ОПД.Р.03 СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В СТРОИТЕЛЬСТВЕ И ИХ РЕАЛИЗАЦИЯ

Учебное пособие

Пособие содержит теоретические сведения по дисциплине «Численные методы и программирование», а также подробные методические указания к выполнению лабораторных работ.

Для решения нелинейных уравнений и задач линейной алгебры предложен распространенный компьютерный пакет прикладной математики Mathcad, который позволит студентам реализовать численные методы решения задач в строительстве.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие составлено в соответствии с программой курса «Численные методы и программирование» для высших учебных заведений.

Основное назначение пособия – научить студентов понимать идеи, методы, особенности и области применения численных методов.

В пособии представлено введение в теорию погрешностей, основы численных методов решения систем линейных уравнений, исследуется ряд несложных методов приближенного решения нелинейных уравнений. Приведены практические схемы реализации этих решений, а также даны подробные методические указания по выполнению лабораторных работ.

При решении нелинейных уравнений, систем линейных алгебраических уравнений и систем нелинейных алгебраических уравнений использован распространенный компьютерный пакет прикладной математики Mathcad, который в настоящее время широко используется в практических вычислениях.

Пособие содержит теоретические сведения по численным методам. Для каждого численного метода рассматриваются примеры применения программного математического пакета Mathcad.

Наряду с вычислениями с помощью математических инструментов некоторые численные методы решения задач студенты выполняют «вручную». Для самоконтроля опять же используется Mathcad.

Пособие может быть использовано при выполнении курсовых и дипломных проектов, так как содержит отличный практический материал, связанный с решением задач по расчету строительных конструкций.

ВВЕДЕНИЕ

Решение практической задачи начинается с описания исходных данных и целей на языке строго определенных математических понятий. Точная формулировка условий и целей решения – это математическая постановка задачи.

Наиболее существенные свойства реального объекта описываются с помощью математических соотношений. Данный решения называется построением математической модели.

Модель – это такой материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе исследования замещает объект-оригинал так, что его непосредственное изучение дает новые знания об объекте-оригинале.

Процесс исследования свойств объекта по его модели называется моделированием. Математическая модель может иметь вид уравнения, системы уравнений либо быть выраженной в форме математических структур или соотношений. Математические модели могут быть непрерывными или дискретными. После моделирования проводится исследование математической модели, т.е. решение полученной математической задачи.

В пособии рассмотрены некоторые методы решения таких задач.

Математические модели основных задач строительного профиля представляют собой одну из задач линейной алгебры или задачу математического программирования. Основными методами решения подобных задач являются численные методы, при применении которых результат получается путём вычислений. Использование ЭВМ позволяет быстро реализовывать численные методы, которые в данном случае выступают как сильное математическое средство решения практических задач.

На рисунке 1 показана схема вычислительного эксперимента, где на III этапе выбирается численный метод решения математической модели.

Рисунок 1 – Схема вычислительного эксперимента

В пособии рассмотрены методы решения:

– нелинейных уравнений;

– систем линейных алгебраических уравнений.

Соответственно, студент выполняет две лабораторные работы.

Лабораторная работа № 1.

Решение нелинейного уравнения.

Нелинейное уравнение решается одним из существующих численных методов. В процессе расчета используется математический пакет Mathcad. Необходимо найти корни уравнения.

Составляется программа решения данного уравнения на языке программирования QBasic и полученное решение сравнивается с решением, выполненным вручную.

Найденные двумя способами корни уравнения проверяются с помощью математического пакета Mathcad.

Лабораторная работа № 2.

Решение системы линейных алгебраических уравнений.

По индивидуальным заданиям предлагается решить систему линейных алгебраических уравнений прямым методом Гаусса. Эту же систему решить методом простой итерации. Затем найти решение данной системы уравнений с помощью встроенных функций в Mathcad. Результаты сравнить.

1. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ПОГРЕШНОСТЕЙ

1.1. Источники и классификация погрешностей

На некоторых этапах решения задачи могут возникнуть погрешности, искажающие результаты вычислений.

Основные этапы математического решения:

1) Построение математической модели задачи;
2) Определение исходных данных;
3) Решение полученной математической задачи.

Погрешности появляются уже на первом этапе, т.к. математическая модель задачи – это приближенное, идеализированное описание задачи на языке математики. При моделировании объекты и процессы задачи - оригинала заменяются на математические понятия и соотношения. Не все черты рассматриваемой задачи могут быть учтены в математической модели.

На втором этапе возникают другие ошибки.

Исходные данные задачи являются следующей причиной появления погрешностей, т.к. установить точные значения исходных параметров во многих случаях невозможно.

В соответствии с этим из суммарной погрешности математической модели и начальных данных образуется погрешность исходной информации. Её называют неустранимой погрешностью, т.к. она не может быть уменьшена ни до начала решения задачи, ни в процессе ее решения.

При переходе от математической модели к численному методу возникают так называемые погрешности метода. Они связаны с тем, что всякий численный метод воспроизводит исходную математическую модель приближенно.

Получение точного решения (третий этап), как правило, неосуществимо. Замена точного решения приближенным (численным) и порождает погрешность метода.

Наконец, в процессе решения задачи производится округление исходных данных, а также промежуточных и окончательных результатов. Эти погрешности и те, что возникают при выполнении арифметических операций над приближенными числами, переносятся в результат вычислений и образуют вычислительную погрешность, или погрешность округлений.

При решении математических задач используются числа двух родов: точные и приближенные.

1.2. Абсолютная и относительная погрешность

Пусть A – точное значение некоторой числовой, векторной или функциональной величины, a – приближенное значение для A, т.е. $A \approx a$ *или* $a \approx A$.

Разность $A - a$ (или $a - A$) между точным и приближенным значениями величины называется погрешностью значения a.

Абсолютной погрешностью приближенного числа a является любое неотрицательное число Δa, удовлетворяющее неравенству

$$\rho(A, a) \le \Delta a \text{ или } |A - a| \le \Delta a \Leftrightarrow a - \Delta a \le A \le a + \Delta a .$$

Абсолютная погрешность – это основная характеристика точности вычисления[1].

Во всех заданиях студент находит значение абсолютной погрешности.

При приближенных измерениях и вычислениях иногда необходима характеристика качества проделанной работы. Для оценки качества измерений или вычислений определяется относительная погрешность.

Относительной погрешностью δa приближенного числа a называется величина, определяемая неравенством

$$\delta a \ge \frac{|A - a|}{|a|}, \ (a \ne 0) \text{ или } \delta a = \frac{\Delta a}{|a|}.$$

Всякое положительное число a можно представить в следующем виде:

$$a = \alpha_1 \cdot 10^m + \alpha_2 \cdot 10^{m-1} + \ldots + \alpha_n \cdot 10^{m-n-1},$$

[1] Если надо получить какой-то результат с заданной точностью $\varepsilon > 0$, это значит, что абсолютная погрешность его должна быть не больше ε.

где α_i - десятичные цифры числа a $(\alpha_i = 0, 1, ...9)$, причем $a_1 \neq 0$; m – целое число, называемое старшим десятичным разрядом числа a.

Например:

$$27354{,}28 = 2 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2}.$$

2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

2.1. Постановка задачи

Многие задачи исследования различных объектов с помощью математических моделей, применения их для прогноза или расчета, приводят к необходимости решения нелинейных уравнений.

Задача нахождения корней нелинейных уравнений вида

$$F(x) = 0, \tag{2.1}$$

встречается в разделах физики, механики, строительства.

В задачах устойчивости строительных конструкций приходят к решению нелинейного уравнения (трансцендентного или алгебраического) для определения критического параметра нагрузки.

В задачах динамики строительных конструкций собственные частоты определяются из трансцендентных уравнений вида

$$ch\,v \cdot \cos v + 1 = 0.$$

Математические модели работы строительной конструкции в упругопластичной зоне относятся к физическим нелинейным задачам. Закон изменения напряжений от деформаций - линейный закон Гука.

Необходимым элементом решения этих задач является решение уравнений. Но большинство их не могут быть решены аналитически. Применяются численные методы, которые позволяют решать множество уравнений, недоступных для аналитических методов.

Рассмотрим решение алгебраических и трансцендентных уравнений.

Пусть функция $F(x)$ определена и непрерывна на конечном интервале $[a, b]$.

Всякое число $\xi \in [a, b]$, обращающее функцию $F(x)$ в нуль, т.е. такое, при котором $F(\xi) = 0$, называется корнем уравнения (2.1).

Два уравнения $F(x) = 0$ и $G(x) = 0$ называются равносильными (эквивалентными), если всякое решение одного из них является решением и для другого, т.е. множества решений этих уравнений совпадают.

Нелинейные уравнения с одним неизвестным подразделяются на два класса:

– алгебраические;

– трансцендентные.

Алгебраическими называются уравнения, содержащие только алгебраические функции (целые, рациональные, иррациональные).

Например:

$2x^4 - 5x^3 + 45x = 18x^2$ – целое уравнение;

$\dfrac{3x}{3-x} + \dfrac{9}{x-3} = x$ – рациональное уравнение;

$\sqrt{x^2 - 16} = x^2 - 22$ – иррациональное уравнение.

Путем алгебраических преобразований из всякого алгебраического уравнения можно получить уравнение в канонической форме:

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

где $a_0, a_1, \ldots a_n$ – коэффициенты уравнения; x – неизвестное; n – степень алгебраического уравнения.

Например:

$\sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{2x^2 - 1} = x + 1$ – алгебраическое уравнение.

Проведем его алгебраические преобразования:

$2x^2 + 1 - 2x^2 - 1 - 2\sqrt{4x^4 - 1} = x^2 + 2x + 1;$

$3x^2 - 2x - 1 = 2\sqrt{4x^4 - 1};$

$\left(3x^2 - (2x+1)\right)^2 = 4\left(4x^4 - 1\right);$

$9x^4 - 12x^3 - 6x^2 + 4x^2 + 4x + 1 = 16x^4 - 4;$

$7x^4 + 12x^3 + 2x^2 - 4x - 5 = 0$ – алгебраическое уравнение в каноническом виде.

В результате приведения алгебраического уравнения (2.1) к каноническому виду получают те же корни, что и для исходного уравнения.

Трансцендентными называются уравнения, содержащие другие функции (тригонометрические, показательные, логарифмические и др.).

Например:

$\cos 4x + 2\cos^2 x = 1$ – тригонометрическое уравнение;

$8^x + 18^x = 2 \cdot 27^x$ – показательное уравнение;

$x - x\lg 5 = \lg\left(2^x + x - 3\right)$ – логарифмическое уравнение.

Методы решения нелинейных уравнений (2.1) делятся на *прямые* и *итерационные*.

Прямые методы позволяют записать корни в виде некоторого конечного соотношения (формулы). Такими методами решались уравнения из школьной программы.

Подавляющее большинство нелинейных уравнений с одной переменной не решается путем аналитических преобразований (прямыми методами), поэтому на практике они решаются только численными методами. Решить такое уравнение – значит установить наличие корней, их число и найти значения этих корней с заданной точностью.

При решении задачи численного нахождения действительных корней (комплексные корни не рассматриваются) уравнения (2.1) выделяют два этапа:

1) отделение корней, т.е. определение интервалов, в каждом из которых содержится только один корень уравнения;

2) уточнение корней, т.е. вычисление их с заданной степенью точности.

2.2. Отделение корней

Отделение корней производится графически или аналитически.

Корни уравнения (2.1) – это точки пересечения графика функции $F(x)$ с осью абсцисс. Достаточно построить график функции $F(x)$ и отметить на оси абсцисс отрезки, содержащие по одному корню.

Графический способ применяется часто. Обычно с него и начинают отделение корней. Но он не обладает большой точностью:

– когда интервал, содержащий корень, небольшой длины или корни расположены близко, можно ошибиться в его выборе;

– когда графики функций расположены близко и трудно установить их пересечение.

В этих случаях графическое пересечение корней необходимо проверить и уточнить.

Применение аналитического метода.

Основу аналитического способа отделения корней составляет известная из курса математического анализа теорема Больцано-Коши.

Пусть функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах отрезка принимает значения разных знаков, т.е.

$$F(a) \cdot F(b) < 0.$$

Тогда существует такая точка ξ, принадлежащая интервалу (a, b), в которой функция обращается в ноль, т.е.

$$F(\xi) = 0.$$

Корень будет единственным, если $F'(x)$ (или $F''(x)$) существует и сохраняет знак на рассматриваемом отрезке.

Рассмотрим алгебраическое уравнение в каноническом виде

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \qquad (2.2)$$

Верхнюю границу модулей корней уравнения (2.2) даст следующая теорема:

Пусть

$$A = \max_{1<i<n} |a_i|.$$

Тогда любой корень ξ уравнения (2.2) удовлетворяет неравенству

$$|\xi| < 1 + \frac{A}{|a_0|} = R\ , \tag{2.3}$$

Из этой теоремы следует, что все корни уравнения (2.2) расположены внутри интервала *(-R, R)*.

Отделение корней будем выполнять на ПК.

Вычисляем значения $F(x)$, начиная с точки $x = -R$, двигаясь вправо с некоторым шагом *h*. Как только обнаружится пара соседних значений $F(x)$, имеющих разные знаки, и функция $F(x)$ монотонна на этом отрезке, тогда соответствующие значения аргумента *x* (предыдущее и последующее) можно считать концами отрезка, содержащего корень. Результатом решения поставленной задачи будут выводимые на дисплей (или на печать) в цикле значения параметров x_1 и x_2 (концов выделенных отрезков).

Для надежности выполнения условия $F(x) \cdot F(x+h) < 0$ следует при отделении корней выбирать достаточно малые значения *h*.

По схеме алгоритма в соответствии с рисунком 2 составляется программа отделения корней уравнения на языке Бейсик.

Пример 2.1.

Определить интервал нахождения корней уравнения

$$3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1 = 0\ .$$

Решение.

Данное уравнение – алгебраическое уравнение четвертой степени.

Определяем границы нахождения корней уравнения

$$A = \max\{|3|,\ |4|,\ |-12|\} = 12;$$

$$a_0 = 3;$$

$$R = 1 + \frac{12}{3} = 5.$$

Все корни уравнения находятся внутри отрезка $[-5;\ 5]$, в котором функция $F(x)$ определена и непрерывна.

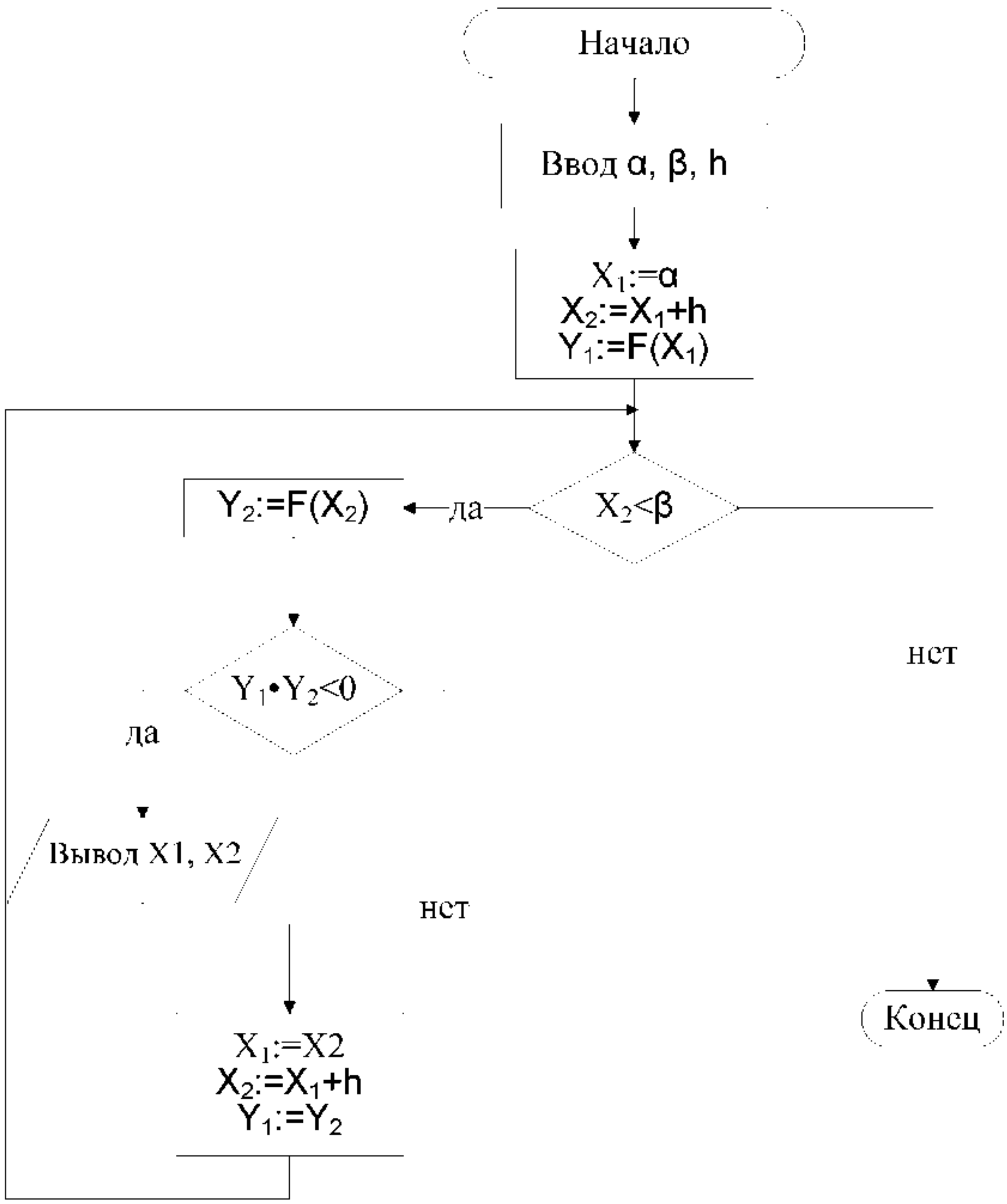


Рисунок 2 – Блок-схема алгоритма отделения корней уравнения $F(x)=0$

Требуется отделить корни уравнения, т.е. указать все отрезки $[a;\, b] \subset (-R,\, R)$, содержащие по одному корню.

Программа отделения корней на языке Qbasic будет иметь вид:

```
10 REM отделение корней
20 DEF FNF (X) = 3 * X ^ 4 + 4 * X ^ 3 - 12 * X ^ 2 + 1
30 INPUT A, B, h: K = 0
40 X1 = A: X2 = X1 + h: Y1 = FNF(X1)
50 IF X2 > B THEN 120
60 Y2 = FNF(X2)
70 IF Y1 * Y2 > 0 THEN 100
80 K = K + 1
90 LPRINT K; "-й корень"; "["; X1; ";"; X2; "]"
100 X1 = X2: X2 = X1 + h: Y1 = Y2
110 GOTO 50
120 END
    RUN

? –5, 5, .1
1 - й корень [-2.800002 ; -2.700002 ]
2 - й корень [-.3000025 ; -.2000025 ]
3 - й корень [ .2999975 ;   .3999975 ]
4 - й корень [  1.399998 ;   1.499998 ]
```

Чтобы использовать эту программу для отделения корней другого уравнения, необходимо отредактировать строку 20: после знака равенства вписать новую функцию.

Для самоконтроля студенту предлагается отделить корни рассмотренного выше уравнения в математическом пакете Mathcad.

Mathcad – популярная система компьютерной математики, предназначенная для автоматизации решения массовых математических задач в самых различных областях науки, техники и образования.

Задача отделения корней в Mathcad осуществляется с помощью построения таблицы значений функции в найденном интервале $(-R, R)$ с шагом h таким образом:

– в рабочий документ (экран дисплея) вводится функция $F(x)$;

– определяются дискретные значения аргумента $x \in (-R, R)$ с шагом h;

– после ввода с клавиатуры функции появляется таблица значений функции во всех точках интервала $(-R,\ R)$ с шагом *h*.

Пример 2.2.

Отделить корни уравнения

$$3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1 = 0 .$$

Для этого выполняем простую арифметическую операцию: введем функцию *F(x)* и значения *x* в предварительно найденном интервале (-5; 5) с шагом *h*=1 (шаг выбрать произвольно).

$F(x) := 3 \cdot x^4 + 4 \cdot x^3 - 12 \cdot x^2 + 1$

$x := -5, -4 .. 5$

x =	F(x) =
-5	$1.076 \cdot 10^3$
-4	321
-3	28
-2	-31
-1	-12
0	1
1	-4
2	33
3	244
4	833
5	$2.076 \cdot 10^3$

Действительные корни уравнения находятся в интервалах [-3; 2], [-1; 0], [0; 1], [1; 2], т.к. здесь произошла смена знака на концах отрезка.

Для трансцендентных уравнений отделение корней в Mathcad выполняется графически. Строится график и по графику определяются отрезки, в которых находятся точки пересечения заданной функции с осью *OX*.

Пример 2.3.

Дано уравнение $3^x - 9x + 1 = 0$

Введем функцию $f(x) := 3^x - 9x + 1$

В панели Graph щелкнуть по кнопке .

Заполнить маркеры, щелкнуть под рамкой, появится график.

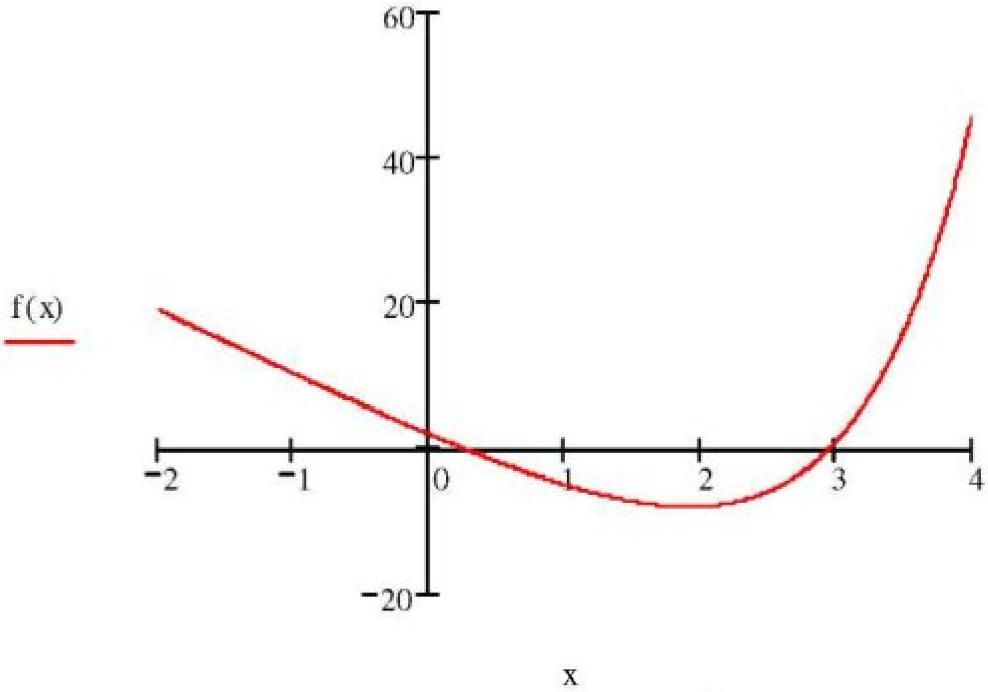


Рисунок 3 – График функции $f(x)$

2.3. Метод половинного деления (метод бисекции)

Это один из простейших методов нахождения корней нелинейного уравнения.

Будем считать, что отрезок $[a,b]$, на котором расположен единственный искомый корень, уже найден.

$x = c$ – это единственный корень на отрезке $[a,b]$, т.е. $c \in [a,b]$.

За начальное приближение принимаем середину этого отрезка:

$$c_0 = \frac{(a+b)}{2}.$$

Исследуем значения функции $F(x)$ на концах отрезков $[a,c_0]$ и $[c_0,b]$, т.е. в точках a, c_0,, b.

Тот из отрезков, на концах которого $F(x)$ принимает значения разных знаков, содержит искомый корень, поэтому его принимаем в качестве нового отрезка $[a_1, b_1]$. Вторую половину отрезка $[a,b]$, на которой знак $F(x)$ не меняется, отбрасываем.

В качестве первого приближения корня уравнения (2.1) принимаем середину нового отрезка $c_1 = \frac{(a_1 + b_1)}{2}$ и т.д. Получим последовательность приближений $\{c_1, c_2, ..., c_k, ...\}$, т.е. k-е приближение вычисляется как

$$c_k = \frac{a_k + b_k}{2}, \tag{2.4}$$

После каждой итерации отрезок, на котором расположен корень, уменьшается вдвое.

Пусть требуется найти приближенное решение x^* с точностью до некоторого заданного малого числа $\varepsilon > 0$:

$$\left| x - x^* \right| < \varepsilon, \tag{2.5}$$

Взяв в качестве приближенного решения k-е приближение корня, $x^* = c_k$, учитывая $x = c$, условие (2.5) можно записать в виде

$$\left| c - c_k \right| < \varepsilon, \tag{2.6}$$

Из (2.4) следует, что условие (2.6) выполнено, если

$$b_k - a_k < 2\varepsilon, \tag{2.7}$$

Итерационный процесс нужно продолжать до тех пор, пока не будет выполнено условие (2.7).

Метод половинного деления всегда сходится, и полученное решение может иметь любую наперед заданную точность. Однако, этот метод не позволяет быстро получить результат.

Итерационный процесс можно завершать тогда, когда значение функции $F(x)$ после k-й итерации станет меньшим по модулю ε, т.е

$$\left| F(c_k) \right| < \varepsilon,$$

Схема алгоритма уточнения одного корня уравнения $F(x) = 0$ на отрезке $[a,b]$ до заданной точности ε методом половинного деления показана на рисунке 4.

Из схемы видно, что, если даже на каком-то этапе $F(c) = 0$, это не приведет к сбою алгоритма.

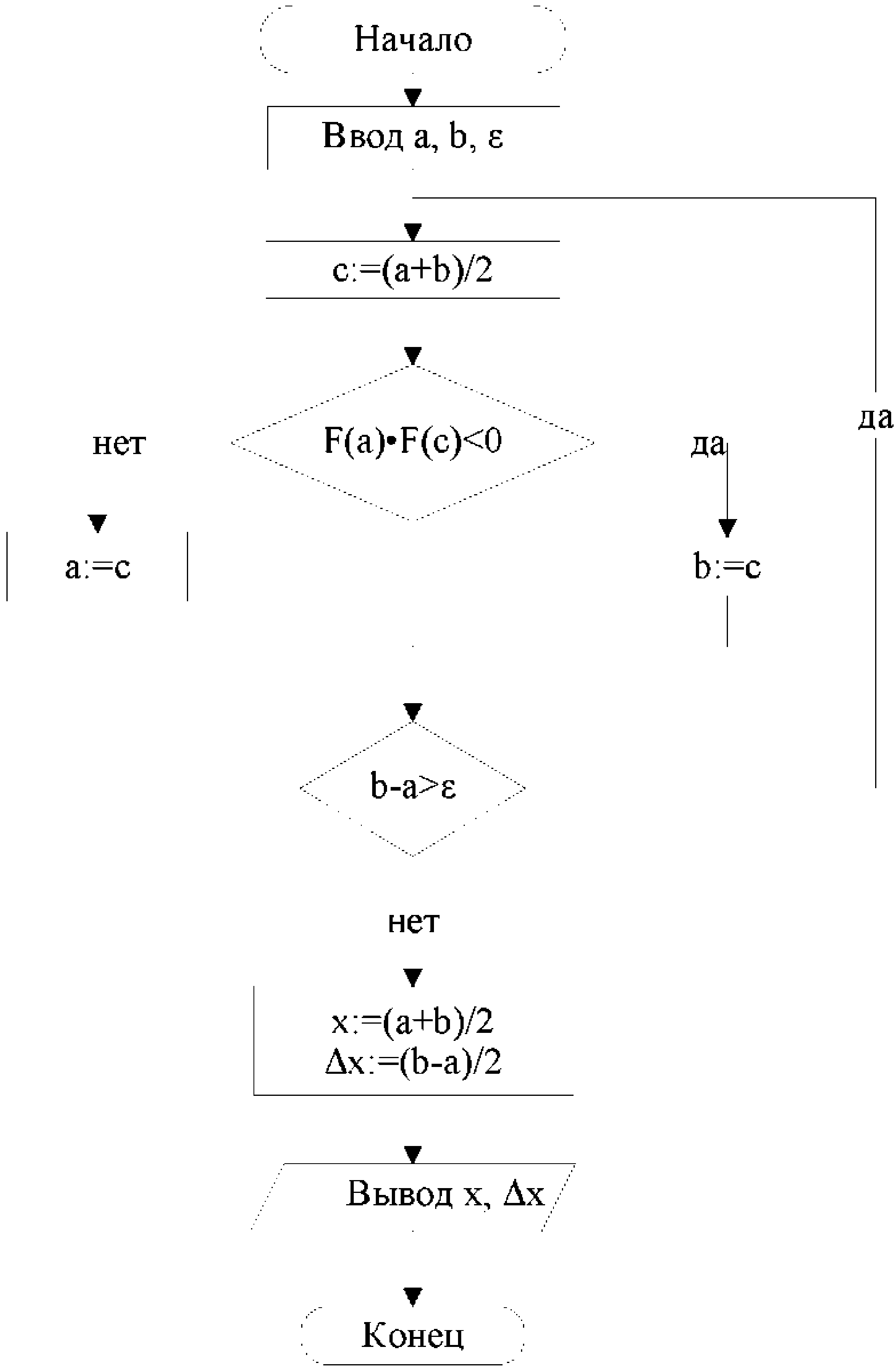


Рисунок 4 – Схема алгоритма метода половинного деления

Пример 2.4.

Уравнение $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1 = 0$ имеет четыре корня на отрезках $[-3; -2]; [-1; 0]; [0; 1]; [1; 2]$ (мы отделили эти корни в разделе 2.2).

Решим это уравнение с точностью до 10^{-4} методом половинного деления на ЭВМ.

В соответствии со схемой алгоритма половинного деления, изображенного на рисунке 3, программа на языке Бейсик будет иметь вид:

```
10 REM половинное деление
20 DEF FNF (X) = 3 * X ^ 4 + 4 * X ^ 3 – 12 * X ^ 2 + 1
30 INPUT A, B, E
40 C = (A + B) / 2
50 IF FNF(A) * FNF(C) < 0 THEN 70
60 A = C: GOTO 80
70 B = C
80 IF B – A > E THEN 40
90 X = (A + B) / 2: D = (B – A) / 2
100 PRINT "X="; X, "D="; D
110 END
RUN
```

где E – заданная точность; D – граница погрешности найденного корня.

$$D = \frac{(b - a)}{2}.$$

Запустив программу для значения $A = -3, B = -2$ (отрезок [-3; -2], $E = 0.0001$, получим ответ:

X=-2.764496

D= 3.051758E–05

Аналогично найдем остальные корни, введя отрезки

$A = -1, B = 0, E = 0.0001$

X= –.278595

D= 3.051758E–05

$A = 0, B = 1, E = 0.00011$

X= .3089294

D= 3.051758E–05

$A = 1, B = 2, E = 0.0001$

X= 1.400848

D= 3.051758E-05

2.4. Метод хорд

Метод хорд или, иначе, метод пропорциональных частей является одним из простейших методов уточнения корня.

Это метод последовательных приближений. Приближения к корню находятся так: если известно предыдущее приближение $x_n\,(n = 0,1,2...)$, то последующее приближение x_{n+1} вычисляется по формуле

$$x_{n+1} = P(x_n), \tag{2.8}$$

где P – некоторое выражение, устанавливающее связь между предыдущим и последующим приближениями.

Начинается процесс с какого-либо числа x_0 из отрезка изоляции корня – *начального приближения*.

Формула (2.8) называется *рекуррентной*. Такая формула позволяет выразить $(n+1)$-й член последовательности через несколько предыдущих его членов. При наличии рекуррентной формулы (2.8) последовательность полностью определяется выбором начального приближения x_0.

Получаемая с помощью рекуррентной формулы последовательность приближений называется *итерационной последовательностью*.

Итерация – неоднократное применение какой-нибудь операции, в данном случае – это вычисления по рекуррентной формуле.

Будем считать, что мы отделили корни уравнения (2.1) $F(x) = 0$, т.е. нашли отрезки, в каждом из которых находится один корень уравнения.

Выберем отрезок $[a, b]$, содержащий искомый корень ξ так, чтобы выполнялись следующие условия:

- значения $F(a)$ и $F(b)$ функции на концах отрезка имеют разные знаки, т.е. $F(a) \cdot F(b) < 0$;

▪ функция $F(x)$ имеет непрерывные производные $F^{'}(x)$ и $F^{''}(x)$, которые сохраняют знак и не обращаются в нуль при всех $x \in [a,b]$.

Пусть выполнены все условия относительно уравнения $F(x)=0$.

Предположим, что производные $F^{'}(x)$ и $F^{''}(x)$ положительны на $[a,b]$. Тогда $F(a)<0,\ F(b)>0$ как видно на рисунке 5.

Построим итерационную последовательность. За начальное приближение x_0 в методе хорд принимается конец отрезка, противоположный c, где c – один из концов отрезка $[a,b]$, удовлетворяющий условию

$$F(c)\cdot F^{''}(c)>0 \Rightarrow c=b .$$

Тогда $x_0 = a$.

Соединим точки $A_0(x_0;F(x_0))$ и $B(b;F(b))$ отрезком (хордой). Абсциссу точки пересечения хорды A_0B с осью Ox возьмем в качестве x_1. Уравнение хорды примет вид:

$$\frac{x-x_0}{b-x_0}=\frac{y-F(x_0)}{F(b)-F(x_0)}.$$

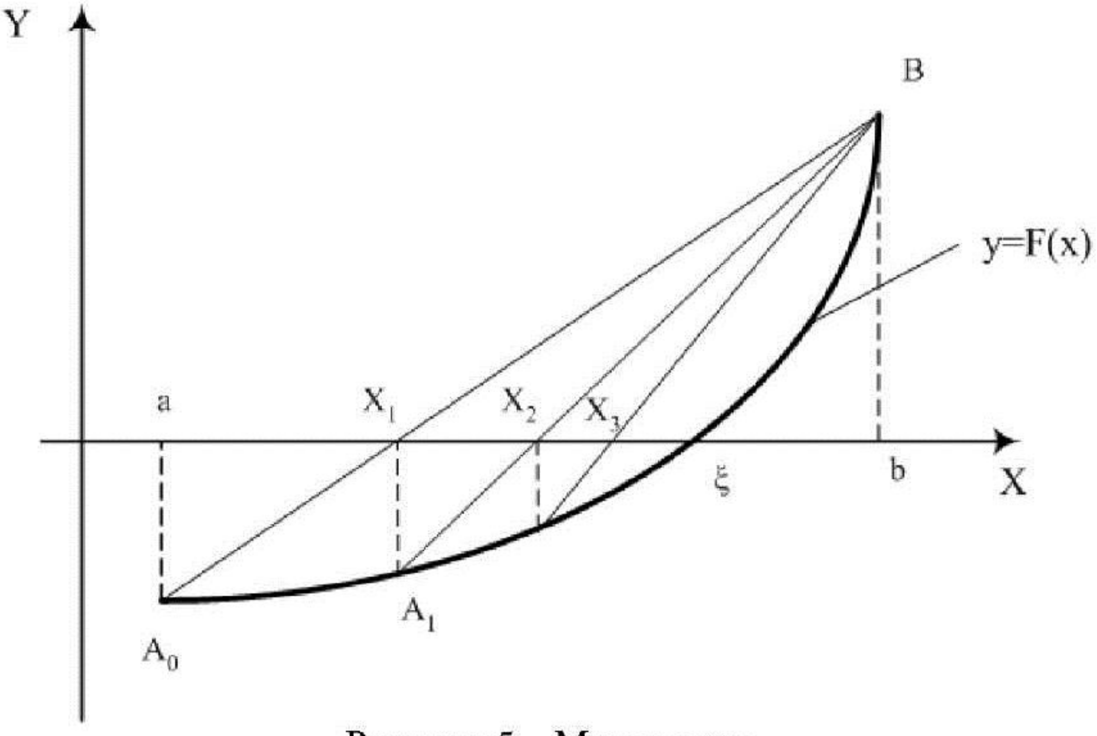


Рисунок 5 – Метод хорд

Приняв в этом уравнении $y=0$, получим $x=x_1$. Следовательно

$$x_1 = x_0 - \frac{b-x_0}{F(b)-F(x_0)} \cdot F(x_0).$$

Далее, напишем уравнение хорды, соединяющей точки $A_1(x_1;F(x_1))$ и $B(b;F(b))$, и при $y=0$ получим $x=x_2$ (абсциссу точки пересечения хорды A_1B с осью Ox):

$$x_2 = x_1 - \frac{b-x_1}{F(b)-F(x_1)} \cdot F(x_1).$$

Продолжая решение подобным образом, получим итерационную последовательность, вычисляемую по рекуррентной формуле

$$x_{n+1} = x_n - \frac{b-x_n}{F(b)-F(x_n)}, \ (n=0,1,2,...), \qquad (2.9)$$

где в качестве x_0 выбран левый конец a отрезка $[a,b]$, а правый конец этого отрезка остается неподвижным.

Пример 2.5.

Рассмотрим приведенное ранее уравнение

$$3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1 = 0.$$

Мы отделили корни (см. раздел 2.2) и получили отрезки $[-3;-2]$; $[-1;0]$; $[0;1]$; $[1;2]$.

Возьмем отрезок $[1;2]$. Найдем значения функции на концах отрезка.

$$F(1)=-4,\ F(2)=33, F(1)\cdot F(2)=-4\cdot 33=-132<0.$$

Следовательно, на отрезке $[1;2]$ имеется корень.

Проверим выполнение условий.

Найдем производные функции

$$F'(x)=12x^3+12x^2-12x,$$

$$F''(x)=36x^2+24x-12.$$

$F'(x)$ и $F''(x)$ непрерывны на отрезке $[1;2]$.

$$F'(x)=0 \Rightarrow 12x^3+12x^2-12x=0,$$
$$12x\left(x^2+x-1\right)=0,$$
$$x_1=0,\ x^2+x-1=0 \Rightarrow x_{2,3}=-0{,}5\pm\sqrt{0{,}25+1}=-0{,}5\pm1{,}2,$$
$$x_2=0{,}7,$$
$$x_3=-1{,}7.$$

Точки x_1, x_2, x_3 не попадают в отрезок $[1;2] \Rightarrow F'(x)$ не обращается в нуль на данном отрезке.

$$F''(x)=0 \Rightarrow 36x^2+24x-12=0,$$
$$3x^2+2x-1=0,$$
$$x_{4,5}=\frac{-2\pm\sqrt{4+13}}{6}=[0.35;4.12].$$

$F''(x)$ тоже не обращается в нуль на отрезке $[1;2]$.

$$F'(1)=12>0,\ F'(2)=120>0.$$
$$F''(1)=48>0,\ F''(2)=180>0.$$

Производные $F'(x)$ и $F''(x)$ сохраняют знак на отрезке $[1;2]$.

Все условия выполнены.

Выберем один из концов отрезка и примем его за начальное приближение x_0.

$$a=1 \qquad \left.\begin{array}{l} F(1)=-4<0 \\ F''(1)=48>0 \end{array}\right\} \qquad \Rightarrow F(1)\cdot F''(1)<0.$$

Проверим второй конец отрезка

$$b=2 \qquad \left.\begin{array}{l} F(2)=33>0 \\ F''(2)=180>0 \end{array}\right\} \qquad \Rightarrow F(2)\cdot F''(2)>0.$$

За начальное приближение x_0 берем конец отрезка $a \Rightarrow x_0=1$.

Находим первое приближение x_1 с четырьмя значащими цифрами

$$x_1=x_0-\frac{b-x_0}{F(b)-F(x_0)}\cdot F(x_0);$$
$$x_1=1-\frac{2-1}{F(2)-F(1)}\cdot F(1)=1-\frac{1}{33+4}\cdot(-4)=1{,}108.$$

Значащими цифрами числа называются все цифры, кроме нулей, стоящие левее первой отличной от нуля цифры.

Метод хорд позволяет решать уравнения при меньшем числе итераций по сравнению с методом половинного деления.

Контрольные вопросы.

1. Что означает понятие – «корень вычислен с заданной точностью»?
2. Какие задачи решаются при нахождении корней уравнения?
3. Что значит отделить корни уравнения?
4. Как применяется графический метод отделения корней?
5. Указать свойства функции.

Оценка погрешностей приближений

Оценку точности последовательных приближений дает следующая теорема:

Пусть корень ξ уравнения (2.1) отделен на отрезке $[a;b]$, и все члены некоторой последовательности $\{x_n\}$ приближений к ξ расположены в этом отрезке. Если производная $F'(x)$ конечна на $[a;b]$ и существует такое число $m>0$, что $|F'(x)|\geq m$ для всех $x\in[a;b]$, то имеет место неравенство:

$$|\xi - x_n| \leq \frac{|F(x_n)|}{m}, \quad (n=0,1,2,...),$$

т.е. абсолютная погрешность будет $|\xi - x_n| = \Delta x_n$ или

$$\Delta x_n = \frac{|F(x_n)|}{m}, \qquad (2.10)$$

где $m = \min\limits_{[a,b]}|F'(x)|$, если $F'(x)$ непрерывна и отлична от нуля на $[a;b]$.

Второй способ определения погрешности: Пусть первая и вторая производные функции $F(x)$ уравнения (2.1) непрерывны и сохраняют постоянный знак на отрезке $[a;b]$ изоляции корня ξ, $F(a)$ и $F(b)$ имеют разные знаки, а числа m и M такие, что

$$0 < m \leq |F'(x)| \leq M, \; x\in[a;b].$$

Тогда погрешности приближений к ξ оцениваются формулой

$$\Delta x_n \le \frac{M-m}{m}\left|x_n - x_{n-1}\right|,\ (n=1,2,...),$$

где $M = \max\limits_{[a,b]}\left|F'(x)\right|$.

Если задана абсолютная погрешность $\varepsilon > 0$, то процесс останавливается при выполнении одного из неравенств:

$$\frac{\left|F(x_n)\right|}{m} \le \varepsilon,$$

$$\frac{M-m}{m}\left|x_n - x_{n-1}\right| \le \varepsilon.$$

Оценим обоими способами погрешность приближения в нашем примере:

$F(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1,$

$x_1 = 1{,}108,$

$F'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 12x,$

$\xi \in [1;2],$

$F'(1) = 12 + 12 - 12 = 12,$

$F'(2) = 12 \cdot 8 + 12 \cdot 4 - 12 \cdot 2 = 96 + 48 - 24 = 120,$

$m = \min\limits_{[1,2]}\left|F'(x)\right| = 12,$

$M = \max\limits_{[1,2]}\left|F'(x)\right| = 120,$

$$\Delta x_1 = \frac{\left|F(1{,}108)\right|}{12} = 0{,}314 \quad \text{или}$$

$$\Delta x_1 = \frac{120-12}{12}\left|1{,}108 - 1\right| = 0{,}972.$$

Оценка по первому способу оказалась точнее, следовательно, выбираем $\Delta x_1 = 0{,}314$

2.5. Метод касательных (метод Ньютона)

Метод касательных называется также методом Ньютона. Будем считать, что функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и имеет на концах отрезка разные знаки, т.е. $F(a)\cdot F(b)<0$, как показано на рисунке 6.

В качестве начального приближения x_0 в методе касательных выбирается тот конец отрезка $[a;b]$, в котором функция $F(x)$ и ее вторая производная $F''(x)$ имеют одинаковые по знаку значения, т.е.

$$F(a)\cdot F''(a)>0 \text{ или } F(b)\cdot F''(b)>0.$$

Геометрический смысл метода заключается в том, что приближения по нему равны абсциссам точек пересечения оси Ox и касательных к графику функции $y=F(x)$.

Примем за начальное приближение x_0 конец отрезка b, т.е. $x_0=b$ и проведем касательную к графику функции в точке $B_0(x_0;F(x_0))$.

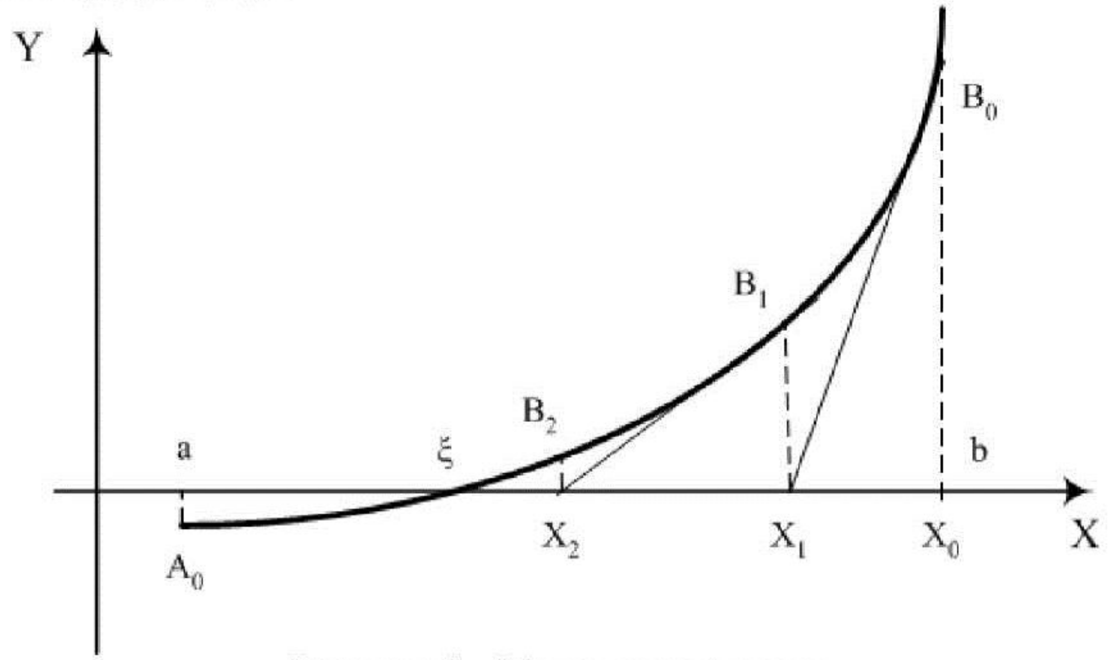


Рисунок 6 – Метод касательных

Уравнение касательной будет иметь вид

$$y-F(x)=F'(x_0)\cdot(x-x_0).$$

Касательная пересечет ось Ox при $y=0$. Подставив $y=0$ в уравнение, получим абсциссу точки пересечения

$$x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)}.$$

Записав уравнение касательной к графику в точке $B_1(x_1; F(x_1))$, при $y=0$, получим

$$x_2 = x_1 - \frac{F(x_1)}{F'(x_1)} \quad \text{и т.д.}$$

Каждый раз абсциссы точек пересечения касательных с осью Ox будут вычисляться по формуле

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}, \ (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{2.11}$$

причем всегда

$$a < \xi \le x_{n+1} < x_n \le b,$$

где ξ - точный корень уравнения $F(x) = 0$.

Определим оценку погрешностей приближений x_n.

Пусть положительные числа m и M таковы, что $\left|F'(x)\right| \ge m_1$, $\left|F''(x)\right| \le M_2$, $x \in [a;b]$.

Например $m = \min\limits_{[a,b]}\left|F'(x)\right|$,

$$M = \max_{[a,b]}\left|F''(x)\right|.$$

Тогда погрешности приближений к ξ, найденных методом касательных, вычисляются по формуле

$$\left|\xi - x_{n+1}\right| \le \frac{M}{2m}(x_{n+1} - x_n)^2, \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

или

$$\Delta x_{n+1} = \frac{M}{2m}(x_{n+1} - x_n)^2, \tag{2.12}$$

Если задана абсолютная погрешность $\varepsilon > 0$, то процесс останавливается при выполнении неравенства

$$\frac{M}{2m}(x_{n+1} - x_n)^2 \le \varepsilon > 0.$$

Алгоритм метода касательных.

Шаг 1. $N = 0$.

Шаг 2. Если $F(a) \cdot F''(a) < 0$, то идти на шаг 4.

Шаг 3. $x_n = a$; идти на шаг 5.

Шаг 4. $x_n = b$.

Шаг 5. Вычислить x_{n+1} и Δx_{n+1} по формулам (2.11) и (2.12).

Шаг 7. $n = n + 1$, идти на шаг 5.

Пример 2.6.

Вычислить методом касательных один из корней уравнения с точностью до 0,05.

$$3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1 = 0$$

Решение: Мы уже определили корни уравнения, т.е. нашли отрезки, в которых находится по одному корню.

Возьмем отрезок $[1;2]$.

Вычислим значение функции на концах отрезка

$$f(1) = -5,$$

$$f(2) = 33.$$

Найдем производные

$$F'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x,$$

$$F''(x) = 36x^2 + 24x - 24.$$

$$F'(1) = 0, \qquad F''(1) = 36;$$

$$F'(2) = 96, \qquad F''(2) = 190.$$

Первая и вторая производная сохраняют свой знак на отрезке $[1;2]$, т.е.

$$F'(1) = 0, \qquad F'(2) > 0;$$

$$F''(1) > 0, \qquad F''(2) > 0.$$

За начальное приближение x_0 примем отрезок $b = 2$, т.к. $F(2) = 33$, $F''(2) = 190$, т.е. $F(2) \cdot F''(2) > 0$.

Следовательно $x_0 = 2$.

Вычислим первое приближение по формуле

$$x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)};$$

$$x_1 = 2 - \frac{F(2)}{F^{'}(2)} = 2 - \frac{33}{96} 2 - 0{,}344 = 1{,}656.$$

Вычислим числа m и M :

$$m = \min_{[1,2]} \left| f^{'}(x) \right|$$

$$m = 0.$$

Сузим отрезок $[1;2]$, получим отрезки $[1;1.5]$, $[1.5;2]$.

Возьмем отрезок $[1.5;2]$ и найдем m в этом отрезке:

$$F^{'}(1{,}5) = 31{,}5;$$

$$m = \min_{[1.5;2]} \left| F^{'}(x) \right| = 31{,}5;$$

$$M = \max_{[1;2]} \left| F^{''}(x) \right| = 190.$$

Оценим погрешность по формуле

$$\Delta x_1 = \frac{M}{2m} (x_1 - x_0)^2;$$

$$\Delta x_1 = \frac{190}{63} (2 - 1{,}656)^2 = 0{,}357 .$$

Получили Δx_1 больше заданной степени точности $\varepsilon = 0{,}05$, т.е. $\Delta x_1 = 0{,}357 > 0{,}05$.

Продолжим процесс нахождения приближений

$$x_2 = 1{,}656 - \frac{F(1{,}656)}{F^{'}(1{,}656)} = 1{,}656 - \frac{8{,}82}{47{,}663} = 1{,}47 .$$

Оценим погрешность

$$\Delta x_2 = \frac{190}{63} (1{,}656 - 1{,}47)^2 = 0{,}104 > 0{,}05;$$

$$x_3 = 1{,}47 - \frac{F(1{,}47)}{F^{'}(1{,}47)} = 1{,}47 - \frac{1{,}784}{28{,}77} = 1{,}408;$$

$$\Delta x_3 = \frac{190}{63} (1{,}47 - 1{,}408)^2 = 0{,}012 < 0{,}05.$$

Следовательно, искомый корень

$$\xi = x_3 \pm \Delta x_3;$$
$$\xi = 1{,}408 \pm 0{,}012.$$

2.6. Метод простой итерации

Этот метод является одним из наиболее удобных и эффективных для приближенного решения уравнений Он предполагает уточнение корня с использованием итерационной последовательности.

Для реализации метода простой итерации необходимо исходное нелинейное уравнение (2.1) преобразовать в эквивалентное ему уравнение вида

$$x = f(x) \tag{2.13}$$

с корнем ξ, отделенным на отрезке $[a;b]$, и построить последовательность

$$x_{n+1} = f(x_n), \ (n = 0,1,2,...). \tag{2.14}$$

Функция $f(x)$ предполагается непрерывной на этом отрезке.

Вычисления по формуле (2.14) геометрически будут выглядеть, как показано на рисунке 7.

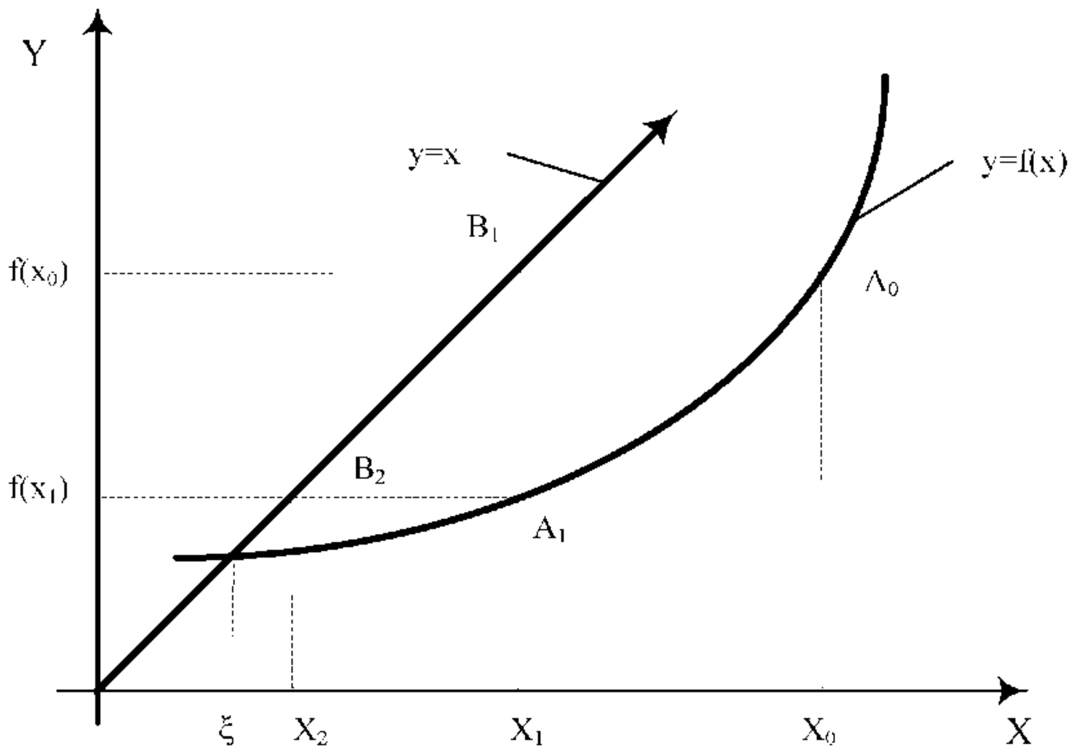


Рисунок 7 – Метод простой итерации

Построим графики функций левой и правой частей уравнения $x = f(x)$, т.е. линии $y = x$ и $y = f(x)$.

Они должны пересекаться в точке с абсциссой ξ. Взяв некоторое число x_0, вычислим $f(x_0)$ и получим на кривой $y = f(x)$ точку A_0. Линия проекции этой точки на ось Oy пересечет прямую $y = x$ в точке B_1. Проекция B_1 на ось Ox дает x_1 $(x_1 = f(x_0))$.

Вычислив $f(x_1)$ и спроецировав точку A_1 графика функции $f(x)$ на ось Oy, найдем точку B_2 на прямой $y = x$ и ее проекцию x_2 на ось Ox $(x_2 = f(x_1))$ и т.д.

Достаточное условие сходимости итерационной последовательности дает следующая теорема.

Теорема: Пусть уравнение $x = f(x)$ имеет единственный корень на отрезке $[a;b]$ и выполнены условия:

$f(x)$ определена и дифференцируема на отрезке $[a;b]$; (2.15)

$f(x) \in [a;b]$ для всех $x \in [a;b]$; (2.16)

существует такое вещественное число g,

что $|f'(x)| \le g < 1$ для всех $x \in [a;b]$ (2.17)

Тогда итерационная последовательность $x_{n+1} = f(x_n)$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ сходится к корню ξ при любом выборе начального приближения $x_0 \in [a;b]$.

Чем меньше число g, тем быстрее сходится последовательность приближений.

Метод простой итерации является *самоисправляющимся.*

Если какое-то приближение x_n найдено с ошибкой, но при этом ошибка не вывела его из отрезка $[a;b]$, то последующие члены последовательности все равно будут приближаться к корню.

Если на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ дифференцируема и $|f'(x)| \ge 1$ при всех $x \in [a;b]$, то итерационная последовательность $x_{n+1} = f(x_n)$ не сходится к корню $\xi \in [a;b]$ ни при каком $x_0 \ne \xi$ из этого отрезка.

Но, выйдя из отрезка $[a;b]$, (x_n) может сходиться к другому корню этого же уравнения.

Достаточное условие не является необходимым. Это означает, что итерационная последовательность может оказаться сходящейся и при невыполнении этих условий.

Погрешность метода итераций на каждом шаге оценивается по формуле

$$\Delta x_{n+1} = \frac{q}{1-q}\left|x_{n+1} - x_n\right|, \qquad (2.18)$$

Следовательно, если уравнение $x = f(x)$ решается методом итераций с точностью до ε, то вычисления прекращаются при

$$\Delta x_{n+1} =\leq \varepsilon ,$$

т.е.

$$\frac{q}{1-q}\left|x_{n+1} - x_n\right| \leq \varepsilon ,$$

откуда

$$\left|x_{n+1} - x_n\right| \leq \frac{\varepsilon(1-q)}{q} .$$

Преобразование уравнения к итерационному виду.

Уравнение $F(x)=0$ может быть приведено к виду $x = f(x)$ несколькими способами, при этом для функции $f(x)$ должны выполняться условия (2.15), (2.16), (2.17).

Пример 2.7:

Рассмотрим уравнение $x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$, представим его в виде $x = f(x)$ разными способами.

а) $x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$,

$6x = 2 - x^3 + 3x^2$,

$$x = \frac{2 - x^3 + 3x^2}{6};$$

б) $x^3 - 3x^2 + 5x + x - 2 = 0$,

$x = 2 - x^3 + 3x^2 - 5x$;

в) $x = \sqrt[3]{3x^2 - 6x + 2}$.

Определим границы нахождения всех корней уравнения:

$$A = \max\{|-3|;|6|;|-2|\} = 6\,,\ a_0 = 1\,,$$

$$R = 1 + \frac{6}{1} = 7\,.$$

Следовательно, все корни уравнения находятся в интервале $R = (-7;7)$.

Отделим корни уравнения, т.е. найдем отрезки нахождения каждого корня.

Эта операция выполняется в пакете Mathcad (выполнение см. на примере 2.2).

$f(x) := x^3 - 3 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 2$

$x := -7, -6 .. 7$

x =	f(x) =
-7	-534
-6	-362
-5	-232
-4	-138
-3	-74
-2	-34
-1	-12
0	-2
1	2
2	6
3	16
4	38
5	78
6	142
7	236

Имеется один действительный корень $\xi \in [0;1]$.

Возьмем эквивалентное уравнение:

а) $x = \dfrac{2 - x^3 + 3x^2}{6}$.

Проверим условия (2.15), (2.16), (2.17).

$f(x)=\dfrac{2-x^3+3x^2}{6}$ определена и дифференцируема на отрезке $[0;1]$.

$$f(0)=\frac{1}{3}\in[0;1];$$

$$f(1)=\frac{2}{3}\in[0;1].$$

Найдем

$$f^{`}(x)=\frac{-3x^2+6x}{6}=\frac{2x-x^2}{2};$$

$$f^{`}(0)=0;$$

$$f^{`}(1)=\frac{1}{2}.$$

Найдем $m=\min\limits_{[0;1]}\left|f^{`}(x)\right|=0\Rightarrow q=0$, т.е. если нашлось такое число $0\le q<1$, значит, итерационная последовательность

$$x_{n+1}=\frac{2-x_n^3+3x_n^2}{6},\ \ (n=0,1,2,...)$$

сходится к корню при любом начальном приближении $x_0\in[0;1]$.

Например: Возьмем $x_0=0$.

Получим приближение

$$x_1=\frac{2-0^3+3\cdot 0^2}{6}=\frac{1}{3}=0{,}3334,$$

$$\Delta x_1=\left|0-0{,}3334\right|=0{,}3334;$$

$$x_2=\frac{2-\left(\frac{1}{3}\right)^3+3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2}{6}=0{,}3828;$$

$$\Delta x_2=\left|0{,}3334-0{,}3828\right|=0{,}0494;$$

$$x_3=0{,}3973;$$

$$\Delta x_3=\left|0{,}3828-0{,}3973\right|=0{,}0145.$$

Рассмотрим эквивалентные уравнения б) и в).

б) $x=2-x^3+3x^2-5x$.

Функция определена и дифференцируема на отрезке $[0;1]$.

$$f(0)=2\notin[0;1];$$

$$f(1)=-1\notin[0;1].$$

Условие (2.16) не выполняется, следовательно, применять метод простой итерации к уравнению б) нельзя.

в) $x=\sqrt[3]{3x^2-6x+2}$.

$$f(0)=\sqrt[3]{2}\approx 1{,}26\notin[0;1]$$

$$f(1)=\sqrt[3]{-1}=-1\notin[0;1]$$

К уравнению в) применять метод тоже нельзя.

Вывод:

Способ 1: Пусть уравнение $F(x)=0$ записано в виде $x=f(x)$.

При исследовании функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ оказалось, что для всех $x\in[a;b]$

$$\left|f'(x)\right|>1.$$

Тогда вместо функции $y=f(x)$ будем рассматривать функцию $x=g(x)$, обратную для $f(x)$.

Теперь будем рассматривать уравнение $y=g(y)$ (или $x=g(x)$).

По свойству производных обратных функций будет

$$\left|g'(x)\right|=\frac{1}{\left|f'(x)\right|}<1.$$

Значит, условие существования вещественного числа q , такого, что

$$\left|f'(x)\right|\le q<1$$

для всех $x\in[a;b]$, выполнено.

Способ 2: Пусть дано уравнение $F(x)=0$. На выбранном отрезке $[a;b]$ оно имеет единственный корень.

Введем отрезок $[c;d]=[a-h;b+h]$, где h – длина отрезка.

На этом отрезке имеем:

- $F'(x)$ - непрерывна;
- $F'(x)=\mathrm{const}$;

▪ первая производная принимает значения одного и того же знака, т.е. $F'(c) \cdot F'(d) > 0$

Пусть $m = \min\limits_{[c;d]} F'(x)$, $M = \max\limits_{[c;d]} F'(x)$, $k = \dfrac{1}{M}$, $q = 1 - \dfrac{m}{M}$ следовательно $0 \le q < 1$.

Тогда уравнение (2.1) можно заменить эквивалентным уравнением

$$x = x - k \cdot F(x) \text{, т.е. } g(x) = x - k \cdot F(x)$$

и итерационная последовательность

$$x_{n+1} = g(x_n), \ (n = 0, 1, 2, ...)$$

будет сходящейся при любом выборе начального приближения $x_0 \in [a;b]$.

Способ 3: Пусть при $x \in [a;b]$

$$m = \min_{[c;d]} F'(x) > 0;$$

$$M = \max_{[c;d]} F'(x) > 0;$$

$$m \ne M.$$

Тогда по формуле $q = \dfrac{m - M}{M + m}$ можно принять:

$$g(x) = x - \frac{2}{M + m} \cdot F(x) \text{ при } F'(x) > 0;$$

$$g(x) = x + \frac{2}{M + m} \cdot F(x) \text{ при } F'(x) < 0.$$

Значит, последовательность $x_{n+1} = g(x_n)$ преобразуется к виду

$$x_{n+1} = x_n \pm \frac{2}{M + m} \cdot F(x_n),$$

а оценка погрешности по формуле (2.18) будет

$$\Delta x_{n+1} = \frac{M - m}{2m} \cdot |x_{n+1} - x_n|.$$

Схема алгоритма решения уравнения $x = f(x)$ методом итераций приведена на рисунке 8, где $a = |x_{n+1} - x_n|$.

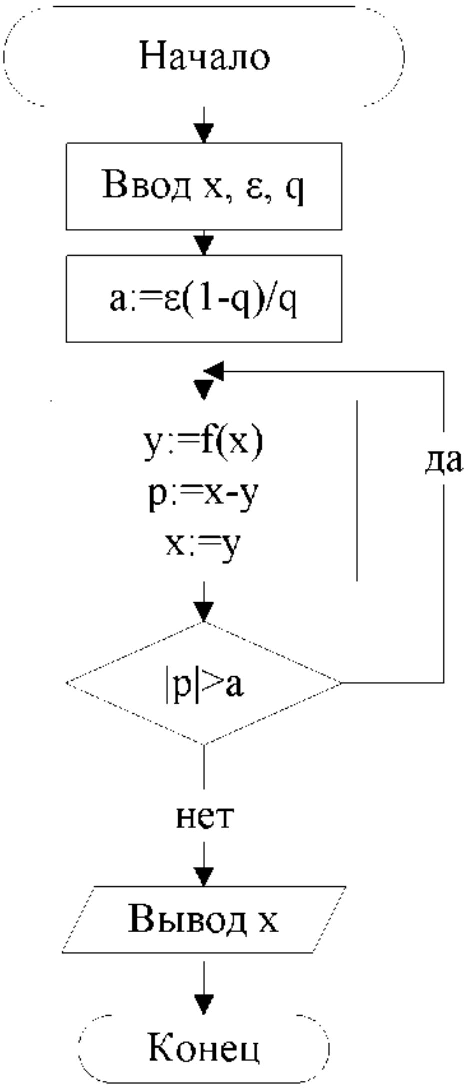


Рисунок 8 – Схема алгоритма решения уравнений методом итераций

Программа на языке Бейсик для решения уравнений методом итераций будет

```
10 REM итерация
20 INPUT X, E, Q
30 A = E * (1 - Q) / Q
40 Y = X ^ 3 - 3 * X ^ 2 + 6 * X - 2
50 P = X - Y: X = Y
60 PRINT "X="; X
70 IF ABS(P) > A THEN 40
80 END
   RUN
```

При $x = 0.5$, $E = 0.00001$, $Q = 0.5$.

2.7. Практическая схема решения уравнений с одной переменной на ЭВМ

Процесс отделения корней и их уточнения можно совместить в одной программе.

В этом случае используется метод половинного деления, т.к. он не требует никаких предварительных исследований условий сходимости (в отличие от метода простой итерации).

```
10 REM Решение уравнений
20 DEF FNF (X) = 0,2*X^3-cosX
30 INPUT A, B, H, E: K = 0
40 X1 = A: X2 = X1 + H: Y1 = FNF(X2)
50 IF X2 <= B THEN Y2 = FNF(X2) ELSE 150
60 IF Y1 * Y2 <= 0 THEN K = K + 1 ELSE 90
70 GOSUB 100
80 PRINT "X["; K; "]="; X; : PRINT FNF(X)
90 X1 = X2: X2 = X1 + H: Y1 = Y2: GOTO 50
100 REM подпрограмма
110 C = (X1 + X2) / 2
120 IF FNF(X1) * FNF(C) < 0 THEN X2 = C ELSE X1 = C
130 IF ABS(X1 - X2) < E OR ABS(FNF(X2) - FNF(X1)) <= E
    THEN X = (X1 + X2) / 2 ELSE 110
140 RETURN
150 END
    RUN
```

2.8. Компьютерные технологии решения уравнений

Компьютерная технология решения задач определяется:

- алгоритмом решения задачи;
- набором функций и команд системы компьютерной алгебры.

Основные особенности:

- высокая производительность;
- возможность решения задач больших размерностей;
- точность результатов.

Решение состоит из следующих математических процедур:

- определение области изоляции каждого из вещественных корней уравнения;
- выбор встроенной функции решения уравнения;
- решение уравнения;
- проверка.

Система Mathcad имеет несколько встроенных функций для решения уравнений. Для определения корней алгебраических и трансцендентных уравнений существуют функции: *root, Find, polyroots*.

2.8.1. Решение уравнений с помощью функции root

Функция *root* осуществляет решение алгебраических и трансцендентных уравнений, определяя вещественные корни.

Может использоваться в двух вариантах:

1) *root*(выражение, имя_переменной), т.е.

$$root(f(x), x),$$

где $f(x)$ – решаемое уравнение $f(x)=0$; x – искомое неизвестное.

Перед применением функции *root* переменной необходимо присвоить начальное приближение.

x:=x0

z:=root(f(x),x)

z=

Здесь реализуется метод Ньютона и секущих.

2) *root(выражение, имя_переменной, отрезок)*, т.е.

$$z:=root(f(x), x, a, b)$$

где a, b – отрезок изоляции корня.

Начальное приближение x не задается.

Здесь реализуется метод половинного деления.

Пример 2.8.

Рассмотрим уравнение

$$3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1 = 0 .$$

Воспользуемся первым вариантом решения

Зададим начальное значение переменной

$x := 0$

Введем функцию

$F(x) := 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1$

Вычислим действительные корни:

$x1 := \mathrm{root}(F(x), x)$

$x1 = 0.309$ ·

Вычислим другие корни:

$$x2 := \mathrm{root}\left(\frac{F(x)}{x - x1}, x\right)$$

$x2 = -0.279$

$$x3 := \mathrm{root}\left[\frac{F(x)}{(x - x1)(x - x2)}, x\right]$$

$x3 = 1.401$

2.8.2. Определение корней многочлена

Поиск корней обычного полинома *P(x)* осуществляет функция *polyroots*.

Она имеет вид *polyroots(v)*, где *v* – вектор коэффициентов многочлена, начиная с младшей степени.

Функция находит все вещественные и комплексные корни.

Технология выполнения:

- ввести символ присвоения имени вектора *V* = ;
- нажать клавиши <Ctrl> + <M>. В появившемся окне Insert Matrix в полях *строки и столбцы* задать число строк и столбцов матрицы. Столбцов – 1, строк – *(n*+1*)*, где *n* – степень многочлена.

Щелкнуть ОК.

- заполнить маркеры ввода коэффициентами полинома, в первой строке пишется коэффициент при нулевой степени;
- ввести функцию *polyroots*;
- вычислить (нажать < = >).

Пример 2.9.

Рассмотрим уравнение $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1 = 0$.

Введем вектор коэффициентов

$$V := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -12 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Введем формулу решения

$x := \text{polyroots}(V)$.

Решим (нажимаем < = >)

$$x = \begin{pmatrix} -2.764 \\ -0.279 \\ 0.309 \\ 1.401 \end{pmatrix}.$$

2.8.3 Решение уравнений с помощью функции Find

Функция *Find* предназначена для решения систем уравнений. Нахождение корней уравнения – частный случай решения системы, состоящей из одного уравнения.

Реализует метод итераций.

Блок решения имеет следующую структуру:

- задание начального приближения корня из области его изоляции;
- ввод с клавиатуры слова *Given*;
- ввод уравнения;
- ввод функции *Find(x)*;
- нажать <=>.

Пример 2.10.

Решить уравнение

$$2^x + e^{-x} - 5x + 1 = 0.$$

Решение:

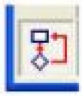
$x := 0$

Given

$2^x + e^{-x} - 5\cdot x + 1 = 0$ (Знак тождества получаем нажатием одновременно двух клавиш <Ctrl> + < = >.

$\text{Find}(x) = 0.614$

2.8.4. Программа решения уравнений методом Ньютона

Традиционное программирование в Mathcad осуществляется при помощи панели инструментов *Programming* (программирование).С помощью этой панели вставляем в рабочий документ программную конструкцию (*Add Line* (добавить линию)). Кнопка  *Programming Palette* (панель программирования) находится на панели Math.

Программа решения уравнения $F(x)=0$ с погрешностью ε методом Ньютона.

$$\mathrm{newton}(f, df, xold, \varepsilon) := \left| \begin{array}{l} \blacksquare \\ \text{while } \blacksquare \\ \quad \left| \begin{array}{l} \blacksquare \leftarrow \blacksquare \\ \blacksquare \leftarrow \blacksquare \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Пример 2.11.

Решить уравнение

$$2^{-x} = 10 - 0{,}5x^2 .$$

Введем с клавиатуры

newton(f, df, xold, ε):=x

Выполняем программу с помощью панели инструментов *Programming ->Add Line*. Заполним пустые позиции (с помощью клавиатуры)

$$\mathrm{newton}(f, df, xold, \varepsilon) := \left| \begin{array}{l} xnew \leftarrow xold - \dfrac{f(xold)}{df(xold)} \\ \text{while } |xnew - xold| > \varepsilon \\ \quad \left| \begin{array}{l} xold \leftarrow xnew \\ xnew \leftarrow xold - \dfrac{f(xold)}{df(xold)} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Введем функцию

$$f(x) := 2^{-x} - 10 + 0.5x^2$$

С помощью панели Math, значок  открыть панель *Calculas*

, кнопкой  введем дифференциал функции

$$df(x) := \frac{d}{dx} f(x)$$

Решаем

$newton(f, df, 0, 0.001) = -2.68$

Находим погрешность

$f(newton(f, df, 0, 0.001)) = 5.613 \times 10^{-13}$

2.8.5. Решение уравнений в символьном виде

Технология решения:

- ввести уравнение $f(x)=0$ (=0 не вводить);
- выделить неизвестное двойным щелчком мыши;
- найти пункт в главном меню *Symbolics* → *Varyable*→*Solve* (символика→переменная→решить).

Пример 2.12.

Ввести выражение

$$x^5 - 21x^2 + 55$$

Найти встроенную функцию *solve*, щелкнуть.

В пустой маркер ввести переменную (в данном случае x).

Щелкнуть за рамкой

$$x^5 - 21x^2 + 55 \text{ solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} -1.50176734735378977751 \\ -1.296904120405446029 - 2.637664517490807346i \\ -1.296904120405446029 + 2.637664517490807346i \\ 2.047787794082340916 - .2139477110797148432i \\ 2.047787794082340916 + .2139477110797148432i \end{pmatrix}$$

Но этот метод часто выдаст не все вещественные корни.

2.9. Лабораторная работа № 1

Тема: Решение уравнений с одной переменной.

Задание 1. Отделить корни заданного уравнения с помощью программы. Это же задание выполнить в Mathcad графическим методом или построив таблицу значений.

Задание 2. Вычислить один корень заданного уравнения одним из следующих методов с точностью $\varepsilon = 0{,}05$:

- метод хорд;

- метод Ньютона;
- метод простой итерации.

Задание 3. Вычислить корни заданного уравнения в среде математического пакета Mathcad, выбрав встроенную функцию (*root, find, polyroots*) применительно к заданному уравнению.

Задание 4. Найти корни методом Ньютона в Mathcad (с помощью панели *Programming*).

Решить в символьном виде.

Сравнить полученные результаты.

Варианты заданий

N	Уравнения	
	алгебраические	трансцендентные
1.	$x^3 - 10x + 2 = 0$	$5\cos x + x = 0$
2.	$x^5 - 7x + 1 = 0$	$8\cos x - x - 6 = 0$
3.	$2x^3 - 3x^2 - 12x - 5 = 0$	$\frac{e^x}{2} - (x-1)^2 = 0$
4.	$3x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 10 = 0$	$e^{-6x} + 3x^2 - 18 = 0$
5.	$x^5 - 6x^2 + 1 = 0$	$3^x - 9x + 1 = 0$
6.	$1{,}2x^4 + 2x^3 - 24{,}1 = 13x^2 + 14{,}2x$	$\sin(x+1) = 0{,}5x$
7.	$2x^3 - 6x^2 - 7x - 2 = 0$	$\ln x + (x+1)^3 = 0$
8.	$x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 17 = 0$	$arctg(x-2) + x = 0$
9.	$3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 2 = 0$	$4\cos x - x = 0$
10.	$x^5 - 6x + 2 = 0$	$x - \ln(7-4x) = 0$
11.	$2x^3 - 9x^2 - 60x + 1 = 0$	$\sqrt{4x+7} = 3\cos x$
12.	$x^4 - x - 1 = 0$	$2^x + e^{-x} - 5x + 1 = 0$
13.	$3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1 = 0$	$x^2 - 20\sin x = 0$
14.	$3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 5 = 0$	$e^{-2x} + \frac{3}{x} - 1 = 0$
15.	$2x^3 - 3x^2 - 60x + 1 = 0$	$3\sin x - x - 0{,}2 = 0$

Пояснения к выполнению лабораторной работы 1.

При выполнении *задания 1* отделение корней заданного уравнения выполняется по программе в Qbasic (см. программу на стр. 15).

Результат – перечень отрезков, содержащих по одному корню уравнения.

Затем отделение корней выполняется в Mathcad (см. пример 2.2).

Найденные отрезки сравниваются с отрезками, полученными в Mathcad и по программе.

Предварительно находится интервал (-R,R) для всех корней (см. пример 2.1). Далее находятся отрезки изоляции корней:

- для алгебраических уравнений аналитическим способом с помощью построения таблицы значений функции;
- для трансцендентных уравнений графическим способом (см. пример 2.3).

При выполнении *задания 2* уточняется один корень заданного уравнения каким-либо методом по заданию с заданной точностью (см. примеры 2.5; 2.6; 2.7).

При выполнении *задания 3* находятся корни заданного уравнения:

- для алгебраических уравнений с помощью функции *polyroots* (пункт 2.8.2, пример 2.9), *root* (пункт 2.8.1, пример 2.8);
- для трансцендентных уравнений с помощью функции *root* (пункт 2.8.1, пример 2.8), *find* (пункт 2.8.3, пример 2.10).

При выполнении *задания 4* найти корни уравнения по программе в Mathcad.

Кнопкой  (Инструменты программирования) на панели *Math* (Математика) открыть панель *Programming* (Программирование).

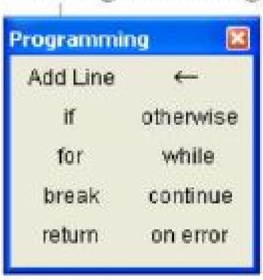


Рисунок 9 – Панель программирования

С помощью кнопок этой панели вставить в рабочий документ соответствующую программную конструкцию (пункт 2.8.4 пример 2.11).

Здесь же, решить уравнение символьной операцией *Solve* (Решить) (пункт 2.8.5 пример 2.12.)

3. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В задачах строительства чаще всего приходится решать системы уравнений. Решаются они, в основном, матричным способом, когда все исходные данные записываются в виде матриц. Так, упругие свойства отдельных элементов, из которых состоит конструкция, представляются либо матрицей податливости, либо матрицей жесткости. Эти матрицы устанавливают связь между усилиями, приложенными к элементу, и перемещениями по направлению этих усилий. Выражение перемещений через усилия соответствуют матрице податливости, и наоборот.

При расчете статически неопределимых стержневых систем методом сил или методом перемещений возникает необходимость решения систем уравнений. При расчете таких систем в матричной форме, сначала выбирается основная система и составляются исходные матрицы, описывающие упругие свойства системы, ее геометрию и условия внешнего воздействия, затем последовательно выполняются матричные операции.

Решение многих задач расчета строительных конструкций сводится к решению задач линейной алгебры.

В строительной механике рассматриваются линейные задачи, т.е. рассчитываемые конструкции принимаются идеально упругими системами и линейно деформируемыми.

К таким задачам относятся:

- решение систем линейных алгебраических уравнений;
- вычисление определителей;
- обращение матриц;
- нахождение собственных значений и собственных векторов матриц.

Матричная форма расчетов строительных конструкций является универсальной, но использование матриц требует дискретизации расчетной схемы.

Расчетной схемой сооружения называется совокупность отдельных конструктивных элементов, соединенных конечным числом шарнирных и жестких узлов, причем вся нагрузка считается приложенной только в этих узлах.

Конструктивными элементами, входящими в состав сооружения, могут быть стержни, системы стержней, пластины и оболочки различной формы. При исследовании устойчивости стержней и плит приходится решать задачи, которые сводятся к алгебраическим задачам. Необходимо знать методы их решения.

Чтобы выполнить расчет в матричной форме по предлагаемой методике, нужно для каждого конструктивного элемента, входящего в сооружение, иметь зависимость между действующими на него усилиями и перемещениями по направлению этих усилий.

3.1. Краткие сведения из теории матриц

3.1.1. Основные определения

Система n линейных уравнений с n неизвестными имеет вид

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n , \end{array} \quad , \qquad (3.1)$$

В матричном виде коэффициенты этой системы будут следующими:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (3.2)$$

Таблица A, состоящая из n строк и n столбцов называется квадратной матрицей порядка n.

Система уравнений (3.1) в векторно-матричном виде такова:

$$A \cdot x = b , \qquad (3.3)$$

где x – матрица-столбец неизвестных; b – матрица-столбец правых частей.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}. \qquad (3.4)$$

В некоторых случаях получаются системы уравнений с некоторыми специальными видами матриц.

1). Матрица, у которой все элементы равны нулю, называется *нулевой*. Она обозначается символом 0, нулевая матрица соответствует нулю в обычной алгебре.

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

2). Квадратная матрица, у которой все элементы, стоящие не на главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной матрицей*, т.е. матрица вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

3). Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется *единичной* и обозначается E.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

4). Квадратная матрица называется *треугольной*, если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю, т.е. это матрица вида

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

5). Матрица, у которой строки являются столбцами заданной матрицы, называется *транспонированной* по отношению к этой матрице и обозначается A^T, например:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 7 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad B^T=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 3 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

6). Матрица называется *блочной*, если её элементы сами являются матрицами.

3.1.2. Алгебраические операции над матрицами

1). Равенство матриц.

Две матрицы одного и того же размера равны друг другу, если все их соответствующие элементы равны между собой, т.е.

$$a_{ik}=b_{ik},\ i=1,2,...m;\ \ k=1,2,...n.$$

Например:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \quad A=B.$$

2). Сложение и вычитание матриц.

Складывать и вычитать можно лишь матрицы одинакового размера, при этом в результате получается матрица одного и того же размера. При сложении элементы суммарной матрицы равны сумме соответствующих элементов слагаемых матриц, т.е. если

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\text{, то } A \pm B = C,$$

где $A_{mxn} = (a_{ij})$; $B_{mxn} = (b_{ij})$; $C_{mxn} = (c_{ij})$, $(i = 1, 2, ...m;\ j = 1, 2, ...n)$.

Например:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f & g \\ e & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+f) & (b+g) \\ (c+e) & (d+h) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 7 & 1 & 9 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 7 & 2 \\ 1 & 8 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Напомним свойства матриц:

а) $A + B = B + A$;

б) $(A + B) + C = A + (B + C)$;

в) $A + 0 = A$;

г) $A + (-A) = 0$;

д) $1 \cdot A = A$;

е) $A - B = A + (-B)$.

3). Умножение матриц на скаляр.

Скаляром λ называется любое число или матрица первого порядка.

$$A = \lambda \cdot B\text{, если } a_{ij} = \lambda \cdot b_{ij}.$$

Матрица A считается умноженной на скаляр λ, если каждый элемент ее умножен на этот скаляр.

Например:

$$3 \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 21 \\ 24 & 3 \end{pmatrix}.$$

Свойства матрицы:

а) $\lambda \cdot (\beta A) = (\lambda\beta)A$;

б) $\lambda \cdot (A + B) = \lambda A + \lambda B$;

в) $(\lambda + \beta)A = \lambda A + \beta A$.

4). Умножение матриц.

Две матрицы могут быть перемножены лишь тогда, когда число столбцов первой из них равно числу строк второй. Если две матрицы удовлетворяют этому условию, то их произведением будет новая матрица:

$$A \cdot B = C .$$

Размер матрицы C будет $A_{m\times p} \bullet B_{p\times k} = C_{m\times k}$.

Чтобы получить элемент c_{ij}, стоящий в i-й строке и j-м столбце произведения матриц, нужно элементы i-й строки первой матрицы умножить на соответствующие элементы j-го столбца второй матрицы и полученные произведения сложить:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{k=p} a_{ik} b_{kj} .$$

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}.$$

Перемножение этих двух матриц возможно, т.к. число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Правило перемножения выглядит так:

$$(m\times p)\cdot(p\times n) = m\times n ,$$

или в числах $(3\times 3)\cdot(3\times 2) = 3\times 2$.

Следовательно:

$$C = A\times B = \begin{pmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}) & (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}) \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}) & (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}) \\ (a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31}) & (a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32}) \end{pmatrix}.$$

Например:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ 25 & 35 \end{pmatrix},$$

где

$$c_{11} = 2\cdot 5 + 1\cdot 0 + 7\cdot 1 = 17,$$
$$c_{12} = 2\cdot 2 + 1\cdot 4 + 7\cdot 3 = 29,$$
$$c_{21} = 4\cdot 5 + 3\cdot 0 + 5\cdot 1 = 25,$$
$$c_{22} = 4\cdot 2 + 3\cdot 4 + 5\cdot 3 = 35.$$

Отсюда следует, что $A\times B \neq B\times A$, т.к. при умножении $B\times A$ получим матрицу другого размера, т.е. $(3\times 2)\cdot(2\times 3) = 3\times 3$.

Свойства:

а) $A\times B\times C = (A\times B)\times C = A\times(B\times C)$;

б) $A\times B + A\times C = A\times(B + C)$.

5). Транспонирование матриц.

Транспонированная матрица произведения равна произведению транспонированных матриц сомножителей, взятых в обратном порядке, т.е.

$$(A\times B)^T = B^T \times A^T .$$

Транспонированная матрица суммы равна сумме транспонированных матриц слагаемых, т.е.

$$(A + B)^T = A^T + B^T .$$

Дважды транспонированная матрица совпадает с исходной, т.е.

$$\left(A^T\right)^T = A .$$

6). Обратная матрица.

Матрица B называется *обратной квадратной матрице* A, если

$$AB = BA = E ,$$

где E – единичная матрица.

Обратная матрица может существовать только для квадратной матрицы и обозначается A^{-1}.

Для существования и нахождения обратной матрицы введем дополнительные понятия.

- *Невырожденной матрицей* называется квадратная матрица, определитель которой отличен от нуля.
- Если определитель матрицы равен нулю, то матрица называется *вырожденной*.
- Определитель является числом, характеризующим матрицу.
- Определитель матрицы составляется из ее элементов при одинаковом их расположении и называется *модулем матрицы*.

Например:

$$D(A)=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (3.5)$$

7). Алгебраическим дополнением элемента квадратной матрицы (n-го порядка) a_{ij} называется определитель $(n\text{-}1)$–го порядка, образованный из определителя заданной матрицы зачеркиванием i – й строки и j – го столбца и умножением на $(-1)^{(i+j)}$.

Например:

Алгебраическое дополнение A_{23} определителя 3-го порядка будет:

$$A_{23}=(-1)^{(2+3)}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=-a_{11}a_{32}+a_{12}a_{31}.$$

8). Матрица, составленная из алгебраических дополнений, называется *союзной* или *присоединенной* к матрице A в виде

$$C=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Обратную матрицу можно найти как

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot C=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где $\det A=|A|$ - определитель матрицы A.

Из этой формулы видно, что если определитель равен нулю, то обратная матрица не существует.

Этот способ вычисления обратной матрицы является трудоемким при высоком порядке матриц.

Обратные матрицы высоких порядков находятся по стандартным программам на ЭВМ, в среде математического пакета Mathcad.

Для выполнения различных операций с матрицами, нахождения определителей, транспонированных и обратных матриц студенты так же используют пакет Mathcad, который поддерживает ряд встроенных векторных и матричных функций, что облегчает решение задач линейной алгебры. Существуют матричные операторы, которые находятся на палитре Matrix (см. рисунок 10).

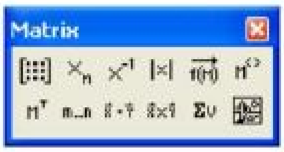
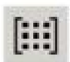


Рисунок 10 – Панель операций с матрицами

Технология создания векторов и матриц в Mathcad состоит из следующих действий:

- ввести имя вектора или матрицы (любая буква с клавиатуры) и знак присваивания := (знак < := > можно найти в панели *Calculator*, или на клавиатуре: знак < : >). На экране появятся символы V:= или M:=;
- знаком  открыть окно диалога *Insert Matrix* и задать размерность вектора или матрицы;
- ввести элементы вектора или матрицы в появившийся шаблон.

Например:

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{pmatrix}$$

Для решения задач линейной алгебры используются функции трех групп:

- функции определения матриц и операции с блоками матриц;

- функции вычисления различных числовых характеристик матриц;
- функции, реализующие численные алгоритмы задач линейной алгебры.

Использование всех этих операций помогает в вычислениях при решении задач линейной алгебры, особенно при работе с матрицами высоких порядков.

3.2. Методы решения линейных систем

Методы решения систем линейных уравнений делятся на две группы:

- прямые, или точные методы;
- итерационные, или методы последовательных приближений.

Прямые методы используют конечные соотношения (формулы) для вычисления неизвестных. Они дают решение после выполнения заранее известного числа операций. Эти методы просты и универсальны, поэтому используются для решения широкого класса линейных систем.

Но прямые методы имеют недостатки:

- требуют хранения в оперативной памяти компьютера сразу всей матрицы, и при больших значениях n расходуется много места в памяти;
- не учитывают структуру матрицы при большом числе нулевых элементов в разреженных матрицах. Эти элементы занимают место в памяти машины и над ними проводятся арифметические действия;
- накапливают погрешности в процессе решения, поскольку вычисления на любом этапе используют результаты предыдущих операций. Это опасно для больших систем, т.к. общее число операций резко возрастает и погрешность накапливается с каждой операцией.

С учетом всех этих недостатков прямые методы используются обычно для решения на ЭВМ не слишком больших ($n<100$) систем с плотно заполненной матрицей и не близким к нулю определителем.

С применением прямых методов точное решение может быть получено лишь при точном выполнении вычислений и при точных значениях коэффициентов системы.

На практике, при использовании компьютеров, вычисления проводятся с погрешностями. Поэтому неизбежны погрешности и в окончательных результатах.

Итерационные методы являются приближенными. В них необходимо задать *начальное приближение* – некоторое приближенное решение. После этого с помощью некоторого алгоритма проводится один цикл вычислений, называемый *итерацией*. В результате итерации находится новое приближение. Итерации проводятся до тех пор пока не получится решение с требуемой точностью.

По сравнению с прямыми методами алгоритм решения линейных систем итерационными методами более сложный.

Но иногда итерационные методы предпочтительнее, т.к. имеют достоинства:

- требуют хранения в памяти машины не всей матрицы системы, а лишь нескольких векторов с n компонентами. Иногда элементы матрицы можно совсем не хранить, а вычислять их по мере необходимости;
- погрешности окончательных результатов не накапливаются, т.к. точность вычислений в каждой итерации обусловлена только результатами предыдущей итерации и не зависит от ранее выполненных вычислений.

Эти достоинства итерационных методов позволяют применять их для систем с большим числом уравнений.

Итерационные методы могут использоваться и для уточнения решений, полученных с помощью прямых методов.

3.3. Прямые методы

3.3.1. Метод Крамера

Одним из способов решения систем линейных алгебраических уравнений является *метод Крамера.*

По этому методу каждое неизвестное представляется в виде отношения определителей.

Рассмотрим систему

$$a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1,$$
$$a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2.$$

Составляем определители

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},\ D_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix},\ D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Тогда неизвестные x, y найдем как

$$x = \frac{D_1}{D},\ y = \frac{D_2}{D} \text{ при } D \neq 0.$$

Но при решении систем с n числом уравнений потребуется вычислить значения $(n+1)$ определителей. Это огромное число арифметических операций.

Поэтому правило Крамера можно использовать лишь для решения систем, состоящих из нескольких уравнений. Получить решение системы линейных уравнений по формулам Крамера можно в системе Mathcad. Это намного ускорит вычисления (см. подраздел 3.5.2).

Известен метод решения систем линейных алгебраических уравнений с использованием обратной матрицы.

Система записывается в векторно-матричном виде

$$A \cdot x = b.$$

Умножая обе части этого векторного уравнения слева на обратную матрицу, получаем

$$x = A^{-1} \cdot b.$$

Этот способ очень трудоемкий из-за большого объема вычислений. Но его также можно реализовать в Mathcad (см. подраздел 3.5.1).

3.3.2. Метод Гаусса

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений (3.1) при условии, что ее матрица $A = (a_{ij})$ невырожденна.

Метод Гаусса заключается в последовательном исключении неизвестных из уравнений системы. Он основан на приведении матрицы системы к треугольному виду. Такая вычислительная схема называется *схемой единственного деления*.

Сначала с помощью первого уравнения исключается x_1 из всех последующих уравнений системы. Затем с помощью второго уравнения исключается x_2 из третьего и всех последующих уравнений. Этот процесс продолжается до тех пор, пока в левой части последнего (n-го) уравнения останется лишь один член с неизвестным x_n, т.е. матрица системы будет приведена к треугольному виду.

Это первый этап. Он состоит в последовательном исключении неизвестных и называется *прямым ходом метода Гаусса*.

Второй этап – последовательное нахождение значений неизвестных называется *обратным ходом*.

Решая последнее уравнение, находим единственное в нем неизвестное x_n. Далее, используя это значение, из предыдущего уравнения вычисляем x_{n-1} и т.д.

Последним найдем x_1 из первого уравнения.

Для иллюстрации сказанного рассмотрим систему из трех уравнений

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{array}\right\}, \tag{3.6}$$

Для исключения x_1 из второго уравнения прибавим к нему первое, умноженное на $-{}^{a_{21}}\!/_{a_{11}}$. Затем, умножив первое уравнение на $-{}^{a_{31}}\!/_{a_{11}}$ и прибавив результат к третьему уравнению, также исключим из него x_1.

Получим равносильную (3.1) систему уравнений вида

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1' \\ a_{22}'x_2 + a_{23}'x_3 = b_2' \\ a_{32}'x_2 + a_{33}'x_3 = b_3' \end{array}\right\}, \tag{3.7}$$

$$a_{ij}' = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j}, \quad i, j = 2, 3,$$

$$b_i' = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}b_1, \quad i = 2, 3.$$

Теперь из третьего уравнения системы (3.7) нужно исключить x_2.

Для этого умножим второе уравнение на $-{a'_{32}}/{a'_{22}}$ и прибавим результат к третьему. Получим снова равносильную (3.1) систему уравнений вида

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1'' \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 &= b_2'' \\ a''_{33}x_3 &= b_3'' \end{aligned}\right\}, \qquad (3.8)$$

Матрица системы (3.8) имеет треугольный вид.

Прямой ход закончен.

В процессе исключения неизвестных выполняются операции деления на коэффициенты a_{11}, a'_{22} и т.д. Поэтому они должны быть отличны от нуля. Этого условия можно добиться всегда путем перестановки уравнений системы.

Обратный ход начинается с решения третьего уравнения системы (3.8).

$$x_3 = {b_3''}/{a_3''}.$$

Используя это значение, можно найти x_2 из второго уравнения, а затем x_1 из первого:

$$x_2 = \frac{1}{a'_{22}}\left(b'_2 - a'_{23}x_3\right),$$

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3\right).$$

Ручные вычисления по схеме единственного деления с контролем вычислений удобно оформлять в виде специальной расчетной таблицы.

Рассмотрим процесс решения системы линейных уравнений на примере.

Пример 3.1.

Решить систему:

$$\left.\begin{aligned} 1{,}26x_1 - 2{,}34x_2 + 1{,}17x_3 &= 3{,}14 \\ 0{,}75x_1 + 1{,}24x_2 - 0{,}48x_3 &= -1{,}17 \\ 3{,}44x_1 + 1{,}85x_2 + 1{,}16x_3 &= 1{,}83 \end{aligned}\right\}.$$

В раздел *А* табл. 3.1 вносятся коэффициенты системы и свободные члены. Для исключения случайных ошибок ведется текущий контроль правильности вычислений; для этого в схему вычислений включены столбец контрольных сумм Σ и столбец строчных сумм Σ'.

Таблица 3.1 - Расчет системы уравнений методом Гаусса

Разделы	Коэффициенты при неизвестных			Свобод-ные члены	Σ	Σ'
	X_1	X_2	X_3			
А	1,26	-2,34	1,17	3,14	3,23	-
	0,75	1,24	-0,48	-1,17	0,34	-
	3,44	1,85	1,16	1,83	8,28	-
	1	-1,8571	0,9286	2,4921	2,5635	2,5636
A_1	-	2,6328	-1,1764	-3,0391	-1,5827	-1,5826
	-	8,2384	-2,0344	-6,7428	-0,5388	-0,5384
	-	1	-0,4468	-1,1543	-0,6011	-0,6011
A_2	-	-	1,6465	2,7668	4,4133	4,4133
			1	1,6804	2,6804	
B		1		-0,4035	0,5964	
	1			0,1824	1,1825	

Выполнение контроля в прямом ходе:

- внести в раздел А коэффициенты и свободные члены исходной системы;
- найти контрольные суммы – суммы коэффициентов и свободных членов по строкам и внести их в столбец Σ (это числа 3,23; 0,34; 8,28);
- поделить элементы первой строки (включая столбец Σ) на ведущий элемент $a_{11} = 1{,}26$;
- результаты записать в четвертую строку раздела А;
- провести контроль: сравнить результат обычного текущего преобразования контрольной суммы первой строки

$$3{,}23 : 1{,}26 = 2{,}5635$$

со строчной суммой

$$1 - 1{,}8571 + 0{,}9286 + 2{,}4921 = 2{,}5636 .$$

Расхождение в четвертом знаке после запятой объясняется накоплением вычислительной ошибки в результате округлений.

Преобразуем теперь вторую и третью строки раздела А (это будет исключением неизвестного x_1 во втором и третьем уравнениях системы).

Результат записываем в первую и вторую строки раздела $А_1$.

Далее выполняем преобразования: каждый элемент первой строки раздела $А_1$ равен разности соответствующего элемента второй строки раздела А и произведения его «проекций» на первый столбец и последнюю строку раздела А; аналогично вторая строка раздела $А_1$ получается из третьей строки раздела А.

Например:

Вычисляем первый элемент первой строки раздела $А_1$:

$$1{,}24-0{,}75\cdot(-1{,}8571)=2{,}6328 \text{ и т.д.}$$

Если b - вычисляемый элемент первого раздела; a – соответствующий элемент предыдущего раздела; $p_в$ - вертикальная «проекция» элемента; $p_г$ - горизонтальная «проекция» элемента, то

$$b=a-p_в p_г.$$

Второй элемент первой строки раздела $А_1$, будет $-0{,}48-0{,}75\cdot 0{,}9786=-1{,}1764$.

Разделом $А_2$ заканчивается прямой ход.

В столбце свободных членов последней строки раздела $А_2$ получим $x_3=1{,}6804$.

Найдем значения остальных неизвестных.

Это будет обратный ход (раздел В).

$$x_2=-1{,}1543-(-0{,}4468)\cdot 1{,}6804=-0{,}4035,$$

$$x_1=2{,}4921-0{,}9286\cdot 1{,}6804-(-1{,}8571)\cdot(-0{,}4035)=0{,}1824.$$

Контроль в обратном ходе ведется путем сравнения значений неизвестных, получаемых в столбце свободных членов, с соответствующими числами из столбца Σ: числа в столбце Σ должны быть на единицу больше соответствующих значений неизвестных из столбца свободных членов.

Подставим найденные значения в систему

$$1{,}26 \cdot 0{,}1824 + 2{,}34 \cdot 0{,}4035 + 1{,}17 \cdot 1{,}6804 = 3{,}1401,$$
$$0{,}75 \cdot 0{,}1824 - 1{,}24 \cdot 0{,}4035 - 0{,}48 \cdot 1{,}6804 = -1{,}1701,$$
$$3{,}44 \cdot 0{,}1824 - 1{,}85 \cdot 0{,}4035 + 1{,}16 \cdot 1{,}6804 = 1{,}8303.$$

Значения разностей между свободными членами исходной системы и результатами подстановки в уравнения найденных значений неизвестных называют *невязками*.

В примере невязки имеют значения:

$$\varepsilon_1 = 3{,}14 - 3{,}1401 = -0{,}0001,$$
$$\varepsilon_2 = -1{,}17 - (-1{,}1701) = 0{,}0001,$$
$$\varepsilon_3 = 1{,}83 - 1{,}8303 = -0{,}0003.$$

Используя невязки, можно уточнить решение системы, вычислив поправки для найденных значений неизвестных.

Для этого нужно решить систему с прежней матрицей коэффициентов, но с новым столбцом свободных членов, составленным из невязок. Используется та же схема единственного деления, вычисления проводятся только для дополнительно введенного столбца невязок.

Полученные значения поправок затем добавляются к найденным ранее значениям неизвестных.

3.3.3. Метод Гаусса с выбором главного элемента

Одной из модификаций метода Гаусса является схема с выбором главного элемента.

Суть метода такова:

- Приведение матрицы системы к треугольному виду. Это достигается последовательным исключением неизвестных из уравнения системы;
- Обязательное выполнение требования: из всех оставшихся в i-том столбце элементов нужно выбрать наибольший по модулю и переставить уравнение так, чтобы этот элемент оказался на месте элемента a_{ii}, поскольку в процессе исключения неизвестных приходится выполнять операции деления на коэффициенты a_{11}, a_{22} (диагональные коэффициенты) и т.д.

Система n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными имеет вид (3.1).

Матрица A из коэффициентов a_{ij} при неизвестных имеет вид (3.2), матрица – столбец $\overline{x}$ из неизвестных и матрица-столбец $\overline{b}$ из свободных членов имеют вид (3.4).

Тогда систему (3.1) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{n3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$$

или в виде матричного уравнения

$$A \cdot \overline{x} = \overline{b} \ .$$

Из всех элементов a_{ij} матрицы A нужно выбрать наибольший по модулю элемент и представить уравнение так, чтобы этот элемент оказался на месте ведущего элемента a_{ii}.

Блок–схема выбора главного элемента приведена на рисунке 11.

Смысл индексов на схеме:

i – номер неизвестного, которое исключается из оставшихся $n-i$ уравнений при прямом ходе (а также номер того уравнения, с помощью которого исключается x_i) и номер неизвестного, которое определяется из i–го уравнения при обратном ходе;

k – номер уравнения, из которого исключается неизвестное x_i при прямом ходе;

j – номер столбца при прямом ходе и номер уже найденного неизвестного при обратном ходе;

l – номер наибольшего по абсолютной величине элемента матрицы в столбце с номером i (т.е. среди элементов $a_{ii}, \ldots, a_{mi}, \ldots, a_{ni}$);

m – текущий номер элемента, с которым происходит сравнение.

Диагональные элементы матрицы называются ведущими элементами; ведущий элемент a_{ii} – это коэффициент при i–ом уравнении на i–ом шаге исключения.

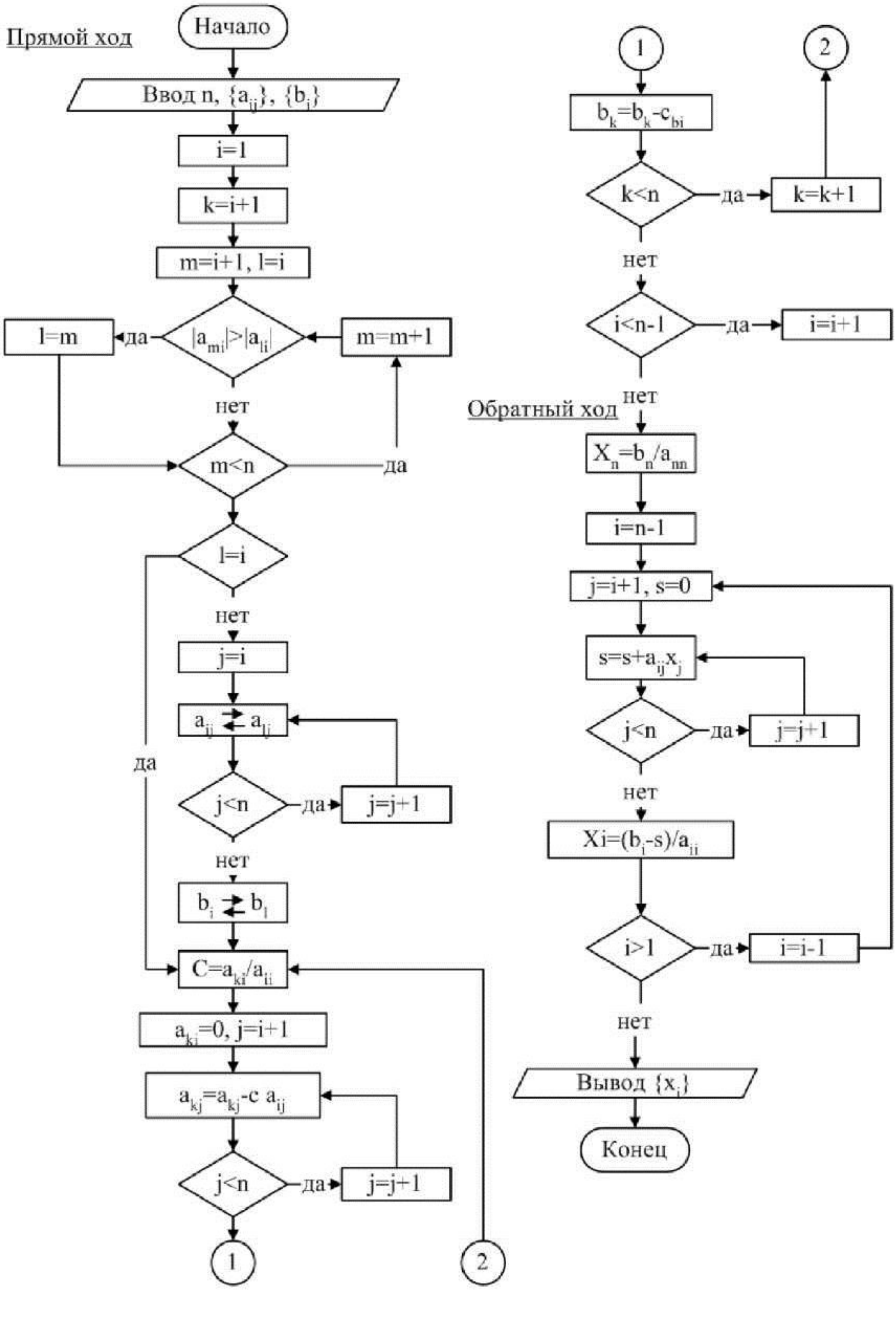


Рисунок 11 – Блок схема выбора главного элемента

Выбор главного элемента осуществляется по столбцу.

Благодаря выбору наибольшего по модулю ведущего элемента уменьшаются множители, используемые для преобразования уравнений, что уменьшает погрешность вычислений.

Поэтому метод Гаусса с выбором главного элемента обеспечивает приемлемую точность решения для уравнений $n \le 1000$. Его целесообразно использовать для решения систем с плотно заполненной матрицей.

Все элементы матрицы и правые части системы уравнений находятся в оперативной памяти машины. Объем вычислений определяется порядком системы n: число арифметических операций примерно равно $\left(2/3\right)n^3$.

Вследствие вычислительных погрешностей, полученное решение системы является приближенным.

Рассмотрим вопрос о погрешностях решения систем линейных алгебраических уравнений.

Запишем систему в матричном виде:

$$A \cdot \overline{x} = \overline{b}.$$

Если матрица системы невырождена, то у нее существует обратная матрица A^{-1}, и тогда решение системы легко получить, умножив обе части уравнения $A \cdot x = b$ слева на обратную матрицу A^{-1}:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot x) = A^{-1} \cdot b,$$

а так как $A^{-1} \cdot A = E$ и $E \cdot x = x$, то решение системы будет таким:

$$x = A^{-1} \cdot b.$$

Вычисленное по методу Гаусса с выбором главного элемента решение x^* отличается от этого решения из-за погрешностей округления, связанных с ограниченностью разрядной сетки машины.

Существуют две величины, характеризующие степень отклонения полученного решения от точного. Одна из них – погрешность Δx, равная разности этих значений; другая – невязка r, равная разности между левой и правой частями уравнений при подстановке в них решения:

$$\Delta x = x - x^*,$$

$$r = A \cdot x^* - b.$$

Используя невязки, можно уточнить решение системы, вычислив поправки для найденных значений неизвестных. Для этого достаточно решить систему с прежней матрицей коэффициентов, но с новым столбцом свободных членов, составленным из невязок.

Пусть для системы

$$A \cdot x = b$$

получено приближенное решение x^*.

Положим $x = x^* + \Delta$.

Тогда для вектора поправки $\overline{\Delta} = \begin{vmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \dots \\ \Delta_n \end{vmatrix}$ будем иметь уравнение

$A(\overline{x}^* + \overline{\Delta}) = \overline{b}$ или $A \cdot \overline{\Delta} = \overline{r}$, где $\overline{r} = \overline{b} - A \cdot \overline{x}^*$ – вектор невязок для приближенного решения $\overline{x}^*$.

Решая систему с прежней матрицей A и новым вектором свободных членов $\overline{r}$, находим поправку $\overline{\Delta}$.

Преобразованные коэффициенты матрицы A можно не уточнять, т.к. при малых невязках соответствующие ошибки будут иметь более высокий порядок малости.

Пример 3.2. (для выполнения лабораторной работы № 2).

Решить систему уравнений методом Гаусса с выбором главного элемента с точностью до 0,001. Для полученного решения найти вектор поправок. Найти погрешность Δx.

$$\begin{cases} 2{,}18x_1 + 1{,}72x_2 - 0{,}93x_3 = 1{,}06, \\ 1{,}42x_1 + 0{,}18x_2 + 1{,}12x_3 = 2{,}07, \\ 0{,}92x_1 - 1{,}14x_2 - 2{,}53x_3 = -0{,}45. \end{cases}$$

Решение будем вести в табл. 3.2.

Выбираем максимальный по модулю элемент в столбцах x_1, x_2 и x_3 раздела A ($a_{33} = |-2{,}53|$). Заполняем столбец m_i раздела A, полученный делением элементов столбца x_3 (результат деления берется с обратным знаком) на максимальный элемент $a_{33} = -2{,}53$:

$$m_3 = -\frac{a_{33}}{a_{33}} = -\frac{-2,53}{-2,53} = -1;$$

$$m_2 = -\frac{a_{23}}{a_{33}} = -\frac{1,12}{-2,53} = 0,4427;$$

$$m_1 = -\frac{a_{13}}{a_{33}} = -\frac{-0,93}{-2.53} = -0,3676.$$

Таблица 3.2 – Расчет коэффициентов при неизвестных

	m_i	Коэффициенты при неизвестных			Свобод-ные члены	Σ	Σ'
		x_1	x_2	x_3			
А	-0,3676 0,4427 -1	2,18 1,42 0,92	1,72 0,18 -1,14	-0,93 1,12 -2,53	1,06 2,07 -0,45	4,03 4,79 -3,2	
Б	-1 0,1518	1,8418 1,8273	2,1391 -0,3247	- -	1,2254 1,8708	5,2063 3,3734	5,2063 3,3734
В	- -	2,1069 2,1069	- -	- -	2,0568 2,0568	4,1637 4,1637	4,1637 4,1637

В столбец Σ записываются суммы коэффициентов строк матрицы A:

$$2,18 + 1,72 + (-0,93) + 1,06 = 4,03,$$

$$1,42 + 0,18 + 1,12 + 2,07 = 4,79,$$

$$0,92 + (-1,14) + (-2,53) + (-0,45) = -3,2.$$

Переход к разделу Б ведем следующим образом: строку, содержащую главный (ведущий) элемент, умножаем на m_i и прибавляем к соответствующей i-той строке. Результат записываем в раздел Б. Строка с ведущим элементом в раздел Б не переписывается.

$$0,92 \cdot (-0,3676) + 2,18 = 1,8418,$$

$$(-1,14) \cdot (-0,3676) + 1,72 = 2,1391,$$

$$(-0,45) \cdot (-0,3676) + 1,06 = 1,2254,$$

$$(-3,2) \cdot (-0,3676) + 4,03 = 5,2063.$$

При умножении Σ на m_1 результат записывается в столбец Σ':

$$0{,}92 \cdot 0{,}4427 + 1{,}42 = 1{,}8273,$$
$$(-1{,}14) \cdot 0{,}4427 + 0{,}18 = -0{,}3247,$$
$$(-0{,}45) \cdot 0{,}4427 + 2{,}07 = 1{,}8708,$$
$$(-3{,}2) \cdot 0{,}4427 + 4{,}79 = 3{,}3734.$$

Считаем сумму $\sum$ в каждой строке раздела Б:

$$1{,}8418 + 2{,}1391 + 1{,}2254 = 5{,}2063,$$
$$1{,}8273 + (-0{,}3247) + 1{,}8708 = 3{,}3734.$$

Если столбцы $\sum$ и $\sum'$ совпадают (с заданной точностью), то вычисления выполнены верно и можно переходить к следующему шагу: выбираем главный элемент (2, 1391), считаем m_i и т.д.

Переход к разделу В выполняется аналогично переходу к разделу Б.

На этом заканчивается прямой ход метода главных элементов.

В результате получим:

$$2{,}1069 x_1 = 2{,}0568.$$

Выполняем обратный ход, находим неизвестные

$$x_1 = \frac{2{,}0568}{2{,}1069} = 0{,}9762.$$

Подставляем найденный x_1 в уравнение с главным элементом из раздела Б:

$$1{,}8418 \cdot 0{,}9762 + 2{,}1391 \cdot x_2 = 1{,}2254.$$

Находим x_2:

$$x_2 = \frac{1{,}2254 - 1{,}8418 \cdot 0{,}9762}{2{,}1391} = -0{,}2677.$$

Подставляем найденные x_1 и x_2 в уравнение с главным элементом из раздела А.

$$0{,}92 \cdot 0{,}9762 + (-1{,}14) \cdot (-0{,}2677) - 2{,}53 \cdot x_3 = -0{,}45\,.$$

Отсюда выразим x_3:

$$x_3 = \frac{0{,}45 + 0{,}92 \cdot 0{,}9762 + 1{,}14 \cdot 0{,}2677}{2{,}53} = 0{,}6535.$$

Найдем поправку $\overline{\Delta}$ к полученному решению:

$$\overline{x}^* = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,9762 \\ -0,2677 \\ 0,6535 \end{vmatrix},$$

$\overline{r} = \overline{b} - A \cdot \overline{x}^*$,

$$\overline{r} = \begin{vmatrix} 1,06 \\ 2,07 \\ -0,45 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2,18 & 1,72 & -0,93 \\ 1,42 & 0,18 & 1,12 \\ 0,92 & -1,14 & -2,53 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0,9762 \\ -0,2677 \\ 0,6535 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1,06 \\ 2,07 \\ -0,45 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1,0599 \\ 2,0699 \\ -0,4501 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,0001 \\ 0,0001 \\ 0,0001 \end{vmatrix}.$$

Решение ведем в табл. 3.3.

Коэффициенты при неизвестных $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ уже имеются в таблице 1 (это коэффициенты при неизвестных x_1, x_2, x_3), свободные члены – это вектор невязок.

Таблица 3.3 – Прямой ход

	m_i	Коэффициенты при неизвестных			Свобод-ные члены	$\sum$	$\sum'$
		x_1	x_2	x_3			
А	-0,3676	2,18	1,72	-0,93	0,0001	2,9701	-
	0,4427	1,42	0,18	1,12	0,0001	2,7201	
	-1	0,92	-1,14	-2,53	0,0001	-2,7499	
Б	-1	1,8418	2,1391	-	0,000063	3,980963	3,992009
	0,1518	1,8273	-0,3247	-	0,000144	1,502744	1,503544
В	-	2,1069	-	-	0,000154	2,107054	2,107054

Выполняем обратный ход:

$$2{,}1069 \cdot \Delta_1 = 0{,}000154,$$

$$\Delta_1 = \frac{0{,}000154}{2{,}1069} = 0{,}000073,$$

$$\Delta_2 = \frac{0{,}000063 - 1{,}8418 \cdot 0{,}000073}{2{,}1391} = -0{,}000033,$$

$$\Delta_3 = \frac{0{,}0001 - 0{,}92 \cdot 0{,}000073 - (-1{,}14) \cdot (-0{,}000033)}{-2{,}53} = 0{,}000002,$$

$$\overline{\Delta} = \begin{vmatrix} 0{,}000073 \\ -0{,}000033 \\ 0{,}000002 \end{vmatrix}.$$

Вектор $\left|\overline{\Delta}\right|$ может служить для приближенной оценки абсолютной погрешности полученного решения

Метод Гаусса реализован в Mathcad. Он рассмотрен в подразделе 3.5.

3.4. Итерационные методы

Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений мало применимы при большом числе уравнений и неизвестных, по следующим причинам:

- их реализация методов требует слишком большого числа вычислений;
- в процессе вычислений накапливаются погрешности, которые растут с ростом вычислений;
- они занимают в оперативной памяти машины большой объем.

Поэтому при большом числе уравнений и неизвестных обычно используются итерационные методы, т.е. методы последовательных приближений, которые обладают следующими преимуществами:

- выигрыш во времени решения, если процесс итерации сходится быстро, т.е. количество приближений меньше, чем порядок системы;
- погрешности окончательных результатов не накапливаются, т.е. итерационные методы являются самоконтролирующимися;
- легко программируются на ЭВМ.

Итерационные методы используются для уточнения решений, полученных с помощью прямых методов.

3.4.1. Уточнение решения

Решения, получаемые с помощью прямых методов, обычно содержат погрешности. Иногда они могут быть значительными и их необходимо уменьшить, т.е. уточнить найденное решение.

Пусть дана система линейных уравнений в матричном виде

$$A \cdot \overline{x} = \overline{b}.$$

Требуется найти ее решение.

С помощью некоторого прямого метода найдем приближенное решение $x^{(0)}$ (т.е. приближенные значения неизвестных $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}$), которое называется начальным или нулевым приближением к решению.

Уточним это решение.

Подставляя его в левую часть системы (3.3), получим некоторый столбец правых частей $b^{(0)}$, отличный от b:

$$A \cdot x^{(0)} = b^{(0)} \tag{3.9}$$

Тогда

$$x - x^{(0)} = \Delta x^{(0)}, \tag{3.10}$$

где $\Delta x^{(0)}$ - погрешность полученного решения.

$$A \cdot x^{(0)} - b = b^{(0)} - b = r^{(0)}, \tag{3.11}$$

где $r^{(0)}$ - невязка.

Вычтем (3.9) из (3.3):

$$\begin{aligned} &A \cdot x - A \cdot x^{(0)} = b - b^{(0)}, \\ &A\left(x - x^{(0)}\right) = -\left(b^{(0)} - b\right), \\ &A \cdot \Delta \cdot x^{(0)} = -r^{(0)}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Решив систему (3.12) найдем значение $\Delta \cdot x^{(0)}$, которое является поправкой к приближенному решению $x^{(0)}$. Тогда новое приближение будет: $x^{(1)} = x^{(0)} + \Delta x^{(0)}$.

Аналогично $x^{(2)} = x^{(1)} + \Delta x^{(1)}$ и т.д.

Процесс продолжается до тех пор, пока очередное значение погрешности (поправки) $\Delta x^{(k)}$ не станет достаточно малым, т.е. пока очередные приближенные значения неизвестных $x_1^{(k+1)}$, $x_2^{(k+1)}$, ..., $x_n^{(k+1)}$ не будут мало отличаться от предыдущих значений $x_1^{(k)}$, $x_2^{(k)}$, ..., $x_n^{(k)}$.

Этот процесс является итерационным методом решения систем линейных уравнений. На каждой итерации, т.е. при нахождении очередного приближения, решаются системы уравнений вида (3.12) с матрицей исходной системы (3.3) при разных правых частях. Это позволяет строить экономичные алгоритмы.

Решение систем линейных уравнений с помощью не только рассмотренного метода, но и других итерационных методов, а также решение итерационными методами уравнений другого вида и их систем осуществляется, как показано на рисунке 12.

Вводятся исходные данные, например, коэффициенты уравнений и допустимое значение погрешности. Задаются начальные приближения значений неизвестных (вектор-столбец $x^{(0)}$). Их находят путем решения системы уравнений с помощью прямого метода или вводят в компьютер заданными. Организуется циклический вычислительный процесс, каждый цикл которого представляет собой одну итерацию – переход от предыдущего приближения к последующему. Если оказывается, что с увеличением числа итераций приближенное решение стремится к точному: $\lim\limits_{k \to 1} x^{(k)} = x$, то итерационный метод называется сходящимся.

При малом (с заданной допустимой погрешностью) изменении x на двух последовательных итерациях, т.е. при малом отличии $x^{(k)}$ от $x^{(k-1)}$, процесс прекращается, и значения неизвестных, полученные на последней итерации, выводятся на дисплей.

Рисунок 12 – Решение системы уравнений методом итераций

Определить малость отличия x на двух последовательных итерациях возможно решением одного из трех неравенств (если задана допустимая погрешность $\varepsilon > 0$):

$$\left| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right)^2} < \varepsilon, \qquad (3.13)$$

$$\max_{1 \le i \le n} \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| < \varepsilon, \qquad (3.14)$$

$$\max_{1\le i\le n}\left|\frac{x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}}{x_i^{(k)}}\right| < \varepsilon . \qquad (3.15)$$

Если неравенство выполнятся, то итерационный процесс окончен.

3.4.2. Метод простой итерации

Этот метод широко используется для численного решения уравнений и их систем, а также различных видов и классов дифференциальных и интегральных уравнений.

Пусть дана система (3.1) из n уравнений с n неизвестными, где коэффициенты a_{ij} при неизвестных и свободные члены $b_i\,(i, j = 1, 2, ..., n)$ являются действительными числами.

В матричной форме система имеет вид (3.3).

Вектор $x = (x_1, ..., x_n) \in R^n$ называется решением системы (3.1), если при подстановке его координат в систему каждое уравнение превращается в верное числовое равенство, т.е. определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Чтобы построить итерационный процесс приближения к точному решению, систему (3.1) предварительно нужно привести к эквивалентной системе[2] вида

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + ... + c_{1n}x_n + d_1 \\ x_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + ... + c_{2n}x_n + d_2 \\ .... \\ x_n = c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + ... + c_{nn}x_n + d_n \end{cases}, \qquad (3.16)$$

В матричной форме

$$\overline{x} = c \bullet \overline{x} + \overline{d} , \qquad (3.17)$$

где

[2] Системы уравнений эквивалентны, если они имеют одинаковые множества решений.

$$c=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix},\ x=(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n),$$

$$d=(d_1,\ d_2,\ \dots,\ d_n).$$

Для того, чтобы итерационный процесс был сходящимся, т.е. приближенное решение стремилось к точному, достаточно выполнения одного из следующих условий:

а) $q=\max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}\left|c_{ij}\right|<1$, (3.18)

т.е. максимальная из сумм модулей коэффициентов при неизвестных в правой части системы (3.16), взятых по строкам, должна быть меньше единицы;

б) $q=\max\limits_{1\le j\le n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left|a_{ij}\right|<1$, (3.19)

т.е. максимальная из сумм модулей коэффициентов при неизвестных в правой части системы (3.16), взятых по столбцам, должна быть меньше единицы;

в) $q=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\ \sum\limits_{j=1}^{n}c_{ij}^2}<1$, (3.20)

т.е. сумма квадратов всех коэффициентов при неизвестных в правой части системы (3.16) должна быть меньше единицы.

Достаточное условие сходимости итерационной последовательности для системы (3.16) можно выразить через коэффициенты при неизвестных исходной системы (3.1): итерационный процесс сходится, если выполнено хотя бы одно из неравенств

$$\left|a_{ii}\right|>\sum_{j\ne i}\left|a_{ij}\right|\ \ (i=1,\ \dots,\ n)\text{или}\ \left|a_{jj}\right|>\sum_{i\ne j}\left|a_{ij}\right|\ \ (j=1,\ \dots,\ n).$$

Рассмотрим на примере два способа преобразования системы (3.1) к виду (3.17).

Рекуррентная формула вычисления приближений будет иметь вид

$$x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + d. \qquad (3.21)$$

или в координатной форме

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = c_{11}x^{(k)} + c_{12}x_2^{(k)} + \ldots + c_{1n}x_n^{(k)} + d_1, \\ x_2^{(k+1)} = c_{21}x^{(k)} + c_{22}x_2^{(k)} + \ldots + c_{2n}x_n^{(k)} + d_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(k+1)} = c_{n1}x^{(k)} + c_{n2}x_2^{(k)} + \ldots + c_{nn}x_n^{(k)} + d_n; \end{cases} \qquad (3.22)$$

$$(k = 0, 1, 2\ldots).$$

Таким образом, взяв какой либо вектор $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ и подставив его координаты в правую часть системы (3.16), получим новый вектор $F\left(x^{(0)}\right) = C \cdot x^{(0)} + d$, который примем за $x^{(1)} = \left(x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}\right)$.

Согласно (3.22)

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = c_{11}x_1^{(0)} + c_{12}x_2^{(0)} + \ldots + c_{1n}x_n^{(0)} + d_1, \\ x_2^{(1)} = c_{21}x_1^{(0)} + c_{22}x_2^{(0)} + \ldots + c_{2n}x_n^{(0)} + d_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(1)} = c_{n1}x_1^{(0)} + c_{n2}x_2^{(0)} + \ldots + c_{nn}x_n^{(0)} + d_n. \end{cases}$$

Затем вычислением $F\left(x^{(1)}\right)$ находим вектор $\overline{x}^{(2)} = C\overline{x}^{(1)} + \overline{d}$.

Решая дальше по аналогичной схеме, получаем итерационную последовательность для системы (3.16).

Абсолютная погрешность находится по формуле

$$\Delta x^{(k)} = \frac{q}{1-q} \max_i \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right|. \qquad (3.23)$$

Пример 3.3. Дана система общего вида:

$$\begin{cases} 1{,}1x_1 - 0{,}3x_2 + 0{,}2x_3 = 2, \\ 0{,}1x_1 - 0{,}1x_2 - 1{,}2x_3 = 0, \\ 0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 - 0{,}1x_3 = 3. \end{cases}$$

Способ 1. Для выполнения условия сходимости итерационного процесса необходимо, чтобы диагональные коэффициенты не равнялись нулю и были больше по модулю остальных коэффициентов соответствующих уравнений. Для этого поменяем местами второе и третье уравнения:

$$\begin{cases} 1,1x_1 - 0,3x_2 + 0,2x_3 = 2, \\ 0,4x_1 + 0,8x_2 - 0,1x_3 = 3, \\ 0,1x_1 - 0,1x_2 - 1,2x_3 = 0. \end{cases}$$

и поделим уравнения на соответствующие диагональные коэффициенты (они не равны нулю) и решим каждое из уравнений относительно полученных на диагонали неизвестных с коэффициентом 1. Получим приведенную систему

$$\begin{cases} x_1 = 0,3x_2 - 0,2x_3 + 1,8, \\ x_2 = -0,5x_1 + 0,1x_3 + 3,7, \\ x_3 = 0,1x_1 - 0,1x_2. \end{cases}$$

Составляем матрицу и вектор-строку

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0,3 & -0,2 \\ -0,5 & 0 & 0,1 \\ 0,1 & -0,1 & 0 \end{pmatrix}, \; d = \begin{pmatrix} 1,8 & 3,7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверим условие сходимости итерационного процесса:

$$q = \max_{1 \le i \le n}(0 + 0,3 + 0,2; \quad 0,5 + 0 + 0,1; \quad 0,1 + 0,1 + 0;) =$$

$$= \max_{1 \le i \le n}(0,5; \quad 0,6; \quad 0,2) = 0,6 < 1$$

Способ 2. Вычленим единицу из каждого диагонального коэффициента и выразим полученные таким образом x_1, x_2, x_3 из 1, 2, и 3-го уравнений соответственно.

Тогда

$$x^{(1)} = C \cdot x^{(0)} + d$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0,3 & -0,2 \\ -0,5 & 0 & 0,1 \\ 0,1 & -0,1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,8 \\ 3,7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,9 \\ 3,3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Оценим погрешность

$$\Delta x^{(1)} = \frac{q}{1-q} \max\left|x^{(1)} - x^{(0)}\right| = \frac{0,6}{1-0,6} \max\begin{vmatrix} 1,9 - 1 \\ 3,3 - 1 \\ 0 - 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{0,6}{0,4} \cdot 2,3 = 34,5 > \varepsilon = 0,5$$

Находим

$$x^{(2)} = C \cdot x^{(1)} + d;$$

$$x^{(2)} = \begin{vmatrix} 2{,}91 \\ 2{,}8 \\ -0{,}19 \end{vmatrix}, \quad \Delta x^{(2)} = \frac{0{,}6}{0{,}4} \cdot 1{,}01 = 15 > \varepsilon = 0{,}5;$$

$$x^{(3)} = \begin{vmatrix} 2{,}678 \\ 2{,}226 \\ 0{,}011 \end{vmatrix}, \quad \Delta x^{(3)} = \frac{0{,}3}{0{,}2} \cdot 0{,}51 = 0{,}76 > \varepsilon = 0{,}5;$$

$$x^{(4)} = \begin{vmatrix} 2{,}53 \\ 2{,}47 \\ 0{,}009 \end{vmatrix}, \quad \Delta x^{(4)} = \frac{0{,}3}{0{,}2} \cdot 0{,}25 = 0{,}36 < \varepsilon = 0{,}5.$$

Следовательно, необходимая точность достигнута.

Ответ: $x_1 = 2{,}53$; $x_2 = 2{,}47$; $x_3 = 0{,}009$.

3.4.3. Практическая схема решения систем линейных алгебраических уравнений методом простой итерации

Для применения метода итераций система уравнений (3.1) должна быть сначала приведена к виду (3.16)

Затем необходимо проверить условие сходимости итерационного процесса с помощью выполнения хотя бы одного из достаточных условий (3.18)-(3.20).

Для обеспечения условий сходимости нужно получить систему вида (3.16) из системы (3.1) так, чтобы коэффициенты при неизвестных в правой части системы были меньше единицы. Для этого исходную систему вида (3.1) с помощью равносильных преобразований привести к системе, у которой абсолютные величины коэффициентов, стоящих на главной диагонали, больше абсолютных величин каждого из других коэффициентов при неизвестных в соответствующих уравнениях (такая система называется системой с преобладающими диагональными коэффициентами).

Если теперь разделить все уравнения на соответствующие диагональные коэффициенты и выразить из каждого уравнения неизвестное с коэффициентом, равным единице, получим систему (3.16), у которой все $\left|a_{ij} < 1\right|$.

После установления сходимости итерационного процесса следует выполнить вычисления.

За начальное приближение обычно берется столбец свободных членов системы (3.16).

Итерационный процесс прекращается, если выполняется одно из трех неравенств (3.13)-(3.15).

3.4.4. Метод Гаусса-Зейделя

Метод Гаусса-Зейделя – один из самых распространенных в математике. Он отличается простотой, легкостью программирования и обеспечивает более быструю сходимость, чем метод простой итерации.

Рассмотрим метод на примере системы с тремя уравнениями:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3. \end{cases} \tag{3.24}$$

Будем считать, что диагональные элементы a_{11}, a_{22}, a_{33} не равны нулю (в противном случае можно переставить уравнения).

Выразим неизвестные x_1, x_2, x_3 из 1, 2, 3-гоуравнений системы (3.24).

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3\right), \tag{3.25}$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3\right), \tag{3.26}$$

$$x_3 = \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2\right). \tag{3.27}$$

Зададим некоторые начальные(нулевые) приближения значений неизвестных: $x_1 = x_1^{(0)}$; $x_2 = x_2^{(0)}$; $x_3 = x_3^{(0)}$.

Подставив эти значения в (3.25), получим новое (первое) приближение для x_1:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)}\right).$$

Подставляя $x_1^{(1)}$, $x_3^{(0)}$ в (3.26), находим первое приближение для x_2:

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(1)} - a_{23}x_3^{(0)}\right).$$

Подставляя $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$ в (3.27) находим первое приближение для x_3:

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(1)} - a_{32}x_2^{(1)}\right).$$

Первая итерация решения системы закончена.

Аналогично можно найти вторые приближения к решению: $x_1 = x_1^{(2)}$; $x_2 = x_2^{(2)}$; $x_3 = x_3^{(3)}$ и т.д.

k-е приближение будет таким:

$$x_1^{(k)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k-1)}\right),$$

$$x_2^{(k)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k-1)}\right),$$

$$x_3^{(k)} = \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k-1)}\right)$$

Итерационный процесс закончится при $x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} < \varepsilon$, где ε - заданная погрешность; *k* –номер итерации.

Пример 3.4. Решить систему уравнений методом Гаусса-Зейделя. с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

$$\begin{cases} 5{,}6x_1 + 2{,}7x_2 - 1{,}7x_3 = 1{,}9, \\ 3{,}4x_1 - 3{,}6x_2 - 6{,}7x_3 = -2{,}4, \\ 0{,}8x_1 + 1{,}3x_2 + 3{,}7x_3 = 1{,}2. \end{cases}$$

Сначала выразим неизвестные x_1, x_2, x_3 из 1, 2, 3-го уравнений:

$$x_1 = \frac{1}{5{,}6}(1{,}9 - 2{,}7x_2 + 1{,}7x_3),$$

$$x_2 = \frac{1}{3{,}6}(2{,}4 + 3{,}4x_1 - 6{,}7x_3),$$

$$x_3 = \frac{1}{3{,}7}(1{,}2 - 0{,}8x_1 - 1{,}3x_2).$$

За начальное приближение примем $x_1^{(0)} = 0;\ x_2^{(0)} = 0;\ x_3^{(0)} = 0$.

Тогда первое приближение будет таким:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{5{,}6}(1{,}9 - 0 + 0) = 0{,}339,$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{3{,}6}(2{,}4 + 3{,}4 \cdot 0{,}339) = 0{,}987,$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{3{,}7}(1{,}2 - 0{,}8 \cdot 0{,}339 - 1{,}3 \cdot 0{,}987) = -0{,}096.$$

Второе приближение равно

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{5{,}6}(1{,}9 - 2{,}7 \cdot 0{,}987 - 1{,}7 \cdot 0{,}096) = -0{,}166,$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{3{,}6}(2{,}4 - 3{,}4 \cdot 0{,}166 + 6{,}7 \cdot 0{,}096) = 0{,}689,$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{3{,}7}(1{,}2 + 0{,}8 \cdot 0{,}166 - 1{,}3 \cdot 0{,}689) = 0{,}118.$$

Третье приближение выглядит так:

$$x_1^{(3)} = \frac{1}{5{,}6}(1{,}9 - 2{,}7 \cdot 0{,}689 + 1{,}7 \cdot 0{,}118) = 0{,}043,$$

$$x_2^{(3)} = \frac{1}{3{,}6}(2{,}4 + 3{,}4 \cdot 0{,}043 - 6{,}7 \cdot 0{,}118) = 0{,}488,$$

$$x_3^{(3)} = \frac{1}{3{,}7}(1{,}2 - 0{,}8 \cdot 0{,}043 - 1{,}3 \cdot 0{,}488) = 0{,}144.$$

И так далее.

Итерационный процесс закончится при выполнении условия (3.4) при заданной погрешности $\varepsilon = 10^{-3}$.

В данном примере количество итераций достаточно большое. Итерационный процесс проходит медленно. Для более быстрой сходимости необходимо, чтобы модули диагональных коэффициентов для каждого уравнения были не меньше сумм модулей всех остальных коэффициентов, т.е

$$\left|a_{ii}\right| \geq \sum_{j \neq i} \left|a_{ij}\right|, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n\ .$$

Хотя бы для одного уравнения неравенство должно выполняться строго

3.5. Компьютерные технологии решения систем уравнений

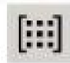
Средства Mathcad позволяют решать системы уравнений различными методами.

Для этого система Mathcad поддерживает ряд операторов и функций для работы с векторами и матрицами.

3.5.1. Матричное решение систем уравнений

Систему линейных уравнений в Mathcad можно решить используя матричную форму записи $A \cdot x = b$.

Решение будет $x = A^{-1} \cdot b$, где A^{-1} – обратная матрица (существует только для квадратной матрицы).

Ввести матрицу и вектор-столбец свободных членов можно с помощью палитры матричных операций (нажать кнопку  панели инструментов). В диалоговом окне *Insert Matrix* указать количество строк и столбцов матрицы.

Затем *OK*. В появившемся шаблоне заполнить поля ввода. Затем ввести вычислительную формулу. Получить решение.

Пример 3.5.

Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 0.34x_2 - 0.23x_3 + 0.06x_4 = 1.42; \\ -0.11x_1 + 1.23x_2 + 0.18x_3 - 0.36x_4 = -0.66; \\ -0.23x_1 + 0.12x_2 + 0.84x_3 + 0.35x_4 = 1.08; \\ -0.12x_1 - 0.12x_2 + 0.47x_3 + 0.82x_4 = -1.72. \end{cases}$$

Матрица системы

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -0.34 & -0.23 & 0.06 \\ -0.11 & 1.23 & 0.18 & -0.36 \\ -0.23 & 0.12 & 0.84 & 0.35 \\ -0.12 & -0.12 & 0.47 & 0.82 \end{pmatrix}.$$

Вектор-столбец свободных членов

$$b := \begin{pmatrix} 1.42 \\ -0.66 \\ 1.08 \\ -1.72 \end{pmatrix}.$$

Решение

$$x := A^{-1}b$$

$$x = \begin{pmatrix} 1.831 \\ -2.245 \\ 3.95 \\ -4.423 \end{pmatrix}.$$

Проверка

$$A \cdot x - b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3.5.2. Решение систем линейных уравнений методом Крамера (метод определителей)

В Mathcad элементы матриц и векторов нумеруются с 0. Чтобы нумерация столбцов и строк матриц начиналась с 1 необходимо выполнить команду ORIGIN := 1 (набрать с клавиатуры).

Затем ввести матрицу коэффициентов и вектор правой части, нажав кнопку в палитре матричных операций.

Вычислить определитель матрицы системы, нажав на кнопку |×|. Аналогично вычислить определители для явно заданных матриц ($\Delta 1$, $\Delta 2$, $\Delta 3$, $\Delta 4$).

Пример 3.6.

Фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий решение линейной системы:

$$\begin{cases} 0{,}02x_1 + 0{,}16x_2 + 0{,}3x_3 + 0{,}15x_4 = 0{,}662 \\ -0{,}06x_1 + 0{,}067x_2 + 0{,}027x_3 + 0{,}1x_4 = 0{,}029 \\ 0{,}45x_1 + 0{,}133x_2 + 0{,}08x_3 + 0{,}139x_4 = 2{,}312 \\ 0{,}011x_1 + 0{,}25x_2 - 0{,}25x_3 + 0{,}1x_4 = 0{,}379 \end{cases}$$

$ORIGIN := 1$

Введем матрицу коэффициентов и вектор-столбец свободных членов

$$A := \begin{pmatrix} 0{,}02 & 0{,}16 & 0{,}03 & 0{,}15 \\ -0{,}06 & 0{,}067 & 0{,}027 & 0{,}1 \\ 0{,}45 & 0{,}133 & 0{,}08 & 0{,}139 \\ 0{,}011 & 0{,}25 & -0{,}25 & 0{,}1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 0{,}662 \\ 0{,}029 \\ 2{,}312 \\ 0{,}379 \end{pmatrix}$$

Вычислим определитель

$$\Delta := |A| \qquad \Delta = 9{,}786 \cdot 10^{-4}$$

Определитель отличен от нуля, следовательно, система имеет единственное решение.

Вычислим определители матриц, полученных заменой соответствующего столбца исходной матрицы столбцом свободных членов:

$$\Delta1 := \left|\begin{pmatrix} 0{,}662 & 0{,}16 & 0{,}03 & 0{,}15 \\ 0{,}029 & 0{,}067 & 0{,}027 & 0{,}1 \\ 2{,}312 & 0{,}133 & 0{,}08 & 0{,}139 \\ 0{,}379 & 0{,}25 & -0{,}25 & 0{,}1 \end{pmatrix}\right| \qquad \Delta1 = 3{,}819 \cdot 10^{-3}$$

$$\Delta2 := \left|\begin{pmatrix} 0{,}02 & 0{,}662 & 0{,}03 & 0{,}15 \\ -0{,}06 & 0{,}029 & 0{,}027 & 0{,}1 \\ 0{,}45 & 2{,}312 & 0{,}08 & 0{,}139 \\ 0{,}011 & 0{,}379 & -0{,}25 & 0{,}1 \end{pmatrix}\right| \qquad \Delta2 = 2{,}899 \cdot 10^{-3}$$

$$\Delta3 := \begin{vmatrix} 0{,}02 & 0{,}16 & 0{,}662 & 0{,}15 \\ -0{,}06 & 0{,}067 & 0{,}029 & 0{,}1 \\ 0{,}45 & 0{,}133 & 2{,}312 & 0{,}139 \\ 0{,}011 & 0{,}25 & 0{,}379 & 0{,}1 \end{vmatrix} \qquad \Delta3 = 1{,}657 \cdot 10^{-3}$$

$$\Delta4 := \begin{vmatrix} 0{,}02 & 0{,}16 & 0{,}03 & 0{,}662 \\ -0{,}06 & 0{,}067 & 0{,}027 & 0{,}029 \\ 0{,}45 & 0{,}133 & 0{,}08 & 2{,}312 \\ 0{,}011 & 0{,}25 & -0{,}25 & 0{,}379 \end{vmatrix} \qquad \Delta4 = 1{,}857 \cdot 10^{-4}$$

Находим корни системы уравнений.

$$x1 := \frac{\Delta1}{\Delta} \quad x1 = 3{,}903 \qquad x2 := \frac{\Delta2}{\Delta} \quad x2 = 2{,}962$$

$$x3 := \frac{\Delta3}{\Delta} \quad x3 = 1{,}694 \qquad x4 := \frac{\Delta4}{\Delta} \quad x4 = 0{,}19$$

3.5.3. Метод Гаусса

Решение системы уравнений в Mathcad методом Гаусса состоит из следующих операций:

- присвоить ORIGIN := 1;
- ввести матрицу системы и вектор-столбец свободных членов;
- сформировать расширенную матрицу (её формирует функция *augment* – она добавляет к столбцам матрицы системы уравнений справа вектор-столбец свободных членов);
- привести расширенную матрицу системы к ступенчатому виду с единичным базисным минором с помощью встроенной функции *rref*, которая выполняет элементарные операции со строками расширенной матрицы системы. Собственно она выполняет прямой и обратный ход метода Гаусса;
- сформировать столбец решения системы. Его формирует функция *submatrix*, выделяя последний столбец ступенчатой формы расширенной матрицы.

Все встроенные функции можно набрать с клавиатуры или щелкнуть кнопку (Вставить функцию) панели инструментов

Пример 3.7.

Решить систему уравнений методом Гаусса.

$\mathrm{ORIGIN} := 1$

Введем матрицу системы А и матрицу-столбец свободных членов:

$$A := \begin{pmatrix} 2.18 & 1.72 & -0.93 \\ 1.42 & 0.18 & 1.12 \\ 0.92 & -1.14 & -2.53 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 1.06 \\ 2.07 \\ -0.45 \end{pmatrix}$$

Сформируем расширенную матрицу системы

$A_r := augment(A, b)$.

$$A_r = \begin{vmatrix} 2.18 & 1.72 & -0.93 & 1.06 \\ 1.42 & 0.18 & 1.12 & 2.07 \\ 0.92 & -1.14 & -2.53 & -0.45 \end{vmatrix}.$$

Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$A_g := rref(A_r).$$

A_g - имя результата (ступенчатой формы матрицы A_r).

$$A_g := \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 0.976 \\ 0 & 1 & 0 & -0.268 \\ 0 & 0 & 1 & 0.653 \end{vmatrix}.$$

Сформируем вектор-столбец решения системы

$$x := submatrix(A_g, 1, 3, 4, 4).$$

$$x = \begin{vmatrix} 0.976 \\ -0.268 \\ 0.653 \end{vmatrix}.$$

Проверка: $A \cdot x - b = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$.

3.5.4. Решение системы уравнений при помощи встроенной функции lsolve

В функции *lsolve* запрограммирован численный метод, основанный на алгоритме последовательных исключений Гаусса. Он состоит в преобразовании матрицы коэффициентов линейной системы к треугольному виду. Результат, полученный методом Гаусса, является точным. Функция *lsolve* не нуждается в задании начальных приближений вектору *x*.

Функция *lsolve* имеет вид:

lsolve (A, b),

где *A* – матрица коэффициентов системы линейных уравнений; *b* – вектор-столбец правых частей системы уравнений.

Функцию *lsolve* можно найти: панель инструментов, кнопка .

Пример 3.8.

Матрица системы уравнений

$$A := \begin{pmatrix} 2.18 & 1.78 & -0.93 \\ 1.42 & 0.18 & 1.12 \\ 0.92 & -1.14 & -2.53 \end{pmatrix}$$

Вектор-столбец свободных членов

$$b := \begin{pmatrix} 1.06 \\ 2.07 \\ -0.45 \end{pmatrix}$$

Решение

$$x := \mathrm{lsolve}(A, b)$$

$$x = \begin{pmatrix} 0.977 \\ -0.261 \\ 0.651 \end{pmatrix}$$

Норма невязки

$$\left| A \cdot \mathrm{lsolve}(A, b) - b \right| = 0$$

Встроенную функцию *lsolve* можно применять при символьном решении. в этом случае допускается использовать параметры (т.е. имена переменных, которым не присвоены никакие значения),

$$\text{lsolve}(A, b) \rightarrow \begin{pmatrix} .97737853413846496866 \\ -.26135748317248167750 \\ .65104181115573789862 \end{pmatrix},$$

($\rightarrow$ – знак символьного решения).

3.5.5. Решение систем уравнений методом простой итерации

Рассмотрим решение системы уравнений на примере.

Пример 3.9.

Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3{,}7x_1 + 3{,}1x_2 + 4{,}0x_3 = 5{,}0; \\ 4{,}1x_1 + 4{,}5x_2 - 4{,}8x_3 = 4{,}9; \\ -2{,}1x_1 - 3{,}7x_2 + 1{,}8x_3 = 2{,}7. \end{cases}$$

Порядок выполнения задания:

1). Преобразовать исходную систему $A \cdot x = b$ к эквивалентной системе вида $x = C \cdot x + d$;

2). Вести матрицы C и d;

3). Проверить достаточное условие сходимости;

4). Определить нулевое (начальное) приближение решения;

5). Задать количество итераций;

6). Ввести формулу вычисления последовательных приближений решения и вычислить их;

7). Вывести на экран матрицу приближенных решений;

8). Вычислить погрешность найденного приближения.

Преобразуем заданную систему, т.е. приведем ее к эквивалентной системе с преобладающими диагональными коэффициентами.

Для этого выполним элементарные операции с коэффициентами системы. Это удобно делать в матричном виде.

Введем каждое уравнение системы как вектор-строку

$a := (3.7 \quad 3.1 \quad 4.0 \quad 5.0)$

$b := (4.1 \quad 4.5 \quad -4.8 \quad 4.9)$

$c := (-2.1 \quad -3.7 \quad 1.8 \quad 2.7)$

Выполним со строками линейные операции

$d := a + b + c$

$d = (5.7\ \ 3.9\ \ 1\ \ 12.6)$

$e := b + 2c$

$e = (-0.1\ \ -2.9\ \ -1.2\ \ 10.3)$

$p := b - a$

$p = (0.4\ \ 1.4\ \ -8.8\ \ -0.1)$

Получили систему с преобладающими диагональными коэффициентами

$$\begin{cases} 5.7x_1 + 3.9x_2 + x_3 = 12.6 \\ -0.1x_1 - 2.9x_2 - 1.2x_3 = 10.3 \\ 0.4x_1 + 1.4x_2 - 8.8x_3 = -0.1 \end{cases}$$

Поделим каждое уравнение на свой диагональный элемент

$$\frac{d}{5.7} = (1\ \ 0.684\ \ 0.175\ \ 2.211)$$

$$\frac{e}{-2.9} = (0.034\ \ 1\ \ 0.414\ \ -3.552)$$

$$\frac{p}{-8.8} = (-0.045\ \ -0.159\ \ 1\ \ 0.011)$$

Выразим из каждого уравнения диагональное неизвестное

$x_1 = -0.684x_2 - 0.175x_3 = 2.211;$

$x_2 = -0.034x_1 - 0.414x_3 - 3.552;$

$x_3 = 0.045x_1 + 0.159x_2 + 0.011.$

Составим матрицу C преобразованной системы и введем её и вектор-столбец d

$$C := \begin{pmatrix} 0 & -0.684 & -0.175 \\ -0.034 & 0 & -0.414 \\ 0.045 & 0.159 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d := \begin{pmatrix} 2.211 \\ -3.552 \\ 0.011 \end{pmatrix}$$

Проверим условие сходимости, т.е. найдем нормы матрицы C.

norm1(C) = 0.843

norm2(C) = 0.732

norme(C) = 0.836

normi(C) = 0.859

Зададим начальное приближение решения (знак < > находится в панели *Matrix*, кнопка ).

$x^{\langle 0 \rangle} := d$

Зададим количество итераций

$k := 1..10$ (знак диапазона .. находится в панели *Matrix*, кнопка 

Введем итерационную формулу для вычисления приближений решения

$x^{\langle k \rangle} := C \cdot x^{\langle k-1 \rangle} + d$

Найдем неизвестные

$x =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	2.211	4.639	4.775	4.682	4.709	4.715	4.713	4.713	4.713	4.713
1	-3.552	-3.632	-3.522	-3.566	-3.573	-3.569	-3.569	-3.57	-3.57	-3.57
2	0.011	-0.454	-0.358	-0.334	-0.345	-0.345	-0.344	-0.344	-0.345	-0.344

Вычислим погрешность

$$\varepsilon := \frac{\left| x^{\langle 10 \rangle} - x^{\langle 9 \rangle} \right|}{\left| x^{\langle 9 \rangle} \right|}$$

$\varepsilon = 2.164 \times 10^{-6}$

3.5.6. Решение систем уравнений при помощи блока Given/Find

Для численного решения систем в Mathcad применяется специальный вычислительный блок *Given/Find (Дано/Найти)*.

Функция *Find* позволяет решать системы линейных и нелинейных уравнений методом итераций.

Блок *Given/Find* состоит из трех частей:

- *Given* – ключевое слово (набирается с клавиатуры);
- систем уравнений, записанная логическими операторами в виде равенств (возможно неравенств). Логические операторы вставляются: меню *Вид→панель инструментов→Boolean* (Булевы операторы).

$Find(x_1, x_2, x_3, x_4)$ – встроенная функция для решения системы уравнений.

Технология решения:

▪ задать начальные приближения для всех неизвестных: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$;

▪ ввести с клавиатуры ключевое слово *Given*, которое указывает на то, что далее следует система уравнений;

▪ ввести систему уравнений (знак тождества вводится с помощью панели инструментов *Boolean* или сочетанием клавиш <Ctrl> + < = >) ;

▪ ввести функцию *Find* (найти, открыв панель встроенных функций кнопкой ;

▪ получить решение.

Пример 3.10.

$x_1 := 0$

$x_2 := 0$

$x_3 := 0$

Given

$3.7x_1 + 3.1x_2 + 4.0x_3 = 5.0$

$4.1x_1 + 4.5x_2 - 4.8x_3 = 4.9$

$-2.1x_1 - 3.7x_2 + 1.8x_3 = 2.7$

$$\mathrm{find}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 4.715 \\ -3.573 \\ -0.343 \end{pmatrix}$$

Пример 3.11.

$x_1 := 0$

$x_2 := 0$

Given

$2x_1(x_2)^2 - 4x_2 - 7.5 = 0$

$(x_1)^2 - 3x_1x_2 + 4.5 = 0$

$$\mathrm{Find}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -0.197 \\ -7.698 \end{pmatrix}$$

3.6. Лабораторная работа № 2

Тема: Решение систем линейных уравнений.

Задача. Решить различными способами по заданиям систему четырех линейных уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \end{cases}.$$

Задание 1. Решить систему уравнений методом Гаусса с выбором главного элемента. Для полученного решения найти вектор поправок.

Задание 2. Уточнить решение, полученное методом Гаусса, методом простой итерации с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

Задание 3. Найти решение заданной системы в Mathcad.

Сравнить полученные результаты.

Пояснения к выполнению лабораторной работы №2.

Для выполнения *задания 1* составляется расчетная таблица (см. пример 3.2). Вычисления ведутся с тремя знаками после запятой. В прямом и обратном ходе необходимо предусмотреть контроль. Полученное решение подставить в исходную систему и найти вектор невязок $\bar{\varepsilon}$.

Найти вектор поправок, решив систему с прежней матрицей *A* и новым вектором свободных членов $\bar{\varepsilon}$.

При выполнении *задания 2* методом простой итерации для проверки условия сходимости исходная система преобразуется к системе с преобладающими диагональными коэффициентами, а затем к нормальному виду (3.16).

Затем производится проверка достаточных условий сходимости (достаточного одного условия).

Получается значение *q*, которое используется для проверки окончания цикла (см. пример 3.3).

В *задании 3* решить систему уравнений:

▪ методом Гаусса в Mathcad(см. пример 3.7). Сравнить с результатом, полученным в задании 1;

▪ методом простой итерации в Mathcad (см. пример 3.9). Сравнить с результатом, полученном в задании 2;

▪ с помощью встроенных функций в Mathcad: lsolve (см. пример 3.8), блока Given/Find (см. пример 3.10, 3.11).

Варианты заданий систем линейных алгебраических уравнений

1.
$$\begin{cases} 0{,}68x_1 + 0{,}23x_2 - 0{,}41x_3 + 0{,}06x_4 = 0{,}67; \\ -0{,}18x_1 + 0{,}88x_2 + 0{,}33x_3 = -0{,}88; \\ -0{,}12x_1 - 0{,}32x_2 + 1{,}05x_3 - 0{,}67x_4 = -0{,}18; \\ -0{,}05x_1 + 0{,}11x_2 - 0{,}09x_3 + 1{,}12x_4 = 1{,}44. \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x_1 - 0{,}34x_2 - 0{,}23x_3 + 0{,}06x_4 = 1{,}42; \\ -0{,}11x_1 + 1{,}23x_2 + 0{,}18x_3 - 0{,}36x_4 = -0{,}66; \\ -0{,}23x_1 + 0{,}12x_2 + 0{,}84x_3 + 0{,}35x_4 = 1{,}08; \\ -0{,}12x_1 - 0{,}12x_2 + 0{,}47x_3 + 0{,}82x_4 = 1{,}72. \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} -0{,}77x_1 - 0{,}04x_2 + 0{,}21x_3 - 18x_4 = -1{,}24; \\ 0{,}25x_1 - 1{,}23x_2 + 0{,}16x_3 - 0{,}09x_4 = 1{,}12; \\ -0{,}21x_1 + 0{,}16x_2 + 0{,}80x_3 - 0{,}13x_4 = 2{,}56; \\ 0{,}15x_1 - 0{,}31x_2 + 0{,}06x_3 + 1{,}2x_4 = -0{,}77. \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} 0{,}93x_1 - 0{,}04x_2 + 0{,}21x_3 - 18x_4 = -1{,}24; \\ 0{,}25x_1 - 1{,}23x_2 + 0{,}07x_3 - 0{,}09x_4 = -0{,}84; \\ -0{,}21x_1 + 0{,}07x_2 + 0{,}80x_3 - 0{,}13x_4 = 2{,}56; \\ 0{,}15x_1 - 0{,}31x_2 + 0{,}06x_3 - 0{,}84x_4 = 0{,}93. \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} 1{,}3x_1 + 2{,}2x_2 - 1{,}4x_3 + 1{,}5x_4 = 10; \\ 2{,}2x_1 - 3{,}1x_2 + 4{,}2x_3 - 51x_4 = 60{,}1; \\ 6{,}2x_1 - 7{,}4x_2 + 8{,}5x_3 - 9{,}6x_4 = 1{,}1; \\ 1{,}2x_1 + 1{,}3x_2 + 1{,}4x_3 + 4{,}5x_4 = 1{,}6. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} 1{,}15x_1 + 0{,}62x_2 - 0{,}83x_3 + 0{,}92x_4 = 2{,}15; \\ 0{,}82x_1 - 0{,}54x_2 + 0{,}43x_3 - 0{,}25x_4 = 0{,}62; \\ 0{,}24x_1 + 1{,}15x_2 - 0{,}33x_3 + 1{,}42x_4 = -0{,}62; \\ 0{,}73x_1 - 0{,}81x_2 + 1{,}27x_3 - 0{,}67x_4 = 0{,}88. \end{cases}$$

7. $$\begin{cases} 2{,}2x_1 - 3{,}17x_2 + 1{,}24x_3 - 0{,}87x_4 = 0{,}46; \\ 1{,}5x_1 + 2{,}11x_2 - 0{,}45x_3 + 1{,}44x_4 = 1{,}50; \\ 0{,}86x_1 - 1{,}44x_2 + 0{,}62x_3 + 0{,}28x_4 = -0{,}12; \\ 0{,}48x_1 + 1{,}25x_2 - 0{,}63x_3 - 0{,}97x_4 = 0{,}35. \end{cases}$$

8. $$\begin{cases} 2{,}00x_1 + 0{,}05x_2 - 3{,}01x_3 - 0{,}11x_4 = 0{,}21; \\ 1{,}00x_1 - 2{,}00x_2 + 3{,}02x_3 + 0{,}05x_4 = 0{,}18; \\ 0{,}17x_1 + 0{,}99x_2 - 2{,}00x_3 - 0{,}17x_4 = 0{,}17; \\ 0{,}33x_1 - 0{,}07x_2 + 0{,}33x_3 + 2{,}00x_4 = 0{,}17. \end{cases}$$

9. $$\begin{cases} 2{,}34x_1 - 1{,}42x_2 - 0{,}54x_3 + 0{,}21x_4 = 0{,}66; \\ 1{,}44x_1 - 0{,}53x_2 + 1{,}43x_3 - 1{,}27x_4 = -1{,}44; \\ 0{,}63x_1 - 1{,}32x_2 - 0{,}65x_3 + 1{,}43x_4 = 0{,}94; \\ 0{,}56x_1 + 0{,}88x_2 - 0{,}67x_3 - 2{,}38x_4 = 0{,}73. \end{cases}$$

10. $$\begin{cases} 9{,}9x_1 - 0{,}2x_2 + 6{,}2x_3 - 0{,}8x_4 = -13; \\ -0{,}3x_1 + 7{,}2x_2 - 3{,}3x_3 + 0{,}7x_4 = 11; \\ -0{,}9x_1 - 1{,}3x_2 + 5{,}8x_3 - 2{,}8x_4 = 17; \\ -1{,}9x_1 + 2{,}3x_2 - 0{,}8x_3 + 6{,}3x_4 = 15. \end{cases}$$

4 РАСЧЕТ ФУНДАМЕНТНЫХ БАЛОК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Расчет фундаментных балок на линейно-деформируемом подпространстве методами строительной механики приводит к необходимости решения систем линейных алгебраических уравнений [6]. С повышением точности расчета строительных конструкций увеличивается количество уравнений, которые можно решить численными методами. Рассмотрим такой подход к расчету фундаментных балок (см. рисунок 13).

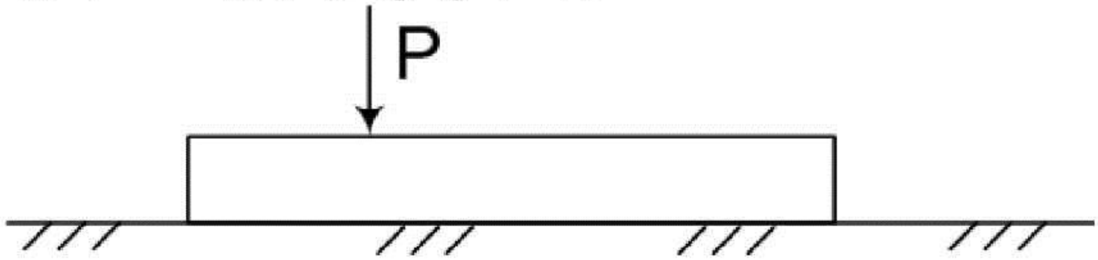


Рисунок 13

Разделим балку на равные участки длиной *c*. Количество участков связано с точностью расчета конструкций. Распределение реактивных сил в пределах каждого участка будем считать равномерным, а эпюра их будет соответственно ступенчатой (см. рисунок 14).

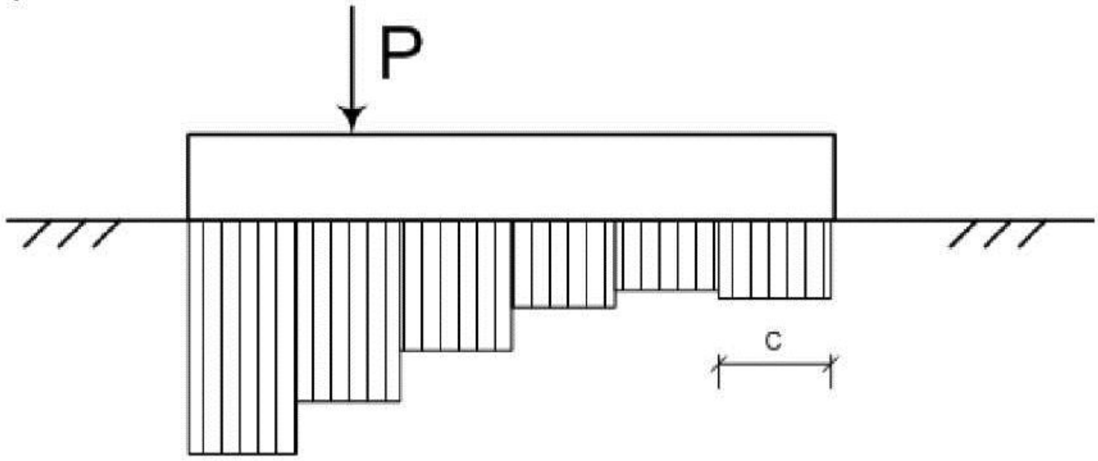


Рисунок 14

Далее рассматриваем равнодействующую эпюры реактивного отпора, находящуюся в пределах участка длиной c, полагая, что равнодействующая – это реакция возникающая в вертикальном опорном стержне, поставленном в середине рассматриваемого участка. Таким образом, переходим к расчету статически неопределимой балки, показанной на рисунке 15.

Горизонтальный стержень на схеме обеспечивает кинематическую устойчивость балки, ограничивая горизонтальную подвижность, и не учитывается в дальнейших расчетах. В соответствии с рекомендациями Б.И. Жемочкина [6] для расчета балки примем смешанный способ, основная схема которого показана на рисунке 15.

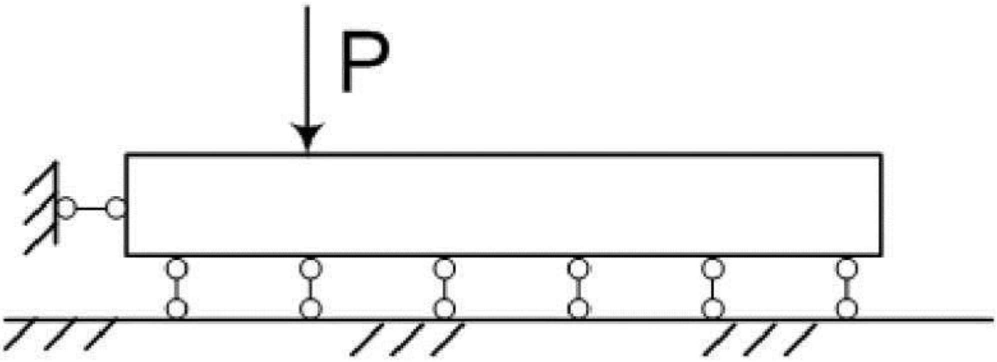


Рисунок 15

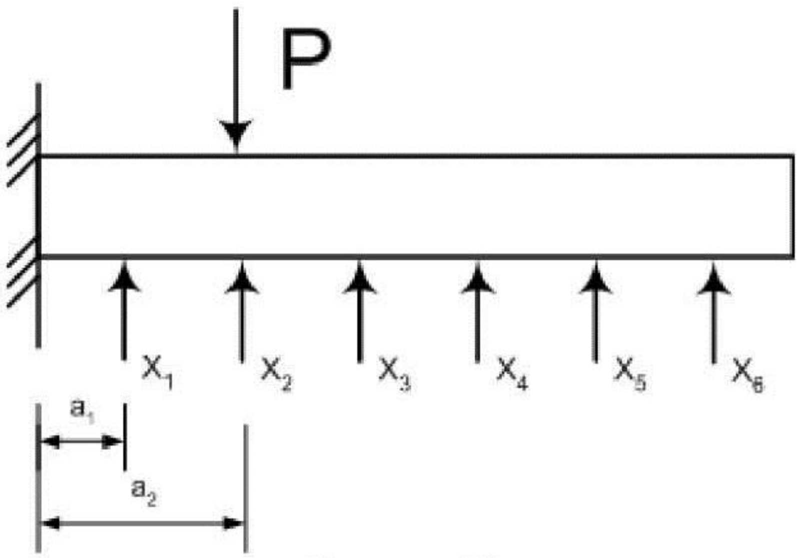


Рисунок 16

За неизвестные приняты реакции $x_1 - x_6$ в перерезанных опорных стержнях, осадка y_0 и угол поворота φ_0 в заделке левого конца балки. Система канонических уравнений будет выглядеть так:

$$\left.\begin{array}{l} x_1\delta_{11} + x_2\delta_{12} + x_3\delta_{13} + x_4\delta_{14} + x_5\delta_{15} + x_6\delta_{16} + y_0 + a_1\varphi_0 + \Delta_{1p} = 0 \\ . \\ . \\ . \\ x_1\delta_{61} + x_2\delta_{62} + x_3\delta_{63} + x_4\delta_{64} + x_5\delta_{65} + x_6\delta_{66} + y_0 + a_6\varphi_0 + \Delta_{6p} = 0 \end{array}\right\} \quad (4.1)$$

Количество неизвестных в системе на 2 больше количества уравнений и для того, чтобы сделать ее разрешимой вводим два уравнения статики:

$$\sum Y = 0$$

$$\sum_{i=1}^{6} X_i - P = 0, \quad (4.2)$$

$$\sum M_0 = 0$$

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4 + x_5 a_5 + x_6 a_6 - \sum M_p = d, \quad (4.3)$$

Перемещение δ_{ik} в какой либо точке i от действия единичной силы приложенной в точке k складывается из осадки основания y_{ik} и прогиба балки f_{ik} :

$$\delta_{ik} = y_{ik} + f_{ik}, \quad (4.4)$$

Для нахождения y_{ik} и f_{ik} разработаны таблицы, упрощающие расчет [6].

Пример:

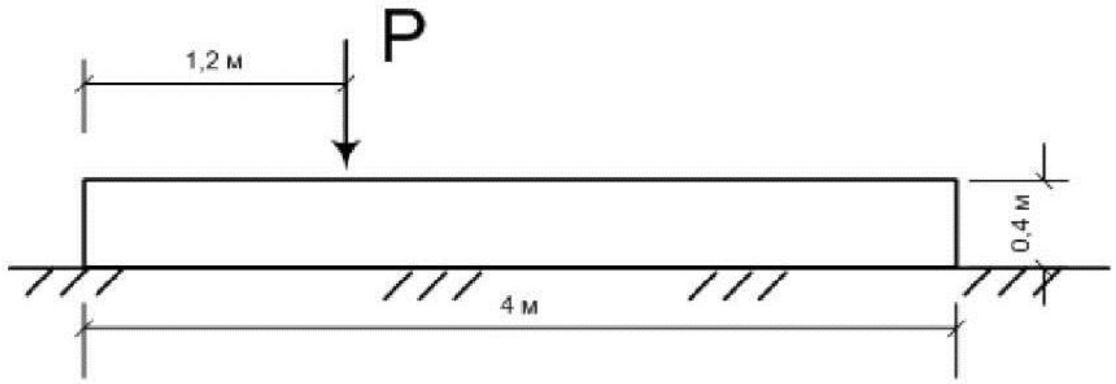


Рисунок 17

Рассмотрим железобетонную балку, работающую в условиях плоской деформации (см. рисунок 17). Модуль упругости материала балки $E = 2100 МПа$, модуль деформации грунтов основания

$E_0 = 20МПа$. Коэффициенты Пуассона для балки и основания соответственно равны $\mu = 0{,}2$ и $\mu = 0{,}3$. Для расчета разобьем балку на 5 участков длиной $c = \frac{4}{5} = 0{,}8\,м$.

Основную систему получим, перерезывая опорные стержни и вводя заделку левого конца балки (рисунок 18).

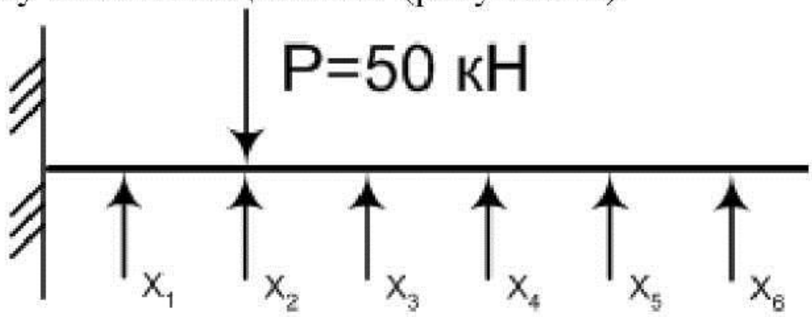


Рисунок 18

Момент инерции поперечного сечения балки будет равен

$$J = \frac{1 \cdot 0{,}4^3}{12} = 0{,}00533\,м^4.$$

Цилиндрическая жесткость равна

$$D = \frac{EJ}{1-\mu^2} = \frac{21000 \cdot 0{,}00533}{1-0{,}2^2} = 116{,}594\,МН \cdot м^2.$$

Коэффициент α для случая плоской деформации

$$\alpha = \frac{\pi E_0 c^3}{6D\left(1-\mu_0^2\right)} = \frac{3{,}14 \cdot 20 \cdot 0{,}8^3}{6 \cdot 116{,}594\left(1-0{,}3^2\right)} = 0{,}050508.$$

Вычисляем единичные перемещения с помощью таблиц [6].

$$\delta_{11} = 0 + 0{,}050508 \cdot 2 = 0{,}101016$$
$$\delta_{12} = -3{,}296 + 0{,}050508 \cdot 5 = -3{,}04346$$
$$\delta_{13} = -4{,}751 + 0{,}050508 \cdot 8 = -4{,}346936$$
$$\delta_{14} = -5{,}574 + 0{,}050508 \cdot 11 = -5{,}018412$$
$$\delta_{15} = -6{,}154 + 0{,}050508 \cdot 14 = -5{,}446888$$
$$\delta_{22} = 0 + 0{,}050508 \cdot 16 = 0{,}808128$$
$$\delta_{23} = -3{,}296 + 0{,}050508 \cdot 28 = -1{,}881776$$
$$\delta_{24} = -4{,}751 + 0{,}05050840 = -2{,}73068$$
$$\delta_{25} = -5{,}574 + 0{,}050508 \cdot 50 = -2{,}947584$$
$$\delta_{33} = 0 + 0{,}050508 \cdot 54 = 2{,}727432$$
$$\delta_{34} = -3{,}296 + 0{,}050508 \cdot 81 = 0{,}795148$$

$$\delta_{35} = -4{,}751 + 0{,}050508 \cdot 108 = 0{,}703864$$
$$\delta_{44} = 0 + 0{,}050508 \cdot 128 = 6{,}465024$$
$$\delta_{45} = -3{,}296 + 0{,}050508 \cdot 176 = 5{,}629408$$
$$\delta_{55} = 0 + 0{,}050508 \cdot 250 = 12{,}627$$
$$\Delta_{1p} = -0{,}050508 \cdot 5 = -0{,}25254$$
$$\Delta_{2p} = -0{,}050508 \cdot 16 = -0{,}808128$$
$$\Delta_{3p} = -0{,}050508 \cdot 28 = -1{,}414224$$
$$\Delta_{4p} = -0{,}050508 \cdot 40 = -2{,}02032$$
$$\Delta_{5p} = -0{,}050508 \cdot 52 = -2{,}626416$$

Составим таблицу коэффициентов системы канонических уравнений.

Таблица 4.1

Номера уравне-ний	1	2	3	4	5	6	7
X_1	0,101016	-3,04346	-4,346936	-5,018412	-5,446888	1	0,4
X_2	-3,04346	0,808128	-1.881776	-2,73068	-2,947584	1	1,2

X_3	-4,346936	-1,881776	2,727432	0,795148	0,703864	1	2,0
X_4	-5,018412	-2,73068	0,795148	6,465024	5,629408	1	2,8
X_5	-5,446888	-2,947584	0,703864	5,629408	12,627	1	3,6
y_0	1	1	1	1	1	0	0
φ_0	0,4	1,2	2,0	2,8	3,6	0	0
Свободные члены	-0,25254	-0,808128	-1,414224	-2,02032	-2,626416	-50	60

Решая систему из 7 уравнений с использованием программы Mathcad получаем

$$X_1 = 24{,}814443 кН,$$
$$X_2 = 10{,}165505 кН,$$

$$X_1 = 7{,}605179 кН,$$
$$X_1 = 5{,}035351 кН,$$
$$X_1 = 2{,}379520 кН,$$
$$y_0 = 99{,}470110 м,$$
$${}_0 = 1{,}259399.$$

Следует отметить, что значения y_0 отсчитываются от некоторого условного горизонта и в плоской задаче остаются неопределенными. Для определения интенсивности давления по подошве балки разделим найденные значения X на C:

$$P_1 = \frac{24{,}814443}{0{,}8} = 31{,}018053\ кПа,$$

$$P_2 = \frac{10{,}165505}{0{,}8} = 12{,}706881\ кПа,$$

$$P_3 = \frac{7{,}605179}{0{,}8} = 9{,}506473\ кПа,$$

$$P_4 = \frac{5{,}085351}{0{,}8} = 6{,}356688\ кПа,$$

$$P_5 = \frac{2{,}379520}{0{,}8} = 2{,}974400\ кПа.$$

Результаты расчета приведены на рисунке 19.

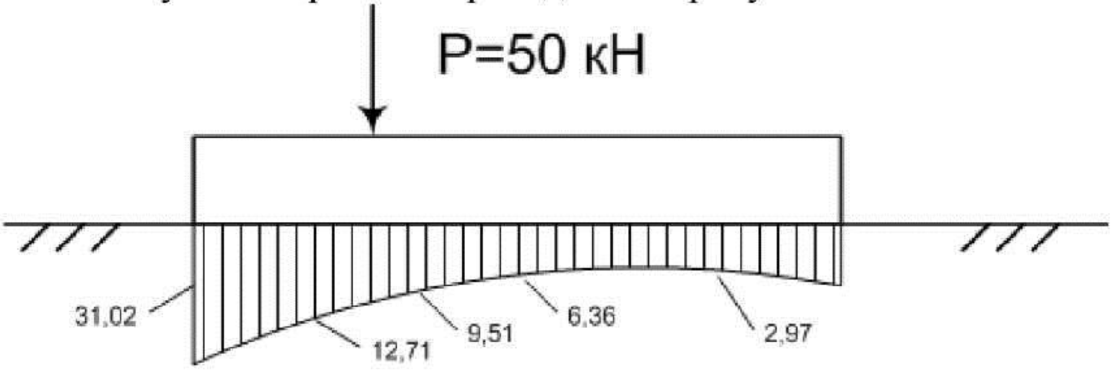


Рисунок 19

Располагая информацией (рисунок 19) о внешних нагрузках, действующих на фундаментную балку, можно в любом поперечном сечении найти внутренние усилия M и Q и подобрать армирование железобетонной балки в соответствии с нормами (СНиП 52-01-2003. Бетонные и железобетонные конструкции),.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Во введении к учебному пособию дано понятие математического моделирования как процесса исследования свойств объекта (конструкции) по его модели.

В целом в нем рассматриваются основные численные методы, которые используются в решении различных задач строительного профиля. К их числу относятся метод Гаусса, метод итераций, численные методы расчета нелинейных уравнений: метод хорд, метод Ньютона, метод простой итерации. Для решения широко применяется математический пакет Mathcad.

Цель учебного пособия – ознакомить студентов с вычислительными методами, как инструментом решения задач строительного профиля.

Расчет в матричной форме может применяться для любого вида конструкций.

Решение систем линейных алгебраических уравнений рассмотрено на примере расчета фундаментной балки на упругом основании. Необходимость в решении подобных задач постоянно возникает в ходе дипломного проектирования на кафедре строительных конструкций.

Содержание учебного пособия подкреплено значительным количеством примеров.

Некоторые, не вошедшие в пособие численные методы изложены в [2], [3], [4]. Для более глубокого изучения математического пакета Mathcad рекомендуется обратиться к источникам [5], [9], [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Апатенок Р.Ф. и др. Элементы линейной алгебры: Учеб. пособие для студентов инж.-техн. спец. вузов / А.М. Маркина, Н.В. Попова, В.Б. Хейнман. Минск: изд-во «Вышэйшая школа», 1977. – 256 с.: ил.

2. Масленников А.М. Расчет строительных конструкций численными методами: Учеб. пособие. – Л.: изд-во Ленингр.ун-та, 1987. – 224 с.

3. Турчак Л.И., Плотников П.В. Основы численных методов: Учебное пособие. –2-е изд., перераб. и доп. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 304 с. – ISBN-5-9221-0153-6.

4. Исаков В.Н. Элементы численных методов: Учеб. пособие для студ. высш.пед.учеб. заведений / Валерьян Николаевич Исаков. – М.: Издательский центр «Академия», 2003. – 192с. – ISBN-5-7695-0795-0.

5. Плис А.И., Сливина Н.А. Mathcad 2000. Математический практикум для экономистов и инженеров: Учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 656 с.: ил. – ISBN 5-279-02281-0.

6. Жемочкин Б.Н., Синицын А.П. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании. – М.: Госстройиздат, 1962. –240 с.

7. Киреев В.И. Численные методы в примерах и задачах: учеб. пособие/ В.И. Киреев, А.В. Пантелеев. – 3-е изд. стер. – М.: Высш. шк. 2008. – 480 с.: ил.

8. Половко А.М., Ганичев И.В. Mathcad для студента. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 336 с.: ил.

9. Очков В.Ф. Mathcad 12 для студентов и инженеров. - СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 464 с.: ил.

10. Дьяконов В. Mathcad 2000: учебный курс - СПб.: Питер, 2000. – 592 с.: ил.