

$$= \begin{bmatrix} -3,0 & -1,5 & 1,8 & 6,496 & -2,0 & 6,496 & 0 \\ -0,832 & 0 & -0,998 & 3,605 & -1,111 & 0 & 3,605 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1,655 \\ -4,332 \\ -0,349 \\ -7,190 \\ -6,027 \\ 5,204 \\ 5,626 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3,0 \cdot 1,655 - 1,5(-4,332) + 1,8(-0,349) + \\ + 6,496(-7,190) - 2,0(-6,027) + 6,496 \cdot 5,204 + \\ + 0 \cdot 5,626 \\ -0,832 \cdot 1,655 + 0(-4,332) - 0,998(-0,349) + \\ + 3,605(-7,190) - 1,111(-6,027) + 0 \cdot 5,204 + \\ + 3,650 \cdot 5,626 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -52,299 + 52,357 \\ -27,297 + 27,579 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,058 \\ -0,282 \end{bmatrix}.$$

Ошибка в расчете незначительная:

$$\frac{-0,058}{-52,357} 100\% = 0,11\%;$$

$$\frac{-0,282}{-27,579} 100\% = 1,02\%.$$

Следовательно, расчеты выполнены верно.

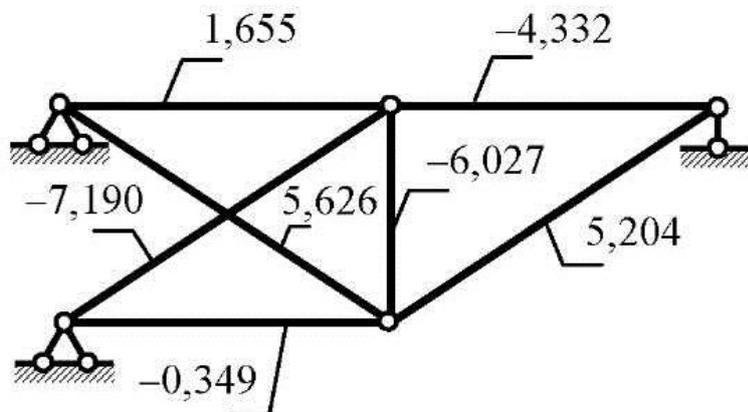


Рис. 4.6

Допускается проводить вычисления в программных продуктах Microsoft Excel, OpenOffice Calc, MATLAB, Scilab и т. д. В этом случае следует сформировать исходные матрицы вручную и для каждой матричной операции привести матрицу-результат.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.2. Определить количество лишних связей и выбрать основные системы метода сил (рис. 4.7).

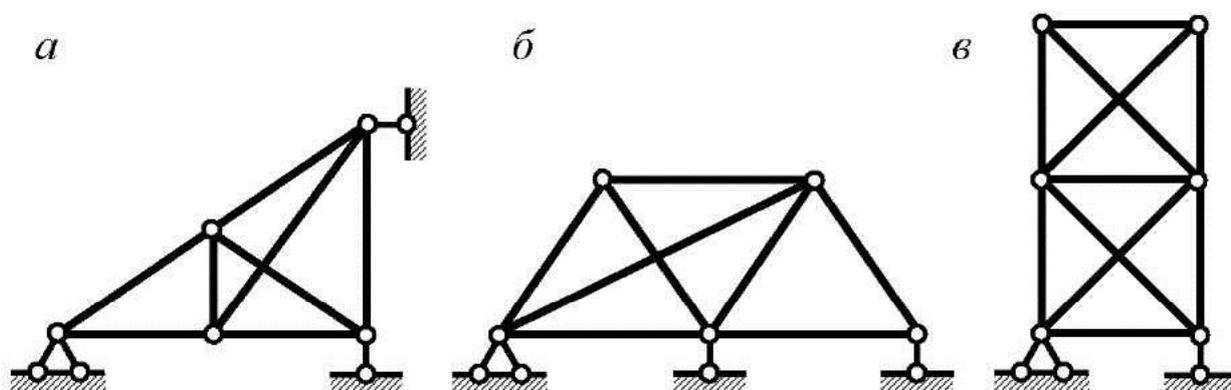


Рис. 4.7

Задача 4.3. Определить усилия в стержнях от заданной нагрузки (рис. 4.8). Жесткости всех стержней одинаковы и равны EA .

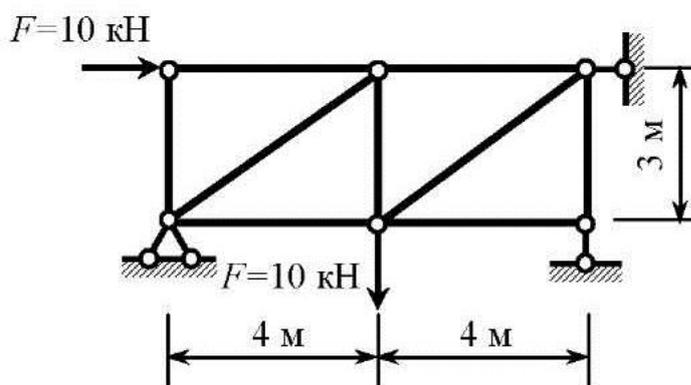


Рис. 4.8

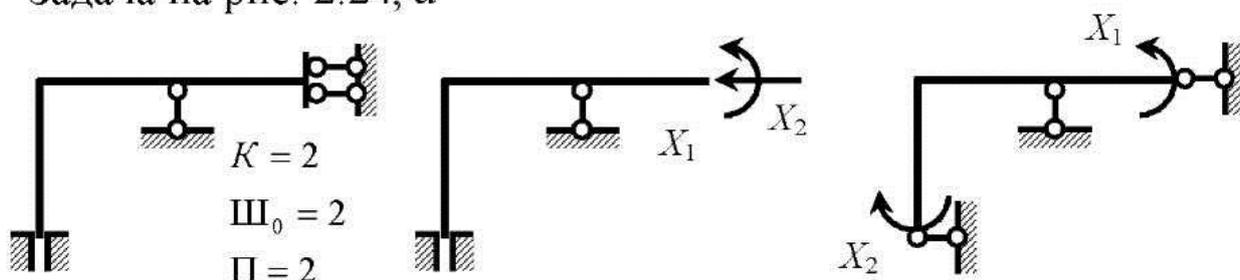
Контрольные вопросы

1. Как устанавливается степень статической определимости для ферм?
2. Как выбирается основная система метода сил при расчете фермы?
3. Какие матрицы необходимо сформировать для расчета фермы на постоянную нагрузку?
4. По какой формуле вычисляется матрица коэффициентов при неизвестных?
5. Каким образом вычисляется вектор неизвестных?
6. Как вычисляются окончательные усилия в ферме?
7. В чем заключается деформационная проверка?

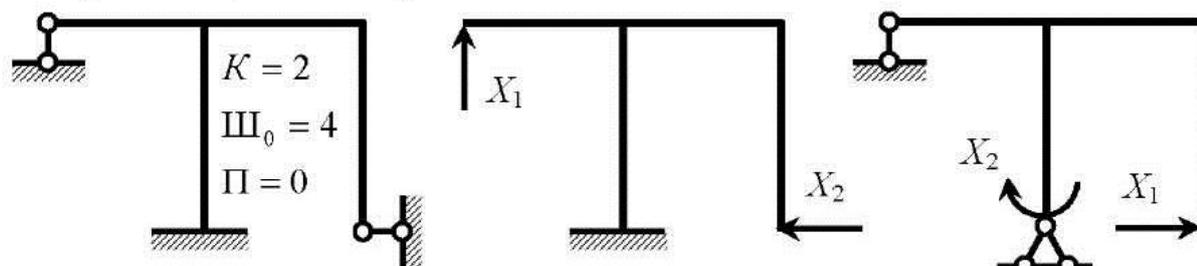
5. ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Ответы к задаче 2.3

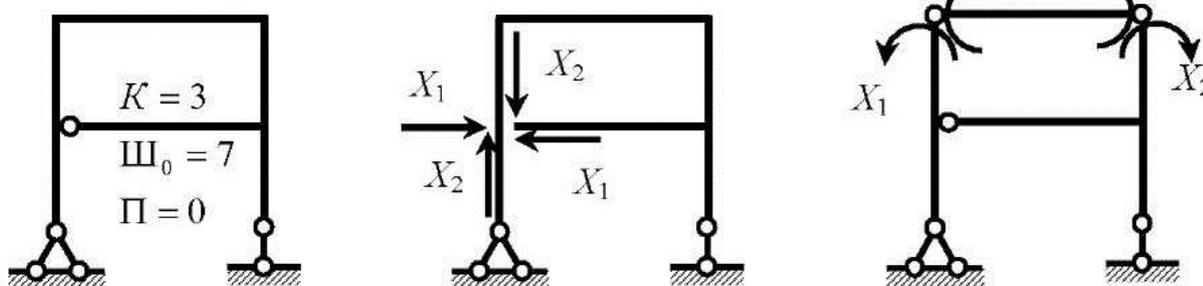
Задача на рис. 2.24, а



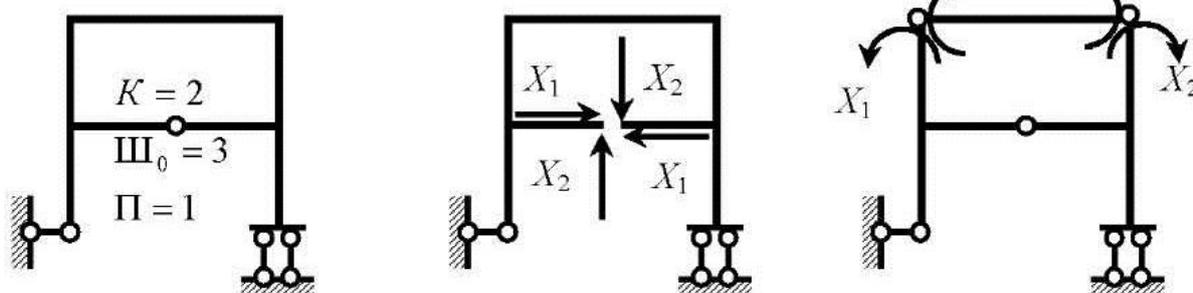
Задача на рис. 2.24, б



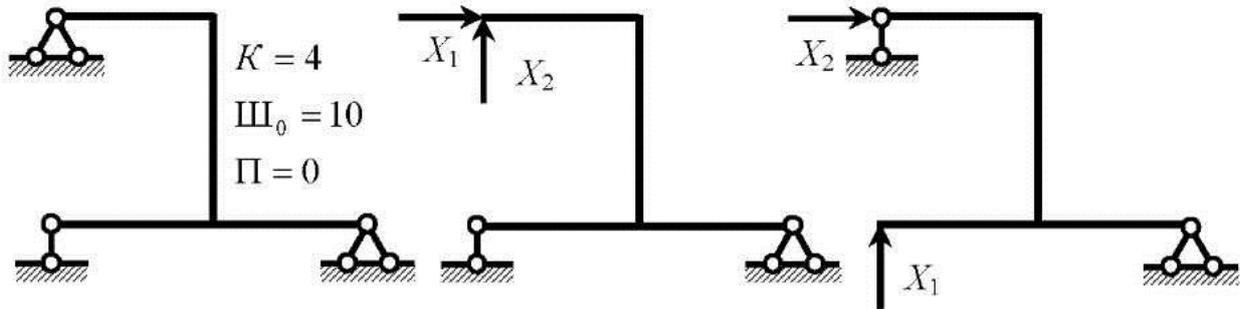
Задача на рис. 2.24, в



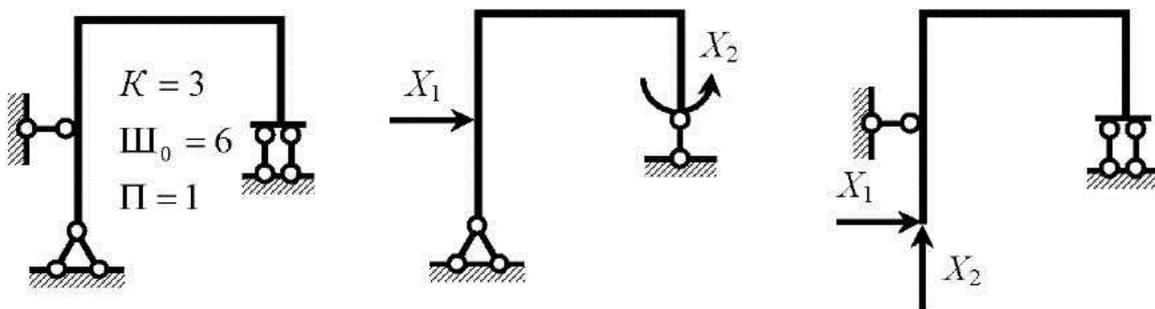
Задача на рис. 2.24, г



Задача на рис. 2.24, *д*

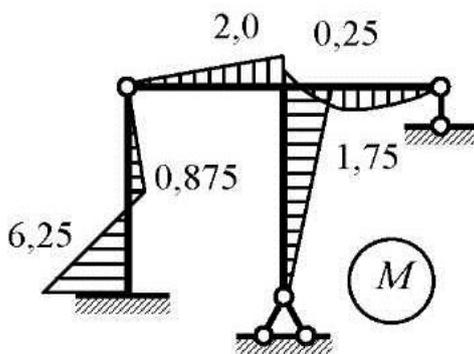


Задача на рис. 2.24, *е*

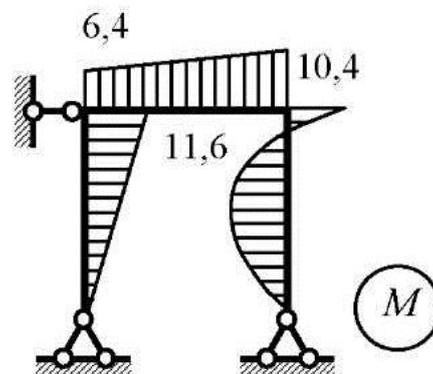


Ответы к задаче 2.4

Задача на рис. 2.25, *а*

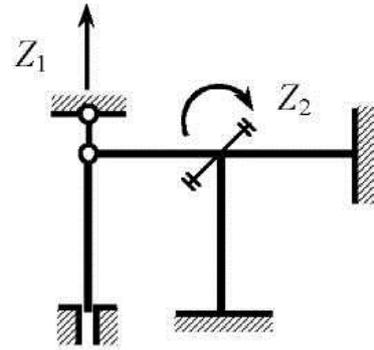
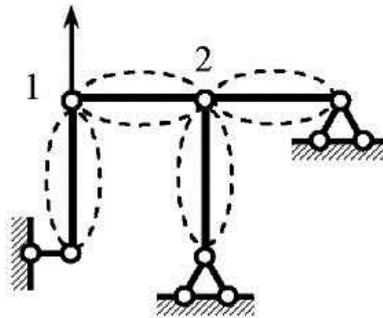
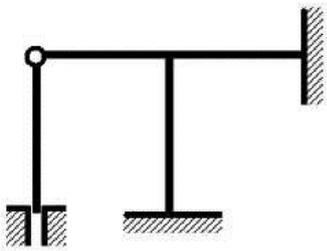


Задача на рис. 2.25, *б*



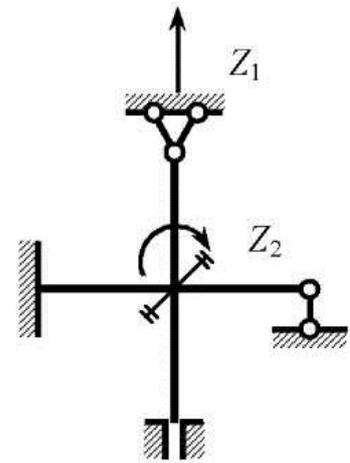
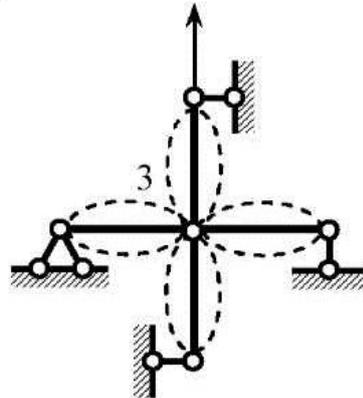
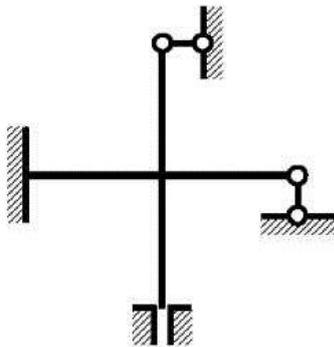
Ответы к задаче 3.2

Задача на рис. 3.9, а



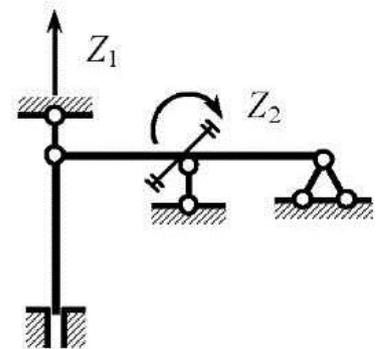
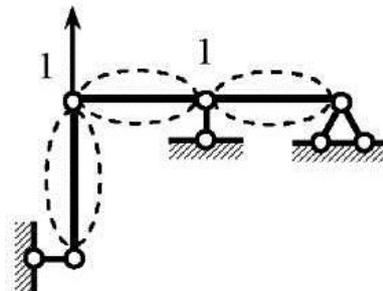
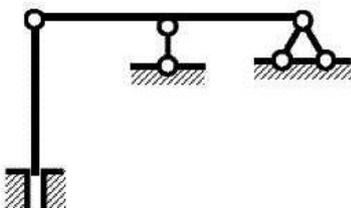
$$D = 4; \quad \Pi_0 = 3; \quad C_0 = 5$$

Задача на рис. 3.9, б



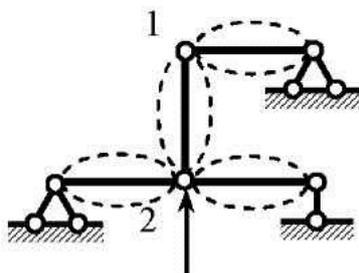
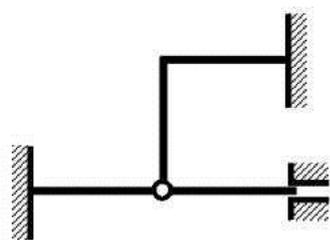
$$D = 4; \quad \Pi_0 = 3; \quad C_0 = 5$$

Задача на рис. 3.9, в

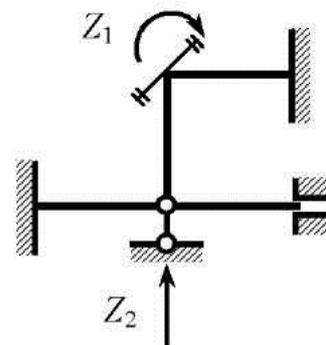


$$D = 3; \quad \Pi_0 = 2; \quad C_0 = 4$$

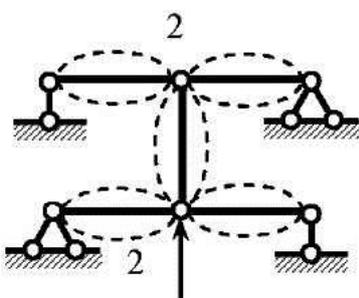
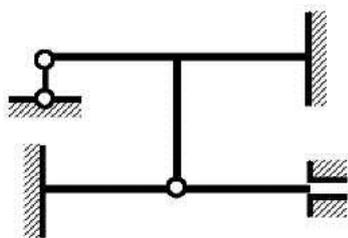
Задача на рис. 3.9, з



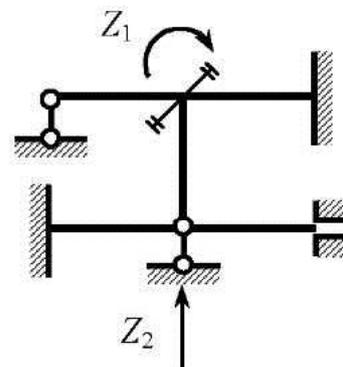
$$D = 4; \text{Ш}_0 = 3; C_0 = 5$$



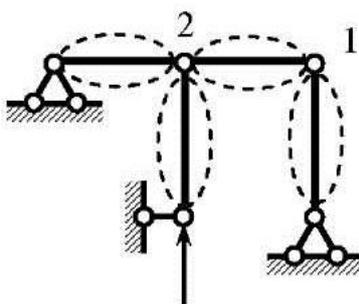
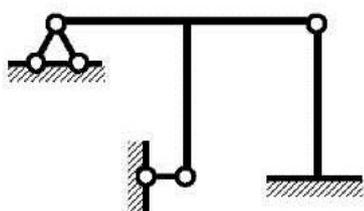
Задача на рис. 3.9, д



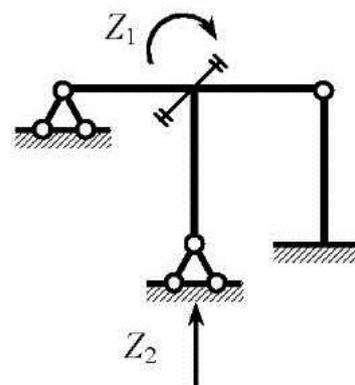
$$D = 5; \text{Ш}_0 = 4; C_0 = 6$$



Задача на рис. 3.9, е

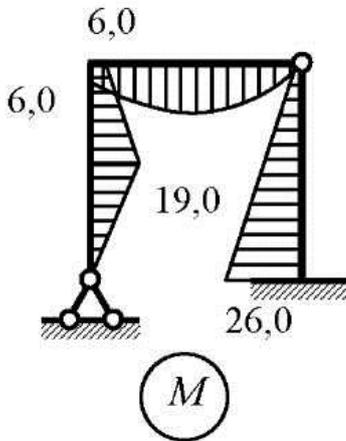


$$D = 4; \text{Ш}_0 = 3; C_0 = 5$$

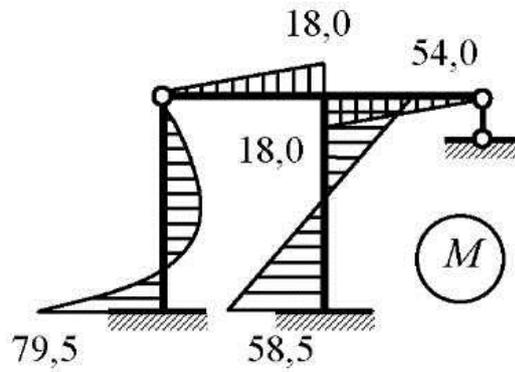


Ответы к задаче 3.3

Задача на рис. 3.10, а

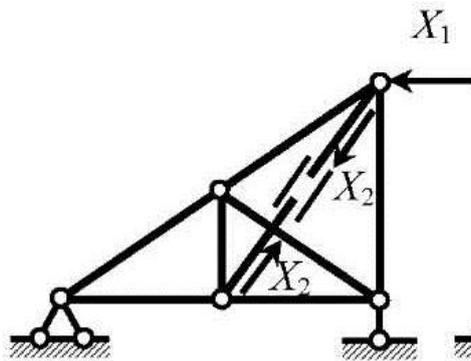


Задача на рис. 3.10, б

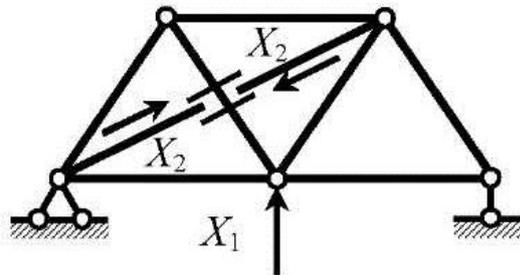


Ответы к задаче 4.2

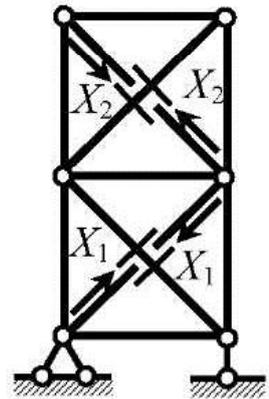
Задача на рис. 4.6, а



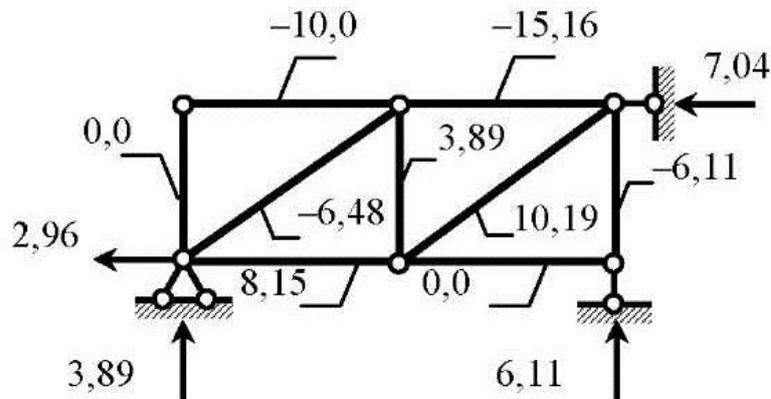
Задача на рис. 4.6, б



Задача на рис. 4.6, в



Ответы к задаче 4.3



6. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ К РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИМ РАБОТАМ

Расчет статически неопределимой рамы методом сил

Задание. Для заданной рамы (рис. 6.1) с исходными данными из табл. 6.1 требуется:

а) построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил;

б) выполнить статическую и кинематическую проверки.

Таблица 6.1

Номер группы	L , м	H , м	F , кН	M , кН·м	q , кН/м	$EJ_1: EJ_2$
1	8	7,8	11	20	2,2	1:2
2	7,6	7,4	12	18	2,4	1:3
3	7,2	7,0	13	16	2,6	1:2
4	6,6	6,6	14	14	2,8	2:1
5	6,0	6,2	15	12	3,0	1:3
6	5,4	5,8	16	10	3,2	3:2
7	4,8	5,4	17	8	3,4	2:3
8	4,2	5,0	18	6	3,6	1:3
9	3,6	4,6	19	4	3,8	2:1
10	3,0	4,2	20	2	4,0	3:2

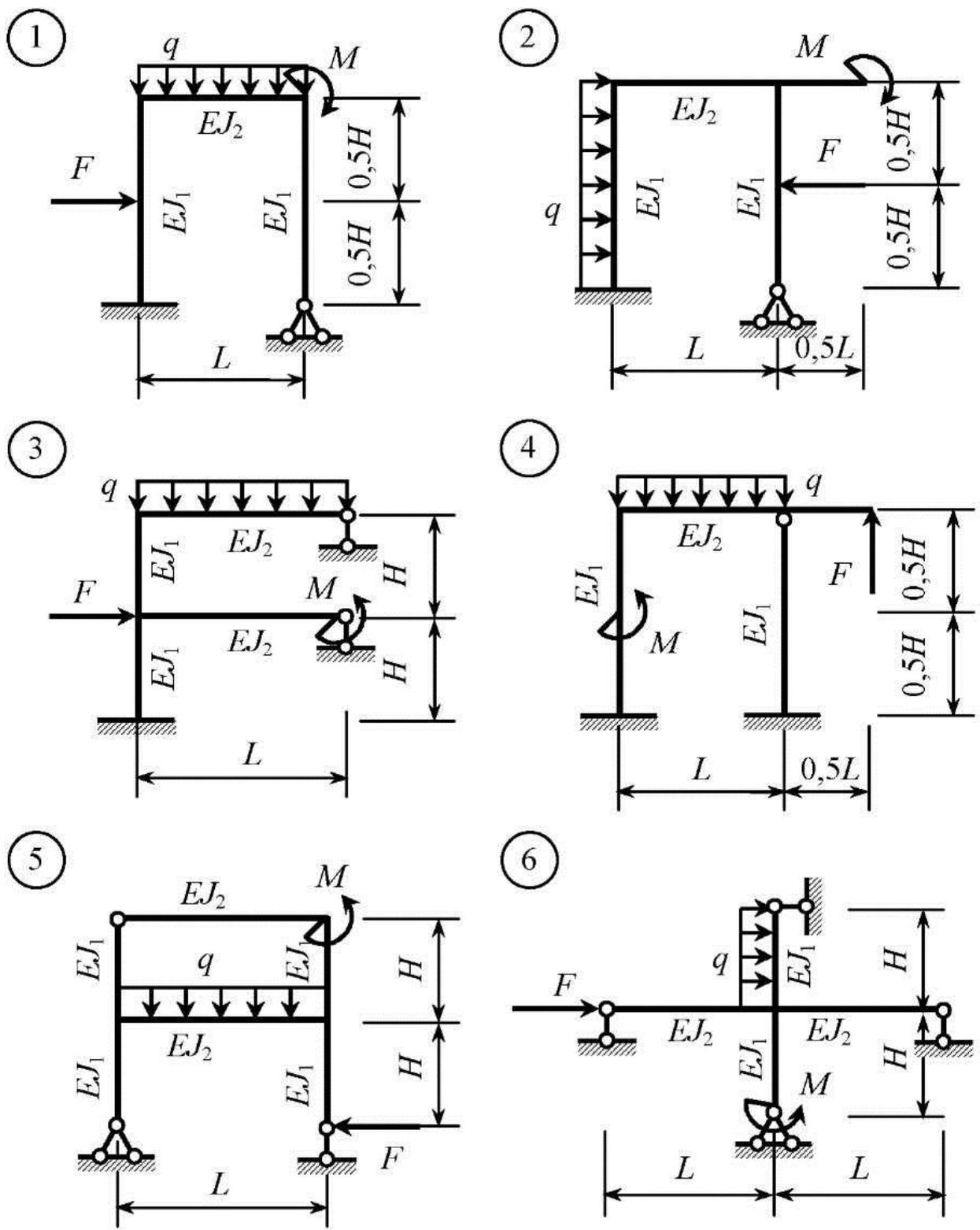
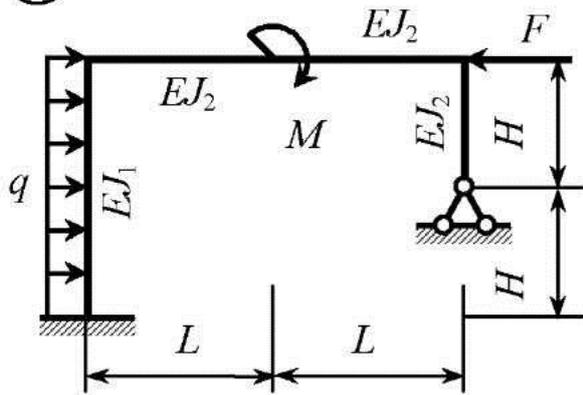
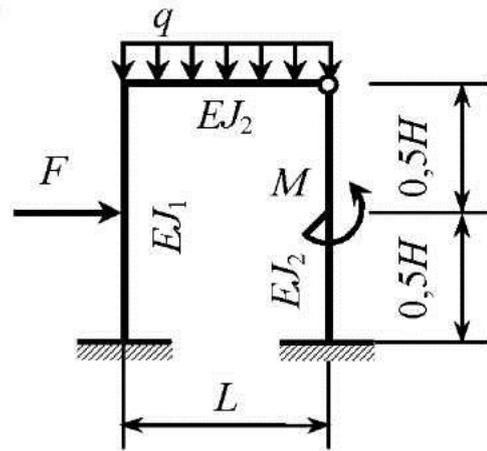


Рис. 6.1 (продолжение см. на с. 85–87, окончание – на с. 88)

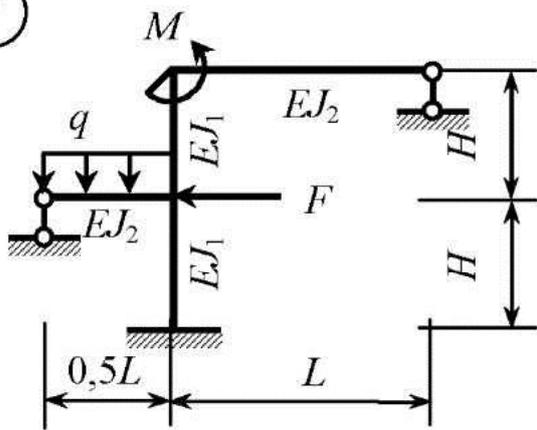
7



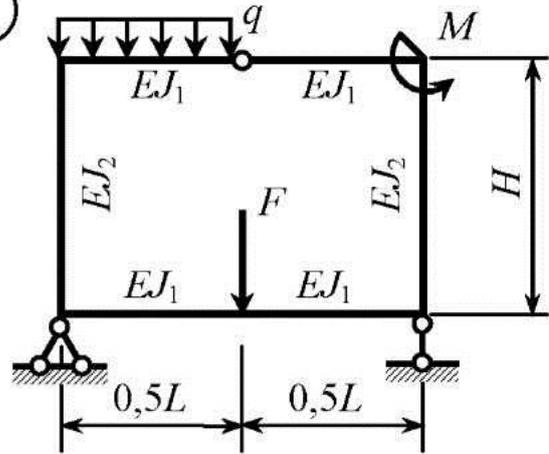
8



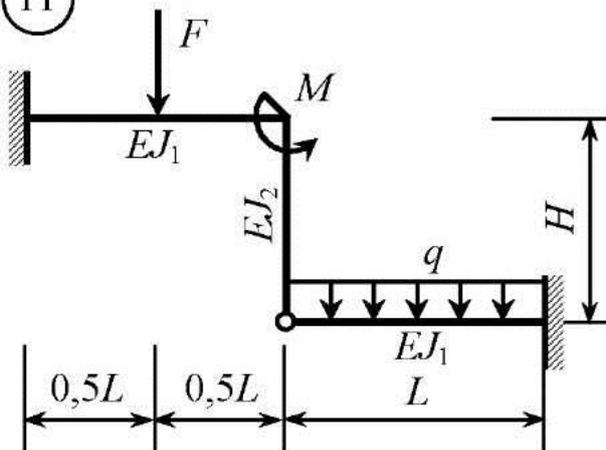
9



10



11



12

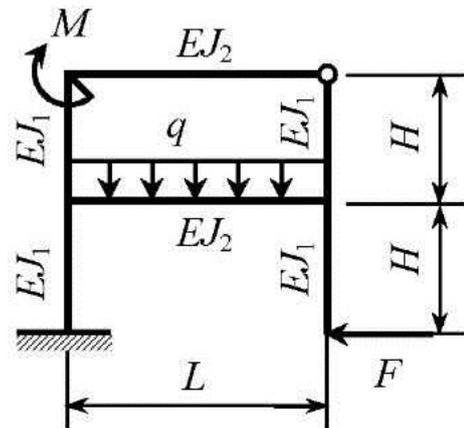


Рис. 6.1. Продолжение (начало см. на с. 84, продолжение – на с. 86, 87, окончание – на с. 88)

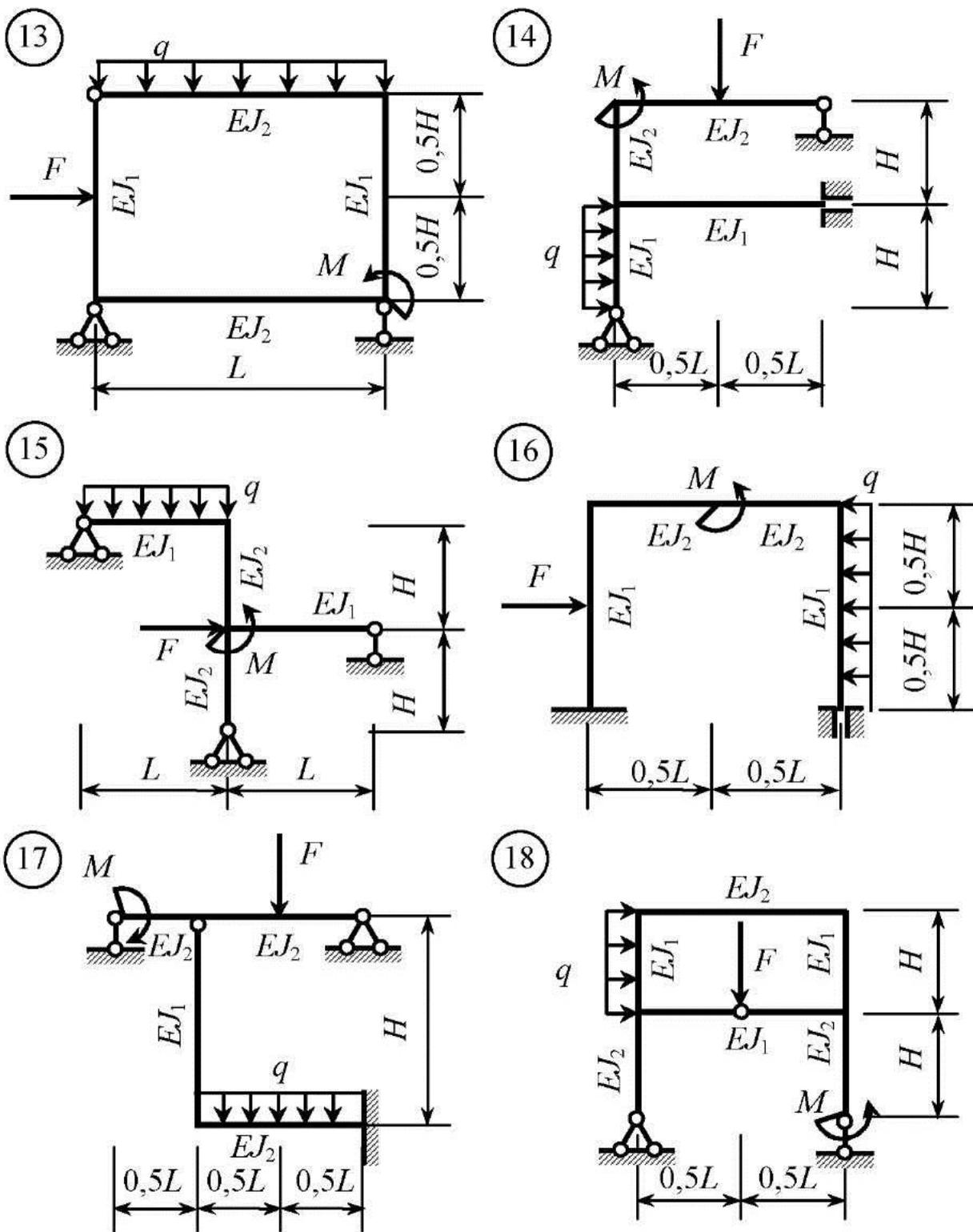


Рис. 6.1. Продолжение (начало см. на с. 84, 85, продолжение – на с. 87, окончание – на с. 88)

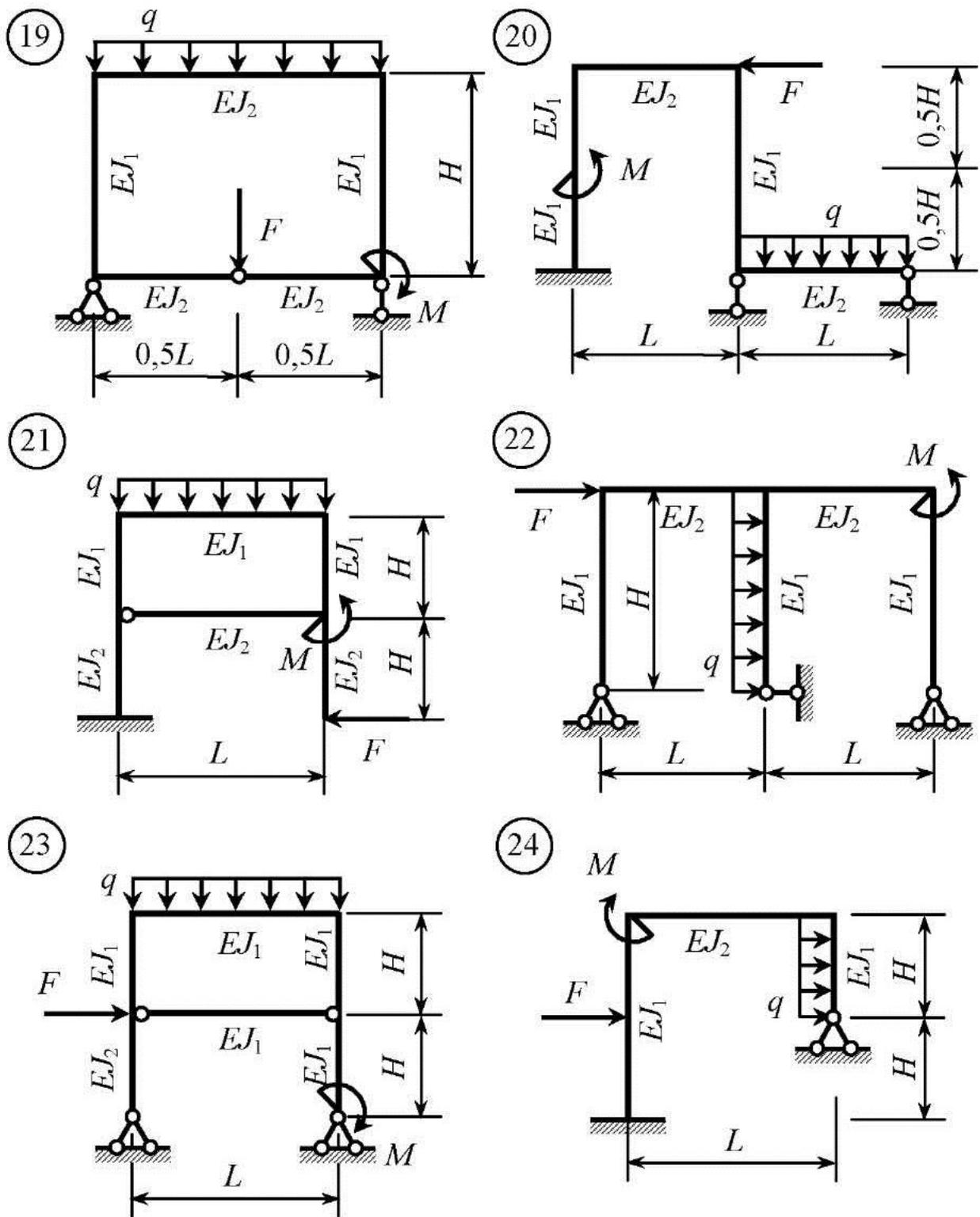


Рис. 6.1. Продолжение (начало см. на с. 84–86, окончание – на с. 88)

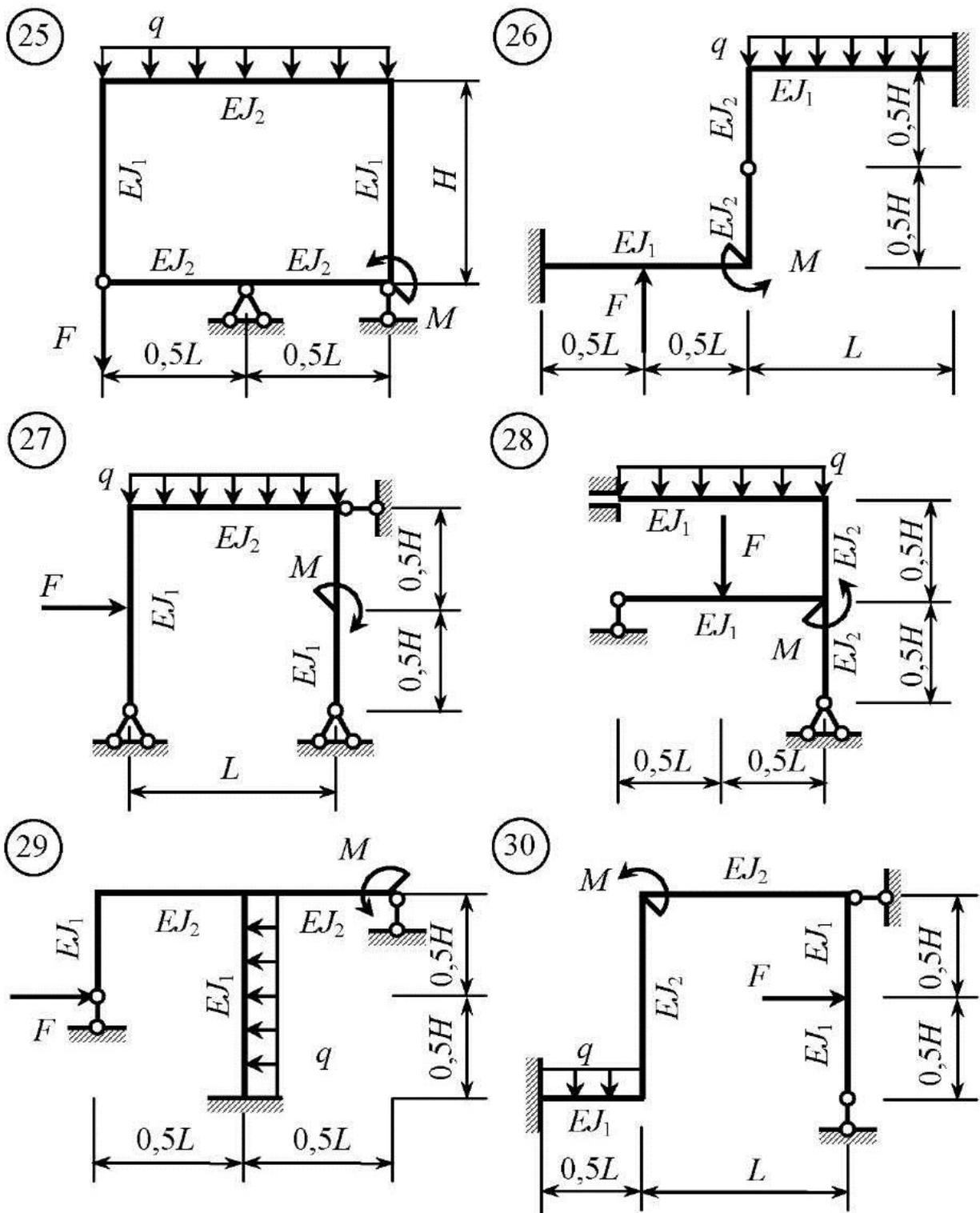


Рис. 6.1. Окончание (начало см. на с. 84–87)

Расчет статически неопределимой рамы методом перемещений

Задание. Для заданной рамы (рис. 6.2) с исходными данными из табл. 6.2 требуется:

а) построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил;

б) выполнить статическую проверку.

Таблица 6.2

Номер группы	L , м	H , м	F , кН	M , кН·м	q , кН/м	$EJ_1:EJ_2:EJ_3$
1	10,8	7,2	4	11	3,2	1:2:3
2	10,4	7,4	6	12	3,4	1:3:2
3	10,0	7,6	8	16	3,6	1:2:1
4	9,6	7,8	10	14	3,8	2:1:3
5	9,2	8,0	12	15	4,0	1:3:2
6	8,8	8,2	14	14	4,2	3:2:1
7	8,4	8,4	16	13	4,0	2:3:1
8	8,0	8,6	18	12	3,8	1:3:2
9	7,6	8,8	20	11	3,6	2:1:3
10	7,2	9,0	22	10	3,4	3:2:1

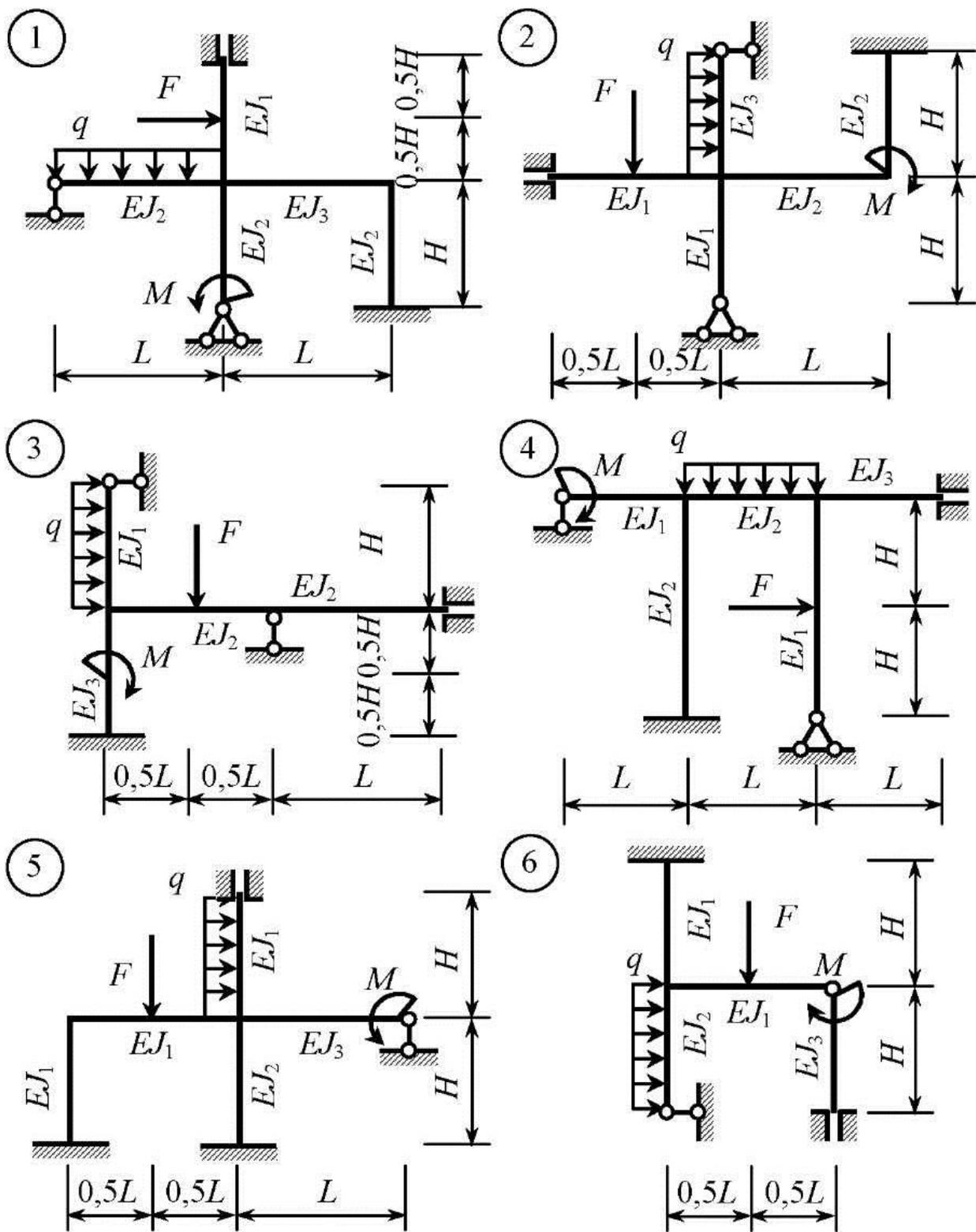


Рис. 6.2 (продолжение см. на с. 91–93, окончание – на с. 94)

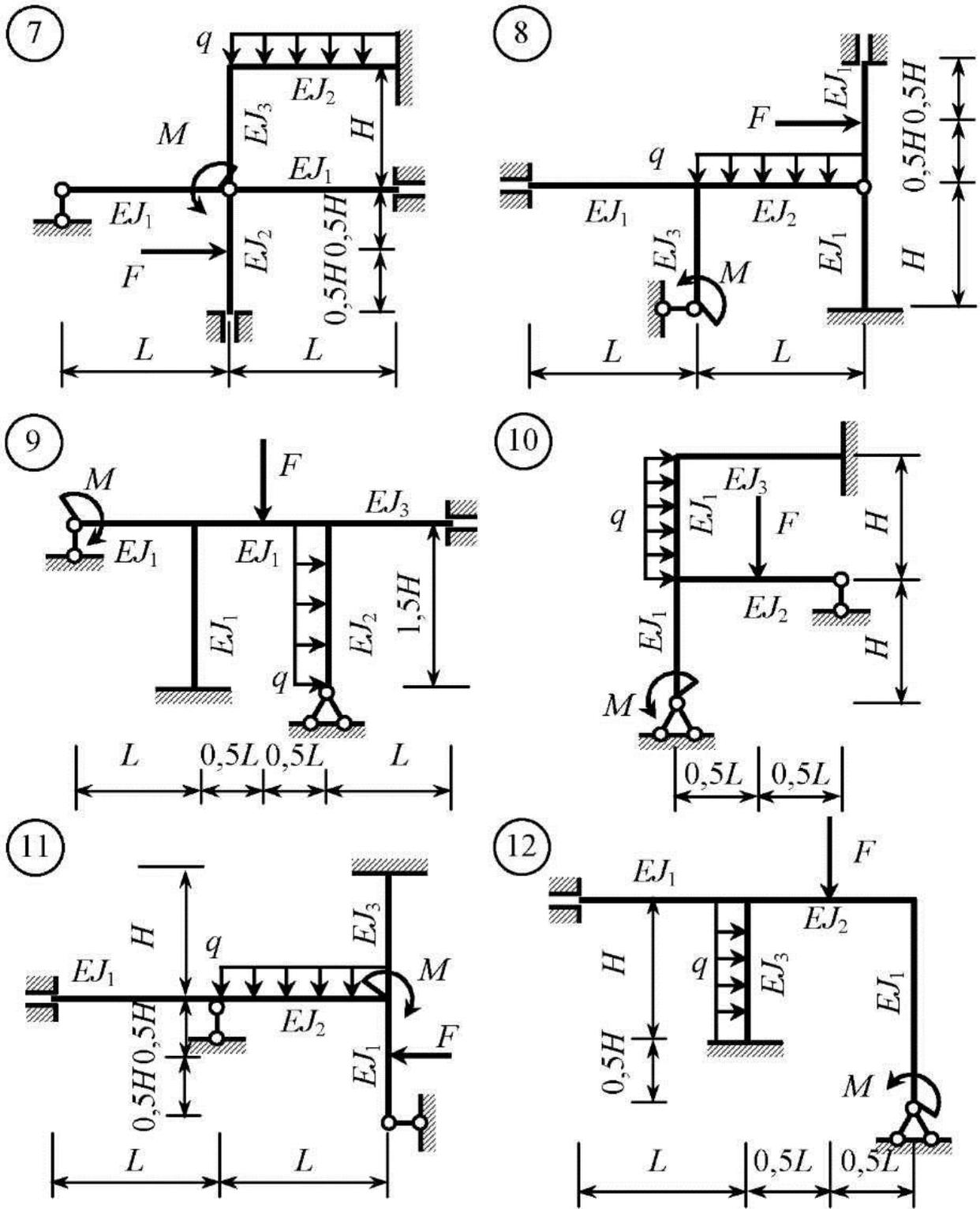


Рис. 6.2. Продолжение (начало см. на с. 90, продолжение – на с. 92, 93, окончание – на с. 94)

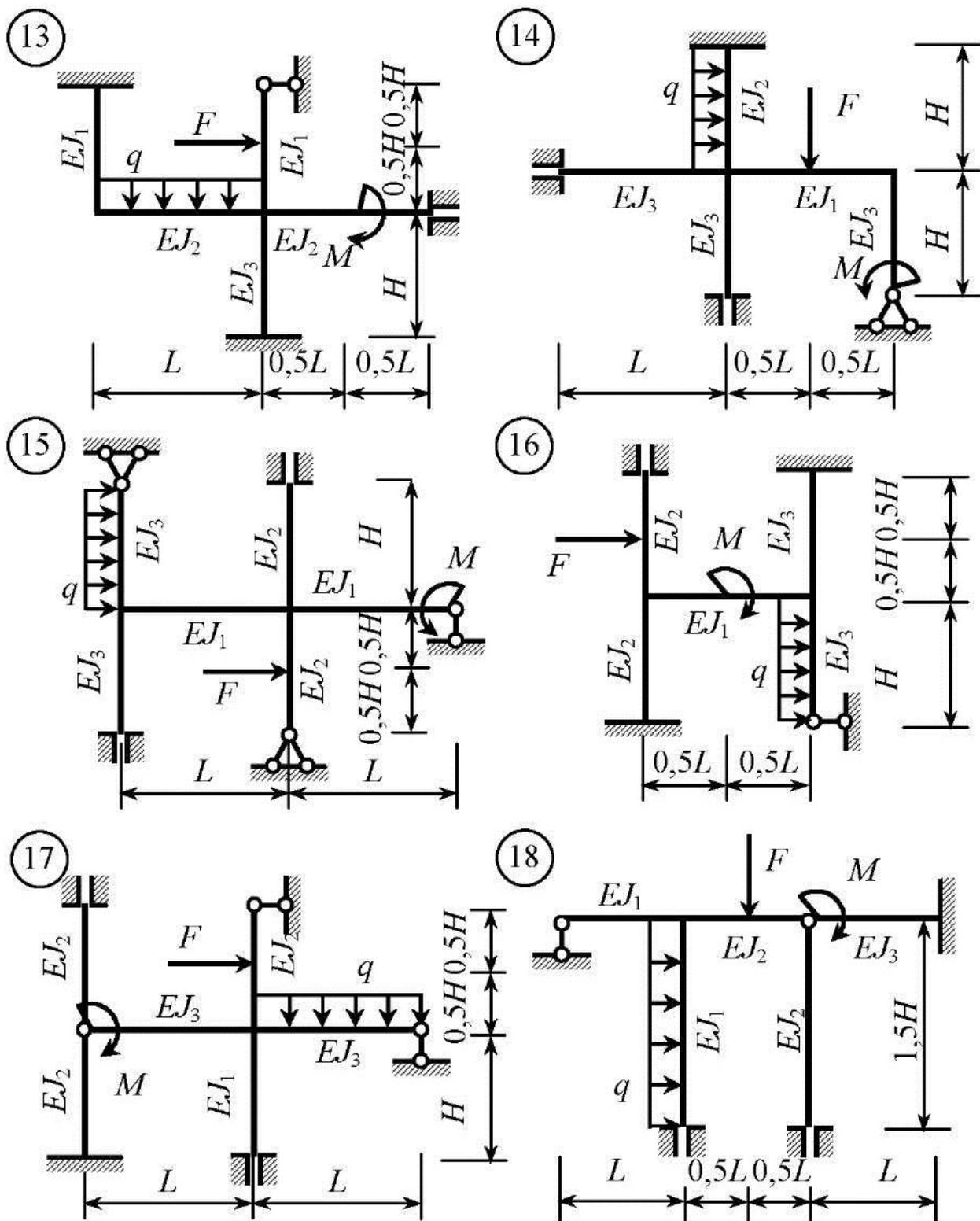


Рис. 6.2. Продолжение (начало см. на с. 90, 91, продолжение – на с. 93, окончание – на с. 94)

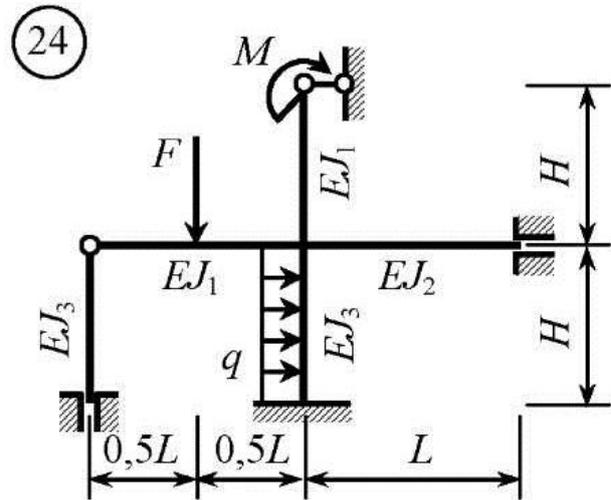
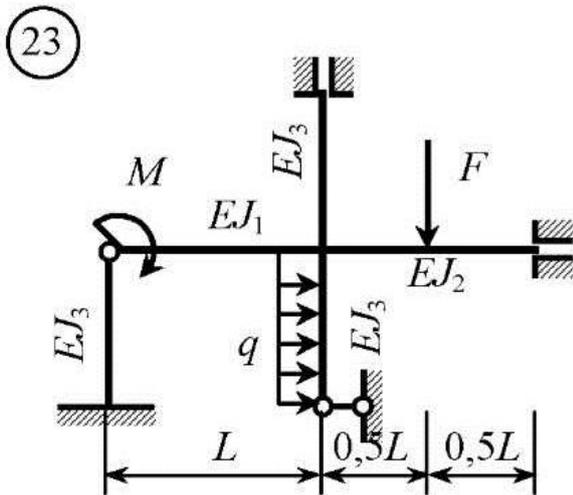
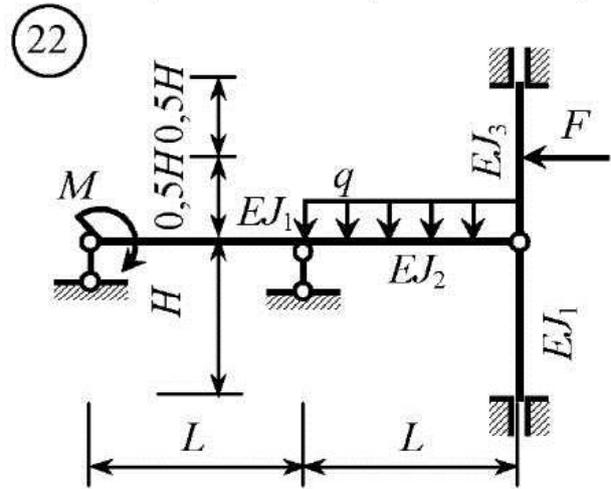
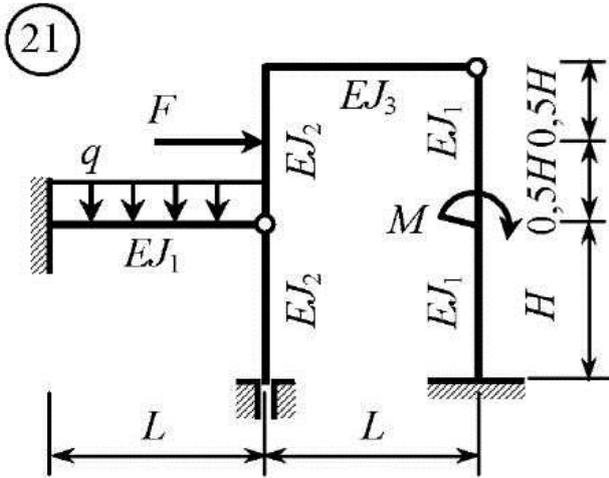
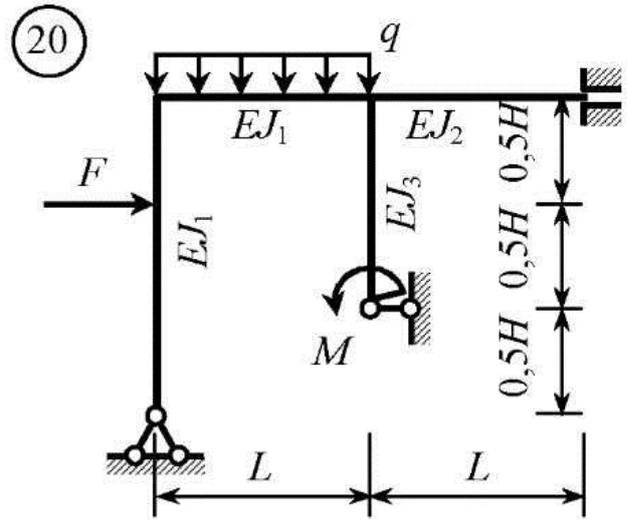
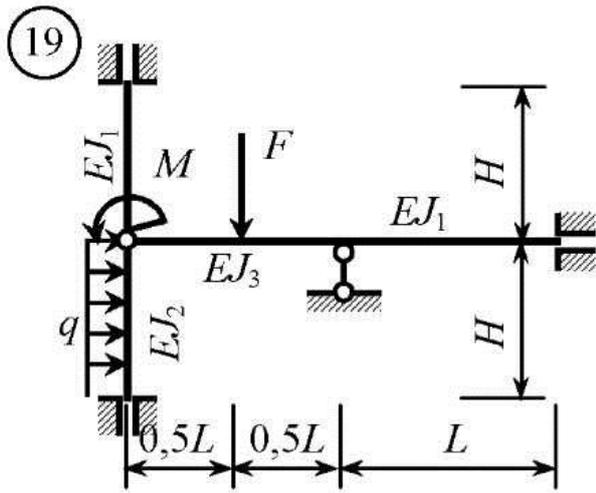


Рис. 6.2. Продолжение (начало см. на с. 90–92, окончание – на с. 94)

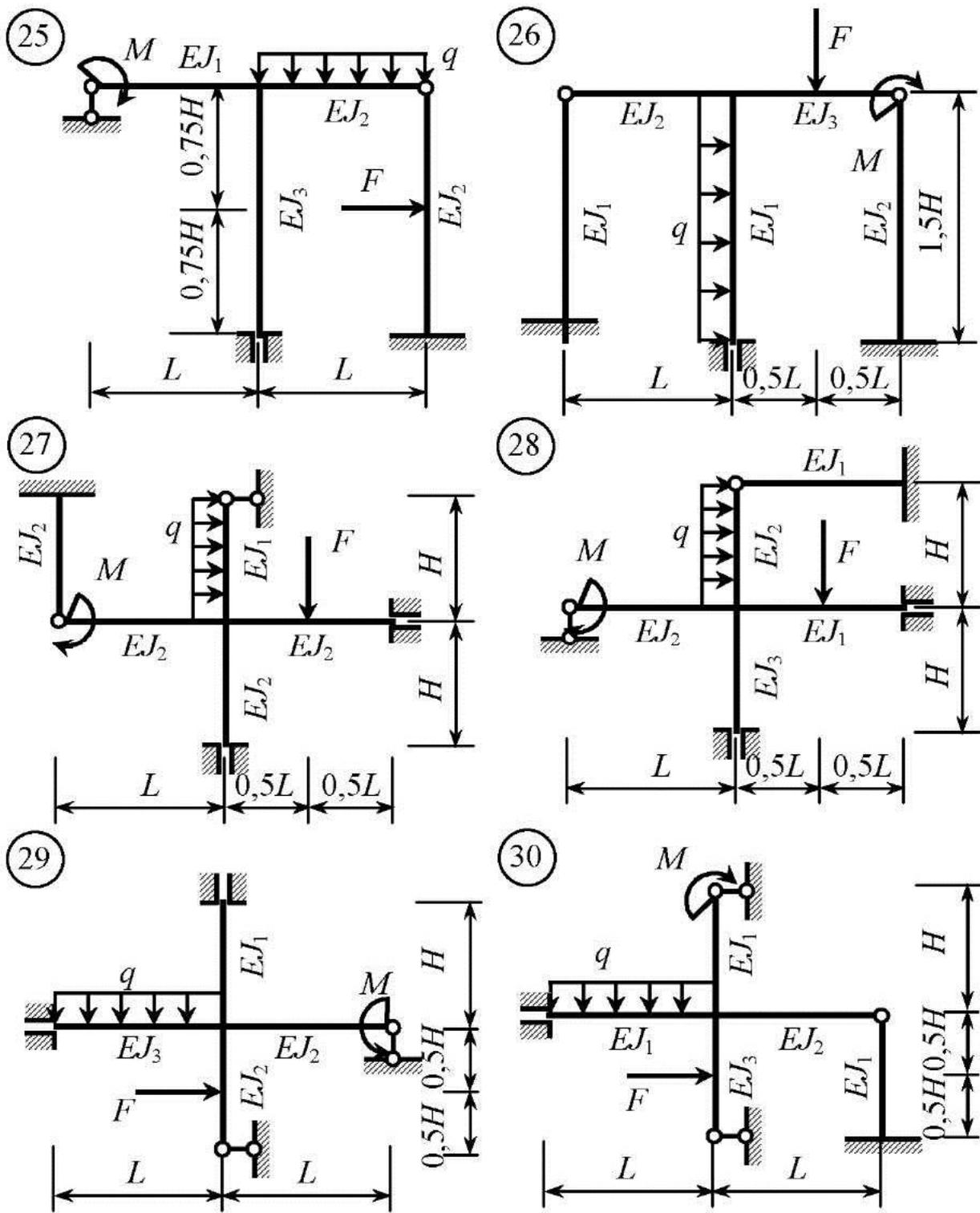


Рис. 6.2. Окончание (начало см. на с. 90–93)

Расчет статически неопределимой фермы методом сил в матричной форме

Задание. Для заданной статически неопределимой фермы (рис. 6.3) с исходными данными из табл. 6.3 требуется определить усилия в стержнях от постоянной нагрузки.

Таблица 6.3

Номер группы	d , м	h , м	F , кН	$EA_{\text{ст}} : EA_{\text{стл}} : EA_{\text{реш}}$
1	3	5,4	10	2:1,5:1
2	3,2	5,2	12	2:1,5:1
3	3,4	5,0	14	2:1,5:1
4	3,6	4,8	16	2:1,5:1
5	3,8	4,6	18	3:2:1
6	4,0	4,4	20	3:2:1
7	4,2	4,2	22	3:2:1
8	4,4	4,0	24	3:2:1
9	4,3	4,1	15	1:1:2
10	3,3	3,0	17	2:1:3

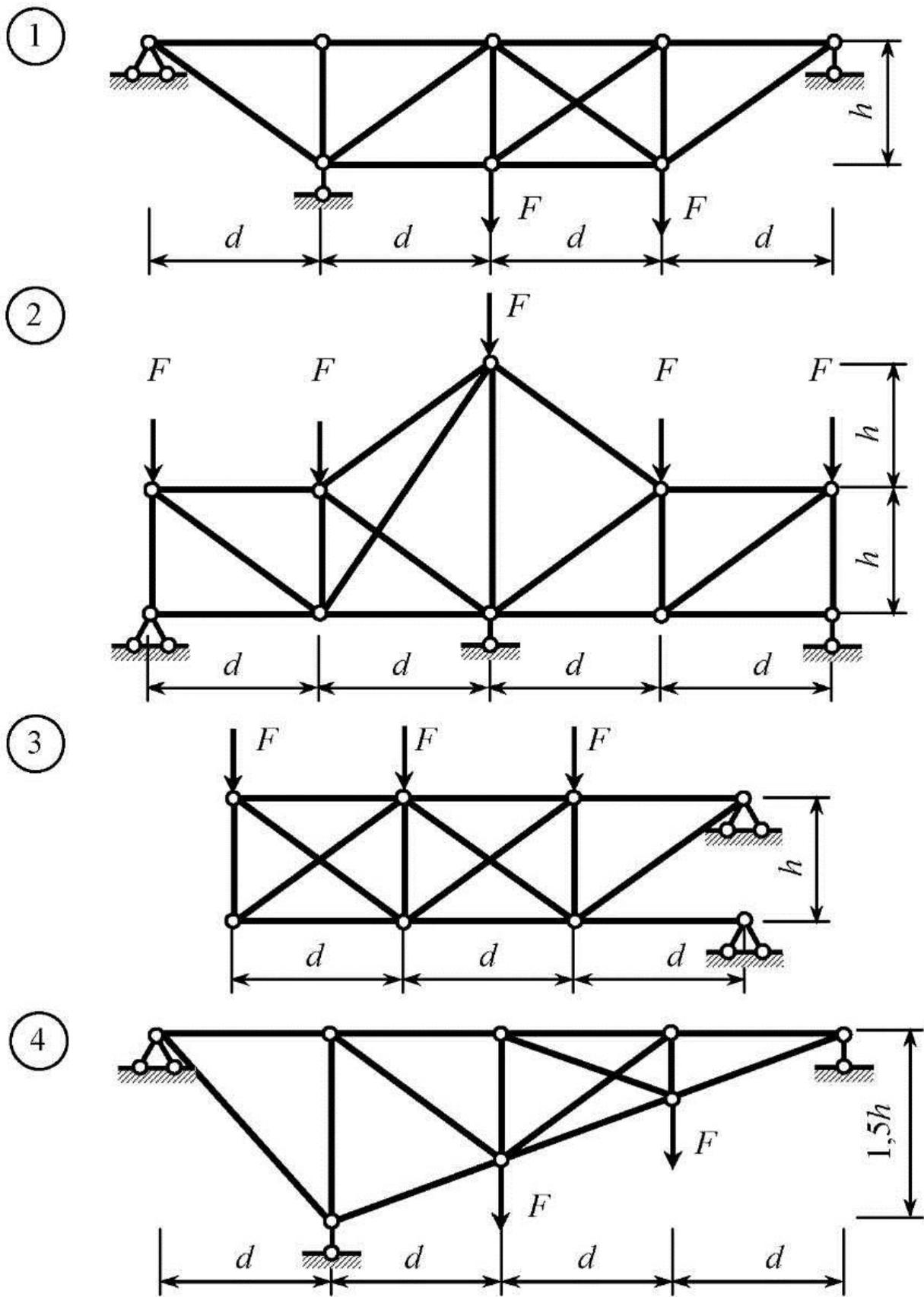


Рис. 6.3 (продолжение см. на с. 95–102, окончание – на с. 103)

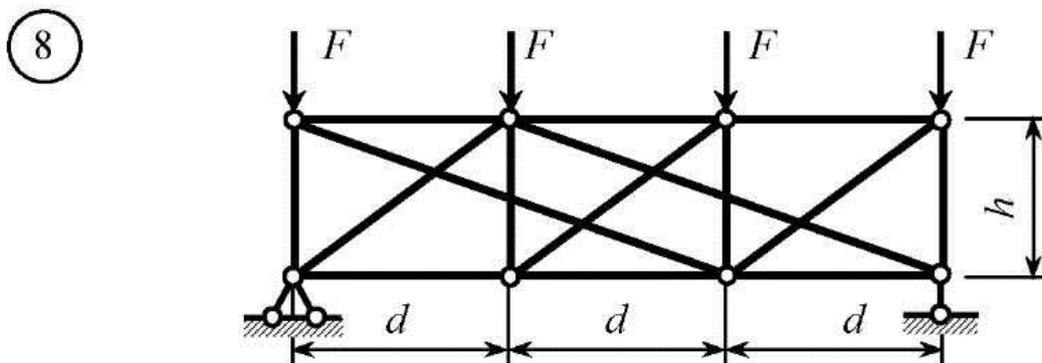
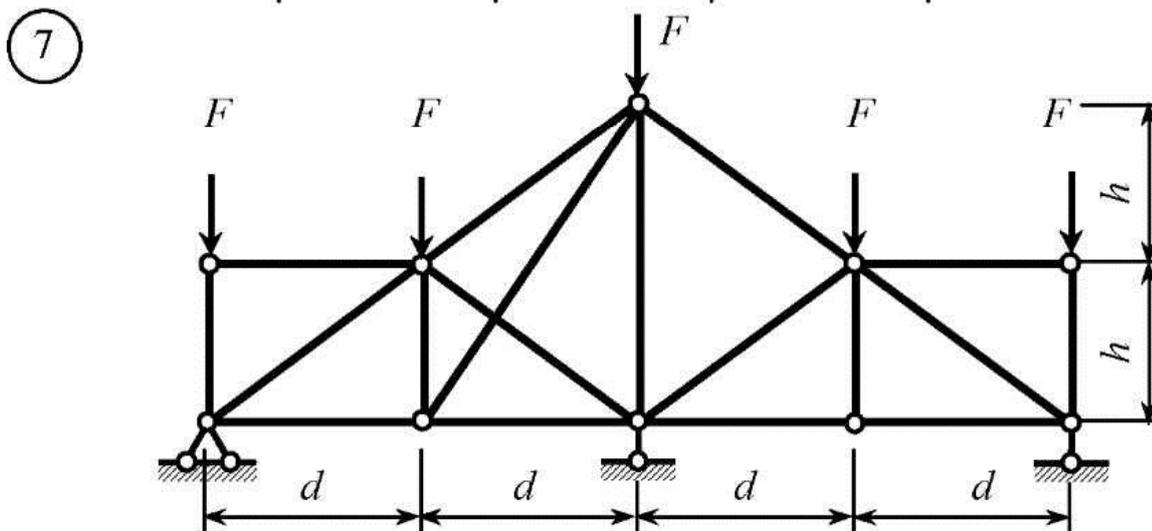
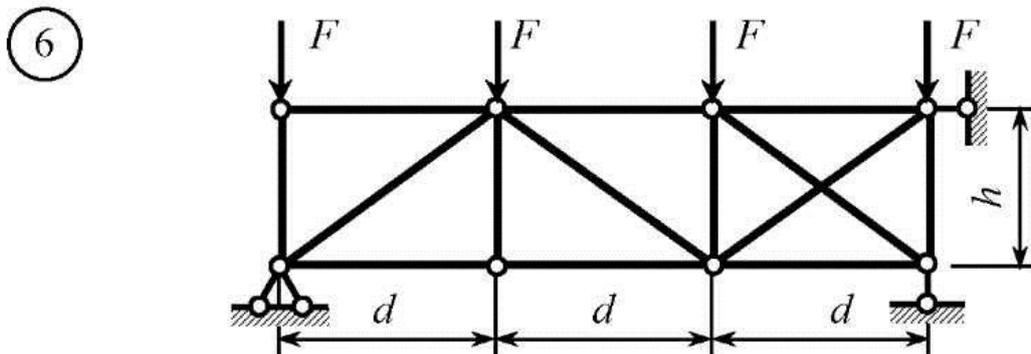
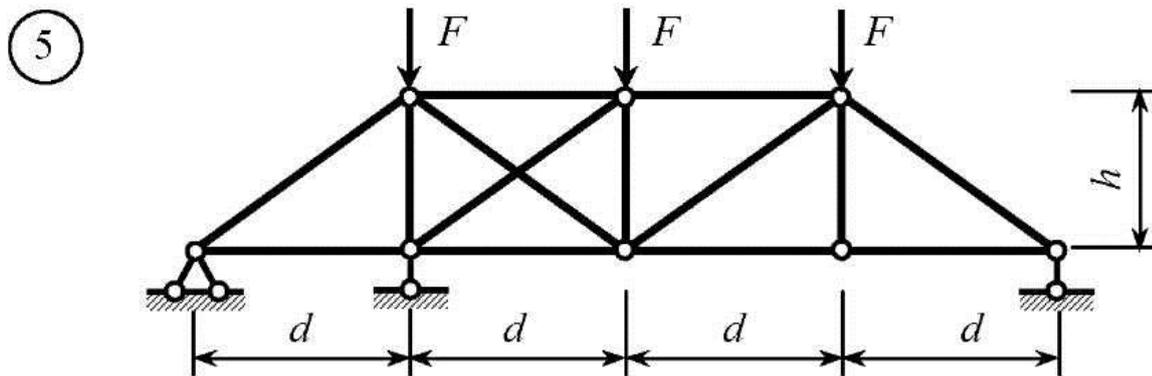
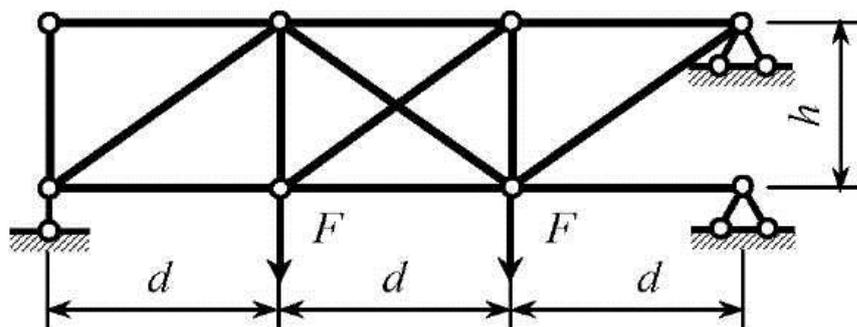
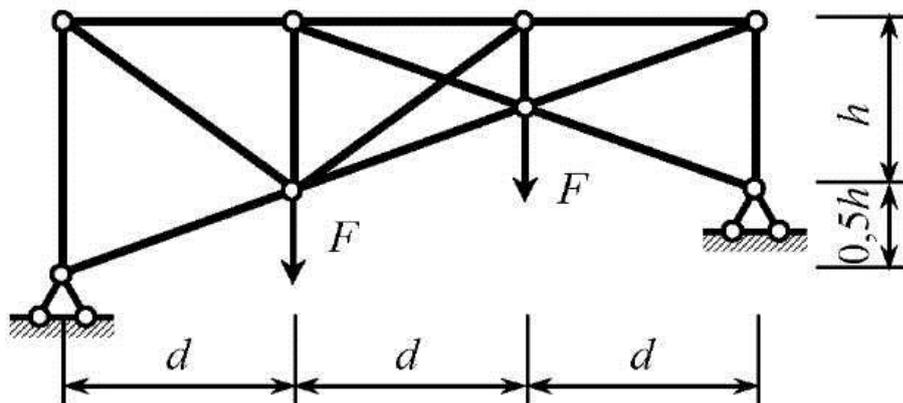


Рис. 6.3. Продолжение (начало см. на с. 96, продолжение – на с. 98–102, окончание – на с. 103)

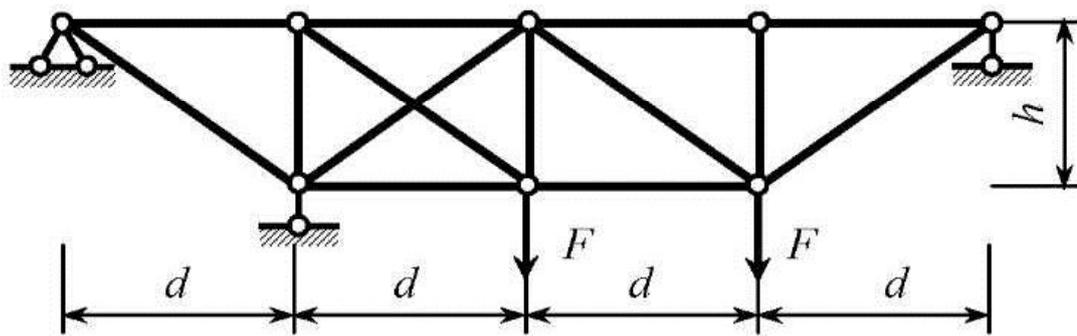
9



10



11



12

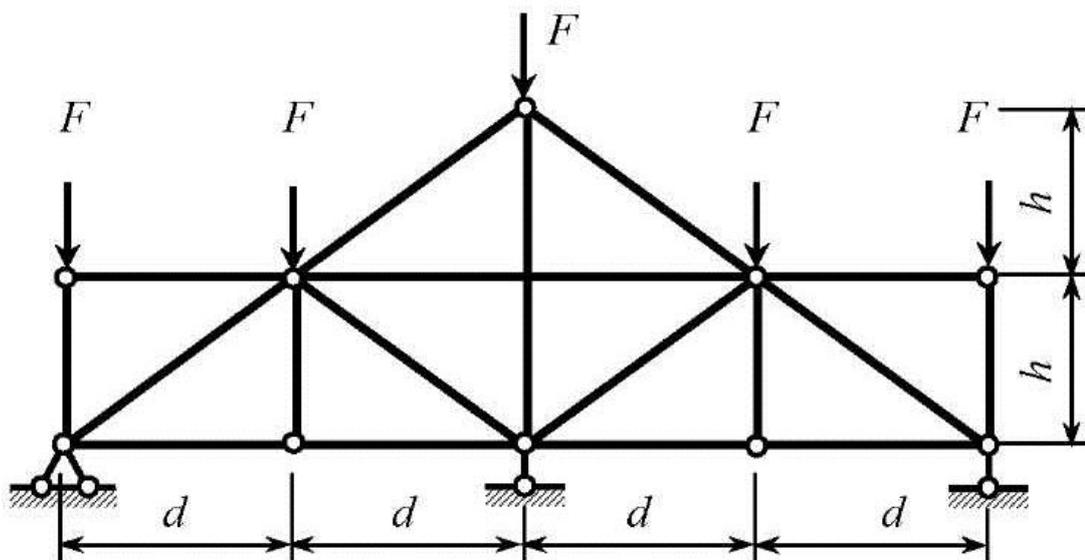
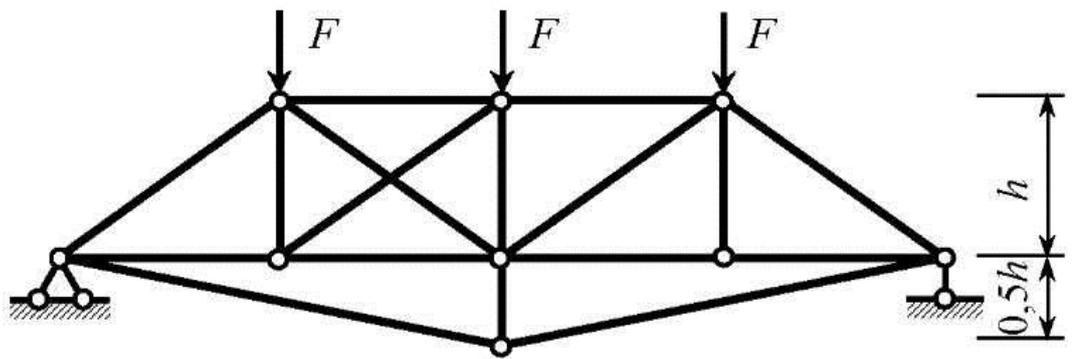
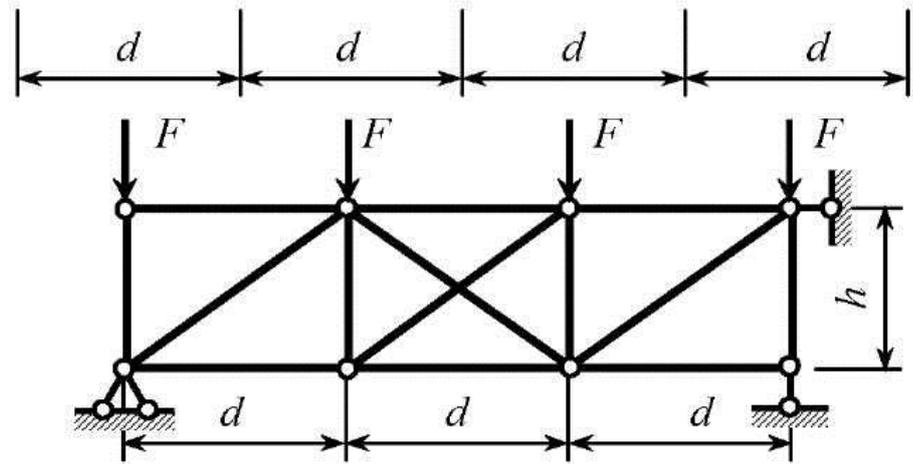


Рис. 6.3. Продолжение (начало см. на с. 96, 97, продолжение – на с. 99–102, окончание – на с. 103)

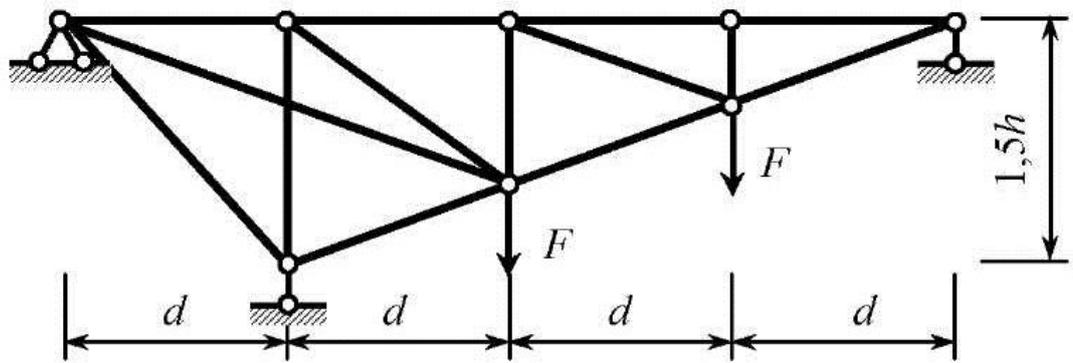
13



14



15



16

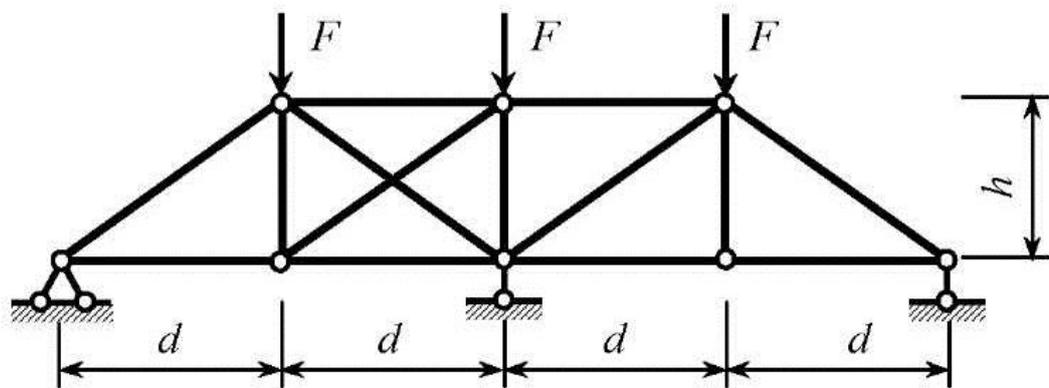
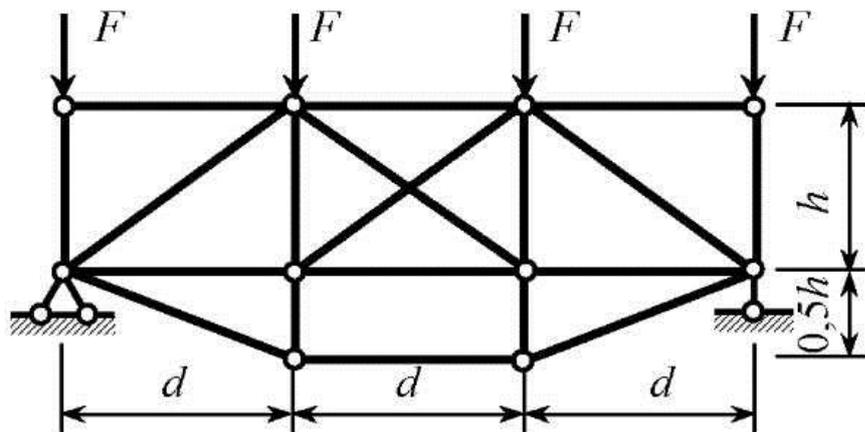
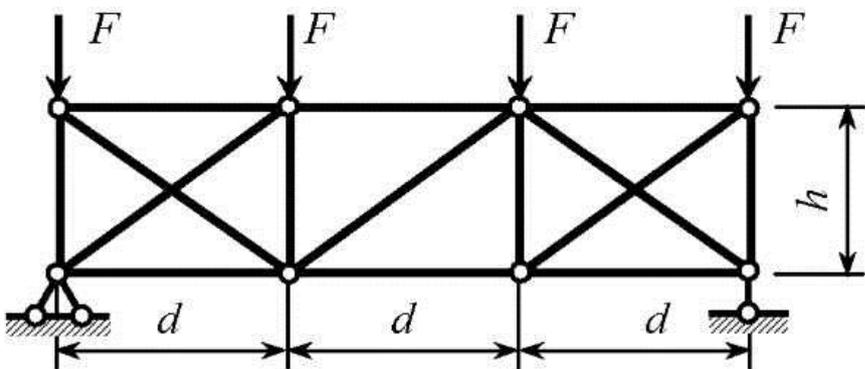


Рис. 6.3. Продолжение (начало см. на с. 96–98, продолжение – на с. 100–102, окончание – на с. 103)

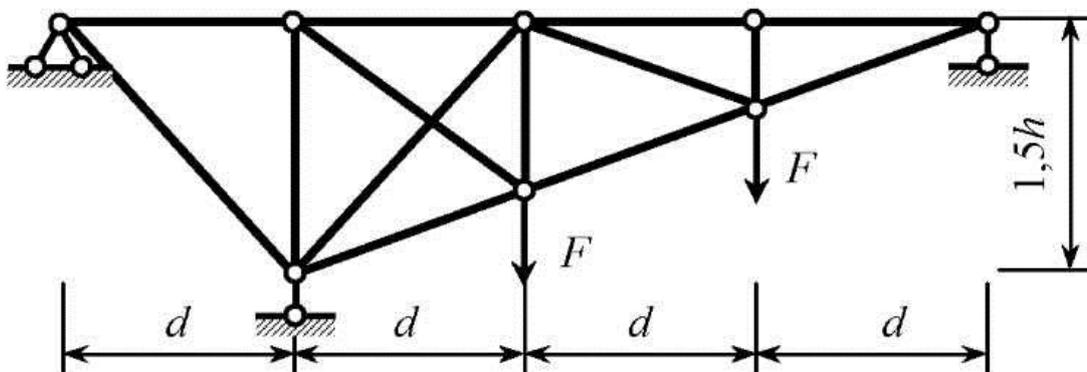
17



18



19



20

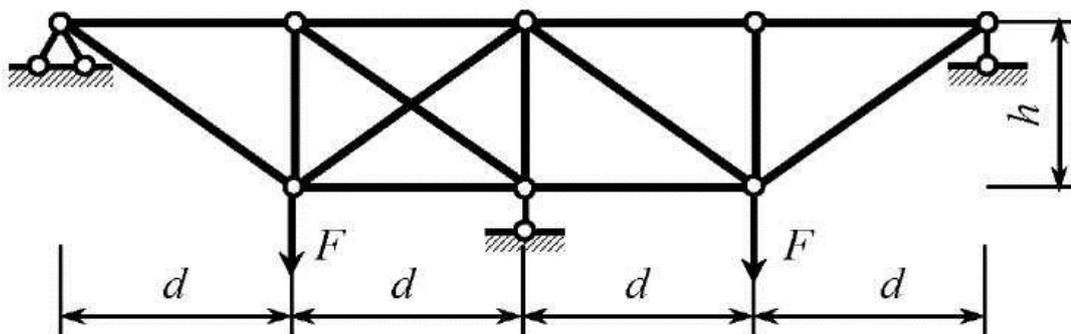
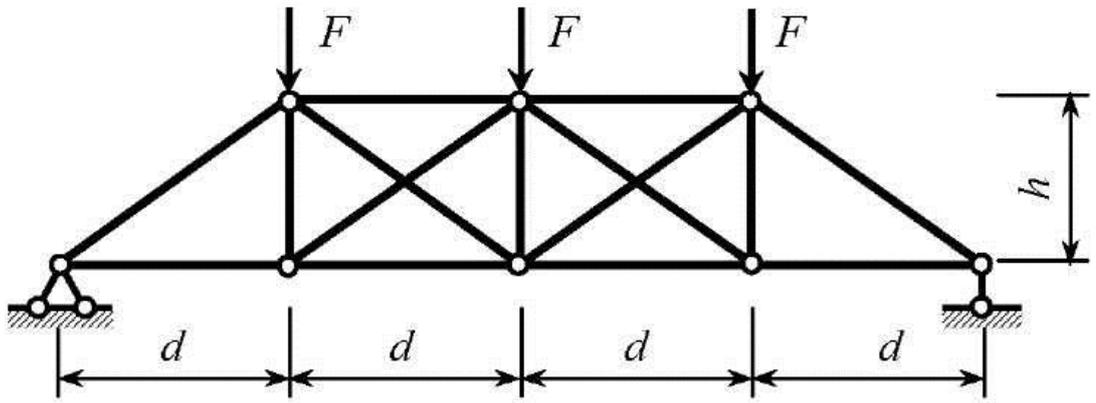
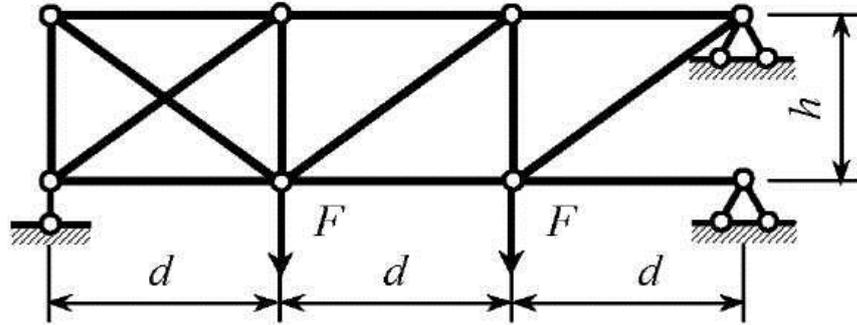


Рис. 6.3. Продолжение (начало см. на с. 96–99, продолжение – на с. 101, 102, окончание – на с. 103)

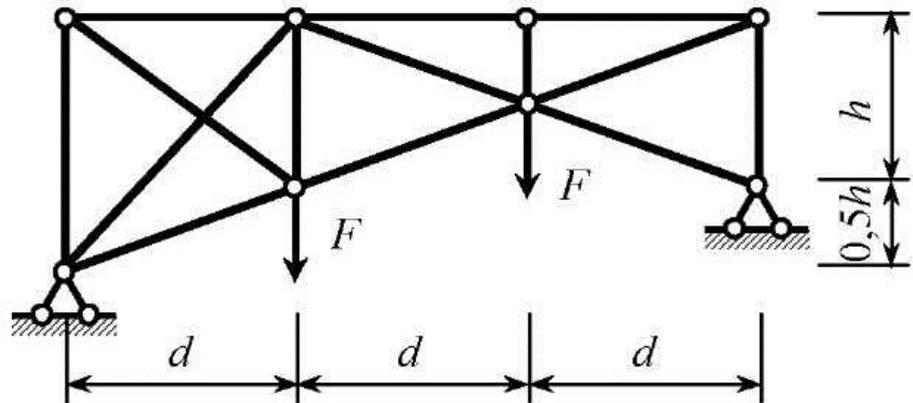
21



22



23



24

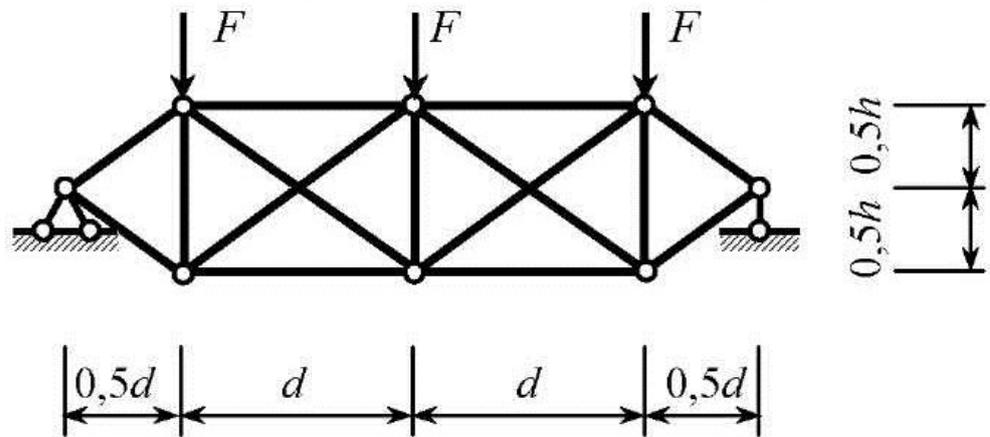
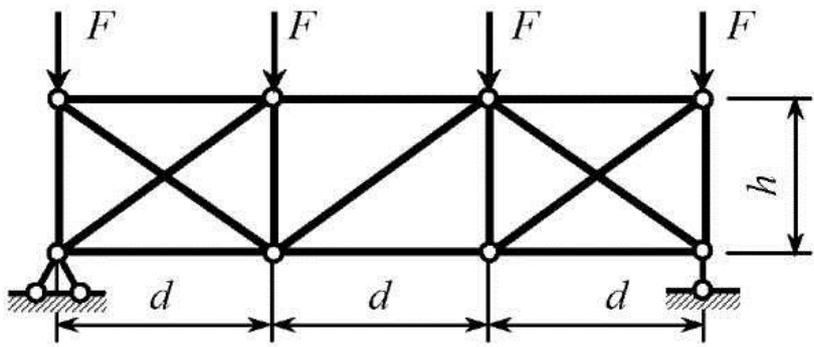
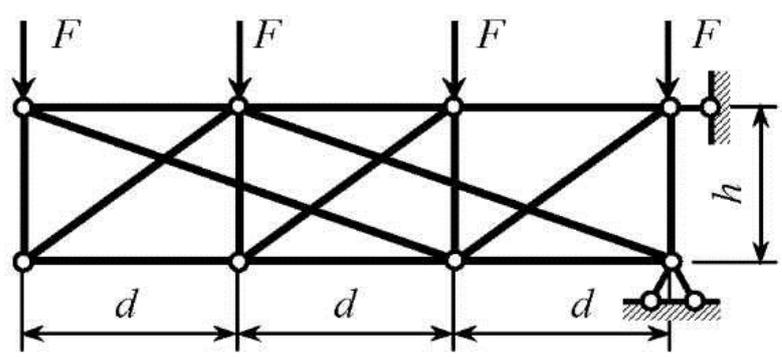


Рис. 6.3. Продолжение (начало см. на с. 96–100, продолжение – на с. 102, окончание – на с. 103)

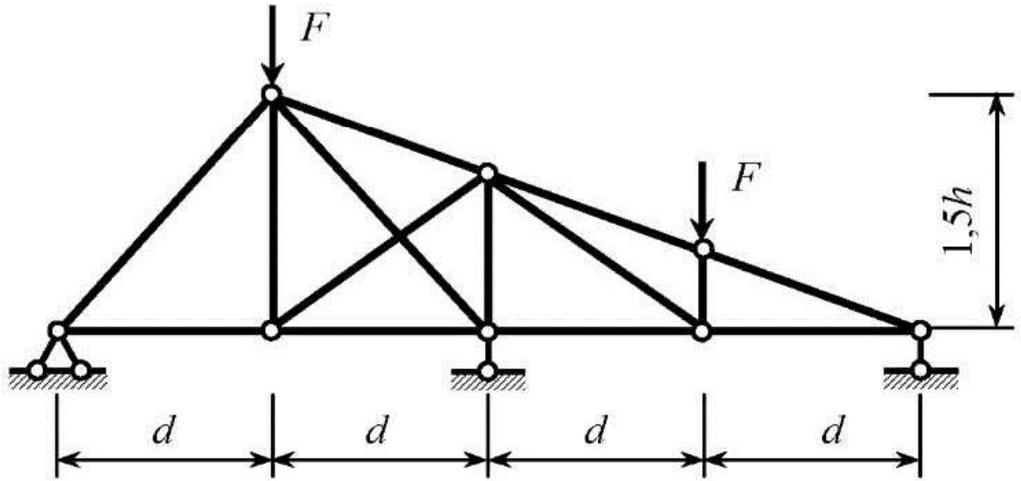
25



26



27



28

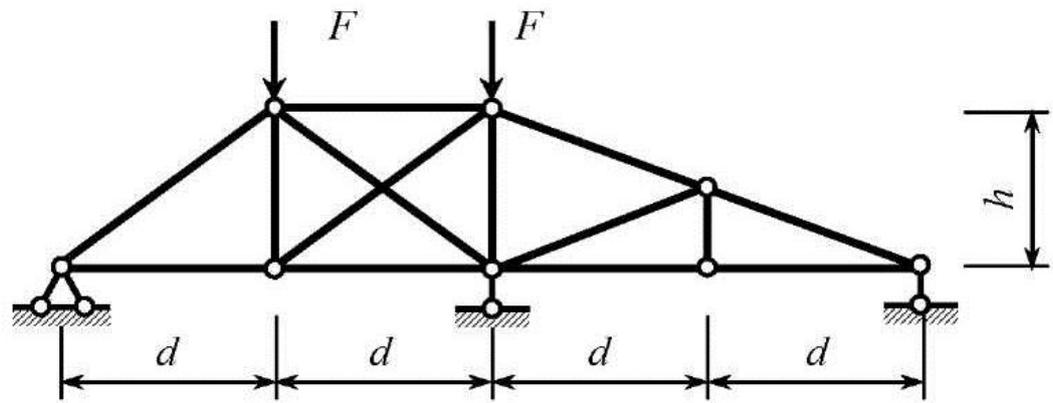
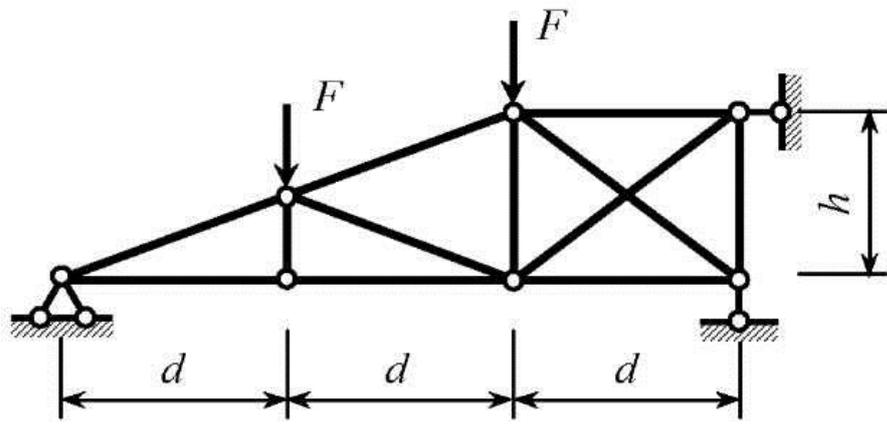


Рис. 6.3. Продолжение (начало см. на с. 96–101, окончание – на с. 103)

29



30

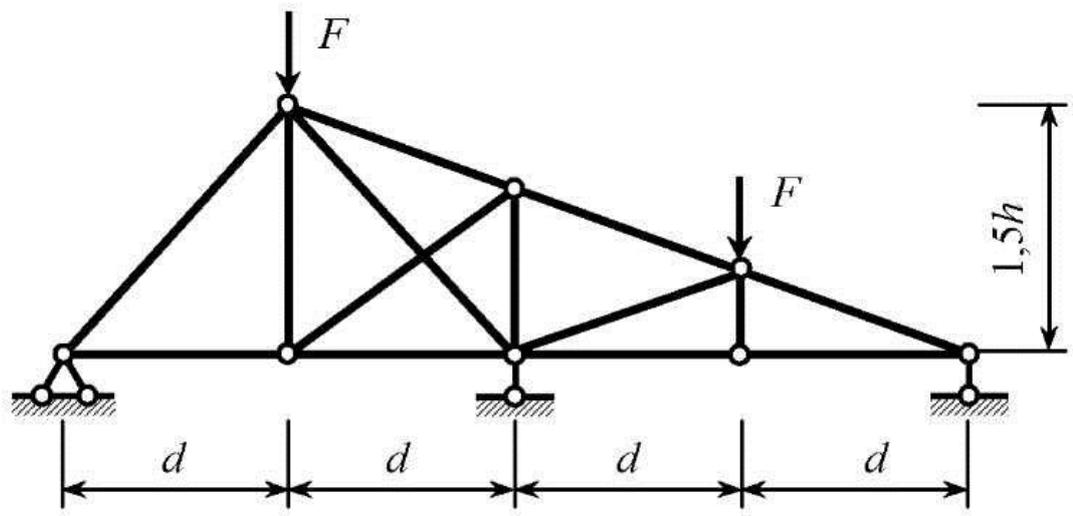


Рис. 6.3. Окончание (начало см. на с. 96–102)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Учебное пособие предназначено для студентов всех специальностей и форм обучения, изучающих дисциплину «Строительная механика». Пособие также может быть использовано при изучении дисциплин «Сопротивление материалов» и «Механика», если рабочей программой предусмотрена расчетно-графическая работа «Расчет статически неопределимых систем методом сил».

Объем пособия не позволил рассмотреть вопросы расчета статически неопределимых систем на кинематическое и температурное воздействие. При необходимости ознакомиться с примерами расчета по этой теме рекомендуем учебное пособие [4]. В этом же пособии приведено большое количество задач с ответами (их можно использовать для подготовки к защите задания и сдаче экзамена).

Большое внимание при написании пособия было уделено вопросам промежуточной и итоговой проверки правильности расчета. Выполнение расчетно-графических работ связано с большим объемом вычислений, ошибки в расчете возможны на любом этапе. Для проверки результатов ручного расчета, своевременного поиска и исправления ошибок рекомендуем использовать разработанные на кафедре строительной механики программы для ПЭВМ «Методом сил», «Метод перемещений». Порядок подготовки исходных данных и прочие вопросы работы с программами изложены в [6, 7].

Современные программные комплексы представляют расчетчику большое число инструментов в области расчета сооружений. Одновременно с этим они накладывают на пользователя и определенные требования. Грамотный расчетчик должен многое знать и уметь, в том числе:

- формировать расчетную схему;
- проводить расчеты сооружения по различным моделям;
- выяснять причины ошибок на этапе расчета и устранять их;
- анализировать результаты, полученные с помощью программного комплекса;
- из множества возможных проектных решений выбирать наилучшее.

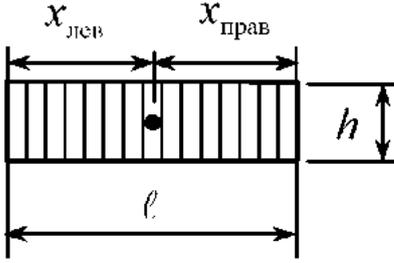
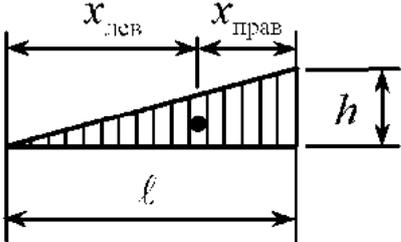
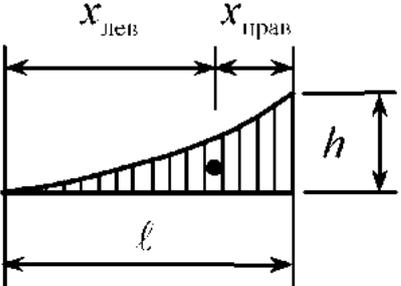
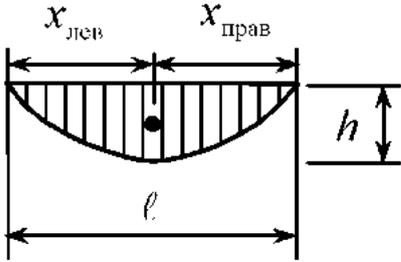
Без хорошего знания строительной механики соответствовать этим требованиям невозможно.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Дарков, А.В.* Строительная механика : учебник для вузов / А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников. – СПб. : Лань, 2010. – 656 с.
2. *Строительная механика. Статика упругих систем* : учебник для вузов / В.Д. Потапов, А.В. Александров [и др.]. – М. : Высш. шк., 2007. – 511 с.
3. *Анохин, Н.Н.* Строительная механика в примерах и задачах. Ч. I. Статически определимые системы : учебное пособие / Н.Н. Анохин. – М. : Изд-во АСВ, 2007. – 334 с.
4. *Анохин, Н.Н.* Строительная механика в примерах и задачах. Ч. II. Статически неопределимые системы : учебное пособие / Н.Н. Анохин. – М. : Изд-во АСВ, 2007. – 464 с.
5. *Бронштейн, И.Н.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов : учебное пособие / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – СПб. : Лань, 2010. – 608 с.
6. *Тухфатуллин, Б.А.* Расчет статически неопределимых систем методом сил : методические указания / Б.А. Тухфатуллин, Р.И. Самсонова. – Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2010. – 34 с.
7. *Тухфатуллин, Б.А.* Расчет статически неопределимых систем методом перемещений : методические указания / Б.А. Тухфатуллин, Р.И. Самсонова. – Томск : Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2010. – 36 с.
8. *Трушин, С.И.* Метод конечных элементов. Теория и задачи : учебное пособие / С.И. Трушин. – М. : Изд-во АСВ, 2008. – 256 с.
9. *Константинов, И.А.* Строительная механика : учебник для вузов / И.А. Константинов, В.В. Лалин, И.И. Лалина. – М. : Проспект, КНОРУС, 2010. – 432 с.
10. *Семенов, А.А.* Проектно-вычислительный комплекс SCAD в учебном процессе. Часть I. Статический расчет : учебное пособие / А.А. Семенов, А.И. Габитов. – М. : Изд-во АСВ, 2005. – 152 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Справочные данные для перемножения эпюр
по способу Верещагина

Эпюра	Площадь	Положение центра тяжести	
		$x_{\text{лев}}$	$x_{\text{прав}}$
	$h\ell$	$\frac{\ell}{2}$	$\frac{\ell}{2}$
	$\frac{h\ell}{2}$	$\frac{2\ell}{3}$	$\frac{\ell}{3}$
	$\frac{h\ell}{3}$	$\frac{3\ell}{4}$	$\frac{\ell}{4}$
	$\frac{2h\ell}{3}$	$\frac{\ell}{2}$	$\frac{\ell}{2}$

Эпюры моментов и опорные реакции
для расчета рам методом перемещений

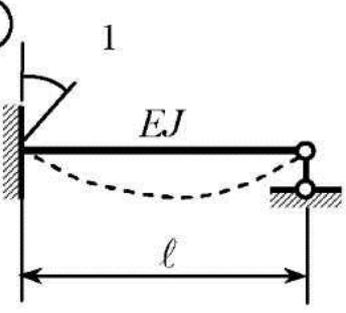
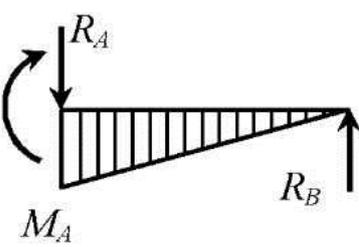
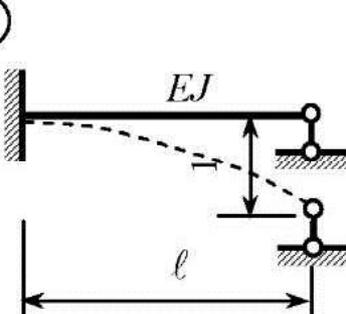
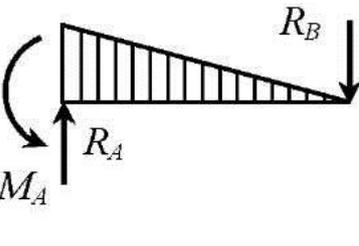
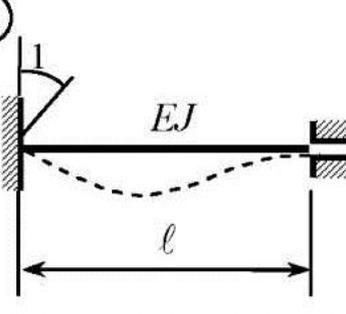
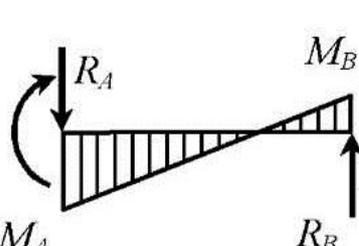
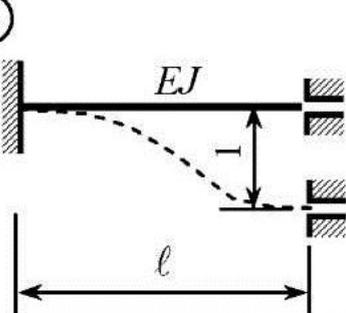
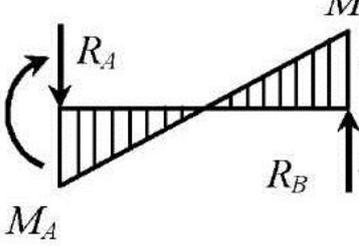
Схема	Эпюра	Реакции и ординаты
<p>①</p> 		$M_A = \frac{3EJ}{l}$ $R_A = R_B = \frac{3EJ}{l^2}$
<p>②</p> 		$M_A = \frac{3EJ}{l^2}$ $R_A = R_B = \frac{3EJ}{l^3}$
<p>③</p> 		$M_A = \frac{4EJ}{l}$ $M_B = \frac{2EJ}{l}$ $R_A = R_B = \frac{6EJ}{l^2}$
<p>④</p> 		$M_A = M_B = \frac{6EJ}{l^2}$ $R_A = R_B = \frac{12EJ}{l^3}$

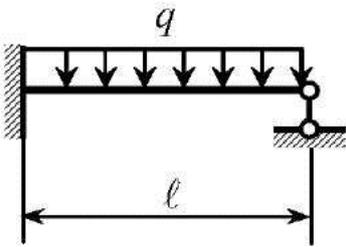
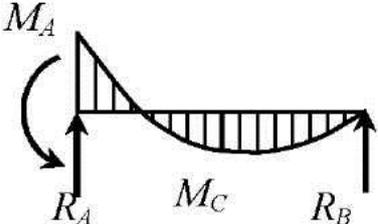
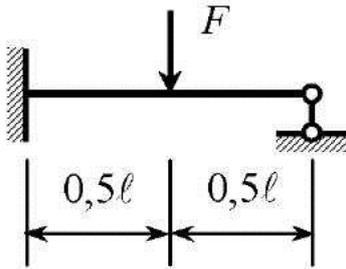
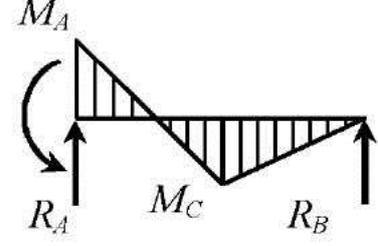
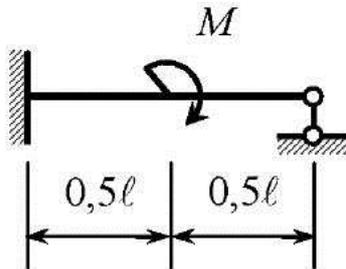
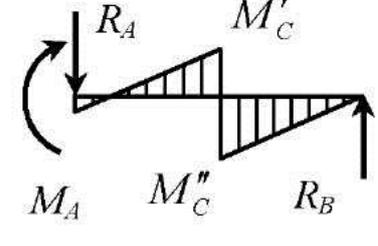
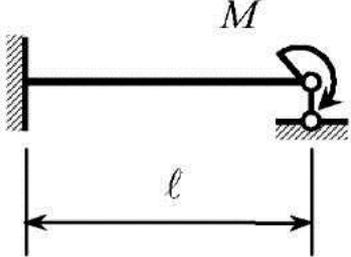
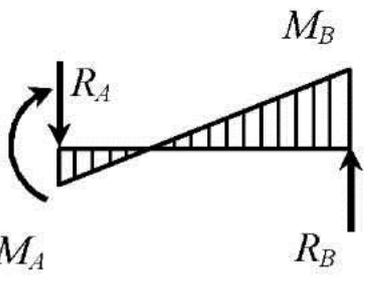
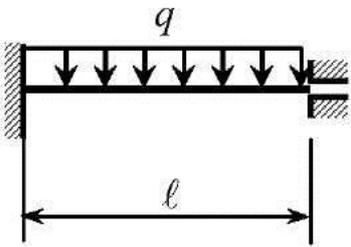
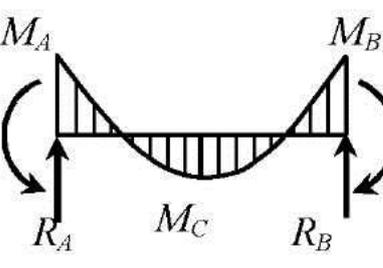
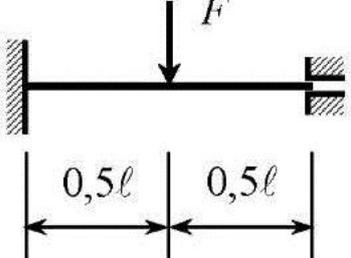
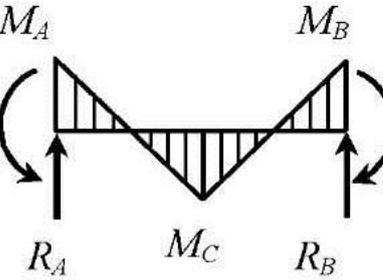
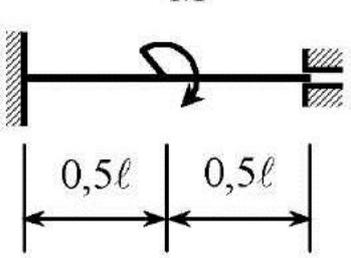
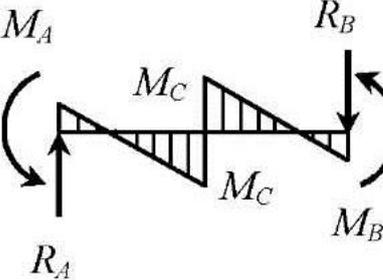
Схема	Эпюра	Реакции и ординаты
<p>⑤</p> 		$M_A = \frac{q\ell^2}{8}$ $M_C = \frac{q\ell^2}{16}$ $R_A = \frac{5}{8}q\ell$ $R_B = \frac{3}{8}q\ell$
<p>⑥</p> 		$M_A = \frac{3}{16}F\ell$ $M_C = \frac{5}{32}F\ell$ $R_A = \frac{11}{16}F$ $R_B = \frac{5}{16}F$
<p>⑦</p> 		$M_A = \frac{1}{8}M$ $M'_C = \frac{7}{16}M$ $M''_C = \frac{9}{16}M$ $R_A = R_B = \frac{9}{8} \frac{M}{\ell}$

Схема	Эпюра	Реакции и ординаты
<p>⑧</p> 		$M_A = \frac{1}{2}M$ $M_B = M$ $R_A = R_B = \frac{3}{2} \frac{M}{l}$
<p>⑨</p> 		$M_A = M_B = \frac{ql^2}{12}$ $M_C = \frac{ql^2}{24}$ $R_A = R_B = \frac{1}{2}ql$
<p>⑩</p> 		$M_A = M_B = \frac{Fl}{8}$ $M_C = \frac{Fl}{8}$ $R_A = R_B = \frac{F}{2}$
<p>⑪</p> 		$M_A = M_B = \frac{1}{4}M$ $M_C = \frac{1}{2}M$ $R_A = R_B = \frac{3}{2} \frac{M}{l}$

Справочные данные об операциях с матрицами

Таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов, называется матрицей с размером $m \times n$:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Числа, из которых состоит матрица, называются ее элементами. Частными случаями матрицы $[A]$ являются матрица-столбец (вектор):

$$\{A\} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix} \text{ и матрица-строка: } \{A\}^T = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n].$$

Если число строк и число столбцов матрицы совпадают, то матрица называется квадратной. Число строк (столбцов) квадратной матрицы называется ее порядком. Если в квадратной матрице все элементы, кроме диагональных элементов, равны нулю, то матрица называется диагональной. Частным случаем диагональной матрицы является единичная матрица $[E]$:

$$[E] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Определителем (детерминантом) квадратной матрицы является число, характеризующее матрицу и вычисляющееся по соответствующим правилам.

Формулы для вычисления определителей матриц второго и третьего порядков:

$$|A_{2 \times 2}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21},$$

$$|A_{3 \times 3}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + \\ + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}.$$

Результатом сложения (вычитания) двух матриц одинакового размера является матрица того же размера с элементами, равными сумме (разности) соответствующих элементов исходных матриц, например

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11} + b_{11}) & (a_{12} + b_{12}) \\ (a_{21} + b_{21}) & (a_{22} + b_{22}) \\ (a_{31} + b_{31}) & (a_{32} + b_{32}) \end{bmatrix}.$$

Результатом умножения матрицы на число является матрица такого же размера с элементами

$$\lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} \end{bmatrix}.$$

Перемножение двух матриц возможно, если число столбцов первой матрицы совпадает с числом строк второй матрицы. Результатом перемножения матрицы с размером $m \times n$ на матрицу с размером $n \times k$ будет матрица с размером $m \times k$. Элемент c_{ij} результирующей матрицы равен сумме произведений элементов i -й строки первой матрицы и j -го столбца второй матрицы:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix},$$

$$[C] = [A][B] = \begin{bmatrix} (a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31}) & (a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32}) \\ (a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31}) & (a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32}) \\ (a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} + a_{33} \cdot b_{31}) & (a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22} + a_{33} \cdot b_{32}) \end{bmatrix}.$$

Операция транспонирования матриц заключается в замене соответствующих строк исходной матрицы на столбцы

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad [A]^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}.$$

Обратной к матрице $[A]$ называется матрица $[A]^{-1}$, при умножении которой на исходную получают единичную матрицу

$$[A]^{-1}[A] = [A][A]^{-1} = [E].$$

Для вычисления обратной матрицы второго порядка можно использовать следующую операцию:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad [A]^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

Обратная матрица третьего порядка вычисляется по формулам:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad [A]^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} b_{11} & -b_{12} & b_{13} \\ -b_{21} & b_{22} & -b_{23} \\ b_{31} & -b_{32} & b_{33} \end{bmatrix},$$

$$\text{где } b_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad b_{12} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad b_{13} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix},$$

$$b_{21} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad b_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad b_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix},$$

$$b_{31} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad b_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad b_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Для обращения матриц высоких порядков следует использовать стандартные программы для ПЭВМ.

Основные условные обозначения

- W – число степеней свободы;
- D – число дисков;
- $Ш_0$ – число простых шарниров;
- C_0 – количество опорных связей;
- L – количество лишних связей (степень статической неопределимости);
- K – количество замкнутых контуров;
- Π – число ползунов;
- δ_{ik} – перемещение по направлению i -й отброшенной связи от действия $X_k = 1$;
- Δ_{if} – перемещение по направлению i -й отброшенной связи от действия заданной нагрузки;
- ω – площадь эпюры в формуле вычисления перемещений по способу Верещагина;
- u – ордината под центром тяжести эпюры в формуле вычисления перемещений по способу Верещагина;
- n – количество неизвестных в методе перемещений (степень кинематической неопределимости);
- n_y – число угловых перемещений;
- n_l – число линейных перемещений;
- r_{ik} – реакция в i -й наложенной связи от действия $Z_k = 1$;
- R_{if} – реакция в k -й наложенной связи от действия заданной нагрузки;
- C – количество стержней фермы;
- U – число узлов фермы;
- EJ – жесткость на изгиб;
- EA – жесткость на растяжение-сжатие.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	3
1. Рабочая программа по строительной механике. Статически неопределимые стержневые системы.....	4
2. Расчет статически неопределимой рамы методом сил.....	5
3. Расчет статически неопределимой рамы методом перемещений...	42
4. Расчет статически неопределимой фермы методом сил в матричной форме.....	61
5. Ответы к задачам для самостоятельного решения.....	78
6. Варианты заданий к расчетно-графическим работам.....	83
Библиографический список.....	104
Заключение.....	106
Приложение 1. Справочные данные для перемножения эпюр по способу Верещагина.....	107
Приложение 2. Эпюры моментов и опорные реакции для расчета рам методом перемещений.....	108
Приложение 3. Справочные данные об операциях с матрицами.....	111
Приложение 4. Основные условные обозначения.....	114