

ОПД.Р.03 СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА
ТЕОРИЯ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

Учебное пособие

Показаны важность метода решения задач сопротивления материалов в ортогональной системе координат; способ перехода от произвольной системы к ортогональной, в том числе для тонкостенных стержней. Введены понятия координатных функций: l, y, z , характеризующих закон плоских сечений, а также секториальной площади – ω , ответственной за депланацию (искривление) при кручении тонкостенных стержней.

Рассмотрены важнейшие случаи применения тонкостенных стержней в конструкциях авиа-, судостроения и космической техники.

Соответствует программам по учебным дисциплинам «Теория тонкостенных стержней» (направление «Наземные транспортные средства»).

ВВЕДЕНИЕ

Чем вызвана необходимость структурной оптимизации стержней

Для своей жизни и развития человек творчеством исследователей и инженеров формирует «вторую природу». При этом элементы машин, устройств, конструкций при выполнении своих функций вынуждены нести разнообразные механические, тепловые, радиационные и другие нагрузки, воздействия. И при этом люди (*лица принимающие решение*) должны признать приемлемыми, целесообразными, экономически обоснованными, оптимальными определенные затраты на всех этапах *жизненного цикла изделия* (проектирование, изготовление, эксплуатация и утилизация).

Безусловно, для разных реальных изделий существует большое разнообразие, как видов воздействий, так и параметров, описывающих их работоспособное состояние с учетом назначения изделия, требуемой *надежности и эффективности*. Опасным может быть принято появление пластических деформаций в опасной точке детали, снижение пластичности материала и трещиностойкости, появление трещин, достижение трещинами некой критической величины, окончательное разрушение изделия, изменение формы и размеров детали за счет ползучести, изменение требуемого поля напряжений за счет релаксации, износ поверхности, коррозия, отслоение армирующих элементов в композитах, изменение упругих свойств, снижение гарантированного ресурса и т. д.

Рассмотрим оптимизацию стержней при статическом нагружении по критериям жесткости и по расчетным напряжениям в опасной точке детали. Зачастую это сводится к условию минимального веса, минимальной материалоемкости. Кроме того, требование минимального веса становится решающим, без него вообще не реализуется *функция изделия* (в случаях ракетной и авиационной техники, подвижных наземных транспортных средств, высотных сооружений и др.).

Тонкостенные стержни как вид структурной оптимизации

В повседневной жизни мы часто встречаемся с использованием *тонкостенных стержней* открытого и закрытого профилей (вспомним хотя бы рамы автомобилей и других транспортных средств, опоры, мачты высоковольтных линий электропередач, решетчатые стрелы грузоподъемных кранов, металлоконструкции строительных сооружений и др.). Для чего же их используют инженеры и почему в определенных условиях эксплуатации они имеют преимущества?

Рассмотрим среднюю по объему, максимальную с точки зрения прочности, удельную энергию упругого деформирования стержней при различных простых видах сопротивления.

При осевом растяжении и сжатии стержня (*проверьте!*):

$$u_N = \frac{[\sigma]^2}{2E}. \quad (1)$$

При кручении вала круглого поперечного сечения (*проверьте!*):

$$u_T = \frac{[\tau]^2}{4G}. \quad (2)$$

Отношение энергий

$$\frac{u_N}{u_T} = \frac{[\sigma]^2}{2E} \cdot \frac{4G}{[\tau]^2} = 2 \cdot \left(\frac{[\sigma]}{[\tau]} \right)^2 \cdot \frac{G}{E} = \left(\frac{[\sigma]}{[\tau]} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \mu}. \quad (3)$$

В случае мягкой стали $[\tau]_{III} = 0,5[\sigma]$, $\mu \approx 0,25 \div 0,32$ получим (*проверьте!*) $u_N/u_T \approx 3,2$.

То есть для накопления одной и той же энергии упругого деформирования потребуется работающий на кручение элемент (например, подвески транспортного средства), в три раза тяжелее, чем элемент, работаю-

щий на осевое растяжение/сжатие¹. Почему это происходит и как инженеру выйти из данного положения, как, хотя бы частично, разрешить данное противоречие?

Рассмотрим распределение напряжений по сечению при осевом растяжении и сжатии и при кручении вала круглого поперечного сечения.

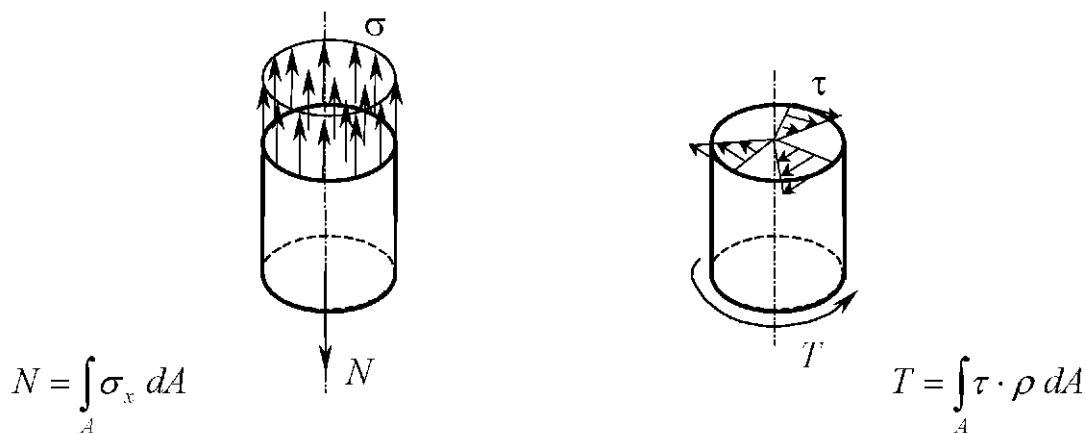


Рис. 1. Распределение напряжений по сечению при растяжении/сжатии и кручении

Из рис. 1 видно, что при растяжении и сжатии напряжения распределяются равномерно по сечению. Каждая частица материала несет нагрузку, равную допускаемой. При кручении же напряжения распределены неравномерно (линейно по радиусу). И когда на наружной поверхности частицы материала несут нагрузку на пределе сопротивления, внутри материала недогружен. Вывод: для улучшения энергетической и массогабаритных характеристик, если нельзя заставить материал по всему сечению работать равномерно, стоит удалить недогруженную середину вала. Тогда по оставшейся части материала напряжения распределяются более равномерно и вал приближается к равнопрочному. Можно показать (проверь-

¹ Другое дело, что конструктивно в подвесках более удобно использовать все-таки элементы, работающие на кручение – торсионы, или на изгиб – листовые рессоры, обеспечивающие меньшую жесткость при сравнимых габаритах.

me!), что в пределе $\lim_{d \rightarrow 0} u_T = \frac{[\tau]^2}{2G}$ (то есть накопленная энергия упругого деформирования увеличивается в два раза!)².

Теперь рассмотрим среднюю по объему, максимальную с точки зрения прочности удельную энергию упругого деформирования при изгибе на следующем примере.

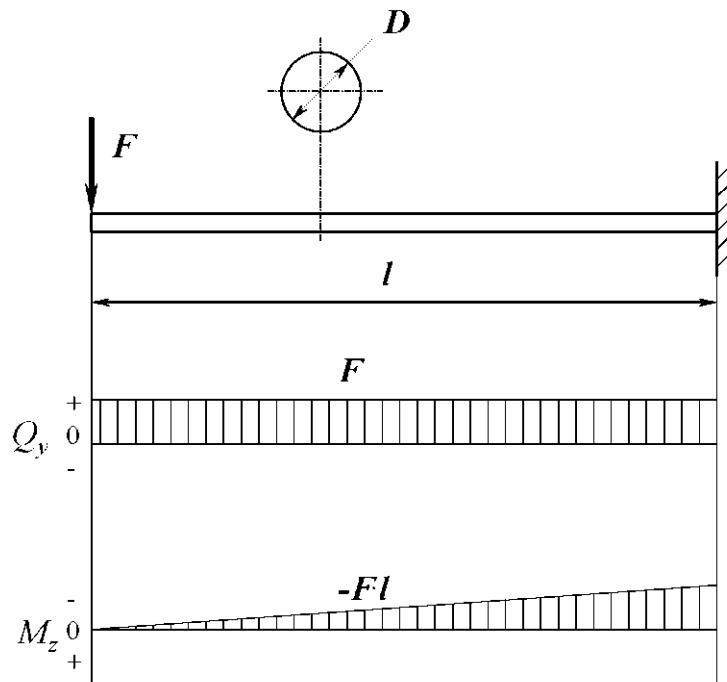


Рис. 2. Расчетная схема, выбранная для определения u_M

Для данной расчетной схемы получим (*проверьте!*)³:

$$u_M = \frac{[\sigma]^2}{24E}. \quad (4)$$

Результат еще более нежелательный: $u_N/u_M = 12$?! В чем же причина столь низкой энергетической эффективности балки и что нужно предпринять инженеру в этом случае?

² Конечно, реально толщину стенки нельзя чрезмерно уменьшать хотя бы из-за того, что начинается потеря устойчивости.

³ Для длинных балок при плоском изгибе пренебрежем частью энергии, связанной с поперечным внутренним усилием как величиной малой (хотя, безусловно, конечной) по сравнению с частью энергии, связанной с изгибающим моментом.

Рассматривая распределение напряжений в опасных точках по длине балки, приходим к необходимости использования балок равного сопротивления⁴ (с одинаковыми по длине запасами прочности при расчетной нагрузке). Листовая автомобильная рессора – балка равного сопротивления (рис. 3).

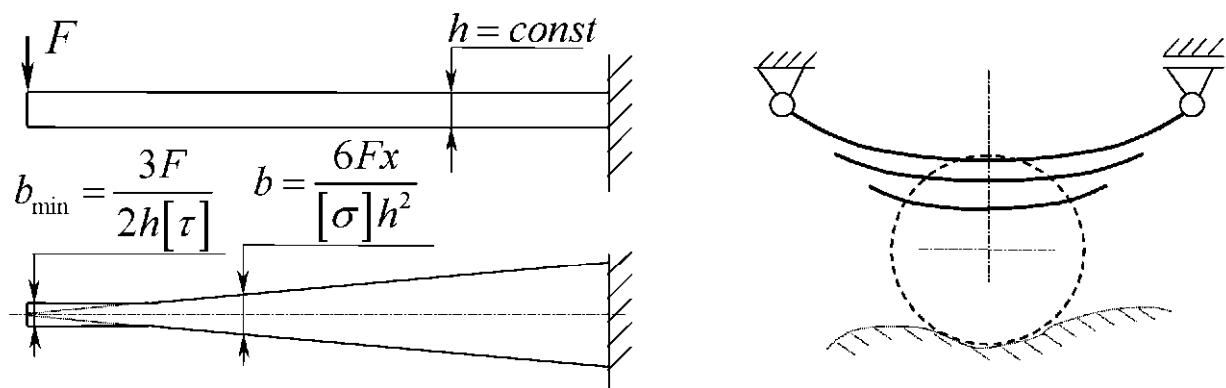


Рис. 3. Вид листовой автомобильной рессоры

Рассматривая распределение напряжений по сечению балки, приходим к необходимости (как ранее при кручении) убрать материал там, где он недогружен, и сосредоточить там, где он работает. То есть, на наибольшем, допустимом габаритами, расстоянии от нейтральной оси.

Таким образом, расчетная схема тонкостенных стержней появляется при оптимизации балок, работающих на плоский поперечный изгиб. Получается своеобразный стержень-оболочка $\delta \ll b \approx h \ll L$. С одной стороны, два характерных размера b, h много меньше третьего L (условие для стержня). С другой стороны, b и h много больше третьего δ (условие для оболочки).

Деформирование и распределение напряжений в тонкостенных и обычных стержнях существенно отличаются. Достаточно сказать, что перестают выполняться (полностью или частично) некоторые важнейшие

⁴ Балка равного сопротивления имеет наилучшую энергетическую характеристику, минимальный вес, наибольшую гибкость, наилучшим образом работает на ударную нагрузку.

для выводов формул сопротивления материалов упрощающие гипотезы – гипотеза плоских сечений Бернулли и принцип локальности действия взаимно уравновешенной системы сил Сен-Венана. Все это несколько усложняет расчет. Но за преимущества изделия в процессе эксплуатации, как правило, стоит заплатить на этапе проектирования и расчета.

Особенности работы тонкостенных стержней

Особенности деформирования тонкостенных стержней

Кроме того, что в общем случае нагружения поперечные сечения тонкостенных стержней, плоские до деформации стержня, перестают быть плоскими после деформации (искривляются, *депланируют*)⁵, оказывается, что при приложении поперечной силы в центре тяжести сечения, как правило, кроме изгиба возникает еще и закручивание стержня. Чтобы разобраться, отчего это происходит и как с этим бороться, рассмотрим распределение напряжений.

Особенности распределения напряжений

Можно показать, что в приповерхностном слое детали, в случае свободной поверхности, касательные напряжения всегда будут направлены по касательной к поверхности. А так как толщина стенки рассматриваемых стержней мала, можно сделать вывод: касательные напряжения направлены по касательной к контуру сечения и в случае плоского изгиба распределены равномерно по толщине стенки; к тому же для тонкостенных стержней (особенно открытого, незамкнутого профиля) они имеют значительную величину и оказывают значительно большее влияние на деформацию и прочность этих стержней, чем при изгибе стержней сплошного и замкнутого профиля.

⁵ То есть не выполняется гипотеза Бернулли.

Подходы к уточнению расчета напряжений

Так как перестают полностью или частично выполняться основные упрощающие гипотезы, то полученные в результате расчета величины напряжений существенно отличаются от реальных (полученных, например, в результате эксперимента).

Постановка задачи в рамках теории упругости

Сначала посмотрим, что дает *самый общий метод решения*.

Определение напряженно-деформированного состояния в упругих телах произвольной формы при произвольных кинематических и силовых граничных условиях (т. е. условиях закрепления и нагружения) является *основной задачей теории упругости*.

При этом в общем случае в объемной задаче *неизвестными являются*:

- компоненты вектора перемещений $\{u, v, w\}$ (3);
- компоненты тензора деформаций $\{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, 1/2\gamma_{xy}, 1/2\gamma_{yz}, 1/2\gamma_{zx}\}$ (6);
- компоненты тензора деформаций $\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}$ (6).

Для определения неизвестных в общем случае в объемной задаче имеются следующие *группы уравнений*:

- дифференциальные уравнения равновесия Навье (3);
- дифференциальные зависимости Коши для малых деформаций (6);
- дифференциальные уравнения неразрывности Сен-Венана (6);
- обобщенный закон Гука (6).

Так как в системе есть дифференциальные уравнения (в частных производных), то поставить задачу в рамках теории упругости - значит записать систему уравнений и граничные условия.

Система уравнений в общем случае в объемной задаче набирается следующим образом.

При решении задачи в перемещениях неизвестными являются все 15 вышеперечисленных, для их определения используются: дифференциальные уравнения равновесия Навье (3), дифференциальные зависимости Коши для малых деформаций (6), обобщенный закон Гука (6). После исключения напряжений и деформаций остаются три дифференциальных уравнения в частных производных - уравнения Ламе.

При решении задачи в напряжениях неизвестными являются компоненты тензоров напряжений и деформаций (всего 12). Для их определения используются: дифференциальные уравнения равновесия Навье (3), уравнения неразрывности Сен-Венана (3), обобщенный закон Гука (6). После исключения деформаций остаются шесть дифференциальных уравнений в частных производных - уравнения Бельтрами.

Прямое точное аналитическое *решение полученной системы уравнений* при сложных граничных условиях представляет существенную сложность. Поэтому очень часто задача решается приближенно и численно. Например, используя функциональные ряды (тригонометрические, полиномиальные и др.), метод конечных разностей (МКР), метод конечных элементов (МКЭ) и другие.

Суть широко распространенных методов конечных разностей и конечных элементов заключается в переходе от дифференциальных уравнений к большим системам линейных алгебраических уравнений с матрицей специального вида (симметричной сильно разреженной) с помощью приближенной замены производных конечными разностями. При этом, чем мельче шаг разбиения (и, следовательно, больше порядок образующейся системы линейных уравнений), тем выше точность решения.

Постановка и решение задачи существенно упрощаются при понижении размерности и переходе от объемной задачи к плоской.

Другим важным способом упрощения задачи является ***введение экспериментально подтвержденных упрощающих гипотез***. Что обычно сопровождается ограничением области применения получающихся уравнений. В зависимости от количества используемых гипотез теория упругости делится на ***математическую и прикладную*** (техническую).

Например, в прикладной теории упругости в зависимости от особенностей деформирования пластины делят на 3 типа: мембранны, жесткие тонкие пластины, толстые плиты.

При расчете жестких тонких пластин использование гипотез Кирхгофа и Лява (являющихся аналогами гипотез при расчете балок на плоский поперечный изгиб), позволяет существенно упростить задачу и свести ее (на первом этапе) к плоской. Получающееся при этом *уравнение Софи Жермен* для тонких жестких пластин является аналогом приближенного дифференциального уравнения упругой линии балки при плоском изгибе:

$$\nabla^4 w(x, y) = \frac{q(x, y)}{D} \quad (5)$$

$$y''(x) = \frac{q(x)}{EI_z} \quad (6)$$

Если удается введением упрощающих гипотез добиться того, что система уравнений расщепляется и перейти к обыкновенным дифференциальным уравнениям задача переходит в рамки сопротивления материалов.

Как видно, постановка задачи в общем виде, в рамках теории упругости (и тем более ее решение) представляет собой большую сложность. Поэтому рассмотрим далее инженерный подход - постановку задачи в рамках сопротивления материалов.

ОБОСНОВАНИЕ ВАЖНОСТИ ПЕРЕХОДА К ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ.

**Лекция 1.► ЗАДАЧА СЕН-ВЕНАНА В ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЕ
КООРДИНАТ. КООРДИНАТНЫЕ ФУНКЦИИ.
ГИПОТЕЗА ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ И ДЕПЛАНАЦИЯ.
ОРТОГОНАЛИЗАЦИЯ КООРДИНАТНЫХ СИСТЕМ**

1.1. Задача Сен-Венана в произвольной системе координат. Координатные функции

В задаче Сен-Венана рассматривается случай нагружения стержня по торцам: продольными силами P и поперечными силами F , которые вызывают его изгиб, кручение и растяжение. Известно, что существует такая точка торца, в которой приложение сил F не вызывает кручения стержня. Эта точка называется *центром изгиба*. Известно, что существуют такие точки торца, в которых приложение сил P не вызывает кручения. Эти точки называются *главными нулевыми точками*. Также известно, что кручение вызывает *депланацию* (искривление) сечения, исключение составляет круглое сечение. Если такой депланации нет, то можно использовать гипотезу плоских сечений.

Рассмотрим стержень, нагруженный по торцам силами P и F , приложенными в произвольных точках торца (рис. 1.1). Будем решать эту задачу в *произвольной системе координат* $x - y - z$.

Общий вид смещения произвольной точки сечения вдоль оси x (см. рис 1.1):

$$U = U_0 + U_1 + U_2 - U_3, \quad (1.1)$$

где U_0 – смещение от продольного перемещения плоскости сечения;

U_1 – смещение от поворота относительно оси z ;

U_2 – смещение от поворота относительно оси y ;

U_3 – смещение от депланации (искривления)

или
$$U = U_0(x) \cdot 1 - \varphi_z \cdot y - \varphi_y \cdot z + \varphi_x \cdot \Phi(z, y), \quad (1.2)$$

где l, y, z – координатные функции гипотезы плоских сечений;

$\varphi_z(x); \varphi_y(x); U_0(x)$ – углы поворота и смещение по оси x ;

$\Phi(z, y)$ – неизвестная функция, характеризующая депланацию сечения,

φ_x – угол закручивания.

Углы поворота φ_z и φ_y считаем положительными, если нормаль к сечению поворачивается по кратчайшему пути от оси x к осям y и z , соответственно. Но тогда в положительном квадранте положительные повороты вызывают отрицательные перемещения вдоль оси x . Отсюда знак «минус» в формуле (1.2).

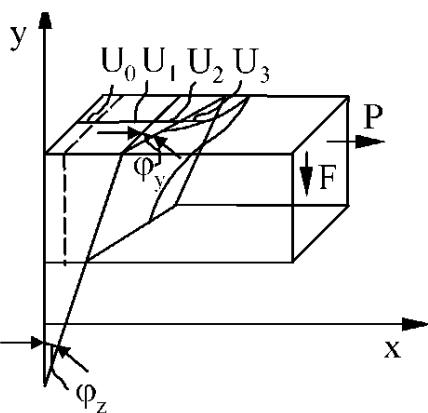
Рис. 1.1

закон плоских сечений, а $\Phi(z, y)$ зависит (и в этом сложность задачи). Далее мы определим эту функцию для тонкостенных стержней (для них она наиболее проста).

Итак, депланация зависит от кручения и связана только с кручением⁶.

Рассмотрим сначала случай, когда кручения и депланации нет – действует закон плоских сечений. То есть силы F приложены в центре изгиба, силы P – в главных нулевых точках. Форма поперечного сечения в этом случае может быть любой. Затем рассмотрим чистое кручение и определим функцию $\Phi(z, y)$ уже только для тонкостенного стержня, так как функция $\Phi(z, y)$ для каждого сечения будет своя. Тогда формула (1.2) будет иметь три слагаемых:

$$U = U_0(x) \cdot l - \varphi_z \cdot y - \varphi_y \cdot z. \quad (1.3)$$



⁶ Депланация возникает и при поперечном изгибе, но это депланация иной природы.

Введем гипотезу жесткого контура [1, 3]: $\sigma_z = \sigma_y = \tau_{zy} = 0$ и оп-

ределим деформацию. Имеем: $\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{d U_0}{d x} \cdot 1 - \frac{d \Phi_z}{d x} \cdot y - \frac{d \Phi_y}{d x} \cdot z$.

Введение обыкновенных производных объясняется тем, что $\Phi_z = \Phi_z(x)$, $\Phi_y = \Phi_y(x)$, $U_0 = U_0(x)$. Из высшей математики известно:

$$-\frac{d \Phi_z}{d x} = \frac{1}{\rho_z} = \chi_z \quad \text{и} \quad \frac{d \Phi_y}{d x} = \frac{1}{\rho_y} = \chi_y,$$

где: ρ_y, ρ_z – радиусы кривизны оси x ,

χ_z, χ_y – кривизны оси x после приложения нагрузки.

Так как $\frac{d U_0}{d x} = \varepsilon_0$, то $\varepsilon_x = \varepsilon_0 \cdot 1 + \chi_z \cdot y + \chi_y \cdot z$ (1.4)

и используя закон Гука в форме⁷ $\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$, имеем:

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x = E \cdot \varepsilon_0 \cdot 1 + E \cdot \chi_z \cdot y + E \cdot \chi_y \cdot z + R, \quad (1.5)$$

где $1, y, z$ – координатные функции, по которым раскладывается напряжение σ_x , возможно, с остатком R .

Параметры деформации стержня – $\varepsilon_0, \chi_z, \chi_y$ – неизвестны. Если мы их определим, то узнаем напряжение σ_x . Для их определения вспомним математику. Известно, что любую функцию можно разложить в ряд по системе других функций, нам известных.

В приближенных вычислениях используются конечные суммы [4].

Например:

$$f(x) = a_1 \cdot g_1(x) + a_2 \cdot g_2(x) + \dots + a_n \cdot g_n(x) = \sum_1^n a_k \cdot g_k. \quad (1.6)$$

⁷ Предполагаем, что работает гипотеза жесткого контура, давление боковых волокон друг на друга отсутствует, и, следовательно, величина продольных нормальных напряжений зависит только от продольных линейных деформаций.

Возникает вопрос, как найти коэффициенты a_1, a_2, \dots, a_n , если $g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)$ известны и $f(x)$ – тоже. Для этого существует следующий прием: нужно обе части равенства (1.6) умножить последовательно на каждую из функций $g_k(x)$ и проинтегрировать в пределах $a \leq x \leq b$, а именно:

$$\int_a^b f(x)g_m(x)dx = a_k \int_{k=1}^{n(k \neq m)} g_1(x)g_k(x)dx + a_m \int_a^b g_m^2(x)dx \dots \quad (1.7)$$

Получим систему уравнений с n – неизвестными коэффициентами a_1, a_2, \dots, a_n . Решив систему, найдем a_1, a_2, \dots, a_n и получим разложение функции $f(x)$ по функциям $g_n(x)$. Полученное нами выражение (1.5) и представляет собой разложение σ_x по функциям $1, y, z$ с неизвестными коэффициентами $\varepsilon_0, \chi_z, \chi_y$. Найдем эти коэффициенты функции предложенным математическим приемом:

1) умножим обе части равенства (1.5) на 1 и проинтегрируем по данной площади поперечного сечения A :

$$\int_A \sigma_x \cdot 1 \cdot dA = E\varepsilon_0 \int_A 1 \cdot dA + E\chi_z \int_A y \cdot dA + E\chi_y \int_A z \cdot dA. \quad (1.8)$$

Получили не что иное, как уравнение равновесия. В левой части – осевое усилие $N = P_x = \int_A \sigma_x \cdot 1 \cdot dA$, а в правой – геометрические характеристики, умноженные на неизвестные коэффициенты. А именно:

$$N = E\varepsilon_0 A + E\chi_z S_z + E\chi_y S_y, \quad (1.9)$$

где $S_z = \int_A y \cdot dA; \quad S_y = \int_A z \cdot dA; \quad A = \int_A 1 \cdot dA;$

2) умножим теперь обе части равенства (1.5) на y и проинтегрируем по площади A :

$$\int_A \sigma_x y \cdot dA = E\varepsilon_0 \int_A y \cdot dA + E\chi_z \int_A y^2 \cdot dA + E\chi_y \int_A zy \cdot dA. \quad (1.10)$$

Снова получим уравнение равновесия, так как $\int_A \sigma_x y dA = M_z$ и тогда:

$$M_z = E\epsilon_0 S_z + E\chi_z I_z + E\chi_y I_{zy}, \quad (1.11)$$

где: $I_z = \int_A y^2 dA$; $I_{zy} = \int_A zy dA$, а M_z – момент всех внешних сил относительно оси z ;

3) аналогично умножим обе части равенства (1.5) на z и получим равенство моментов всех сил, относительно оси y .

Запишем полностью систему трех уравнений:

$$\left. \begin{aligned} N &= EA\epsilon_0 + ES_z\chi_z + ES_y\chi_y \\ M_z &= ES_z\epsilon_0 + EI_z\chi_z + EI_{zy}\chi_y \\ M_y &= ES_y\epsilon_0 + EI_{zy}\chi_z + EI_y\chi_y \end{aligned} \right\}. \quad (1.12)$$

Мы получили систему уравнений равновесия в произвольной системе координат. Так как N, M_z, M_y мы можем найти из уравнений равновесия, то, решив систему (1.12), определим коэффициенты $\epsilon_0, \chi_z, \chi_y$. Подставив их значения в уравнение (1.5), можем определить нормальное напряжение σ_x в произвольной точке сечения.

1.2. Ортогонализация координатных систем

А теперь снова обратимся к математике. Дело в том, что произвольными системами функций в выражении (1.6) никогда практически не пользуются, а используют только *ортогональные системы функций*. Система функций $g_n(x)$ называется ортогональной, если интеграл по определенному отрезку (площади) от произведения любых двух различных функций системы равен нулю, то есть

$$\text{при } n \neq m \quad \int_a^b g_n(x)g_m(x) dx = 0,$$

при $n = m$ $\int_a^b g_n^2(x) dx \neq 0$. Название «ортогональные» объясняется

тем, что форма $\int_a^b g_n(x)g_m(x) dx = 0$ во многом аналогична условию перпендикулярности двух векторов $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Важно отметить: любую систему функций можно изменить так, что она станет ортогональной. И тогда система (1.12) распадается на отдельные уравнения [4].

Вспомним *тригонометрические ряды Фурье*, например, по синусам

и косинусам. Для них $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = 0$.

Итак, если функции ортогональны, то система (1.12) распадается, так как в правой части все интегралы будут равны нулю, кроме $\int_a^b g_n^2(x) dx \neq 0$, и мы получаем формулу для определения любого коэффициента:

$$a_n = \frac{\int_a^b g_n(x)f(x) dx}{\int_a^b g_n^2(x) dx} \neq 0, \quad (1.13)$$

где $n = 1, 2, 3 \dots$.

Так как любую систему функций можно ортогонализовать, сделаем это с системой (1.12), то есть установим, когда $S_z = S_y = I_{zy} = 0$. Это сделать очень просто, нужно определять σ_x не в произвольной системе координат, а в системе главных центральных осей. Вспомним, что центральные оси –

это оси, где $S_z = S_y = 0$, а главные оси – это оси, у которых $I_{zy} = I_{yz} = 0$. Тогда система (1.12) будет иметь вид:

$$N = EA\varepsilon_0 \quad \text{и} \quad \varepsilon_0 = \frac{N}{EA} \quad (1.14)$$

$$M_z = EI_z\chi_z \quad \text{и} \quad \chi_z = \frac{M_z}{EI_z} \quad (1.15)$$

$$M_y = EI_y\chi_y \quad \text{и} \quad \chi_y = \frac{M_y}{EI_y} \quad (1.16)$$

Подставляя в (1.5) получим:

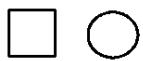
$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_z \cdot y}{I_z} + \frac{M_y \cdot z}{I_y} \quad (1.17)$$

Это известная формула сопротивления материалов для определения напряжения при растяжении и изгибе.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СЕКТОРИАЛЬНЫЕ

Лекция 2.► ХАРАКТЕРИСТИКИ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ. ПОНЯТИЕ О ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЯХ

Все элементы важных конструкций в самолето-, ракето-, авто- и космической технике представляют собой тонкостенные стержни. Рассмотрим виды сечения:



— открытого профиля и
— закрытого профиля.

Работа этих экономически выгодных сечений имеет особенности, а именно:

- 1) при кручении не круглого всегда возникает растяжение;
- 2) при растяжении – возможно кручение;
- 3) при кручении – всегда изгиб;
- 4) при изгибе – возможно кручение.

Начнем изучение тонкостенных стержней с кручения тонкостенных стержней. Но, сначала, рассмотрим секториальные характеристики, используемые в теории тонкостенных стержней.

2.1. Понятие о секториальной площади как четвертой координатной функции

При использовании гипотезы плоских сечений было достаточно применять три функции: z , y . При составлении уравнений равновесия эти функции перемножались друг на друга, и их произведение интегрировалось по площади, что давало возможность получить геометрические характеристики. Если функции ортогональны, то есть $S_z = S_y = I_{zy} = 0$, то остаются только три функции: $I_z = \int y^2 dA$; $I_y = \int z^2 dA$; $A = \int 1^2 dA$.

При деформации тонкостенных стержней открытого профиля возникает искривление сечения и поэтому необходимо ввести функцию, характеризующую депланацию. В 1937 г. профессор В. З. Власов построил

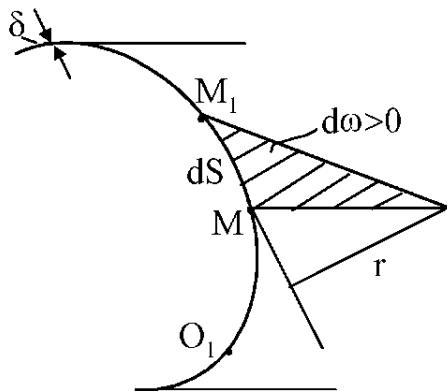


Рис. 2.1

стройную теорию *секториальных характеристик*, учитывающих искривление сечения для тонкостенных стержней [3].

Возьмем среднюю линию поперечного сечения и точку B , называемую полюсом. На линии S – отметим начальную точку O_1 . Зададим секториальную координату ω , фиксируем дугу dS и треугольник MM_1B .

Очевидно, что

$$d\omega = r \, dS \quad (2.1)$$

и

$$\omega = \int_0^S r \, dS, \quad (2.2)$$

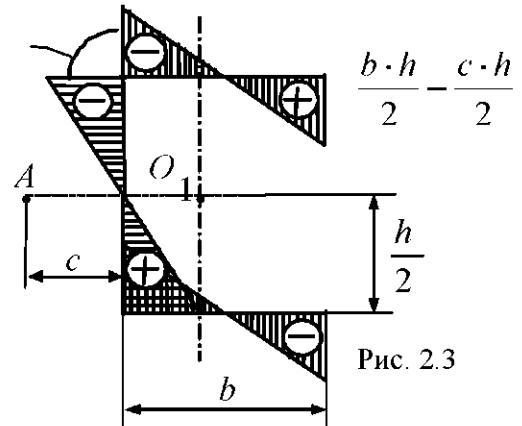
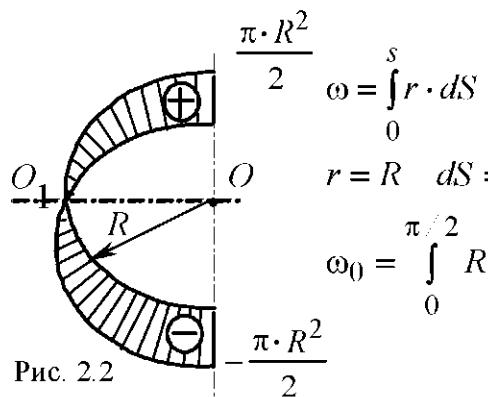
где ω – секториальная координата (равная удвоенной площади треугольника, который получается при движении радиуса-вектора по средней линии контура поперечного сечения, если из полюса B опустить перпендикуляр к средней линии), см^2 .

$\omega > 0$, если радиус-вектор скользит по средней линии по часовой стрелке.

Если контур представляется отрезками прямых, то

$$\omega = a \cdot S \quad (2.3)$$

и эпюра будет иметь прямые линии (см. рис. 2.2 и 2.3).



2.2. Секториальные характеристики

a) $S_{\omega} = \int_A 1 \cdot \omega \cdot dA (\text{см}^4)$ – секториальный статический момент сечения,

так как $dA = \delta \cdot dS$, то, если $\delta = \text{const}$, то $S_{\omega} = \delta \int_S \omega \cdot dS$, если контур состоит

из ряда отрезков, то S_{ω} можно определить по способу Верещагина:

$$\sum \delta \int_S \omega \cdot dS = \sum \delta \Omega M_1,$$

где Ω – площадь эпюры ω ; $M_1 = 1$.

S_{ω} может быть отрицательным и положительным, а, следовательно, и равным нулю. На рис. 2.3 $S_{\omega} = 0$, начальная точка – O_1 – называется главной нулевой точкой;

b) $I_{\omega} = \int \omega^2 dA$ – секториальный момент инерции (см^6), $I_{\omega} > 0$ – для любых сечений;

v) $I_{z\omega} = \int \omega \cdot y dA$ и $I_{y\omega} = \int \omega \cdot z dA$ – секториальные центробежные моменты инерции (см^5) (у разных авторов называются по-разному).

Если $I_{z\omega} = 0$ и $I_{y\omega} = 0$, то точка-полюс называется главным полюсом и ω будет ортогональной к $1, y, z$.

2.3. Определение положений главного полюса (точка A) и главной нулевой точки (точка O_1)

Очевидно, что, если $S_{\omega} = 0$ и $I_{z\omega} = I_{y\omega} = 0$, то координаты “ ω ” будут ортогональны к координатам $1, y, z$ (матрица геометрических характеристик будет диагональной).

Для решения задачи по определению положения главного полюса решим предварительно две задачи:

1) установим связь секториальной координаты ω с декартовыми координатами $z - y$ (рис. 2.4). $d\omega_A > 0$ – заштрихованный треугольник $A12$. Из рис. 2.4. видно, что $\Delta A12$ – это $d\omega_A$ и

$$d\omega_A = (y - y_A) \cdot dz - (z - z_A) \cdot dy. \quad (2.4)$$

В самом деле, $(y - y_A) \cdot$ – это высота $\Delta A1D$, а dz – это основание $\Delta A1D$, следовательно, $(y - y_A) \cdot dz$ – удвоенная площадь $\Delta A1D$.

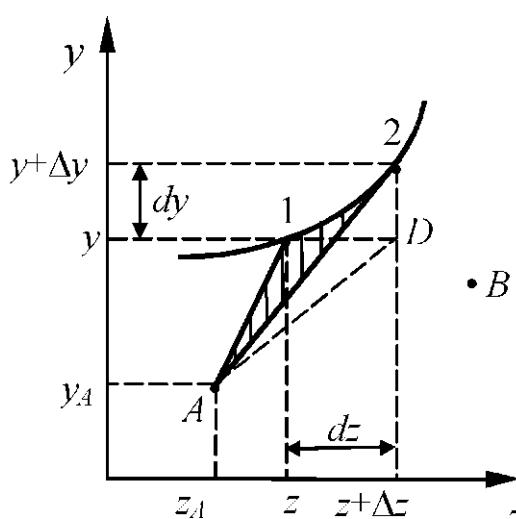


Рис 2.4

Эта площадь больше секториальной ($d\omega_A = \Delta A12$), на площадь $\Delta A2D$ и ее нужно вычесть из $\Delta A1D$. У $\Delta A2D$ основание – dy , а высота будет $(z - z_A)$ (малости II порядка $dz \cdot dy$ отбрасываем). Итак, $d\omega_A = (y - y_A) \cdot dz - (z - z_A) \cdot dy$, что и требовалось доказать.

Теперь, если взять полюс в другой точке, например, в точке B , то очевидно

$$d\omega_B = (y - y_B) \cdot dz - (z - z_B) \cdot dy; \quad (2.5)$$

2) установим теперь связь между секториальными координатами для полюса A и полюсом B . Вычтем (2.5) из (2.4):

$\omega_A - d\omega_B = (y - y_A - y + y_B) dz - (z - z_A - z + z_B) dy = (y_B - y_A) dz - (z_B - z_A) dy$,
теперь проинтегрируем и тогда:

$$\omega_A - \omega_B = (y_B - y_A)z - (z_B - z_A)y + c. \quad (2.6)$$

Получили основное уравнение связи между секториальными координатами ω_A и ω_B .

Теперь можно определять положение главного полюса. Пусть точка A – это главный полюс, а точка B – какой-то произвольный полюс, координаты которого z_B и y_B нам известны. Полюс – точку B – выбираем из соображений простоты и удобства построения ω .

Тогда, очевидно, $I_{\omega z} = \int_A \omega_A y dA = 0$. Подставляя ω_A из (2.6), получим:

$$I_{\omega z} = \int_A \omega_B y dA + (y_B - y_A) \int_A z y dA - (z_B - z_A) \int_A y^2 dA + c \int_A y dA = 0.$$

Так как оси z – y – главные и центральные, то $\int_A z y dA = 0$ и $\int_A y dA = 0$, имеем:

$$\int_A \omega_B y dA - (z_B - z_A) I_z = 0.$$

Отсюда, зная z_B , находим z_A – координату главного полюса

$$z_A = z_B - \frac{I_{\omega_B z}}{I_z} \quad (2.7)$$

и

$$y_A = y_B + \frac{I_{\omega_B y}}{I_y}. \quad (2.8)$$

Аналогично находим главную нулевую точку. Пусть точка O_1 – главная нулевая точка, тогда $S\omega_{O_1} = 0$, то есть в $S\omega_{O_1} = \int_A \omega_{O_1} dA = 0$ подставляем (2.6), где точка A – это O_1 , а точка B – это произвольная нулевая точка:

$$\int_A \omega_B dA + (y_B - y_O) \int_A z dA + (z_B - z_O) \int_A y dA + c \int_A dA = 0.$$

Так как оси центральные, то $\int_A z dA = \int_A y dA = 0$; имеем

$$c = -\frac{\int \omega_B dA}{A}. \quad (2.9)$$

Для получения главной нулевой точки нужно каждую секториальную координату ω_B уменьшить на c , и тогда точка, где $\omega = 0$, и будет главной нулевой точкой.

Примечание: сначала определяется главный полюс, а затем – главная нулевая точка.

Лекция 3. ►ЧИСТОЕ КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ

С этой лекции мы начинаем систематическое изучение теории тонкостенных стержней. Как уже отмечалось, в строительных конструкциях часто встречаются стержни, поперечное сечение которых состоит из узких пластин, прямых или изогнутых, толщина которых (δ) существенно меньше других размеров. Особенно важны тонкостенные стержни в машино-, самолето-, ракето- и кораблестроении.

Они могут быть открытого (рис. 3.1) или закрытого профиля (рис. 3.2).

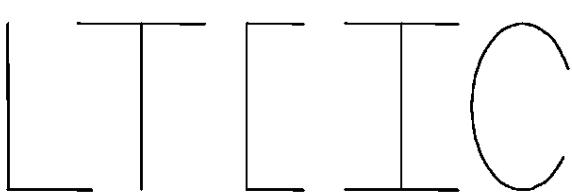


Рис. 3.1

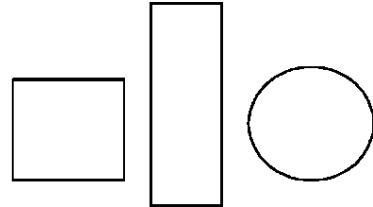


Рис. 3.2

Этот стержень, по существу, – оболочка; но исторически теория тонкостенных стержней развивалась отдельно от теории оболочек. В 1937 г. *B. З. Власов* вывел простую теорию тонкостенных стержней открытого профиля, хотя и до него многие ученые занимались этим вопросом [3].

Под чистым кручением понимают, как известно, такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня действует только крутящий внутренний момент M_x .

Характер распределения напряжений у открытого и закрытого профиля принципиально отличен (рис. 3.3).

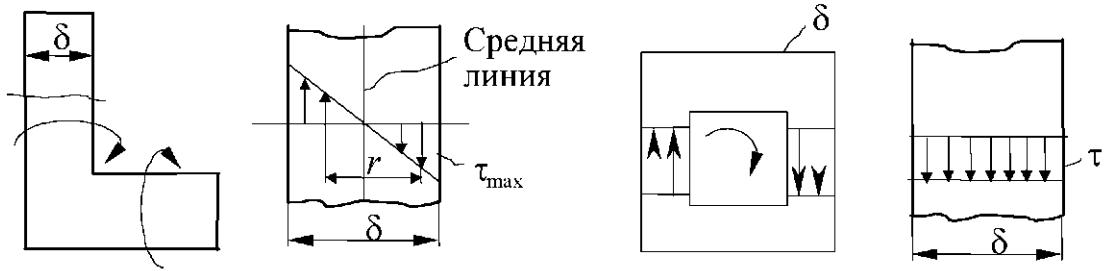


Рис. 3.3

У открытого профиля напряжения по средней линии равны нулю. У закрытого – постоянны по сечению. Кроме того, у открытого профиля радиус кручения (r) очень мал, следовательно, напряжения τ_{\max} велики, так как $M_{kp} = \int \tau \cdot r \, dA$. Будем изучать тонкостенные стержни только открытого профиля, поскольку они депланируют значительно больше, чем закрытые. Однако, сначала рассмотрим закрытый профиль. Очевидно,

$\tau_1 \cdot \delta_1 = \tau_2 \cdot \delta_2 = \text{const}$ – поток касательных напряжений постоянен, это следует из гидродинамической аналогии.

$$M_{kp} = \int_S \tau \cdot \delta \cdot r \, dS = \tau \cdot \delta \int_S r \, dS = \tau \cdot \delta \cdot \omega_0, \quad (3.1)$$

где ω_0 – секториальная площадь;

r – величина радиуса кручения.

Тогда,

$$\tau_{\max} = \frac{M_{kp}}{\delta \cdot \omega_0}. \quad (3.2)$$

К примеру, для трубы

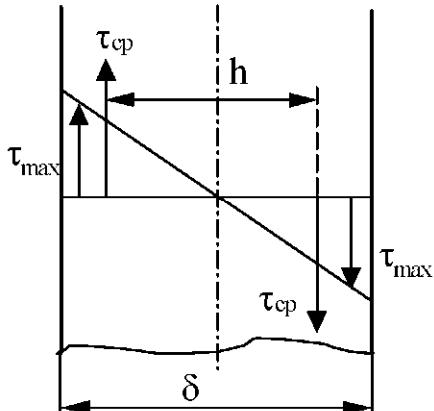
$$I_p = \frac{\pi \cdot d_c^3}{4} \cdot \delta, \quad \tau_{\max} = \frac{M_{kp} \cdot \frac{d}{2}}{\frac{\pi \cdot d^3}{4} \cdot \delta} = \frac{2 \cdot M_{kp}}{\pi \cdot d^2 \cdot \delta} = \frac{M_{kp}}{\omega_0 \cdot \delta},$$

$$\omega_0 = 2 \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{\pi \cdot d^2}{2}.$$

Чем больше δ , тем меньше τ . $M_{kp} = \int_S \tau_{cp} \cdot h \cdot \delta dS$.

Эти выводы верны для любого закрытого профиля; ω_0 – секториальная площадь, то есть удвоенная площадь сечения.

Рассмотрим теперь открытый профиль.



На средней линии нет напряжений:

$$M_{kp} = \int_S \tau_{cp} \cdot h \cdot \delta dS = \frac{1}{3} \cdot \tau_{max} \cdot \delta^2 \cdot L$$

(см. рис.3.4)

$$\text{и отсюда } \tau_{max} = \frac{M_{kp}}{\frac{1}{3} \cdot \delta^2 \cdot L} \cdot \frac{\delta}{\delta} = \frac{M_{kp} \cdot \delta}{I_k}$$

Рис. 3.4 (3.3),

где $I_k = \frac{1}{3} \cdot \delta^3 \cdot L$ – геометрическая жесткость на кручение;

L – длина средней линии.

Здесь наоборот, чем больше δ , тем больше τ_{max} .

Возьмем отношение: $\frac{I_p}{I_k} = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{d}{\delta}\right)^2$; $\frac{\tau_{закр}}{\tau_{откр}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\delta}{d}$.

Вывод: жесткость у разрезанного (открытого) профиля мала $\left(\frac{\delta}{d}\right)^2$, а

напряжения велики $\left(\frac{d}{\delta}\right)$.

3.1. Касательные напряжения для узкого прямоугольника при чистом кручении

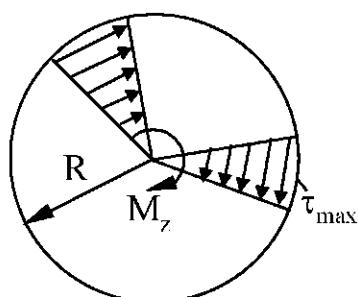


Рис. 3.5 Вспомним, как распределялись напряжения у круглого вала (рис. 3.5). Это единственное сечение, которое не депланирует при кручении.

Кручение некруглого поперечного сечения представляет собой очень сложную пространственную задачу теории упругости (в элементарных курсах теории упругости не изучается). Сложность возникает из-за депланации поперечных сечений.

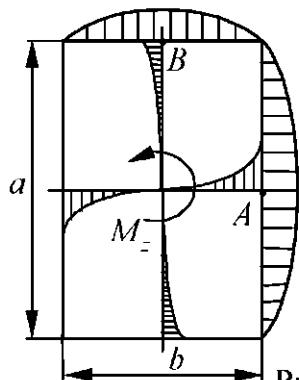


Рис. 3.6

Для прямоугольных сечений задача решается в рядах (Прандтль, 1850 г.). Рассмотрим готовые формулы (рис. 3.6):

$$\tau_A = \tau_{max} = \frac{M_x}{\alpha ab^2}, \tau_B = h \cdot \tau_A, \varphi = \frac{M_x \cdot l}{\beta Gab^3} \quad (3.4)$$

α, β, h – даны в таблицах, в зависимости от a/b .

Если $a/b \rightarrow \infty$, то $\alpha = \beta = 0,333 = 1/3$; $h = 0,74$.

Тогда для узкого прямоугольника:

$$\tau_{max} = \frac{M_{xi}}{\frac{1}{3} \cdot \delta_i^2 \cdot S_i}, \quad (3.5)$$

$$\varphi = \frac{M_x \cdot \ell}{\frac{1}{3} \cdot \delta^3 \cdot S \cdot G}, \quad (3.6)$$

где $\delta = b$; $a = S$.

Выражение

$$I_{K_i} = \frac{1}{3} \cdot \delta_i^3 \cdot S_i \quad (3.7)$$

называется геометрической жесткостью тонкостенного стержня (i – номер отдельного прямоугольника).

Если сечение состоит из нескольких прямоугольников, то очевидно, $\Phi_i = \Phi_x$, где Φ_i – угол закручивания i – прямоугольника. Тогда:

$$\Phi_x = \frac{M_x \cdot \ell}{I_K \cdot G} = \frac{M_{x_i} \cdot \ell}{I_{K_i} \cdot G} \quad \text{и} \quad M_{x_i} = \frac{M_x \cdot I_{K_i}}{I_K} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{M_x}{I_K} \cdot \delta_i, \quad (3.8)$$

где $I_K = \frac{1}{3} \cdot \sum \delta_i^3 \cdot S_i$ – геометрическая жесткость всего сечения.

Формулу (3.8) мы уже вывели методами сопротивления материалов, не применяя теорию упругости.

3.2. Депланация открытого профиля тонкостенного стержня при чистом кручении

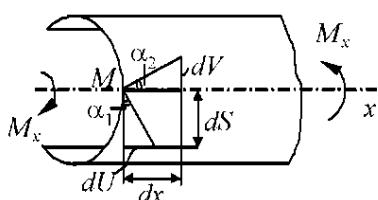
Введем две гипотезы:

1. При кручении контур остается жестким.
2. Деформация *средней линии* равна нулю.

Из гипотезы жесткого контура следует, что $\alpha_1 = \alpha_2$, но $\alpha_1 = \frac{dU}{dS}$

(рис. 3.6) и $\alpha_2 = -\frac{dV}{dX}$ (минус потому, что dV уменьшает V , а $dU > 0$, так

как увеличивает U).



Тогда: $\frac{dU}{dS} = -\frac{dV}{dX}$, но $dV = r \cdot d\varphi$

(точка O – точка поворота дуги dV).

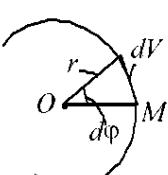


Рис. 3.7

Имеем:

$$\frac{dU}{dS} = -\frac{r \cdot d\varphi}{dX} = -r \cdot \theta \quad \text{и} \quad U = -\theta \int r \, dS = -\theta \cdot \omega.$$

Получаем основную формулу для депланации

$$U = -\theta \cdot \omega, \tag{3.9}$$

где $\theta = \frac{d\varphi}{dx}$ – относительный угол закручивания.

СТЕСНЕННОЕ КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННОГО

Лекция 4.► СТЕРЖНЯ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЕКТОРИАЛЬНЫХ НОРМАЛЬНЫХ И КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

4.1. Понятие о стесненном кручении

Ранее было установлено, что при чистом кручении тонкостенного стержня возникают только касательные напряжения от кручения:

$$\tau_k = \frac{M_x \cdot \delta}{I_k}, \quad (4.1)$$

и все сечения депланируют одинаково. Величина депланации постоянна по длине стержня и равна:

$$U = -\theta \cdot \omega, \quad (4.2)$$

где θ – мера депланации, угол закручивания на единицу длины стержня.
Причем:

$$\theta = \frac{M_x}{G \cdot I_k}. \quad (4.3)$$

Так как при чистом кручении $\theta = \text{const}$, то $\varepsilon_x = \theta' \cdot \omega = 0$, и
 $\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x = 0$, где $\theta' = \frac{d\theta}{dx}$.

Стесненным кручением называется такой вид нагружения крутящим моментом, когда одно сечение стержня остается неподвижным, то есть не депланирует (рис. 4.1).

При стесненном кручении:

$$M_x = M_{cb} + M_\omega, \quad (4.4)$$

где: M_{cb} – момент свободного кручения; $M_{cb} = \theta \cdot G \cdot I_k$;

M_ω – изгибно-крутящий момент – часть крутящего момента, идущего на изгиб стержня; легко определяется для двутавра (см. рис. 4.2).

Соответствующие касательные напряжения τ_{ω} распределены по сечению равномерно. В уравнении (4.4) два неизвестных: $M_{c\theta}$ и M_{ω} , поэтому задача по их определению статически неопределенна.

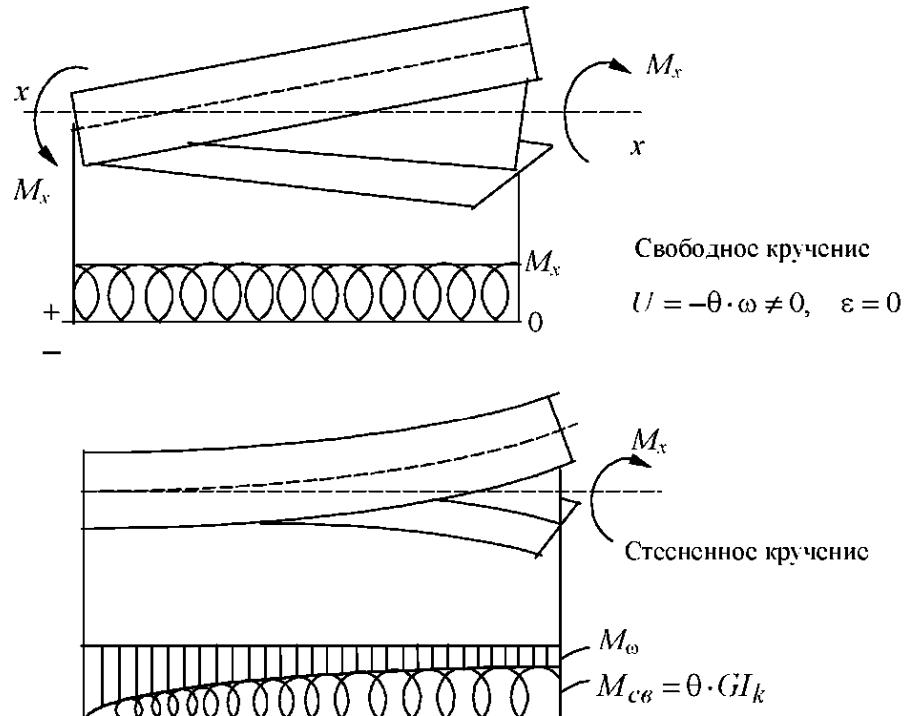


Рис. 4.1

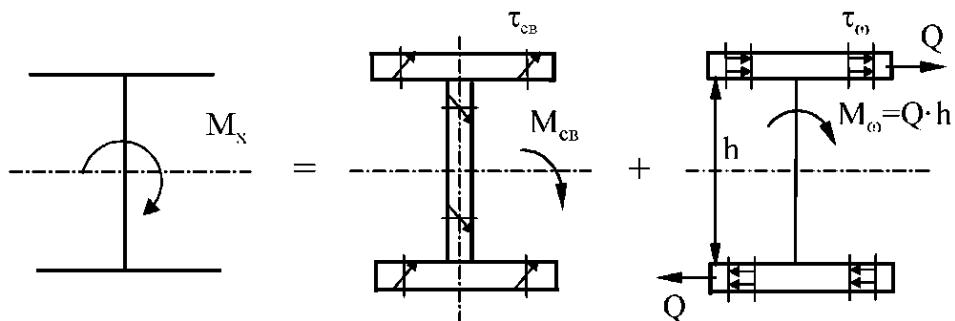


Рис. 4.2

При решении этой задачи введем следующие допущения [1, 2, 3]:

- 1) поперечные сечения – жесткие диски;
- 2) депланация при стесненном кручении идет по закону секториальных площадей, как при чистом кручении, то есть $U = -\theta \cdot \phi l$);
- 3) напряжения σ_{ω} и τ_{ω} считаются равномерными по толщине стержня;
- 4) продольные волокна не давят друг на друга.

Обычно при решении задач сопротивления материалов вначале определяются внутренние усилия, а затем напряжения. Здесь, в теории тонкостенных стержней, мы сначала определим напряжения σ_ω и τ_ω , а затем внутренние усилия (см. лекцию 5).

4.2. Определение нормальных напряжений σ_ω

Пользуясь вторым допущением $U = -\theta(x)\cdot\omega$, и, следовательно, $\varepsilon_x = -\theta'(x)\cdot\omega$, по закону Гука и четвертому допущению будем иметь:

$$\sigma_\omega = \varepsilon \cdot E = -\theta'(x) \cdot E \cdot \omega. \quad (4.5)$$

Множитель $\theta'(x)$ постоянен для данного сечения стержня, следовательно, по сечению σ_ω распределяется по закону секториальной площади ω .

Теперь, как в «Лекции 1» будем последовательно умножать σ_ω соответственно на все координатные функции $(1, z, y, \omega)$ и интегрировать по площади поперечного сечения A . Принимаем, что из условия равновесия: $N = 0$, $M_z = M_y = 0$, так как стержень нагружен только крутящим моментом M_x .

Итак, если $N = 0$, то $N = \int_A \sigma_\omega \cdot 1 \, dA = -E \cdot \theta' \cdot \int_A \omega \, dA$, но

$\int_A \omega \, dA = S \cdot \omega = 0$ – это условие того, что ω отсчитывается от главной нулевой точки: $S_{\omega O_1} = 0$, то есть система сил уравновешена в каждом поперечном сечении стержня.

Теперь интегрируем по площади сечения A :

$$\left. \begin{aligned} M_z &= \int_A \sigma_\omega \cdot y \cdot dA = 0, & \text{тогда } \int_A \omega \cdot y \cdot dA &= 0 \\ M_y &= \int_A \sigma_\omega \cdot z \cdot dA = 0, & \text{тогда } \int_A \omega \cdot z \cdot dA &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (4.6)$$

Условие (4.6) говорит о том, что секториальная площадь ω должна иметь своим полюсом – главный полюс [см. (2.7) и (2.8)]. Иначе не будут выполняться условия статики $M_z = M_y = 0$.

Итак,

$$\sigma_{\omega} = -E \cdot \theta' \cdot \omega_A. \quad (4.7)$$

Следовательно, кручение происходит вокруг точки A , то есть центр кручения совпадает с главным полюсом секториальной площади.

4.3. Понятие о внутреннем бимоменте

Умножим теперь σ_{ω} на 4-ю координату и проинтегрируем по площади сечения A . Получим *новый внутренний силовой фактор – бимомент* B_{ω} .

$$B_{\omega} = \int_A \sigma_{\omega} \cdot \omega_A \cdot dA = -E \cdot \theta' \cdot \int_A \omega_A^2 \cdot dA = -E \cdot \theta' \cdot I_{\omega A},$$

отсюда $-E \cdot \theta' = \frac{B_{\omega}}{I_{\omega A}}$, подставим в (4.7), получим формулу для определения нормального секториального напряжения:

$$\sigma_{\omega} = \frac{B_{\omega} \cdot \omega_A}{I_{\omega A}} \quad (4.8)$$

(сравните с $\sigma_x = \frac{M_z \cdot y}{I_z}$).

σ_{ω} – имеет знак B_{ω} и зависит от знака ω_A , также как и σ_x .

Для примера рассмотрим сечение в виде двутавра (рис. 4.3).

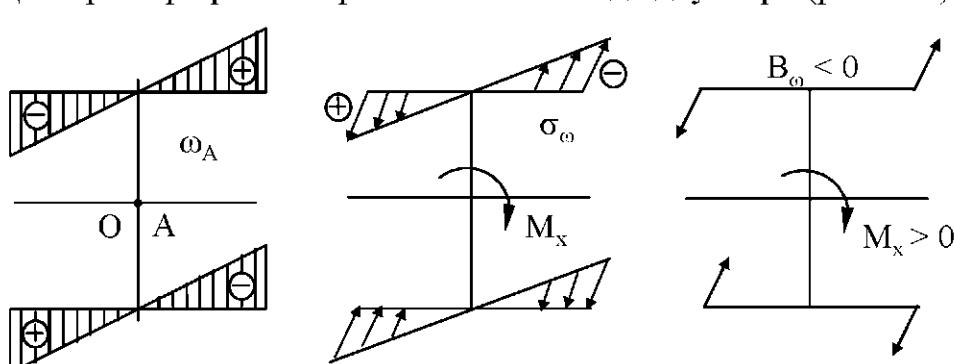


Рис. 4.3

На рис. 4.3 показано распределение нормальных напряжений σ_{ω} и приведена соответствующая схема бимомента B_{ω} . Напомним правило знаков: если вращение радиуса-вектора, крывающего момента и бимомента

идет по часовой стрелке при взгляде со стороны внешней нормали, такие величины считаются положительными. На рис. 4.3 $\omega_A > 0$; $M_x > 0$; $B_\omega < 0$.

4.4. Вторичные касательные напряжения $\tau_\omega = \tau_2$

Так как $\sigma_\omega = -E\theta' \cdot \omega_A$ изменяется по длине стержня $\theta'(x) \neq \text{const}$, то естественно должны появиться касательные напряжения τ_ω , которые возникают от разности нормальных напряжений σ_ω . Вспомним формулу Журавского:

$$\tau_y = \frac{Q_y \cdot S_z^*}{\delta \cdot I_z} \quad \text{и} \quad \tau_z = \frac{Q_z \cdot S_y^*}{\delta \cdot I_y}.$$

В нашем случае вывод формулы для τ_ω идет в полном соответствии с выводом формулы Журавского (см. рис. 4.4).

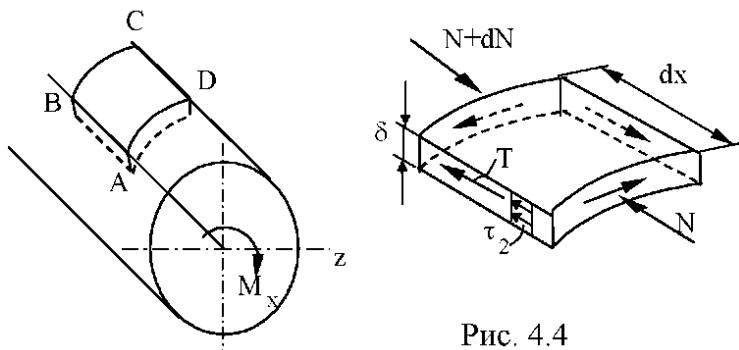


Рис. 4.4

Вырежем элемент $ABCD$ и рассмотрим равновесие сил по оси x .

$$\sum X = 0, \quad N + T - N - dN = 0, \quad \text{тогда} \quad T = dN, \quad \text{но} \quad T = \tau_2 \cdot \delta \cdot dx,$$

$$\text{а} \quad N = \int_{A^*} \sigma_\omega \, dA = \int_{A^*} \frac{B_\omega \cdot \omega_A}{I_\omega} \, dA = \frac{B_\omega}{I_\omega} \cdot \int_{A^*} \omega_A \, dA, \quad \text{отсюда:}$$

$$N = \frac{B_\omega \cdot S_\omega^*}{I_{\omega_A}}, \quad \text{но} \quad dN = \frac{dB \cdot S_\omega^*}{I_\omega} \quad \text{и получим}$$

$$\tau_2 = \frac{dB}{dx} \cdot \frac{S_\omega^*}{\delta \cdot I_\omega} = \frac{B'_\omega \cdot S_\omega^*}{\delta \cdot I_\omega}. \quad (4.9)$$

Сравните с формулой Журавского: $\tau = \frac{Q_y \cdot S_z^*}{\delta \cdot I_z}$, где S_{ω}^* – это статический секториальный момент части сечения, расположенный выше волокна, где определяется τ_2 . Так как $B_{\omega} = -E \cdot \theta \cdot I_{\omega}$ и $B_{\omega}' = -E \cdot \theta' \cdot I_{\omega}$, то

$$\tau_2 = -\frac{E \cdot \theta' \cdot S_{\omega}^*}{\delta}. \quad (4.10)$$

4.5. Дифференциальные зависимости при стесненном кручении

И последнее, – определим, что такое производная от бимомента B_{ω}' .

Просуммируем все касательные напряжения τ_2 , умножив на плечо r (точка A – главный полюс).

Рис. 4.5

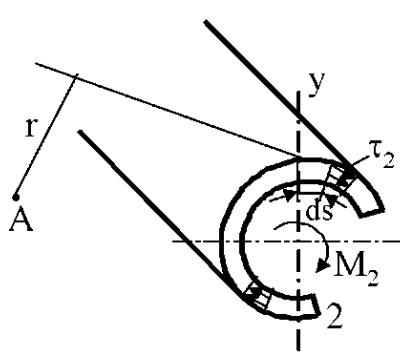


Рис. 4.5

$$M_2 = -\int_1^2 \tau_2 \cdot r \cdot \delta dS = -\left[\int \frac{B_{\omega}' \cdot S_{\omega}^*}{\delta \cdot I_{\omega}} \cdot r \cdot \delta dS \right] = -\frac{B_{\omega}'}{I_{\omega}} \cdot \int S_{\omega}^* d\omega.$$

Замечания:

- 1) минус перед интегралом ставится потому, что интегрирование идет против вращения момента M_2 ;
- 2) известно, что $r dS = d\omega$;

3) интегрируем выражение $\int S_{\omega}^* d\omega$ по частям:

$$M_2 = -\frac{B_{\omega}'}{I_{\omega}} \cdot \left| S_{\omega}^* \cdot \omega \right|_1^2 - \int_1^2 \omega dS_{\omega} = -\frac{B_{\omega}'}{I_{\omega}} \cdot \left[0 - \int_1^2 \omega \cdot \omega \cdot dA \right] = \frac{B_{\omega}'}{I_{\omega}} \cdot I_{\omega} = B_{\omega}';$$

4) интеграл I – равен нулю, так как в точке 1 нет площади и $S_{\omega_1}^* = 0$, а в точке 2 $S_{\omega_2}^* = 0$, так как S_{ω} подсчитывается от главной нулевой точки и, следовательно, $S_{\omega_2} = 0$.

Итак, $M_1 = M_{\omega} = B_{\omega}'$, есть производная от бимомента и равна M_{ω} – изгибно-крутящему моменту. Тогда:

$$\tau_2 = \tau_{\omega} = \frac{M_{\omega} \cdot S_{\omega}^*}{\delta \cdot I_{\omega}}. \quad (4.11)$$

(Сравним: $Q_y = M'_z$, $Q_z = M'_y$ и $M_{\omega} = B'_{\omega}$).

Следовательно, в опасных точках:

$$\tau_{\max} = \tau_1 + \tau_2 = \frac{M_{cb} \cdot \delta}{I_k} + \frac{M_{\omega} \cdot S_{\omega}^*}{\delta \cdot I_{\omega}}. \quad (4.12)$$

Напряжения τ суммируются алгебраически, как показано на рис. 4.6.

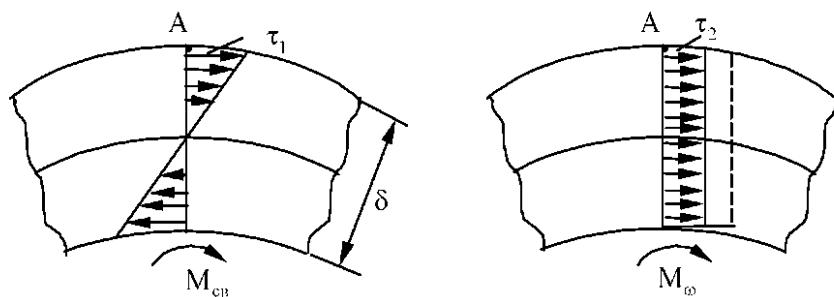


Рис. 4.6

СТЕСНЕННОЕ КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННОГО

Лекция 5.► СТЕРЖНЯ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ И УГЛОВ ЗАКРУЧИВАНИЯ

Из предыдущей лекции можно записать следующие зависимости, совпадающие по форме с зависимостями из теории изгиба балок:

<i>Изгиб балок</i>	<i>Кручение тонкостенного стержня</i>
$y = y(x)$ или $V = V(x)$	$\varphi = \varphi(x)$
$y' = \theta(x)$ или $V' = \theta(x)$	$\varphi' = \theta(x) = \frac{M_{cb}}{G \cdot I_k}$
$y'' = \frac{M_z}{E \cdot I_z}$ или $V'' = \frac{M_z}{E \cdot I_z}$	$\varphi'' = \theta'(x) = -\frac{B_\Theta}{E \cdot I_\Theta}$
$y''' = \frac{Q_y}{E \cdot I_z}$ или $V''' = \frac{Q_y}{E \cdot I_z}$	$\varphi''' = \theta''(x) = -\frac{M_\Theta}{E \cdot I_\Theta}$
$y'''' = \frac{q}{E \cdot I_z}$ или $V'''' = \frac{q}{E \cdot I_z}$	$\varphi'''' = \theta'''(x) = -\frac{m_\Theta}{E \cdot I_\Theta}$

где, вспоминая курс сопротивления материалов, имеем:

$y(x)=V(x)$	Прогиб балки, смещение по оси y	$\varphi(x)$	Угол закручивания
$\theta(x) = \frac{dy}{dx}$	Угол поворота сечения	$\theta = \frac{d\varphi}{dx} =$ $= M_{cb} / GI_k$	Погонный угол закручивания
$M(x) = \frac{d\theta}{dx} \cdot EI$	Внутренний изгибающий момент в сечении	$B_\Theta = \frac{d\theta}{dx} \cdot EI_\Theta$	Внутренний бимомент в сечении
$Q_y = \frac{dM}{dx}$	Внутреннее поперечное усилие	$M_\Theta = \frac{dB}{dx}$	Внутренний изгибо- крутящий момент
$q = \frac{dQ}{dx}$	Внешняя погонная распределенная нагрузка	$m_\Theta = \frac{dM_\Theta}{dx}$	Погонный изгибо- крутящий момент

Теперь запишем основное уравнение:

$$M_{cb} + M_\Theta = M_x \quad (5.1)$$

Подставляя значения M_{cb} и M_Θ , будем иметь:

$$E \cdot I_{\Theta} \cdot \theta'' - G \cdot I_K \cdot \theta = -M_x \quad \text{или} \quad \theta'' - k^2 \cdot \theta = -\frac{M_x}{E \cdot I_{\Theta}} = -k^2 \cdot \frac{M_x}{G \cdot I_K}, \quad (5.2)$$

где $k^2 = \frac{G \cdot I_K}{E \cdot I_{\Theta}}$ – характеристика поперечного сечения.

Продифференцируем и получим: $\theta''' - k^2 \cdot \theta' = -\frac{m(x)}{E \cdot I_{\Theta}}$; затем, ис-

пользуя зависимость $\theta = \frac{d\phi}{dx}$, будем иметь:

$$\phi'' - k^2 \cdot \phi = -\frac{m(x)}{E \cdot I_x}, \quad (5.3)$$

где $m(x) = \frac{dM_x}{dx}$ – распределенный крутящий момент.

5.1. Решение дифференциального уравнения погонных углов закручивания

В учебниках есть решение (5.3), однако, проще сначала решить уравнение (5.2), и, определив θ – погонный угол закручивания, затем интегри-

рованием получить ϕ – угол закручивания стержня: $\phi = \int_0^x \theta dx$.

Итак, решаем уравнение (5.2): $\theta'' - k^2 \cdot \theta = -\frac{M_x}{E \cdot I_{\Theta}}$. Это неоднород-

ное уравнение второго порядка. Решение, как известно, будет состоять из суммы решений: общего решения однородного уравнения и одного частного решения неоднородного уравнения.

При решении используем метод начальных параметров – метод Коши-Крылова [1] – как для решения однородного уравнения, так и для частного решения неоднородного уравнения.

Общее решение однородного уравнения:

$$\theta'' - k^2 \cdot \theta = 0. \quad (5.4)$$

Решение ищем в виде: $\theta = C_1 \cdot e^{\lambda x}$. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - k^2 = 0$; $\lambda_1 = k$, $\lambda_2 = -k$. Переходя к гиперболическим функциям, получим:

$$\theta = C_1 \cdot \operatorname{ch} kx + C_2 \cdot \operatorname{sh} kx, \quad (5.5)$$

где коэффициенты C_1 и C_2 определяются из граничных условий методом начальных параметров.

Пусть $x = 0$, тогда $C_1 = \theta_0$. Продифференцировав (5.5), получим:

$\dot{\theta} = C_1 \cdot k \cdot \operatorname{sh} kx + C_2 \cdot k \cdot \operatorname{ch} kx$ и положим, что $x = 0$; тогда $C_2 = \frac{\dot{\theta}_0}{k}$ и окончательно:

$$\theta = \theta_0 \cdot \operatorname{ch} kx + \frac{\dot{\theta}_0}{k} \cdot \operatorname{sh} kx. \quad (5.6)$$

Коэффициенты θ_0 и $\dot{\theta}_0$ представляют собой начальные параметры, то есть параметры в начале координат. Подставляя значения внутренних усилий:

$$\theta = \frac{M_{ce}}{G \cdot I_k} \cdot \operatorname{ch} kx - \frac{B_{\omega_0}}{G \cdot I_k} \cdot k \cdot \operatorname{sh} kx, \quad (5.7)$$

но $\theta = \frac{M_{ce}}{G \cdot I_k}$. Будем иметь:

$$M_{ce} = M_{ce_0} \operatorname{ch} kx - B_{\omega_0} k \operatorname{sh} kx. \quad (5.8)$$

Частное решение неоднородного уравнения ищем с использованием метода начальных параметров (метода Коши).

Для этого нужно взять частное решение общего решения однородного уравнения при самой высокой производной [в нашем случае – это $\frac{\operatorname{sh} kx}{k}$, см. (5.6)], умножить на правую часть неоднородного уравнения и

взять интеграл от этого выражения от 0 до x . В результате получим⁸:

$$\theta^* = - \int_0^x \frac{1}{k} \cdot \operatorname{sh} k(x-\xi) \cdot \frac{M_x}{E \cdot I_\omega} \cdot d\xi. \quad (5.9)$$

Рассмотрим важный для нас частный случай: $M_x = \text{const}$.

$$\theta^* = - \frac{M_x}{E \cdot I_\omega} \cdot \int_0^x \frac{\operatorname{sh} k(x-\xi)}{k} d\xi = \frac{M_x}{E \cdot I_\omega} \cdot \left| \frac{\operatorname{ch} k(x-\xi)}{k^2} \right|_0^x = \frac{M_x}{E \cdot I_\omega \cdot k^2} \cdot (1 - \operatorname{ch} kx). \quad (5.10)$$

Тогда:

$$\theta = \frac{M_{ce_0}}{G \cdot I_k} \cdot \operatorname{ch} kx - \frac{B_{\omega_0}}{G \cdot I_k} \cdot k \cdot \operatorname{sh} kx + \frac{M_0}{G \cdot I_k} \cdot (1 - \operatorname{ch} kx), \quad (5.11)$$

так как $M_x = M_0 = \text{const}$, или

$$M_{ce} = M_{ce_0} \operatorname{ch} kx - B_{\omega_0} k \operatorname{sh} kx + M_0 (1 - \operatorname{ch} kx). \quad (5.12)$$

Интегрированием получаем угол закручивания $\varphi = \int_0^x \theta dx$, подстав-

ляя (5.11)

$$\begin{aligned} \varphi &= \int_0^x \frac{M_{ce_0}}{G \cdot I_k} \cdot \operatorname{ch} k\xi \cdot d\xi - \int_0^x \frac{B_{\omega_0}}{G \cdot I_k} \cdot k \cdot \operatorname{sh} k\xi \cdot d\xi + \int_0^x \frac{M_0}{G \cdot I_k} \cdot (1 - \operatorname{ch} k\xi) \cdot d\xi = \\ &= \frac{M_{ce_0}}{G \cdot I_k \cdot k} \cdot \operatorname{sh} kx + \frac{B_{\omega_0}}{G \cdot I_k} \cdot (1 - \operatorname{ch} kx) + \frac{M_0}{G \cdot I_k \cdot k} \cdot (kx - \operatorname{sh} kx) + C_3 \end{aligned}$$

при $x = 0$ $C_3 = \varphi_0$.

Итак,

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{M_{ce_0}}{G \cdot I_k \cdot k} \cdot \operatorname{sh} kx + \frac{B_{\omega_0}}{G \cdot I_k} \cdot (1 - \operatorname{ch} kx) + \frac{M_0}{G \cdot I_k \cdot k} \cdot (kx - \operatorname{sh} kx). \quad (5.13)$$

⁸ В учебниках высшей математики всегда проводится проверка, что это действительно частное решение неоднородного уравнения, обладающее особыми свойствами метода начальных параметров.

5.2. Учет других участков стержня

Метод начальных параметров позволяет написать уравнения для любого количества участков стержня, без их учета.

Рассмотрим вначале схему всего двух участков и пусть границей участка будет приложение крутящего момента M_1 , поскольку мы изучали кручение стержня (см. рис. 5.1).

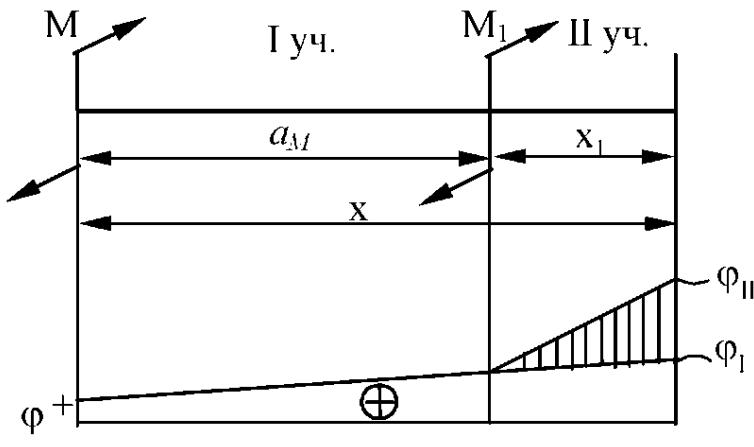


Рис. 5.1

Введем функцию $\Delta\varphi_{II} = \varphi_{II} - \varphi_I$ – разность между истинной линией углов закручивания на II участке φ_{II} и продолжением линии закручивания φ_I в пределах II участка. Понятно, что:

$$\Delta\varphi_{II} = \frac{\Delta M_I}{G \cdot I_k \cdot k} \cdot (kx_1 - \sinh kx_1),$$

где $x_1 = x - a_M$.

Тогда истинная линия углов закручивания на II участке будет:

$$\begin{aligned} \varphi_{II} &= \varphi_I + \Delta\varphi_{II} = \varphi_0 + \frac{\theta_0}{k} \cdot \sinh kx + \frac{B_{\theta_0}}{G \cdot I_k} \cdot (1 - \cosh kx) + \\ &+ \frac{M_0}{G \cdot I_k \cdot k} \cdot (kx - \sinh kx) + \frac{M_1}{G \cdot I_k \cdot k} \cdot [k \cdot (x - a_M) - \sinh(x - a_M)] \end{aligned} \quad (5.14)$$

Так как $\Delta M_1 = M_1$ – это скачок на эпюре M_x . Напомним, что M_1 – это внутренний, а M_1 – внешний крутящий момент.

Важное замечание: уравнение (5.14) можно применять только на II участке, то есть всегда должно выполняться условие $(x - a_M) > 0$.

5.3. Уравнения для внутренних усилий

Зная φ и θ , можно простым дифференцированием уравнения (5.13) или (5.14) получить все внутренние силовые факторы, а именно: M_{ce} ; B_ω ; M_ω .

Запишем эти выражения для одного участка и при $m(x) = 0$

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{M_{ce_0}}{G \cdot I_k \cdot k} \cdot \operatorname{sh} kx + \frac{B_{\omega_0}}{G \cdot I_k} \cdot (1 - \operatorname{ch} kx) + \frac{M_0}{G \cdot I_k \cdot k} \cdot (kx - \operatorname{sh} kx). \quad (5.15)$$

Так как $\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_{ce}}{G \cdot I_k}$, получим:

$$M_{ce} = M_{ce_0} \cdot \operatorname{ch} kx - B_{\omega_0} \cdot k \cdot \operatorname{sh} kx + M_0(1 - \operatorname{ch} kx). \quad (5.16)$$

Так как $\theta' = \frac{M_{ce}'}{G \cdot I_k} = -\frac{B_\omega}{E \cdot I_\omega}$, имеем $B_\omega = -\frac{M_{ce}'}{k^2}$.

Тогда:

$$B_\omega = -\frac{M_{ce_0}}{k} \cdot \operatorname{sh} kx + B_{\omega_0} \cdot \operatorname{ch} kx + \frac{M_0}{k} \cdot \operatorname{sh} kx. \quad (5.17)$$

И, наконец, так как $M_\omega = B_\omega'$, получим:

$$M_\omega = -M_{ce_0} \cdot \operatorname{ch} kx + B_{\omega_0} \cdot k \cdot \operatorname{sh} kx + M_0 \cdot \operatorname{ch} kx. \quad (5.18)$$

Сделаем проверку: $M_{ce} + M_\omega = M_x$; суммируя выражения (5.16) и (5.18), получим $M_0 = M_x$, что и требовалось доказать, так как $M_x = \text{const}$. Напомним, что M_0 и M_x – это внутренние силовые факторы.

Лекция 6.► ИЗГИБ И КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ ПОПЕРЕЧНЫМИ СИЛАМИ

6.1. Изгиб тонкостенных стержней. Определение центра изгиба

Ранее была рассмотрена деформация тонкостенного стержня при *стесненном кручении*, то есть когда равнодействующая поперечных сил была равна нулю. Оставался только крутящий момент M_x . Это вызвало появление бимомента B_{ω} и секториальных нормальных напряжений σ_{ω} , которые в свою очередь, из-за неравномерности распределения по длине стержня, вызывали вторичные касательные напряжения τ_{ω} , интегральная величина которых оценивалась изгибно-крутящим моментом M_{ω} .

Теперь рассмотрим случай, когда поперечные силы создают равнодействующую, не равную нулю. Главный вектор не равен нулю. Как известно, величина главного вектора не зависит от точки приведения сил и всегда равна поперечной силе Q . Что касается *главного момента*, то он зависит от точки приведения и можно найти такую точку с главным моментом, равным нулю; то есть $M_{kp} = M_x = 0$. Данная точка называется *центром изгиба*.

Очевидно, что внешние силы нужно прикладывать по линии центров изгиба, тогда кручения и депланации сечения не будет: $M_x = 0$; $B_{\omega} = 0$. Определим положение центра изгиба для общего случая несимметричного тонкостенного стержня.

Возьмем момент касательных сил относительно точки A , считая точку A – центром изгиба, то есть $M_A = 0$. Найдем условия, при которых действительно $M_A = 0$.

$$\text{Очевидно, } M_A = \int_S \tau \cdot \delta \cdot r \, dS = \int_S \tau \cdot \delta \, d\omega_A, \text{ так как } d\omega = r \, dS.$$

Известно, что $\tau = \frac{Q_y \cdot S_z^*}{\delta \cdot I_z} + \frac{Q_z \cdot S_y^*}{\delta \cdot I_y}$; подставляя, получим:

$$M_A = \frac{\Omega_y}{I_z} \cdot \int_A S_z^* d\omega + \frac{\Omega_z}{I_y} \cdot \int_A S_y^* d\omega. \quad (6.1)$$

Имеем сумму с однотипными интегралами, которые и должны, естественно, при каких-то условиях обратиться в нуль. Проинтегрируем первый интеграл по частям:

$$\int_A S_z^* d\omega = S_z^* \cdot \omega \Big|_{S_1}^{S_2} - \int_A \omega dS_z^* = 0 - \int_A y \cdot \omega dA, \quad \text{так как} \quad dS_z^* = y \cdot dA.$$

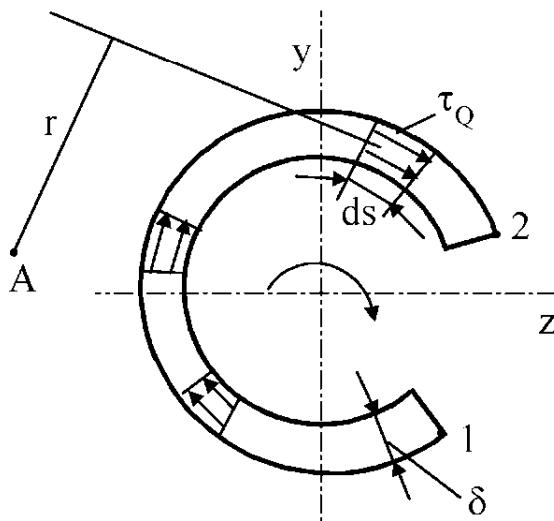


Рис. 6.1

Первое слагаемое равно нулю – статический момент относительно оси z в точке 1 равен нулю, так как нет площади интегрирования (см. рис. 6.1), а в точке 2 равен нулю, так как вошла вся площадь сечения, а ось z – центральная и $S_z = 0$. Таким образом, $M_A = 0$, если интегралы $\int_A y \cdot \omega dA = 0$ и $\int_A z \cdot \omega dA = 0$, но

это условие того, что точка A является главным полюсом и мы умеем его находить (см. лекцию 2).

Вывод: центр изгиба, также как и центр кручения, совпадает с главным полюсом.

Заключение:

- Если внешнюю поперечную силу F приложить по линии центров изгиба, то стесненного кручения тонкостенного стержня не будет

$(M_x = 0, B_\phi = 0)$, а внутренние силовые факторы $M_z; M_y; Q_z; Q_y$ – просто поперечный изгиб.

2. Для некоторых сечений центр изгиба определяется сразу без вычислений; он лежит на пересечении касательных усилий (см. рис. 6.2). В этом случае сечение не депланирует.

3. Если сечение имеет две оси симметрии, то центр изгиба совпадает с центром тяжести (например, двутавр).

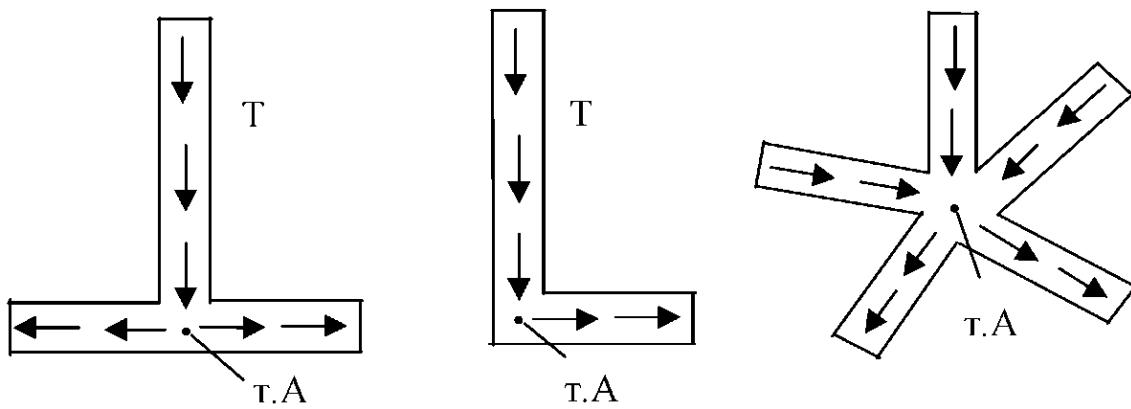


Рис. 6.2

6.2. Изгиб и кручение тонкостенного стержня поперечными силами

Если внешняя поперечная сила F приложена не в центре изгиба, то тогда, используя принцип независимости действия сил, перенесем ее в центр изгиба и получим поперечный изгиб (см. подраздел 6.1); но при этом возникает крутящий момент $M_x = F \cdot \bar{e}$, где \bar{e} – расстояние от точки приложения силы F до центра изгиба. Таким образом, к поперечному изгибу: $M_z; M_y; Q_z; Q_y$ добавится стесненное кручение моментом $M_x = F \cdot \bar{e}$ (см. лекции 4, 5), то есть появится бимомент B_ϕ и изгибно-крутящий момент M_ϕ . Всего внутренних силовых факторов будет семь: $M_z; M_y; Q_z; Q_y; M_{cb}; B_\phi; M_\phi$. Определив все эти величины, можно найти суммарные нормальные и касательные напряжения по формулам:

$$\sigma_x = \pm \frac{M_z \cdot y}{I_z} \pm \frac{M_y \cdot z}{I_y} \pm \frac{B_{\omega} \cdot \omega_A}{I_{\omega}}, \quad (6.2)$$

$$\tau = \pm \frac{Q_y \cdot S_z^*}{\delta \cdot I_z} \pm \frac{Q_z \cdot S_y^*}{\delta \cdot I_y} \pm \frac{M_{c6} \cdot \delta}{I_{\kappa}} \pm \frac{M_{\omega} \cdot S_{\omega}^*}{\delta \cdot I_{\omega}}. \quad (6.3)$$

Естественно, параметры $y, z, \omega_A, S_z^*, S_y^*, S_{\omega}^*$ нужно брать в одних и тех же точках поперечного сечения тонкостенного стержня с учетом знака, а внутренние силовые факторы $M_z; M_y; M_{c6}; B_{\omega}; M_{\omega}$ – в одних и тех же сечениях по длине стержня, также с учетом знака. Таким образом, изгиб с кручением поперечной силой F свелся к изгибу поперечной силой в центре изгиба и стесненному кручению.

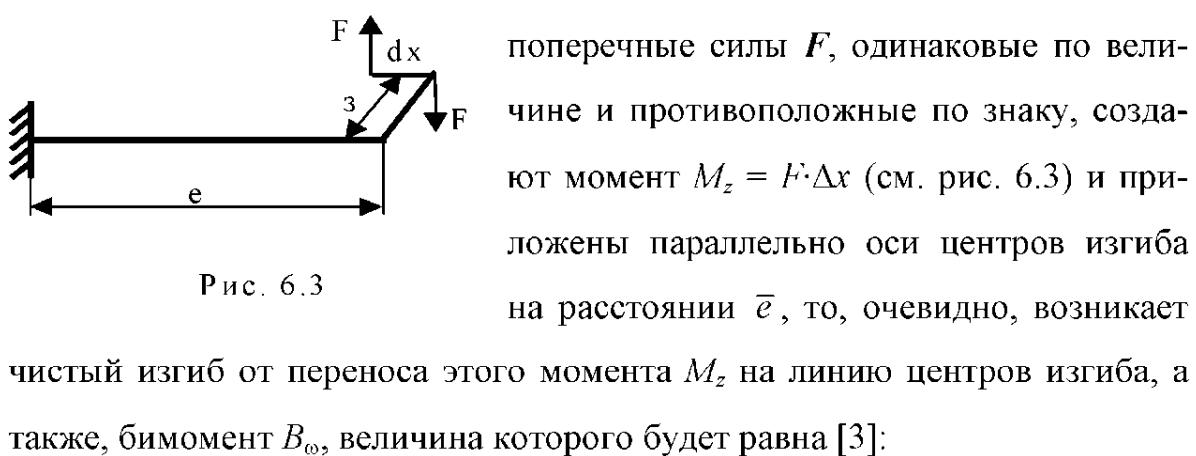


Рис. 6.3

$$B_{\omega} = M_z \cdot \bar{e} \quad (6.4)$$

Примечание: перенос силы в плоскости параллельно ее действию, вызывает появление момента $M = F \cdot h$ (где h – расстояние, на которое перенесена сила). Перенос момента в пространстве, параллельно его действию, вызывает появление бимомента $B = M \cdot h$ (где h – расстояние, на которое перенесен момент) (см. рис. 6.4).

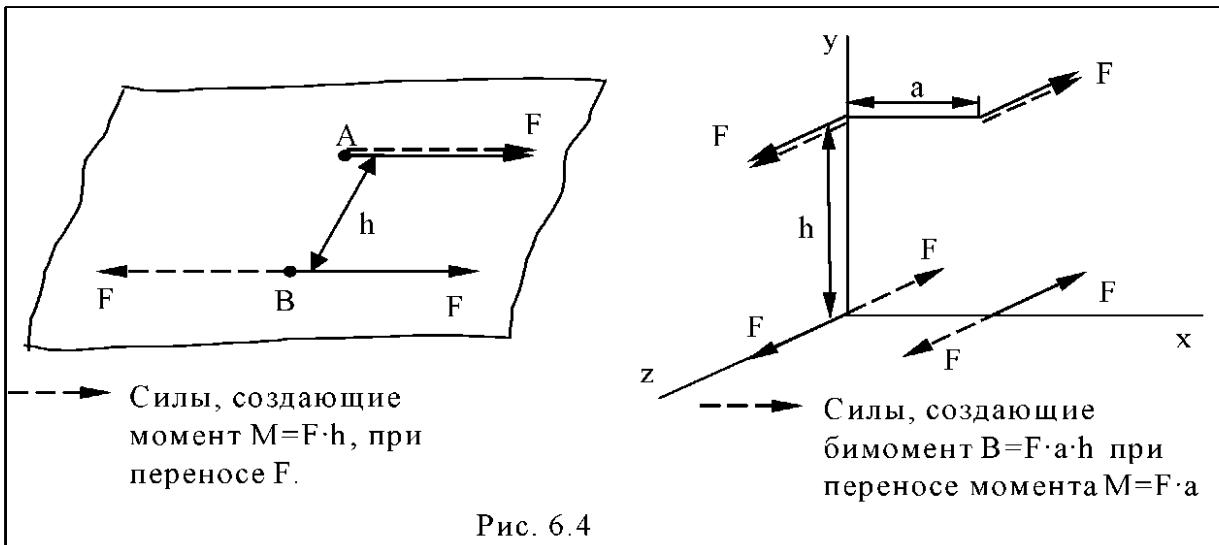


Рис. 6.4

ИЗГИБ И КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ

Лекция 7.► ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ ПРОДОЛЬНЫМИ СИЛАМИ. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ НАГРУЖЕНИЯ СТЕРЖНЯ

7.1. Нагружение продольными силами

Ранее были рассмотрены случаи нагружения тонкостенного стержня крутящим моментом на торце (см. лекции 4 и 5) и нагружение поперечными силами по торцу тонкостенного стержня. Теперь рассмотрим нагружение стержня продольными силами, приложенными по торцам тонкостенного стержня (любая другая сила может быть разложена на составляющие: поперечную – \mathbf{F} и продольную – \mathbf{P}).

В общем случае продольные силы – \mathbf{P} создают следующие внутренние силовые факторы N ; M_z ; M_y и, если $\omega_A \neq 0$ в точке приложения силы \mathbf{P} , то бимомент B_ω , а также свободный крутящий момент M_{ce} и изгибающий крутящий момент M_ω , причем $M_{ce} + M_\omega = 0$, так как $M_x = 0$.

Бимомент на торце определяется по формуле [1, 3]:

$$B = \sum P_i \cdot \omega_{A_i}. \quad (7.1)$$

Покажем, что это действительно так.

Известно, что внутренний бимомент равен $B_\omega = \int_A \sigma_\omega \cdot \omega_A \cdot dA$

(см. лекцию 4); тогда внешний бимомент B , очевидно, будет иметь вид:

$B = \int_A p(s) \cdot \omega_A(s) dA$, где $p(s)$ – внешняя нагрузка по торцу. Отсюда, по

способу Верещагина:

$$B = \int_A p(s) \cdot \omega_A(s) dA = \delta \int_0^\ell p(x) \cdot \omega_A(x) dx = \delta \cdot \Omega_p \cdot \omega_A(x_c),$$

где Ω_p – площадь эпюры нагрузки, а ω_A – секториальная координата под центром тяжести площади Ω_p . Принимаем, что $\omega(s)$ имеет линейный характер.

Для сосредоточенной силы $p = \delta \cdot \Omega_p$, а центр тяжести x_c эпюры Ω совпадает с направлением силы Р. Тогда:

$$B = \sum P_i \cdot \omega_{i,A} . \quad (7.2)$$

7.2. Общий случай нагружения

В общем случае нагружения осевые смещения (U_x) могут быть представлены следующим выражением (см. лекцию 1):

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 , \quad (7.6)$$

где U_0 – сдвиг плоскости параллельно самой себе;

U_1 – смещение от поворота плоскости относительно оси z ;

U_2 – смещение от поворота плоскости относительно оси y ;

U_3 – смещение от депланации сечения.

Иначе (см. лекции 1 и 3):

$$U = U_0 \cdot 1 - \phi_z \cdot y - \phi_y \cdot z - \theta_x \cdot \omega , \quad (7.7)$$

так как $U_3 = -\theta_x \cdot \omega$, где θ_x – погонный угол закручивания относительно

оси x , то есть $\theta_x = \frac{d\phi}{dx}$. Определяем деформацию $\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}$. Имеем:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_0 \cdot 1 + \chi_z \cdot y + \chi_y \cdot z - \theta_x \cdot \omega , \quad (7.8)$$

так как $-\chi_z = \frac{1}{\rho_z} = \frac{d\phi_z}{dx}$ – кривизна.

Принимаем гипотезу жесткого контура, получим выражение закона Гука: $\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$, тогда окончательно напряжение вдоль оси x :

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_0 \cdot 1 + E \cdot \chi_z \cdot y + E \cdot \chi_y \cdot z - E \cdot \theta_x \cdot \omega , \quad (7.9)$$

где $\varepsilon_0, \chi_z, \chi_y, \theta_x$ – неизвестные, которые можно определить, используя метод Фурье. А именно, умножаем каждое слагаемое левой и правой части выражения (7.9) на координатные функции: 1, y , z , ω и интегрируем по площади поперечного сечения:

$$\int_A \sigma_x \cdot 1 \cdot dA = N = E \cdot \int_A 1 \cdot dA \cdot \varepsilon_0 + E \cdot \int_A 1 \cdot y \cdot dA \cdot \chi_z + E \cdot \int_A 1 \cdot z \cdot dA \cdot \chi_y - E \cdot \int_A \omega \cdot \Gamma \cdot dA \cdot \theta'_x$$

$$\text{или: } N = E \cdot A \cdot \varepsilon_0 + E \cdot S_z \cdot \chi_z + E \cdot S_y \cdot \chi_y - E \cdot S_\omega \theta'_x.$$

Подобным образом умножаем (7.9) на y , z , ω и получаем систему 4 уравнений с 8 неизвестными:

$$\left. \begin{array}{l} N = E \cdot A \cdot \varepsilon_0 + E \cdot S_z \cdot \chi_z + E \cdot S_y \cdot \chi_y - E \cdot S_\omega \cdot \theta' \\ M_z = E \cdot S_z \cdot \varepsilon_0 + E \cdot I_z \cdot \chi_z + E \cdot I_{yz} \cdot \chi_y - E \cdot I_{\omega z} \cdot \theta' \\ M_y = E \cdot S_y \cdot \varepsilon_0 + E \cdot I_{zy} \cdot \chi_z + E \cdot I_y \cdot \chi_y - E \cdot I_{\omega y} \cdot \theta' \\ B_\omega = E \cdot S_\omega \cdot \varepsilon_0 + E \cdot I_{\omega z} \cdot \chi_z + E \cdot I_{\omega y} \cdot \chi_y - E \cdot I_\omega \cdot \theta' \end{array} \right\}. \quad (7.10)$$

Неизвестные ε_0 , χ_z , χ_y , θ' , N , M_y , M_z , B_ω .

N , M_z , M_y определяем из 3 уравнений статики: $\sum x = 0$; $\sum M_z = 0$; $\sum M_y = 0$.

Бимомент B_ω из уравнений статики определить нельзя, но нам известно, что $M_x = M_{ce} + M_\omega$ и $M_\omega = B'_\omega$, а $M_{ce} = \theta \cdot G \cdot I_\kappa$. M_x можно определить из уравнения статики $\sum M_x = 0$. Тогда:

$$M_\omega = B'_\omega = E \cdot S_\omega \cdot \varepsilon'_0 + E \cdot I_{\omega z} \chi'_z + E \cdot I_{\omega y} \cdot \chi'_y - E \cdot I_\omega \theta''.$$

Подставляя M_ω в выражение M_x , имеем:

$$M_x = \theta \cdot G \cdot I_\kappa + E \cdot S_\omega \cdot \varepsilon'_0 + E \cdot I_{\omega z} \cdot \chi'_z + E \cdot I_\omega \theta''. \quad (7.11)$$

Если взять ортогональные координатные функции $1, z, y, \omega_A$, при которых $S_z = S_y = I_{zy} = I_{y\omega} = S_\omega = 0$, то система (7.10) распадается на отдельные уравнения:

$$\varepsilon_0 = \frac{N}{E \cdot A}; \quad \chi_z = \frac{M_z}{E \cdot I_z}; \quad \chi = \frac{M_y}{E \cdot I_y}; \quad \theta' = -\frac{B_\omega}{E \cdot I_\omega}$$

и уравнение:

$$M_x = \theta \cdot G \cdot I_\kappa - E \cdot I_\omega \cdot \theta'',$$

решая которое, определяем $B_{\omega}, M_{ce}, M_{\omega}$.

Подставляя полученные величины в уравнение (7.9), имеем:

$$\sigma_x = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_z \cdot y}{I_z} \pm \frac{M_y \cdot z}{I_y} \pm \frac{B_{\omega} \cdot \omega_A}{I_{\omega}}, \quad (7.12)$$

$$\tau = \pm \frac{M_{ce} \cdot \delta}{I_K} \pm \frac{Q_y \cdot S_z^*}{\delta \cdot I_z} \pm \frac{Q_z \cdot S_y^*}{\delta \cdot I_y} \pm \frac{M_{\omega} \cdot S_{\omega}^*}{\delta \cdot I_{\omega}}. \quad (7.13)$$

Здесь снова уместно напомнить, что соответствующие параметры $y, z, \omega_A, S^*, \delta$ берем в одних и тех же точках поперечного сечения, а внутренние силовые факторы $N, M_z, M_y, Q_y, Q_z, B_{\omega}, M_{ce}, M_{\omega}$ – в одних и тех же сечениях тонкостенного стержня. Знаки соответствующих слагаемых выбираются в зависимости от принятой системы координат.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Александров, А. В. Сопротивление материалов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. Д. Державин. – М. : Высшая школа, 1995. – 600 с.
2. Багмутов, В. П. Расчет тонкостенного стержня незамкнутого профиля на сложное сопротивление : метод. указания / В. П. Багмутов. – Волгоград, 1990.
3. Власов, В. З. Тонкостенные упругие стержни / В. З. Власов. – М. : Физматгиз, 1959. – 595с.
4. Смирнов, В. И. Курс высшей математики. Т. 2. / В. И. Смирнов. – М. : Физматгиз, 1961. – 572с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Чем вызвана необходимость структурной оптимизации стержней	3
Тонкостенные стержни как вид структурной оптимизации	4
Особенности работы тонкостенных стержней	8
Лекция 1	
Обоснование важности перехода к произвольной системе координат.	
Задача Сен-Венана в произвольной системе координат. Координатные функции. Гипотеза плоских сечений и депланация. Ортогонализация координатных систем	12
1.1. Задача Сен-Венана в произвольной системе координат.	
Координатные функции	12
1.2. Ортогонализация координатных систем	16
Лекция 2	
Геометрические секториальные характеристики тонкостенных стержней.	
Понятие о тонкостенных стержнях	19
2.1. Понятие о секториальной площади как четвертой координатной функции	19
2.2. Секториальные характеристики	21
2.3. Определение положения главного полюса (точка A) и положения главной нулевой точки (точка O ₁)	22
Лекция 3	
Чистое кручение тонкостенного стержня	25
3.1. Касательные напряжения для узкого прямоугольника при чистом кручении	28
3.2. Депланация открытого профиля тонкостенного стержня при чистом кручении	29
Лекция 4	
Стесненное кручение тонкостенного стержня. Определение секториальных нормальных и касательных напряжений	31
4.1. Понятие о стесненном кручении	31
4.2. Определение нормальных напряжений σ_{θ}	33

4.3. Понятие о внутреннем бимоменте	34
4.4. Вторичные касательные напряжения $\tau_{\omega} = \tau_2$	35
4.5. Дифференциальные зависимости при стесненном кручении	36
Лекция 5	
Стесненное кручение тонкостенного стержня. Определение внутренних силовых факторов и углов закручивания	38
5.1. Решение дифференциального уравнения погонных углов закручивания	39
5.2. Учет других участков стержня	42
5.3. Уравнения для внутренних усилий	43
Лекция 6	
Изгиб и кручение тонкостенного стержня открытого профиля поперечными силами	44
6.1. Изгиб тонкостенных стержней. Определение центра изгиба	44
6.2. Изгиб и кручение тонкостенного стержня поперечными силами	46
Лекция 7	
Изгиб и кручение тонкостенного стержня открытого профиля продольными силами. Общий случай нагружения стержня	49
7.1. Нагружение продольными силами	49
7.2. Общий случай нагружения	50
Библиографический список	53